Р.Х. МАЛЛИН

МАЙДОН НАЗАРИЯСИ

Р. Х. МАЛЛИН

МАЙДОН НАЗАРИЯСИ

Ўзбекистон ССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланмаси сифатида рухсат этган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1965

АВТОРДАН

Ҳозирги замон физика-математика ҳамда техника фанлари тараққиётида векторлар билан тензорлар назариясининг зарурлиги ва кўп соҳаларда бу назариянинг қудратли текшириш воситаси эканлиги шубҳасиздир.

Векторлар билан тензорлар назариясини кераклича билмасдан туриб, олий ўқув юртларида назарий механика, аэрогидродинамика, электрорадиотехника, электромагнит майдони физикаси, нисбийлик назарияси ва баъзи бошқа фанларни яхши ўрганиб бўлмайди.

Бу китоб авторнинг республикамиздаги давлат университетлари ва институтларида уттиз беш йил мобайнида назарий физика ва баъзи махсус курслардан ўқиб келган лекциялари асосида ёзилди.

Китоб тўртта бобдан иборат. Векторлар назариясига бағишланган биринчи ва иккинчи бобларда бевосита фазовий тасаввурларга асосланган табиий метод, яъни синтетик метод асос қилиб олинади, сўнгра керакли ифода ва амаллар Декарт системасида кўрсатилади. Учинчи боб оддий тензорлар назариясига бағишланган. Бу ерда тегишли амаллар ва ифодалар дастлаб уч ўлчовли фазода текширилиб, сўнгра уларни кўп ўлчовли фазода текширишга ўтилади. Ниҳоят, тўртинчи боб тензорларнинг умумий аналитик назариясига бағишланган.

Баён қилинаётган назарияни китобхонлар актив ҳолда ўзлаштирсин деган мақсадда ҳар бобнинг охирида бирмунча машқлар тавсия этилади. Машқларнинг жавоблари ва уларга доир айрим кўрсатмалар ўша боб охирида келтирилади.

Китобнинг ҳар бир боби шу бобни якунловчи катта параграф билан тугайди. Бундай параграфларда ёрдамчи ва қўшимча материаллар келтирилади, китобнинг асосий текстидаги назарий маълумотларнинг турли илмий соҳалардан олинган баъзи фактлар ва қонунларга татбиқи ва ривожлантирилиши кўрсатилади.

Китобнинг айрим қисмлари тегишли илмий конференциялар ва семинарларда муҳокама қилинган. Қўл ёзма билан танишиб, қимматли маслаҳатлар берган профессор Х. А. Рахматулиндан автор самимий миннатдордир. Қўл ёзмани ўқиб, ўз мулоҳазаларини билдирган физика-математика фанлари кандидатлари С. Ж. Жалоловга, А. Б. Бойдедоевга, Л. Ш. Хўжаевга ва бошқа ҳамкасбларга, қўл ёзмани тақриз ҳамда таҳрир қилган физика-математика фанлари кандидати М. А. Собировга автор ташаккур изҳор қилади.

Р. Х. Маллин.

КИРИШ

Жисм ва ҳодисаларни илмий жиҳатдан текширишда уларнинг физик хоссаларини ифодаловчи турли физик миқдорлар билан иш кўрилади. Асос қилиб олинган дастлабки физик миқдорлар системасига қараб, ҳар қандай физик миқдор аниқ ўлчамликка ва аниқ бирликка эга бўлади. Текширилаётган физик миқдорнинг ўлчамлиги ва бирлиги асосий физик миқдорларнинг турли системасида турлича бўлиши мумкин. Қандай асосий физик миқдорлар системасида ўлчанган бўлишига қарамай, физик миқдор ўзининг аниқ сон характеристикасига эга бўлади.

Фақат сон қиймати билан аниқланувчи физик миқдор скаляр дейилади. Скалярга мисол қилиб, масса, энергия, температура, электр заряди ёки узунликни кўрсатиш мумкин.

Сон қиймати ва йўналиши билан аниқланувчи физик миқдор, одатда, вектор деб аталади ва йўналтирилган кесма шаклида тасвирланади. Векторга мисол қилиб, куч, тезлик, магнит моменти, импульс ёки тезланишни кўрсатиш мумкин. Векторнинг сон қиймати ва йўналиши векторни тўла таърифлаш учун зарур бўлса-да, аммо етарли эмас. Бу масала кейинчалик махсус текширилади.

Векторларни йўналтирилган кесмалар шаклида тасвирлаш методи оддий ва бевосита яққол бўлганлигидан фан ва техникада кенг қўлланилади.

Жисмнинг фазодаги ўрни ва ҳаракати фақат бошқа жисмларга нисбатангина аниқланиши мумкин. Жисмнинг мос вақти билан ўрни аниқланишида асос қилиб олинган моддий система санаш системаси дейилади. Санаш системасини ориентация системаси ёки референция системаси ҳам дейишади. Ҳаракатланувчи заррачанинг фазода ишғол қилган нуқтасини ҳар бир санаш системасида сонлар — координаталар билан ифодалаш мумкин. Координаталарнинг энг оддийси Декарт координаталаридир. Цилиндрик координаталар ёки сферик координаталар сингари хилма-хил бошқа координаталар ҳам бор. Лекин объектга мослаштирилган бошқа координаталардан ҳам фойдаланса бўлади.

Координаталарнинг қандай системаси олинган бўлмасин, скаляр фақат битта сон билан ифодаланади. Уч ўлчовли фазодаги вектор координаталарнинг ҳар қандай системасида ҳам учта сон билан ифодаланади. Бу учта сон турли системада турлича бўлса-да, ўзаро аниқ алмаштириш қонунига бўйсунади: агар векторни ифодаловчи учта сон бирор системада маълум экан, ҳар қандай бошқа системада учта янги сонни шу алмаштириш қонунидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. *Шундай қилиб, уч ўлчовли фазодаги векторни аниқ алмаштириш қонунига бўйсунган учта сон тўплами деб қараш мумкин. Тензор тушунчаси ҳам аслида вектор тушунчасининг маълум равишда умумлаштирилиш натижасидир.*

Ҳар қандай физик миқдор скаляр ёки вектор бўла бермайди. Скаляр ёки векторга нисбатан мураккаброқ табиатли физик миқдорлар кам учрамайди. Бу ерда, масалан, инерция моментлари, механик кучланишлар, эластиклик модуллари, механик деформация, турли тартибдаги мультиполь моментлари, электрланиш ёки магнитланиш коэффициенти кабиларни кўрсатиб ўтиш мумкин. Уларнинг аниқланиши учун битта ёки учта сон кифоя қилмайди.

Бирор физик миқдорни аниқловчи сонлар шу физик миқдорнинг компонентлари дейилади. Масалан, скалярнинг компоненти битта булса, векторники учтадир. Инерция моментлари, механик кучланишлар ва деформациялар, эластиклик модуллари, жисмнинг электрланиш ёки магнитланиш коэффициентлари ва ҳоказо — мана булар кўп компонентли физик миқдорларга оддий мисоллардир. *Тензор дейилганда компонентлари ўзига махсус алмаштириш қонунига бўйсунган физик миқдор англашилади. У ҳолда скаляр билан вектор хусусий шакллардаги энг оддий тензорлар бўлиб қолади.* Берилган тензорлардан мос амаллар натижасида турлича янги тензорлар ҳосил қилиш мумкин: скалярдан вектор ёки тензор, вектордан скаляр ёки вектор ёхуд тензор, тензордан скаляр ёки вектор ёки тензор ва ҳоказо.

Зичлик, босим, кучланиш, тезлик, температура ва бошқа физик миқдорларнинг фазодаги тақсимоти маълум қонунларга итоат қилади. *Фазо ёки унинг қисмидаги бирор физик миқдорнинг тақсимот соҳаси шу физик миқдорнинг майдони деб аталади. Тақсимот соҳаси физик миқдорнинг табиатига қараб, скаляр майдон, вектор майдон ёки тензор майдон бўлиши мумкин.*

Майдонларга бир неча мисоллар келтирайлик. Температура майдони, босим майдони, потенциал майдони, зичлик майдони — булар скаляр майдонлардир. Тезлик майдони, куч майдони, тезланиш майдони — булар вектор майдонлардир. Механик кучланиш ёки механик деформация майдони ва шу кабилар турли тензор майдонлардир.

Жисмнинг ёки моддий муҳитнинг ҳолатини характерловчи физик миқдорлар кўп; босим, тезлик, температура, потенциал, зичлик, кучланиш ва бошқалар шулар жумласидандир. Шундай қилиб, ҳар қандай жисм ёки моддий муҳит температура майдони, потенциал майдони, кучланиш майдони ва бошқа физик миқдорларнинг майдонларига эга бўлиши мумкин. Бу ерда ишлатилаётган майдон сўзи физик миқдорларнинг фазодаги тақсимот соҳасини ифодаловчи муҳим математик тушунчадир.

Ҳозирги замон фанида электромагнит майдони, гравитацион майдон ва бошқа физик майдонлар ҳақида гапирилади. Бу физик майдонлар реал майдонлардир.

Умуман, физикада текшириладиган ҳодисаларда материя икки формада: модда ва майдон формаларида учрайди. Модда билан майдон хусусиятлари, уларнинг ўзаро боғланишлари назарий физиканинг турли бобларида текширилади.

Ҳар қандай физик майдон, масалан, электромагнит майдони ёки гравитацион майдон фазода ўзига муносиб жой ишғол қилади ва керакли физик миқдорлар билан характерланади. Физик майдоннинг аниқланиши учун, шу керакли физик миқдорларнинг, жумладан уларни ифодаловчи векторлар ва тензорларнинг фазодаги тақсимот соҳасини билиш лозим. Шундай қилиб, майдон ҳақидаги математик тушунча келиб чиқади.

Квант табиатли физик объектларни махсус ўрганишда тензорлардан ҳам мураккаброқ бўлган физик миқдорлар учрайди, уларга янги математик тушунчалар ва методлар татбиқ этилади (группа назарияси, матрицалар назарияси ва ҳоказо). Чунончи, элементар заррачалар физикасида ва баъзи математик текширишларда спинорлар муҳим роль ўйнайди. Квантлар назариясида қўлланиладиган спинорлар, операторлар ва шулар сингари математик тушунчалар алоҳида диққатга сазовордир. Бундай масалаларга бағишланган адабиётнинг яқин келажакда яратилишига умидвор бўлиб, автор бу китобда вектор ва тензор майдонлар назарияси билангина чекланди.

Тензор майдон, жумладан, скаляр майдон ва вектор майдон хоссалари ҳақидаги математик назария ҳозирги вақтда майдон назарияси деб юритилади.

I БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

1. СКАЛЯР

Бирор физик миқдорни маълум ўлчов бирлиги билан ўлчаш натижасида ҳосил қилинган сон шу миқдорнинг сон қиймати дейилади. Масалан, жисм ҳажмини аниқ бир сон билан ифодалаш учун ҳажм бирлиги маълум бўлиши керак. Ўлчов бирлигининг ўзгариши билан миқдорнинг сон қиймати ҳам ўзгаради. Ўлчов бирлиги нақадар кичик бўлса, мос олинган сон қиймат шу қадар катта бўлади ва, аксинча, ўлчов бирлиги нақадар катта бўлса, мос олинган сон қиймат шу қадар кичик бўлади.

Жисмнинг температурасини ифодалаш учун тажрибада, масалан, Цельсий, Реомюр ёки Фаренгейт шкалаларидан бирини қабул қилиш мумкин. Симобли шиша термометрлар нормал босимдаги сув-муз ва сув-буғ мувозанат ҳолатларига асосланган. Бу шкалаларнинг қайси бирида бўлмасин, жисмнинг температураси аниқ бир мусбат ёки манфий сон билан ифодаланади.

Абсолют шкала номи билан юритилувчи Кельвин шкаласида мумкин бўлган энг паст температурани ифодаловчи сон нолга тенг деб қабул қилинган. Бу шкалада ҳар қандай температура фақат мусбат сон билан ифодаланади.

Температура шкалаларининг турлича бўлиши ва бу шкалаларда температура ўлчов бирлиги — градуснинг турлича бўлишидан қатъи назар, температура бирор сон билан ифодаланади. Маълумки, мусбат электр ёки манфий электр учун унинг ишорасидан қатъи назар, ўлчов бирлиги (масалан, абсолют электростатик бирлик, кулон ёки элементар заряд) ихтиёрий танланиши мумкин. Лекин қайси бир ўлчов бирлиги олинмасин, электр миқдори бирор мусбат ёки манфий сон билан ифодаланади.

Маълум ўлчов бирлигида олинган сон қиймати биланоқ тўла аниқланувчи миқдор скаляр миқдор ёки скаляр дейилади.

Юқорида курсатилган ҳажм, температура, электр миқдори скаляр булади. Масса, иш, вақт, иссиқлик миқдори ва ҳоказолар ҳам скалярдир.

Қандайдир тўғри чизиқ ва унда асос қилиб олинган бирор O нуқта берилган булсин. Тўғри чизиқнинг ҳар қандай ихтиёрий нуқтасини шу O нуқтага нисбатан аниқ бир сон билан ифодалаш мумкин. Бу сон қабул қилинган ўлчов бирлиги — масштабга қараб аниқланади.

Бу сон одатда O нуқтадан ўнг томондаги нуқталар учун мусбат ва чап томондаги нуқталар учун манфий ҳисобланади. *Нуқтанинг жойини аниқловчи сон шу нуқтанинг координатаси дейилади. О нуқта эса координаталар боши деб юритилади.* Шундай қилиб, ҳар қандай скаляр тўғри чизиқнинг мос равишда олинган бирор нуқтаси билан тасвирланади.

Скалярни турли ҳарфлар билан, масалан, температурани T билан, массани m, ишни A, электр зарядни e, иссиқлик миқдорини Q билан белгилаш мумкин. Скаляр ё ноль ёки мусбат сон ёхуд манфий сон бўлиши мумкин. s скалярнинг абсолют қийматини, яъни модулини $|s|$ шаклида ёзамиз. У вақтда мусбат қийматли скаляр учун $|s| = s$, манфий қийматли скаляр учун $|s| = -s$ ва ноль қийматли скаляр учун $|s| = 0$ бўлади.

Скаляр алгебраик миқдордир. Шунинг учун скалярларга нисбатан қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва бошқа алгебраик амаллар бажарилиши мумкин.

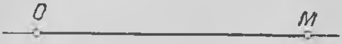
Текширилаётган скалярнинг физик табиати, уларнинг конкрет характери ғоят катта аҳамиятга эгадир.

Масалан, бирор системани ташкил қилувчи қисмларнинг температуралари $T_1, T_2, \ldots, T_n$, массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$, электр зарядлари $e_1, e_2, \ldots, e_n$ булсин. Системанинг температураси T, умуман, уни ташкил этувчи қисмлар температураларининг йиғиндисига тенг булмайди: $T \neq T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Аммо системанинг массаси m (ёки электр заряди e) ҳамма вақт унинг қисмларидаги массалар (ёки электр зарядлари) йиғиндисига тенг бўлади: $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ёки $e = e_1 + + e_2 + \ldots + e_n$.

Система қисмларига мос келувчи миқдорлар йиғиндиси бутун шу системага мос келувчи миқдорга тенг бўлса, бундай миқдор аддитив миқдор дейилади. Юқорида келтирилган мисолларимизда массанинг ёки электр зарядининг ҳар қайсиси аддитив миқдордир, температура эса аддитив миқдор эмас, у ноаддитив миқдордир. Аммо масса ёки электр заряди сингари, масалан, иссиқлик миқдори, потенциал энергия ёки иш аддитив миқдорлардир. Шундай қилиб, ҳар қандай скаляр аддитив хусусиятга эга эмас. Демак, аддитив скаляр билан ноаддитив скаляр бир-биридан фарқ қилади.

2. ВЕКТОР

Тўла аниқлаш учун маълум ўлчов бирлигида олинган сон қийматларини билиш етарли бўлмаган миқдорлар мавжуд. Масалан, тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи заррачанинг координаталар боши O га нисбатан силжишини аниқлаш учун O гача олинган масофадан ташқари, заррачанинг қайси томонга қараб, яъни қайси йўналишда ҳаракатланишини ҳам билишимиз керак. Заррача O нуқтадан M нуқтага кўчиб ўтади, дейлик (1- расм).



1- расм.

2- расм.

Демак, заррача силжишининг боши O нуқта ва охири M нуқтадир. Заррача силжишининг сон қиймати OM кесманинг узунлиги билан аниқланиб, йўналиши O нуқтадан M нуқтага қараган бўлади. Заррачанинг O нуқтадан M нуқтага кўчиб ўтишдаги силжишини қуйидагича ёзиб кўрсатиш мумкин: $\overrightarrow{OM}$ (2- расм). Силжишни тасвирловчи бу шартли белгининг маъноси шундан иборат: биринчи ҳарф O силжишнинг бошланғич нуқтасини, иккинчи ҳарф M эса силжишнинг охирги нуқтасини, кесма OM эса силжишнинг берилган ўлчов бирлигида кўрсатилган сон қийматини, стрелка силжишнинг O нуқтадан M нуқтага қаратилган йўналишини тасвирлайди.

Агар заррача (2- расм) O нуқтадан N нуқтага кўчиб ўтса, унинг силжиши $\overrightarrow{ON}$ орқали белгиланади.

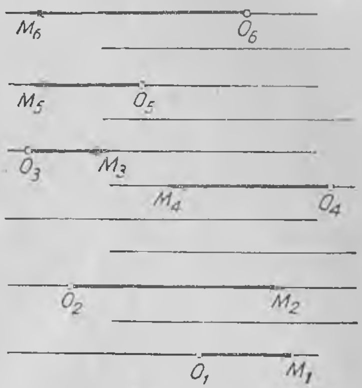
Хуллас, заррача силжишини йўналтирилган кесма билан тасвирлаш мумкин.

2-расмда йўналтирилган $\overrightarrow{OM}$ кесма билан йўналтирилган $\overrightarrow{ON}$ кесма турли узунликларга ва қарама-қарши йўналишларга эгадир.

Энди, фазода ўзаро параллел бўлган барча тўғри чизиқларни олайлик. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бирида фақат бир томонга ёки қарама-қарши томонга қараб ҳаракатланаётган заррача берилган бўлсин. Тўғри чизиқларнинг ҳар биридаги заррача силжишини тегишли (йўналтирилган) кесма билан кўрсатайлик (3- расм).

Бу расмдан бевосита равшанки, $\overrightarrow{O_1M_1}$, $\overrightarrow{O_2M_2}$, $\overrightarrow{O_3M_3}$ силжишлар бир хил йўналишдадир, $\overrightarrow{O_4M_4}$, $\overrightarrow{O_5M_5}$, $\overrightarrow{O_6M_6}$ силжишлар эса аввалги силжишларга нисбатан қарама-қарши.

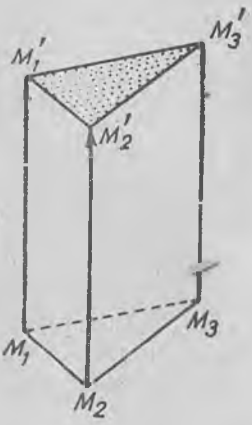
Ҳар қандай жисм заррачалардан тузилган. Жисм заррачаларининг ўзаро жойлашишлари, умуман айтганда, ўзгарувчан-дир. Аммо қаттиқ жисмларда заррачаларнинг ўзаро жойлашишлари ўзгармасдан сақланади деб қабул қилинса, кўпгина илмий ва техник текширишларда катта қулайликларга эришиш мумкин. Қаттиқ жисм турлича ҳаракатда бўлиши мумкин. *Қаттиқ жисмнинг энг оддий ҳаракати, ҳар онда, унга қарашли заррачаларнинг бир хил силжишидан иборат. Бундай ҳаракат қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати дейилади.*



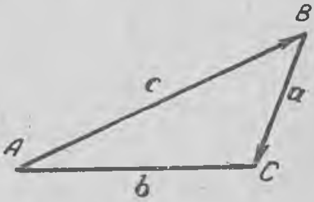
3- расм.

Демак, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатида силжишни тасвирловчи йўналтирилган кесма ҳамма нуқталарда бир хилдир (4- расм): силжишни тасвирловчи йўналтирилган кесмани узунлиги ва йўналишини ўзгартмай, ўзига параллел равишда бир жойдан исталган иккинчи бир жойга кўчириш мумкин.

Илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг бирин-кетин бўлаётган икки силжиши натижавий силжиш ҳосил қилади. Масалан, заррача дастлаб A нуқтадан B нуқтага, сўнгра B нуқтадан C нуқтага силжисин. Натижада заррача A нуқтадан C нуқтага силжийди (5- расм). Натижавий $\overrightarrow{AC}$ силжишни аввалги икки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ силжишнинг йиғиндисидан ҳосил бўлган деб, қўши-



4- расм.



5- расм.

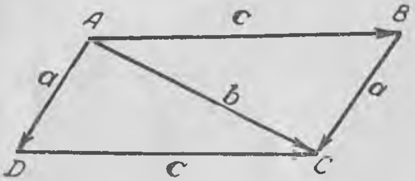
лиш амалини одатдагича + (плюс) орқали белгиласак, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.1}$$

Агар $\overrightarrow{AB}$ силжишни $\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}$ силжишни $\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AC}$ силжишни $\vec{b}$ орқали белгиласак, (2.1) ифода бундай ёзилади:

$$\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}. \tag{2.2}$$

Силжишни тасвирловчи йўналтирилган кесманинг параллел равишда кўчирилиши назарда тутилса, 5- расмдан фойдаланиб, қуйидаги 6- расмни чизиш мумкин.



6- расм.

Демак, заррачанинг $\vec{c}$ билан $\vec{a}$ силжиши бир хил натижавий $\vec{b}$ силжиш ҳосил қилади. Силжишларнинг қўшилиш тартиби, яъни биринчи силжишнинг иккинчи силжиш билан қўшилиши ёки иккинчи силжишнинг биринчи силжиш билан қўшилиши натижавий силжишни ўзгартирмайди. Шундай қилиб:

$$\vec{c} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{c} \tag{2.3}$$

бўлади.

Юқорида айтилганлардан шундай хулоса чиқариш мумкин: икки силжишнинг қўшилишидан келиб чиққан натижавий силжиш шу икки силжишдан қурилган параллелограммнинг йўналтирилган диагонали билан тасвирланади. Ана шу фикр силжишларнинг параллелограмм қоидасини ифодалайди. Силжишни тасвирловчи йўналтирилган кесма сингари миқдорлар кўп учрайди.

Маълум ўлчов бирлигида олинган сон қийматлари ва йўналишлари билан аниқланиб, параллелограмм қоидасига мувофиқ қўшилувчи миқдорлар векторлар дейилади.

7- расм.

Куч, магнит моменти, тезлик сингари миқдорларнинг ҳар бири вектордир. Масалан, кучлар аниқ ўлчов бирлигида узларининг сон қиймати ва йўналиши билан аниқланади ҳамда геометрик равишда қўшилади.

Векторни йўналтирилган кесма шаклида тасвирлаш мумкин (7- расм).

А нуқта векторнинг боши, В нуқта эса векторнинг охири дейилади. А нуқтадан В нуқтага қаратилган йўналиш векторнинг йўналишини, АВ кесманинг узунлиги эса векторнинг сон қийматини кўрсатади, векторнинг сон қиймати *шу векторнинг узунлиги ёки модули деб ҳам юритилади ва* $|\overrightarrow{AB}|$ *шаклда ёзилади.*

Вектор бошининг фазода жойлашган нуқтаси шу векторнинг қўйилиш нуқтаси дейилади.

Векторни бир ҳарф билан ҳам кўрсатиш мумкин. Векторнинг ёзилишини скалярнинг ёзилишидан фарқ қилиш учун ҳарфларнинг устига стрелка қўйиш мумкин, масалан: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Баъзан стрелка ўрнига чизиқча ҳам қўйилади, масалан $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Босма адабиётда, одатда, скаляр ингичка курсив ҳарф билан ёзилади (масалан: a, b, c), вектор эса йўғон курсив ҳарф билан ёзилади (масалан: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$). Векторнинг модули шу векторни белгиловчи, аммо ингичка курсив ҳарфнинг ўзи билан ҳам ёзиб кўрсатилади. Масалан, $\boldsymbol{a}$ векторнинг модулини $|\boldsymbol{a}|$ шаклида ёки a шаклида ёзиб кўрсатиш мумкин.

Силжишни тасвирловчи йўналтирилган кесмани, узунлиги ва йўналишини ўзгартирмасдан, ўзига параллел равишда бир нуқтадан исталган бошқа бир нуқтага кўчириш мумкинлигини кўрдик. Демак, узунликлари бир хил, йўналишлари ҳам бир хил бўлган векторлар бир-биридан фарқ қилмайди.

Йўналишлари бир хил, узунликлари эса тенг бўлган икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *вектор бир-бирига тенг дейилади.*

Масалан, 8- расмда тенг икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор ёки тенг бошқа икки $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ вектор тасвирланган.

Икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторнинг тенглигини $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ шаклда ёзамиз. Векторлар тенглиги ушбу хусусиятларга эгадир:

1) ҳар қандай вектор ўз-ўзига тенг, яъни:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

бўлади (рефлективлик хусусияти),

2) бир вектор иккинчи векторга тенг экан, иккинчи вектор биринчи векторга тенг бўлади, яъни:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

экан

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$$

бўлади (симметриклик хусусияти),

3) бир вектор иккинчи векторга, иккинчи вектор эса учинчи векторга тенг экан, биринчи вектор учинчи векторга тенг бўлади, яъни:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad \text{ва} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

экан

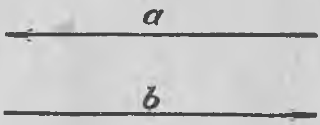
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$$

бўлади (транзитивлик хусусияти).

Шундай қилиб, векторни, узунлиги билан йўналишини ўзгартмасдан, бир нуқтадан бошқа нуқтага бемалол параллел кўчириш мумкин. Бу хусусиятга эга вектор эркин вектор дейилади. Бундан кейин шу эркин векторларгина назарда тутилади.

Йўналишлари қарама-қарши, узунликлари бир хил бўлган $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *векторлар қарама-қарши векторлар дейилади* (9- расм) *ва* $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ *шаклда ёзилади. Йўналишлари бир хил*

8- расм.



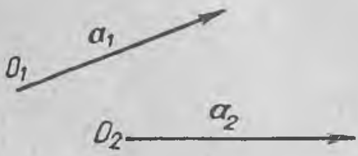
9- расм.

бўлган икки вектор бир-бирига параллел, йўналишлари қарама-қарши бўлган икки вектор антипараллел векторлар дейилади. Параллел тўғри чизиқларда ётувчи векторлар коллинеар векторлар дейилади. Коллинеар векторлар бир тўғри чизиқда ҳам ётиши мумкин.

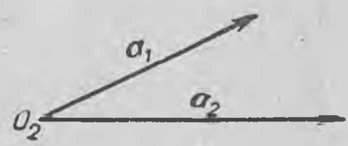
Бирор текисликка параллел бўлган векторлар компланар векторлар дейилади. Компланар векторлар бир текисликда ҳам ётиши мумкин.

3. ВЕКТОРЛАРНИНГ ҚЎШИЛИШИ ВА АЙРИЛИШИ

Векторни бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўз-ўзига параллел қилиб кўчириш мумкинлигини биз кўрдик. Ана шундан фойдаланиб, қўйилиш нуқталари турли бўлган векторларни бир нуқтага келтириш мумкин. Силжишлар параллелограмм қоидасига биноан қўшилади. Векторларни қўшишда шу параллелограмм қоидаси асос қилиб олинади.



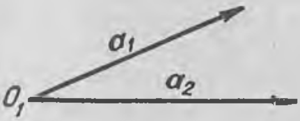
10- расм.



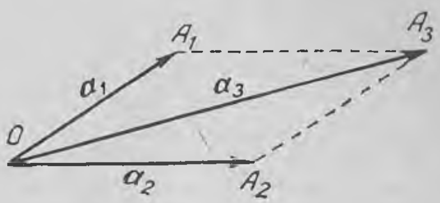
11- расм.

Масалан, икки $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ вектор берилган бўлсин (10- расм). O_1 нуқта $\boldsymbol{a}_1$ векторнинг, O_2 нуқта $\boldsymbol{a}_2$ векторнинг қўйилган нуқтаси бўлсин. $\boldsymbol{a}_1$ векторни ўз-ўзига параллел равишда кўчириб, унинг бошини O_1 нуқтадан O_2 нуқтага олиб ўтиш мумкин

(11- расм) ёки, аксинча, $\boldsymbol{a}_2$ векторни O_1 нуқтага кўчириш мумкин (12- расм). Ниҳоят, $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторларни юқоридагидек кўчириб, бошларини бошқа нуқтага, масалан, O нуқтага олиб ўтиш мумкин (13- расм). Сўнгра бу векторлардан параллелограмм



12- расм.

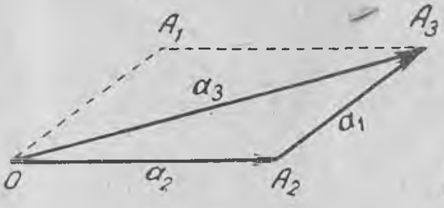


13- расм.

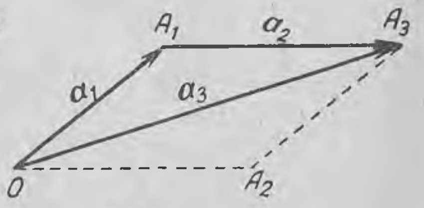
қурамиз. Бу параллелограммнинг OA_3 диагонали бўйлаб, O нуқтадан A_3 нуқтага қаратилган ва узунлиги шу диагоналнинг узунлигига тенг бўлган $\boldsymbol{a}_3$ вектор, таърифга кўра, берилган $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторлар йиғиндисига тенгдир:

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

Икки векторни қўшишдаги параллелограмм қоидаси шундан иборат. Бу уч вектор параллелограмм текислигида ётади, яъни улар компланардир.



14- расм.



15- расм.

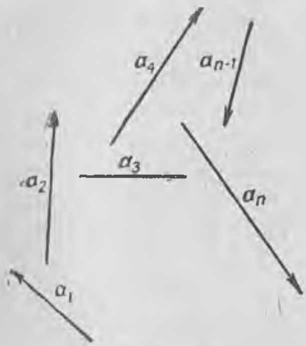
Векторни параллел кўчириш имкониятидан фойдаланиб, қўшиш амалини 13, 14 ва 15- расмларда кўрсатдик. Бу расмлардан:

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1,$$

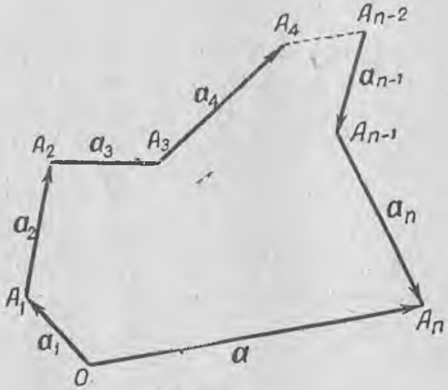
яъни *йиғиндида қўшилувчи векторларнинг ўринларини алмаштириш мумкин.*

Ўша расмларга асосланиб, икки вектор йиғиндисини тасвирловчи векторни ясаш усулини кўрсатиш мумкин: *биринчи векторнинг охирига иккинчи векторнинг боши қўйилади, боши биринчи векторнинг бошига ва охири иккинчи векторнинг охирига қўйилган вектор қўшилувчи икки векторнинг йиғиндисини тасвирлайди. Бу усул учбурчак усули ёки учбурчак қоидаси деб юритилади.*

Энди учта, тўртта, умуман, кўп вектор йиғиндисини аниқлаш масаласига ўтайлик. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ векторлар берилган бўлсин (16- расм). Учбурчак қоидасидан фойдаланиб, даставвал $\mathbf{a}_1$ ва $\mathbf{a}_2$ векторлар йиғиндисини топамиз, бу вектор билан $\mathbf{a}_3$ вектор йиғиндисини топамиз, бу сўнгги йиғинди вектор билан $\mathbf{a}_4$ вектор йиғиндисини топамиз ва ҳоказо (17- расм).



16- расм.



17- расм.

Натижада ҳосил қилинган $\mathbf{a}$ вектор қўшилувчи $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ векторларнинг йиғиндиси бўлади:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n. \tag{3.1}$$

Шундай усул билан векторларни қўшиш векторларни полигонлаш дейилади.

Йиғиндини тасвирловчи $\mathbf{a}$ векторнинг боши қўшилувчи биринчи $\mathbf{a}_1$ векторнинг бошида, охири эса қўшилувчи сўнгги $\vec{\mathbf{a}}_n$ векторнинг охирида бўлади. Қўшилувчи биринчи векторнинг боши ва сўнгги векторнинг охири бир нуқтага тўғри келиб қолиши ҳам мумкин. Масалан, қарама-қарши икки вектор йиғиндиси боши ва охири бир нуқтага тўғри тушган вектордан иборат. *Боши билан охири бир нуқтада жойлашган вектор ноль-вектор деб юритилади ва О символи билан бел-*

илланади. Ноль-векторнинг узунлиги нолга тенг, йўналиши эса ноаниқдир. Ноль-векторни ҳар қандай вектор билан коллинеар деб ҳисоблаш мумкин. Йиғиндиси нолга тенг бўлган қўшилувчи векторлар контур (ёпиқ чизиқ) ҳосил қилади. Қўшилувчи векторларнинг йўналиши контурни айланиб чиқиш йўналиши ҳисобланади. *Айланиб чиқиш йўналиши кўрсатилган контур ориентацияланган контур ёки ориентацияли контур дейилади.*

Қўшилувчи векторларнинг йиғиндидаги ўринларини бемалол алмаштириш мумкин. Масалан, (3.1)да $\boldsymbol{a}_1$ вектор билан $\boldsymbol{a}_2$ векторнинг ўринлари алмаштирилса, йиғинди $\boldsymbol{a}$ вектор ўзгармайди.

Қўшиш амалини $\sum$ белги орқали ифодаласак, (3.1)ни қуйидагича қисқартириб ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i. \tag{3.2}$$

Умумий йиғиндиси $\boldsymbol{a}$ *векторни ҳосил қилган* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$ *векторлар* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг ташкил қилувчилари деб юритилади.*

Масалан, бирор заррачага бир вақтда $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ кучлар таъсир қилса, уларнинг йиғиндиси тенг таъсир этувчи $\boldsymbol{F}$ кучни ҳосил қилади:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i.$$

Заррача бир вақтнинг ўзида $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ тезликлар билан турли ҳаракатларда иштирок қила олади. Бу тезликлар йиғиндиси заррачанинг мураккаб ҳаракатдаги натижавий тезлигини ҳосил қилади:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \ldots + \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i.$$

17- расмдан:

$$OA_n < OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

Қўшилувчи векторларнинг бир хил йўналишда бўла олиши ҳам назарда тутилса:

$$OA_n \leqslant OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$

ёки

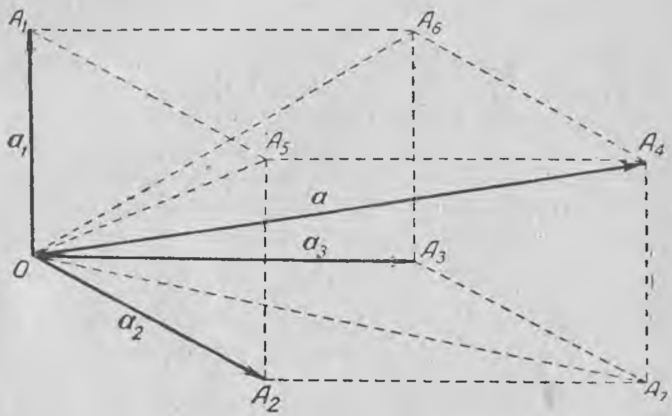
$$|\boldsymbol{a}| \leqslant |\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_2| + \ldots + |\boldsymbol{a}_n|$$

ёхуд

$$|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n| \leqslant |\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_2| + \ldots + |\boldsymbol{a}_n| \tag{3.3}$$

келиб чиқади, яъни *векторлар йиғиндисининг модули вектор модулларининг йиғиндисидан кичик ва бир йўналишдаги векторлар учун тенг бўлади.*

Юқорида айтилганларни назарда тутиб, бир текисликда ётмаган учта $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторнинг йиғиндисини караб чиқайлик (18- расм).



18- расм.

Бу векторларни O нуқтага келтирайлик. $\boldsymbol{a}_1$ билан $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$ билан $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3$ билан $\boldsymbol{a}_1$ векторлар ётган текисликларга параллел қилиб, шу уч вектор охиридан текисликлар ўтказамиз. Шундай қилиб, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлардан параллелепипед қурилади. 18- расмдан равшанки:

$$\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_7A_4} = \overrightarrow{A_3A_6}.$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_3A_7} = \overrightarrow{A_6A_4} = \overrightarrow{A_1A_5},$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{A_5A_4} = \overrightarrow{A_2A_7}$$

бўлади.

Расмдан яна равшанки:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$ ва ҳоказо бўлади. Демак, компланар бўлмаган учта вектор йиғиндиси шу учта вектордан қурилган параллелепипеднинг йўналтирилган диагонали билан тасвирланади. Ўша расмнинг ўзидан:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3)$$

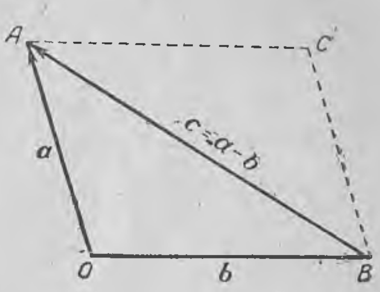
бўлади. Демак, учта векторни қўшишда уларнинг ҳар бирига қолган икки вектор йиғиндисини қўшиш мумкин. Худди шунингдек, тўртта, бешта, умуман, *бир неча векторни қўшишда исталган икки ёки кўпроқ вектор ўрнига уларнинг йиғиндисини олиш мумкин. Бу хусусият векторлар қўшилишининг ассоциативлик хусусияти дейилади.*

Векторларни айириш қўшиш амалига тескари амалдир. Айириш амалини одатдагича — (минус) орқали белгилайлик. *$\boldsymbol{a}$ вектор ва $\boldsymbol{b}$ векторнинг айирмаси шундай $\boldsymbol{x}$ вектордан иборатки, унинг $\boldsymbol{b}$ вектор билан йиғиндиси $\boldsymbol{a}$ векторга тенг* (19-расм):

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a} \text{ ёки } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ айирмани $\boldsymbol{a}$ вектор билан $-\boldsymbol{b}$ вектор йиғиндиси деб ҳам қараш мумкин:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$



19- расм.

Учбурчакнинг ҳар томони қолган икки томони йиғиндисидан кичик, яъни:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|. \tag{3.4}$$

Тенглик ишораси $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар бир йўналишда бўлган ҳолда юз беради.

18- расмдан фойдаланиб, тубандагини ёзсак бўлади: $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_5A_4}+\overrightarrow{A_4O}=0$, яъни $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}=0$, чунки $\overrightarrow{A_4O}=-\boldsymbol{a}$ ва $OA_1A_5A_4O$ дан иборат синиқ чизиқ ёпиқ чизиқдир. Айтилганлардан хулоса чиқарамиз: векторларнинг ишораларини қарама-қаршисига ўзгартиб, тенгликнинг бир томонидан иккинчи томонига кўчириш мумкин. Бу мулоҳазалар вектор тенгликлар ва тенгламалар билан иш кўришга йўл очади.

Мисол сифатида икки вектордан қурилган параллелограммнинг вектор диагоналларини кўриб чиқайлик.

$\overrightarrow{A_1A_2}$ ва $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторлардан параллелограмм қурамиз (20-расм).

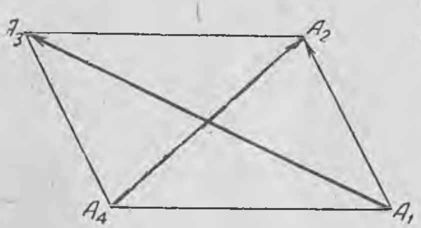
У вақтда бундай ёзишимиз мумкин:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{A_1A_3},\quad \overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{A_4A_2}.$$

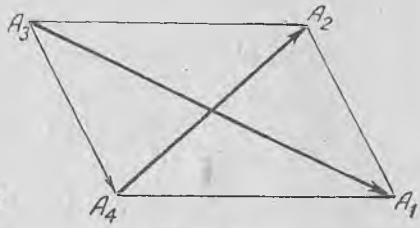
Энди $\overrightarrow{A_3A_2}$ ва $\overrightarrow{A_3A_4}$ векторларга асосланган параллелограмм қурамиз (21- расм). Шу расмдан фойдаланиб, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_3A_1}, \quad \overrightarrow{A_3A_2} - \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_4A_2}.$$

Демак, икки вектордан ясалган параллелограммнинг вектор диагоналларидан бири берилган векторларнинг йиғиндисига, иккинчиси эса уларнинг айирмасига тенг.



20- расм.

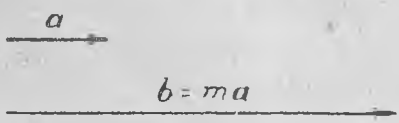


21- расм.

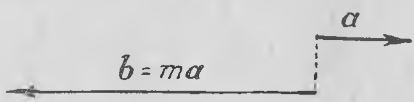
4. ВЕКТОРНИ СКАЛЯРГА КЎПАЙТИРИШ

Бирор $\boldsymbol{a}$ вектор билан мусбат бутун m сонни олайлик. Шу $\boldsymbol{a}$ векторга тенг m та вектор йиғиндиси йўналиши $\boldsymbol{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлиб, узунлиги $\boldsymbol{a}$ вектор узунлигидан m марта ортиқ вектордир. *Бу вектор $\boldsymbol{a}$ векторнинг мусбат бутун m сонга кўпайтмаси дейилади* ва $m\boldsymbol{a}$ ёки $\boldsymbol{a}m$ шаклида ёзилади. Бу таърифни ҳар қандай ҳақиқий сон учун умумийлаштириш мумкин.

Бирор $\boldsymbol{a}$ вектор ва m скаляр олайлик. *$\boldsymbol{a}$ векторнинг m скалярга кўпайтмаси деб шундай $\boldsymbol{b}$ вектор тушуниладики, унинг узунлиги $|m|\cdot|a|$ га тенг бўлиб, мусбат скаляр учун йўналиши берилган $\boldsymbol{a}$ вектор йўналиши билан бир хилдир*



22- расм.



23- расм.

(22- расм) *ва манфий скаляр учун йўналиши берилган $\boldsymbol{a}$ вектор йўналишига қарама-қаршидир* (23- расм). Бу векторни $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$ ёки $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}m$ шаклида ёзамиз. Шундай қилиб, векторнинг скалярга кўпайтмаси шу векторга коллинеар бўлган вектор ҳосил қилади.

Мисоллар келтирайлик. Заррачага таъсир қилувчи $\boldsymbol{F}$ куч, классик физикада заррача массаси билан тезланишининг кўпайтмасига тенг: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Шундай қилиб, заррачага таъсир қилувчи $\boldsymbol{F}$ куч унинг тезланишига тўғри пропорционал, йўналиши эса тезланиш йўналиши билан бир хилдир.

Электр майдонининг нуқтавий электр заряди e га таъсир кучи шу майдоннинг кучланганлик векторига пропорционал: $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$. Шунингдек, магнит майдонининг нуқтавий магнит заряди q га таъсир кучи, шу майдоннинг кучланганлик векторига пропорционал: $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{H}$.

Моддий муҳитдаги электр майдонини кучланганлик вектори $\boldsymbol{E}$ *ва электр индукция вектори* $\boldsymbol{D}$ *билан, магнит майдонини эса кучланганлик вектори* $\boldsymbol{H}$ *ва магнит индукция вектори* $\boldsymbol{B}$ *билан характерлаш мумкин. Кўпчилик жисмлар учун* $\boldsymbol{D}$ *билан* $\boldsymbol{E}$ *ўзаро пропорционалдир, яъни* $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, *бу ерда* ε *жисмнинг диаэлектрик константаси дейилади. Шунингдек,* $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, *бу ерда* μ *жисмнинг магнит сингдирувчанлиги дейилади.*

Заррача массаси m мусбат қийматга эга. m билан $\boldsymbol{v}$ кўпайтмаси $m\boldsymbol{v}$ шу заррачанинг ҳаракат миқдорини ифодалайди: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$. Шундай қилиб, заррачанинг ҳаракат миқдори шу заррача массасига ва тезлигига пропорционал бўлиб, тезлик йўналиши томон қаратилган.

Система заррачаларининг массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *ва тезликлари* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *бўлса, уларнинг ҳаракат миқдорлари* $\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n = m_n\boldsymbol{v}_n$ *бўлади. Система заррачаларининг ҳаракат миқдорлари йиғиндиси шу системанинг ҳаракат миқдорини ҳосил қилади:*

$$\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i. \tag{4.1}$$

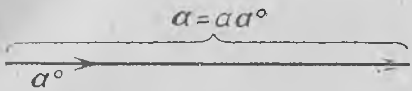
Бирор m скалярни олайлик. $\boldsymbol{a}$ векторни m скалярга бўлиш шу $\boldsymbol{a}$ векторни $\frac{1}{m}$ скалярга кўпайтириш маъносини беради. $\boldsymbol{a}$ векторни унинг модули a га бўлсак, натижада ҳосил бўлган $\frac{\boldsymbol{a}}{a}$ векторнинг узунлиги бирга тенг ва йўналиши $\boldsymbol{a}$ вектор йўналиши билан бир хилдир. *Узунлиги бирга тенг вектор бирлик вектор ёки орт дейилади.*

Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ векторни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0.$$

Бу ерда $\boldsymbol{a}$ векторнинг орти $\boldsymbol{a}^0$ орқали белгиланди (24-расм).

Фазодаги ихтиёрий бирор нуқтани қутб (полюс) деб атайлик. Ҳар қандай нуқтанинг фазодаги урнини боши берилган қутбда ва охири уша нуқтанинг узида турган вектор билан аниқлаш мумкин.



24- расм.

Бу вектор нуқтанинг қутбга нисбатан радиус-вектори дейилади.

7- расмда A нуқта қутб ҳисобланса, B нуқтанинг радиус-вектори $\overrightarrow{AB}$ бўлади. Радиус-вектор одатда $\boldsymbol{r}$ ёки $\boldsymbol{R}$ билан белгиланади.

Массалари m_1, m_2 ва электр зарядлари e_1, e_2 булган иккита заррача берилсин. Иккинчи заррачанинг биринчи заррачага нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{r}_{12}$, демак, уларнинг узаро масофаси r_{12} бўлсин. Ньютоннинг бутvн дунё тортилиш (гравитация) қонунига биноан, икки заррачанинг бир-бирига тортилиш кучи уларнинг массаларига тўғри пропорционал, масофа квадратига тескари пропорционал ва уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ буйича йўналгандир:

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{4.2}$$

бу ерда γ — *гравитацион константа* дейилади.

Кулон қонунига биноан, электрланган икки заррачанинг бўшлиқдаги ўзаро таъсир кучи уларнинг зарядларига тўғри пропорционал, масофа квадратига тескари пропорционал ва уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйича йўналгандир:

$$\boldsymbol{f} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \tag{4.3}$$

бир хил ишорали зарядларга итариш кучи ва қарама-қарши ишорали зарядларга тортилиш кучи мосдир.

Маълумки, моддий муҳитда ҳаракатланувчи заррачага таъсир қилувчи қаршилик кучи $\boldsymbol{f}$ ҳаракат йўналишига қарама-қарши бўлиб, кўпинча, тезликнинг сон қийматига тўғри пропорционалдир, яъни $\boldsymbol{f} = -\alpha \cdot \boldsymbol{v}$. Бу ерда α скаляр *қаршилик коэффициенти* дейилади.

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлардан қурилган параллелограммни олайлик (25- расм):

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}.$$

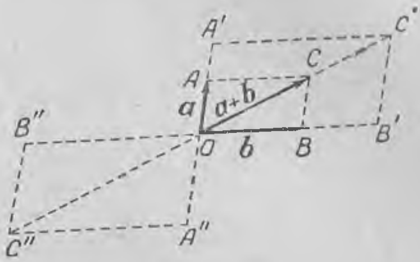
$OACB$ параллелограмм диагонали ва томонларини бирор мусбат скалярга кўпайтирсак, улар пропорционал равишда ўзгаради, демак, янги $OA'C'B'$ параллелограмм аввалгига ўхшаш бўлади:

$$\overrightarrow{OA'} = m \cdot \overrightarrow{OA} = m\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{OB'} = m \cdot \overrightarrow{OB} = m\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{OC'} = m \cdot \overrightarrow{OC} = m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b}.$$



25- расм.

Натижада:

$$m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}$$

келиб чиқади.

Берилган m скаляр манфий бўлса:

$$\overrightarrow{OA''} = m\boldsymbol{a}, \ \overrightarrow{OB''} = m\boldsymbol{b}, \ \overrightarrow{OC''} = m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{OC''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}$$

натижада яна:

$$m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \qquad (4.4)$$

бўлади. Бу тенгликни бир неча вектор йиғиндиси учун умумийлаштириш мумкин.

Демак, *векторлар йиғиндисини бирор скалярга кўпайтириш учун қавсларни оддий алгебра қоидаси бўйича очиш мумкин:*

$$m \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m\boldsymbol{a}_i. \qquad (4.5)$$

Ушбу:

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\,\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{a} + m_2\boldsymbol{a} + \ldots + m_n\boldsymbol{a}$$

ёки, қисқача ёзилган:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a} \qquad (4.6)$$

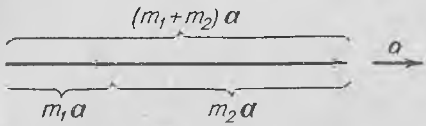
тенглик ҳам кучга эгадир.

Масалан, m_1, m_2 сонлар берилса,

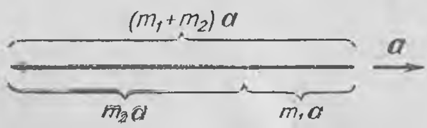
$$(m_1 + m_2)\,\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{a} + m_2\boldsymbol{a}$$

бўлади.

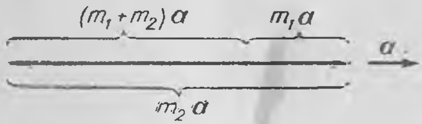
Бу формуланинг туғрилигини полигонлаш қоидасидан фойдаланиб, тубандаги 26, 27, 28 ва 29- расмлардан яққол куриш мумкин (26- расмда m_1, m_2 мусбат, 27- расмда m_1, m_2 манфий, 28- расмда m_1 мусбат, m_2 манфий, 29- расмда m_1 манфий ва m_2 мусбат).



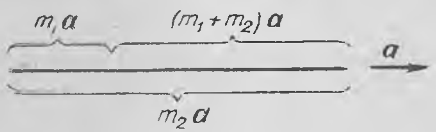
26- расм.



27- расм.



28- расм.



29- расм.

Яна бир мисолни куриб чиқайлик. n та заррача системасини олайлик. Заррачаларнинг радиус-векторлари $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{r}_i$, ..., $\boldsymbol{r}_n$ ва электр зарядлари e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n бўлсин. Электр зарядлари турли ишорали бўлиши мумкин. *Заррача радиус-вектори* $\boldsymbol{r}_i$ *билан* e_i *заряднинг* $e_i\,\boldsymbol{r}_i$ *кўпайтмаси шу заррачанинг қутбга нисбатан электр моменти дейилади.*

Айрим заррачаларнинг қутбга нисбатан электр моментлари $\boldsymbol{P}_1 = e_1\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{P}_2 = e_2\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{P}_i = e_i\boldsymbol{r}_i$, ..., $\boldsymbol{P}_n = e_n\boldsymbol{r}_n$ бўлади. Система заррачаларининг электр моментлари йиғиндиси шу системанинг қутбга нисбатан электр моментини ҳосил қилади:

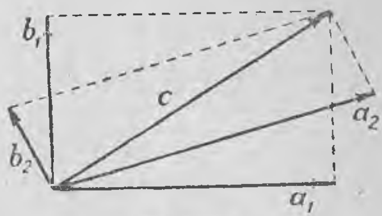
$$\boldsymbol{P} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + e_n\boldsymbol{r}_n = \sum_{i=1}^{n} e_i\boldsymbol{r}_i.$$

5. ВЕКТОРНИ АЖРАТИШ

Параллелограмм қоидасига мувофиқ, икки векторнинг йиғиндиси аниқ векторни беради. Энди масалани аксинча қўйиб, ҳар бир вектор фақат иккигина вектор йиғиндисини ифодалайдими, деган савол беришимиз мумкин. Биз, берилган $\boldsymbol{c}$ векторни олиб, диагонали шу $\boldsymbol{c}$ векторни тасвирловчи чексиз кўп параллелограмм қуришимиз мумкин (30- расм). Диагоналлари берилган $\boldsymbol{c}$ вектордан иборат параллелограммлар бир текисликда ётиши мумкин (масалан, 30- расмдагича) ёки бир текисликда ётмаслиги ҳам мумкин.

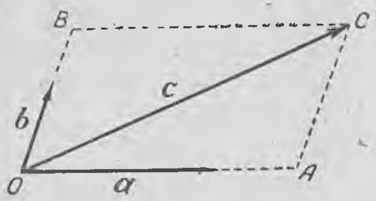
Демак, бирор векторни бошқа икки векторнинг йиғиндиси сифатида ифодалаш ноаниқ масаладир: йиғиндиси берилган $\boldsymbol{c}$ вектордан иборат векторлар жуфти чексиз кўп.

Компланар бўлмаган учта векторнинг йиғиндиси шу векторлардан қурилган параллелепипеднинг йўналтирилган диагонали билан тасвирланишини кўрдик. Юқоридаги сингари, диагонали аниқ $\boldsymbol{d}$ вектордан иборат параллелепипедлар кўп, яъни йиғиндиси берилган $\boldsymbol{d}$ векторни ҳосил қилувчи компланар бўлмаган учтали векторлар чексиз кўпдир. Шундай қилиб, бирор векторни компланар бўлмаган бошқа учта векторнинг йиғиндиси сифатида ифодалаш ноаниқ масаладир.

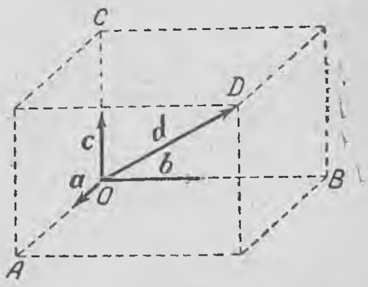


30- расм.

Коллинеар бўлмаган икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторни ва булар билан компланар бўлган $\boldsymbol{c}$ векторни олайлик. Векторларнинг бошларини бир нуқтага келтирайлик. 31- расмда кўрсатилганича, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар ётган тўғри чизиқларга C нуқтадан параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказайлик.



31- расм.



32- расм.

Ҳосил қилинган параллелограммнинг диагоналини $\boldsymbol{c}$ вектор тасвирлайди. Натижада ёзишимиз мумкин: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = m\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = n\boldsymbol{b}$, бу ерда m ва n — қандайдир аниқ сонлар. Демак:

$$\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}. \tag{5.1}$$

Бундай ҳолда биз $\boldsymbol{c}$ *векторни коллинеар бўлмаган икки* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *вектор бўйича ажратилган (ёйилган) деб айтамиз.* m, n *сонлар* $\boldsymbol{c}$ *векторнинг* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *векторлар бўйича компонентлари дейилади.*

Компланар бўлмаган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор ва бошқа бир $\boldsymbol{d}$ вектор олайлик. Векторларнинг бошларини бир нуқтага келтириб (32-расм), $\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ билан $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ билан $\boldsymbol{a}$ векторлар ётган текисликларга D нуқтадан параллел текисликлар ўтказайлик. Ҳосил бўлган параллелепипеднинг диагоналини $\boldsymbol{d}$ вектор тасвирлайди. Натижада бундай ёзиш мумкин:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OA} = m\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = n\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OC} = k\boldsymbol{c},$$

бу ерда m, n, k — қандайдир сонлар. Демак:

$$\boldsymbol{d} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + k\boldsymbol{c}. \tag{5.2}$$

Бундай ҳолда биз $\boldsymbol{d}$ векторни компланар бўлмаган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор бўйича ажратилган (ёйилган) деб айтамиз. m, n, k сонлар эса $\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор бўйича компонентлари дейилади.

Бир неча $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ вектор олайлик. Камида биттаси нолдан фарқли m_1, m_2, m_3, ..., m_n сонларни танлаб олиш мумкин бўлиб,

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n = 0$$

тенглик ўринли бўлса, олинган $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ векторлар чизиқли боғланган векторлар дейилади.

Нолга тенг бўлмаган ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор чизиқли боғланмаган вектордир, чунки $m\boldsymbol{a}$ нинг нолга тенг бўлиши учун, албатта, m нинг нолга тенг бўлиши керак. Ноль-вектор эса чизиқли боғланган вектор бўлади, чунки $m\boldsymbol{o}$ нинг нолга тенг бўлиши учун m ҳар қандай қийматга эга бўлиши мумкин.

Масалан, икки вектор чизиқли боғланган бўлсин:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = 0.$$

Бу ердан: $\boldsymbol{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\cdot\boldsymbol{a}_2 = m\boldsymbol{a}_2$, демак, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ — коллинеар векторлар. Аксинча, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ коллинеар векторлар, яъни $\boldsymbol{a}_1 = m\boldsymbol{a}_2$ бўлса, улар чизиқли боғланган бўлади; ҳақиқатан, $m = -\frac{m_2}{m_1}$ десак, $\boldsymbol{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{a}_2$ ёки $m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = 0$ бўлади.

Энди учта вектор чизиқли боғланган бўлсин:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 = 0.$$

Бу ердан:

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{a}_2 - \frac{m_3}{m_1}\boldsymbol{a}_3 = m''\boldsymbol{a}_2 + m'''\boldsymbol{a}_3,$$

демак, бу учта вектор бир текисликда ётади, яъни улар компланардир. Аксинча, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар компланар бўлса, улар ўзаро чизиқли боғланган бўлади.

Ҳақиқатан, a_1 ни коллинеар бўлмаган икки a_2, a_3 вектор бўйича ажратайлик: $a_1 = m''a_2 + m'''a_3$, энди $m'' = -\frac{m_2}{m_1}$, $m''' = -\frac{m_3}{m_1}$ десак, $a_1 = -\frac{m_2}{m_1}a_2 - \frac{m_3}{m_1}a_3$, демак

$$m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 = 0$$

бўлади.

(5.2) формулада тўрт векторнинг чизиқли боғланиши ифодаланган. Умуман, юқорида айтилганлардан шундай хулосага келамиз: тўртта ёки тўрттадан ортиқ вектор ҳамма вақт чизиқли боғланган бўлади.

Компланар бўлган учта векторнинг ҳар бирини ягона равишда қолган икки вектор бўйича ажратиш мумкин. Бу икки вектор коллинеар бўлмаслиги керак.

Ҳақиқатан, компланар учта a, b, c вектор олайлик. c векторни a, b векторлар бўйича икки хил усул билан ажратиш мумкин бўлса, (5.1) га мувофиқ $c = ma + nb$, $c = m'a + n'b$, демак, $(m - m')a + (n - n')b = 0$, яъни a, b векторлар — чизиқли боғланган — улар коллинеар деган хулоса чиқади, ваҳолонки, a, b векторлар, шартимизга биноан, коллинеар эмас. Шунинг учун $m - m' = 0$; $n - n' = 0$, демак, $m = m'$ ва $n = n'$.

Худди шунингдек, ҳар қандай векторни компланар бўлмаган учта вектор бўйича ягона равишда ажратиш мумкин.

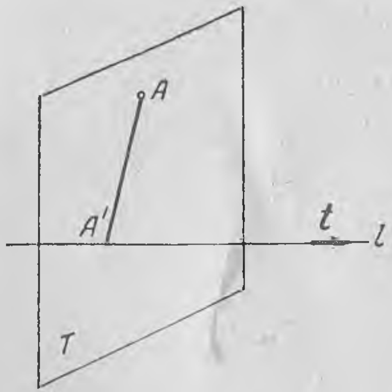
6. ВЕКТОРНИНГ ЎҚҚА ПРОЕКЦИЯСИ

Мусбат йўналиши тайинланган тўғри чизиқ ориентацияли тўғри чизиқ дейилади. Ориентацияли тўғри чизиқ одатда ўқ дейилади. Ўқнинг мусбат йўналишига қарама-қарши йўналиш ўқнинг манфий йўналиши ҳисобланади.

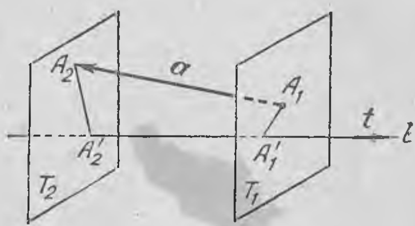
Ўқ йўналишини белгиловчи бирлик векторни t ва ўқнинг ўзини l билан белгилайлик. Фазода ихтиёрий бирор A нуқта олайлик. Шу A нуқта орқали l ўққа перпендикуляр T текислик ўтказайлик (33- расм). Ўтказилган T текисликнинг l ўқ билан кесишган нуқтасини A' орқали белгилаймиз. *A' нуқта A нуқтанинг l ўққа туширилган проекцияси дейилади.* Бошқача қилиб айтганда, A' нуқта A нуқтадан l ўққа туширилган перпендикуляр асосидир.

Энди бирор a вектор олайлик. Шу векторнинг A_1 боши ва A_2 охири орқали l ўққа перпендикуляр бўлган T_1 ва T_2 текисликлар ўтказайлик (34- расм). Бу текисликларнинг l ўқ билан кесишган нуқталарини A_1' ва A_2' орқали белгилайлик. Бу A_1', A_2' нуқталар $\overrightarrow{A_1A_2}$ вектор боши билан охирининг l ўқдаги проекцияларидир.

$\overrightarrow{A_1'A_2'}$ вектор l ўқ билан бир йўналишда ёки қарама-қарши йўналишда бўлиши мумкин. Йўналиши ўқ йўналиши билан бирдай бўлганда мусбат ишора, қарама-қарши бўлганда эса манфий ишора билан олинган $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ векторнинг узунлиги $\boldsymbol{a}$ векторнинг l ўққа туширилган проекцияси дейилади.



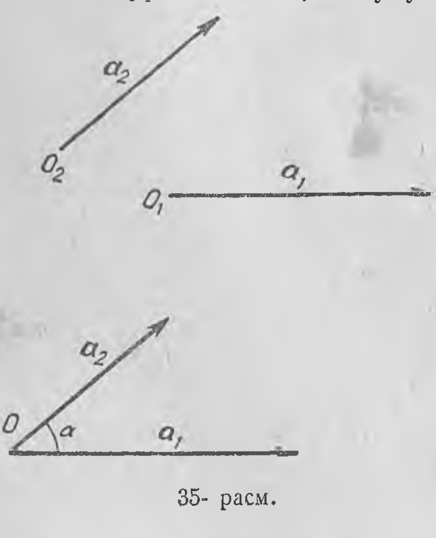
33- расм.



34- расм.

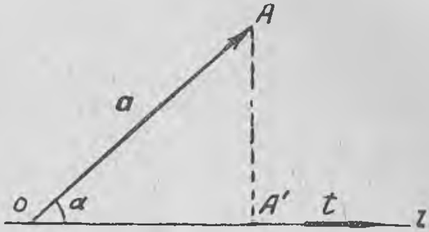
$\boldsymbol{a}$ векторнинг l ўққа туширилган проекциясини a_l билан белгилаймиз. Фазода икки $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ вектор олайлик. Уларнинг орасидаги бурчакни аниқлаш учун, уларнинг бошларини бир нуқтага келтирамиз (35- расм). Бир векторни бураб, иккинчисига параллел вазиятга келтириш мумкин. Шу вазиятни ҳосил қилиш учун зарур бўлган энг кичик бурилиш бурчагини $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$ шаклида ёзамиз ёки биргина ҳарф, чунончи, α билан белгилаймиз.

Шундай қилиб, икки вектор орасидаги бурчак 0 билан π орасида олинади. Бир йўналишдаги икки вектор орасидаги бурчак нолга, қарама-қарши йўналишдаги икки вектор орасидаги бурчак эса π га тенг деб ҳисобланади.



35- расм.

a векторнинг бошини l ўқнинг бирор O нуқтасига кўчирайлик. Вектор билан ўқ орасидаги бурчакни аввал ўткир деб фараз қилайлик (36- расм). $\overrightarrow{OA'}$ векторнинг йўналиши ўқ йўналиши билан бирдай бўлганлиги учун векторнинг ўқдаги a_l проекцияси шу $\overrightarrow{OA'}$ векторнинг мусбат ишора билан олинган узунлигига тенг:



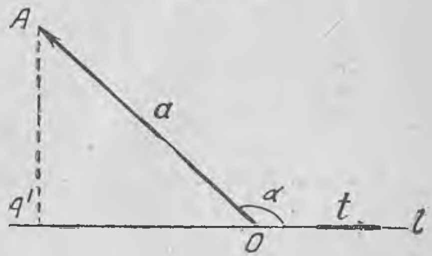
36- расм.

$$a_l = \left|\overrightarrow{OA'}\right|, \left|\overrightarrow{OA'}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos\alpha = \left|\boldsymbol{a}\right| \cos\alpha = a\cos\alpha,$$

демак:

$$a_l = a\cos\alpha.$$

Энди вектор билан ўқ орасидаги бурчакни ўтмас деб фараз қилайлик (37- расм). $\overrightarrow{OA'}$ векторнинг йўналиши ўқ йўналишига қарама-қаршидир. Демак, векторнинг ўқдаги a_l проекцияси ўша $\overrightarrow{OA'}$ векторнинг манфий ишора билан олинган узунлигига тенгдир:



37- расм.

$$a_l = -\left|\overrightarrow{OA'}\right|, \quad \left|\overrightarrow{OA'}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos(\pi - \alpha) = -a\cos\alpha,$$

демак:

$$a_l = a\cos\alpha.$$

Вектор ўққа перпендикуляр бўлса $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ векторнинг ўқдаги a_l проекцияси нолга тенг бўлади.

Шундай қилиб, умумий формула келиб чиқади:

$$a_l = a\cos\alpha, \tag{6.1}$$

яъни векторнинг бирор ўқдаги проекцияси вектор узунлигининг вектор ва ўқ орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенг.

Векторлар йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўққа проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i$ учун:

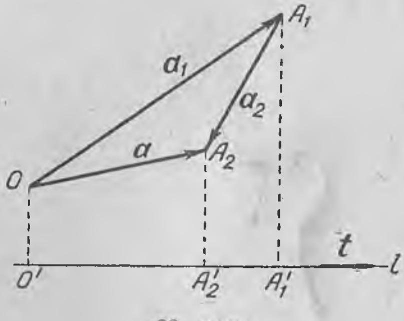
$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{il}. \tag{6.2}$$

Ҳақиқатан, бунинг тўғрилигини хусусий бир мисолда текшириб чиқайлик (38- расм). Таърифга мувофиқ:

$$a_{1l} = \left|\overrightarrow{O'A_1'}\right|,\ a_{2l} = -\left|\overrightarrow{A_1'A_2'}\right|,\ a_l = \left|\overrightarrow{O'A_2'}\right|,\ \left|\overrightarrow{O'A_2'}\right| = \left|\overrightarrow{O'A_1'}\right| - \left|\overrightarrow{A_1'A_2'}\right|,$$

демак:

$$a_l = a_{1l} + a_{2l}.$$



38- расм.

Бу формула (6.2) формуланинг хусусий бир кўринишидир. Иккитадан ортиқ вектор йиғиндисининг проекциясини топишда ҳам ҳозиргина ишлатилган усулдан фойдаланиб, юқоридаги асосий формуланинг тўғрилигини текшириб чиқиш мумкин.

Бир мисол олайлик. Заррачага таъсир қилувчи кучлар $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ бўлсин. Тенг таъсир қилувчи $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$ кучнинг бирор ўқдаги проекцияси (6.2) га мувофиқ:

$$F_l = \sum_{i=1}^{n} F_{il}$$

бўлади, яъни тенг таъсир қилувчи кучнинг бирор ўқдаги проекцияси ташкил қилувчи айрим кучларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг.

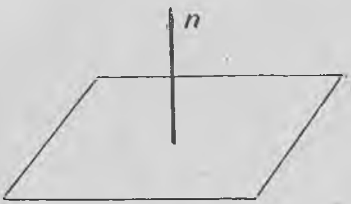
7. ЮЗ КОНТУРИ ВА НОРМАЛИ

Текисликнинг ихтиёрий нуқтасида нормаль (перпендикуляр) олайлик. Нормалнинг қарама-қарши икки йўналишидан бирини мусбат йўналиш ҳисоблаб, унинг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ орқали белгилаймиз (39- расм).

Энди текисликнинг бирор контур (ёпиқ чизиқ) билан чегараланган қисмини—юзини олайлик. Юз аниқ квадрат бирликларда ўлчанган бўлиб, ўзининг сон қийматига эгадир. Контурни аниқ йўналиш бўйича айланиб чиқиш мумкин (40- расм).

Узида ётган контурни айланиб чиқиш йўналиши тайин бўлган текислик ориентацияли текислик дейилади.

Контурни айланиб чиқиш йўналишига қараб, қарама-қарши йўналишдаги икки нормалнинг бирини асосий қилиб олиш

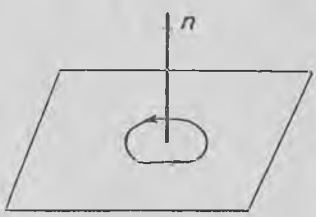


39- расм.

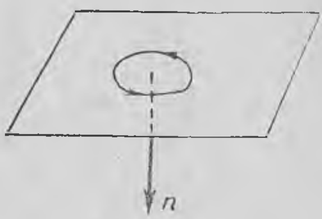
40- расм.

мумкин (41- расм, 42- расм). Текширишни яққоллаштириш учун тажрибада қўлланиладиган қўл, соат ёки парма қоидалари сингари қулай қоидалардан фойдаланса булади.

Масалан, қўл қоидаси билан танишиб чиқайлик. Панжа кафтини ориентацияли текисликка параллел қилиб олайлик. У ҳолда бош бармоқдан кўрсаткич бармоқ томон ўтиш контурни айланиб чиқиш йўналиши буйича олинганда, кафтга перпен-



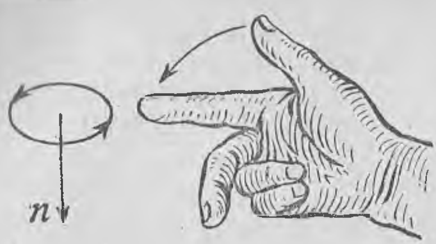
41- расм.



42- расм.

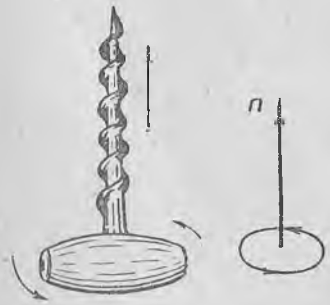
дикуляр қўйилган ўрта бармоқ нормаль йўналишни кўрсатади. Қўл қоидасини бошқачароқ айтиш ҳам мумкин. Ориентацияли текисликка параллел қилинган панжа кафтида бош бармоқдан кўрсаткич бармоқ томон ўтиш контурни айланиб чиқиш йўналишида булса, кафт қаратилган томон нормаль йўналишини курсатади. Шундай қилиб, 41-расмга ўнг қўл қоидаси (43- расм) ва 42- расмга чап қўл қоидаси (44- расм) мос келади.

Парма қоидаси билан соат қоидасидан ҳам фан-техникада фойдаланилади. Парма дастаси контурни айланиб чиқиш йўналиши буйича буралганда, парма винтининг илгарилаб кетиш йўналиши нормаль йуналишини курсатади. Ўнақай парма ўнг

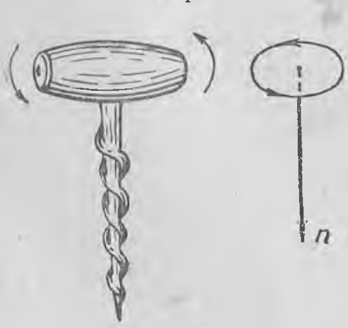


43- расм.

44- расм



45- расм.



46- расм.

қўлга (45- расм) ва чапақай парма чап қўлга (46-расм) мос келади.

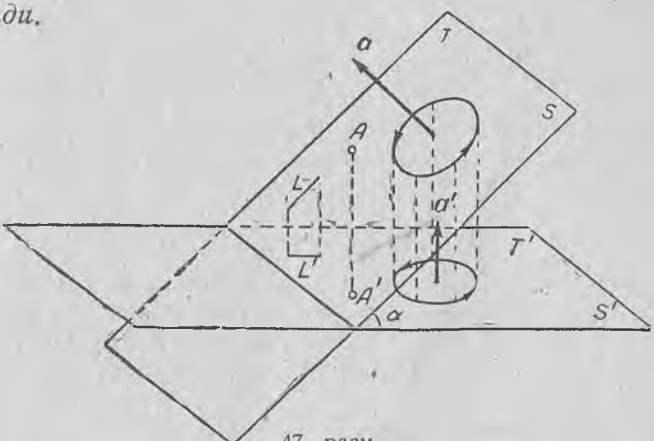
Текисликда ётган соат стрелкасининг юришини унинг циферблати томонидан туриб кузатувчини фараз қилайлик. Контурни айланиб чиқиш йўналиши соат стрелкасининг ҳаракат йўналишига қарама-қарши бўлганда, нормаль йўналишини кузатувчига қаратиб олиш мумкин. Бундай шартланиш ўнг қўл қоидасига мос келади. Контурни айланиб чиқиш йўналиши соат стрелкасининг ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлганда ҳам нормаль йўналишини ўша кузатувчига қаратиб олиш мумкин. Бу эса чап қўл қоидасига мос келади.

Юз ориентацияси ундаги контурни айланиб чиқиш йўналишига боғлиқдир. *Ўнг қўл қоидасига мувофиқ олинган ориентация ўнг ориентация, чап қўл қоидасига мувофиқ олинган ориентация эса чап ориентация дейилади.*

Ориентацияли юзни йўналтирилган кесма билан тасвирлаш мумкин. *Ориентацияли юзни тасвирловчи йўналтирилган кесманинг узунлиги юзнинг сон қийматига тенг, йўналиши эса юз нормалининг йўналиши билан бир хил қилиб олинади. Йўналтирилган бу кесма вектордир* (18- параграфдаги 1-иловага қаралсин).

Кесишган икки T ва T' текислик олайлик (47- расм).

T текисликдаги ориентацияли юз S бўлсин. T текисликнинг бирор A нуқтасидан T' текисликка перпендикуляр туширайлик. *Шу перпендикулярнинг A' асоси A нуқтанинг T' текисликдаги проекцияси дейилади. T текисликдаги L кесма нуқталарининг T' текисликдаги проекцияларидан ҳосил бўлган L' кесма L кесманинг T' текисликдаги проекцияси дейилади. T текисликдаги S юз контури нуқталарининг T' текисликдаги проекцияларидан ҳосил бўлган контур билан чегараланган S' юз S юзнинг T' текисликдаги проекцияси дейилади.*



47- расм.

T, T' текисликлар орасидаги бурчак уларнинг кесишув чизиғига бирор нуқтада перпендикуляр бўлиб, шу текисликларда ётувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакка тенгдир. Бу бурчак α бўлсин.

Контурни ҳар қандай шаклда олиш мумкинлигини назарда тутиб, контурни тўғри тўртбурчак шаклида олайлик. Текисликларнинг кесишув чизиғи тўғри тўртбурчакнинг икки томонига параллел бўлиб, қолган икки томон унга перпендикуляр бўлсин. Параллел ва перпендикуляр томонларнинг кўпайтмаси юзга тенг бўлганлигидан, юзнинг текисликдаги проекцияси қуйидагича бўлади:

$$S' = \cos\alpha. \tag{7.1}$$

Юзнинг текисликдаги проекциясини бошқача ифодалаш ҳам мумкин.

47- расмда ориентацияли S, S' юзлар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{a}'$ векторлар шаклида тасвирланган. Бу векторлар орасидаги бурчак ҳам α бўлади. Шундай қилиб, қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha \tag{7.2}$$

8. ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

Бир мисол олайлик. Тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи заррачага ўзгармас $\boldsymbol{F}$ куч таъсирида заррачанинг ўтган йўли билан ҳаракат йўналишини аниқловчи силжиш вектори $\boldsymbol{l}$ бўлсин. Модомики, $\boldsymbol{F}$ куч ва $\boldsymbol{l}$ силжиш бир йўналишда экан, бажарилган ишни топиш учун кучнинг сон қиймати силжишнинг сон қийматига, яъни йўлга кўпайтирилади:

$$A = F \cdot l.$$

Ишнинг ўлчов бирлиги куч билан силжишнинг ўлчов бирликларига қараб аниқланади. Таъсир қилувчи куч силжиш билан $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{l}})$ бурчак ҳосил қилса, бажарилган ишни топиш учун кучнинг силжиш йўналишига проекциясини олиб, йўлга кўпайтириш керак:

$$A = F \cos\alpha \cdot l = Fl \cos(\widehat{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{l}}).$$

Демак, ўзгармас кучнинг тўғри чизиқли йўлда бажарган иши куч ва силжиш векторлари модулларининг шу векторлар орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенг. Биз ишни ифодаловчи скаляр миқдор ҳосил қилдик. Икки вектордан ҳосил қилинган бундай скаляр шу векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади.

Икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор модулларининг шу векторлар орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмаси бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади. Скаляр кўпайтмани биз $(\boldsymbol{ab})$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси таърифига мувофиқ:

$$(\boldsymbol{ab}) = ab \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) \tag{8.1}$$

бўлади. Скаляр кўпайтмани баъзи авторлар тўғри кўпайтма, алгебраик кўпайтма, ички кўпайтма деб ҳам аташади. Адабиётда скаляр кўпайтма бошқа шаклларда ҳам ёзиб кўрсатилади:

$$\boldsymbol{ab},\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b}$$

ва ҳоказо.

Таърифга мувофиқ $(\boldsymbol{ba}) = ba \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$. Аммо $ba = ab$ ва косинус жуфт функция $\cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ бўлганлиги учун $(\boldsymbol{ba}) = ab \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ бўлади. Шундай қилиб,

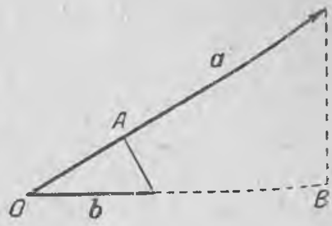
$$(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ba}), \tag{8.2}$$

яъни *скаляр кўпайтмада кўпаювчиларнинг ўринлари алмаштирилса, натижа ўзгармайди. Бу хосса скаляр кўпайтманинг коммутативлик хоссаси дейилади.*

$\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{b}$ вектор йўналишига проекцияси $OB = a_b = a\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ бўлади. $\boldsymbol{b}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор йўналишига проекцияси $OA = b_a = b\cos(\widehat{a, b})$ бўлади (48- расм). Демак, (8.1) формулани яна бошқача қилиб ёзиш мумкин:

$$(\boldsymbol{ab}) = ab_a = ba_b, \tag{8.3}$$

яъни *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бирининг модули билан иккинчи векторнинг шу вектор йўналишидаги проекцияси кўпайтмасига тенг.*



48- расм.

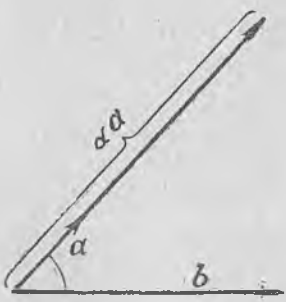
$\boldsymbol{b}$ вектор орт бўлса,

$$a_b = (\boldsymbol{ab}) = a\cos(\widehat{a, b})$$

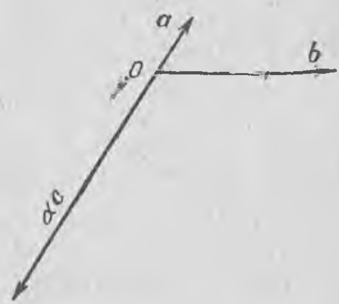
бўлади, яъни *векторнинг бирор ўқдаги проекцияси унинг шу орт билан скаляр кўпайтмасига тенг.*

Энди $\alpha\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини кўриб чиқайлик:

$$(\alpha\,\boldsymbol{ab}) = |\alpha\boldsymbol{a}|\,b\cos(\widehat{\alpha\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{8.4}$$



49- расм.



50- расм.

Бунда α скаляр бўлиб, $\alpha > 0$ ҳолда $\alpha\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ векторлар бир хил йўналишли (49- расм), демак, $|\alpha\,\boldsymbol{a}| = \alpha\,a$ ва $(\widehat{\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = (\widehat{a, \boldsymbol{b}})$. Бу ҳолда (8.4) га биноан:

$$(\alpha\,\boldsymbol{ab}) = \alpha\,ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{8.5}$$

α сон манфий бўлса, $\alpha\boldsymbol{a}$ вектор билан $\boldsymbol{a}$ вектор қарама-қарши йўналишларда бўлади.

Демак, $|\alpha\boldsymbol{a}| = -\alpha a$ ва $(\widehat{\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. Бу ҳолда (8.4) га биноан

$$(\alpha\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = -\alpha ab\cos\{\pi - (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\} = \alpha ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \qquad (8.6)$$

(8.1), (8.5) ва (8.6) дан кўрамизки

$$(\alpha\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}). \qquad (8.7)$$

Демак, скаляр кўпайтувчини скаляр кўпайтма белгисининг ташқарисига чиқариш ёки ичкарисига киритиш мумкин.

Икки вектор скаляр кўпайтмасининг таърифидан фойдаланиб, ушбу хусусий ҳолларни тушуниб олиш қийин эмас. Кўпаювчи $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар бир-бирига параллел бўлса,

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = ab.$$

бўлади.

Қисман, векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси вектор модулининг квадратига тенг: $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) = a^2$. Антипараллел векторлар учун: $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = -ab$. Перпендикуляр бўлган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг: $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = 0$.

Энди $\boldsymbol{a}$ векторнинг бошқа иккита $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор йиғиндиси $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ билан скаляр кўпайтмасини текширайлик. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ни $\boldsymbol{D}$ орқали белгилаб, (8.3) га биноан қуйидагини ёзамиз:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{D}) = aD_a.$$

Векторлар йиғиндисининг проекцияси тегишли проекциялар йиғиндисига тенг: $D_a = b_a + c_a$. Демак, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a(b_a + c_a) = ab_a + ac_a$ ёки (8.3) га биноан:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}), \qquad (8.8)$$

яъни *бир векторнинг бошқа икки вектор йиғиндисига скаляр кўпайтмасини топишда қавслар оддий алгебрадагидек очилади. Бу хусусият скаляр кўпайтманинг дистрибутивлик хусусияти дейилади.*

Охирги хоссадан фойдаланайлик. Кўпаювчи $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар қуйидагича олинган бўлсин:

$$\boldsymbol{a} = A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + A_m\boldsymbol{a}_m = \sum_{i=1}^{m} A_i\boldsymbol{a}_i,$$

$$\boldsymbol{b} = B_1\boldsymbol{b}_1 + B_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + B_n\boldsymbol{b}_n = \sum_{k=1}^{n} B_k\boldsymbol{b}_k,$$

бу ерда A_i, B_k скаляр миқдорлар ва $\boldsymbol{a}_i$ билан $\boldsymbol{b}_k$ эса берилган векторлардир. Скаляр кўпайтманинг тегишли хоссаларидан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$(\boldsymbol{ab}) = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i \boldsymbol{a}_i, \quad \sum_{k=1}^{n} B_k \boldsymbol{b}_k \right) =$$

$$= (A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + A_m\boldsymbol{a}_m, \; B_1\boldsymbol{b}_1 + B_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + B_n\boldsymbol{b}_n) =$$
$$= A_1B_1(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1) + A_1B_2(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2) + \ldots + A_1B_n(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_n) +$$
$$+ A_2B_1(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) + A_2B_2(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) + \ldots + A_2B_n(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_n) +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ A_mB_1(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1) + A_mB_2(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2) + \ldots + A_mB_n(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_iB_k(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_k).$$

Шундай қилиб:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_i \boldsymbol{a}_i, \quad \sum_{k=1}^{n} B_k \boldsymbol{b}_k \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_iB_k(\boldsymbol{a}_i \; \boldsymbol{b}_k). \qquad (8.9)$$

Бир мисол олайлик. Заррачага бир неча ўзгармас $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$ кучлар таъсир қилганда заррача силжиши $\boldsymbol{l}$ бўлсин. Бу силжишда тенг таъсир қилувчи $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i$ кучнинг бажарган иши:

$$A = (\boldsymbol{Fl}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{l} \right) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{l}) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

бўлади, бу ерда $A_i = (\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{l})$ иш $\boldsymbol{F}_i$ кучнинг $\boldsymbol{l}$ силжишда бажарган иши. Демак, тенг таъсир қилувчи кучнинг бажарган иши ташкил қилувчи айрим кучларнинг ишлари йиғиндисига тенг.

Бирор заррачанинг электр моменти $\boldsymbol{p}$ бўлсин. Кучланганлиги $\boldsymbol{E}$ бўлган электр майдонига киритилган бу заррачанинг энергияси $\mathcal{E}_e = -(\boldsymbol{pE})$ бўлади. Худди шунингдек, магнит моменти $\boldsymbol{m}$ бўлган заррачанинг кучланганлиги $\boldsymbol{H}$ бўлган магнит майдони таъсиридаги энергияси $\mathcal{E}_m = -(\boldsymbol{mH})$ бўлади.

Моддий муҳитдаги электр майдони энергиясининг ҳажмий зичлиги:

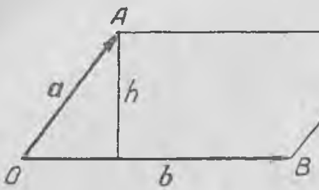
$$w_e = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{DE}),$$

бу ерда $\boldsymbol{D}$ — электр индукция вектори. Кўпчилик жисмлар учун $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, демак $w_e = \frac{1}{8\pi}\varepsilon E^2$. Моддий муҳитсиз фазода, яъни бўшлиқда $\varepsilon = 1$, демак $w_e = \frac{1}{8\pi}E^2$.

Худди шунингдек, моддий муҳитдаги магнит майдони энергиясининг ҳажмий зичлиги учун $w_m = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{BH})$, бу ерда $\boldsymbol{B}$ — магнит индукция вектори. Кўпчилик жисмлар учун $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, демак, $w_m = \frac{1}{8\pi}\mu H^2$. Бўшлиқда эса $\mu = 1$; демак $w_m = \frac{1}{8\pi}H^2$.

9. ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР КЎПАЙТМАСИ

Контури параллелограмм шаклидаги юз олайлик. Бу параллелограмм берилган $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлардан қурилган бўлсин (51-расм). Параллелограмм асоси b, баландлиги h билан белгиланса, унинг юзи:



51- расм.

$$S = hb$$

бўлади. Аммо

$$h = a \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

Демак,

$$S = ab \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

Берилган иккита вектор йўналишларидан фақат биринчи вектор йўналишини контурни айланиб чиқиш йўналиши сифатида қабул қилайлик. Берилган бу икки вектор биргаликда ориентацияли параллелограммни ҳосил қилади. Аммо ориентацияли юзни тасвирловчи векторнинг узунлиги юзнинг сон қийматига тенг, йўналиши эса юз нормали йўналишида бўлиб, қўл қоидасига бўйсунади. Нормалнинг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ орқали белгилайлик. Энди $\boldsymbol{a}$ вектор биринчи ва $\boldsymbol{b}$ вектор иккинчи ҳисобланса, чап қўл қоидасига биноан нормаль биз томон йўналган, ўнг қўл қоидасига биноан эса нормаль биздан нарига йўналган бўлади. Ориентацияли параллелограмм юзини тасвирловчи векторни $ab \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\, \boldsymbol{n}$ шаклида ифодалаш мумкин. *Берилган биринчи* $\boldsymbol{a}$ *вектор билан иккинчи* $\boldsymbol{b}$ *вектордан шу равишда ҳосил қилинган* $\boldsymbol{c}$ *вектор ўша векторларнинг вектор кўпайтмаси дейилади.* Вектор кўпайтмани биз $[\boldsymbol{ab}]$ орқали белгилайлик.

Шундай қилиб, икки векторнинг вектор кўпайтмаси таърифга мувофиқ:

$$[\boldsymbol{ab}] = ab \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\, \boldsymbol{n}, \tag{9.1}$$

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}] \tag{9.2}$$

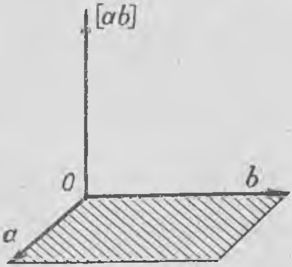
бўлади. Вектор кўпайтмани баъзи авторлар ташқи кўпайтма деб аташади. Адабиётда вектор кўпайтма бошқа шаклларда ҳам ёзиб кўрсатилади:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\ V\boldsymbol{ab},\ \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{ab} \text{ ва ҳоказо.}$$

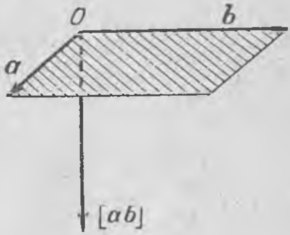
Таърифнинг ўзидан равшанки, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *векторларнинг вектор кўпайтмаси учинчи* $\boldsymbol{c}$ *вектор бўлиб:* 1) *узунлиги берилган векторлардан ясалган параллелограмм юзининг сон қий-*

матига тенг, 2) *йўналиши юз контурини биринчи вектор йўналиши бўйича айланиб чиқиш ҳаракатига мос олинган нормаль йўналиши билан бир хилдир.*

Масалан, биринчи вектор $\boldsymbol{a}$ қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, бизга қаратилган бўлсин, иккинчи вектор $\boldsymbol{b}$ қоғоз бетида ётсин (52-расм). Бу ҳолда вектор кўпайтма $[\boldsymbol{ab}]$ қоғоз бетида ётади ва ўнг қўл қоидасига мувофиқ юқорига қаратилади, чап қўл қоидасига мувофиқ эса пастга қаратилади (53- расм). Хуллас, ўнг қўл қоидаси билан чап қўл қоидаси алмаштирилса, вектор кўпайтманинг сон қиймати ўзгармасдан қолиб, йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради.



52- расм.



53- расм.

Ўнг ёки чап қўл қоидаларининг қайси биридан фойдаланиш принципиал аҳамиятга эга эмас. Лекин ўзининг аниқлиги ва қулайлиги туфайли ўнг қўл қоидаси (ёки унга мос бошқа қоидалар) фан ва техникада кўпроқ ишлатилади.

Агар биринчи вектор қилиб $\boldsymbol{b}$ ва иккинчи вектор қилиб $\boldsymbol{a}$ олинса, уларнинг вектор кўпайтмаси $[\boldsymbol{ba}]$ аввалги вектор кўпайтма $[\boldsymbol{ab}]$ га нисбатан сон қиймати бир хил, аммо йўналиши қўл қоидасига мувофиқ, қарама-қарши бўлади. Шундай қилиб:

$$[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]. \tag{9.3}$$

Демак, *вектор кўпайтмада кўпайтирилувчи векторларнинг ўринлари алмаштирилса, вектор кўпайтманинг сон қиймати ўзгармайди, аммо йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради. Бу хусусият вектор кўпайтманинг антикоммутативлик хусусияти дейилади.* Эслатиб ўтиш мумкин: (8.2) га мувофиқ, скаляр кўпайтма коммутативлик хусусиятига эга. Вектор купайтма эса бу коммутативлик хусусиятига эга эмас.

Бир хил йўналишдаги ёки қарама-қарши йўналишдаги икки векторнинг вектор кўпайтмаси нолга тенгдир. Жумладан $[\boldsymbol{aa}] = 0$.

Агар $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{a}$ бўлса, $[\boldsymbol{eb}] = [-\boldsymbol{ab}]$ булади. Аммо 54- расмдан равшанки, $[\boldsymbol{eb}] = -[\boldsymbol{ab}]$. Демак,

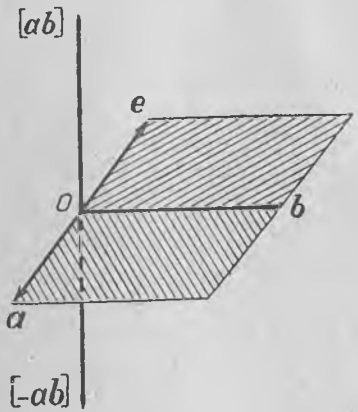
$$[-\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ab}], \tag{9.4}$$

яъни *икки вектордан бири ўз йўналишини қарама-қарши қилиб ўзгартса, уларнинг вектор кўпайтмаси ҳам йўналишини қарама-қаршисига ўзгартади.*

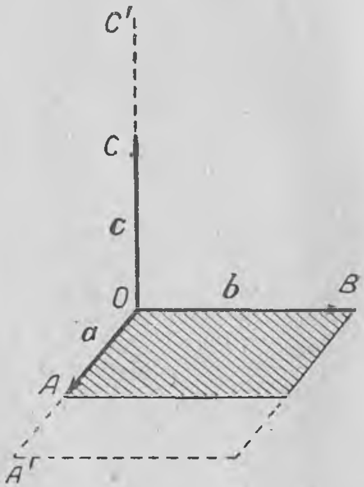
Скаляр кўпайтувчини вектор кўпайтма белгисининг ташқарисига чиқариш ёки ичкарисига киритиш мумкин:

$$\alpha[\boldsymbol{ab}] = [\alpha\boldsymbol{ab}], \tag{9.5}$$

бу ерда α—бирор ҳақиқий скаляр миқдордир. Ҳақиқатан, α мусбат сон бўлсин. $\alpha\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{b}$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзи $\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{b}$ векторлардан ясалган параллелограмм юзидан α марта катта бўлади, аммо нормаль йўналиши ўзгармайди (55- расм).



54- расм.



55- расм.

Шуларга асосланиб, тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC} = [\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}] = [\boldsymbol{ab}],$$

$$\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA} = \alpha\boldsymbol{a},\ \ \overrightarrow{OC'} = \alpha\overrightarrow{OC} = \alpha[\boldsymbol{ab}],\ \ \overrightarrow{OC'} = [\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}] = [\alpha\boldsymbol{ab}].$$

Демак:

$$\alpha[\boldsymbol{ab}] = [\alpha\boldsymbol{ab}].$$

Агар α манфий экан, $\alpha = -\beta$ қилиб олишимиз мумкин, бу ерда энди β мусбат ҳисобланади. Шунинг учун, юқоридагиларга асосланиб бундай ёзамиз:

$$\beta\,[\boldsymbol{ab}] = [\beta\boldsymbol{ab}] \text{ ва } -\alpha\,[\boldsymbol{ab}] = [-\alpha\boldsymbol{ab}].$$

(9.4) га мувофиқ $[-\alpha\boldsymbol{ab}] = -[\alpha\boldsymbol{ab}]$ бўлади, демак, охири

$$\alpha\,[\boldsymbol{ab}] = [\alpha\boldsymbol{ab}],$$

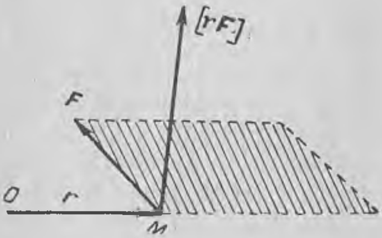
яъни яна ўша исбот қилиниши лозим бўлган (9.5) формула келиб чиқди.

Вектор кўпайтмага мисоллар келтирайлик. M нуқтада жойлашган заррачанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ бўлсин (56- расм). *Радиус-векторнинг шу заррачага таъсир қилувчи* $\boldsymbol{F}$ *кучга вектор кўпайтмаси кучнинг О нуқтага нисбатан моменти дейилади:*

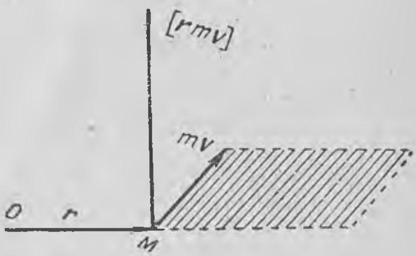
$$mom_o\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{rF}].$$

Заррача радиус-векторининг шу заррача ҳаракат миқдори $m\boldsymbol{v}$ *га вектор кўпайтмаси ҳаракат миқдорининг О нуқтага нисбатан моменти дейилади* (57- расм).

$$mom_o(m\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}].$$



56- расм.



57- расм.

Магнит майдонининг ҳаракатдаги электр зарядга таъсир кучи *Лорентц кучи* дейилади. Агар бирор заррачанинг электр заряди e ва тезлиги $\boldsymbol{v}$, ташқи магнит майдонининг кучланганлиги $\boldsymbol{H}$ десак, Лорентц кучи $\boldsymbol{f} = \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{vH}]$ шаклида ифодаланади, бу ерда $c = 3 \cdot 10^{10}\,\frac{см}{сек}$ (ёруғликнинг бўшлиқда тарқалиш тезлиги).

Йўналиши тўлқиннинг тарқалиш йўналишини ва узунлиги шу йўналишга перпендикуляр турган 1 *см*^{2} юздан 1 *сек* ичида ўтган энергия миқдорини тасвирловчи вектор *нурланиш векто-*

ри ёки *Умов вектори* деб аталади. Масалан, электромагнит тўлқини учун Умов вектори $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$, бу ерда $\boldsymbol{E}$ ва $\boldsymbol{H}$—электромагнит майдони кучланганликлари; $\pi = 3{,}14$ ва $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{сек}$.

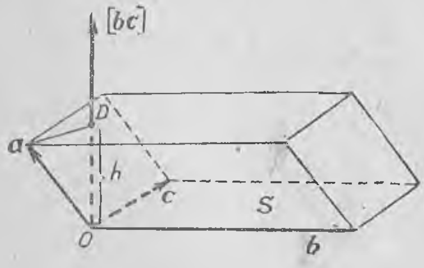
Бирор контурдаги электр ток кучи I ва ток йўналишида олинган шу контур элементи $d\boldsymbol{l}$ бўлсин. Элементар ток $Id\boldsymbol{l}$ билан ифодаланади. Токнинг магнит майдони шу токни ташкил қилган элементар токларнинг магнит майдонларидан ҳосил бўлади. Фазодаги бирор нуқтанинг элементар токка нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ бўлсин. Моддий муҳитдаги элементар токнинг бу нуқтада ҳосил қилган магнит майдони кучланганлиги $d\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\left[Id\boldsymbol{l}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]$ бўлади. *Бу формула Био — Савар — Лаплас қонунини ифодалайди.*

Ташқи магнит майдонининг бирор контурдаги токка таъсир кучи шу ташқи магнит майдонининг элементар токларга таъсир қилиш кучларидан ҳосил бўлади. Магнит индукцияси вектори $\boldsymbol{B}$ бўлган ташқи магнит майдонининг унга киритилган элементар токка таъсир қилиш кучи $d\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}[Id\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}]$ бўлади. *Бу формула Ампер қонунини ифодалайди.*

10. ВЕКТОРЛАРНИНГ МУРАККАБ КЎПАЙТМАЛАРИ

Компланар бўлмаган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектордан қурилган параллелепипед ҳажмини ҳисоблайлик (58- расм). $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлардан қурилган параллелограммнинг S юзи вектор кўпайтма $[\boldsymbol{bc}]$ нинг модули билан ифодаланади:

$$S = |[\boldsymbol{bc}]|. \qquad (10.1)$$



58- расм.

$[\boldsymbol{bc}]$ вектор кўпайтма билан S юз нормалининг бирлик вектори бир йўналишдадир:

$$[\boldsymbol{bc}] = |[\boldsymbol{bc}]| \cdot \boldsymbol{n}. \qquad (10.2)$$

Вектор кўпайтманинг йўналиши ўнг қўл қоидасига мувофиқ олинди (58- расм).

Параллелепипед ҳажми асос юзи билан баландлик кўпайтмасига тенг:

$$V = S \cdot h. \qquad (10.3)$$

h баландлик ($\overrightarrow{OD}$ векторнинг узунлиги) $\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{n}$ нормаль йўналишига туширилган проекциясидир:

$$h = a_n = a \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}}). \qquad (10.4)$$

S билан h ифодаларини (10.3) га қўямиз:

$$V = a\,|[\boldsymbol{bc}]|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}}).$$

(10.2) га асосланиб, ушбуни ёза оламиз:

$$V = (\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]). \qquad (10.5)$$

Бу ерда $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *векторларнинг вектор кўпайтмаси* $[\boldsymbol{bc}]$ *билан* $\boldsymbol{a}$ *векторни скаляр кўпайтирдик. Бу типдаги кўпайтма аралаш кўпайтма дейилади.* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ дан қурилган параллелограммдан ташқари, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ дан ёки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ дан қурилган параллелограммларни ҳам параллелепипеднинг асоси қилиб олиш мумкин. У вақтда параллелепипеднинг ҳажмини яна икки хил ифодалаш мумкин:

$$V = (\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{ca}]), \quad V = (\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]).$$

Шундай қилиб,

$$(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{ca}]) = \boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]). \qquad (10.6)$$

Демак, аралаш кўпайтмадаги уч векторнинг бирин-кетинлик тартибини (биринчидан кейин иккинчи, иккинчидан кейин учинчи, учинчидан кейин биринчи) сақлаб, уларнинг ўринларини алмаштириш мумкин.

Олинган уч векторнинг иккитаси коллинеар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Компланар бўлган уч векторнинг аралаш кўпайтмаси ҳам нолга тенг, чунки бу ҳолда тегишли параллелепипед ҳажми нолга тенгдир.

Компланар бўлмаган учта векторнинг бир-бирига нисбатан жойланиш тартибига қараб, аралаш кўпайтма қиймати турлича бўлади. 58- расмда тасвирланган уч $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторнинг аралаш кўпайтмаси $(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])$ ни ҳисоблашда биз $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторларни ўнг ориентацияли деб қабул қилган эдик, $\boldsymbol{a}$ билан $[\boldsymbol{bc}]$ орасидаги бурчак ўткир бурчак эди, шу сабабли аралаш кўпайтма ҳам мусбатдир. Агар ҳисоблашда $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ва $[\boldsymbol{bc}]$ векторлар чап ориентацияли деб қабул қилинса, аралаш кўпайтма манфий бўлади, чунки $\boldsymbol{a}$ билан $[\boldsymbol{bc}]$ орасидаги бурчак ўтмас. Бу ерда аралаш кўпайтмадаги уч векторнинг аниқ тартиб билан бирин-кетин туриши муҳимдир: $\boldsymbol{a}$ дан кейин $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ дан кейин $\boldsymbol{c}$.

Компланар бўлмаган уч вектор $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ўзаро ё ўнг ориентацияли ёки чап ориентацияли бўлиши мумкин. *Агар* $\boldsymbol{a}$ *билан* $[\boldsymbol{bc}]$ *орасидаги бурчак ўткир бўлса, яъни аралаш* $(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])$

кўпайтма мусбат бўлса, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларнинг ориентацияси билан $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторларнинг ориентацияси бир хил деб атаймиз. Масалан, 58- расмда келтирилган мисолда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар ўнг ориентациялидир, чунки $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторлар ўнг ориентацияли қилиб олингандагина аралаш кўпайтма мусбат бўлади. $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторлар чап ориентацияли ҳисобланганда, ўша расмда тасвирланган $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар чап ориентацияли бўлмайди, чунки уларнинг аралаш кўпайтмаси манфийдир.

Шундай $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар бўлиши мумкинки $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторлар чап ориентацияли ҳисобланганда аралаш кўпайтма $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}])$ мусбат ишорали экан, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар чап ориентацияга эга бўлади. Агар $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $[\boldsymbol{bc}]$ векторлар ўнг ориентацияли деб ҳисобланса, чап ориентацияли $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси манфий ишорали бўлиб чиқади.

Хуллас, параллелепипедни тасвирловчи учта вектор ёки ўнг ориентацияли ёки чап ориентацияли бўлади. Бу векторларнинг аралаш кўпайтмаси эса ориентация ўзгариши билан ишорасини қарама-қаршисига ўзгартади.

Аралаш кўпайтманинг мусбат ёки манфий бўлишидан қатъи назар, унинг абсолют қиймати шу уч вектор тасвирлаётган параллелепипеднинг ҳажмига тенгдир. Лекин параллелепипед ҳажмини ифодалашда аралаш кўпайтмани асос қилиб олиш ҳам мумкин. У вақтда, умуман, $V=(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])$ бўлади, демак, ориентация ўзгариши билан ҳажм ҳам ишорасини ўзгартади, яъни ориентациянинг ўнг ёки чаплигига қараб, ҳажм мусбат ёки манфий бўлади.

Аралаш кўпайтманинг (10.6) даги хоссасидан фойдаланиб, вектор кўпайтманинг дистрибутивлик хоссасини исботлаш мумкин:

$$[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3]=[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]+[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3], \tag{10.7}$$

яъни бир вектор билан бошқа икки вектор йиғиндисининг вектор кўпайтмасини топишда қавслар одатдагидек очилади.

Ҳақиқатан, бирор $\boldsymbol{a}$ вектор олайлик. $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{a}_1$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси $(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\ [\boldsymbol{aa}_1])$ ни текширайлик. Скаляр кўпайтма дистрибутивлик хоссасига эга:

$$(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\ [\boldsymbol{aa}_1])=(\boldsymbol{a}_2\,[\boldsymbol{aa}_1])+(\boldsymbol{a}_3\,[\boldsymbol{aa}_1]). \tag{10.8}$$

(10.6) га биноан, тубандагиларни ёзишимиз мумкин:

$$(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\ [\boldsymbol{aa}_1])=(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3]),$$
$$(\boldsymbol{a}_2\,[\boldsymbol{aa}_1])=(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]),$$
$$(\boldsymbol{a}_3\,[\boldsymbol{aa}_1])+(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3]).$$

Буларни (10.8) га қўямиз:

$$(a\,[a_1,\ a_2 + a_3]) = (a\,[a_1 a_2]) + (a\,[a_1 a_3]).$$

Энди ҳамма ҳадларни бир томонга кўчирамиз:

$$(a\,[a_1,\ a_2 + a_3]) - (a\,[a_1 a_2]) - (a\,[a_1 a_3]) = 0$$

ёки

$$(a,\ [a_1,\ a_2 + a_3] - [a_1 a_2] - [a_1 a_3]) = 0.$$

Кўпаювчи векторлар бир-бирига перпендикуляр ёки уларнинг биттаси ноль векторга тенг бўлса, скаляр кўпайтма нолга тенг бўлади. Аммо a векторни ихтиёрий деб олган эдик. Шунинг учун:

$$[a_1,\ a_2 + a_3] - [a_1 a_2] - [a_2 a_3] = 0$$

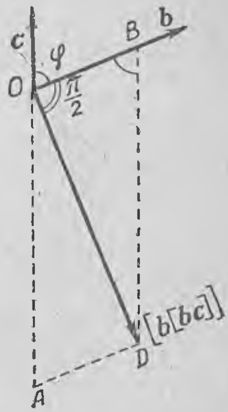
ёки

$$[a_1,\ a_2 + a_3] = [a_1 a_2] + [a_1 a_3],$$

биз шуни исботламоқчи эдик.

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси учинчи векторга вектор равишда кўпайтирилса, натижада янги вектор ҳосил бўлади. Бу типдаги кўпайтма *икки қайтали вектор кўпайтма* дейилади. Масалан, учта a, b, c векторнинг икки қайтали вектор кўпайтмаси $[a\,[bc]]$ ни текшириб қарайлик. Икки қайтали вектор кўпайтма учун ушбу муҳим айният ўринлидир:

$$[a\,[bc]] = b\,(ac) - c\,(ab). \qquad (10.9)$$



59- расм.

Ҳақиқатан, икки қайтали вектор кўпайтма $[a\,[bc]]$ ҳам a векторга, ҳам $[bc]$ вектор кўпайтмага перпендикуляр бўлади. b, c векторларнинг вектор кўпайтмаси улар ётган текисликка перпендикуляр бўлганлиги учун, икки қайтали вектор, $[a\,[bc]]$ кўпайтма шу текисликка параллел бўлади. Демак, b, c ва $[a\,[bc]]$ векторлар компланардир. Компланар учта вектордан ҳар бирини қолган иккитаси буйича ажратиш мумкин. Шунинг учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$[a\,[bc]] = \beta b + \gamma c. \qquad (10.10)$$

Бу ерда β, γ—вақтинча номаълум иккита скаляр.

b, c векторлар ётган текисликни қоғоз бети деб ҳисоблайлик (59- расм).

Ўнг қўл қоидасига мувофиқ, вектор $[bc]$ кўпайтма қоғоз бетига перпендикуляр булиб, биз томон йуналган. У вақтда икки қайтали вектор $[b\,[bc]]$ кўпайтма қоғоз бетида ётади ва b векторга перпендикуляр бўлиб, пастга қарайди. Икки қайтали вектор кўпайтманинг узунлигини диагональ ҳисоблаб, b, c векторлар ётган тўғри чизиқлар устида параллелограмм қурамиз. Равшанки,

$$OD = |[b\,[bc]]| = |b|\cdot|[bc]| = b\cdot bc\sin\varphi = b^2c\sin\varphi, OD = BD\sin\varphi,$$

демак, $BD = b^2c$ ва $OB = BD\cos\varphi = b^2c\cos\varphi$.

59- расмга қараб, қуйидагиларни ёзамиз:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{OD} = [b\,[bc]],$$

$$\overrightarrow{OB} = b^2c\cos\varphi\,\frac{b}{b} = b\,c\cos\varphi.\, b = (bc)\,b,$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} = b^2c\left(-\frac{c}{c}\right) = -b^2c = -(bb)\,c.$$

Демак,

$$\overrightarrow{OD} = (bc)\,b - (bb)\,c,$$

яъни:

$$[b\,[bc]] = b\,(b\,c) - c\,(bb). \qquad (10.\ 11)$$

Энди номаълум β, γ сонларни аниқлаш осон. Шу мақсадда (10.10) нинг икки томонини скаляр равишда b векторга кўпайтирайлик:

$$(b\,[a\,[bc]]) = \beta\,(bb) + \gamma\,(b\,c).$$

Бу тенгликнинг чап томонини (10.6) ва (10.11) формулаларга мувофиқ ёзиб оламиз:

$$(b\,[a\,[bc]]) = (a\,[[bc]\,b]) =$$
$$= (a,\ c\,(bb) - b\,(bc)) = (ac)\,(bb) - (ab)\,(bc).$$

Демак:

$$(ac)\,(bb) - (ab)\,(bc) = \beta\,(bb) + \gamma\,(bc),$$

бу ердан:

$$\{\beta - (ac)\}\,(bb) + \{\gamma + (ab)\}\,(bc) = 0.$$

b, c векторлар ихтиёрий бўлганлигидан, сўнгги тенгламани қониқтириш учун катта қавслардаги ифодалар нолга тенг бўлиши керак. Натижада $\beta = (ac)$ ва $\gamma = -(ab)$, (10.10) га мувофиқ:

$$[a\,[bc]] = b\,(ac) - c\,(ab),$$

биз шуни исботламоқчи эдик. Бу формула икки қайтали вектор кўпайтманинг иккинчи ва учинчи векторлар бўйича ажратилишини ифодалайди.

Муҳим бир ҳол устида тўхтаб ўтайлик. (10.9) формулада $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}]] = \boldsymbol{b}a^2 - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}).$$

Бундан $\boldsymbol{b}$ векторни аниқлайлик:

$$\boldsymbol{b} = \frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})}{a^2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}]]. \tag{10.12}$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи вектор $\boldsymbol{a}$ векторга параллел, иккинчиси эса $\boldsymbol{a}$ векторга перпендикулярдир. *Шундай қилиб, ҳар қандай $\boldsymbol{b}$ векторни берилган $\boldsymbol{a}$ векторга параллел ва перпендикуляр бўлган икки векторга ажратиш мумкин.*

Энди ушбу:

$$\boldsymbol{a} = A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + A_m\boldsymbol{a}_m = \sum_{i=1}^{m} A_i\boldsymbol{a}_i,$$

$$\boldsymbol{b} = B_1\boldsymbol{b}_1 + B_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + B_n\boldsymbol{b}_n = \sum_{k=1}^{n} B_k\boldsymbol{b}_k$$

векторларнинг вектор кўпайтмасини топайлик:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] &= \Big[\sum_{i=1}^{m} A_i\boldsymbol{a}_i, \quad \sum_{k=1}^{n} B_k\boldsymbol{b}_k\Big] = \\
&= [A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + A_m\boldsymbol{a}_m,\ B_1\boldsymbol{b}_1 + B_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + B_n\boldsymbol{b}_n] = \\
&= A_1B_1[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1] + A_1B_2[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2] + \ldots + A_1B_n[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_n] + \\
&+ A_2B_1[\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1] + A_2B_2[\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2] + \ldots + A_2B_n[\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_n] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ A_mB_1[\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1] + A_mB_2[\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2] + \ldots + A_mB_n[\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_n] = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_iB_k[\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_k].
\end{aligned}$$

Шундай қилиб:

$$\Big[\sum_{i=1}^{m} A_i\boldsymbol{a}_i, \quad \sum_{k=1}^{n} B_k\boldsymbol{b}_k\Big] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_iB_k[\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_k] \tag{10.13}$$

бўлади.

Масалан, заррачага $F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучлар таъсир қилсин. Уларнинг тенг таъсир қилувчиси $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ нинг бирор нуқтага нисбатан моменти:

$$mom_0 F = [r \sum_{i=1}^{n} F_i] = \sum_{i=1}^{n} [r F_i]$$

бўлади.

Демак, тенг таъсир қилувчи кучнинг бирор нуқтага нисбатан олинган моменти ташкил қилувчи айрим кучларнинг ўша нуқтага нисбатан олинган моментлари йиғиндисига тенгдир. Механикадаги Вариньон теоремаси мана шу айтилганлардан иборат ва юқоридаги формулада ифодаланган.

11. ЎЗАРО ВЕКТОРЛАР

Ҳар қандай векторни компланар бўлмаган учта вектор бўйича ажратиш мумкинлигини биламиз (5.2):

$$D = \alpha a + \beta b + \gamma c. \tag{11.1}$$

Бу формулада α, β, γ учта номаълум скаляр. (11.1) нинг икки томонини вектор $[bc]$ кўпайтмага скаляр равишда кўпайтирайлик:

$$(D[bc]) = \alpha (a[bc]),$$

чунки аралаш кўпайтмада кўпаювчилардан иккитаси бир хил бўлса, кўпайтма нолга тенг бўлади: $(b[bc]) = 0$, $(c[bc]) = 0$.

Демак:
$$\alpha = \frac{(D[bc])}{(a[bc])}.$$

Юқоридаги сингари мулоҳазаларни такрорлаб, β, γ ни ҳам аниқлаш мумкин:

$$\beta = \frac{(D[ca])}{(b[ca])},$$

$$\gamma = \frac{(D[ab])}{(c[ab])}.$$

Аралаш кўпайтма учун $(a[bc]) = (b[ca]) = (c[ab])$ бўлганлиги сабабли:

$$\alpha = \frac{(D[bc])}{(a[bc])}, \quad \beta = \frac{(D[ca])}{(a[bc])}, \quad \gamma = \frac{(D[ab])}{(a[bc])}$$

бўлади. Буларни (11.1) га қўямиз:

$$D = \frac{(D[bc])}{(a[bc])} a + \frac{(D[ca])}{(a[bc])} b + \frac{(D[ab])}{(a[bc])} c. \tag{11.2}$$

Олинган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор билан қуйидагича боғланган учта $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ вектор киритайлик:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^* &= \frac{[\boldsymbol{bc}]}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])}, \\ \boldsymbol{b}^* &= \frac{[\boldsymbol{ca}]}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])}, \\ \boldsymbol{c}^* &= \frac{[\boldsymbol{ab}]}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Буларни (11.2) га қўямиз:

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{a}^*)\,\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{D}\boldsymbol{b}^*)\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{D}\boldsymbol{c}^*)\,\boldsymbol{c}. \tag{11. 4}$$

$\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ векторлар аввалги векторларга нисбатан ўзаро векторлар дейилади.

Ўзаро векторларнинг аралаш кўпайтмасини топайлик. (11.3) га асосланиб, қуйидагини ёзамиз:

$$(\boldsymbol{a}^*\,[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]) = \frac{1}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])^3}\cdot([\boldsymbol{bc}]\,[[\boldsymbol{ca}]\,[\boldsymbol{ab}]]). \tag{11.5}$$

Вектор $[\boldsymbol{ca}]$ кўпайтмани вақтинча $\boldsymbol{k}$ билан белгиласак, (10.9) га мувофиқ:

$$\begin{aligned} [[\boldsymbol{ca}]\,[\boldsymbol{ab}]] &= [\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{ab}]] = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{kb}) - \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ka}) = \\ &= \boldsymbol{a}\,([\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\,([\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]) \end{aligned} \tag{11.6}$$

бўлади, чунки:

$$([\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{ca}]) = (\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]) \text{ ва } ([\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{a}) = 0.$$

Натижада:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}^*\,[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]) &= \frac{1}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]]^3}\,([\boldsymbol{bc}]\,\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])) = \\ &= \frac{1}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])^3}\,(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])^2, \end{aligned}$$

яъни

$$(\boldsymbol{a}^*[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]) = \frac{1}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])} \tag{11.7}$$

келиб чиқади.

Компланар бўлмаган $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар учун $(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]) \neq 0$. Демак, $(\boldsymbol{a}^*\,[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]) \neq 0$, яъни ўзаро векторлар компланар эмас. (11.3), (11.6) ва (11.7) га биноан:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*] &= \frac{1}{(\boldsymbol{a}[\,\boldsymbol{bc}])^2}\cdot[[\boldsymbol{ca}]\,[\boldsymbol{ab}]] = \\ &= \frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}])} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}^*\,[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]). \end{aligned}$$

Бу ердан $\boldsymbol{a}$ ни аниқлаш мумкин. Худди шунингдек, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ ни ҳам аниқлаймиз. Шундай қилиб:

$$\boldsymbol{a} = \frac{[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]}{(\boldsymbol{a}^*[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*])},$$
$$\boldsymbol{b} = \frac{[\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{a}^*]}{(\boldsymbol{a}^*[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*])}, \qquad (11.8)$$
$$\boldsymbol{c} = \frac{[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*]}{(\boldsymbol{a}^*[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*])}.$$

Демак, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ векторларга нисбатан ўзаро векторлар бўлади.

Ҳар қандай векторни компланар бўлмаган учта вектор бўйича ажратиш мумкин:

$$\boldsymbol{D} = \alpha^*\boldsymbol{a}^* + \beta^*\boldsymbol{b}^* + \gamma^*\boldsymbol{c}^*. \qquad (11.9)$$

Юқоридаги (11.1) ни (11.4) га келтириш мулоҳазаларидан фойдаланиб, α^*, β^*, γ^* скалярларни аниқлаймиз. Натижада:

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}^* + (\boldsymbol{D}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}^* + (\boldsymbol{D}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{c}^* \qquad (11.10)$$

бўлади.

Ўзаро векторлар, (11.3) ёки (11.8) га мувофиқ, ушбу шартларга бўйсунади:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*) = 1, \quad (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^*) = 0, \quad (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}^*) = 0,$$
$$(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^*) = 0, \quad (\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^*) = 1, \quad (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^*) = 0, \qquad (11.11)$$
$$(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}^*) = 0, \quad (\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}^*) = 0, \quad (\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^*) = 1.$$

Ҳар қандай векторнинг ўзаро векторлар бўйича ажратилишини ифодаловчи (11.4) ва (11.10) формулалар *Гиббс формулалари* дейилади.

12. ФАЗО ОРИЕНТАЦИЯСИ ВА ИНВЕРСИЯСИ

Берилган $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар компланар бўлмасин. Компланар булмаган $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ векторларнинг ҳар бирини $\boldsymbol{a}_1^*$, $\boldsymbol{a}_2^*$, $\boldsymbol{a}_3^*$ орқали ифодалаш мумкин. (11.10) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\boldsymbol{b}_1 = (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1^* + (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_2^* + (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{a}_3^*,$$
$$\boldsymbol{b}_2 = (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1^* + (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_2^* + (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{a}_3^*,$$
$$\boldsymbol{b}_3 = (\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1^* + (\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_2^* + (\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{a}_3^*.$$

Бу ердан:

$$[\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3] = (\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_2)[\boldsymbol{a}_1^*\boldsymbol{a}_2^*] + (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_3)[\boldsymbol{a}_1^*\boldsymbol{a}_3^*] +$$
$$+ (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_1)[\boldsymbol{a}_2^*\boldsymbol{a}_1^*] + (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_3)[\boldsymbol{a}_2^*\boldsymbol{a}_3^*] +$$
$$+ (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_1)[\boldsymbol{a}_3^*\boldsymbol{a}_1^*] + (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_2)[\boldsymbol{a}_3^*\boldsymbol{a}_2^*].$$

Сўнгги икки формулага кўра:

$$\begin{aligned}(b_1[b_2b_3]) = {} & (b_1a_1)(b_2a_2)(b_3a_3)(a_1^*[a_2^*\,a_3^*]) + \\ & + (b_1a_1)(b_2a_3)(b_3a_2)(a_1^*[a_3^*\,a_2^*]) + \\ & + (b_1a_2)(b_2a_1)(b_3a_3)(a_2^*[a_1^*\,a_3^*]) + \\ & + (b_1a_2)(b_2a_3)[b_3a_1)(a_2^*[a_3^*\,a_1^*]) + \\ & + (b_1a_3)(b_2a_1)(b_3a_2)(a_3^*[a_1^*\,a_2^*]) + \\ & + (b_1a_3)(b_2a_2)(b_3a_1)(a_3^*[a_2^*\,a_1^*])\end{aligned}$$

бўлади.

Вектор кўпайтманинг антикоммутативлиги ва аралаш купайтманинг (10.6) да ифодаланган хоссасини эсласак, юқоридаги формулани шундай ёза оламиз:

$$\begin{aligned}(b_1[b_2b_3]) = {} & \{(b_1a_1)(b_2a_2)(b_3a_3) + (b_1a_2)(b_2a_3)(b_3a_1) + \\ & + (b_1a_3)(b_2a_1)(b_3a_2) - (b_1a_1)(b_2a_3)(b_3a_2) - \\ & - (b_1a_2)(b_2a_1)(b_3a_3) - (b_1a_3)(b_2a_2)(b_3a_1)\}\cdot(a_1^*[a_2^*\,a_3^*]).\end{aligned}$$

Бу формулани, (11.7) га биноан, учинчи тартибли детерминант шаклида ёзиш мумкин:

$$(a_1[a_2a_3])(b_1[b_2b_3]) = \begin{vmatrix} (a_1b_1) & (a_1b_2) & (a_1b_3) \\ (a_2b_1) & (a_2b_2) & (a_2b_3) \\ (a_3b_1) & (a_3b_2) & (a_3b_3) \end{vmatrix}. \qquad (12.1)$$

Хусусий $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$ ҳолда:

$$(a_1[a_2\,a_3])^2 = \begin{vmatrix} (a_1a_1) & (a_1a_2) & (a_1a_3) \\ (a_2a_1) & (a_2a_2) & (a_2a_3) \\ (a_3a_1) & (a_3a_2) & (a_3a_3) \end{vmatrix} \qquad (12.2)$$

бўлади.

Бу детерминант a_1, a_2, a_3 векторлар учун Грам детерминанти дейилади.

Компланар бўлмаган учта векторнинг Грам детерминанти нолдан фарқли ва мусбатдир. Компланар учта векторнинг Грам детерминанти нолга тенг.

Ўзаро перпендикуляр бўлган учта векторнинг Грам детерминанти шу вектор модуллари квадратларининг кўпайтмасига тенг:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_1^2\,a_2^2\,a_3^2.$$

(12.1) формуладан татбиқларда кўп учрайдиган муҳим бир натижа келтириб чиқариш мумкин. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар системаси билан $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ векторлар системасининг иккаласи ҳам ё ўнг ёки чап ориентацияли бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмалари бир хил ишорали бўлади, демак, (12.1) нинг ўнг томонидаги детерминант мусбат бўлади. Агар бу икки система векторлари турли ориентацияли бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмалари ҳам турли ишорали бўлади, демак, (12.1) нинг ўнг томонидаги детерминант манфий бўлади. *Шундай қилиб,* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ *векторлар системаси билан* $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ *векторлар системаси бир хил ориентацияли бўлса:*

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) \\ (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3) \end{vmatrix} > 0 \tag{12.3}$$

ва турли ориентацияли бўлса:

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) \\ (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3) \end{vmatrix} < 0 \tag{12.4}$$

бўлади.

Асос сифатида олинган учта вектор системасининг ориентацияси фазо ориентацияси дейилади. Шу векторлар системасининг ўнг ёки чап ориентацияли бўлишига қараб, фазо ҳам ўнг ёки чап ориентацияли ҳисобланади. *Ўнг ориентациядан чап ориентацияга ўтиш ёки чап ориентациядан ўнг ориентацияга ўтиш, яъни ориентация ўзгариши инверсия дейилади.*

Биламизки, учта вектор системасининг ориентацияси шу векторлар аралаш кўпайтмасининг ишораси билан аниқланади. Учта вектор аралаш кўпайтмасининг ишораси улардан иккитаси ҳосил қилган вектор кўпайтманииг ориентациясига боғлиқдир. Шунинг учун юқорида келтирилган фазо ориентацияси тушунчасини янада бошқачароқ таърифлаш мумкин, чунончи: *фазода жойлашган бирор контур билан чегараланган юз ориентацияси фазо ориентацияси дейилади.*

Фазо ориентацияси ва инверсияси тушунчалари майдонлар назариясидаги муҳим тушунчалардандир.

13. ОРИЕНТАЦИЯЛИ ЁПИҚ СИРТ

Компланар бўлмаган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор олайлик. Уларнинг боши бир нуқтага келтирилган бўлсин. Шу векторлар билан аниқланган тўрт ёқли ёпиқ сирт — тетраэдрни текшириб кўрайлик (60- расм):

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}.$$

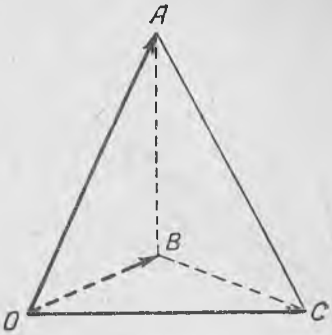
Сирт нормалининг йўналиши ичкарига қаратилса, бу нормаль ички нормаль, ташқарига қаратилган бўлса, ташқи нормаль дейилади. Бундан сўнг нормаль деганда ташқи нормални кўзда тутамиз. Тетраэдр ёқлари бўлган OAB, OBC, OCA, BAC нинг юзларини S_1, S_2, S_3, S_4 билан белгилайлик. Ориентацияли юзларни тасвирловчи векторларни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\right] = \frac{1}{2}[ab],$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC}\right] = \frac{1}{2}[bc],$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OA}\right] = \frac{1}{2}[ca],$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\right].$$



60- расм.

Аммо:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = a - b,$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = c - b.$$

Буларни ўз ўринларига қўямиз:

$$S_4 = \frac{1}{2}[a - b,\ c - b]$$

ва қавсларни очамиз:

$$S_4 = \frac{1}{2}[a - b,\ c[- \frac{1}{2}[a - b,\ b] =$$

$$= \frac{1}{2}[ac] - \frac{1}{2}[bc] - \frac{1}{2}[ab].$$

Бундан:

$$S_4 + \frac{1}{2}[ca] + \frac{1}{2}[bc] + \frac{1}{2}[ab] = 0$$

ёки

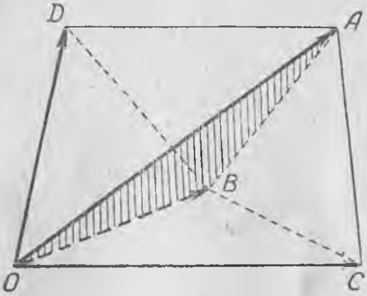
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$$

келиб чиқади, яъни *тетраэдр ёқларининг ориентацияли юзларини тасвирловчи векторлар йиғиндиси нолга тенгдир.*

Тетраэдр ёқларининг юзларини чегараловчи контурларни айланиб чиқиш йўналишлари ташқи нормалга мосланган бўлиши керак.

Энди кўп ёқли бирор ёпиқ сирт — полиэдрни олайлик. Асослари полиэдр ёқларини ташкил қилган, учлари полиэдр-нинг бирор ички нуқтасида жойлашган ва ҳар иккитаси умумий ёққа эга булган тетраэдрлар тузиб чиқайлик (61-расмда B — ички нуқтада учлари жойлашган шу тетраэдрлардан фақат иккитасигина курсатилган ва уларнинг умумий ёғи OAB штрихлаб қуйилган)

Бу ерда барча тетраэдр ёқларининг ориентацияли юзларини тасвирловчи векторлар йиғиндиси нолга тенг булади. Ҳақиқатан, икки қушни тетраэдрга умумий булган ёқнинг ориентацияли юзини тасвирловчи вектор шу икки қушни тетраэдр учун узунлиги бир хил, аммо қарама-қарши йуналишда булади. Натижада барча тетраэдрлар умумий ёқларининг ориентацияли юзларини тасвирловчи векторларнинг йиғиндиси нолга тенг булади. Демак, полиэдр сиртини ташкил қилган тетраэдр асосларининг ориентацияли юзларини тасвирловчи векторлар йиғиндиси нолга тенгдир. Полиэдр сиртини ташкил қилувчи учбурчакларнинг ҳар бири ташқи нормальга муносиб олинган айланиб чиқиш йуналишидаги контур билан чегараланган.



61- расм.

Ҳар қандай ёпиқ сиртни чексиз куп ва чексиз кичик ёқлардан тузилган полиэдр деб қарашимиз мумкин. *Демак, ҳар қандай ёпиқ сирт ҳосил қилувчи чексиз куп ва чексиз кичик ёқларнинг ориентацияли юзларини тасвирловчи векторлар йиғиндиси нолга тенгдир.*

Чексиз кичик контур билан чегараланган юз элементар юз деб аталади. Ориентацияли элементар юзнинг контурини айланиб чиқиш йуналиши билан унинг нормаль йуналиши бирбирига муносиб булиши керак.

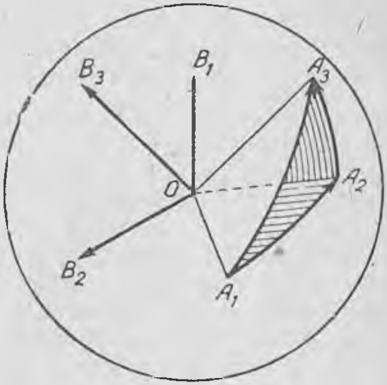
Ёпиқ сиртнинг ориентацияли элементар юзини тасвирловчи вектор ташқи нормаль йуналиши буйича олинади. *Ташқи нормалининг йуналишига мос олинган контур ориентацияси билан аниқланган ёпиқ сирт ориентацияли ёпиқ сирт дейилади.* Демак, берилган бирор ёпиқ сирт ёки унг ориентацияли ёхуд чап ориентацияли булиши мумкин.

14. БУРИЛИШ БУРЧАГИНИНГ ХАРАКТЕРИ

Силжишни тасвирловчи йуналтирилган кесманинг ёки ориентацияли юзни тасвирловчи йуналтирилган кесманинг вектор эканлиги бизга маълум. Аммо йуналтирилган кесма билан тасвирланувчи ҳар бир миқдор ҳам вектор булавермайди. Вектор миқдор, масалан, параллелограмм қоидасига буйсуниши керак.

Мисол сифатида бурилиш бурчагини текшириб кўрайлик.

Маркази O, радиуси R булган сфера олайлик (62- расм). O нуқта билан шар сиртидаги A_1 ва A_2, A_2 ва A_3, A_3 ва A_1 нуқталардан учта текислик ўтказайлик. Бу текисликларга ўтказилган перпендикуляр ўқлар мос равишда OB_1, OB_2, OB_3 бўлсин.



62- расм.

Энди нуқтани A_1 вазиятдан A_2 вазиятга ўтказиш учун сферани OB_1 ўқ атрофида φ_1 бурчакка бурайлик.

Сон қиймати ва бурилиш йўналиши аниқланган бурчакни йўналтирилган кесма билан тасвирлаб кўрсатайлик. Бу йўналтирилган кесма $\overrightarrow{OB_1}$ бўлиб, уни қўл қоидасига биноан, бурилиш йўналишига мос қилиб чизамиз.

Шунингдек, нуқтани A_2 вазиятдан A_3 вазиятга ўтказишдаги OB_2 ўқ атрофида бурилиш бурчаги φ_2 га мос йўналтирилган кесма $\overrightarrow{OB_2}$ бўлсин.

Аммо нуқтани A_1 вазиятдан A_3 вазиятга бевосита ўтказиш учун сферани OB_3 ўқ атрофида φ_3 бурчакка буриш мумкин.

Равшанки, кетма-кет бажарилган икки бурилиш билан натижавий (учинчи) бурилиш бурчакларини тасвирловчи $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OB_3}$ йўналтирилган кесмалар бир текисликда ётмайди. Демак, $\overrightarrow{OB_3}$ йўналтирилган кесма $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$ йўналтирилган кесмалар билан компланар эмас. Шу сабабли, $\overrightarrow{OB_3}$ йўналтирилган кесма $\overrightarrow{OB_1}$ билан $\overrightarrow{OB_2}$ йўналтирилган кесмаларнинг йиғиндиси бўла олмайди.

Шундай қилиб, чекли бурилиш бурчакларини тасвирловчи йўналтирилган кесмалар ўзаро қўшилганда параллелограмм қоидасига бўйсунмайди, яъни *чекли бурилиш бурчагини тасвирловчи йўналтирилган кесма вектор характерига эга эмас.*

Марказий бурчаги φ ва радиуси R бўлган доиравий секторнинг юзи $S = \frac{1}{2} R^2\varphi$ бўлади. Ёпиқ сирт нормали сифатида ташқи нормаль олинишини назарда тутсак, OA_1A_2, OA_2A_3, OA_1A_3 ёқларнинг юзларини тасвирловчи йўналтирилган кесмалар учун:

$$\boldsymbol{S}_1 = -\frac{1}{2} R^2 \overrightarrow{OB_1}, \quad \boldsymbol{S}_2 = -\frac{1}{2} R^2 \overrightarrow{OB_2}, \quad \boldsymbol{S}_3 = \frac{1}{2} R^2 \overrightarrow{OB_3}$$

бўлишини биламиз.

Сферик учбурчак $A_1A_2A_3$ юзини тасвирловчи йўналтирилган кесмани $\boldsymbol{S}_4$ орқали белгилайлик. Ёпиқ сирт $OA_1A_2A_3$ ёқларининг юзларини тасвирловчи йўналтирилган кесмаларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши бизга маълум:

$$\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4 = 0$$

ёки

$$\frac{1}{2} R^2 \left(\overrightarrow{OB_3} - \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB_2}\right) + \boldsymbol{S}_4 = 0. \tag{14.1}$$

Энди биз бурилиш бурчакларини чексиз кичик ҳисоблайлик ва уларни $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ орқали белгилайлик. Бу ҳолда $A_1A_2A_3$ сферик учбурчакни оддий ясси учбурчак деб қараб, унинг юзини тасвирловчи йўналтирилган кесма узунлигини қуйидаги кўринишда ифодалайлик:

$$|\boldsymbol{S}_4| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2}|\,|\overrightarrow{A_2A_3}| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}}\right).$$

Бу ердаги $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ ва $|\overrightarrow{A_2A_3}|$ — кесма узунликлари бўлиб, мос равишда олинган $\delta\varphi_1$ ва $\delta\varphi_2$ бурилиш бурчакларига пропорционалдир.

Расмдан:

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = R\delta\varphi_1, \quad |\overrightarrow{A_2A_3}| = R\,\delta\varphi_2.$$

У вақтда:

$$|\boldsymbol{S}_4| = \frac{1}{2} R^2\delta\varphi_1\,\delta\varphi_2 \sin\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}}\right)$$

бўлади.

Чексиз кичик бурилиш бурчаклари $\delta\varphi_1$ ва $\delta\varphi_2$ га нисбатан узунлиги иккинчи тартибли чексиз кичик бўлган йўналтирилган $\boldsymbol{S}_4$ кесмани назарга олмаслик мумкин.

Чексиз кичик бурилиш бурчакларини тасвирловчи йўналтирилган кесмаларни мос равишда $\delta\overrightarrow{OB_1}$, $\delta\overrightarrow{OB_2}$, $\delta\overrightarrow{OB_3}$ шаклда белгиласак, (14.1) га биноан $\delta\overrightarrow{OB_3} - \delta\overrightarrow{OB_1} - \delta\overrightarrow{DB_2} = 0$ ёки

$\delta\overline{OB_3} = \delta\overline{OB_1} + \delta\overrightarrow{OB_2}$, демак, бу йўналтирилган кесмаларни қўшиш параллелограмм қоидасига бўйсунади. *Шундай қилиб, чексиз кичик бурилиш бурчагини тасвирловчи йўналтирилган кесма вектор характерига эгадир.*

Юқорида айтилганлардан равшанки, чексиз кичик бурилиш бурчагини тасвирловчи $\delta\varphi$ векторнинг узунлиги чексиз кичик бурилиш бурчаги $\delta\varphi$ га тенг, йўналиши эса бурилиш текислигига перпендикуляр бўлиб, қўл қоидасига мос томонга қаратилган, яъни фазо ориентацияси билан аниқланади.

15. ПСЕВДОВЕКТОР. ПСЕВДОСКАЛЯР

Заррачанинг силжиши, радиус-вектори, тезлиги, тезланиши ёки заррачага таъсир қилувчи куч каби *векторлар аниқ йўналишга эга.* Бундай векторлар фазо ориентациясига, унинг ўнг ёки чап бўлишига ҳеч қандай боғланмаган. *Фазо ориентациясига боғланмаган, яъни аниқ йўналиши билан характерланган вектор оддий вектор ёки поляр вектор дейилади.*

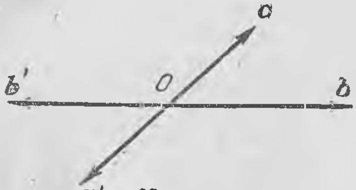
Аммо чексиз кичик бурилиш бурчагини тасвирловчи вектор сингари векторлар ҳам борки, уларнинг йўналиши фақат фазо ориентациясига қараб аниқланади. Мисол учун икки поляр векторнинг вектор кўпайтмасини қараб чиқайлик.

Берилган поляр векторларни $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва уларнинг вектор кўпайтмаси $[\boldsymbol{ab}]$ ни $\boldsymbol{S}$ орқали белгилайлик. Агар фазо ориентацияси ўзгарса, масалан, ўнг ориентация чап ориентация билан алмаштирилса, вектор кўпайтманинг сон қиймати ўзгармасдан, йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради. Икки поляр вектордан ҳосил бўлган шу вектор кўпайтма сингари векторлар кам учрайди. Бундай векторлар, одатда, *аксиал векторлар ёки псевдовекторлар деб юритилади.*

Йўналиши фазо ориентациясига боғлиқ вектор псевдовектор дейилади. Ориентация ўзгарса, псевдовекторнинг сон қиймати ўзгармасдан, фақат йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради. Шундай қилиб, икки поляр векторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектор бўлади.

Масалан, заррачанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$, ҳаракат миқдори $m\boldsymbol{v}$ ва унга таъсир қилувчи куч $\boldsymbol{F}$ поляр векторлардир. Аммо ҳаракат миқдори моменти $[\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}]$ ёки куч моменти $[\boldsymbol{rF}]$ псевдовекторлар бўлади.

Энди қоғоз бетида ётган псевдовектор $\boldsymbol{a}$ ва псевдовектор $\boldsymbol{b}$ нинг вектор кўпайтмасини текширайлик (63-расм). Масалан, ўнг ориентацияли фазода вектор кўпайтма $[\boldsymbol{ab}]$ қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, биздан қоғоз орқасига қаратилган. Фазо ориентацияси ўнгдан чапга алмаштирилса, таърифга кўра, псевдовекторларнинг йўналишлари қарама-қаршисига ўзгаради. 63-расмда бу псевдовекторларнинг вектор кўпайтмаси $[a'b']$ чап ориентацияли фазода қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, қоғоз бетидан бизга қаратилган. Айтилганлардан равшанки, биз текшираётган вектор кўпайтма фазо ориентацияси ўзгариши билан йўналишини қарама-қаршисига ўзгартиради. *Шундай қилиб, икки псевдовекторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектор бўлади.*



63- расм.

64- расм.

Қоғоз бетида ётган икки векторнинг биттаси $\boldsymbol{a}$ поляр вектор, иккинчиси $\boldsymbol{b}$ псевдовектор бўлсин. Уларнинг вектор кўпайтмасини текширайлик (64- расм). Ўнг ориентацияли фазода вектор кўпайтма $[\boldsymbol{ab}]$ қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, биздан қоғоз орқасига қаратилган. Фазо ориентацияси ўнгдан чапга алмаштирилса, вектор кўпайтма $[\boldsymbol{a'b'}] = [\boldsymbol{ab'}]$ чап ориентацияли фазода қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, биздан қоғоз орқасига қаратилган. *Шундай қилиб, поляр вектор билан псевдовекторнинг вектор кўпайтмаси поляр вектор бўлади.*

Айтилганлардан равшанки, кўпайтирилувчи векторларнинг қандайлигига қараб, вектор кўпайтма ё псевдовектор ёки поляр вектор бўлиши мумкин.

Икки қайтали вектор кўпайтманинг қандайлиги ҳақида кўпайтирилувчи векторларнинг ҳар бири қандайлигини билмасдан туриб, аниқ бир нарса дейиш мумкин эмас. Масалан, учта вектор поляр вектор бўлса, уларнинг икки қайтали вектор кўпайтмаси албатта поляр вектор бўлади, чунки икки поляр векторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектор бўлади ва бу псевдовекторнинг қолган поляр векторга вектор кўпайтмаси поляр векторни ҳосил қилади.

Шундай қилиб, фазо ориентацияси ўзгаришига нисбатан векторларни икки группага бўлиш мумкин: 1) фазо ориентацияси ўзгарганда узунликлари ва йўналишлари ўзгармасдан қолган векторлар поляр векторлар бўлади, 2) фазо ориентацияси ўзгарганда узунликлари ўзгармасдан, фақат йўналишлари қарама-қаршисига ўзгарган векторлар псевдовекторлар бўлади.

Фазо ориентацияси ўзгариши билан скалярнинг ишораси ўзгариши ёки ўзгармаслиги мумкин. Ҳақиқатан, *энергия, масса, электр заряди, температура каби скаляр миқдорлар фазо ориентациясига боғлиқ эмас. Бундай скалярни оддий скаляр деймиз.* Масалан, заррачага таъсир қилувчи куч поляр вектордир, заррачанинг силжиши ҳам поляр вектордир, бажарилган ишни ифодаловчи бу икки поляр векторнинг скаляр кўпайтмаси ҳам оддий скаляр бўлади, чунки фазо ориентацияси ўзгарганда уларнинг йўналиши ўзгармайди, демак, улар орасидаги бурчак ҳам ўзгармайди, натижада скаляр кўпайтма ишораси ўзгармасдан қолади. *Шундай қилиб, икки поляр векторнинг скаляр кўпайтмаси оддий скаляр бўлади. Худди шунингдек, икки псевдовекторнинг скаляр кўпайтмаси ҳам оддий скаляр бўлади.*

Энди икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор берилган бўлиб, уларнинг биринчиси поляр вектор ва иккинчиси псевдовектор бўлсин. Буларнинг скаляр кўпайтмасини текширайлик. Фазо ориентацияси ўзгарганда, поляр вектор $\boldsymbol{a}$ нинг йўналиши ўзгармасдан қолиб, фақат псевдовектор $\boldsymbol{b}$ нинг йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради.

64- расмдан фойдаланиб, бундай ёзамиз: $(\widehat{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'}) = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}'}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, демак, $\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}'}) = -\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. Косинус ишорасининг қарама-қаршисига ўзгариши скаляр кўпайтма ишорасининг қарама-қаршисига ўзгариши билан боғланган.

Фазо ориентацияси ўзгариши билан ишораси қарама-қаршисига ўзгарган скаляр псевдоскаляр дейилади. Шундай қилиб, поляр вектор билан псевдовекторнинг скаляр кўпайтмаси псевдоскаляр бўлади.

Аралаш кўпайтманинг оддий скаляр ёки псевдоскаляр бўлиши кўпайтирилувчи векторларга боғлиқ. Агар учала вектор ҳам поляр вектор бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси псевдоскаляр бўлади, чунки икки поляр векторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектор бўлади ва бу псевдовекторнинг қолган учинчи поляр вектор билан скаляр кўпайтмаси псевдоскаляр ҳосил қилади.

Учта поляр вектордан ясалган параллелепипеднинг ҳажми ўша векторларнинг маълум тартибда олинган аралаш кўпайтмаси билан ифодаланишини биламиз. Демак, ҳажмнинг аралаш кўпайтма билан ифодаланиши унинг псевдоскаляр эканлигидан дарак беради.

Бир хил табиатли миқдорларнигина қўшиш ёки айириш мумкин. Шунинг учун, масалан, скаляр билан псевдоскалярни, вектор билан псевдовекторни қўшиш ёки айириш мумкин эмас.

16. ВЕКТОРНИ КЎПАЙТМАЛАРИ ОРҚАЛИ АНИҚЛАШ

Икки векторнинг скаляр кўпайтмасини ва уларнинг вектор кўпайтмасини олайлик:

$$S = (\boldsymbol{ab}). \tag{16.1}$$

$$V = [\boldsymbol{ab}]. \tag{16.2}$$

Энди $\boldsymbol{a}$ вектор билан S скаляр маълум деб фараз қилайлик. (16.1) дан номаълум $\boldsymbol{b}$ векторни топиш, яъни тенгламани $\boldsymbol{b}$ га нисбатан ечиш мумкин эмас, чунки $S = (\boldsymbol{ab}) = ab_a$ тенгликдан $\boldsymbol{b}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор йўналишидаги проекциясигина аниқланиб (яъни $b_a = S : a$), унинг $\boldsymbol{a}$ векторга перпендикуляр йўналишдаги проекцияси ноаниқлигича қолади. Демак, (16.1) тенгламани номаълум $\boldsymbol{b}$ векторга нисбатан ечиш маънога эга эмас.

Энди $\boldsymbol{a}$ вектор билан V вектор маълум бўлсин. Биз $\boldsymbol{b}$ векторни $\boldsymbol{a}$ векторга параллел бўлган $\boldsymbol{b}_1$ ва перпендикуляр бўлган $\boldsymbol{b}_2$ векторнинг йиғиндиси десак, $[\boldsymbol{ab}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{ab}_2]$ бўлади. $\boldsymbol{b}_2$ векторни ихтиёримизча олишимиз мумкин. Йиғиндиси $\boldsymbol{b}_1$ ва $\boldsymbol{b}_2$ вектордан иборат векторлар чексиз кўп. Демак, $\boldsymbol{b}$ векторни (16.2) дан аниқлаш мумкин эмас.

Айтилганлардан равшанки, кўпайтиришга одатдаги маънода тескари бўлган амалдан векторлар алгебрасида фойдаланиб бўлмайди. Шунинг учун „векторга бўлиш“ тушунчаси бизда учрамайди.

Аммо юқоридаги *икки* тенгламадан номаълум $\boldsymbol{b}$ векторни аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, $\boldsymbol{b}$ векторнинг бири $\boldsymbol{a}$ векторга параллел, иккинчиси эса унга перпендикуляр бўлган векторларга ажратилиши маълум (10.12):

$$\boldsymbol{b} = \frac{(\boldsymbol{ab})}{a^2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}]]$$

ёки (16.1), (16.2) га биноан:

$$\boldsymbol{b} = \frac{S}{a^2}\,\boldsymbol{a} - \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}V]. \tag{16.3}$$

Топилган натижаларнинг тўғрилигини текшириб курайлик. (16.3) нинг икки томонини $\boldsymbol{a}$ векторга скаляр равишда кўпайтирамиз:

$$(\boldsymbol{ab}) = \frac{S}{a^2}(\boldsymbol{aa}) - \frac{1}{a^2}(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}\,V]), \text{ аммо } (\boldsymbol{aa}) = a^2, \ (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}\,V]) = 0$$

демак:

$$(\boldsymbol{ab}) = S$$

бўлади.

Энди (16.3) нинг икки томонини чапдан $\boldsymbol{a}$ векторга вектор равишда кўпайтирамиз:

$$[\boldsymbol{ab}] = \frac{S}{a^2}[\boldsymbol{aa}] - \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{V}]].$$

Аммо

$$[\boldsymbol{aa}] = 0,\ [\boldsymbol{a}[\boldsymbol{aV}]] = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{aV}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{V}a^2,$$

демак:

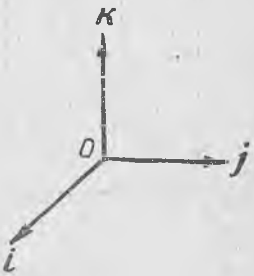
$$[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{V}$$

бўлади.

17. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ СИСТЕМАСИ

Бошлари бир O нуқтада ва бир-бирига перпендикуляр бўлган $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ортларни олайлик (65- расм). *Бу ортлар Декарт ортлари дейилади.*

Декарт ортлари системасининг ориентацияси ўнг ёки чап бўлиши мумкин. Масалан, 65- расмда ўнг ориентацияли система тасвирланган. *Декарт ортлари системасининг ориентация ўзгариши, баъзан, системанинг кўзгуда аксланиши дейилади.*



65- расм.

Декарт системасининг ўнг ориентацияли ёки чап ориентацияли бўлиши принципиал аҳамиятга эга эмас. Аммо аниқсизлик ва тушунмовчиликларга йўл қўймаслик мақсадида, бундан сўнг ўнг ориентацияли системадан фойдаланамиз.

Декарт ортлари учун тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$(\boldsymbol{ii}) = 1,\ (\boldsymbol{jj}) = 1,\ (\boldsymbol{kk}) = 1,$$

$$(\boldsymbol{ij}) = (\boldsymbol{ji}) = 0,\ (\boldsymbol{jk}) = (\boldsymbol{kj}) = 0,\ (\boldsymbol{ki}) = (\boldsymbol{ik}) = 0. \qquad (17.1)$$

$$[\boldsymbol{ii}] = 0,\quad [\boldsymbol{jj}] = 0,\quad [\boldsymbol{kk}] = 0,$$

$$[\boldsymbol{ij}] = -[\boldsymbol{ji}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{jk}] = -[\boldsymbol{kj}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{ki}] = -[\boldsymbol{ik}] = \boldsymbol{j}. \qquad (17.2)$$

$$(\boldsymbol{i}\,[\boldsymbol{jk}]) = (\boldsymbol{j}\,[\boldsymbol{ki}]) = (\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{ij}]) = 1. \qquad (17.3)$$

Ортлари $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ бўлган ўқларни OX, OY, OZ билан белгилайлик (66- расм). M нуқтанинг $\boldsymbol{r}$ радиус-векторини ортлар бўйича ажратиш мумкин:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad (17.4)$$

бу ерда x, y, z —радиус-векторнинг ортларга нисбатан компонентлари (5-параграфга қаранг). (17.1) ва (17.4) га биноан бундай ёзамиз:

$$x = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{i}) = r\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i}}),$$

$$y = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}) = r\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j}}),$$

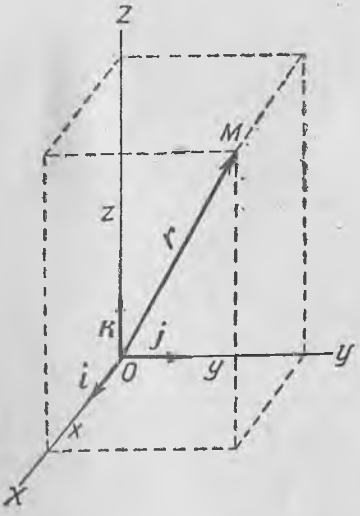
$$z = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{k}) = r\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}}). \tag{17.5}$$

M нуқта радиус-векторининг компонентлари унинг координата ўқларига туширилган проекцияларига тенгдир; улар шу нуқтанинг Декарт координаталари дейилади. Нуқта радиус-векторининг модули шу нуқтанинг координаталар бошигача бўлган масофасини аниқлайди:

$$r^2 = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}) = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = x^2 + y^2 + z^2,$$

яъни

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{17.6}$$



66- расм.

Бирор $\boldsymbol{A}$ векторни ортлар бўйича ажратайлик:

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}. \tag{17.7}$$

Бу ерда A_x, A_y, A_z билан $\boldsymbol{A}$ векторнинг $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ га нисбатан компонентлари ишораланган, яъни:

$$\begin{aligned} A_x &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{i}) = A\cos(\widehat{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{i}}), \\ A_y &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}) = A\cos(\widehat{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{j}}), \\ A_z &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{k}) = A\cos(\widehat{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{k}}). \end{aligned} \tag{17.8}$$

Демак, *векторнинг Декарт компонентлари, унинг ўқлардаги проекцияларига тенгдир.*

Қисман, *бирлик векторнинг компонентлари унинг мос ўқлар билан ҳосил қилган бурчак косинусларига* („йўналтирувчи косинусларига") *тенг бўлади.*

(17.1) ва (17.7) га биноан бундай ёзамиз:

$$A^2 = A^2_x + A^2_y + A^2_z. \tag{17.9}$$

Вектор берилган бўлса, унинг компонентлари (17.8) дан топилади. Аксинча, векторнинг компонентлари берилган бўлса, (17.9) дан унинг модули ва (17.8) дан йўналиши аниқланади. Худди шунинг сингари, нуқтанинг радиус-вектори берилган бўлса, (17.5) дан нуқтанинг координаталари топилади. Нуқтанинг координаталари берилган бўлса, (17.6) дан радиус-векторнинг узунлиги ва (17.5) дан радиус-векторнинг йўналиши аниқланади.

Компонентлари билан берилган икки $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмасини топиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \tag{17.10}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}. \tag{17.11}$$

(17.1) га биноан:

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{17.12}$$

бўлади. Демак, *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг мос компонентлари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.*

Олинган икки вектор ортлардан иборат бўлса, у ҳолда (17.8), (17.12) га мувофиқ:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}}) \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{i}}) + \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}}) \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j}}) + \\ + \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}}) \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}}) \tag{17.13}$$

бўлади, яъни *икки вектор орасидаги бурчак косинуси уларнинг тегишли йўналтирувчи косинуслари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенгдир.* Шу формуланинг икки томонини a га кўпайтириб, сўнгра $a \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = a_b$ ни назарда тутсак, (17.8) ва (17.13) га биноан:

$$a_b = a_x \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{i}}) + a_y \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j}}) + a_z \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}}) \tag{17.14}$$

бўлади, яъни *$\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{b}$ вектор йўналишидаги проекцияси унинг компонентлари билан тегишли косинуслар орқали ифодаланади.*

Скаляр кўпайтманинг $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) = a\,b \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ ифодасидан фойдаланиб, (17.9) ва (17.12) га биноан, бундай ёзиш мумкин:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{17.15}$$

Энди икки векторнинг вектор кўпайтмасини уларнинг компонентлари орқали ифодалайлик:

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = [a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k},\ b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}].$$

Қавсларни очишда вектор кўпайтманинг хоссаларидан ва (17.2) дан фойдаланамиз:

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}. \quad (17.16)$$

Демак, вектор кўпайтманинг компонентлари тубандагичадир:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]_x &= a_y b_z - a_z b_y = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \\ [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]_y &= a_z b_x - a_x b_z = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \\ [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]_z &= a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Вектор кўпайтмани учинчи тартибли детерминант шаклида ёзиш мумкин:

$$[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (17.18)$$

Компонентлари билан берилган $\boldsymbol{c}$ векторни олайлик:

$$\boldsymbol{c} = c_x \boldsymbol{i} + c_y \boldsymbol{j} + c_z \boldsymbol{k}. \quad (17.19)$$

Учта векторнинг аралаш кўпайтмасини топамиз. (17.12), (17.16) га биноан:

$$(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]) = a_x\,[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]_x + a_y\,[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]_y + a_z\,[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]_z =$$
$$= a_x\,(b_y\,c_z - b_z\,c_y) + a_y\,(b_z\,c_x - b_x c_z) + a_z\,(b_x\,c_y - b_y\,c_x)$$

бўлади. Бу ифодани ҳам учинчи тартибли детерминант шаклида ёзиш мумкин:

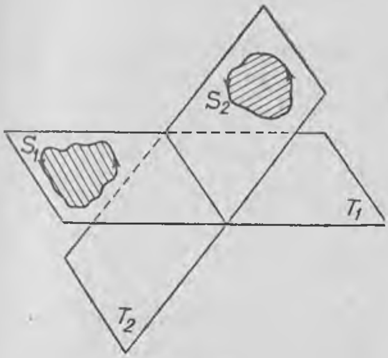
$$(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (17.20)$$

18. БАЪЗИ ҚЎШИМЧАЛАР ВА ТАТБИҚЛАР

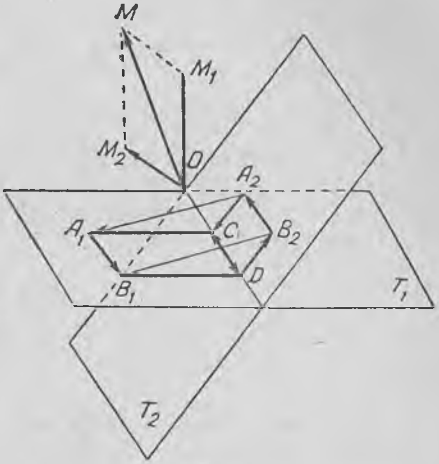
I. Ориентацияли юзларни қўшиш. Ориентацияли юзни йўналтирилган кесма ёрдамида тасвирлашни биламиз. Энди бу тариқада олинган юзларни қўшиш амалига ўтайлик.

Сон қийматлари тенг бўлиб, ориентациялари бир хил бўлган юзлар тенг деб ҳисобланади. Яъни: 1) нормалнинг йўналишини сақлаб, ориентацияли юзни бир текисликдан унга параллел бошқа текисликка кўчириш мумкин, 2) ориентацияли юзнинг сон қиймати билан контурни айланиб чиқиш йўналишини сақлаб, контурга ҳар қандай шакл бериш мумкин.

Ориентацияли S_1, S_2 юзлар ётган T_1, T_2 текисликларни олайлик (67-расм). Юзларнинг сон қийматларини ҳам шу ҳарфлар билан белгилайлик. S_1, S_2 юзларни ва уларнинг ориентацияларини ўзгартмасдан, контурларни тўғри тўртбурчак шаклида олиш мумкин.



67- расм.



68- расм.

Тўғри тўртбурчакларнинг бир томони бирга тенг қилиб олинса, қолган икки томони узунлиги мос равишда S_1, S_2 га тенг бўлади. S_1, S_2 нинг ҳар бирини ўз текислигида параллел кўчириб, бирга тенг бўлган томонларини текисликлар кесишган чизиқ устига келтириб жойлаштирамиз (68- расм). S_1 юзни CA_1B_1D тўғри тўртбурчак, S_2 юзни эса DB_2A_2C тўғри тўртбурчак тасвирлайди.

$A_2A_1B_1B_2$ тўғри тўртбурчак билан тасвирланувчи ориентацияли S юз олинган S_1, S_2 юзларнинг йиғиндиси деб аталади.

Юқоридаги шартга мувофиқ:

$$CD = A_1B_1 = A_2B_2 = 1, A_1C = B_1D = S_1, A_2C = B_2D = S_2,$$

$$A_1A_2 = B_1B_2 = S$$

бўлади. Ориентацияли S_1,S_2,S юзлар ўша расмнинг ўзида йўналтирилган $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM}$ кесмалар билан тасвирланган. Таърифга мувофиқ: $OM_1 = S_1$, $OM_2 = S_2$, $OM = S$. OM_1M учбурчак A_2CA_1 учбурчакка тенг, чунки OM_1 кесма A_1C га, OM кесма эса A_1A_2 га тенг; бу томонлар бир-бирига перпендикуляр бўлганлиги учун: $\measuredangle M_1OM = \measuredangle A_2A_1C$. Худди шунингдек, OM_2M учбурчак ҳам A_2CA_1 учбурчакка тенг. Демак, OM_1MM_2 тўртбурчак параллелограммдир. Шундай қилиб, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2},$$

яъни ориентацияли юзлар йиғиндисини тасвирловчи йўналтирилган кесма қўшилувчи ориентацияли юзларни тасвирловчи йўналтирилган кесмаларнинг параллелограмм қоидасига мувофиқ топилган йиғиндисига тенгдир. Шундай қилиб, ориентацияли юзни тасвирловчи йўналтирилган кесма вектор характерига эга.

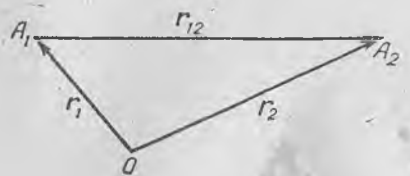
II. Системанинг инерция маркази. Массалари $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ ва O нуқтага нисбатан радиус-векторлари $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_i, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ бўлган заррачаларни олайлик.

Радиус-вектори ушбу:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{18.1}$$

формуладан аниқланувчи C нуқта заррачалар системасининг инерция маркази ёки массалар маркази деб аталади. Олинган система A_1, A_2 нуқталардаги иккита заррачадан иборат бўлсин. (69- расм). A_1A_2 векторни $\boldsymbol{r}_{12}$ билан белгилайлик:

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{18.2}$$



69- расм.

Икки заррача системасининг инерция маркази учун, (18.1) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

бўлади. Энди $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ни инерция маркази радиус-вектори $\boldsymbol{r}_c$ ва $\boldsymbol{r}_{12}$ орқали ифодалайлик.

Сўнгги формуладан:

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \boldsymbol{r}_c - \frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{r}_1$$

бўлади. $\boldsymbol{r}_2$ нинг бу ифодасини (18.2) га қўяйлик:

$$\boldsymbol{r}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \boldsymbol{r}_c - \frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \boldsymbol{r}_c - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \boldsymbol{r}_1,$$

бундан:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}_{12}$$

келиб чиқади. Худди шунингдек:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{12}$$

бўлади. O нуқта сифатида инерция маркази бўлган C нуқта қабул қилинса $\mathbf{r}_c = 0$ бўлади. У вақтда:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{12},$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{12}.$$

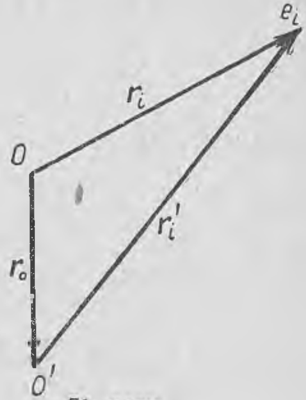
Биз $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ векторларнинг қарама-қарши йўналишда бўлиб, $\mathbf{r}_{12}$ билан бир тўғри чизиқда ётишини, яъни *икки заррача системасининг инерция маркази шу заррачаларни бирлаштирувчи кесмада ётишини кўриб турибмиз* (70- расм).

Юқоридаги формулаларга мувофиқ:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

бўлади, яъни *икки заррача системасининг инерция маркази шу заррачалар орасидаги масофани мас-*

70- расм.



71- расм.

саларга тескари пропорционал қисмларга бўлади. Массалари бир хил булган икки заррачанинг инерция маркази уларни бирлаштирувчи кесманинг қоқ ўртасидан иборатдир.

III. Зарядлар системасининг электр моменти. $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n$ дан иборат n та нуқтавий зарядлар системасини олайлик. Уларнинг O нуқтага нисбатан радиус-векторлари $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_n$ бўлсин. *Зарядларнинг ўзи радиус-векторлари билан бўлган кўпайтмаларининг йиғиндиси системанинг электр моменти дейилади:*

$$P = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathbf{r}_i. \tag{18.3}$$

Бошқа бирор O' нуқтага нисбатан системанинг электр моменти $P' = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathbf{r}'_i$ бўлади. Аммо $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$.

У вақтда:

$$P' = \sum_{i=1}^{n} e_i r_i' = \sum_{i=1}^{n} e_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) = \sum_{i=1}^{n} e_i \boldsymbol{r}_i - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\boldsymbol{r}_0,$$

$$P' = P - e\boldsymbol{r}_0 \qquad (18.4)$$

бўлади, бу ерда $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ *системанинг йиғинди заряди. Йиғинди заряди нолга тенг система нейтрал система дейилади.* (18.4) га биноан, нейтрал системанинг электр моменти фақат шу системанинг ўзигагина хос, фазо нуқтасининг танланишига боғлиқ эмас. Нейтрал системанинг n та зарядидан k таси мусбат ва m таси $(m = n - k)$ манфий бўлсин, у вақтда:

$$P = \sum_{i=1}^{n} e_i \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{k} e_i^+ \boldsymbol{r}_i^+ + \sum_{i=1}^{m} e_i^- \boldsymbol{r}_i^- .$$

Радиус-вектори:

$$\boldsymbol{r}^+ = \frac{\sum_{i=1}^{k} e_i^+ \boldsymbol{r}_i^+}{\sum_{i=1}^{k} e_i^+}$$

дан иборат нуқта мусбат зарядлар маркази дейилади; шунингдек, манфий зарядлар марказининг радиус-вектори

$$\boldsymbol{r}^- = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^- \boldsymbol{r}_i^-}{\sum_{i=1}^{m} e_i^-}$$

дан иборат. Мусбат зарядлар йиғиндисини q билан белгиласак, нейтрал система учун:

$$\sum_{i=1}^{k} e_i^+ + \sum_{i=1}^{m} e_i^- = 0, \text{ бундан: } \sum_{i=1}^{k} e_i^+ = -\sum_{i=1}^{m} e_i^- = q$$

бўлади, у вақтда юқоридаги формулаларга мувофиқ:

$$\boldsymbol{p} = q\,(\boldsymbol{r}^+ - \boldsymbol{r}^-) \qquad (18.5)$$

келиб чиқади. *Демак, нейтрал система электр моменти манфий зарядлар марказидан мусбат зарядлар маркази то-*

мон йўналган (72- расм.) *Унинг сон қиймати йиғинди мусбат заряднинг мусбат ва манфий зарядлар марказлари орасидаги масофа билан бўлган кўпайтмасига тенг.*

Сон қийматлари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлган иккита нуқтавий заряд системаси диполь дейилади.

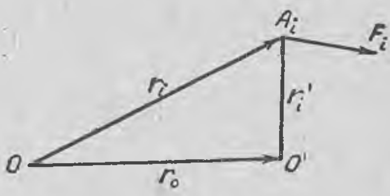
Радиус-вектори:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} e_i}$$

дан аниқланувчи нуқта зарядлар системасининг маркази дейилади. Бу ерда $\sum_{i=1}^{n} e_i$ нолга тенг бўлмаслиги керак, шундагина зарядлар системасининг маркази тушунчаси аниқ маънога эга бўлади. Нейтрал система учун $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$. Демак, нейтрал система зарядларининг маркази ҳақида гапириш тўғри келмайди. Бу ерда мусбат зарядлар маркази ёки манфий зарядлар маркази ҳақида алоҳида-алоҳида гапиришга тўғри келади.

IV. Кучларнинг бош вектори ва бош моменти. Қаттиқ жисмга таъсир қилувчи $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_i, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ кучлар қўйилган

72- расм.



73- расм.

нуқталарнинг бирор O нуқтага нисбатан радиус-векторлари $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_i, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ бўлсин (73- расм).

Айрим кучларнинг О нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси кучлар системасининг шу нуқтага нисбатан бош моменти дейилади:

$$\boldsymbol{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{F}_i]. \qquad (18.6)$$

O нуқта ўрнига бошқа O' нуқта олинса, у вақтда:

$$M_0' = \sum_{i=1}^{n} [r_i' F_i] = \sum_{i=1}^{n} [r_i - r_0, F_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [r_i F_i] - [r_0, \sum_{i=1}^{n} F_i],$$

$$M_0' = M_0 - [r_0 R] \tag{18.7}$$

бўлади, бу ерда:

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{18.8}$$

Айрим кучлар йиғиндисини тасвирловчи $\boldsymbol{R}$ *вектор кучлар системасининг бош вектори дейилади.* (18.7) нинг икки томонини $\boldsymbol{R}$ га скаляр равишда кўпайтирсак:

$$(M'_0 R) = (M_0 R) \tag{18.9}$$

бўлади. Демак, бош векторнинг бош момент билан скаляр кўпайтмаси O нуқтанинг танланишига боғлиқ эмас. *Бош вектор* $\boldsymbol{R}$ *нинг бош момент* $\boldsymbol{M}_0$ *билан скаляр кўпайтмаси* $(\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{R})$ *кучлар системасининг статик инварианти* дейилади.

Бош моменти ва бош вектори бир-бирига параллел бўлган кучлар системаси динама дейилади.

Энди хусусий бир ҳолни кўриб чиқайлик. Қаттиқ жисмга сон қийматлари тенг, йўналишлари қарама-қарши ва таъсир чизиқлари бир-бирига параллел бўлган икки куч таъсир қилсин (74- расм). *Бундай кучлар системаси жуфт куч дейилади.* Жуфт куч учун системанинг бош моменти таърифга мувофиқ:

$$M_0 = [r_A F] + [r_B, -F] = [r_A - r_B, F],$$

яъни:

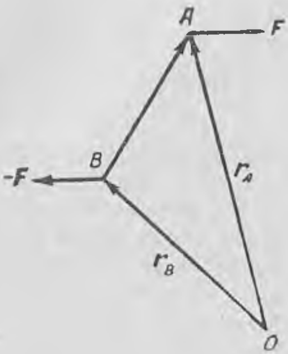
$$M_0 = [\overrightarrow{BA_1} F]. \tag{18.10}$$

Қаттиқ жисмнинг мувозанат ҳолатда бўлиши учун, унга таъсир қилувчи кучлар системасининг бош вектори билан бош моменти нолга тенг бўлиши лозим:

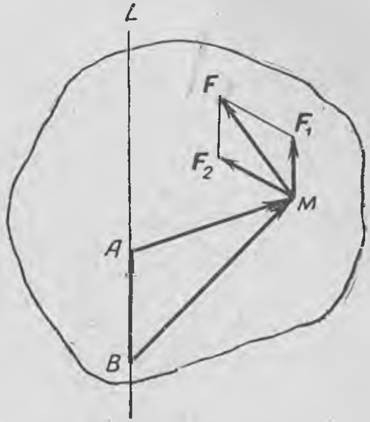
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \tag{18.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [r_i F_i] = 0. \tag{18.12}$$

V. Кучнинг нуқтага ва ўққа нисбатан моменти. Қўзғалмас L ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг M нуқтасига F куч таъсир қилади, дейлик (75- расм).



74- расм.



75- расм.

Ўққа перпендикуляр ҳолда M нуқтадан ўтган текисликнинг ўқ билан кесишган нуқтаси A бўлсин. Ўқдаги бирор B нуқтага нисбатан олинган куч моменти таърифга кўра:

$$mom_B \boldsymbol{F} = \left[\overrightarrow{BM}, \boldsymbol{F}\right]$$

бўлади, аммо $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, демак:

$$mom_B \boldsymbol{F} = \left[\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}\right] = \left[\overrightarrow{BA}, \boldsymbol{F}\right] + \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}\right],$$

$$mom_B \boldsymbol{F} = \left[\overrightarrow{BA}, \boldsymbol{F}\right] + mom_A \boldsymbol{F}, \tag{18.13}$$

бу ерда:

$$mom_A \boldsymbol{F} = \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}\right]. \tag{18.14}$$

Вектор кўпайтма $\left[\overrightarrow{BA}, \boldsymbol{F}\right]$ ўққа перпендикулярдир. Шундай қилиб, куч моментининг ўққа проекцияси учун қуйидагини ёзамиз:

$$(mom_B \boldsymbol{F})_l = (mom_A \boldsymbol{F})_l. \tag{18.15}$$

Энди $\boldsymbol{F}$ кучни ўққа параллел $\boldsymbol{F}_1$ ва ўққа перпендикуляр $\boldsymbol{F}_2$ кучларга ажратайлик. У вақтда:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

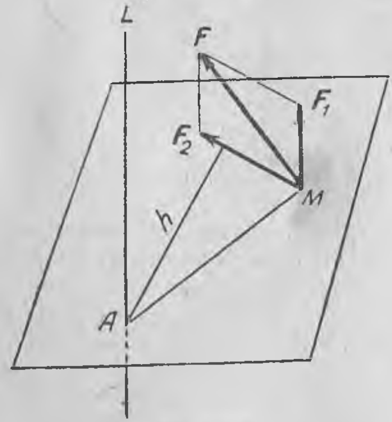
$$mom_A \boldsymbol{F} = \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}\right] = \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2\right] + \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_1\right] + \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right],$$

$$(mom_B \boldsymbol{F})_l = (mom_A \boldsymbol{F})_l = \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_1\right]_l + \left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right]$$

бўлади. Аммо $\left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_1\right]$ кўпайтма ўққа перпендикуляр, демак:

$$(mom_B \boldsymbol{F})_l = (mom_A \boldsymbol{F})_l = \left(\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right)_l. \qquad (18.16)$$

Вектор кўпайтма $\left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right]$ ўққа ё параллел ёки антипараллелдир. Демак, куч моментининг ўққа проекцияси мусбат ёки манфий сон бўлади. Шунга мувофиқ, куч таъсири натижасида қаттиқ жисм берилган ўқ атрофида унақай парма ёки чапақай парма қоидасига мувофиқ йўналишда айланади.



76- расм.

Ўқдаги бирор нуқтага нисбатан олинган куч моментининг шу ўқдаги проекцияси кучнинг ўққа нисбатан моменти дейилади.

76- расмдан:

$$\left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right]_l = \pm \overline{AM}\, F_2 \sin\left(\overrightarrow{AM}, \widehat{\boldsymbol{F}_2}\right)$$

ёки

$$\left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right]_l = \pm hF_2, \qquad (18.17)$$

бу ерда $h = \overline{AM} \sin\left(\overrightarrow{AM}, \widehat{\boldsymbol{F}_2}\right)$ ўққа перпендикуляр бўлган текисликда ётган $\boldsymbol{F}_2$ кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси.

Сўнгги формулада вектор кўпайтма $\left[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{F}_2\right]$ ўқ йўналишига параллел бўлганда мусбат ишора, антипараллел бўлганда эса манфий ишора қабул қилинади.

Шундай қилиб, таърифга мувофиқ, кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектор бўлиб, кучнинг ўққа нисбатан моменти аниқ ишорали скалярдир.

VI. Комплекс соннинг вектор тасвирланиши. Маълумки, таъриф буйича комплекс сон

$$z = x + iy, \qquad (18.18)$$

бу ерда x билан y *ҳақиқий сонлар* ва $i = \sqrt{-1}$. Одатда x комплекс сон z нинг *ҳақиқий қисми,* y эса унинг *мавҳум қисми* дейилади ва тубандагича ёзилади:

$$x = R_e z \qquad y = I_m z. \tag{18.19}$$

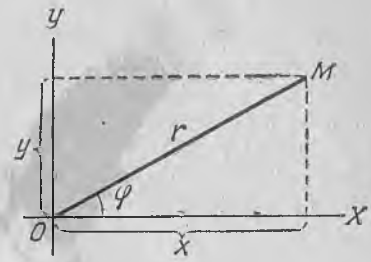
Юқоридаги z комплекс сонга нисбатан *қўшма комплекс сон* таърифига мувофиқ:

$$z^* = x - iy. \tag{18.20}$$

Комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзиб кўрсатиш катта қулайликлар туғдиради.

Текислик нуқтасининг Декарт координаталари ва поляр координаталари учун (77- расм):

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$



77- расм.

Демак,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{18.21}$$

$$\text{arctg}\ \varphi = \frac{y}{x}. \tag{18.22}$$

У вақтда (18.18) да ифодаланган z комплекс сон тубандагича тригонометрик шаклда ёзилади:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{18.23}$$

Бу ерда *r комплекс соннинг модули* ва *φ комплекс соннинг аргументи* дейилади ($r = |z|$, $\varphi = \arg z$). Маълумки,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{18.24}$$

бу ерда e—натурал логарифм асоси ($e = 2{,}718\ \ldots$). Демак, комплекс сонни кўрсаткичли функция шаклида ёзиш мумкин:

$$z = re^{i\varphi} \tag{18.25}$$

ва қўшма комплекс сон учун

$$z^* = re^{-i\varphi}. \tag{18.26}$$

Комплекс сон модулининг квадрати учун

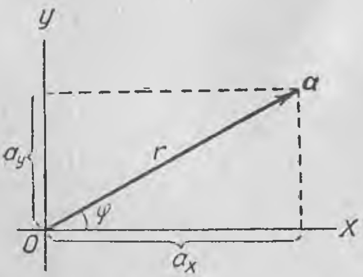
$$r^2 = |z|^2 = |z^*|^2 = zz^*. \tag{18.27}$$

Юқорида айтилганлардан кўрамизки, аниқ комплекс сонни текисликдаги аниқ $\boldsymbol{a}$ вектор сифатида тасвирлаш мумкин (78- расм). Ўша расмга мувофиқ:

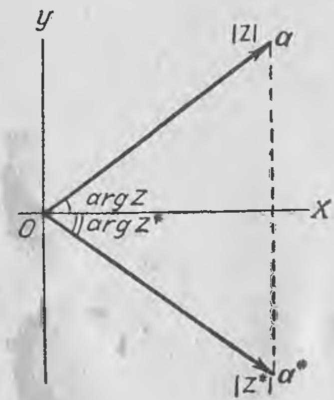
$$z = a_x + ia_y = r\,e^{i\varphi}, \qquad (18.28)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a, \\ \varphi &= \arg z = \operatorname{arctg} \frac{a_y}{a_x}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18.29)$$

Шундай қилиб, *берилган z комплекс сонни тасвирловчи* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг узунлиги комплекс сон модулига тенг бўлиб, йўналиши X ўқ билан комплекс сон аргументига тенг бурчак ташкил қилади.* Турли модулли ва аргументли комплекс сонлар турли узунлик ва йўналишларга эга векторлар билан тасвирланади.



78- расм.



79- расм.

Ўзаро қўшма комплекс сонлар z, z^* ни тасвирловчи $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^*$ векторлар X ўққа нисбатан симметрик жойлашган бўлади, чунки $|z| = |z^*|$ ва $\arg z = -\arg z^*$ (79- расм).

Комплекс сонлар билан бажариладиган амалларни векторлар воситасида яққол тасвирлаш мумкин.

Иккита комплекс сон берилсин:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_x + i\,a_y, \\ z_2 &= b_x + i\,b_y. \end{aligned} \qquad (18.30)$$

Комплекс сонлар йиғиндиси

$$z = z_1 + z_2 = (a_x + b_x) + i\,(a_y + b_y) \qquad (18.31)$$

шу комплекс сонларни тасвирловчи векторлар йиғиндиси билан тасвирланади (80- расм).

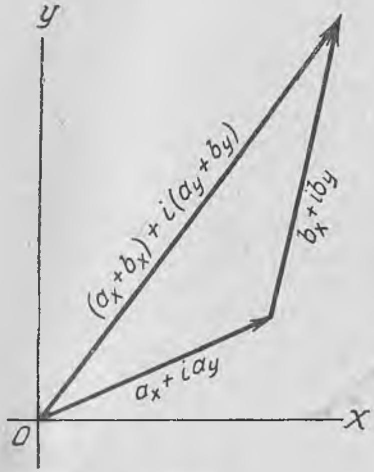
Комплекс сонлар айирмаси

$$z = z_1 - z_2 = (a_x - b_x) + i(a_y - b_y), \tag{18.32}$$

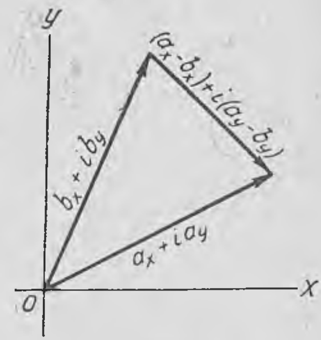
шу комплекс сонларни тасвирловчи векторлар айирмаси билан тасвирланади (81- расм).

Берилган комплекс сонларни уларнинг модуллари ва аргументлари орқали ёзайлик:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}. \tag{18.33}$$



80- расм.



81- расм.

Комплекс сонлар кўпайтмаси

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{18.34}$$

биринчи комплекс сонни тасвирловчи векторга нисбатан мусбат йўналишда φ_2 бурчакка бурилган ва r_2 марта кўпроқ узунликка эга вектор билан тасвирланади.

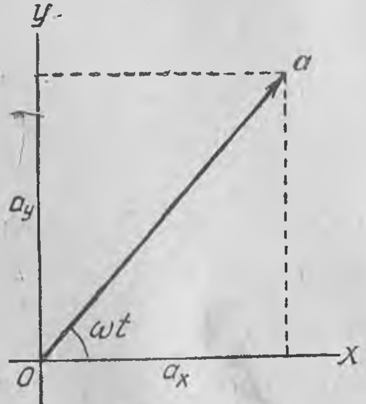
Масалан, бирор комплекс соннинг i га кўпайтмаси шу комплекс сонни тасвирловчи векторга нисбатан мусбат йўналишда тўғри бурчакка бурилган ўша узунликдаги вектор билан тасвирланади, чунки i га мос модуль 1 га ва аргумент $\frac{\pi}{2}$ га тенгдир.

Комплекс сонлар бўлинмаси

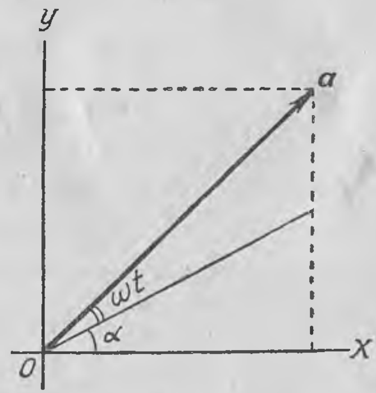
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{18.35}$$

биринчи комплекс сонни тасвирловчи векторга нисбатан манфий йўналишда φ_2 бурчакка бурилган ва r_2 марта камайтирилган узунликка эга вектор билан тасвирланади. Масалан, бирор комплекс соннинг i га бўлинмаси шу комплекс сонни тасвирловчи векторга нисбатан манфий йўналишда тўғри бурчакка бурилган ўша узунликдаги вектор билан тасвирланади, чунки $\frac{1}{i}$ га мос модуль 1 га ва аргумент эса $-\frac{\pi}{2}$ га тенгдир.

VII. Гармоник скаляр тебранишларнинг комплекс ифодаланиши. Механика, акустика, оптика, электрорадиотехника каби фанларда тебранишлар назариясида хилма-хил даврий функциялар билан иш кўрилади. Даврий функциялардан энг оддийси синус ёки косинусдир. Гармоник тебраниш шундай синус ва косинус функциялар воситасида ифодаланади. Қўйилиш нуқтаси атрофида текис айланма ҳаракат қилувчи, ўзгармас узунликдаги векторнинг бир-бирига перпендикуляр икки йўналишга туширилган проекциялари гармоник тебранишларни ифодалайди. Масалан, ўзгармас бурчак тезлиги ω билан узининг боши атрофида соат стрелкасининг юришига қарши йўналишда айланувчи, ўзгармас узунликдаги a векторнинг X ёки Y уқдаги проекцияларини олайлик (82- расм): $a_x = a\cos\omega t$, $a_y = a\sin\omega t$. Бу ерда бошланғич вақтда ($t = 0$) айланувчи вектор X уқида ётади деб ҳисобланади.



82- расм.



83- расм.

Агар бошланғич вақтда айланувчи вектор X ўқи билан бирор α бурчак ҳосил қилса (83- расм):

$$a_x = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{18.36}$$

$$a_y = a\sin(\omega t + \alpha) \tag{18.37}$$

бўлади. *Шу формулаларнинг ҳар бири билан ифодаланган ҳаракат гармоник тебраниш дейилади, a — гармоник тебраниш амплитудаси,* $\omega t + \alpha$ *— гармоник тебраниш фазаси,* α

эса гармоник тебранишнинг бошланғич фазаси дейилади. Тўла тебраниш бирор ҳолатдан бошланиб, ўша ҳолатга яна қайтиш ҳаракатидан иборатдир. Битта тўла тебраниш вақти T тебраниш даври деб, унга тескари миқдор $\nu = \frac{1}{T}$ *тебраниш частотаси,* $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ *эса тебранишнинг циклик частотаси деб аталади.*

Ушбу комплекс функцияни олайлик:

$$z = a e^{i(\omega t+\alpha)}. \tag{18.38}$$

Бу функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари юқорида ёзиб кўрсатилган гармоник скаляр тебранишларни ифодалайди:

$$z = a\cos(\omega t + \alpha) + i\,a\sin(\omega t + \alpha).$$

Шундай қилиб, (18.38) формула гармоник скаляр тебранишнинг комплекс ифодаланишини кўрсатади: комплекс функция модули тебраниш амплитудаси, комплекс функция аргументи эса тебраниш фазасидир.

Гармоник тебранишдаги бирор φ скалярни синусоидал ёки косинусоидал шаклларнинг бирида ёзиб кўрсатсак бўлади:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{18.39}$$

$$\varphi = a\sin(\omega t + \alpha). \tag{18.40}$$

Равшанки:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha) = a\cos\alpha\cos\omega t - a\sin\alpha\sin\omega t.$$

Агар $a\cos\alpha = b_1$ ва $a\sin\alpha = c_1$ десак,

$$\varphi = b_1\cos\omega t + c_1\sin\omega t$$

бўлади. Шунингдек:

$$\varphi = a\sin(\omega t + \alpha) = a\sin\alpha\cos\omega t + a\cos\alpha\sin\omega t.$$

Энди $a\sin\alpha = b_2$ ва $a\cos\alpha = c_2$ десак,

$$\varphi = b_2\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

бўлади.

Хуллас, синусоидал (18.40) ёки косинусоидал (18.39) шаклларнинг бирида ёзиб кўрсатилган тебранишни тубандаги шаклда ҳам ёзиб кўрсатиш мумкин:

$$\varphi = b\cos\omega t + c\sin\omega t, \tag{18.41}$$

бу ерда b, c — ҳақиқий ўзгармас сонлар.

Энди b, c сонлардан ушбу комплекс константа d ҳосил қилайлик: $d = b - ic$. У вақтда:

$$d e^{i\omega t} = (b - ic)(\cos\omega t + i\sin\omega t) =$$

$$= b\cos\omega t + c\sin\omega t + i(b\sin\omega t - c\cos\omega t)$$

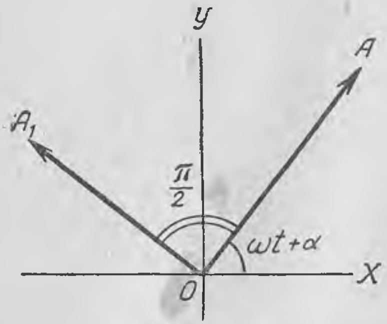
бўлади. Бу комплекс функциянинг ҳақиқий қисми (18.41) шаклда ёзиб кўрсатилган тебранишни ифодалайди:

$$\varphi = R_e\{(b - ic)\, e^{i\omega t}\}. \tag{18.42}$$

Гармоник тебранишларни комплекс функциялар воситасида ўрганиш катта қулайликлар туғдиради.

VIII. Гармоник скаляр тебранишларнинг вектор тасвирланиши. Бирор гармоник скаляр тебраниш $\varphi = a\cos(\omega t + \alpha)$ берилган экан, уни ифодаловчи комплекс функцияни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$z = a\, e^{i(\omega t + \alpha)}.$$



84- расм.

Комплекс функцияни тасвирловчи вектор шу функция воситасида ифодаланган гармоник скаляр тебранишни тасвирловчи вектор бўлади. Гармоник скаляр тебранишларнинг вектор тасвирланиши 84- расмда кўрсатилган. $\overrightarrow{OA}$ векторнинг узунлиги тебраниш амплитудаси a га, $\overrightarrow{OA}$ векторнинг X ўқ билан ҳосил қилган бурчаги тебраниш фазаси $\omega t + \alpha$ га, $\overrightarrow{OA}$ векторнинг бошланғич $t = 0$ вақтда X ўқи билан ҳосил қилган бурчаги эса тебранишнинг бошланғич фазаси α га тенгдир.

Энди яна бир гармоник тебраниш берилган бўлсин:

$$z_1 = a_1\, e^{\, i\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Амплитудаси a_1 ва фазаси $\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}$ бўлган бу гармоник тебраниш ўша 84- расмда $\overrightarrow{OA_1}$ вектор билан тасвирланган. Бу икки тебраниш орасидаги фаза айирмаси $\frac{\pi}{2}$ га тенгдир.

Иккинчи тебранишнинг фазаси биринчи тебранишникига қараганда $\frac{\pi}{2}$ қадар кўпроқ, яъни иккинчи тебраниш биринчига нисбатан $\frac{\pi}{2}$ фаза олдиндир ёки, бошқача қилиб айтганда, биринчи тебраниш иккинчига нисбатан $\frac{\pi}{2}$ фаза кетиндир.

Комплекс функциялар билан бажариладиган амалларни векторлар воситасида тасвирлаш масаласини кўриб чиққан эдик.

Гармоник скаляр тебранишларни вектор воситасида тасвирлаб ўрганишда шу айтилганлардан фойдаланамиз.

Гармоник скаляр тебранишларнинг вектор воситасида тасвирланиши вектор диаграммалар дейилади.

Энди бир тўғри чизиқда рўй бераётган турли амплитудали ва турли бошланғич фазали, аммо умумий частотали n та гармоник скаляр тебраниш олайлик:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \\
\varphi_2 &= a_2 \cos(\omega t + \alpha_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_i &= a_i \cos(\omega t + \alpha_i), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= a_n \cos(\omega t + \alpha_n).
\end{aligned}\right\} \tag{18.43}$$

Бу гармоник тебранишлар йиғиндиси

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \tag{18.44}$$

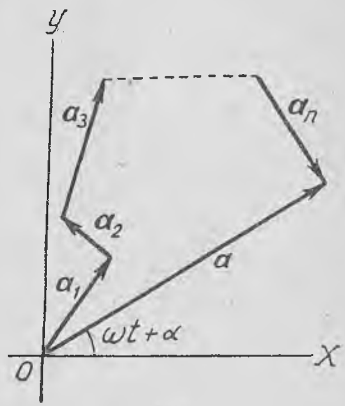
уша частотали, аммо ўзига мос амплитудали ва бошланғич фазали натижавий гармоник тебраниш ҳосил қилади:

$$\varphi = a \cos(\omega t + \alpha). \tag{18.45}$$

Ҳозирча ноаниқ бўлган a ва α ни билиш учун вектор диаграммадан фойдаланишимиз мумкин. Берилган гармоник тебранишлар $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ векторлар орқали тасвирланса, уларнинг йиғиндиси

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_i + \ldots + \boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \tag{18.46}$$

натижавий гармоник тебранишни тасвирлайди (85- расм).



85- расм.

Аммо векторлар йиғиндисининг проекцияси шу векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг:

$$a \cos(\omega t + \alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\omega t + \alpha_i),$$

$$a \sin(\omega t + \alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega t + \alpha_i).$$

Бу ифода ҳар қандай вақт учун тўғридир. Жумладан, бошланғич $t=0$ вақт учун:

$$a \cos \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos \alpha_i,$$

$$a \sin \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin \alpha_i.$$

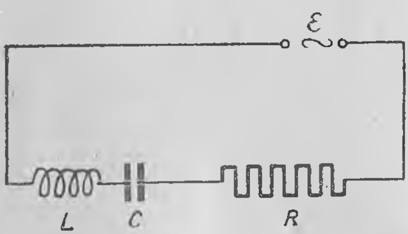
Шуларга биноан:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i \cos \alpha_i}, \tag{18.47}$$

$$a^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cos \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sin \alpha_i\right)^2 \tag{18.48}$$

бўлади, яъни натижавий амплитуда билан натижавий бошланғич фаза берилган амплитудалар ва бошланғич фазалар орқали аниқланади.

IX. Электр занжирининг вектор диаграммалари. Энди вектор диаграмма тушунчасини физикага доир конкрет бир масалада қараб чиқайлик. Ўзгарувчан электр токи занжири кетма-кет уланган қаршилик R, индуктивлиги L бўлган ғалтак ва сиғими C бўлган конденсатордан тузилган бўлсин (86- расм). Занжир манбаининг бераётган кучланиши (тўғрироқ айтсак, унинг электр юритувчи кучи) $\mathcal{E}$ циклик частотаси ω бўлган гармоник тебранишда экан, у вақтда:



86- расм.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \tag{18.49}$$

бўлади, бу ерда $\mathcal{E}_0$ — шу кучланишнинг амплитудасини ифодаловчи ҳақиқий миқдор. Ом қонунига биноан, қаршилиги R бўлган қисмдаги кучланиш учун қуйидагини ёзамиз:

$$V_0 = IR, \tag{18.50}$$

бу ерда I — занжирдаги ток кучини ифодаловчи миқдор. Электромагнит индукция қонунига кўра, ғалтакдаги индукцион кучланиш (тўғрироқ айтсак, индукцион электр юритувчи куч) учун бундай ёзамиз:

$$V_u = -L \frac{dI}{dt}. \tag{18.51}$$

Конденсатор сиғимининг таърифига кўра, конденсатор қопламалари орасидаги кучланиш:

$$V_k = \frac{e}{C} \tag{18.52}$$

бўлади, бу ерда e — конденсатор қопламасидаги электр миқдори. Бу электр миқдорининг dt вақт давомидаги орттирмаси $de = Idt$ бўлади, демак, $e = \int Idt$ ва у вақтда:

$$V_k = \frac{\int Idt}{C}. \tag{18.53}$$

Умумлашган Ом конунини (Кирхгофнинг иккинчи қонунини) биз текшираётган занжирга татбиқ қилиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$V_0 + V_k = \varepsilon + V_u$$

ёки бу ердаги миқдорларнинг юқоридаги ифодалари олинса:

$$IR + \frac{\int Idt}{C} + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

бўлади.

R, C, L ни ўзгармас миқдорлар деб ҳисоблаб, бу тенгликнинг иккала томонидан вақтга нисбатан ҳосила олайлик:

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} + L\frac{d^2I}{dt^2} = i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} \tag{18.54}$$

Бу дифференциал тенгламанинг бизни қизиқтирган хусусий ечимини қуйидаги шаклда ёзайлик:

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \tag{18.55}$$

бу ерда I_0 ва φ — аниқланиши керак бўлган ҳақиқий миқдорлар. Бундан:

$$\frac{dI}{dt} = i\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)},$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

бўлади. Топилган бу ифодаларни (18.54) га қўямиз:

$$Ri\omega I_0 e^{i(\omega t-\varphi)} + \frac{I_0}{C} e^{i(\omega t-\varphi)} - L\omega^2 I_0 e^{i(\omega t-\varphi)} = i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t}. \tag{18.56}$$

Энди тенгламанинг икки томонини ωI_0 га бўлиб, сўнгра $e^{-i(\omega t-\varphi)}$ га купайтириб чиқайлик:

$$iR + \frac{1}{\omega C} - \omega L = i\,\frac{\varepsilon_0}{I_0} e^{i\varphi}.$$

Аммо:

$$ie^{i\varphi} = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\cos\varphi - \sin\varphi,$$

демак:

$$iR + \frac{1}{\omega C} - \omega L = i\frac{\varepsilon_0}{I_0}\cos\varphi - \frac{\varepsilon_0}{I_0}\sin\varphi.$$

Икки комплекс соннинг тенг бўлиши учун, уларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари мос равишда тенг бўлиши керак:

$$R = \frac{\varepsilon_0}{I_0}\cos\varphi,\ \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{I_0}\sin\varphi.$$

Шуларга асосан:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \tag{18.57}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{18.58}$$

бўлади. Топилган сўнгги формулалардан фойдаланиб, баъзи хусусий ҳолларни кўрсатиб ўтайлик.

Занжир фақат қаршиликдан иборат бўлса ($R \neq 0$, $C = \infty$, $L = 0$):

$$\varphi = 0,\ I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

бўлади, у вақтда (18.55) га мувофиқ:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}e^{i\omega t}, \tag{18.59}$$

буни (18.49) билан таққослаб, *қаршиликдангина иборат занжирда ток кучи ва кучланишининг бир хил фазага эгалигини кўрамиз.*

Занжир фақат сиғимдан иборат бўлса ($C \neq \infty$, $L = 0$, $R = 0$):

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},\ I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} = \varepsilon_0\omega C$$

бўлади, у вақтда (18.55) га мувофиқ:

$$I = \varepsilon_0\omega C e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{18.60}$$

буни (18.49) билан таққослаб, *сиғимдангина иборат занжирда ток кучи кучланишга нисбатан* $\frac{\pi}{2}$ *фаза олдин бўлишини кўрамиз.*

Занжир фақат индуктивликдан иборат бўлса ($L \neq 0$, $C = \infty$, $R = 0$):

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$$

бўлади, у вақтда (18.55) га мувофиқ:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (18.61)$$

(18.49) га биноан, *индуктивликдангина иборат занжирда ток кучи кучланишга нисбатан* $\frac{\pi}{2}$ *фаза кетин бўлади.*

Одатда, R *омик қаршилик,* $\frac{1}{\omega C}$ *сиғим қаршилиги,* ωL *эса индуктив қаршилик дейилади.* Гоҳо $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ *тўла қаршилик,* ωL *билан* $\frac{1}{\omega C}$ *ва* $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ *эса реактив қаршиликлар дейилади. Омик қаршилик баъзан актив қаршилик деб ҳам юритилади.*

Энди (18.56) да ифодаланган тенгламанинг икки томонини $i\omega$ га бўлайлик:

$$I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} + \frac{1}{i}\frac{I_0}{\omega C} e^{i(\omega t - \varphi)} - \frac{1}{i} I_0 \omega L e^{i(\omega t - \varphi)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

ёки $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ва $-\frac{1}{i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ бўлганлиги сабабли,

$$I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} + \frac{I_0}{\omega C} e^{i\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} + I_0 \omega L e^{i\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \qquad (18.62)$$

бўлади. Бу формуладан фойдаланиб, вектор диаграмманинг қандай тузилишини кўриб чиқайлик. Юқоридаги тенгликнинг ўнг томонида турган комплекс функцияни тасвирловчи вектор шу тенгликнинг чап томонида турган комплекс функцияларни тасвирловчи векторлар йиғиндисига тенг бўлиши керак.

Тенгликнинг чап томонидаги биринчи ҳад:

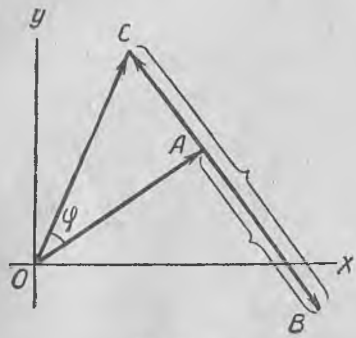
$$z_1 = I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} \qquad (18.63)$$

қаршилиги R га тенг булган қисмдаги кучланишни ифодалайди. Бу кучланишни тасвирловчи $\overrightarrow{OA}$ векторнинг узунлиги $I_0 R$ га ва X ўқ билан ҳосил қилган бурчаги $\omega t - \varphi$ га тенг (87- расм).

Тенгликнинг чап томонидаги иккинчи ҳад:

$$z_2 = \frac{I_0}{\omega C} e^{i\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{18.64}$$

сиғим қаршилиги $\frac{1}{\omega C}$ га тенг бўлган қисмдаги кучланишни ифодалайди. Бу кучланишни тасвирловчи $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги $\frac{I_0}{\omega C}$ га ва X ўқ билан ҳосил қилган бурчаги $\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}$ га тенгдир.



87- расм.

Тенгликнинг чап томонидаги учинчи ҳад:

$$z_3 = I_0 \omega L e^{i\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{18.65}$$

индуктив қаршилиги ωL га тенг бўлган қисмдаги кучланишни ифодалайди. Бу кучланишни тасвирловчи $\overrightarrow{BC}$ векторнинг узунлиги $I_0 \omega L$ га ва X ўқ билан ҳосил қилган бурчаги $\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}$ га тенгдир.

Тенгликнинг ўнг томонидаги:

$$z = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \tag{18.66}$$

ифода занжир манбаидан олинган кучланишдир. Бу кучланишни тасвирловчи $\overrightarrow{OC}$ вектор аввалги учта вектор йиғиндиси бўлиб, унинг узунлиги $\mathcal{E}_0$ га ва X ўқ билан ҳосил қилган бурчаги ωt га тенг.

(18.63), (18.55) муносабатлар ток кучини тасвирловчи векторнинг йўналиши расмдаги $\overrightarrow{OA}$ вектор йўналиши билан бир хиллигини кўрсатади. Демак, занжирдаги ток кучининг манба кучланишига нисбатан фаза айирмаси $\overline{OA}$ ва $\overrightarrow{OC}$ векторлар орасидаги бурчакка тенгдир: $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$.

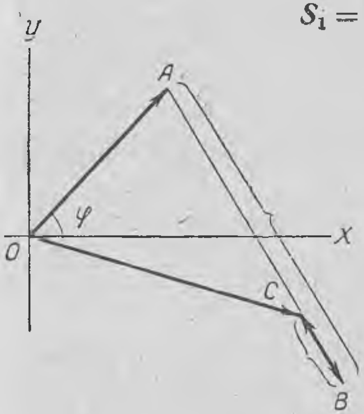
Биз 87- расмда аниқлик учун $\overline{BC} > \overline{AB}$, яъни $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ деб ҳисобладик.

$\overline{BC} < \overline{AB} \left(\omega L < \frac{1}{\omega C}\right)$ ҳолга мос вектор диаграмма 88- расмда кўрсатилган.

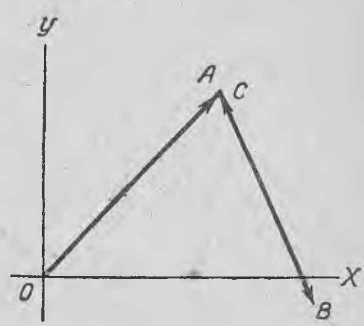
Ниҳоят, $\overline{BC} = \overline{AB}\left(\omega L = \frac{1}{\omega C}\right)$ бу ҳолга мос вектор диаграмма 89- расмда кўрсатилган.

X. Гармоник вектор тебранишлар. Берилган тўғри чизиқда содир бўлаётган аниқ частотали гармоник тебранишдаги бирор векторни олайлик:

$$S_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \tag{18.67}$$



88- расм.



89- расм.

бу ерда a_1 вектор ўзгармас бўлиб, унинг сон қиймати амплитудани ифодалайди; φ_1 — бошланғич фаза. Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган бошқа тўғри чизиқда содир бўлаётган ўша частотали гармоник тебранишдаги иккинчи векторни олайлик:

$$S_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \tag{18.68}$$

бу ерда ҳам a_2 вектор ўзгармасдир; унинг сон қиймати амплитудани ва φ_2 эса бошланғич фазани ифодалайди.

Тўғри чизиқли гармоник вектор тебраниш тўғри чизиқли қутбланган тебраниш дейилади.

Берилган S_1 ва S_2 векторлар йиғиндиси S бўлсин:

$$S = S_1 + S_2. \tag{18.69}$$

Натижавий S вектор берилган S_1, S_2 векторлар ётган текисликда ётади. S_1, S_2 векторларнинг учлари перпендикуляр тўғри чизиқлар бўйича ҳаракат қилади. Энди натижавий S вектор учининг қандай чизиқ бўйича ҳаракат қилишини текшириб кўрайлик.

Ўзгармас векторлардан $\boldsymbol{a}_1$ вектор йўналиши X ўқ ва $\boldsymbol{a}_2$ вектор йўналиши Y ўқ йўналиши сифатида олинган бўлсин. Юқоридаги формулаларга биноан:

$$S_{1x} = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1),\ S_{1y} = 0,\ S_{2x} = 0,\ S_{2y} = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\left.\begin{aligned} S_x &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ S_y &= a_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \end{aligned}\right\} \qquad (18.70)$$

бундан:

$$\frac{S_x}{a_1} = \cos(\omega t + \varphi_1),\ \frac{S_y}{a_2} = \cos(\omega t + \varphi_2)$$

ёки бурчаклар йиғиндисининг косинуси формуласидан фойдалансак:

$$\frac{S_x}{a_1} = \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1,$$

$$\frac{S_y}{a_2} = \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2$$

бўлади.

Биринчи тенгликни $\cos \varphi_2$ га, иккинчи тенгликни $\cos \varphi_1$ га кўпайтириб, натижаларнинг айирмасини оламиз. Энди ҳалиги биринчи тенгликни $\sin \varphi_2$ га, иккинчи тенгликни $\sin \varphi_1$ га кўпайтириб, натижаларни айирамиз. Шундай қилиб:

$$\frac{S_x}{a_1} \cos \varphi_2 - \frac{S_y}{a_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2),$$

$$\frac{S_x}{a_1} \sin \varphi_2 - \frac{S_y}{a_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)$$

ёки

$$\frac{S_x}{a_1} \cos \varphi_2 - \frac{S_y}{a_2} \cos \varphi_1 = -\sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{S_x}{a_1} \sin \varphi_2 - \frac{S_y}{a_2} \sin \varphi_1 = -\cos \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

бўлади. Бу тенгликларни квадратга кўтариб, тегишли томонларни қўшамиз, натижада:

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{S_x}{a_1} \frac{S_y}{a_2} (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

ёки

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{S_x}{a_1} \frac{S_y}{a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

келиб чиқади. Тебраниш фазаларининг айирмаси φ орқали белгиланса:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad (18.71)$$

булади. У вақтда:

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2-2\frac{S_x}{a_1}\frac{S_y}{a_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi \qquad (18.72)$$

келиб чиқади. Бу тенглама маркази координаталар бошида жойлашган эллипсни ифодалайди.

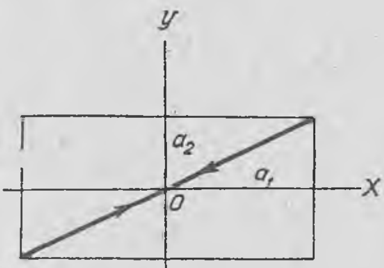
Шундай қилиб, умумий частотали гармоник тебранишда бўлган ўзаро перпендикуляр икки вектор йиғиндисини тасвирловчи натижавий векторнинг боши координаталар бошида бўлиб, унинг учи эллипс бўйича ҳаракат қилади. Бундай вектор ҳаракат эллиптик қутбланган тебраниш дейилади.

(18.70) билан (18.71) дан кўрамизки, X ўқдаги тебраниш фазаси Y ўқдаги тебраниш фазасига нисбатан олдин бўлса, φ нинг ишораси мусбат ва кетин бўлса, манфий ҳисобланади. Фазалар айирмасининг қандайлигига қараб, турли хусусий ҳоллар рўй бериши мумкин:

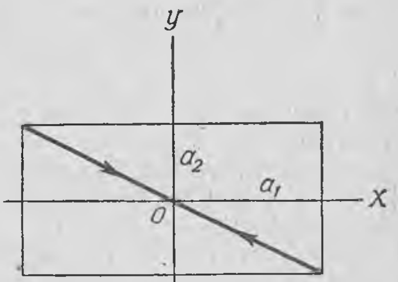
1) $\varphi=0$ ёки $\pm 2\pi$. У вақтда (18.72) га мувофиқ:

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2-2\frac{S_x}{a_1}\frac{S_y}{a_2}=0,\ \left(\frac{S_x}{a_1}-\frac{S_y}{a_2}\right)^2=0$$

бўлади, бу ердан $S_y=\frac{a_2}{a_1}S_x$, яъни натижавий векторнинг учи биринчи ва учинчи квадрантларда бўлиб, координаталар боши орқали ўтган тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади (90-расм). Бу ҳаракат тўғри чизиқли қутбланган тебранишдир.



90- расм.



91- расм.

2) $\varphi=\pm\pi$. У вақтда (18.72) га мувофиқ:

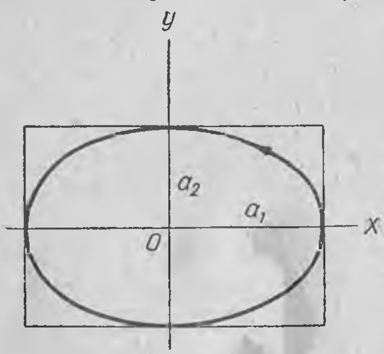
$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2+2\frac{S_x}{a_1}\frac{S_y}{a_2}=0,\ \left(\frac{S_x}{a_1}+\frac{S_y}{a_2}\right)^2=0$$

бўлади, бу ердан $S_y=-\frac{a_2}{a_1}S_x$, яъни натижавий векторнинг учи иккинчи ва тўртинчи квадрантларда бўлиб, координаталар боши орқали ўтган тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади (91-расм). Бу ҳаракат ҳам тўрғи чизиқли қутбланган тебранишдир.

3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У вақтда (18.72) га мувофиқ:

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

яъни натижавий векторнинг учи бош ўқлари X ва Y ўқларда ётган эллипс бўйича соат стрелкасининг юришига қарши йўналишда ҳаракат қилади (92- расм). Бу ҳаракат эллиптик қутбланган тебранишдир. Агар $a_1 = a_2$ бўлса, доиравий (циркуляр) қутбланган тебраниш ҳосил бўлади.



92- расм.

(18.70) ва (18.71) га биноан, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлганда:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ S_y &= a_2 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (18.73)$$

бўлади. Демак, соат стрелкасининг юришига қарши йўналишдаги эллиптик ($a_1 = a_2$ бўлганда доиравий) тебранишни иккита перпендикуляр тўғри чизиқли гармоник тебранишга ажратиш мумкин.

4) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. У вақтда (18.72) га мувофиқ:

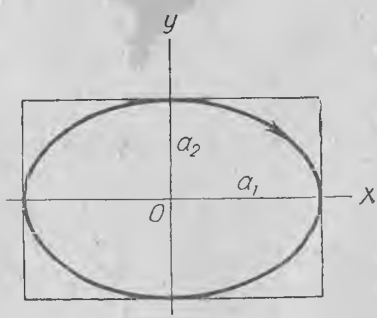
$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

яъни натижавий векторнинг учи ўша эллипс бўйича соат стрелкасининг юриши йўналишида ҳаракат қилади (93- расм). Бу эллиптик қутбланган тебраниш $a_1 = a_2$ бўлганда доиравий (циркуляр) қутбланган тебраниш шаклини олади.

(18.70) ва (18.71) га биноан, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ бўлганда:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ S_y &= a_2 \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (18.74)$$

бўлади. Демак, соат стрелкасининг юриши йўналишидаги эллиптик ($a_1 = a_2$ бўлганда доиравий) тебранишни иккита перпендикуляр тўғри чизиқли гармоник тебранишга ажратиш мумкин.



93- расм.

Перпендикуляр иккита тўғри чизиқли гармоник вектор тебраниш йиғиндиси эллиптик тебранишни ҳосил қилишини кўрдик. Энди бир хил частотали, турлича амплитуда ва бошланғич фазали, аммо перпендикуляр бўлмаган, яъни ихтиёрий йўналишлардаги иккита тўғри чизиқли гармоник вектор тебранишни олайлик:

$$\sigma_1 = b_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$
$$\sigma_2 = b_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Натижавий вектор тебраниш:

$$\sigma = b_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + b_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

ва унинг X, Y ўқларга проекциялари:

$$\sigma_x = b_{1x} \cos(\omega t + \alpha_1) + b_{2x} \cos(\omega t + \alpha_2),$$
$$\sigma_y = b_{1y} \cos(\omega t + \alpha_1) + b_{2y} \cos(\omega t + \alpha_2)$$

бўлади.

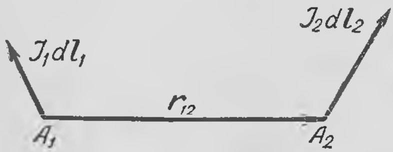
Гармоник тебранишларни қўшиш қоидаларига биноан, сўнгги формулаларнинг ўнг томонлари бир хил частотали, турли амплитуда ва бошланғич фазали, ўзаро перпендикуляр бўлган иккита гармоник тебранишни ифодалайди. Бундай тебранишларнинг қушилиши натижасида эллиптик тебраниш пайдо бўлади. Шулар каби мулоҳазалардан равшанки, *умуман бир хил частотали, турлича амплитуда ва бошланғич фазали, йўналишлари ҳар хил бўлган иккита ва ундан кўпроқ тўғри чизиқли гармоник тебранишлар йиғиндиси эллиптик тебраниш ҳосил қилади.*

Айланувчи вектор тебранишларга мисол сифатида айланувчи магнит майдони кўрсатилиши мумкин. Гармоник ўзгарувчи токлар атрофда гармоник ўзгарувчи магнит майдонлари ҳосил қилади. Бу майдонларнинг кучланганлик вектори ёки индукция вектори ҳам гармоник ўзгаришларда бўлади. Шундай магнит майдонларидан айланувчи магнит майдони ҳосил қилиш мумкин. Масалан, физик экспериментларда ёки электротехникада керакли бўлган айланувчи магнит майдони ҳосил қилиш учун икки фазали ёки уч фазали токлардан фойдаланилади.

Юқорида айтилганларга асосланиб, гармоник вектор тебранишлар назариясига қарашли кўпгина хулосалар чиқариш мумкин эди. Масалан, бир хил йўналишли иккита доиравий тебраниш йиғиндиси ўша йўналишли доиравий тебраниш, қарама-қарши йўналишли иккита доиравий тебраниш йиғиндиси тўғри чизиқли тебраниш ҳосил қилади, тўғри чизиқли тебраниш иккита қарама-қарши доиравий тебранишга, эллиптик тебраниш эса иккита қарама-қарши доиравий тебранишга ажратилади ва ҳоказо.

XI. Элементар токларнинг ўзаро таъсири. Электр токлари ўзларининг магнит майдонлари воситасида бир-бирига таъсир қилади. Бирор контурдаги ток кучи I ва шу контурнинг ток йўналишида олинган элементи dl десак, элементар ток Idl бўлади. Турли контурдаги токларнинг ўзаро таъсири шуларга мос элементар токларнинг ўзаро таъсиридан ҳосил бўлади.

Фазонинг A_1 нуқтасидаги элементар ток I_1dl_1 ва A_2 нуқтасидаги элементар ток I_2dl_2 бўлсин (94- расм). A_1 нуқтадаги биринчи элементар ток атроф фазода магнит майдони ҳосил қилиб, унинг A_2 нуқтадаги кучланганлиги Био — Савар — Лаплас қонунига мувофиқ:



94- расм.

$$dH = \frac{I_1}{cr_{12}^3}[dl_2 r_{12}] \qquad (18.75)$$

бўлади.

Магнит майдонининг A_2 нуқтадаги магнит индукцияси:

$$dB = \mu\, dH = \frac{\mu I_1}{cr_{12}^3}[dl_1 r_{12}]$$

бўлади, бу ерда μ — фазодаги моддий муҳитнинг магнит сингдирувчанлиги.

Магнит майдонининг A_2 нуқтадаги иккинчи элементар токка таъсир кучи Ампер қонунига мувофиқ:

$$dF_{12} = \frac{I_2}{c}[dl_2 dB] \qquad (18.76)$$

ёки олдинги ифодадан фойдалансак:

$$dF_{12} = \frac{\mu I_1 I_2}{c^2 r_{12}^3}[dl_2[dl_1 r_{12}]] \qquad (18.77)$$

бўлади. *Бу формула биринчи элементар токнинг иккинчи элементар токка таъсир кучини ифодалайди.*

Икки қайтали вектор кўпайтма хусусиятидан фойдаланиб, юқоридаги формулага бошқа шакл бериш мумкин:

$$dF_{12} = \frac{\mu I_1 I_2}{c^2 r_{12}^3}\{dl_1(dl_2 r_{12}) - r_{12}(dl_1 dl_2)\}.$$

Агар dl_1 билан dl_2 ўзаро параллел ва r_{12} га перпендикуляр бўлса (95- расм), $(dl_2 r_{12}) = 0, (dl_1 dl_2) = dl_1 dl_2$ булади, демак:

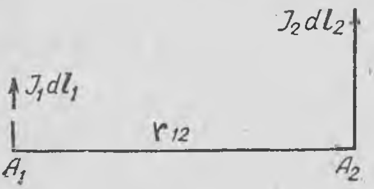
$$dF_{12} = -\frac{\mu I_1 I_2 dl_1 dl_2}{c^2 r_{12}^3} r_{12},$$

яъни ўзаро параллел элементар токлар бир-бирини тортади.

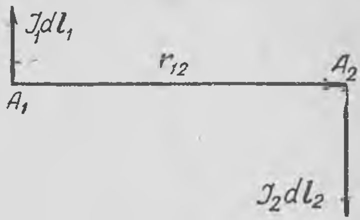
Агар dl_1 билан dl_2 антипараллел ва $\boldsymbol{r}_{12}$ га перпендикуляр бўлса (96-расм), $(dl_2 r_{12}) = 0$, $(dl_1 dl_2) = -dl_1 dl_2$ булади, демак:

$$dF_{12} = \frac{\mu I_1 I_2 dl_1 dl_2}{c^2 r_{12}^3} r_{12},$$

яъни антипараллел элементар токлар бир-бирини итаради.



95- расм.



96- расм.

XII. Электроннинг магнит моменти ва ҳаракат миқдори моменти. Ҳар қандай атом мусбат электрли ядродан ва унинг атрофида ҳаракатланувчи манфий электрли электронлардан тузилган. Нильс Бор назариясига мувофиқ, электрон ядро атрофида доиравий орбита бўйлаб текис ҳаракат қилади (97-расм). Электроннинг массаси m, орбита бўйлаб ҳаракат тезлиги $\boldsymbol{v}$ бўлса, унинг орбитал ҳаракат миқдори $m\boldsymbol{v}$, орбитал ҳаракат миқдори моменти эса:

$$\boldsymbol{L} = m[\boldsymbol{rv}] \tag{18.78}$$

булади. Орбита бўйлаб ҳаракатдаги электрон доиравий ток ҳосил қилади. Тезликнинг вақт бирлигида ўтилган йўл билан ўлчаниши назарда тутилса, электрон вақт бирлигида доирани $\frac{v}{2\pi r}$ марта айланиб чиқади. Ток кучи I вақт бирлигида ўтган электр миқдори билан ўлчанади, демак:

$$I = \frac{v}{2\pi r} e, \tag{18.79}$$

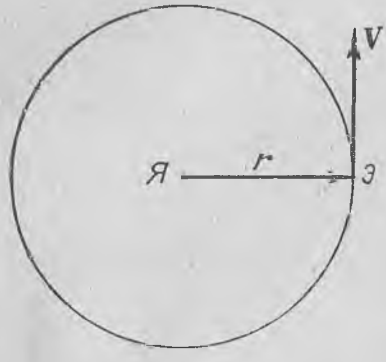
бу ерда e — электрон зарядининг сон қиймати.

Маълумки, токнинг магнит моменти:

$$\boldsymbol{M} = \frac{I}{c} \boldsymbol{S} \tag{18.80}$$

бўлади, бу ерда S вектор ток контури билан чегараланувчи ориентацияли юзни ифодалайди. Мусбат заряднинг ҳаракат йўналиши ток йўналиши ҳисобланганлиги сабабли, 97- расмдан:

$$\boldsymbol{S} = \pi r^2 \left[\frac{\boldsymbol{v}}{v}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$$



97- расм.

бўлади. У вақтда (18.79) билан (18.80) дан фойдалансак:

$$\boldsymbol{M} = \frac{e}{2c}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{r}], \qquad (18.81)$$

(18.78) га биноан эса:

$$\boldsymbol{M} = -\frac{e}{2mc}\boldsymbol{L} \qquad (18.82)$$

бўлади.

Демак, электроннинг орбитал магнит моменти билан орбитал ҳаракат миқдори моменти антипараллел бўлиб, уларнинг пропорционаллик коэффициенти $\frac{e}{2mc}$ га тенгдир.

Нильс Бор назариясига кўра, *электроннинг орбитал ҳаракат миқдори моменти фақат узлукли қийматларга эга бўлиши мумкин:*

$$|\boldsymbol{L}| = k\frac{h}{2\pi}, \qquad (18.83)$$

бу ерда $h = 6{,}6\cdot 10^{-27}$ *эрг. сек* (Планк константаси) ва $k = 1, 2, 3, \ldots$. У вақтда (18.82) га мувофиқ:

$$|\boldsymbol{M}| = k\frac{eh}{4\pi mc} \qquad (18.84)$$

бўлади.

Минимал магнит моментининг сон қиймати учун ($k = 1$) қуйидагини ёзамиз:

$$M_B = \frac{eh}{4\pi mc}, \qquad (18.85)$$

бу ерда M_B *Бор магнетони* дейилади.

Маълумки, қуёш атрофида ҳаракатланувчи планета ўзининг ўқи атрофида ҳам айланма ҳаракатда булади. Шунга ўхшашроқ ҳаракат электронда ҳам мавжуд: орбитал ҳаракатидан қатъи назар, *ҳар қандай электроннинг ўзига хос ҳаракати — хусусий ҳаракати ҳам бор.*

Электроннинг ана шу хусусий ҳаракати электроннинг спини деб аталади. Электроннинг спин магнит моменти M_s ва спин ҳаракат миқдори моменти L_s ушбу қонунга бўйсунади:

$$M_s = -2\frac{e}{2mc}L_s, \tag{18.86}$$

яъни электроннинг спин магнит моменти билан спин ҳаракат миқдори моменти антипараллел бўлиб, уларнинг пропорционаллик коэффициенти $\frac{e}{mc}$ *га тенгдир.*

Уленбек ва Гаудсмит фаразиясига кўра, электроннинг спин ҳаракат миқдори моментининг сон қиймати $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ га тенг:

$$|L_s| = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}. \tag{18.87}$$

(18.86) ва (18.87) формулаларга биноан:

$$|M_s| = \frac{eh}{4\pi mc} \tag{18.88}$$

бўлади, яъни электроннинг спин магнит моменти Бор магнетонига тенгдир.

XIII. Атомнинг вектор моделлари. Ҳар қандай вектор аниқ узунлик билан фазодаги аниқ йўналишга эгадир. Классик механикада ҳаракат миқдори моментининг вектори ихтиёрий узунлик ва йўналишга эга бўлиши мумкин. Шу сабабли унинг бирор йўналишга (масалан, z ўқига) проекцияси узлуксиз қийматлар ҳосил қилади.

Квантлар механикасида ҳаракат миқдори моментининг вектори аниқ узунликка эга бўлса-да, аммо аниқ йўналишга эга эмас, чунки квантлар механикаси қонунларига кўра, ҳаракат миқдори моментининг фақат сон қиймати билан биттагина компоненти аниқ бўлиб, қолган икки компоненти аниқ эмас.

Ҳаракат миқдори моменти векторининг ихтиёрий йўналишдаги (масалан, z ўқи, магнит майдони йўналишидаги) проекцияси аниқ бўлиб, фақат узлукли қийматлар ҳосил қилиши, яъни ҳаракат миқдори моментининг вектори фазодаги ҳар қандай йўналиш билан фақат узлукли бурчаклар ҳосил қилиши мумкин. *Ҳаракат миқдори моментининг бу хусусияти фазовий квантланиш дейилади.*

Шу айтилганларни назарда тутиб, атом электронларининг ҳаракат миқдори моментларини векторлар воситасида тасвирлаб текшириш мумкин. *Бу усул атомнинг вектор модели дейилади.*

Биз бу ерда бир неча оддий мисоллар келтириш билангина чекланамиз.

Электроннинг орбитал ҳаракат миқдори моментининг вектори $\boldsymbol{l}$ ва унинг хусусий ҳаракат миқдори моменти — спинининг вектори $\boldsymbol{s}$ бўлсин. Квантлар механикаси қонунларига биноан:

$$|\boldsymbol{l}| = \sqrt{l(l+1)}\frac{h}{2\pi}, \tag{18.89}$$

$$|\boldsymbol{s}| = \sqrt{s(s+1)}\frac{h}{2\pi} \tag{18.90}$$

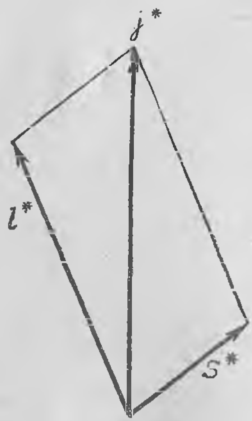
бўлади, бу ерда l — *орбитал квант сон* ва s — *спин квант сон* дейилади. Спин квант сон s фақат $\frac{1}{2}$ га тенг бўлиши мумкин: $s = \frac{1}{2}$. Орбитал квант сон $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, бу ерда n — *бош квант сон* дейилади. $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{s}$ векторларнинг параллелограмм қоидасига мувофиқ олинган йиғиндиси электроннинг тўла ҳаракат миқдори моменти вектори $\boldsymbol{j}$ ни ҳосил қилади:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}, \tag{18.91}$$

унинг сон қиймати қуйидагича бўлади:

$$|\boldsymbol{j}| = \sqrt{j(j+1)}\frac{h}{2\pi}, \tag{18.92}$$

бу ерда j — *ички квант сон ёки тўла ҳаракат миқдори моментининг квант сони дейилади*. Бу квант сон иккита қийматга эга: $j = l + \frac{1}{2}$ ёки $j = l - \frac{1}{2}$. Биз $|\boldsymbol{l}| = \sqrt{l(l+1)} = l^*$ ва $|\boldsymbol{s}| = \sqrt{s(s+1)} = s^*$ ҳамда $|\boldsymbol{j}| = \sqrt{j(j+1)} = j^*$ белгиларни киритамиз.



98- расм.

Водород ёки ишқорий металлар атомларининг, яъни битта валент электронга эга атомларнинг вектор модели умумий тарзда 98- расмда кўрсатилган. Айрим хусусий ҳоллар учун вектор моделлар конкретлашади: 1) $l = 0$, $s = \frac{1}{2}$, $j = \frac{1}{2}$ (99- расм), 2) $l = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $j = \frac{3}{2}$ (100- расм) ёки $j = \frac{1}{2}$ (101- расм), 3) $l = 2$, $s = \frac{1}{2}$, $j = \frac{5}{2}$ (102- расм) ёки $j = \frac{3}{2}$ (103- расм) ва ҳоказо.

Орбитал ҳаракат миқдори моменти билан спин ҳаракат миқдори моменти векторлари орасидаги бурчак косинусини аниқлаш мумкин; (18.91) га мувофиқ:

$$|\boldsymbol{j}|^2 = (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{l}|^2 + |\boldsymbol{s}|^2 + 2(\boldsymbol{l}\boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{l}|^2 + |\boldsymbol{s}|^2 +$$
$$+ 2|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{l}\boldsymbol{s}})$$

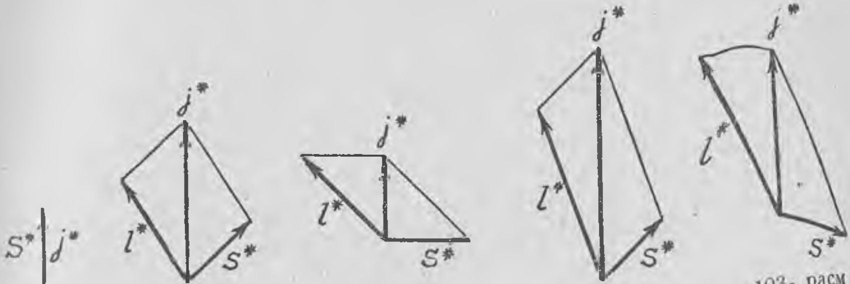
ёки юқоридаги символикага кўра:

$$j^{*2} = l^{*2} + s^{*2} + 2l^*s^* \cos(\widehat{l, s})$$

бўлади, бундан:

$$\cos(\widehat{l, s}) = \frac{j^{*2} - l^{*2} - s^{*2}}{2l^*s^*} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \tag{18.93}$$

келиб чиқади.



99- расм. 100- расм. 101- расм. 102- расм. 103- расм

Энди иккита валент электронга эга атомнинг вектор модели билан танишайлик. Орбитал ва спин ҳаракат миқдори моментларининг векторлари биринчи электрон учун l_1, s_1 ва иккинчи электрон учун l_2, s_2 бўлсин. Бу векторларнинг қўшилиш тартибидан қатъи назар, уларнинг йиғиндиси атомнинг тўла ҳаракат миқдори моменти вектори J ни ҳосил қилади. Ҳаракат миқдори моментларининг мос магнит моментлар билан боғланганлиги сабабли, магнит майдонлари воситасида электронларнинг ўзаро таъсири мавжуд. Электронларнинг орбитал магнит моментлари ҳам, спин магнит моментлари ҳам ўзаро кучли таъсир қилиши мумкин. У вақтда l_1 билан l_2 қўшилиб, тўла орбитал ҳаракат миқдори моменти вектори L ни, s_1 билан s_2 қўшилиб, тўла спин ҳаракат миқдори моменти вектори S ни ҳосил қилади, сўнгра шу L билан S йиғиндиси атомнинг тўла ҳаракат миқдори моменти вектори J ни ҳосил қилади. *Атом электронларининг бундай ўзаро таъсири спин-спин боғланиш ёки нормал боғланиш (гоҳо L — S боғланиш ёки Рассел—Саундерс боғланиши) деб юритилади.*

Шундай қилиб, нормал боғланиш учун қуйидагиларни ёзамиз:

$$\begin{aligned} L &= l_1 + l_2, \\ S &= s_1 + s_2, \\ J &= L + S. \end{aligned} \tag{18.94}$$

Бу векторларнинг сон қийматлари тубандагича аниқланади:

$$|\boldsymbol{l}_1| = l_1^* = \sqrt{l_1(l_1+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

$$|\boldsymbol{l}_2| = l_2^* = \sqrt{l_2(l_2+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

$$|\boldsymbol{s}_1| = |\boldsymbol{s}_2| = s_1^* = s_2^* = \sqrt{s(s+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

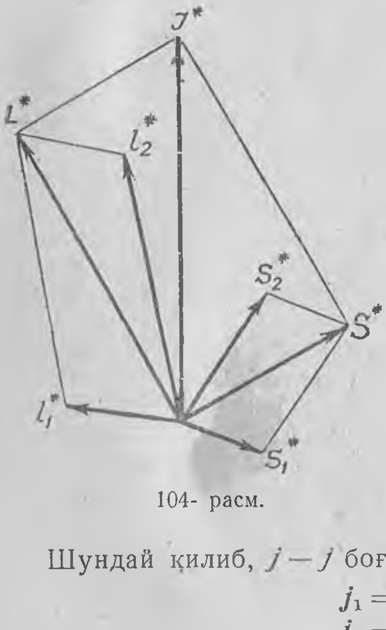
$$|\boldsymbol{L}| = L^* = \sqrt{L(L+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

$$|\boldsymbol{S}| = S^* = \sqrt{S(S+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

$$|\boldsymbol{J}| = J^* = \sqrt{J(J+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

бу ерда:

$$L = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1,\ \ldots,\ |l_1 - l_2|,$$
$$J = L + S,\ L + S - 1,\ \ldots,\ |L - S|,$$
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ва } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$



104- расм.

Иккита валент электронга эга атомнинг нормал боғланишини ифодаловчи вектор модель 104-расмда курсатилган.

Ҳар бир электроннинг орбитал ва спин магнит моментлари ўзаро кучли таъсир қилиши мумкин. У вақтда $\boldsymbol{l}_1$ билан $\boldsymbol{s}_1$ қўшилиб, биринчи электроннинг тўла ҳаракат миқдори моменти вектори $\boldsymbol{j}_1$ ни хосил қилади, мос равишда иккинчи электрон учун $\boldsymbol{l}_2$ билан $\boldsymbol{s}_2$ йиғиндиси $\boldsymbol{j}_2$ ни ҳосил қилади, сўнгра шу $\boldsymbol{j}_1$ билан $\boldsymbol{j}_2$ йиғиндиси атомнинг тўла ҳаракат миқдори моменти вектори $\boldsymbol{J}$ ни ҳосил қилади. *Атом электронларининг бундай ўзаро таъсири $j - j$ боғланиш деб юритилади.*

Шундай қилиб, $j - j$ боғланиш учун қуйидагиларни ёзамиз:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_1 &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{s}_1, \\ \boldsymbol{j}_2 &= \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{s}_2, \\ \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2. \end{aligned} \tag{18.95}$$

Атомнинг вектор моделлари ҳақида бошланғич тушунчага эга бўлиш мақсадида юқорида келтирилган қисқа маълумотлар билангина чекланамиз.

I БОБГА ОИД МАШҚЛАР

1. Учта a_1, a_2, a_3 вектордан ҳосил қилинган $a_1(a_2 a_3) - a_2(a_3 a_1)$ векторнинг a_3 га перпендикулярлиги исботлансин.

2. Агар a_1 ва $a_2 + a_3$ векторлар бир-бирига перпендикуляр бўлса, $a_1 + a_2 + a_3$ ва $a_1 - a_2 - a_3$ векторларнинг модуллари тенг бўлади. Бу исботлансин.

3. $a = i + j - k$ ва $b = i - j + k$ векторларнинг модуллари орасидаги бурчаги ва a_b, b_a проекциялар топилсин.

4. a ва b векторларни ўзаро перпендикуляр деб ҳисоблаб, $c = \alpha a - \beta b$ векторнинг модули топилсин.

5. Ҳар қандай икки a, b вектор учун $[ab]^2 + (ab)^2 = a^2 b^2$ эканлиги исботлансин.

6. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ шартда $[a_1 + a_2, a_1 + a_4]$ топилсин.

7. Учларининг радиус-векторлари R_1, R_2, R_3 бўлган учбурчакнинг юзи қуйидаги формуладан топилади:

$$S = \frac{1}{2}\left|[R_1 R_2] + [R_2 R_3] + [R_3 R_1]\right|.$$

Бу исботлансин.

8. $[a_1 a_2] = [a_3 a_4]$ ва $[a_1 a_3] = [a_2 a_4]$ шартда $a_4 - a_1$, $a_2 - a_3$ векторларнинг коллинеарлиги исботлансин.

9. i, $i + j$, $i + j + k$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси топилсин.

10. D вектор a, b, c векторлар орқали шундай ифодаланган: $D = \alpha[ab] + \beta[bc] + \gamma[ca]$. α, β, γ коэффициентлар топилсин.

11. Учта a_1, a_2, a_3 вектор учун $([a_1 a_2]\,[[a_2 a_3]\,[a_3 a_1]]) = (a_1[a_2 a_3])^2$ эканлиги исбот қилинсин.

12. Векторларни компонентлари орқали ёзишдан фойдаланиб, $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$ эканлиги кўрсатилсин.

13. a_1, a_2, a_3 векторлар перпендикуляр бўлса, $[a_1[a_2 a_3]]$, $a_2 - a_3$ векторларнинг коллинеарлиги кўрсатилсин.

14. Берилган a_1, a_2 векторлар ва номаълум a вектор ушбу шартни қаноатлантиради:

$$a = [a_1 a_2] + [a_1 a].$$

a вектор топилсин.

15. a_1 ни ҳам a_2 га, ҳам a_3 га перпендикуляр деб ҳисоблаб, $[a_1[a_2 a_3]] = 0$ эканлиги кўрсатилсин.

16. Ушбу формуланинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0.$$

17. Агар

$$[AB] + [BC] + [CA] = 0$$

шарт бажарилса, A, B, C векторлар компланар. Шу исботлансин.

18. $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ векторларнинг компланарлиги кўрсатилсин.

19. Ушбу формуланинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$([ab]\,[cd]) = (ac)(bd) - (ad)(bc).$$

20. Ушбу формуланинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$[[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{d}\,[\boldsymbol{ab}]) - \boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]).$$

21. Ушбу формуланинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$[[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{cd}]) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{cd}]).$$

22. Декарт ортлари $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ нинг ўзаро векторлари $\boldsymbol{i}^*$, $\boldsymbol{j}^*$, $\boldsymbol{k}^*$ топилсин.

23. $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ векторларнинг ўзаро векторлари $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_1$, $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_2$, $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_3$ топилсин.

24. Қуйидаги $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар берилган:

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}.$$

Уларнинг ўзаро векторлари $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_1$, $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_2$, $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_3$ топилсин.

25. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар ва улар билан ўзаро векторлар $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ бир хил ориентацияли бўлади. Шу исботлансин.

26. Компланар бўлмаган $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар билан компланар бўлмаган $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ векторлар қуйидагича боғланган бўлсин:

$$\boldsymbol{a}_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{b}_2 + \alpha_{13}\boldsymbol{b}_3,$$
$$\boldsymbol{a}_2 = \alpha_{21}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{b}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{b}_3$$
$$\boldsymbol{a}_3 = \alpha_{31}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{b}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{b}_3.$$

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ ва $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ векторлар учталиклари бир ориентацияли бўлса,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0$$

бўлади, турли ориентацияли бўлса,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} < 0$$

бўлади. Шулар исботлансин.

МАШҚЛАРГА ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

1. Перпендикуляр икки вектор скаляр кўпайтмасининг нолга тенг бўлишидан фойдаланилади.

2. Скаляр кўпайтма формуласидан фойдаланилади.

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = a_1^2 + (a_2 + a_3)^2,$$
$$(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3) = a_1^2 + (a_2 + a_3)^2.$$

3. Вектор модули ва бурчак косинусининг тегишли ифодаларидан фойдаланилади.

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = -\frac{1}{\sqrt{9}},$$
$$a_b = b_a = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. $c = \sqrt{(\alpha a - \beta b,\ \alpha a - \beta b)} = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b}$.

5. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ва вектор кўпайтмаси таъриф-ларини ифодаловчи формулалардан фойдаланилади. Масалада келтирилган формулани a ва b векторларнинг компонентлари орқали ёзиб кўрсатиш мумкин:

$$(a_y b_z - a_z b)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 +$$
$$+ (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2).$$

Алгебраик ҳисобларда кўп учрайдиган бу формула Эйлер—Лагранж айнияти дейилади.

6. $[a_1 + a_2,\ a_1 + a_4] = [a_2 a_1] + [a_1 + a_2,\ a_4] = [a_2 a_1] + [-a_3 - a_4,\ a_4] = [a_2 a_1] + [a_4 a_3]$.

7. Учбурчакнинг биринчи учидан иккинчи учига ва биринчи учидан учинчи учига қаратилган $R_2 - R_1$, $R_3 - R_1$ векторларнинг вектор кўпайтмасидан модуль олиб, иккига бўлиш керак.

8. Берилган шартларга мувофиқ:

$$[a_1 a_2] - [a_1 a_3] = [a_3 a_4] - [a_2 a_4]$$

ёки ҳамма ҳадлар бир томонга ўтказилса:

$$[a_1 a_2] - [a_1 a_3] - [a_3 a_4] + [a_2 a_4] = 0.$$

Бу ердан:

$$[a_1,\ a_2 - a_3] + [a_2 - a_3,\ a_4] = [a_2 - a_3,\ a_4 - a_1] = 0.$$

9. $(i\,[i + j,\ i + j + k]) = (i\,[i + j,\ k]) = (i\,[ik]) + (i\,[jk]) = (i\,[jk]) = 1.$

10. Берилган тенгламанинг чап ва ўнг томонларини a, b, c векторларга скаляр равишда кўпайтиринг.

$$\alpha = \frac{(Dc)}{(a\,[bc])},\quad \beta = \frac{(Da)}{(a\,[bc])},\quad \gamma = \frac{(Db)}{(a\,[bc])}.$$

11. Икки қайтали вектор кўпайтма формуласидан фойдаланиб, $[[a_2 a_3]\ [a_3 a_1]]$ ни a_3 билан a_1 бўйича ажратинг, сўнгра чиққан натижани $[a_1 a_2]$ га скаляр равишда кўпайтиринг:

$$[[a_2 a_3]\ [a_3 a_1]] = a_3 (a_1 [a_2 a_3]) - a_1 (a_3 [a_2 a_3]) = a_3 (a_1 [a_2 a_3]).$$

Демак:

$$([a_1 a_2]\ [[a_2 a_3]\ [a_3 a_1]]) = ([a_1 a_2]\ a_3)(a_1 [a_2 a_3]) = (a_1 [a_2 a_3])^2.$$

12. Компонентлари орқали векторни, скаляр кўпайтмани ва вектор кўпайтмани ифодаловчи формулаларни эсга олинг.

Масалан, x-компонент учун:

$$[a\,[bc]] = a_y [bc]_z - a_z [bc]_y = a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z).$$

Қавсларни очиб бўлгандан сўнг, ифоданинг ўнг томонига $a_x b_x c_x$ ҳам қўшиб, ҳам олинса:

$$[a\,[bc]]_x = b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = b_x (ac) - c_x (ab)$$

чиқади. $[a\,[bc]]$ нинг қолган y-ва z-компонентлари ҳам худди шу тарзда ҳисоблаб топилади. x, y, z-компонентларни ифодаловчи тенгликларни мос равишда i, j, k ортларга кўпайтириб, сўнгра чиққан чап томонлар алоҳида, ўнг томонлар алоҳида қўшиб чиқилса, исбот қилиниши лозим бўлган формула топилади.

13. Берилган шартга мувофиқ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3) = 0$ булади, натижада $(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3)$ чиқади. Икки қайтали вектор купайтма хусусиятларидан ва берилган шарт натижасидан фойдаланиб бундай ёзиш мумкин:

$$[\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]] = \boldsymbol{a}_2 (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3) - \boldsymbol{a}_3 (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2) \{\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3\},$$

демак, $[\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]]$ билан $\{\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3\}$ коллинеар векторлардир.

14. Масалада берилган тенгликнинг икки томонини чапдан $\boldsymbol{a}_1$ га вектор тарзида купайтирайлик:

$$[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]] + [\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}]] = [\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]] + \boldsymbol{a}_1 (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}) - a_1^2\boldsymbol{a}.$$

Масалада берилган тенгликка кура:

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}) = 0 \text{ ва } [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2].$$

Сунгги икки ифодага мувофиқ:

$$\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2] = [\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]] - a_1^2\boldsymbol{a}.$$

Бундан:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{1 + a_1^2} \{[\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]] + [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]\}.$$

15. Икки қайтали вектор купайтманинг иккинчи ва учинчи векторлар буйича ажратилиш формуласидан фойдаланинг.

16. Маълумки:

$$[\boldsymbol{a} [\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b} (\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c} (\boldsymbol{ab}).$$

Худди шунингдек:

$$[\boldsymbol{b} [\boldsymbol{ca}]] = \boldsymbol{c} (\boldsymbol{ba}) - \boldsymbol{a} (\boldsymbol{bc}), \quad [\boldsymbol{c} [\boldsymbol{ab}]] = \boldsymbol{a} (\boldsymbol{cb}) - \boldsymbol{b} (\boldsymbol{ca}).$$

Буларнинг унг томонлари нолга тенг булган йиғинди беради, демак, чап томонларининг йиғиндиси нолга тенг булади.

17. Берилган тенгликнинг икки томони A векторга скаляр купайтирилсин:

$$(A [AB]) + (A [BC]) + (A [CA]) = 0.$$

Аралаш купайтманинг тегишли хоссаларига биноан, юқоридаги биринчи ва учинчи купайтмалар нолга тенг, демак $(A [BC]) = 0$. Бу эса A, B, C векторларнинг компланарлик шартидир.

18. Компланар векторларнинг аралаш купайтмаси нолга тенг булиши керак. Уларнинг аралаш купайтмасини A орқали белгилаймиз ва ҳисоблаб чиқамиз:

$$A = (\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}, [\gamma\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{c}, \beta\boldsymbol{c} - \gamma\boldsymbol{a}]) =$$
$$= (\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}, \gamma\beta [\boldsymbol{bc}] - \gamma^2 [\boldsymbol{ba}] - \alpha\beta [\boldsymbol{cc}] + \alpha\gamma [\boldsymbol{ca}]).$$

Аралаш купайтманинг хоссаларига кура:

$$A = \alpha\gamma\beta (\boldsymbol{a} [\boldsymbol{bc}]) - \alpha\gamma\beta (\boldsymbol{b} [\boldsymbol{ca}]) = 0,$$

чунки $(\boldsymbol{a} [\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b} [\boldsymbol{ca}])$. Демак:

$$(\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}, [\gamma\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{c}, \beta\boldsymbol{c} - \gamma\boldsymbol{a}]) = 0.$$

19. Аралаш купайтма хусусиятига биноан:

$$([\boldsymbol{ab}] [\boldsymbol{cd}]) = (\boldsymbol{c} [\boldsymbol{d} [\boldsymbol{ab}]]),$$

икки қайтали вектор купайтмани „ёйиш“ формуласига кура эса:

$$[\boldsymbol{d} [\boldsymbol{ab}]] = \boldsymbol{a} (\boldsymbol{db}) - \boldsymbol{b} (\boldsymbol{da}).$$

Демак:

$$([ab]\,[cd]) = (ca)\,(db) - (cb)\,(da).$$

20 ва **21.** Икки қайтали вектор кўпайтма хусусиятидан фойдаланилсин.

22. $i^* = i$, $j^* = j$, $k^* = k$.

23. Ўзаро векторлар таърифидан фойдаланилсин:

$$a_1^* = i - j,\ a_2^* = j - k,\quad a_3^* = k.$$

24. Ўзаро векторлар таърифидан фойдаланилсин:

$$a_1^* = \frac{1}{2}(i + j - k),$$
$$a_2^* = \frac{1}{2}(j + k - i),$$
$$a_3^* = \frac{1}{2}(k + i - j).$$

25. Маълумки:

$$(a^*\,[b^*c^*])\,(a\,[bc]) = 1.$$

Бу ердаги иккита аралаш кўпайтма бир хил ишорали. Демак, учта a^*, b^*, c^* вектор билан учта a, b, c вектор бир хил ориентацияли бўлади.

26. Маълумки:

$$(a_1\,[a_2a_3])\,(b_1^*\,[b_2^*\,b_3^*]) = \begin{vmatrix} (a_1b_1^*) & (a_1b_2^*) & (a_1b_3^*) \\ (a_2b_1^*) & (a_2b_2^*) & (a_2b_3^*) \\ (a_3b_1^*) & (a_3b_2^*) & (a_3b_3^*) \end{vmatrix}$$

Ўзаро векторларнинг хусусиятига кўра, $\left(b_1^*\,[b_2^*\,b_3^*]\right) = \frac{1}{(b_1\,[b_2b_3])}$, юқоридаги детерминант элементлари эса масалада берилган коэффициентларга тенг: $\alpha_{11} = (a_1b_1^*)$, $\alpha_{12} = (a_1b_2^*)$, . . . , $\alpha_{33} = (a_3b_3^*)$. Шундай қилиб:

$$\frac{(a_1\,[a_2a_3])}{(b_1\,[b_2b_3])} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Чап томонда турган сурат ва махраждаги векторлар учталиги бир хил ориентацияли, яъни аралаш кўпайтмаларнинг ишораси бир хил бўлса, ўнг томондаги детерминант мусбат, акс ҳолда детерминант манфий бўлади.

II БОБ

ВЕКТОРЛАР АНАЛИЗИ

Энди биз ўзгарувчи вектор миқдорларни текширишга киришамиз. Ўзаро боғланган икки миқдордан бирининг ўзгариши билан иккинчиси унга мос равишда ўзгариши мумкин. Биринчи ўзгарувчи миқдор *аргумент* ва унга мос ўзгарувчи миқдор *функция* дейилади; аргумент скаляр миқдор ёки вектор миқдор бўлиши мумкин; шунингдек, функция ҳам скаляр миқдор ёки вектор миқдор бўлиши мумкин. Скаляр аргументнинг скаляр функциялари математик анализда батафсил текширилади. Скаляр аргументнинг вектор функцияларини, вектор аргументнинг скаляр функциялари ва вектор функцияларини текшириш масалалари билан векторлар анализи шуғулланади.

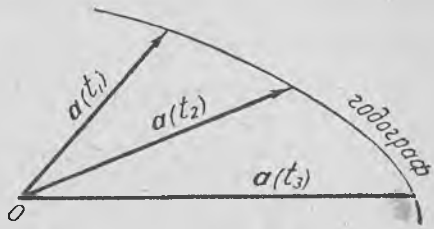
19. ЎЗГАРУВЧИ СКАЛЯР ВА ВЕКТОРЛАР

Маълум чегарада ўзгарадиган t скаляр аргумент берилган бўлсин. Масалан, бундай скаляр аргумент сифатида вақт олиниши мумкин. *Агар t скаляр аргументнинг ҳар бир қийматига аниқ бир $\boldsymbol{a}$ вектор миқдор мос келса, бу $\boldsymbol{a}$ вектор миқдор t скаляр аргументнинг вектор функцияси дейилади ва $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ шаклда ёзилади.* Шундай қилиб, скаляр аргумент ўзгариши билан вектор миқдорнинг ё модули ёки йўналиши ёхуд модули билан йўналиши биргаликда ўзгариши мумкин.

Модули чексиз кичик бўлган ўзгарувчи вектор чексиз кичик вектор дейилади. Агар t аргумент ихтиёрий равишда t_0 қийматга интилганда $\boldsymbol{a}$ ўзгарувчи вектор билан $\boldsymbol{b}$ ўзгармас векторнинг $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ айирмаси чексиз кичик вектор бўлса, $\boldsymbol{b}$ ўзгармас вектор $\boldsymbol{a}$ ўзгарувчи векторнинг $t \to t_0$ даги лимити дейилади ва $\boldsymbol{a}(t) \to \boldsymbol{b}$ ёки $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{b}$ кўринишда ёзилади.

t аргументнинг функцияси бўлган $\boldsymbol{a}(t)$ вектор шу аргументнинг аниқ қиймати $t = t_0$ да $\boldsymbol{a}(t_0)$ бўлсин. *Агар $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t)$ мавжуд ва $\boldsymbol{a}(t_0)$ га тенг бўлса, $\boldsymbol{a}(t)$ вектор $t = t_0$ да узлуксиз вектор функция дейилади.* Бошқачароқ ҳам ифодалаш мумкин. *t аргументнинг чексиз кичик орттирмаси Δt га $\boldsymbol{a}(t)$ векторнинг чексиз кичик орттирмаси $\Delta\boldsymbol{a}(t)$ мос келса, яъни $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{a}(t)=0$ бўлса, $\boldsymbol{a}(t)$ вектор t_0 қийматда узлуксиз функцияси дейилади.*

Текширилиши лозим бўлган вектор функцияларни ҳар доим узлуксиз вектор функциялар деб ҳисоблаймиз. Математик анализдаги чексиз кичик миқдорлар, лимитлар ҳақидаги маълумотлар векторлар анализида ҳам муносиб равишда кенг ва самарали ишлатилади.



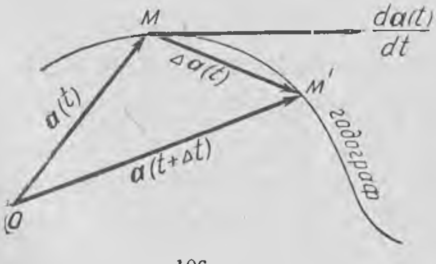
105- расм.

Вектор функция хусусиятларини ўрганишда годограф тушунчаси анча қулай. *Аргумент ўзгариши билан ўзгарувчи векторнинг боши ўзгармас бирор O нуқтада (қутбда) турган бўлса, унинг охири фазода қандайдир геометрик ўрин ҳосил қилади, одатда, бу — аниқ шаклдаги чизиқ; ана шу чизиқ ўзгарувчи векторнинг годографи дейилади* (105- расм).

Агар векторнинг йўналиши ўзгармасдан, фақат модулигина ўзгарса, унинг годографи қутбдан ўтиб, шу йўналишдаги тўғри чизиқда ётади. Агар векторнинг модули ўзгармасдан, фақат йўналишигина ўзгарса, бундай векторнинг годографи маркази қутбда жойлашган ва радиуси берилган ўзгармас модулга тенг шар сиртида ётади. Масалан, текширилаётган ўзгарувчи вектор ҳаракатдаги зарранинг радиус-вектори бўлса, радиус-векторнинг годографи шу зарранинг траекторияси бўлади.

20. СКАЛЯР АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

Ўзгарувчи вектор $\boldsymbol{a}$ скаляр аргумент t нинг функцияси бўлсин: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$. Аргумент t дан $t+\Delta t$ га ўзгарганда, вектор ҳам $\boldsymbol{a}(t)$ дан $\boldsymbol{a}(t+\Delta t)$ га ўзгарсин (106- расм). Аргумент орттирмаси Δt га вектор орттирмаси $\Delta\boldsymbol{a}(t)$ мос келсин: $\Delta\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)$.



106- расм.

Аргумент орттирмаси Δt нинг нолга интилиши билан бирга $\frac{\Delta\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$ нисбат ҳам аниқ бир лимитга интилса, бу лимит $\boldsymbol{a}(t)$ век-

торнинг t аргумент бўйича олинган ҳосиласи дейилади. Бу ҳосилани $\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$ кўринишда ёзсак, таърифга биноан:

$$\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t) - \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} \qquad (20.1)$$

бўлади. *Векторнинг $d\boldsymbol{a}(t)$ дифференциали унинг $\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$ ҳосиласи билан аргумент дифференциали dt нинг кўпайтмасидир: $d\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}dt$.*

$\frac{\Delta \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$ векторнинг йўналиши $\Delta \boldsymbol{a}(t)$ векторнинг йўналиши билан бирдир, яъни годограф ватари $\overrightarrow{MM'}$ нинг йўналиши билан бирдир. Аргументнинг Δt орттирмаси нолга интилганда, M' нуқта M нуқтага интилади, демак, ватар йўналиши годографнинг M нуқтадаги уринмаси йўналиши билан бирлашишга интилади. Шунинг учун, *$\boldsymbol{a}(t)$ вектор ҳосиласи бўлган $\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$ нинг йўналиши шу вектор годографига тегишли нуқтада ўтказилган уринма бўйича t аргумент ўрта бораётган мос томонга қаратилган* (106- расм). Масалан, ҳаракатдаги заррача радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ нинг вақт бўйича олинган ҳосиласи шу заррачанинг тезлик вектори $\boldsymbol{v}$ бўлади: $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Айтилганлардан равшанки, тезлик вектори траекторияга уринмадир.

$\boldsymbol{r}$ радиус-вектор годографининг ёй узунлиги l ни скаляр аргумент сифатида қабул қилишимиз мумкин. У вақтда $\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ векторнинг йўналиши годографга уринма бўлиб, ёйнинг ўса бораётган томонига қаратилган. Таърифга мувофиқ:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta l}.$$

Δl нолга интилиши билан $\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta l}\right|$ нинг лимити бирга тенг бўлади. Демак, радиус-векторнинг ёй узунлиги бўйича ҳосиласи $\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ ўша радиус-вектор годографига олинган уринма бўйлаб, ёйнинг ўса бораётган томонига қаратилган бирлик вектордир. Бу бирлик векторни $\boldsymbol{\tau}$ орқали белгилайлик:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}. \qquad (20.2)$$

Вектор ҳосиласининг (20.1) даги таърифига кўра, математик анализдан маълум бўлган дифференциаллаш қоидаларини эслсак, қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \pm \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}, \tag{20.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi \boldsymbol{a}) + \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a} + \varphi\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \tag{20.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right), \tag{20.5}$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = \left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right]. \tag{20.6}$$

Юқоридаги формулаларда $\boldsymbol{a}$ вектор, $\boldsymbol{b}$ вектор ва φ скаляр албатта, скаляр t аргументнинг функциялари деб ҳисобланади. Мисол учун, сўнгги формуланинг исботини кўздан кечирайлик. Текширилаётган векторларнинг дифференциалланувчи функциялар эканлигидан ва лимитлар назариясидан фойдаланиб, вектор ҳосиласининг таърифига биноан тубандагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{[\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\left[\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right] + \left[\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{b}\right]\right) =$$

$$= \left[\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t},\ \boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a},\ \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right] + \left[\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t \to 0}\Delta\boldsymbol{b}\right] =$$

$$= \left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right].$$

Вектор кўпайтманинг антикоммутативлигини назарда тутиб, бу кўпайтмани дифференциаллашда векторларнинг жойланиш тартибига эътибор қилиш керак.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг скаляр аргумент t бўйича ҳосиласи $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ вектор миқдордир. Бу янги вектор $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ дан ҳам ҳосила олсак, авалги $\boldsymbol{a}$ векторнинг иккинчи тартибли ҳосиласи $\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$ чиқади. Шундай йўл билан векторнинг янада юқори тартибли ҳосилаларини топиш мумкин. Масалан, ҳаракатдаги заррача радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ нинг t вақт бўйича биринчи $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ҳосиласи заррача тезлигининг вектори $\boldsymbol{v}$ бўлади: $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Заррача тезлиги вектори $\boldsymbol{v}$ нинг t вақт бўйича биринчи $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ ҳосиласи заррача тезланишининг вектори $\boldsymbol{w}$ бўлади: $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Демак, заррача тезланишининг вектори радиус-векторнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласига тенгдир:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

Векторни унинг Декарт компонентлари бўйича ажратайлик:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Юқорида келтирилган (20.2) ва (20.3) дифференциаллаш формулаларига мувофиқ:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k} + a_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + a_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + a_z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$

бўлади.

Координаталар системаси ўзгармаганлигидан $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ортлар ҳам ўзгармасдир, шунинг учун:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0$$

бўлади.

Демак:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{20.7}$$

Бу ифодадан яна ҳосила олиш мумкин:

$$\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = \frac{d^2a_x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2a_y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2a_z}{dt^2}\boldsymbol{k}. \tag{20.8}$$

Масалан, $\boldsymbol{a}$ вектор ўрнига ҳаракатдаги заррачанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ ни олайлик:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

У вақтда ёй узунлиги скаляр аргумент сифатида қабул қилинса, (20.2) га биноан:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau} = \frac{dx}{dl}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dl}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dl}\boldsymbol{k} \tag{20.9}$$

бўлади. Бундан:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \tau_x = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{i}), \\ \frac{dy}{dl} &= \tau_y = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{j}), \\ \frac{dz}{dl} &= \tau_z = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{k}), \end{aligned} \tag{20.10}$$

бундан эса:

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2=1 \tag{20.11}$$

бўлади.

Вақтни скаляр аргумент деб ҳисобласак, заррачанинг тезлик ва тезланиш векторлари учун қуйидагиларни ёзамиз:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{w}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}.$$

Бу ерда $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ — тезлик вектори $\boldsymbol{v}$ нинг Декарт компонентлари, $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ — тезланиш вектори $\boldsymbol{w}$ нинг Декарт компонентлари:

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt},$$

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad w_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad w_z=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Математик анализда кўриб чиқиладиган лимит, узлуксизлик, ҳосила каби тушунчалар ва теоремалардан векторлар анализида ҳам фойдаланиш мумкинлигини кўриб турибмиз. Лекин математик анализнинг ҳар қандай тушунча ва теоремасидан векторлар анализида шу тариқада бемалол фойдаланиб бўлмайди. Масалан, *Ролль теоремасини* вектор функцияларга умуман айтганда татбиқ қилиб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, Ролль теоремасини эслайлик: агар дифференциалланувчи $\varphi(t)$ скаляр функция $t=t_1$ да ва $t=t_2$ да бир хил қийматга эга бўлса, яъни $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ бўлса, шундай $t=t_3$ топиладики $(t_1 \leqslant t_3 \leqslant t_2)$, унинг мос ҳосиласи нолга тенг бўлади: $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t_3}=0$. Энди, вектор функция сифатида радиус-векторнинг эллиптик тебранишини олайлик:

$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}_1\sin\omega t+\boldsymbol{a}_2\cos\omega t\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$. Агар $t=t_1=0$ ва $t=t_2=T$ бўлса, $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}(T)=\boldsymbol{a}_2$ бўлади. Лекин t қандай қиймат қабул қилмасин, $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\omega\boldsymbol{a}_1\cos\omega t-\omega\boldsymbol{a}_2\sin\omega t$ ҳосила нолга тенг бўла олмайди, яъни эллиптик тебранишдаги тезликнинг нолга тенг бўлиши мумкин эмас.

Вектор функцияга нисбатан Тейлор формуласи тушунчасини кўриб чиқайлик. Вектор функцияни Декарт компонентлари бўйича ажратайлик:

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}. \tag{20.12}$$

Аргументнинг ихтиёрий аниқ қийматини t_0 орқали белгилайлик. Скаляр функция учун Тейлор формуласига мувофиқ:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{[\varphi^{(n+1)}(t_0) + p(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1} \qquad (20.13)$$

ва $p(t)$ учун эса:

$$\lim_{t \to t_0} p(t) = 0 \qquad (20.14)$$

бўлади.

Вектор компонентларининг ҳар бири учун (20.13) формулани ишлатайлик:

$$a_x(t) = a_x(t_0) + \frac{a_x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{a_x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{a_x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{[a_x^{(n+1)}(t_0) + p(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1},$$

$$a_y(t) = a_y(t_0) + \frac{a_y'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{a_y''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{a_y^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{[a_y^{(n+1)}(t_0) + q(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1},$$

$$a_z(t) = a_z(t_0) + \frac{a_z'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{a_z''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{a_z^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{[a_z^{(n+1)}(t_0) + r(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}.$$

Шу ифодаларни (20.12) га қўйсак, тубандаги келиб чиқади:

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}(t_0) + \frac{\boldsymbol{a}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\boldsymbol{a}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{\boldsymbol{a}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{[\boldsymbol{a}^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}, \qquad (20.15)$$

бу ерда:

$$\varepsilon(t) = p(t)\,\boldsymbol{i} + q(t)\,\boldsymbol{j} + r(t)\,\boldsymbol{k}. \qquad (20.16)$$

(20.14) га биноан:

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0 \qquad (20.17)$$

бўлади. Юқоридаги (20.15) формула скаляр аргументли вектор функция учун Тейлор формуласидир.

Агар $\boldsymbol{a}$ вектор мураккаб функция экан, яъни $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ ва $t = t(s)$ экан, векторнинг s аргумент бўйича ҳосиласи

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

бўлишини англаш қийин эмас.

Текширилаётган вектор бир неча скаляр аргументлар функцияси бўлиши мумкин, масалан:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(u,\ v,\ \ldots,\ w).$$

Бундай ҳолда векторнинг хусусий ҳосилалари ва тўла дифференциали тушунчалари киритилади. Векторнинг хусусий ҳосилалари ва тўла дифференциали қуйидагича булади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(u+\Delta u, v, \ldots, w) - \boldsymbol{a}(u, v, \ldots, w)}{\Delta u}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v} &= \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(u, v+\Delta v, \ldots, w) - \boldsymbol{a}(u, v, \ldots, w)}{\Delta v}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial w} &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(u, v, \ldots, w+\Delta w) - \boldsymbol{a}(u, v, \ldots, w)}{\Delta w}, \end{aligned}\right\} \tag{20.18}$$

$$d\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}dv + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial w}dw. \tag{20.19}$$

21. ВЕКТОР МОДУЛИ ВА ЙЎНАЛИШИНИНГ ЎЗГАРИШЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАИИШ

Векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси вектор модулининг квадратига тенг:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) = a^2. \tag{21.1}$$

Бу ифоданинг ўнг томонидан ҳосила оламиз:

$$\frac{d}{dt}a^2 = 2a\frac{da}{dt}. \tag{21.2}$$

Скаляр кўпайтмани дифференциаллаш қоидасига мувофиқ:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{a}\right) + \left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) = 2\left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) \tag{21.3}$$

бўлади. Демак:

$$\left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) = a\frac{da}{dt}$$

ёки

$$(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{a}) = a\,da \tag{21.4}$$

Скаляр купайтманинг таърифига мувофиқ:

$$(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}||d\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{a}})$$

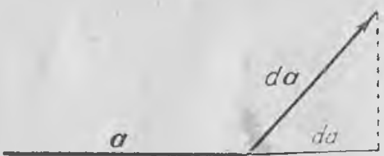
бўлади. Буни (21.4) га қўйсак, $|\boldsymbol{a}| = a$ бўлганлигидан:

$$da = |d\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{a}}) \tag{21.5}$$

келиб чиқади. Сўнгги формуладан:

$$da \neq |d\boldsymbol{a}| \tag{21.6}$$

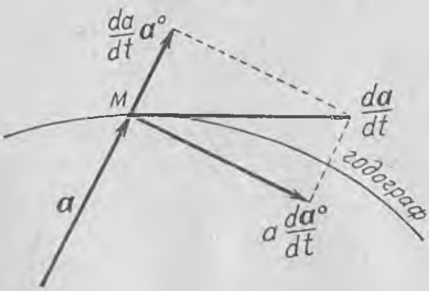
бўлади, яъни вектор модулининг da дифференциали ва вектор дифференциалининг $|d\boldsymbol{a}|$ модули, умуман айтганда, бир-бирига тенг эмас.



107- расм.

(21.5) дан, равшанки, *вектор модулининг дифференциали* da *вектор дифференциали* $d\boldsymbol{a}$ *нинг шу вектор йўналишидаги проекциясига тенгдир* (107- расм.)

Модули ўзгармай, йўналишигина ўзгарадиган вектор учун $da = 0$ бўлиб, (21.4) га биноан $(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{a}) = 0$ дир. Шундай қилиб, *модули ўзгармас вектор ўзининг дифференциалига перпендикулярдир. Демак, бирлик вектор ўзининг дифференциалига перпендикуляр бўлади.*



108- расм.

Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор учун бундай ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0 \tag{21.7}$$

Бундан ҳосила олайлик:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0 + a\,\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}. \tag{21.8}$$

Ўнг томондаги биринчи $\frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0$ қўшилувчи $\boldsymbol{a}$ векторга коллинеардир. Иккинчи $a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$ қўшилувчи эса $\boldsymbol{a}$ га перпендикуляр, чунки бирлик вектор ўзининг ҳосиласига перпендикуляр бўлади. Шундай қилиб, (21.8) га мувофиқ, *ҳар қандай векторнинг ҳосиласи шу векторнинг ўзига коллинеар ва перпендикуляр бўлган икки векторга ажралади* (108- расм).

Йўналиши ўзгармаган вектор учун:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0. \tag{21.9}$$

Модулигина ўзгармаган вектор учун эса:

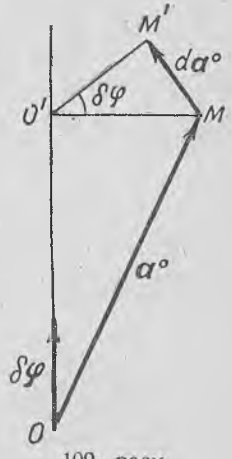
$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt} \tag{21.10}$$

бўлади. Мисол тариқасида заррачанинг ҳаракат тезлиги векторини олайлик: $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Радиус-вектор учун $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}^0$, демак:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0 + r\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}.$$

Шундай қилиб, заррача тезлигининг вектори радиус-векторга коллинеар ва перпендикуляр бўлган икки векторга ажралади: одатда, биринчиси $\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0$ *радиал тезлик вектори ва иккинчиси* $r\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}$ *трансверсал тезлик вектори* деб юритилади.

Чексиз кичик вақт ўзгариши билан модули ўзгармайдиган, лекин йўналиши ўзгарадиган вектор чексиз кичик бурчакка бурилиб, янги йўналишга эга бўлади. Чексиз кичик бурилиш бурчагининг вектор шаклида ифодаланиши бизга маълум: чексиз кичик бурилиш бурчаги вектори $\delta\boldsymbol{\varphi}$ нинг модули чексиз кичик бурилиш бурчаги $\delta\varphi$ га тенгдир, йўналиши эса бурилиш текислигига перпендикуляр бўлиб, қўл қоидасига мос равишда олинган томонга қаратилган.



109- расм.

Яққол бўлиши учун (109- расм) бирлик $\boldsymbol{a}^0$ векторни қоғоз бетида ётган деб ҳисоблайлик.

Агар $d\boldsymbol{a}^0$ қоғоз бетига перпендикуляр қилиб олинса, чексиз кичик бурилиш вектори $\delta\boldsymbol{\varphi}$ бурилиш текислиги $MO'M'$ га перпендикуляр бўлган бурилиш ўқи OO' буйича жойлаштирилади.

109- расмдан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$|d\boldsymbol{a}^0| = O'M \cdot \delta\varphi,$$

$$O'M = |\boldsymbol{a}^0| \sin(\widehat{\delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{a}^0}),$$

демак:

$$|d\boldsymbol{a}^0| = |\boldsymbol{a}^0| \delta\varphi \sin(\widehat{\delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{a}^0}).$$

юқорида айтилганлардан:

$$d\boldsymbol{a}^0 = [\delta\boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{a}^0], \tag{21.11}$$

ёки

$$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt} = \left[\frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{dt}\boldsymbol{a}^0\right] \tag{21.12}$$

бўлади. Бу ердаги $\frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{dt}$ вектор *бурчак тезлиги вектори* дейилади ва, одатда, $\boldsymbol{\omega}$ орқали белгиланади:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \tag{21.13}$$

Шундай қилиб:

$$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{a}^0]. \tag{21.14}$$

Чексиз кичик бурилиш бурчаги псевдовектор бўлганлигидан, бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ ҳам псевдовектор бўлади.

Демак, *бирлик векторнинг ҳосиласи, умуман олганда, бирлик вектор бўлмайди.*

(21.14) ни (21.8) га қўйсак.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0 + a\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{a}^0]$$

келиб чиқади ёки $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0$ ни назарга олсак:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{a}] \tag{21.15}$$

бўлади. Бу формулага биноан, радиус-вектор $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}^0$ учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}].$$

Масалан, ўзининг бирор нуқтаси орқали ўтган ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмни олайлик. У вақтда, қаттиқ жисм ихтиёрий нуқтасининг айланиш ўқи ўтган нуқтага нисбатан радиус-векторининг узунлиги ўзгармасдан сақланганлиги сабабли:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}] \tag{21.16}$$

бўлади. Бу ифода кинематикада *Эйлер формуласи* дейилади.

Бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ вақт функциясидир. $\boldsymbol{\omega}$ векторнинг айни бир пайтдаги йўналиши қаттиқ жисмнинг шу пайтдаги айланиш ўқи бўйича олиниб, қўл қоидасига мувофиқ аниқланади. $\boldsymbol{\omega}$ векторнинг айни пайтдаги модули қаттиқ жисмнинг шу пайтда вақт бирлигидаги бурилиш бурчаги билан ўлчанади, янада аниқроқ айтганда, элементар вақт оралигидаги элементар бурилиш бурчагининг шу элементар вақтга бўлган нисбат лимити билан ўлчанади. Шу айтилганлардан равшанки:

$$\omega = \frac{\delta\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{21.17}$$

бўлади.

22. СКАЛЯР АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Вектор функция учун ноаниқ ва аниқ интеграллар тушунчаларини киритиш мумкин.

$\boldsymbol{a}(t)$ векторнинг скаляр аргумент бўйича олинган ҳосиласи $\boldsymbol{b}(t)$ бўлсин:

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}. \tag{22.1}$$

Ҳосилалари $\boldsymbol{b}(t)$ векторга тенг бўлган барча $\boldsymbol{a}(t)$ векторлар тўплами $\boldsymbol{b}(t)$ векторнинг ноаниқ интеграли дейилади, яъни:

$$\boldsymbol{a}(t) = \int \boldsymbol{b}(t)\,dt + \boldsymbol{c}, \tag{22.2}$$

бу ерда $\boldsymbol{c}$ — *ихтиёрий ўзгармас вектор. Аргументнинг* t_1 *дан* t_2 *гача ўзгариш интервалида олинган* $\boldsymbol{b}(t)$ *векторнинг аниқ интегралини ноаниқ интеграл орттирмаси сифатида таърифлаш мумкин:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{b}(t)\,dt = \boldsymbol{a}(t_2) - \boldsymbol{a}(t_1). \tag{22.3}$$

Таърифларнинг ўзидан аёнки, векторлар йиғиндисининг интеграли векторлар интегралларининг йиғиндисига тенг, масалан:

$$\int (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,dt = \int \boldsymbol{a}dt + \int \boldsymbol{b}dt. \tag{22.4}$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини ҳам исбот қилиш қийин эмас. Масалан, икки вектор скаляр кўпайтмасининг ҳосиласини олайлик:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right).$$

Бунинг чап ва ўнг томонларини интеграллаш натижасида:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \int (d\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + \int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{b})$$

бўлади, демак:

$$\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) - \int (d\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}). \tag{22.5}$$

Шунингдек, вектор кўпайтма учун қуйидагини ёзамиз:

$$\int [adb] = [ab] - \int [dab]. \tag{22.6}$$

Аниқ интеграл учун эса бундай бўлади:

$$\int_{t_1}^{t_2} (adb) = (ab)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (dab), \tag{22.7}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [adb] = [ab]\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [dab]. \tag{22.8}$$

Мисол келтирайлик. Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ, $F = m\frac{dv}{dt}$, бу ерда m — заррача массаси, $\frac{dv}{dt}$ — унинг тезланиши ва F — шу заррачага таъсир қилувчи куч.

Одатда масса узгармас бўлганлигидан, уни ҳосила белгиси ичига киритиб ёзиш мумкин, демак, $F = \frac{d}{dt}(mv)$ ёки $F\,dt = d(mv)$. Кучнинг вақт элементига кўпайтмаси *$F\,dt$ кучнинг элементар импульси* дейилади. Вақтнинг t_1 дан t_2 гача узгариши оралигида ундан олинган аниқ интеграл:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = mv(t_2) - mv(t_1)$$

бўлади. Демак, чекли вақт оралигидаги куч импульси ҳаракат миқдорининг шу вақт оралигидаги ўзгаришига тенг.

23. ФИЗИК МИҚДОРЛАР МАЙДОНИ

Юқорида скаляр аргументнинг вектор функцияси билан шуғулланган эдик. Энди вектор аргументнинг скаляр функцияси билан вектор функциясини текшириш масаласига ўтамиз.

Физик ҳодисаларни характерловчи миқдорлар фазода ёки унинг аниқ соҳаларида қандайдир тақсимланган бўлиши мумкин.

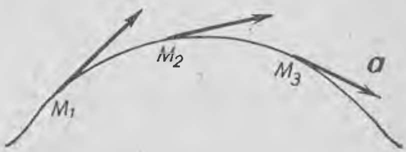
Агар бирор физик миқдор, фазо ёки ундаги аниқ соҳанинг ҳар бир нуқтасида тайин қийматга эга бўлса, бу миқдорнинг *майдони* тўғрисида гапириш мумкин. *Миқдорнинг скаляр ёки вектор бўлишига қараб, майдон ё скаляр майдон ёки вектор майдон дейилади, миқдорнинг ўзи эса, майдон функцияси деб аталади.*

Масалан, жисмнинг электр потенциали ёки температураси ҳар бир нуқтада аниқ қийматга эга; турли жойида температураси ва босими турлича бўлган жисмнинг зичлиги, умуман айтганда, нуқтадан нуқтага ўтган сари ўзгара боради ва ҳоказо. Бу мисоллардаги электр потенциал майдони, температура майдони, зичлик майдони ва бошқалар скаляр майдонлардир.

Ҳаракатдаги суюқлик ёки газнинг турли нуқталарида тезлик турлича, электр майдони ёки магнит майдони кучланганлиги турли нуқталарда турлича ва ҳоказо. Бу мисоллардаги тезликлар майдони, кучланганлик майдони ва бошқалар вектор майдонлардир.

Физика, математика, метеорология, электротехника ва бошқа фанларда скаляр ва вектор майдонларни график тасвирлаш усули қўлланилади.

Масалан, бирор $\boldsymbol{a}$ *векторнинг майдони берилган бўлсин. Бу майдонда шундай эгри чизиқ олайликки, унинг ҳар бир нуқтасида* $\boldsymbol{a}$ *вектор унга уринма бўлсин. Бундай чизиқ вектор чизиқ дейилади* (110-расм).



110- расм.

Берилган вектор чизиқ бўйича ҳаракатланувчи бирор заррачани тасаввур қилсак, заррача радиус-векторининг годографи худди шу вектор чизиқнинг ўзгинаси бўлади. У вақтда радиус-вектордан ёй узунлиги бўйича олинган $\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ ҳосила вектор чизиққа уринма бўлади. Шундай қилиб, вектор чизиқнинг бирор ихтиёрий нуқтасидаги $\boldsymbol{a}$ вектор ва $\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ ҳосила шу вектор чизиқнинг уринмаси бўйича йўналтирилган, яъни $\boldsymbol{a}$ вектор ва $\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ ҳосила коллинеар векторлардир: $\boldsymbol{a} \parallel d\boldsymbol{r}$, яъни:

$$[\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}] = 0. \tag{23.1}$$

Вектор чизиқларнинг бу дифференциал тенгламасини Декарт системасида ёзиб кўрсатиш мумкин, (23.1) га биноан:

$$a_y dz - a_z dy = 0, \quad a_z dx - a_x dz = 0, \quad a_x dy - a_y dx = 0,$$

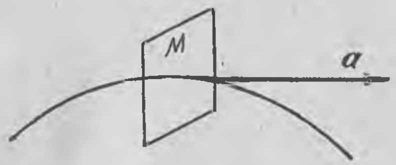
$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{23.2}$$

$\boldsymbol{a}$ вектор нуқтанинг бир қийматли ва узлуксиз функцияси бўлса, майдоннинг ҳар бир нуқтасидан биттагина вектор чизиқ ўтади.

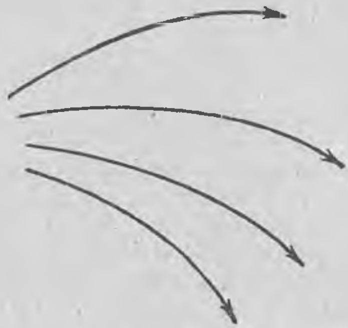
Майдон векторининг бирор нуқтадаги йўналиши шу нуқтадан ўтган вектор чизиқнинг уринмаси бўйича аниқ томонга қаратилган бўлади.

Майдон векторининг бирор нуқтадаги сон қийматини тасвирлаш учун, одатда, тубандаги график усул қўлланилади.

a вектор майдонининг ихтиёрий бирор M нуқтасида шу векторга перпендикуляр равишда жойлашган бирлик юзни тасаввур этайлик (111-расм). Векторнинг M нуқтадаги сон қиймати (модули) шу нуқтада вектор чизиққа перпендикуляр қўйилган бирлик юздан ўтувчи вектор чизиқлар сони деб қабул қилиниши мумкин. У вақтда вектор чизиқларнинг турли жойларда зичроқ ёки сийракроқ бўлишига қараб, векторнинг сон қийматлари қандай тақсимланиши ҳақида тасаввур ҳосил қилишимиз мумкин (112-расм).

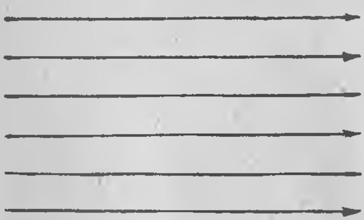


111-расм.



112-расм.

Модули ҳам, йўналиши ҳам ўзгармас векторнинг майдонини тасвирловчи вектор чизиқлар майдоннинг ҳамма жойида бир хил зичлик билан тақсимланади ва ўзаро параллел бўлади. Бундай вектор майдон бир жинсли вектор майдон дейилади (113-расм).



113-расм.

Умумий физикадан маълум бўлган электр куч чизиқлари ва магнит куч чизиқлари тушунчаларини эслатиб ўтиш мумкин: *электр майдони кучланганлигининг вектор чизиқлари электр куч чизиқлари, магнит майдони кучланганлигининг вектор чизиқлари эса магнит куч чизиқлари дейилади.*

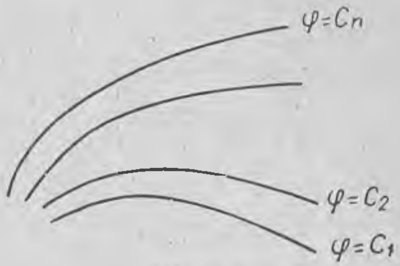
Энди, нуқтанинг бир қийматли ва узлуксиз функцияси бўлган бирор φ скалярнинг майдони берилган бўлсин. Скаляр функциянинг қийматлари бир хил бўлган майдон нуқталари бирор сиртни ҳосил қилади:

$$\varphi(x, y, z) = C; \qquad (23.3)$$

бу ерда C — ўзгармас миқдор (константа). *Барча нуқталарида функциянинг ўзгармас қийматига эга бўлган бундай сирт изосирт ёки эквипотенциал сирт дейилади* (114- расм).

Функция бир қийматли ва узлуксиз булса, майдоннинг ҳар бир нуқтасидан биттагина изосирт утади.

114- расм.



115- расм.

C константага турли қийматлар бериб, изосиртлар оиласини тузамиз:

$$\varphi(x, y, z) = C_1,$$
$$\varphi(x, y, z) = C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(x, y, z) = C_n.$$

115- расмда изосиртнинг қоғоз бети билан кесилиш излари тасвирланган.

Изосирт чизиш учун, одатда, бир изосиртдан иккинчи изосиртга ўтишда функциянинг ўзгариши ҳамма жойда бир хил қилиб олинади. Бу ҳолда турли жойларида изосиртларнинг зичроқ ёки сийракроқ бўлишига қараб, скаляр функциянинг қайси йўналишда қандай ўзгаришини тасаввур қилишимиз мумкин.

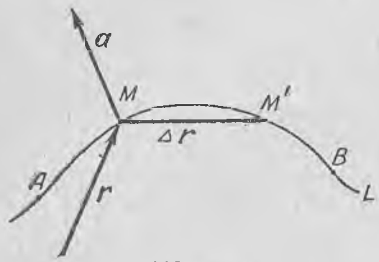
Берилган соҳалардаги аниқ тақсимотли физик миқдорларнинг қандайлигига қараб, майдонлар ҳам хилма-хил бўлади. Биз ҳозирча фақат скаляр майдон ва вектор майдон ҳақида гапирдик.

Бу бобда фақат шу майдонлар билангина шуғулланамиз. Янада мураккаброқ бўлган майдонлар — тензор майдонлар масаласи бу китобнинг кейинги бобларида кўриб чиқилади.

24. МАЙДОНДА ЧИЗИҚ БЎЙИЧА ОЛИНГАН БАЪЗИ ИНТЕГРАЛЛАР

Текширилмоқда бўлган скаляр ёки вектор функцияларни майдоннинг ҳамма нуқталарида узлуксиз деб ҳисоблаймиз. Узлуксизлик шарти бузилган ҳоллар кейинчалик кўриб чиқилади.

Нуқта функцияси бўлган $\boldsymbol{a}$ вектор берилган бўлсин. Унинг майдонидаги икки A, B нуқта орқали ўтган бирор эгри L чизиқни олайлик (116- расм). Бу эгри чизиқни кичик элементларга бўлиб чиқайлик. Элементлардан бири MM' бўлсин. M, M' нуқталар орасидаги ёй узунлигини Δl орқали, M нуқтадан M' нуқтага қаратилган элементар силжиш векторини $\Delta \boldsymbol{r}$ орқали белгилайлик.



116- расм.

$\boldsymbol{a}$ вектор, умуман айтганда, бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтиш билан ўзгара боради. Текширилаётган M нуқтадаги $\boldsymbol{a}$ вектор билан элементар силжиш вектори $\Delta \boldsymbol{r}$ нинг скаляр кўпайтмаси $(\boldsymbol{a} \Delta \boldsymbol{r})$ ни тузайлик. Қолган барча элементлар учун ҳам шундай скаляр кўпайтмалар тузиб чиқиб, сўнгра уларнинг умумий йиғиндиси $\sum (\boldsymbol{a} \Delta \boldsymbol{r})$ ни ҳисоблаб топайлик.

Элементларнинг ҳар бири чексиз камая бориши билан бу элементларнинг умумий сони чексиз кўпая боради дейлик. *Шундай шартга бўйсунган йиғинди* $\sum (\boldsymbol{a} \Delta \boldsymbol{r})$ *нинг лимити мавжуд бўлса, у* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг* A, B *нуқталар орасидаги* L *чизиқ бўйича олинган чизиқли интеграли ёки эгри чизиқли интеграли дейилади ва* $\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{r})$ *шаклда ёзилади.*

Чизиқли интегралнинг қиймати $\boldsymbol{a}$ векторга, бошланғич A нуқта билан сўнгги B нуқтага ва чизиқнинг шаклига боғлиқдир. Олинган чизиқ ёпиқ чизиқ (контур) бўлиши ҳам мумкин. *Векторнинг ёпиқ чизиқ (контур) бўйича олинган интеграли векторнинг циркуляцияси ёки контур интеграли дейилади ва* $\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{r})$ *шаклда ёзилади.*

Бир мисол олайлик. Заррачага $\boldsymbol{F}$ куч таъсир қилиши натижасидаги элементар силжиш $d\boldsymbol{r}$ бўлсин. Бажарилган элементар иш $(\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r})$ бўлади. L контур бўйича бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтганда заррачага таъсир қилувчи кучнинг бажарган иши $\int (\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r})$ бўлади. Агар заррача ёпиқ L чизиқ бўйича ҳаракатланса, бажарилган иш $\oint (\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r})$ бўлади. Таъсир кучларининг характерига қараб, айрим ҳолларда ёпиқ чизиқ бўйича бажарилган иш нолга тенг бўлиши мумкин.

Юқоридаги каби мулоҳазалардан фойдаланиб, чизиқ бўйича олинган яна икки интеграл билан иш кўриш мумкин: $\int \varphi d\boldsymbol{r}$ ва $\int [d\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{a}]$, бу ерда φ—нуқтанинг скаляр функцияси ва

a — нуқтанинг вектор функцияси. Бу интегралларни ёпиқ чизиқ бўйича ҳам олиш мумкин: $\oint \varphi d\boldsymbol{r}$ ва $\oint [d\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]$.

Векторларни полигонлаш қоидасидан бизга маълумки, ёпиқ чизиқ ҳосил қилувчи векторлар йиғиндиси нолга тенг. Шунга биноан:

$$\oint d\boldsymbol{r} = 0. \tag{24.1}$$

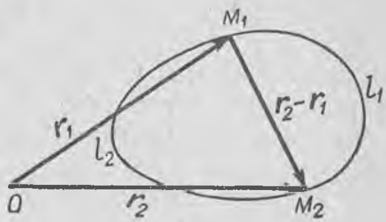
Мисол учун бирор ёпиқ чизиқ ва унинг иккита M_1 ва M_2 нуқтаси берилган бўлсин (117- расм).

(24.1) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\int d\boldsymbol{r} = \int\limits_{M_1 l_1 M_2} d\boldsymbol{r} + \int\limits_{M_2 l_2 M_1} d\boldsymbol{r} = 0,$$

бу ердан:

$$\int\limits_{M_1 l_1 M_2} d\boldsymbol{r} = -\int\limits_{M_2 l_2 M_1} d\boldsymbol{r} = \int\limits_{M_1 l_2 M_2} d\boldsymbol{r},$$



117- расм.

демак:

$$\int\limits_{M_1 l_1 M_2} d\boldsymbol{r} = \int\limits_{M_1 l_2 M_2} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{24.2}$$

Чизиқнинг узунлиги билан қизиқар эканмиз, $\oint |d\boldsymbol{r}|$ интеграл нолга тенг бўлмайди ва интеграл $\int\limits_{M_1 l_1 M_2} |d\boldsymbol{r}|$ билан интеграл $\int\limits_{M_1 l_2 M_2} |d\boldsymbol{r}|$ бир-бирига тенг бўлмайди. 117- расмдаги ёпиқ чизиқнинг биринчи қисм узунлигини l_1 ва иккинчи қисм узунлигини l_2 орқали белгиласак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\int\limits_{M_1 l_1 M_2} |d\boldsymbol{r}| = l_1, \quad \int\limits_{M_1 l_2 M_2} |d\boldsymbol{r}| = l_2, \quad \oint |d\boldsymbol{r}| = l_1 + l_2.$$

25. МАЙДОНДА СИРТ БЎЙИЧА ОЛИНГАН БАЪЗИ ИНТЕГРАЛЛАР

Бир жинсли вектор майдон берилган, яъни майдон векторининг сон қиймати ва йўналиши ўзгармас бўлиб, ҳамма нуқталарда бир хил бўлсин. Вектор чизиқлар йўналишига перпендикуляр бўлмаган, аммо қоғоз бетига перпендикуляр бўлган S юзнинг (118- расм) қоғоз бети билан кесишув чизиғи AB билан кўрсатилди. Юз нормалнинг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ орқали белгиласак:

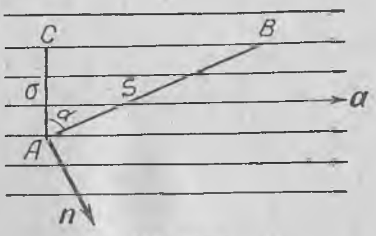
$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n} \tag{25.1}$$

булади. Берилган S юзнинг вектор чизиқлар йўналишига перпендикуляр бўлган текисликка проекциясини σ орқали белгилайлик (расмда AC билан кўрсатилган); бу ҳолда:

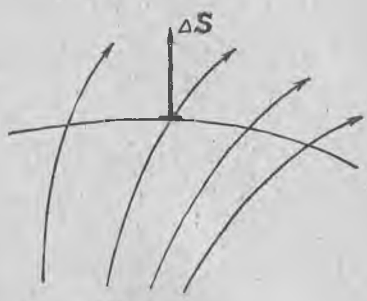
$$\sigma = S \cos \alpha \tag{25.2}$$

бўлади. S юз ва σ юз орасидаги α бурчак $\boldsymbol{a}$ вектор билан нормалнинг бирлик вектори $\boldsymbol{n}$ орасидаги бурчакка тенг: $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}})$ ёки, (25.1) га биноан, $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{S}})$. Демак:

$$\sigma = S \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{S}}). \tag{25.3}$$



118- расм.



119- расм.

Агар вектор чизиқ йўналишига перпендикуляр қўйилган бирлик юздан ўтувчи вектор чизиқлар сони вектор модулини тасвирлаши назарда тутилса, σ юз орқали $a\sigma$ вектор чизиқлар ўтади дейишимиз мумкин. Бу миқдор N орқали белгиланса:

$$N = a\sigma = aS \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{S}}),$$

$$N = (\boldsymbol{aS}) \tag{25.4}$$

ёки, скаляр кўпайтма хоссасига кўра:

$$N = a_n S \tag{25.5}$$

бўлади.

118- расмда S юз орқали ўтаётган суюқлик оқимини тасаввур қилишимиз мумкин. Мана шу қиёсдан фойдаланиб, (25.4) ёки (25.5) да ифодаланган N миқдор *$\boldsymbol{a}$ векторнинг S юз орқали оқими дейилади.*

Энди бизга $\boldsymbol{a}$ вектор майдони берилган бўлсин. Бу майдонда бирор сирт олайлик (119- расм).

Бу сиртни кичик элементларга бўлиб чиқайлик; элементлардан бири ΔS бўлсин (расмда ΔS қоғоз бетига перпендикуляр қилиб олинган). Элементар юз ΔS орқали $\boldsymbol{a}$ векторнинг элементар оқими $\Delta N = (\boldsymbol{a}\, \Delta \boldsymbol{S}) = a_n \Delta S$ бўлади.

Сиртнинг бир элементидан иккинчи элементига ўтилганда $\boldsymbol{a}$ вектор ўзгаради. Шунинг учун сирт элементлари нақадар кичик олинса, векторнинг берилган сирт орқали оқими шу қадар аниқ ҳисоблаб чиқилиши мумкин. *Сирт элементларининг ҳар бири чексиз камая бориши билан бирга элементлар сони чексиз кўпая борганда олинган элементар оқимлар йиғиндиси* $\sum \Delta N = \sum(\boldsymbol{a}\Delta\boldsymbol{S})$ *нинг лимити мавжуд бўлса, у* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг берилган сирт орқали оқими дейилади ва*

$$N = \int (\boldsymbol{a}\, d\,\boldsymbol{S}) \tag{25.6}$$

шаклда ёзилади.

Векторнинг ёпиқ сирт орқали оқими:

$$N = \oint (\boldsymbol{a}\, d\,\boldsymbol{S}) \tag{25.7}$$

шаклда ёзилади.

Юқоридаги муҳокамаларга кўра:

$$d\boldsymbol{S} = dS\boldsymbol{n} \tag{25.8}$$

бўлади, бу ерда $\boldsymbol{n}$ векторнинг йўналиши элементар юзни чегараловчи контур йўналишига мос қилиб олиниши керак. (25.8) га биноан:

$$(\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})\, dS = a_n dS, \tag{25.9}$$

бўлади, демак:

$$N = \int a_n\, dS, \tag{25.10}$$

$$N = \oint a_n\, dS. \tag{25.11}$$

120- расм.

Ёпиқ сиртга нисбатан ташқи нормаль йўналиши нормалнинг мусбат йўналиши деб қабул қилинади (120-расм). У вақтда ёпиқ сиртдан ташқари чиқувчи вектор чизиқларга мос оқим мусбат ишора билан, ичкари кирувчиларга мос оқим эса манфий ишора билан олинади.

Юқоридаги каби мулоҳазалар асосида, сирт бўйича олинган яна икки интеграл ҳосил қилиш мумкин: $\int \varphi d\boldsymbol{S}$ ва $\int\ [d\,\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]$, ёки, бошқача шаклда ёзилса, $\int \boldsymbol{n}\,\varphi dS$ ва $\int [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\, d\,S$ бўлади. Бу интегралларни ёпиқ сирт бўйича ҳам олиш мумкин: $\oint \varphi d\boldsymbol{S}$ ва $\oint [d\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{a}]$ ёки, бошқача шаклда ёзилса, $\oint \boldsymbol{n}\,\varphi\, dS$ ва $\oint [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\ dS$ бўлади.

Ёпиқ сирт ҳосил қилувчи юз векторлари йиғиндисининг нолга тенг эканлиги бизга маълум. Шунга биноан:

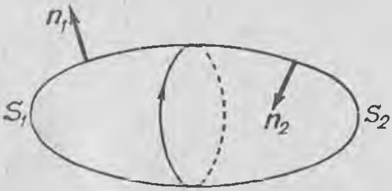
$$\oint d\mathbf{S} = 0, \tag{25.12}$$

яъни *ёпиқ сиртнинг вектор интеграли нолга тенгдир.*

Мисол учун, умумий контур билан чегараланган икки қисмдан иборат ёпиқ сирт олайлик (121-расм). (25.12) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint d\mathbf{S} = \int_{S_1} d\mathbf{S} + \int_{S_2} d\mathbf{S} = 0, \text{ бу ердан } \int_{S_1} d\mathbf{S} = -\int_{S_2} d\mathbf{S}.$$

Бу интегралларда ташқи нормаль назарда тутилганлиги эсдан чиқмаслиги лозим. Агар икки қисмни чегараловчи умумий контур йўналиши маълум бўлса, контур йўналишига муносиб бўлган юз нормалининг йўналишини аниқлаш мумкин. Масалан, 121-расмда умумий контур йўналишига мос олинган S_1 юз нормали ташқи нормаль бўлса, ўша умумий контур йўналишига мос олинган S_2 юз нормали ички нормаль бўлади. Шундай қилиб, умумий контур билан чегараланган ҳар қандай икки сирт учун тубандагини ёзишимиз мумкин:



121-расм.

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} = \int_{S_2} d\mathbf{S}, \tag{25.13}$$

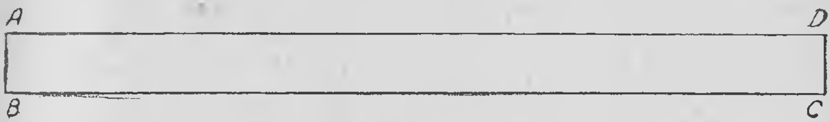
Демак, *бирор контур билан чегараланган сиртнинг вектор интегралини ҳисоблашда сирт шаклининг ҳеч қандай аҳамияти йўқ.*

Ёпиқ сиртнинг вектор интеграли $\oint d\mathbf{S}$ нолга тенг. Лекин ёпиқ сирт юзининг сон қийматини ифодаловчи интеграл $\oint dS$ нолга тенг бўлмайди, $\int_{S_1} dS$ билан $\int_{S_2} dS$ интеграллар ҳам бирбирига тенг бўлмайди: $\int_{S_1} dS = S_1$, $\int_{S_2} dS = S_2$, $\oint dS = S_1 + S_2$.

Сирт бўйича интеграллашда, бир нуқтадан иккинчи нуқтага узлуксиз кўчилса, сирт нормалининг йўналиши ҳам узлуксиз равишда ўзгара боради деб фараз қилинади. *Бу хусусиятга эга сирт силлиқ сирт дейилади.* Масалан, сферик сирт ёки эллипсоидал сирт шундай силлиқ сиртлардандир. Баъзи сиртлар, призма ёки пирамида сиртлари сингари, бир неча айрим силлиқ сиртлардан иборат бўлиши мумкин. *Бундай сирт-*

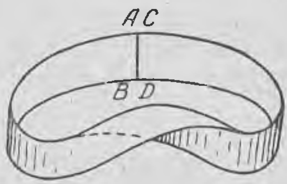
лар бўлакли силлиқ сиртлар дейилади. Шундай қилиб, текширишимизда учрайдиган сиртлар доимо силлиқ сиртлар ёки бўлакли силлиқ сиртлар бўлади.

Юқорида биз ёпиқ сиртнинг ташқи томонига қаратилган нормаль йўналишини нормалнинг мусбат йўналиши деб ҳисобладик; демак, ички томонга қаратилган нормаль йўналиши нормалнинг манфий йўналиши ҳисобланади. Сиртнинг ёпиқ бўлиши ёки бўлмаслигидан қатъи назар, сиртнинг одатда икки томони бор: сиртнинг бир томони мусбат ҳисобланса, иккинчи томони манфий ҳисобланиши керак.



122- расм.

Сиртнинг икки томонини бир-биридан фарқ қилиш учун бирини кўк рангда ва иккинчисини қизил рангда тасаввур қилишимиз мумкин. Лекин ҳар қандай сирт ҳам икки томонли бўлавермайди. Бир томонли сиртлар ҳам бор. Бир томонли сиртга мисол қилиб Мёбиус лентасини кўрсатиш мумкин. Мёбиус лентасини шундай ҳосил қилсак бўлади: тўғри тўртбурчак шаклида энсиз узун қоғоз лента оламиз (122- расм).



123- расм.

A нуқта билан C нуқта ва B нуқта билан D нуқта устма-уст тушадиган қилиб, лентанинг AB билан CD томонларини бир-бирига ёпиштирамиз. Шу равишда ҳосил бўлган сирт Мёбиус лентасидир (123- расм).

Мёбиуснинг иккита лентасидан бир томонли ёпиқ сирт ҳосил қилиш мумкин. *Бундай сирт геометрияда Клейн сирти дейилади. Бу китобда учрайдиган сиртларни икки томонли деб фараз қиламиз.*

26. МАЙДОН ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ФАЗОВИЙ ҲОСИЛАЛАРИ

Майдондаги нуқталарнинг биридан иккинчисига ўтишда майдон функциялари ўзгаради. Берилган нуқта атрофида майдон функцияларини узлуксиз ва дифференциалланувчи функциялар деб ҳисоблаймиз. Атроф нуқталарнинг берилган нуқтага нисбатан вазиятлари шу берилган нуқта радиус-векторининг жуда кичик ўзгариши билан аниқланади.

Берилган нуқта атрофида майдон функцияларининг ўзгаришини миқдорий ифодалаш масаласига ўтайлик.

Мисолни майдоннинг скаляр функциясидан бошлаймиз. *Берилган нуқтани қуршаб олган ёпиқ сирт бўйича скаляр функция интеграли* $\oint \varphi\, d\boldsymbol{S}$ *ни олайлик. Бу интегралнинг ёпиқ сирт билан чегараланган V ҳажмга нисбатини тузамиз:* $\frac{\oint \varphi\, d\boldsymbol{S}}{V}$. *Берилган нуқтани қуршаб олган ёпиқ сиртнинг, шаклидан қатъи назар, бениҳоя камайиши билан бирга, у чегараланган ҳажм нолга интилади. Ана шу шарт бажарилганда юқоридагича тузилган нисбатнинг мавжуд ва аниқ лимити скаляр функция* φ *нинг берилган нуқтадаги градиенти деб аталади ва* grad φ *орқали белгиланади.*

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to o} \frac{\oint \varphi\, d\boldsymbol{S}}{V}. \tag{26.1}$$

Скаляр функциянинг берилган нуқтадаги градиенти шу скаляр функциянинг ўша нуқтадаги фазовий вектор ҳосиласи дейилади.

Юқорида айтилгандек мулоҳазалардан фойдаланиб, майдоннинг вектор функциясидан олинган фазовий ҳосилалар тушунчасини киритиш мумкин. *Фазо нуқтасини қуршовчи ёпиқ сирт бўйича олинган майдон вектор функциясининг икки хил интеграли бизга маълум:*

$$\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) \text{ ва } \oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}].$$

Бу интегралларнинг фазо нуқтасини қуршовчи ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажмга нисбатини тузамиз:

$$\frac{\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S})}{V}, \quad \frac{\oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]}{V}.$$

Берилган нуқтани қуршаб олган ёпиқ сиртнинг бениҳоя камайиши билан бирга, биринчи нисбат қандайдир аниқ скаляр миқдорга, иккинчи нисбат эса қандайдир аниқ вектор миқдорга интилади.

Биринчи нисбатнинг лимитини ифодаловчи скаляр миқдор $\boldsymbol{a}$ *векторнинг берилган нуқтадаги дивергенцияси дейилади ва* div $\boldsymbol{a}$ *кўринишда ёзилади. Иккинчи нисбатнинг лимитини ифодаловчи вектор миқдор* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг берилган нуқтадаги уюрмаси дейилади ва* rot $\boldsymbol{a}$ (ёки curl $\boldsymbol{a}$) *кўринишида ёзилади.* Шундай қилиб, таърифга мувофиқ:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to o} \frac{\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S})}{V}, \tag{26.2}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \lim_{V \to o} \frac{\oint [dS\boldsymbol{a}]}{V} \tag{26.3}$$

бўлади.

Векторнинг дивергенцияси векторнинг фазовий скаляр ҳосиласи деб, унинг уюрмаси эса векторнинг фазовий вектор ҳосиласи деб аталади.

Юқорида келтирилган таърифлардан равшанки, майдон функциялари йиғиндисининг фазовий ҳосиласи майдон функцияларининг фазовий ҳосилалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$\mathrm{grad} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}\, \varphi_i, \tag{26.4}$$

$$\mathrm{div} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}_i, \tag{26.5}$$

$$\mathrm{rot} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}_i. \tag{26.6}$$

Ҳақиқатан, мисол учун (26.4) ни текширайлик. Агар $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$ бўлса, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint \varphi\, dS = \oint \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dS = \sum_{i=1}^{n} \oint \varphi_i dS,$$

демак, (26.1) га биноан:

$$\mathrm{grad}\, \varphi = \lim_{V \to o} \frac{\oint \varphi\, dS}{V} = \lim_{V \to o} \frac{\sum_{i=1}^{n} \oint \varphi_i dS}{V} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lim_{V \to o} \frac{\oint \varphi_i dS}{V} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}\, \varphi_i$$

бўлади, яъни исбот қилиниши лозим бўлган (26.4) формула келиб чиқди. Қолган икки формула ҳам худди шу тарзда исбот қилинади.

Ўзгармас майдон функциялари φ_c ва $\boldsymbol{a}_c$ нинг фазовий ҳосилалари нолга тенг бўлади:

$$\mathrm{grad}\ \varphi_c = 0, \tag{26.7}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}_c = 0, \tag{26.8}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}_c = 0. \tag{26.9}$$

Ихтиёрий майдон функцияларининг бирор ўзгармас c миқдор билан кўпайтмаси учун, (26.1), (26.2) ва (26.3) га биноан, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\operatorname{grad}\,(c\varphi) = c \operatorname{grad} \varphi, \tag{26.10}$$

$$\operatorname{div}\,(c\boldsymbol{a}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \tag{26.11}$$

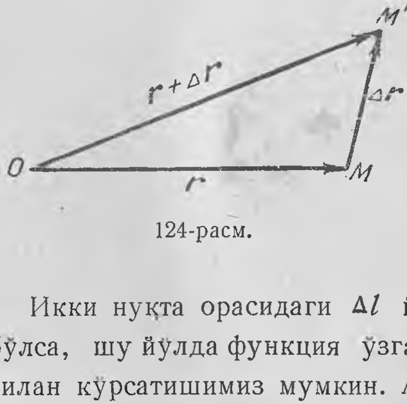
$$\operatorname{rot}\,(c\boldsymbol{a}) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \tag{26.12}$$

Скалярнинг градиенти, векторнинг дивергенцияси ва векторнинг уюрмаси майдон назариясининг муҳим тушунчаларидандир.

Майдон функцияларидан олинган фазовий ҳосилалар фазо ориентациясига боғлиқ. Ҳақиқатан, сирт элементи псевдовектор, ҳажм эса псевдоскалярдир. *Скаляр градиентининг поляр вектор, псевдоскаляр градиентининг эса псевдовектор бўлиши* (26.1) *дан равшан. Шунинг сингари, поляр вектор дивергенциясининг скаляр, псевдовектор дивергенциясининг эса псевдоскаляр бўлиши* (26.2) *дан аён. Ниҳоят, поляр вектор уюрмасининг псевдовектор, псевдовектор уюрмасининг эса поляр векторлиги* (26.3) *дан равшан.*

27. СКАЛЯР ФУНКЦИЯНИНГ ЙЎНАЛИШ БЎЙИЧА ҲОСИЛАСИ

Майдонда олинган M нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ ва унга яқин турган қўшни иккинчи M' нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ бўлсин (124-расм). Бу икки нуқта билан аниқланган MM' кесманинг узунлигини Δl орқали ва $\overrightarrow{MM'}$ вектор йўналишини кўрсатувчи бирлик векторни l^0 орқали белгилайлик $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta l \cdot l^0$.



124-расм.

Майдоннинг қандайдир скаляр функцияси φ берилган бўлсин: $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$. M нуқтадан M' нуқтага ўтишда функция орттирмасини $\Delta\varphi$ орқали белгилайлик: $\Delta\varphi = \varphi(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r})$.

Икки нуқта орасидаги Δl йўлда функция орттирмаси $\Delta\varphi$ бўлса, шу йўлда функция ўзгаришининг суръатини $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ нисбат билан кўрсатишимиз мумкин. M' нуқтанинг M нуқтага чексиз яқинлашиши, яъни Δl нинг нолга интилиш билан бирга, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ нисбат ҳам, умуман айтганда, аниқ бир лимитга интилиши мумкин. *Ана шу лимит φ функциянинг M нуқтадаги бирлик* *вектор l^0 йўналиши бўйича олинган ҳосиласи дейилади. Бу ҳосилани $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ орқали белгиласак, таърифга мувофиқ:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to o}\frac{\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to o}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \qquad (27.1)$$

бўлади.

Биз текшираётган скаляр функция Декарт координаталари функцияси бўлсин: $\varphi=\varphi(x, y, z)$. Математик анализдан маълум булган Тейлор формуласига биноан, M нуқтадан M' нуқтага утишда функция орттирмаси учун тубандагини ёзамиз:

$$\Delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z+\delta, \qquad (27.2)$$

бу ерда $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ — функциянинг M нуқтадаги хусусий ҳосилалари, δ — Δx, Δy, Δz га нисбатан юқори тартибли кичик миқдор. У вақтда, (27.2) ни (27.1) га қўйсак:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dl}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dl}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dl} \qquad (27.3)$$

бўлади. Демак, *функциянинг Декарт ўқлари йўналишидаги учта $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ҳосиласи маълум бўлса, функциянинг ҳар қандай бошқа йўналишдаги $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ ҳосиласи шу учта ҳосила орқали ифодаланади.*

Юқоридаги мулоҳазаларимизда M' нуқтани M нуқтадан ўтган тўғри чизиқда ётган деб ҳисоблаган эдик. M нуқтадан ўтган ҳар қандай эгри чизиқнинг ихтиёрий олинган нуқтасини ҳам M' нуқта деб ҳисоблашимиз мумкин. У вақтда M нуқта билан унга яқин M' қўшни нуқта орасидаги ёй узунлигини Δl билан, M нуқтадаги уринма йўналишини l^0 билан ифодалаш мумкин. Натижада $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ *эгри чизиқ бўйича функциянинг M нуқтадаги ҳосиласини кўрсатади.*

Эгри чизиқнинг уринма бирлик вектори l^0 учун

$$l^0=\frac{dr}{dl}=\frac{dx}{dl}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dl}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dl}\boldsymbol{k}$$

ёки

$$\frac{dx}{dl}=(l^0\,\boldsymbol{i}),\qquad \frac{dy}{dl}=(l^0\,\boldsymbol{j}),\qquad \frac{dz}{dl}=(l^0\,\boldsymbol{k})$$

бўлади. Демак, (27.3) дан:

$$\frac{\partial\varphi}{dl}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},\ l^0\right) \qquad (27.4)$$

келиб чиқади.

28. СКАЛЯР ФУНКЦИЯНИНГ ГРАДИЕНТИ

Функция ўзгаришлари турли йўналишларда турлича бўлиши мумкин. Нуқта орқали чексиз кўп йўналишлар ўтади, демак, функциянинг шу нуқтадаги йўналишлар бўйича олинган ҳосилалари ҳам чексиз кўпдир. Аммо функциянинг бирор нуқтада ҳар қандай йўналиш бўйича олинган ҳосиласи функциянинг шу нуқтадаги градиенти билан боғланган.

Ҳақиқатан, скаляр функция градиентининг таърифига мувофиқ:

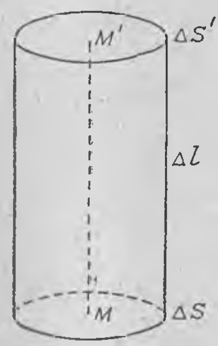
$$\operatorname{grad}\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \varphi d\boldsymbol{S}}{V} \tag{28.1}$$

бўлади. Функция градиентининг бирлик вектор $\boldsymbol{l}^0$ йўналишидаги проекцияси $\operatorname{grad}_l\varphi$ ни текшириб кўрайлик. (28.1) га мувофиқ:

$$\operatorname{grad}_l\varphi = (\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{l}^0) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\varphi\,(d\boldsymbol{S}\boldsymbol{l}^0)}{V} \tag{28.2}$$

бўлади.

Функция градиентини аниқлашда берилган нуқтани қуршаб олган ёпиқ чексиз кичик сиртнинг қандайлиги аҳамиятсиз бўлганлигидан, бу шаклни ихтиёримизча танлашимиз мумкин. Шунинг учун биз ёпиқ сиртни цилиндр шаклида олайлик: цилиндрнинг баландлиги $MM' = \Delta l$ ва асослари $\Delta S = \Delta S'$ бўлсин (125- расм). $\overrightarrow{MM'}$ вектор йўналишининг бирлик вектори $\boldsymbol{l}^0$, демак, $\Delta\boldsymbol{S}' = \Delta S\boldsymbol{l}^0$ $\Delta\boldsymbol{S} = -\Delta S\boldsymbol{l}^0$ бўлади. M нуқта радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ бўлса, M' нуқта радиус-вектори $\boldsymbol{r}+\Delta l\,\boldsymbol{l}^0$ бўлади.



125- расм.

Ён сиртнинг нормали $\boldsymbol{l}^0$ га перпендикуляр. Шу сабабли, юқори тартибли чексиз кичик миқдорларга эътибор қилинмаса, цилиндрнинг ёпиқ сирти бўйича олинган интеграл учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint\varphi\,(d\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{l}^0) = \varphi\,(\boldsymbol{r}+\Delta l\boldsymbol{l}^0)\,\Delta S - \varphi\,(\boldsymbol{r})\,\Delta S =$$

$$= \{\varphi\,(\boldsymbol{r}+\Delta l\boldsymbol{l}^0) - \varphi\,(\boldsymbol{r})\}\,\Delta S = \Delta\varphi\,\Delta S.$$

Цилиндрнинг ҳажми эса $V = \Delta S\Delta l$. Натижада (28.2) га биноан:

$$\operatorname{grad}_l\varphi = (\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{l}^0) = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$$

бўлади. Бу ифоданинг ўнг томони, (27.1) таърифга мувофиқ, $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ бўлади. Шундай қилиб:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=(\operatorname{grad}\varphi\, l^0)=\operatorname{grad}_l\varphi \quad \text{ёки} \tag{28.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\operatorname{grad}_l\varphi=|\operatorname{grad}\varphi|\cdot\cos(\widehat{\operatorname{grad}\varphi, l^0}). \tag{28.4}$$

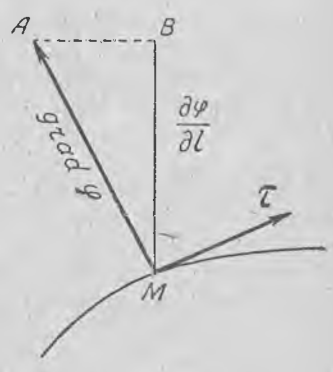
Кўрамизки, *функциянинг бирор нуқтада маълум йўналиш бўйича ҳосиласи функция градиентининг шу йўналишдаги проекциясига тенг.* Агар ҳосила олиш йўналиши функция градиентининг йўналиши билан бир хил бўлса, функция градиентининг проекцияси энг катта қийматга эга бўлади. У вақтда, (28.4) га биноан, функциянинг бу йўналиш бўйича $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ ҳосиласи ҳам энг катта қийматга эга, яъни ўзининг градиенти йўналиши бўйича функция энг катта суръат билан кўпаяди.

Функция градиенти йўналишининг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ орқали белгиласак, сўнгги формуладан:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=(\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{n})=|\operatorname{grad}\varphi| \tag{28.5}$$

бўлади. Айтилганлардан шундай хулоса чиқарамиз: *функция градиенти шундай векторки, унинг йўналиши функциянинг энг катта суръат билан кўпайиш томонига қаратилиб, сон қиймати* (*модули*) *функциянинг шу йўналиш бўйича ҳосиласига тенг.*

Энди бизга майдоннинг бирор M нуқтаси орқали ўтказилган $\varphi=\mathrm{const}$ изосирт берилган булсин. Шу изосиртга M нуқтада уринма бўлган бирлик векторни $\boldsymbol{\tau}$ орқали белгилайлик. Изосиртда функция узгармаслигидан, функциянинг уринма йўналишидаги ҳосиласи нолга тенгдир. Демак, (28.3) га биноан, $(\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{\tau})=0$. Демак, *бирор нуқтадаги функция градиенти шу нуқтадан ўтказилган изосиртга перпендикуляр бўлади.* Айтилганлар 126-расмда кўрсатилди.



126- расм.

$\overrightarrow{MA}$ вектор функция градиенти $\operatorname{grad}\varphi$ ни тасвирлайди, функция градиентининг l^0 йўналишидаги проекцияси MB шу йўналишдаги функция ҳосиласи $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ ни тасвирлайди. (28.4) дан кўрамизки, *изосирт нормали бўйича олинган функция ҳосиласи функция градиентининг сон қиймати (моду ги) га тенгдир.*

Функция градиентининг Декарт компонентларини топайлик. (27.4) ва (28.3) дан:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{l}^0\right) = (\mathrm{grad}\,\varphi\,\boldsymbol{l}^0).$$

Бирлик вектор $\boldsymbol{l}^0$ ихтиёрий олинганлиги сабабли:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (28.6)$$

бўлади. Шундай қилиб, функция градиентининг Декарт компонентлари учун:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \mathrm{grad}_x\varphi,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \mathrm{grad}_y\varphi,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \mathrm{grad}_z\varphi,\end{aligned} \qquad (28.7)$$

яъни *функция градиентининг Декарт компонентлари Декарт координаталари бўйича функциянинг хусусий ҳосилаларига тенгдир.*

Функциянинг тўла дифференциали, таърифга мувофиқ:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz$$

бўлади. Бу ифоданинг ўнг томони градиент $\mathrm{grad}\,\varphi$ билан силжиш вектори $d\boldsymbol{r}$ нинг скаляр кўпайтмасидир:

$$d\varphi = (\mathrm{grad}\,\varphi d\boldsymbol{r}), \qquad (28.8)$$

яъни *функция градиенти билан радиус-вектор дифференциалининг скаляр кўпайтмаси функциянинг тўла дифференциалига тенгдир.*

Берилган $\boldsymbol{a}$ вектор скаляр функциянинг тўла дифференциали билан қуйидагича боғланган бўлсин:

$$d\varphi = (\boldsymbol{a}\,d\,\boldsymbol{r}). \qquad (28.9)$$

(28.8) га биноан, $(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}) = (\mathrm{grad}\,\varphi\, d\boldsymbol{r})$ ёки $(\boldsymbol{a} - \mathrm{grad}\,\varphi,\ d\boldsymbol{r}) = 0$. Бу ерда $d\boldsymbol{r}$ ихтиёрий бўлганлигидан $\boldsymbol{a} - \mathrm{grad}\,\varphi = 0$, демак:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (28.10)$$

Хуллас, бирор векторнинг радиус-вектор дифференциали билан скаляр кўпайтмаси қандайдир скаляр функциянинг тўла дифференциалига тенг бўлса, бундай вектор ўша скаляр функциянинг градиенти бўлади.

Агар функциянинг орттирмасини Тейлор қаторига ажратишда юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар эътиборга олинмаса, у ҳолда:

$$\Delta\varphi = (\mathrm{grad}\,\varphi\,\Delta\boldsymbol{r}) \tag{28.11}$$

булади.

29. ПОТЕНЦИАЛ ВЕКТОР

Агар бирор $\boldsymbol{a}$ *вектор қандайдир скаляр* φ *функциянинг градиенти бўлса,* φ *потенциал деб,* $\boldsymbol{a}$ *эса потенциал вектор деб аталади:*

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,\varphi. \tag{29.1}$$

Потенциал $\boldsymbol{a}$ вектор потенциал φ нинг энг катта суръат билан кўпайиш томонига йўналган.

Баъзи масалаларда φ ўрнига $-\varphi$ олиш қулайлик туғдиради, бундай ҳолларда:

$$\boldsymbol{a} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{29.2}$$

бўлади. Бу формулага мувофиқ, потенциал вектор $\boldsymbol{a}$ нинг йўналиши потенциал φ нинг энг катта суръат билан камайиш томонига қаратилган бўлади. Ушбу тенглик ўз-узидан равшан;

$$\mathrm{grad}\,(\varphi + c) = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,c = \mathrm{grad}\,\varphi,$$

бу ерда c — ихтиёрий константа, яъни *берилган векторга мос бўлган потенциал сифатида* φ *ёки* $\varphi + c$ *ни қабул қилиш мумкин.* Константанинг аниқланиши текширилаётган масалаларнинг конкрет шартларига боғлиқдир.

Потенциал векторнинг M_1 ва M_2 нуқталар орасида олинган чизиқли интегралини текшириб кўрайлик: $\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}) = \int (\mathrm{grad}\,\varphi d\boldsymbol{r})$. (28.8) га мувофиқ: $(\mathrm{grad}\,\varphi\,d\boldsymbol{r}) = d\varphi$, демак:

$$\int (\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}) = \int d\,\varphi = \varphi\,(\boldsymbol{r}_2) - \varphi\,(\boldsymbol{r}_1). \tag{29.3}$$

Кўрамизки, M_1 *ва* M_2 *нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиқ бўйича олинган потенциал векторнинг интеграли шу нуқталардаги потенциал қийматларининг айирмасига тенг; иккинчи хил қилиб айтганда, потенциал векторнинг чизиқли интеграли интеграллаш йўлига боғлиқ эмас. Потенциал бир қийматли функция бўлса, потенциал векторнинг ёпиқ чизиқ бўйича олинган интеграли (контур интеграли) нолга тенг бўлиши* (29.3) *формуладан равшан:*

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}) = \oint (\mathrm{grad}\,\varphi\,d\,\boldsymbol{r}) = 0. \tag{29.4}$$

Масофанинг скаляр функциялари куп масалаларда учраб туради. Шунинг учун масофа функциясининг градиентини текшириб кўрайлик.

Бирор B нуқтанинг A нуқтага нисбатан радиус-вектори модули шу икки нукта орасидаги масофани аниқлайди.

127-расм.

Масофа функцияси бўлган бирор скаляр миқдор $\varphi = \varphi(r)$ берилган бўлсин. Скаляр функция градиентининг таърифига кўра:

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi(r)}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

бўлади. Лекин тубандагиларни ёза оламиз:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{d \varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} = \frac{d \varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(r)}{\partial z} = \frac{d \varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Буларни ўз жойига қўйсак:

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{d \varphi(r)}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{rz} \boldsymbol{k} \right)$$

бўлади. Шундай қилиб:

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{d \varphi(r)}{dr} \operatorname{grad} \boldsymbol{r}, \tag{29.5}$$

чунки:

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

Функциянинг градиенти изосиртга перпендикуляр бўлиб, функциянинг энг катта суръат билан кўпайиш томонига қаратилганлиги ва градиент модули изосиртнинг нормали бўйича шу функциядан олинган ҳосилага тенг эканлиги бизга маълум. B нуқтанинг A нуқтагача масофаси r нинг изосирти B нуқтадан ўтган ва маркази A нуқтада ётган шар сиртидир, нормалининг йўналиши эса радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ нинг йўналишидир. Шуларга биноан, масофа r нинг B нуқтадаги градиенти:

$$\operatorname{grad}_B r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{29.6}$$

бўлади. A нуқтанинг B нуқтага нисбатан масофаси r нинг изосирти A нуқтадан ўтган ва маркази B нуқтада ётган щар сиртдир; нормалининг йўналиши эса радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ нинг йўналишига қарама-қаршидир. Шуларга биноан, A нуқтадаги масофа r градиенти:

$$\operatorname{grad}_A r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{29.7}$$

бўлади. (29.6) ва (29.7) формулалардан равшанки, масофа градиентининг модули бирга тенг, ўзи эса шу масофа буйича йўналган.

(29.6), (29.7), (29.5) дан:

$$\operatorname{grad}_B \varphi(r) = \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\operatorname{grad}_A \varphi(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

бу ердан эса:

$$\operatorname{grad}_B \varphi(r) = -\operatorname{grad}_A \varphi(r) \tag{29.8}$$

бўлади, *яъни икки нуқта орасидаги масофа функциясининг шу нуқталардаги градиентларининг модули бир хил, аммо йўналиши қарама-қаршидир.* (29.5) га мувофиқ, функция градиентининг масофа буйича қандай йўналишда бўлиши функция ҳосиласи $\frac{d\varphi(r)}{dr}$ ишорасининг мусбат ёки манфийлигига қараб аниқланади.

Энди бир неча мисол кўриб чиқайлик. M зарранинг ўзгармас O марказга нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{r}$, заррачага таъсир қилувчи куч эса марказгача бўлган масофага тўғри пропорционал ва доимо марказга қаратилган бўлсин. Бундай куч *гармоник куч* дейилади, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}, \tag{29.9}$$

бу ерда k — физик факторларга боғлиқ бирор константа. (29.9) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

бу ерда $\varphi = \frac{kr^2}{2}$.

Ҳақиқатан, (29.5) ва (29.6) га биноан:

$$-\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{grad}\left(\frac{kr^2}{2}\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{kr^2}{2}\right)\operatorname{grad} r = -kr\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -k\boldsymbol{r}.$$

Ўнг томондаги $-k\boldsymbol{r}$ эса, (29.9) га мувофиқ, $\boldsymbol{F}$ га тенгдир. Юқоридаги $\frac{kr^2}{2}$ миқдор гармоник ҳаракатдаги заррачанинг *потенциал энергияси* дейилади. Гармоник кучнинг потенциал вектор эканлигини кўрмоқдамиз. Шунинг учун, (29.4) га биноан, гармоник кучнинг тўла тебраниш йўлида бажарган иши нолга тенгдир:

$$\oint (\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}) = -\oint (\operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{r}) = -\oint d\varphi = 0.$$

Ньютоннинг физикадан маълум бўлган гравитация (бутун олам тортилиш) қонунига мувофиқ (128- расм), M массали заррачанинг m массали заррачага таъсир кучи $\boldsymbol{F}$ шу массаларга тўғри пропорционал, улар орасидаги масофанинг квадратига эса тескари пропорционал бўлиб, йўналиши M массали заррачага қаратилган:

128-расм.

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{29.10}$$

бу ерда коэффициент γ *гравитацион константа* дейилади $\left(CGS \text{ системасида } \gamma = \frac{1}{15 \cdot 000 \cdot 000} \frac{см^3}{г \cdot сек^2}\right)$. Юқоридаги ифоданинг икки томонини m га бўлиб, бирлик массага тўғри келган $\frac{\boldsymbol{F}}{m}$ кучни $\boldsymbol{g}$ орқали белгиласак:

$$\boldsymbol{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{29.11}$$

бўлади, *бу ерда* $\boldsymbol{g}$ *вектор* M *массали заррача гравитацион майдонининг кучланганлиги дейилади.*

(29.11) дан:

$$\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{29.12}$$

бу ерда

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}. \tag{29.13}$$

Ҳақиқатан, (29.5) ва (29.6) га кўра:

$$-\operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad}\left(-\frac{\gamma M}{r}\right) = \operatorname{grad} \frac{\gamma M}{r} =$$
$$= -\frac{\gamma M}{r^2} \operatorname{grad} r = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

бу ифоданинг ўнг томонидаги $-\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ эса, (29.11) га мувофиқ, $\boldsymbol{g}$ га тенгдир.

$\boldsymbol{g}$ векторнинг вектор чизиқлари *гравитацион куч чизиқлари деб аталади.* (*29.13*) *даги* $-\frac{\gamma M}{r}$ *миқдор* M *массали заррача гравитацион майдонининг потенциали дейилади.* (29.10), (29.11), (29.12) ва (29.13) га биноан:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad}(m\varphi) = -\operatorname{grad}\left(-\frac{\gamma mM}{r}\right)$$

ёки $-\frac{\gamma mM}{r}$ ни Φ орқали белгиласак:

$$\Phi = -\frac{\gamma mM}{r} \tag{29.14}$$

бўлади, натижада:

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Phi \tag{29.15}$$

келиб чиқади.

(29.14) *даги* $-\frac{\gamma mM}{r}$ *миқдор M массали заррача гравитацион майдонидаги m массали заррачанинг потенциал энергияси дейилади.* Демак, гравитацион куч потенциал вектор бўлар экан.

Потенциал энергиянинг манфий градиенти шаклида кўрсатилувчи кучлар потенциал кучлар ёки консерватив кучлар дейилади. Потенциал энергияни u деб олсак, бу кучларнинг таърифига кўра:

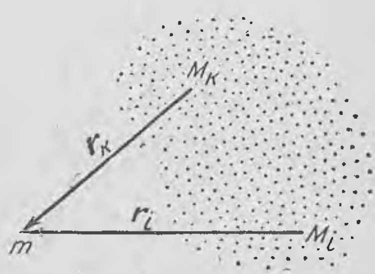
$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} u \tag{29.16}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган гармоник куч ёки гравитацион куч ана шу потенциал (консерватив) кучлардандир.

Юқорида биз M массали заррача ҳақида гапириб, бу заррачани зотан геометрик нуқта шаклида тасаввур қилган эдик. *Геометрик нуқта шаклида тасаввур қилинган заррача массаси нуқтавий масса дейилади.*

Нуқтавий массалар системасини олайлик (129- расм).



129- расм.

Бирор нуқтавий массани M_i орқали белгиласак ($i = 1, 2, 3, \ldots n$), унинг гравитацион майдони учун, (29.12) ва (29.13) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\boldsymbol{g}_i = -\operatorname{grad} \varphi_i,$$

$$\varphi_i = -\frac{\gamma M_i}{r_i}.$$

Айрим гравитацион майдонлар системаси натижавий гравитацион майдон ҳосил қилади:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} \varphi_i = -\operatorname{grad} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

Натижавий гравитацион майдоннинг кучланганлиги $\boldsymbol{g}$ орқали ва потенциали φ орқали белгиланса:

$$\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{29.17}$$

$$\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i, \tag{29.18}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \tag{29.19}$$

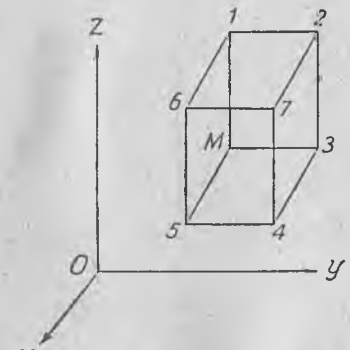
бўлади.

30. ВЕКТОРНИНГ ДИВЕРГЕНЦИЯСИ. ГАУСС — ОСТРОГРАДСКИЙ ФОРМУЛАСИ

Вектор дивергенциясининг (26.2) таърифига мувофиқ:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S})}{V}. \tag{30.1}$$

Бирор нуқтани қуршаб олган чексиз кичик ёпиқ сирт орқали вектор оқими $\oint(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S})$ нолга тенг бўлмаса, бу нуқтада вектор оқимига сабабчи қандайдир манба жойлашган деб англашимиз лозим. Шундай қилиб, (30.1) га кўра, векторнинг бирор нуқтадаги дивергенцияси векторнинг шу нуқтадаги манба қувватининг ўлчови деб айтишимиз мумкин: кўп қувватли манба атрофга кўпроқ оқим, кам қувватли манба эса камроқ оқим чиқаради.



130-расм.

Энди вектор дивергенциясининг Декарт координаталарида қандай ифодаланишини кўриб чиқайлик. Ёпиқ сирт орқали вектор оқимини ҳисоблашда, бу ёпиқ сиртни элементар тўғри бурчакли параллелепипед шаклида олайлик, чунки вектор дивергенцияси таърифи (30.1) га кўра, ёпиқ сирт шакли ихтиёрий олиниши мумкин.

Декарт системасининг координата текисликларини параллелепипед ёқларига параллел қилиб олайлик (130- расм). Вектор дивергенцияси текширилаётган фазо нуқтаси M расмдаги параллелепипед учларидан бири бўлсин.

Параллелепипеднинг бутун сирти орқали вектор оқими параллелепипеднинг олтита ёғи орқали вектор оқимларининг йиғиндисига тенгдир:

$$\oint(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) = \int_{M123M}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) + \int_{54765}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) + \int_{M561M}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) + \int_{32743}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) + \int_{M345M}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}) + \int_{16721}(\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}). \tag{30.3}$$

Ўнг томондаги интегралларни ҳисоблаб чиқамиз. Ёпиқ сирт нормалининг мусбат йўналиши ташқарига қаратилган. Демак;

(30.3) нинг ўнг томонидаги биринчи интеграл, юқори тартибли чексиз кичик миқдорларни назарга олмаганда, қуйидагича ифодаланади:

$$\int\limits_{M123M} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \int\limits_{M123M} a_n dS = a_x(x,\ y,\ z)\,\Delta y \Delta z, \qquad (30.4)$$

бу ерда $a_x(x,\ y,\ z)$ — берилган $\boldsymbol{a}$ векторнинг M нуқтадаги x-компоненти, $\Delta y \Delta z$ — ΔS элементар юз.

(30.3) нинг ўнг томонидаги иккинчи ифода учун:

$$\int\limits_{54765} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \int\limits_{54765} a_n dS = a_x(x + \Delta x,\ y,\ z)\,\Delta y\,\Delta z \qquad (30.5)$$

бўлади, бу ерда $a_x(x+\Delta x,\ y,\ z)$—берилган $\boldsymbol{a}$ векторнинг 5-нуқтадаги x-компоненти. Сўнгги икки формуладан:

$$\int\limits_{M123M} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) + \int\limits_{54765} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \left\{ a_x(x + \Delta x,\ y, z) - a_x\ (x,\ y,\ z) \right\} \Delta y \Delta x$$

бўлади.

Параллелепипеднинг қолган ёқлари орқали ҳам вектор оқимларини топишда юқоридагидек мулоҳазалар юритиб, тубандагиларни ёзамиз:

$$\int\limits_{M561M} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) + \int\limits_{32743} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \left\{ a_y(x,\ y + \Delta y, z) - a_y(x,\ y,\ z) \right\} \Delta z \Delta x,$$

$$\int\limits_{M345M} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) + \int\limits_{16721} (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = \left\{ a_z(x,\ y,\ z + \Delta z) - a_z(x,\ y,\ z) \right\} \Delta x \Delta y.$$

Энди, топилган сўнгги ифодаларни (30.3) даги ўз ўринларига қуямиз:

$$\oint (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \left\{ a_x(x + \Delta x,\ y,\ z) - a_x(x,\ y,\ z) \right\} \Delta y \Delta z +$$
$$+ \left\{ a_y(x,\ y + \Delta y,\ z) - a_y\ (x,\ y,\ z) \right\} \Delta z\, \Delta x +$$
$$+ \left\{ a_z(x,\ y,\ z + \Delta z) - a_z(x,\ y,\ z) \right\} \Delta x \Delta y. \qquad (30.6)$$

Элементар параллелепипеднинг V ҳажми $\Delta x \Delta y \Delta z$ га тенг; (30.1) ва (30.6) га асосланиб бундай ёзамиз:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a_x(x + \Delta x,\ y,\ z) - a_x(x,\ y,\ z)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{a_y(x,\ y + \Delta y, z) - a_y(x,\ y,\ z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{a_z(x, y, z + \Delta z) - a_z(x, y, z)}{\Delta z}$$

ёки хусусий ҳосила таърифига мувофиқ:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{30.7}$$

бўлади. *Бу формула вектор дивергенциясининг Декарт координаталарида қандай тариқада ифодаланишини кўрсатади.*

Скаляр функция градиенти $\operatorname{grad} \varphi$ *нинг* $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ *дивергенцияси* $\Delta\varphi$ *символи билан ишораланади:*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi. \tag{30.8}$$

Бу ердаги Δ *символ Лаплас оператори ёки лапласиан дейилади.* Скаляр функция градиентининг Декарт компонентлари $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ эканлигидан фойдаланиб, (30.8) ва (30.7) га биноан, сўнгги ифодани Декарт координаталарида ёзамиз:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{30.9}$$

Вектор майдон назариясида аҳамияти катта бўлган Гаусс—Остроградский формуласи билан танишайлик. Бунинг учун (30.1) да ифодаланган вектор дивергенцияси таърифидан фойдаланамиз. S ёпиқ сирт ва V шу ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажм бўлсин. Ҳажмни n та майда элементларга бўлайлик. Ҳажм элементини V_i ва уни чегараловчи ёпиқ сиртни S_i орқали белгилайлик ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ихтиёрий кичик мусбат сон δ берилган бўлса, ҳажм элементининг ҳар бири учун, лимит таърифи ва (30.1) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\left| \frac{\oint\limits_{S_i} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S})}{V_i} - \operatorname{div}_i \boldsymbol{a} \right| < \delta,$$

бу ерда $\boldsymbol{a}$ векторнинг V_i ҳажмга қарашли бирор нуқтадаги дивергенцияси $\operatorname{div}_i \boldsymbol{a}$ орқали белгиланди. Формуланинг икки томонини V_i га кўпайтириб, сўнгра барча элементлар бўйича йиғинди оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \oint\limits_{S_i} (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) - \operatorname{div}_i \boldsymbol{a}\, V_i \right| < \delta\, V,$$

бу ерда

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

Скалярлар йиғиндисининг модули скалярларнинг модуллари йиғиндисидан кам ёки унга тенг бўлиши сабабли, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\oint_{S_i}(a\,dS)-\mathrm{div}_i\,a\,V_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\oint_{S_i}(a\,dS)-\mathrm{div}_i\,a\,V_i\right|$$

ёки

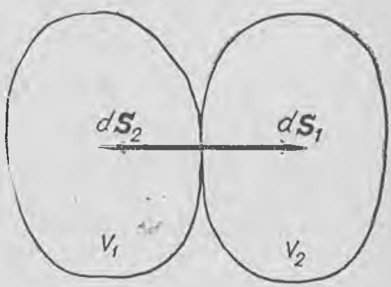
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}(a\,dS)-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}_i\,a\,V_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\oint_{S_i}(a\,dS)-\mathrm{div}_i\,a\,V_i\right|.$$

Юқоридаги тенгсизлик назарга олинса:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}(a\,dS)-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}_i\,a\,V_i\right| < \delta V$$

бўлади.

Икки ёндош элементнинг умумий чегара юз вектори биринчи элемент учун dS_1 бўлса, иккинчи элемент учун $dS_2 = -dS_1$ бўлади (131-расм). Шунга кўра, сирт интегралларининг ёндош икки элементга умумий юз орқали олинган қисми учун $(adS_1)+(adS_2)=(a,\ dS_1+dS_2)=0$. Ҳажм элементларини чегараловчи S_i сиртларнинг берилган ёпиқ сирт S га тегишли эмас қисмлари орқали олинган (adS) ифода ҳар қандай ёндош жуфт элемент учун бир-биридан фақат ишораси билан фарқ қилиб, бундай ифодаларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади.



131-расм.

Шундай қилиб, сирт интеграллари фақат берилган V ҳажмни чегараловчи S сирт орқалигина олинади.

Элементлар сонини чексиз кўпайтириб, уларнинг ҳар бирини чексиз кичрайтирсак, сўнгги тенгсизлик:

$$\oint(a\,dS)-\int\mathrm{div}\,a\,dV\,\Big| < \delta V$$

шаклни олади. Шартимизга кўра, δ сонни ихтиёримизча кичик қилиб олишимиз мумкин, шунинг учун:

$$\oint(a\,dS)-\int\mathrm{div}\,a\,d\,V\Big| = 0$$

демак:

$$\oint (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV \tag{30.10}$$

бўлади, *яъни ёпиқ сирт орқали вектор оқими шу ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажм бўйича олинган вектор дивергенциясининг интегралига тенгдир.* Гаусс — Остроградский теоремаси шундан иборат. (30.10) ифода Гаусс — Остроградский формуласидир.

Гаусс — Остроградский формуласини топишда (30.1) да келтирилган вектор дивергенцияси ифодасидан фойдаландик. Энди скаляр градиенти билан вектор уюрмасини таърифлаш ифодаларини эслайлик:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \varphi d\boldsymbol{S}}{V}, \tag{30.11}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]}{V}. \tag{30.12}$$

Шулардан фойдаланиб, Гаусс — Остроградский формуласини келтириб чиқаришдаги тегишли мулоҳазалар асосида тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{grad} \varphi\, dV \tag{30.13}$$

$$\oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}] = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dV. \tag{30.14}$$

Шундай қилиб, дивергенциянинг, градиентнинг ва уюрманинг бирор ҳажм бўйича интеграллари берилган функцияларнинг шу ҳажмни чегараловчи ёпиқ сирт бўйича мос интегралларига боғлиқдир. Албатта, текширилаётган функциялар ва уларнинг фазовий ҳосилалари узлуксиз функциялар деб фараз қилинади. Ёпиқ сирт эса икки томонли ва силлиқ сирт ҳисобланади. Юқоридаги формулалар булакли силлиқ сиртлар учун ҳам тўғридир, чунки бу формулалар ҳажмнинг силлиқ сиртлар билан чегараланган ҳар бир қисмига ишлатилиб, сунгра чиққан натижаларнинг умумий йиғиндиси олинади.

Ҳажм биттагина ёпиқ сирт билан эмас, балки бир неча ёпиқ сирт билан чекланган бўлиши мумкин (масалан, пишлоқ сингари ғовак жисм ҳажми). Коваклардан иборат ҳажм учун ҳам юқоридаги формулаларни ишлатиш мумкин. Ҳақиқатан, ҳажмни унинг ковакларн билан кесиб ўтувчи бирор сирт воситасида ҳеч қандай ковакснз ёндош ҳажмлар ҳосил қилиш мумкин. Сўнгра шу ёндош ҳажмларга нисбатан юқоридаги формулаларни ишлатиб, топилган натижалар ўзаро қўшилади. Шундай қилиб, ҳажм бўйича олинган интеграл шу ҳажмни чегараловчи ёпиқ сиртлар бўйича муносиб олинган интеграллар йиғиндиси билан боғланади.

Ковакларни чегараловчи сирт нормалларининг йўналишлари шу ковакларнинг ичкарисига қаратилган бўлиши керак, чунки текширилаётган ҳажмни чегараловчи ёпиқ сиртнинг ташқи томонга қаратилган нормаль йўналиши нормалнинг мусбат йўналиши ҳисобланган эди.

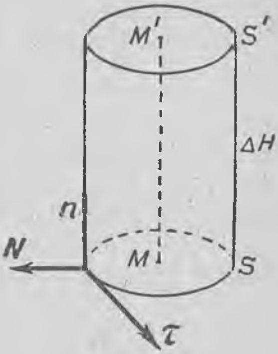
31. ВЕКТОРНИНГ УЮРМАСИ. СТОКС ФОРМУЛАСИ

Векторнинг уюрмаси таърифи (26.3) бизга маълум:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint [dS\boldsymbol{a}]}{V} \cdot \qquad (31.1)$$

Энди биз вектор уюрмасининг бирор йўналишдаги проекциясини текшириб кўрайлик. Бу йўналишнинг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ орқали белгиласак, юқоридаги формулага мувофиқ, бундай ёзамиз:

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} = (\operatorname{rot}\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (\boldsymbol{n}\, [dS\boldsymbol{a}])}{V} \cdot$$



132- расм.

Аралаш кўпайтма учун:

$$(\boldsymbol{n}[dS\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}dS]),$$

демак:

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} = (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{n}\, dS])}{V} \cdot \qquad (31.2)$$

Вектор уюрмасини аниқлашда берилган нуқтани қуршаб олган чексиз кичик сирт шаклининг қандайлиги аҳамиятсиз бўлганлигидан, ёпиқ сирт цилиндр шаклида деб олайлик (132-расм): цилиндрнинг баландлиги ΔH, асосларининг юзлари $S = S'$ эса йўналишнинг бирлик вектори $\boldsymbol{n}$ га перпендикуляр булсин. У вақтда ёпиқ сирт бўйича олинган $\oint (\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{n}\, dS])$ интеграл асослар бўйича олинган $\int\limits_{\mathrm{I}} (\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{n}\, dS])$ интеграл билан ён сирт бўйича олинган $\int\limits_{\mathrm{II}} (\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{n}\, dS])$ интеграл йиғиндисига тенг бўлади:

$$\oint (\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{n}dS]) = \int\limits_{\mathrm{I}} (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}dS]) + \int\limits_{\mathrm{II}} (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}dS]).$$

Цилиндр асосларининг нормаллари, $\boldsymbol{n}$ векторга коллинеар бўлганлиги учун $\int\limits_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}]) = 0$ бўлади, демак:

$$\oint(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}]) = \int\limits_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}]).$$

Цилиндрнинг асоси S ни чегаралаган контур йўналишининг бирлик векторини $\boldsymbol{\tau}$ орқали ва шу контур элементини dl орқали белгиласак, $d\boldsymbol{l} = dl\,\boldsymbol{\tau}$ бўлади. Ён сирт элементи dS нинг бирлик векторини $\boldsymbol{N}$ орқали белгиласак, у вақтда $d\boldsymbol{S} = \Delta H dl \boldsymbol{N}$ бўлади. Энди ёпиқ сирт учун ташқи нормаль қабул қилинганлиги ва $\overrightarrow{MM'} = \Delta H\boldsymbol{n}$ эканлиги назарда тутилса, ўнг қўл қоидасига мувофиқ, $[\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}] = \boldsymbol{\tau}$ бўлади. Демак:

$$[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}] = \Delta H dl\,[\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}] = \Delta H dl\,\boldsymbol{\tau} = \Delta H d\boldsymbol{l}.$$

Натижада:

$$\oint(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}]) = \int\limits_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}]) = \Delta H \oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}).$$

Биз олган цилиндр ҳажми V нинг $S\Delta H$ га тенглиги сабабли, (31.2) дан қуйидагини топамиз:

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}) = \lim_{s\to 0}\frac{\oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l})}{S} \tag{31.3}$$

Шуниси муҳимки, берилган M нуқта ётган S юзга перпендикуляр йўналишнинг бирлик вектори $\boldsymbol{n}$ ва шу S юзни чегараловчи контур йўналишининг бирлик вектори $\boldsymbol{\tau}$, қул қоидасига мувофиқ, ўзаро боғланган. Равшанки, вектор проекциясининг сон қиймати шу векторнинг ўз йўналишидагина максимал қийматга эга бўлади. Шунинг учун (31.3) га мувофиқ, *вектор циркуляциясининг контур чегаралаган юзга нисбатининг лимити максимал қийматга эга бўлган йўналиш вектор уюрмасининг йўналиши ва бу максимал қиймат вектор уюрмасининг модулига тенгдир.*

(31.3) формуладан фойдаланиб, вектор майдон назариясида муҳим теоремалардан бирини ифодаловчи *Стокс формуласини* келтириб чиқарайлик. Юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар эътиборга олинмаса, (31.3) га мувофиқ, тубандагини ёзишимиз мумкин:

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})S = \oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}).$$

Чексиз кичик $\boldsymbol{S}$ юз нормалининг йўналишини бирлик вектор $\boldsymbol{n}$ аниқлайди: $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$. Демак:

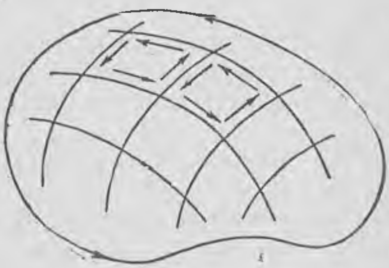
$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{S}) = \oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) \tag{31.4}$$

бўлади ва юз нормалининг йўналиши шу юзни чегараловчи контур йўналиши билан қўл қоидасига мувофиқ боғланади.

Биз энди ихтиёрий контур билан чегараланган бирор сиртни олайлик (133- расм). Бу сиртни S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) элементларга ажратиб, ҳар бир элемент учун, (31.4) га мувофиқ, бундай ёзамиз: $(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} S_i) = \oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}_i)$, сўнгра ҳамма элементлар бўйича йиғиб чиқамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} S_i) = \sum_{i=1}^{n} \oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}_i). \qquad (31.5)$$

Иккала қўшни элементар контурнинг умумий томони бор. Аммо бу умумий томон биринчи ва иккинчи элементар контурлар учун қарама-қарши йўналишда. Шу сабабли биринчи контурга нисбатан маълум бир йўналишда ва иккинчи контурга нисбатан қарама-қарши йўналишда уларнинг умумий томони бўйлаб вектордан олинган чизиқли интегралларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Натижада (31.5) нинг ўнг томонидаги йиғинди $\sum_{i=1}^{n} \oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}_i)$ да векторнинг фақат берилган сиртни чегараловчи ташқи контур



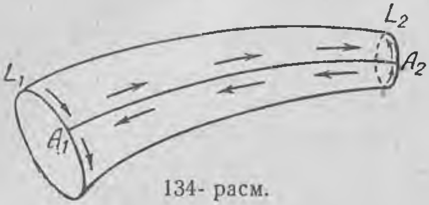
133- расм.

бўйича олинган интеграли $\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l})$ қолади. Сирт элементларининг умумий сони чексиз кўп ва уларнинг ҳар бири чексиз кичик бўлса, (31.5) нинг чап томонидаги йиғиндининг лимити $\int (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S})$ бўлади. Демак:

$$\int (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = \oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}). \qquad (31.6)$$

Бу формула Стокс теоремасини ифодалайди: *бирор контур бўйича олинган векторнинг интеграли шу контур билан чегараланган сирт орқали вектор уюрмасининг оқимига тенгдир.*

Стокс теоремасида вектор ва унинг уюрмаси узлуксиз функциялардир, контур билан чегараланган сирт эса ихтиёрий олинган икки томонли сирт ҳисобланади. Бу теорема бир неча контур билан чегараланган сирт учун ҳам ишлатилса бўлади. Ҳақиқатан ҳам, масалан, най шаклидаги сиртни иккита L_1, L_2 контур чегаралайди, дейлик (134- расм). Агар бу най сирт $A_1 A_2$ чизиқ бўйича кесилса, у вақтда, бу сиртни чегараловчи умумий контур L_1, L_2 контурлар билан $A_1A_2A_1$ контурдан тузилади. Қарама-қарши A_1A_2 ва A_2A_1 қисмлардан иборат $A_1A_2A_1$ контур бўйича олинган векторнинг чизиқли интеграли нолга тенг бўлиб, векторнинг дастлабки L_1, L_2 контурлар бўйича олинган чизиқли интегралларигина қолади.



134- расм.

Сиртни чегараловчи контурларнинг йўналишлари сирт нормалининг йўналиши билан мос бўлиши керак. Масалан, 134- расмда кўрсатилган най сиртни чегараловчи L_1 ва L_2 контурларнинг йўналишлари, ўнг қўл қоидасига мувофиқ, ташқи нормаль йўналишига мос олинди.

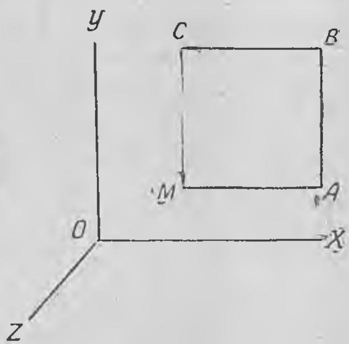
(31.3) формуладан фойдаланиб, вектор уюрмасининг Декарт компонентларини аниқлаш масаласига ўтайлик. Масалан, вектор уюрмасининг z-компонентини топайлик:

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{a} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{k}) = \lim_{s\to 0}\frac{\oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l})}{S}. \tag{31.7}$$

Берилган чексиз кичик юзни чегараловчи контур тўғри тўртбурчак шаклида бўлсин. Вектор уюрмаси текширилаётган фазо нуқтаси M ни тўртбурчакнинг учларидан бири деб ҳисоблайлик.

Декарт системасининг X, Y ўқларини элементар тўғри тўртбурчак томонларига коллинеар қилиб оламиз. Юз нормали ва контур йўналишлари Декарт системасининг ориентациясига мос қилиб олинади (135- расм).

Бу контур тўрт кесмадан иборатдир. Контур бўйича олинган вектор интеграли шу кесмалар бўйича олинган вектор интегралларининг йиғиндисига тенг:



135- расм.

$$\oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int\limits_{MA}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + \int\limits_{AB}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + \int\limits_{BC}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + \int\limits_{CM}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) \tag{31.8}$$

Юқори тартибли чексиз кичик миқдорларни назарга олмасак, ўнг томондаги биринчи интеграл:

$$\int\limits_{MA}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = a_x(x,y,z)\,\Delta x \tag{31.9}$$

булади, бу ерда $a_x(x,y,z)$ вектор $\boldsymbol{a}$ нинг M нуқтадаги x-компонентидир. (31.8) нинг ўнг томонидаги иккинчи интеграл:

$$\int_{AB}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = a_y(x+\Delta x, y,z)\,\Delta y \tag{31.10}$$

бўлади, бу ерда $a_y(x+\Delta x,\ y,\ z)$ вектор $\boldsymbol{a}$ нинг A нуқтадаги y-компонентидир. (31.8) нинг ўнг томонидаги учинчи интеграл қуйидагича булади:

$$\int_{BC}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = -\,a_x(x,y+\Delta y,z)\,\Delta x. \tag{31.11}$$

Ўнг томонда минус ишорасининг пайдо бўлишига сабаб, B нуқтадан C нуқтага қараб ўтилган элементар силжиш расмдаги X уқнинг йўналишига қарама-қарши олинганлигидир.

(31.8) нинг ўнг томонидаги тўртинчи интеграл:

$$\int_{CM}(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = -\,a_y(x,y,z)\,\Delta y \tag{31.12}$$

бўлади.

Аниқланган тўртта интеграл қийматларини ўз ўринларига қуямиз:

$$\oint(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \left\{a_y(x+\Delta x, y,z) - a_y(x,y,z)\right\}\Delta y -$$
$$-\left\{a_x(x,y+\Delta y,z) - a_x(x,y,z)\right\}\Delta x. \tag{31.13}$$

Тўғри тўртбурчак шаклидаги контур билан чегараланган юз $S=\Delta x\Delta y$ бўлганлиги сабабли, (31.7) ва (31.13) дан:

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a_y(x+\Delta x,\,y,\,z) - a_y(x,\,y,\,z)}{\Delta x} -$$
$$-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{a_x(x,\,y+\Delta y,\,z) - a_x(x,\,y,\,z)}{\Delta y}$$

келиб чиқади, демак, хусусий ҳосилалар таърифига кўра:

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

бўлади.

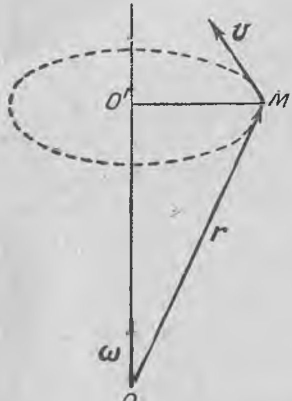
Юқоридагидай мулоҳазалардан фойдаланиб, вектор уюрмасининг қолган компонентларини ҳам топамиз. Шундай қилиб:

$$\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$
$$\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \tag{31.14}$$
$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

бўлади. Демак:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}. \quad (31.15)$$

Уюрма тушунчаси бизнинг тасаввуримизда қандайдир айланма ҳаракат билан боғлиқдир. Дарҳақиқат, ўзгармас ўқ атрофида шу ўққа перпендикуляр бўлган текисликда ётган айлана бўйлаб текис ҳаракат қилувчи заррача бор деб фараз қилайлик (136- расм).



136- расм.

Чизиқли тезлик вектори $\boldsymbol{v}$ билан бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ орасидаги боғланишни ифодаловчи (21.16) формула бизга маълум:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]. \quad (31.16)$$

Бу ердаги $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ векторларни компонентлари орқали ёзайлик:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}.$$

У вақтда:

$$v_x = [\boldsymbol{\omega r}]_x = \omega_y z - \omega_z y,$$
$$v_y = [\boldsymbol{\omega r}]_y = \omega_z x - \omega_x z,$$
$$v_z = [\boldsymbol{\omega r}]_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Чизиқли тезлик вектор уюрмасининг x-компоненти, (31.14) га биноан, қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

v_z ва v_y қийматларини аввалги формуладан олиб қўямиз:

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z).$$

Мисолимизда бурчак тезлик вектори $\boldsymbol{\omega}$ ўзгармас, демак, унинг ω_x, ω_y, ω_z компонентлари ҳам ўзгармасдир. Шунинг учун:

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{v} = \omega_x + \omega_x = 2\,\omega_x.$$

Чизиқли тезлик вектори уюрмасининг қолган компонентлари худди шундай топилади: $\operatorname{rot}_y \boldsymbol{v} = 2\,\omega_y$, $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v} = 2\,\omega_z$.
Демак:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{\omega}, \quad (31.17)$$

яъни заррачанинг чизиқли тезлик векторининг уюрмаси шу заррачанинг икки карра олинган бурчак тезлиги векторига тенгдир.

32. УЮРМАСИЗ ВЕКТОР. УЮРМАЛИ ВЕКТОР

Потенциал вектор $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$ учун контур интегралининг нолга тенглиги бизга маълум:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}) = \oint (\operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Шунга кўра, вектор уюрмасининг проекциясини ифодаловчи (31.3) формуладан: $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\, \boldsymbol{n}) = 0$ бўлади, бу ерда $\boldsymbol{n}$ — чексиз кичик контур билан чегараланган сирт нормалининг бирлик вектори. Чексиз кичик контур, демак, бирлик вектор $\boldsymbol{n}$ ихтиёрий бўлганлигидан, тубандагини ёза оламиз:

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\varphi = 0, \tag{32.1}$$

яъни *потенциал векторнинг уюрмаси нолга тенг.*

Энди бирор векторнинг уюрмаси нолга тенг бўлсин:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0. \tag{32.2}$$

У вақтда Стокс формуласига мувофиқ:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = 0 \tag{32.3}$$

бўлади. Шу интеграл олинаётган контурнинг ккки ихтиёрий нуқтасини олиб, бирини ўзгармас M_0, иккинчисини ўзгарувчан M деб ҳисобласак ва контур бўйича улар орасидаги йўлларни l, l' орқали белгиласак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int\limits_{M_0l'M} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + \int\limits_{MlM_0} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = 0$$

ёки

$$\int\limits_{M_0l'M} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = -\int\limits_{MlM_0} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int\limits_{M_0lM} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}), \tag{32.4}$$

чунки l йўл бўйича юриш йўналиши ўзгарса, элементар силжиш вектори $d\boldsymbol{l}$ йўналиши ҳам қарама-қаршисига ўзгаради.

(32.4) дан кўрамизки, ўзгармас ва ўзгарувчи икки нуқта орасида олинган векторнинг чизиқли интеграли йўл шаклига боғлиқ эмас, у фақат ўзгарувчи нуқта функциясидир: $\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \varphi(M)$. Юқоридаги формуладан равшанки:

$$(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = d\varphi. \tag{32.5}$$

Функция дифференциали билан шу функция градиенти орасидаги боғланиш илгаридан бизга маълум (28.8): $(\operatorname{grad}\varphi d\boldsymbol{l}) = d\varphi$. Демак:

$$(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = (\operatorname{grad}\varphi d\boldsymbol{l})$$

ёки

$$(\boldsymbol{a} - \operatorname{grad} \varphi, d\boldsymbol{l}) = 0.$$

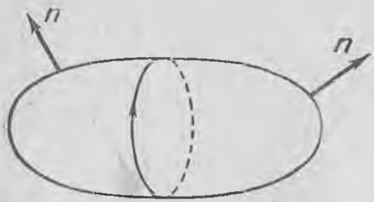
Бу ерда $d\boldsymbol{l}$ ихтиёрий олинган элементар силжишни ифодалайди, шунинг учун $\boldsymbol{a} - \operatorname{grad} \varphi = 0$ ёки:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{32.6}$$

яъни $\boldsymbol{a}$ вектор потенциал вектордир. Шундай қилиб, *уюрмаси нолга тенг бўлган вектор потенциал вектордир.* Бу натижани бошқача қилиб айтиш ҳам мумкин. *Агар бирор векторнинг ё уюрмаси нолга тенг бўлса* (32.2), *ёки циркуляцияси нолга тенг бўлса* (32.3), *ёхуд чизиқли интеграли йўл шаклига боғлиқ бўлмаса* (32.4), *ёки элементар силжиш вектори билан скаляр кўпайтмаси бирор скаляр функциянинг тўла дифференциали бўлса* (32.5), *бундай вектор потенциал вектор бўлади* (32.6).

Потенциал вектор уюрмаси нолга тенг бўлганлигидан, потенциал вектор уюрмасиз вектор деб, у билан характерланган майдон эса уюрмасиз майдон деб ҳам аталади.

Стокс теоремасини ифодалашда контур билан чегараланган сиртнинг шакли аҳамиятга эга эмаслигини биламиз. Бир контурга чексиз кўп сиртлар асосланиши мумкин. Масалан, умумий бир контурга асосланган иккита S_1, S_2 сирт орқали вектор уюрмаси бир хил оқимни беради ва бу оқим векторнинг шу умумий контур бўйича олинган интегралига тенг бўлади.



137-расм.

Вектор уюрмасининг ёпиқ сирт орқали оқими нолга тенг бўлади. Дарҳақиқат, ёпиқ сиртда ётган бирор чизиқ бу ёпиқ сиртни иккита S_1 ва S_2 сиртларга ажратади (137-расм). Ёпиқ сиртнинг мусбат нормали учун ташқи нормаль олинганлиги ва нормаль йўналишининг контур бўйича юриш йўналишига мос қилиб олиниши эсланса, Стокс формуласига биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{l}) = \int_{S_1} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = -\int_{S_2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}),$$

бундан:

$$\int_{S_1} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) + \int_{S_2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = 0$$

ёки

$$\oint (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = 0, \qquad (32.7)$$

яъни *ҳар қандай ёпиқ сирт орқали вектор уюрмасининг оқими нолга тенг. Демак, вектор уюрмасини тасвирловчи вектор чизиқлар тубандаги уч ҳолатнинг бирида мавжуд бўлиши мумкин:* 1) *чексизликда бошланиб, чексизликда тугайди,* 2) *ёпиқ чизиқлар ҳосил қилади,* 3) *бошланиши ҳам йўқ охири ҳам йўқ, ёпиқ чизиқлар ҳам ҳосил қилмайди; балки бир-бирига нисбатан ниҳоятда зич ўрнашиб, фазодаги бирор сирт (масалан, ҳалқа сирт) бўйича узлуксиз равишда ўрала боради.* Юқоридаги (32.7) га мувофиқ, вектор дивергенциясини ифодаловчи (30.1) формуладан:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} = 0 \qquad (32.8)$$

бўлади, яъни *вектор уюрмасининг дивергенцияси нолга тенг.*

Энди бирор $\boldsymbol{a}$ векторнинг дивергенцияси нолга тенг бўлсин:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{a} = 0, \qquad (32.9)$$

демак, Гаусс — Остроградский теоремасига мувофиқ:

$$\oint (\boldsymbol{an})\, dS = 0 \qquad (32.10)$$

бўлади. Ёпиқ сиртни умумий контурга эга икки сиртдан иборат десак,

$$\int_{S_1} (\boldsymbol{an})\, dS + \int_{S_2} (\boldsymbol{an})\, dS = 0$$

ёки

$$\int_{S_1} (\boldsymbol{an})\, dS = -\int_{S_2} (\boldsymbol{an})\, dS$$

бўлади. Бу ерда икки сирт учун ҳам ташқи нормаль қабул қилинган. Масалан, биринчи сирт учун ташқи нормални қабул қилсак, қўл қоидасига мувофиқ, контур йўналишига мос келган иккинчи сирт нормали ташқи нормалга қарама-қаршидир. Натижада:

$$\int_{S_1} (\boldsymbol{an})\, dS = \int_{S_2} (\boldsymbol{an})\, dS,$$

яъни умумий бир контур билан чегараланган ҳар қандай сирт орқали вектор оқими бир хил бўлади. Шунинг учун буни бирор $\boldsymbol{b}$ векторнинг шу умумий контур бўйича олинган интеграли билан боғлашимиз мумкин:

$$\int (\boldsymbol{an})\, dS = \oint (\boldsymbol{b} d\boldsymbol{l}).$$

Лекин бу икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор ўзаро қандай боғланганлигини билишимиз лозим. Юқори тартибли чексиз кичик миқдорларга эътибор қилмасак, чексиз кичик контур билан чегараланган S юз орқали вектор оқими учун $(\boldsymbol{an})S$ ни қабул қилишимиз мумкин, демак:

$$(\boldsymbol{an})S = \oint (\boldsymbol{b}d\boldsymbol{l}).$$

Шунга кўра, вектор уюрмасининг проекциясини ифодаловчи (31.3) формуладан кўрамизки: $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{bn}) = (\boldsymbol{an})$ ёки $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$. Бирлик вектор $\boldsymbol{n}$ ихтиёрийдир. Шунинг учун $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = 0$ ёки

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{rot}\boldsymbol{b}. \tag{32.11}$$

Шундай қилиб, *дивергенцияси нолга тенг бўлган вектор уюрмали вектордир.*

Кичик контурнинг нуқталари орқали ўтувчи вектор чизиқларнинг тупламu (геометрик ўрни) вектор най дейилади. Вектор уюрмасини тасвирловчи вектор чизиқлар уюрма чизиқлар деб юритилади. Кичик контурнинг нуқталари орқали ўтувчи уюрма чизиқларнинг тўплами (геометрик ўрни) уюрма най деб юритилади. Жуда ингичка уюрма най уюрма ип дейилади.

(32.10) га биноан, уюрмали векторнинг ҳар қандай ёпиқ сирт орқали оқими нолга тенг. Уюрма найнинг икки S_1 ва S_2 кесими билан ажралган қисмидаги ён сиртни S_0 десак:

$$\oint (\boldsymbol{an})\,dS = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{an})\,dS + \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{an})\,dS + \int\limits_{S_0} (\boldsymbol{an})\,dS = 0$$

бўлади. Ён сиртда нормаль ва уюрма чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлганлиги сабабли $\int\limits_{S_0} (\boldsymbol{an})\,dS = 0$, демак:

$$\int\limits_{S_1} (\boldsymbol{an})\,dS + \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{an})\,dS = 0$$

ёки

$$\int\limits_{S_1} (\boldsymbol{an})\,dS = -\int\limits_{S_2} (\boldsymbol{an})\,dS$$

ёки нормаль йўналиши контур йўналишига мослаштирилса:

$$\int\limits_{S_1} (\boldsymbol{an})\,dS = \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{an})\,dS$$

бўлади, яъни *уюрма найнинг ҳамма кесимларида оқим бир хилдир.*

Уюрмали вектор баъзан соленоидал вектор дейилади, иккинчи хил қилиб айтганда, дивергенцияси нолга тенг бўлган вектор соленоидал вектор деб аталади.

Уюрма иплар тўғрисида юқорида айтилганлардан шундай хулосага келамиз: 1) уюрма иплар чексизликда бошланиб, чексизликда тугаши мумкин, 2) уюрма иплар ёпиқ чизиқлар ҳосил қилиши мумкин, 3) уюрма ипларнинг бошланиши ҳам йуқ, охири ҳам йўқ, уюрма иплар ёпиқ чизиқлар ҳам ҳосил қилмайди, балки улар бир-бирига нисбатан зич ўрнашган ҳолда, фазодаги бирор сирт (масалан, ҳалқа сирт) бўйича узлуксиз ўрала бориши мумкин.

33. НАБЛА-СИМВОЛИК ВЕКТОР

Скаляр функция градиенти, вектор дивергенцияси ва вектор уюрмаси таърифларига биноан:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint n\varphi dS}{V}. \tag{33.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (n\boldsymbol{a})\, dS}{V}. \tag{33.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint [n\boldsymbol{a}]\, dS}{V}; \tag{33.3}$$

бу ерда $d\boldsymbol{S} = ndS$.

Келтирилган формулалардан равшанки, функциянинг бирор нуқтадаги фазовий ҳосиласини билиш учун берилган нуқтани қуршаб олган чексиз кичик ёпиқ сирт нормалига шу функция мос равишда ўнг томондан кўпайтирилиб, сўнгра керакли лимит олинади. Бу математик амални ифодалаш учун ушбу символ қабул қилинган:

$$\nabla = \lim_{V \to 0} \frac{\oint n dS}{V}. \tag{33.4}$$

Бу символ набла ёки Гамильтон оператори, ёхуд гамильтониан дейилади (∇ шаклидаги чолғу асбоби грекчасига набла деб аталади).

Символик вектор бўлган набладан фойдаланиб, юқоридаги формулаларга мувофиқ қуйидагиларни ёзамиз:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi. \tag{33.5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a}). \tag{33.6}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}]. \tag{33.7}$$

Баъзи авторлар ∇ символ ўрнига $\frac{d}{dr}$ символ ишлатади. Фазовий ҳосилаларнинг таърифларини шартли равишда ифодаловчи юқоридаги формулаларда *набла символи билан кўрсатилган* *мос математик амал шу символнинг ўнг томонида турган функциягагина тааллуқлидир.*

Энди фазовий ҳосилаларнинг Декарт компонентлари орқали ёзилишини ҳам эслайлик:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{33.8}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{33.9}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{33.10}$$

Скаляр функция градиенти ифодасининг ўнг томонини шартли равишда бундай ёзамиз:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi.$$

Символик векторни Декарт системасида киритиш мумкин:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{33.11}$$

Демак, набланинг Декарт компонентлари тубандагичадир:

$$\begin{aligned} \nabla_x &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \nabla_y &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Delta_z &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{33.12}$$

яъни набланинг Декарт компонентлари Декарт координаталари бўйича дифференциаллаш амалини кўрсатади.

Символик вектор ∇ билан $\boldsymbol{a}$ нинг скаляр кўпайтмасини кўриб чиқайлик:

$$\begin{aligned} (\nabla\boldsymbol{a}) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right) = \\ &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_x\boldsymbol{i}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_x\boldsymbol{i}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_x\boldsymbol{i}\right) + \\ &+ \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_y\boldsymbol{j}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_y\boldsymbol{j}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_y\boldsymbol{j}\right) + \\ &+ \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_z\boldsymbol{k}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_z\boldsymbol{k}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_z\boldsymbol{k}\right). \end{aligned}$$

Демак, Декарт ортларининг хоссаларига кўра қуйидагича натижа ҳосил булади:

$$(\nabla\boldsymbol{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ўнг томондаги ифода вектор дивергенциясининг бизга илгаридан маълум бўлган ифодасидир.

Энди символик ∇ вектор билан $\boldsymbol{a}$ нинг вектор кўпайтмасини олайлик:

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla \boldsymbol{a}\right] &= \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\ a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right] = \\
&= \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_x\boldsymbol{i}\right] + \left[\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_x\boldsymbol{i}\right] + \left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_x\boldsymbol{i}\right] + \\
&+ \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_y\boldsymbol{j}\right] + \left[\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_y\boldsymbol{j}\right] + \left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_y\boldsymbol{j}\right] + \\
&+ \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, a_z\boldsymbol{k}\right] + \left[\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, a_z\boldsymbol{k}\right] + \left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, a_z\boldsymbol{k}\right].
\end{aligned}
$$

Қавслардаги ифодаларни ҳисоблаб чиқсак, натижада бундай ёзишимиз мумкин:

$$
\left[\nabla \boldsymbol{a}\right] = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.
$$

Ўнг томондаги ифода вектор уюрмасининг бизга маълум Декарт ифодасидир.

Потенциал векторнинг дивергенциясини набла орқали ёзиб кўрсатайлик. (33.5) ва (33.6) га мувофиқ:

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla \operatorname{grad} \varphi) = (\nabla\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi.
$$

Иккинчи томондан:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= (\nabla \operatorname{grad} \varphi) = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \\
&= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\right) + \\
&+ \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) + \\
&+ \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \left(\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \left(\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right).
\end{aligned}
$$

Масалан, тўртинчи ҳад учун:

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) &= \left(\boldsymbol{i}, \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\right]\right) = \left(\boldsymbol{i}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\boldsymbol{j}\right) + \left(\boldsymbol{i}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

чунки

$$
\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\right) = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} = 0.
$$

Ёки, айтайлик, бешинчи ҳад учун:

$$\left(j\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}j\right)=\left(j, \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}j\right]\right)=\left(j, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}j\right)+\left(j, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial j}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(j\,j\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(j\frac{\partial j}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

чунки,

$$\left(jj\right)=1 \text{ ва } \frac{\partial j}{\partial y}=0.$$

Қолган қавслардаги ифодаларни ҳам шунингдек ҳисоблаб чиқсак:

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{33.13}$$

булади, бу ерда:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{33.14}$$

(30.8) ва (30.9) да ифодаланган лапласиан билан танишган эдик:

$$\Delta\,\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi,\ \ \Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Шундай қилиб:

$$\Delta=\nabla^2. \tag{33.15}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{33.16}$$

Айтилганлардан равшанки, $\nabla^2\varphi\neq(\nabla\varphi)^2$, яъни $\nabla^2\varphi$ ни $(\nabla\varphi)^2$ дан фарқ қилиш керак.

Лапласианни векторга ишлатиш мумкин:

$$\Delta\,\boldsymbol{a}=\nabla^2\boldsymbol{a} \tag{33.17}$$

ёки Декарт координаталарида:

$$\Delta\boldsymbol{a}=\nabla^2\boldsymbol{a}=\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial z}. \tag{33.18}$$

Албатта, $\nabla^2\boldsymbol{a}$ ни $(\nabla\boldsymbol{a})^2$ дан фарқ қилиш лозим: $\nabla^2\boldsymbol{a}$ вектор, $(\nabla\boldsymbol{a})^2$ эса скалярдир.

Набла билан ундан чапда турган ихтиёрий $\boldsymbol{a}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси $(\boldsymbol{a}\,\nabla)$ янги скаляр оператор беради. Бу дифференциаллаш операторини скаляр функцияга ёки вектор функцияга ишлатиш мумкин. Даставвал скаляр функцияга ишлатайлик:

$$(\boldsymbol{a}\,\nabla)\,\varphi=(\boldsymbol{a}\,\nabla\,\varphi)=(\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi).$$

Вектор йўналишининг бирлик векторини l^0 десак, $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{l}^0$ бўлади, демак:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\varphi = a\,(\boldsymbol{l}^0 \operatorname{grad}\varphi).$$

Скаляр функция градиенти билан шу функциянинг бирор йўналиш бўйича ҳосиласи орасидаги боғланиш бизга маълум: $(\boldsymbol{l}^0\, grad\, \varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial l}$. Шундай қилиб:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\varphi = a\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \tag{33.19}$$

Хуллас, скаляр оператор $(\boldsymbol{a}\nabla)$ ни ихтиёрий скаляр функция φ га ишлатиш $\boldsymbol{a}$ вектор модули билан шу вектор йўналиши бўйича олинган скаляр функция ҳосиласининг ўзаро кўпайтмасига эквивалентдир.

Энди скаляр дифференциаллаш оператори $(\boldsymbol{a}\nabla)$ ни бирор ихтиёрий $\boldsymbol{b}$ векторга ишлатиб кўрайлик.

Декарт ортлари ўзгармас булганлигидан уларга нисбатан скаляр дифференциаллаш оператори $(\boldsymbol{a}\nabla)$ ни ишлатиш натижасида ноль чиқади. Демак:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\nabla)(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) =$$
$$= (\boldsymbol{a}\nabla)b_x\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{a}\nabla)b_y\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{a}\nabla)b_z\boldsymbol{k}.$$

Аммо (33.19) га мувофиқ:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)b_x = a\frac{\partial b_x}{\partial l},\ (\boldsymbol{a}\nabla)b_y = a\frac{\partial b_y}{\partial l},\ (\boldsymbol{a}\nabla)b_z = a\frac{\partial b_z}{\partial l}.$$

У вақтда:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} = \left(a\frac{\partial b_x}{\partial l}\boldsymbol{i} + a\frac{\partial b_y}{\partial l}\boldsymbol{j} + a\frac{\partial b_z}{\partial l}\boldsymbol{k}\right) =$$
$$= a\frac{\partial}{\partial l}\left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right)$$

ёки

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} = a\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial l} \tag{33.20}$$

бўлади. *Бу ердаги* $\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial l}$ *ифода* $\boldsymbol{b}$ *векторнинг* $\boldsymbol{a}$ *вектор йўналиши бўйича, яъни бирлик вектор* $\boldsymbol{l}^0$ *билан аниқланувчи йўналиш бўйича олинган ҳосиласи деб юритилади:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta l}. \tag{33.21}$$

Бирлик вектор l^0 йўналишидаги чексиз яқин икки нуқтага $\boldsymbol{b}$ векторнинг мос келган орттирмаси (33.21) формулада $\Delta \boldsymbol{b}$ орқали белгиланди. Таърифга мувофиқ, $\boldsymbol{b}$ вектордан $\boldsymbol{a}$ вектор бўйича олинган ҳосила $\frac{\partial b}{\partial l}$ нинг йўналиши $\boldsymbol{b}$ вектор йўналишидан ҳам, $\boldsymbol{a}$ вектор йўналишидан ҳам фарқ қилади ва вектор ўзгариши $\Delta \boldsymbol{b}$ нинг лимит йўналиши билан бир йўналишда бўлади. *$\boldsymbol{b}$ векторнинг бирлик вектор l^0 билан аниқланган йўналишда қандай суръат билан ўзгаришини ана шу $\frac{\partial b}{\partial l}$ ҳосила ифодалайди.*

Шундай қилиб, (33.20) га мувофиқ, скаляр оператор $(\boldsymbol{a}\nabla)$ ни ихтиёрий вектор функция $\boldsymbol{b}$ га ишлатиш $\boldsymbol{a}$ вектор модули билан шу вектор йўналиши бўйича олинган вектор функция $\boldsymbol{b}$ ҳосиласининг кўпайтмасига эквивалентдир. *Одатда, $(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b}$ ифода $\boldsymbol{b}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор бўйича градиенти дейилади.* (33.20) га мувофиқ, $\boldsymbol{b}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор бўйича градиенти $\boldsymbol{b}$ векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор йўналиши бўйича олинган ҳосиласи билан $\boldsymbol{a}$ вектор модули орасидаги кўпайтмага тенгдир.

Набла оператори ёрдами билан уюрманинг (33.10) ифодасини детерминант шаклида ёзиш мумкин:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \tag{33.22}$$

бу ерда $\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}$ деб тушуниш керак ва ҳоказо.

34. ФАЗОВИЙ ҲОСИЛАЛАР УЧУН БАЪЗИ МУҲИМ ФОРМУЛАЛАР

Майдон назариясидаги энг муҳим фазовий ҳосилаларнинг набла орқали ифодаси бизга маълум:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi. \tag{34.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a}). \tag{34.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}]. \tag{34.3}$$

Лапласиан Δ учун:

$$\Delta = \nabla^2. \tag{34.4}$$

Шулардан фойдаланиб, майдон назариясида кўп ишлатиладиган бир неча муҳим формулаларни, шартли равишда бўлсада, аммо жуда тез ва қулайгина келтириб чиқариш мумкин. Аралаш кўпайтма ва икки қайтали вектор кўпайтма учун бундай бўлади:

$$(a\,[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]). \tag{34.5}$$

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ab}). \tag{34.6}$$

1. Вектор уюрмасининг уюрмасини набла орқали ёзайлик:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla \operatorname{rot}\boldsymbol{a}] = [\nabla[\nabla \boldsymbol{a}]].$$

(34.6) га мувофиқ:

$$[\nabla[\nabla \boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla \boldsymbol{a}) - (\nabla\nabla)\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla \boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a} =$$

$$= \nabla \operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}.$$

Натижада:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}. \tag{34.7}$$

Юқорида келтирилган формула ва мисолларда биз набланинг биттагина функцияга ишлатилишини кўрдик. Энди набланинг функциялар кўпайтмасига ишлатилишини текшириб чиқайлик. Наблани бирор функцияга ишлатиш аслида шу функцияни мос равишда дифференциаллаш амали эканлигини биламиз. Икки функция кўпайтмасини дифференциаллаш қоидаси математик анализдан маълум:

$$d(\psi_1\psi_2) = \psi_2\, d\psi_1 + \psi_1\, d\psi_2,$$

яъни биринчи функция дифференциалланганда иккинчи функция ўзгармас деб, иккинчи функция дифференциалланганда биринчи функция ўзгармас деб қаралади, сўнгра шу топилган ифодалар ўзаро қўшилади. Агар вақтинча ўзгармас деб қаралган функциянинг ўнг ёнбошига c индекс қўйиб ёзсак, ҳозиргина айтилганларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d(\psi_1\psi_2) = d(\psi_1\psi_{2c}) + d(\psi_{1c}\psi_2) = \psi_{2c}\, d\psi_1 + \psi_{1c}\, d\psi_2.$$

Ўзидан чап томонда турган функцияларга дифференциаллаш оператори таъсир қилмайди, шунинг учун ўзгармаслик индекси c ни энди ёзишга ҳожат йўқ. Шундай қилиб:

$$d(\psi_1\psi_2) = \psi_2\, d\psi_1 + \psi_1\, d\psi_2.$$

Шу айтилганларни назарда тутиб, бир неча мисоллар кўриб чиқайлик.

2. Икки скаляр функция кўпайтмасининг градиентини набла орқали ёзамиз:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi_c\psi) + \nabla(\psi\psi_c).$$

Ўзгармас миқдорларни набланинг чап томонига ўтказиш мумкин:

$$\nabla(\varphi_c\psi) = \varphi_c\nabla\psi = \varphi\nabla\psi,$$

$$\nabla(\varphi\psi_c) = \psi_c\nabla\varphi = \psi\nabla\varphi.$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

ёки

$$\operatorname{grad}(\varphi\,\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi. \tag{34.8}$$

3. Скаляр функция билан вектор функция кўпайтмасининг дивергенциясини набла орқали ёзайлик:

$$\operatorname{div}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = (\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}) = (\nabla, \varphi_c\boldsymbol{a}) + (\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}_c).$$

Ўнг томондаги биринчи ҳадда турган ўзгармас ҳисобланган φ_c ни набланинг чап томонига ўтказиш мумкин, демак:

$$(\nabla, \varphi_c\,\boldsymbol{a}) = (\varphi_c\,\nabla\,\boldsymbol{a}) = \varphi_c(\nabla\,\boldsymbol{a}) = \varphi(\nabla\,\boldsymbol{a}).$$

Ўнг томондаги иккинчи ҳад эса:

$$(\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}_c) = (\nabla\,\varphi, \boldsymbol{a}_c) = (\boldsymbol{a}_c\,\nabla\,\varphi) = (\boldsymbol{a}\,\nabla\,\varphi).$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{div}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = \varphi\,(\nabla\,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\,\nabla\,\varphi)$$

ёки

$$\operatorname{div}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} \operatorname{grad}\varphi). \tag{34.9}$$

4. Скаляр функция билан вектор функция кўпайтмасининг уюрмасини набла орқали ёзамиз:

$$\operatorname{rot}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = [\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}] = [\nabla, \varphi_c\,\boldsymbol{a}] + [\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}_c].$$

Ўнг томондаги биринчи ҳад:

$$[\nabla, \varphi_c\,\boldsymbol{a}] = [\varphi_c\,\nabla\,\boldsymbol{a}] = \varphi_c[\nabla\,\boldsymbol{a}] = \varphi\,[\nabla\,\boldsymbol{a}].$$

Ўнг томондаги иккинчи ҳад эса:

$$[\nabla, \varphi\,\boldsymbol{a}_c] = [\nabla\,\varphi, \boldsymbol{a}_c] = [\nabla\,\varphi\,\boldsymbol{a}].$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{rot}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = \varphi\,[\nabla\,\boldsymbol{a}] + [\nabla\,\varphi\,\boldsymbol{a}]$$

ёки

$$\operatorname{rot}(\varphi\,\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}]. \tag{34.10}$$

5. Икки вектор вектор кўпайтмасининг дивергенциясини набла орқали ёзайлик:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = (\nabla\,[\boldsymbol{ab}]) = (\nabla\,[\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}]) + (\nabla\,[\boldsymbol{ab}_c]).$$

Вектор кўпайтманинг антикоммутативлик хоссасига биноан $[\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{ba}_c]$, демак:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = -(\nabla\,[\boldsymbol{ba}_c]) + (\nabla\,[\boldsymbol{ab}_c]).$$

(34.5) га мувофиқ:

$$(\nabla\,[\boldsymbol{ba}_c]) = (\boldsymbol{a}_c\,[\nabla\,\boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{a}\,[\nabla\,\boldsymbol{b}]),$$
$$(\nabla\,[\boldsymbol{ab}_c]) = (\boldsymbol{b}_c\,[\nabla\,\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{b}\,[\nabla\,\boldsymbol{a}]).$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = -(\boldsymbol{a}[\nabla \boldsymbol{b}]) + (\boldsymbol{b}[\nabla \boldsymbol{a}])$$

ёки

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}). \qquad (34.11)$$

6. Икки вектор вектор кўпайтмасининг уюрмасини набла орқали ёзайлик:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = [\nabla[\boldsymbol{ab}]] = [\nabla[\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}]] + [\nabla[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_c]].$$

(34.6) га мувофиқ:

$$[\nabla[\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}]] = \boldsymbol{a}_c(\nabla \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}_c\nabla)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\nabla \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b},$$
$$[\nabla[\boldsymbol{ab}_c]] = (\boldsymbol{b}_c\nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}_c(\nabla \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\nabla \boldsymbol{a}).$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a}(\nabla\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\nabla \boldsymbol{a})$$

ёки

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \qquad (34.12)$$

7. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси градиентини набла орқали ёзайлик:

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = \nabla(\boldsymbol{ab}) = \nabla(\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}) + \nabla(\boldsymbol{ab}_c).$$

(34.6) га мувофиқ:

$$[\boldsymbol{a}_c[\nabla\boldsymbol{b}]] = \nabla(\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}_c\nabla)\boldsymbol{b},$$
$$[\boldsymbol{b}_c[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}_c\nabla)\boldsymbol{a}.$$

Биринчи ифодадан $\nabla(\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b})$ ни, иккинчисидан эса $\nabla(\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{a})$ ни аниқлаймиз:

$$\nabla(\boldsymbol{a}_c\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a}_c[\nabla\boldsymbol{b}]] + (\boldsymbol{a}_c\nabla)\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}[\nabla\boldsymbol{b}]] + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b},$$
$$\nabla(\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{b}_c[\nabla\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{b}_c\nabla)\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}[\nabla\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}.$$

Буларни ўз жойига олиб бориб қўямиз:

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = [\boldsymbol{a}[\nabla\boldsymbol{b}]] + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{b}[\nabla\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}$$

ёки

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}. \qquad (34.13)$$

Қисман $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ учун:

$$\operatorname{grad}(a^2) = 2[\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + 2(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{a}$$

ёки

$$\operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{a}. \qquad (34.14)$$

Текширилаётган мисоллар набла билан жуда эҳтиёт бўлиб иш кўриш лозим эканлигидан дарак беради. Акс ҳолда катта хатоларга йўл қўйилиши мумкин. Шуниси муҳимки, *набла ҳақиқий вектор эмас, набла фақатгина символик вектордир.* Шу сабабли, масалан, вектор уюрмасининг набла орқали ёзилиши (34.3) га асосланиб, вектор уюрмаси rot $\boldsymbol{a}$ га набла ∇ перпендикуляр бўлади дейиш ярамайди. Худди шунингдек, ўша формулага асосланиб, ихтиёрий вектор $\boldsymbol{a}$ ва унинг уюрмаси rot $\boldsymbol{a}$ албатта ўзаро перпендикуляр бўлади дейишга ҳам асос йўқ. Аммо хусусий ҳолларда вектор ва унинг уюрмаси бир-бирига перпендикуляр бўлиши мумкин.

Агар бирор $\boldsymbol{a}$ векторнинг дивергенцияси нолга тенг (div $\boldsymbol{a}=0$) бўлса, (34.2) га мувофиқ, $\boldsymbol{a}$ векторга набла ∇ перпендикуляр бўлади деб айтиш ярамайди: йўналиши ва узунлиги аниқланмаган символик вектор ҳақиқий векторга перпендикуляр дейиш асоссиздир. Албатта, бу параграфда набла ишлатиш йўли билан келтириб чиқарилган формулаларни бевосита аналитик усуллар ёрдамида ҳам топиш мумкин эди.

Юқорида наблани майдон функцияларига ишлатиш мисоллари билан танишиб чиқдик. *Майдон функцияларига набланинг бир карра ишлатилиши биринчи тартибли дифференциал вектор операция деб аталиши мумкин.* Бизга илгаридан маълум градиент, дивергенция ва уюрма шунга мисоллардир. *Майдон функцияларига набланинг икки карра ишлатилишини иккинчи тартибли дифференциал вектор операция десак бўлади.* Иккинчи тартибли дифференциал вектор операциялар, албатта, бештагина бўлиши мумкин, чунки div $\boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a})$ дан фақат градиент олиниши мумкин, grad $\varphi = \nabla \varphi$ дан дивергенция ва уюрма олиниши мумкин, ниҳоят, rot $\boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}]$ дан дивергенция ва уюрма олиниши мумкин:

$$\begin{aligned}
&\nabla(\nabla \boldsymbol{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a},\\
&(\nabla\nabla\varphi) - \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi,\\
&[\nabla\nabla\varphi] = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi,\\
&(\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\\
&[\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

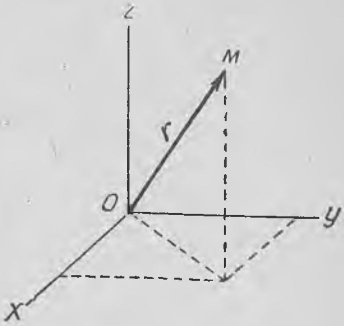
Худди шу тарзда давом этиб, янада *юқори тартибли дифференциал вектор операциялар* ҳосил қилиш мумкин.

35. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ КООРДИНАТАЛАР

Декарт системасининг ўқлари тўғри чизиқли ва ўзаро перпендикуляр, яъни x, y, z координаталар тўғри чизиқли ортогонал координаталардир. Фазо нуқтасини биз ҳозиргача шу туғри чизиқли ортогонал координаталар билангина аниқлаб келдик. Бу координаталар нуқта радиус-векторининг Декарт компонентларидир (138- расм).

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{35.1}$$

Баъзи масалаларни текширишда нуқтани Декарт координаталари билан аниқлаш ортиқча қулайсизлик туғдиради. *Фазо нуқтасини аниқлаш учун текширилаётган масаланинг табиатига қараб олинган учта q_1, q_2, q_3 миқдор ишлатишга тўғри келади. Фазо нуқтасини аниқловчи q_1, q_2, q_3 миқдорлар нуқтанинг эгри чизиқли координаталари дейилади.*



138- расм.

Нуқтанинг эгри чизиқли координаталари билан Декарт координаталари орасида қуйидаги боғланиш бор:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_2(x, y, z) \end{array}\right\}, \tag{35.2}$$

ва аксинча:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ y = y(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ z = z\,(q_1,\ q_2,\ q_3) \end{array}\right\} \tag{35.3}$$

ёки

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{35.4}$$

q_1, q_2, q_3 функциялар учун изосиртлар:

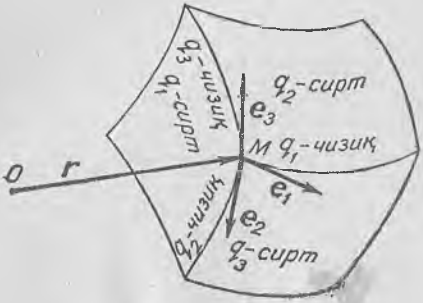
$$q_1 = (x,\ y,\ z) = C_1,$$
$$q_2 = (x,\ y,\ z) = C_2,$$
$$q_3 = (x,\ y,\ z) = C_3$$

бўлади. *Бу C_1, C_2, C_3 константаларга турли қийматлар бериб, учта оила ташкил этган турли изосиртларни топамиз. Бу изосиртлар координат сиртлар дейилади.*

Фазонинг ихтиёрий нуқтасида ҳар оилага тегишли биттадан изосирт ўтсин. Демак, фазонинг ихтиёрий нуқтасидан учта координат сирт ўтади. Бу координат сиртларнинг ҳар иккитаси бир-бирини кесади. *Икки координат сиртнинг бир-бирини кесиш чизиғи координат чизиқ дейилади* (139- расм). $q_i = C_i$ координат сирт ва q_i координат чизиқ расмда q_i — сирт ва q_i — чизиқ деб кўрсатилди.

Масалан, $q_1 = C_1$ ва $q_2 = C_2$ координат сиртларнинг бир-бирини кесиш чизиғида q_1, q_2 ўзгармайди, q_3 эса ўзгаради.

M нуқтада координат чизиқларга уринма ва эгри чизиқли координаталарнинг орта бораётган томонларига қаратилган бирлик векторларни e_1, e_2 ва e_3 орқали белгилайлик. *Агар бу бирлик векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, эгри чизиқли координаталар ортогонал эгри чизиқли координаталар дейилади.* Бундан кейин биз, тажрибада учрайдиган муҳим татбиқларни назарда тутиб, фақат ортогонал эгри чизиқли координаталар билангина чекланамиз.



139- расм.

Ортогонал эгри чизиқли координаталар таърифига мувофиқ:

$$(e_i e_k) = \delta_{ik} \tag{35.5}$$

бўлади, бу ерда i билан k индекслар бирдан учгача ўзгаради. Шартли символ δ_{ik} эса $i = k$ бўлганда бирга тенг, $i \neq k$ бўлганда эса нолга тенг, яъни:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \tag{35.6}$$

Аниқлик учун e_1, e_2, e_3 векторлар ориентациясини ўнг ориентация деб олайлик. Бирлик векторлар учун:

$$\left.\begin{aligned} [e_1 e_2] = e_3 \\ [e_2 e_3] = e_1 \\ [e_3 e_1] = e_2 \end{aligned}\right\} \tag{35.7}$$

$$(e_1 [e_2 e_3]) = 1 \tag{35.8}$$

булади.

Ҳар қандай векторнинг компланар бўлмаган учта вектор бўйича ажратилиши бизга маълум. Демак:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3. \tag{35.9}$$

Бу ерда a_1, a_2, a_3 вектор a нинг ортогонал эгри чизиқли компонентлари дейилади. Улар учун, (35.5) га биноан:

$$a_1 = (a\, e_1),$$
$$a_2 = (a\, e_2),$$
$$a_3 = (a\, e_3)$$

бўлади.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ эгри чизиқли координаталарнинг функцияси (35.4) бўлганлигидан:

$$d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}dq_3 \tag{35.10}$$

булади.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ дан q_1 бўйича хусусий $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$ ҳосила олинганда q_2, q_3 ўзгармас деб ҳисобланади. Демак, фақат q_1 нинг ўзгариши билангина боғланган радиус-векторнинг охири q_1 координат чизиқ бўйичагина ўзгаради, яъни бу ерда q_1 координат чизиқ радиус-векторнинг годографидир. Шунинг учун $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$ векторнинг йўналиши q_1 координат чизиқнинг уринма йўналиши билан бир хилдир. Натижада бундай ёзамиз:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|\boldsymbol{e}_1.$$

Худди шунингдек:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|\boldsymbol{e}_2,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|\boldsymbol{e}_3.$$

Буларни (35.10) га қўямиз:

$$d\boldsymbol{r}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|dq_1\boldsymbol{e}_1+\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|dq_2\boldsymbol{e}_2+\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|dq_3\boldsymbol{e}_3. \tag{35.11}$$

(35.1) ва (35.3) га мувофиқ:

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$
$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$
$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Юқоридаги $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}$ векторлар *координат векторлар дейилади.* Координат векторларнинг модулларини ифодаловчи махсус белгилар киритайлик:

$$\left.\begin{aligned}
H_1&=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},\\
H_2&=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},\\
H_3&=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{35.12}$$

Бу H_1, H_2, H_3 миқдорлар Ламэ коэффициентлари дейилади (35.12) ни (35.11) га қўямиз:

$$dr = H_1dq_1e_1 + H_2dq_2e_2 + H_3dq_3e_3, \tag{35.13}$$

бу ердаги H_1dq_1, H_2dq_2, H_3dq_3 сонлар радиус-вектор элементи dr нинг эгри чизиқли компонентларидир.

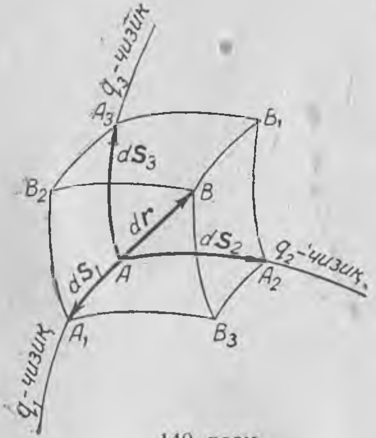
Радиус-вектор элементи dr нинг модулини ds орқали белгилайлик: $|dr| = ds$, $ds^2 = (dr)^2$. (35.5) ва (35.13) га биноан:

$$ds^2 = H_1^2dq_1^2 + H_2^2dq_2^2 + H_3^2dq_3^2 \tag{35.14}$$

бўлади. q_1, q_2, q_3 координат чизиқлар бўйича нуқтанинг элементар силжиш векторларини ds_1, ds_2, ds_3 орқали белгиласак, (35.13) дан кўрамизки,

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= ds_1e_1 = H_1dq_1e_1, \\ ds_2 &= ds_2e_2 = H_2dq_2e_2, \\ ds_3 &= ds_3e_3 = H_3dq_3e_3 \end{aligned}\right\} \tag{35.15}$$

бўлади.



140- расм.

Бир-бирига чексиз яқин турган иккита A, B нуқтани олайлик (140- расм).

A нуқтадан ўтган учта координат сирт билан B нуқтадан ўтган учта координат сирт чексиз кичик эгри чизиқли параллелепипед ҳосил қилади. Бу элементар параллелепипеднинг қирралари (35.15) га биноан:

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= H_1dq_1 \\ ds_2 &= H_2dq_2 \\ ds_3 &= H_3dq_3 \end{aligned}\right\} \tag{35.16}$$

бўлади.

Элементар параллелепипед ёқларининг юзлари:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_1 &= |[ds_2ds_3]| = H_2H_3dq_2dq_3, \\ d\sigma_2 &= |[ds_3ds_1]| = H_3H_1dq_3dq_1, \\ d\sigma_3 &= |[ds_1ds_2]| = H_1H_2dq_1dq_2. \end{aligned}\right\} \tag{35.17}$$

Элементар параллелепипеднинг ҳажми (35.15) ва (35.8) га биноан:

$$dV = (ds_1[ds_2ds_3]) = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3 \tag{35.18}$$

бўлади.

36. ФАЗОВИЙ ҲОСИЛАЛАРНИНГ ОРТОГОНАЛ ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ КООРДИНАТАЛАРДА ЁЗИЛИШИ

1. Эгри чизиқли координаталарнинг скаляр функцияси $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ нинг градиентини текширайлик.

Скаляр функциянинг бирор йўналиш бўйича ҳосиласи (28.3) бу скаляр функция градиентининг шу йўналишдаги проекциясига тенглигини биламиз:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = (\mathrm{grad}\varphi l^0).$$

(35.15) га биноан:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = (\mathrm{grad}\varphi e_1) = \mathrm{grad}_{q_1}\varphi,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = (\mathrm{grad}\varphi e_2) = \mathrm{grad}_{q_2}\varphi,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s_3} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} = (\mathrm{grad}\varphi e_3) = \mathrm{grad}_{q_3}\varphi\end{aligned}\right\} \tag{36.1}$$

бўлганлиги учун:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}e_3 \tag{36.2}$$

бўлади.

2. Эгри чизиқли координаталарнинг вектор функцияси бўлган $a(q_1, q_2, q_3)$ нинг дивергенциясини текширайлик. Вектор дивергенциясининг таърифига кўра:

$$\mathrm{div}\, a = \lim_{V\to 0}\frac{\oint (a d\sigma)}{V} \tag{36.3}$$

бўлади. 140- расмдаги элементар параллелепипеднинг ҳажми V бўлсин. Бизни A нуқтадаги вектор дивергенцияси қизиқтиради.

Параллелепипеднинг ёпиқ сирти орқали векторнинг тўла оқими унинг айрим ёқларидаги вектор оқимларининг йиғиндисига тенг. Биз даставвал $AA_2B_1A_3A$ ёқ билан $A_1B_3BB_2A_1$ ёқ орқали вектор оқимини топайлик: $AA_2B_1A_3A$ ёқнинг юз нормали ds_1 га қарама-қарши қаратилган, демак, $AA_2B_1A_3A$ нинг юз вектори $[ds_3ds_2]$ бўлади. Юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар назарга олинмаса, $AA_2B_1A_3A$ ёқ орқали вектор оқими бундай бўлади:

$$\int\limits_{AA_2B_1A_3A} (a d\sigma) = (a\,[ds_3ds_2])$$

ёки (35.15) ва (35.7) га биноан:

$$\int\limits_{AA_2B_1A_3A} (a d\sigma) = (a\,[e_3e_2])H_3H_2dq_3dq_2 = -(a\,[e_2e_3])\,H_2H_3dq_2dq_3 =$$
$$= -(ae_1)H_2H_3dq_2dq_3 = -a_1H_2H_3dq_2dq_3. \tag{36.4}$$

$AA_2B_1A_3A$ ёқдан $A_1B_3BB_2A_1$ ёққа ўтишда q_2 билан q_3 ўзгармайди, фақат q_1 ўзгаради. Шунинг учун, юқори тартибли чексиз кичик миқдорларга эътибор қилинмаса, $A_1B_3BB_2A_1$ ёқ орқали вектор оқими:

$$\int\limits_{A_1B_3BB_2A_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\,[d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{s}_3]) + \frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{a}\,[d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{s}_3])\, dq_1$$

бўлади ёки (35.15) ва (35.7) га биноан:

$$\int\limits_{A_1B_3BB_2A_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])\, H_2H_3dq_2dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}\{(\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])\, H_2H_3dq_2dq_3\}\, dq_1 =$$
$$= (\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_1)\, H_2H_3dq_2dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}\{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_1)\, H_2H_3dq_2dq_3\}\, dq_1 =$$
$$= a_1H_2H_3dq_2dq_3\, \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3)\, dq_1dq_2dq_3. \tag{36.5}$$

(36.4) га (36.5) га биноан, $AA_2B_1A_3A$ ва $A_1B_3BB_2A_1$ ёқлар орқали вектор оқимларининг йиғиндиси қуйидагича ёзилади:

$$\int\limits_{AA_2B_1A_3A} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) + \int\limits_{A_1B_3BB_2A_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3)\, dq_1dq_2dq_3.$$

Шунга ўхшаш, қолган икки жуфт ёқ орқали ҳам вектор оқимларининг йиғиндиси:

$$\int\limits_{AA_1B_2A_3A} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) + \int\limits_{A_2B_3BB_1A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1)\, dq_1dq_2dq_3,$$

$$\int\limits_{AA_1B_3A_2A} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) + \int\limits_{A_3B_2BB_1A_3} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2) dq_1dq_2dq_3$$

бўлади. Сўнгги уч ифоданинг йиғиндиси элементар параллелепипеднинг ёпиқ сирти орқали векторнинг тўла оқимини беради:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{\sigma}) = \left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right\} dq_1dq_2dq_3.$$

Элементар параллелепипед ҳажми (35.18) га мувофиқ $V = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$ бўлади. Шундай қилиб, (36.3) га биноан, тубандагини топамиз:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right\}. \tag{36.6}$$

3. Потенциал вектор $a = \mathrm{grad}\,\varphi$ учун $\mathrm{div}\,a = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \Delta\varphi$. (36.6) даги a ўрнига $\mathrm{grad}\,\varphi$ ни қўйсак:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathrm{grad}_{q_1}\varphi\cdot H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\mathrm{grad}_{q_2}\varphi\cdot H_3H_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(\mathrm{grad}_{q_3}\varphi\cdot H_1H_2)\right\}$$

келиб чиқади. Градиент компонентларини (36.1) дан олиб, юқоридаги формулага қўямиз:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right\}. \qquad (36.7)$$

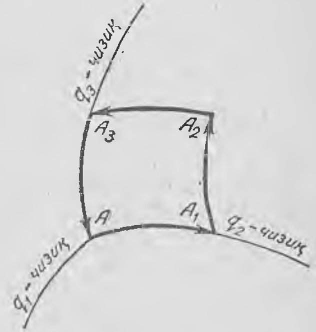
4. Эгри чизиқли координаталарнинг вектор функцияси бўлган $a(q_1, q_2, q_3)$ нинг уюрмасини текширайлик.

Вектор уюрмасининг нормал компоненти учун берилган (31.3) интеграл таърифини эслайлик:

$$\mathrm{rot}_n a = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint(a\,ds)}{\sigma}, \qquad (36.8)$$

бу ерда ds — контур элементи, σ — шу контур билан чегараланган юз.

Вектор уюрмасининг q_1-чизиқ йўналишидаги компоненти $\mathrm{rot}_{q_1} a$ ни текшириш учун контур сифатида 141-расмда кўрсатилган элементар эгри чизиқли тўғри тўртбурчакни олайлик.



141- расм.

Бизни A нуқтадаги вектор уюрмаси қизиқтиради. Расмда кўрсатилган контур билан чегараланган юз нормалининг йўналиши q_1-чизиқнинг бирлик вектори e_1 йўналиши билан бир хил бўлади. Шунинг учун контур бўйича юриш йўналиши расмдагидек қилиб олинди.

Бундай ёзишимиз мумкин:

$$\oint(a\,ds) = \int_{AA_1}(a\,ds) + \int_{A_1A_2}(a\,ds) + \int_{A_2A_3}(a\,ds) + \int_{A_3A}(a\,ds). \qquad (36.9)$$

Юқори тартибли чексиз кичик миқдорларни эътиборсиз қолдириб, ўнг томондаги интегралларни ҳисоблаб чиқайлик.

Ўнг томондаги биринчи ҳад (35.15) га биноан:

$$\int_{AA_1}(a\,ds) = (a\,ds_2) = (ae_2)H_2dq_2 = a_2H_2dq_2. \qquad (36.10)$$

Ўнг томондаги тўртинчи ҳад, ўша (35.15) га биноан:

$$\int_{A_3A} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = -\int_{AA_3} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = -(\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}_3) = -(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3) H_3 dq_3 =$$

$$= -a_3 H_3 dq_3 \tag{36.11}$$

бўлади.

(36.9) нинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад $\int\limits_{A_1A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s})$ ни ҳисоблашда сўнгги (36.11) даги $\int\limits_{AA_3} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s})$ ҳадга нисбатан q_1 ва q_3 ўзгармайди, фақат q_2 ўзгаради; шунинг учун:

$$\int_{A_1A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = a_3 H_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3 dq_3)\, dq_2 \tag{36.12}$$

бўлади. (36.9) нинг ўнг томонидаги учинчи ҳад учун бундай ёзамиз:

$$\int_{A_2A_3} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = -\int_{A_3A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}).$$

Интеграл $\int\limits_{A_3A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s})$ ни ҳисоблашда (36.10) даги интеграл $\int\limits_{AA_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s})$ га нисбатан q_1 ва q_2 ўзгармайди, фақат q_3 ўзгаради, демак:

$$\int_{A_3A_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = a_2 H_2 dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2 dq_2)\, dq_3$$

ёки

$$\int_{A_2A_3} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = -a_2 H_2 dq_2 - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2 dq_2)\, dq_3 \tag{36.13}$$

бўлади. Топилган натижаларни (36.9) даги ўз жойларига олиб бориб қўямиз:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{s}) = \left\{\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2)\right\} dq_2 dq_3.$$

Буни (36.8) га қўйсак ва элементар эгри чизиқли тўғри тўртбурчак юзи $\sigma = |[d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{s}_3]| = H_2 H_3 dq_2 dq_3$ эканлигини эсласак, тубандагини топамиз:

$$\operatorname{rot}_{q_1} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2)\right\}. \tag{36.14}$$

Вектор уюрмасининг қолган икки компонентини ҳам худди шундай йўл билан чиқариш мумкин:

$$\operatorname{rot}_{q_2} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3 H_3)\right\}. \quad (36.15)$$

$$\operatorname{rot}_{q_3} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 H_1)\right\}. \quad (36.16)$$

Векторнинг уюрмасини топиш учун сўнгги ифодаларни тегишлича $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ га кўпайтириб, сўнгра уларнинг йиғиндисини олиш лозим:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2 H_2)\right\}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3 H_3)\right\}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 H_1)\right\}\boldsymbol{e}_3. \quad (36.17)$$

Юқорида айтилганларни конкретлаштириш учун ҳисобларда кўпроқ учраб турадиган сферик координаталар билан цилиндрик координаталарни кўриб чиқайлик.

37. ФАЗОВИЙ ҲОСИЛАЛАРНИНГ СФЕРИК КООРДИНАТАЛАРДА ЁЗИЛИШИ

Фазо нуқтасининг сферик координаталарини r, θ, φ орқали белгилайлик(142- расм), демак, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$.

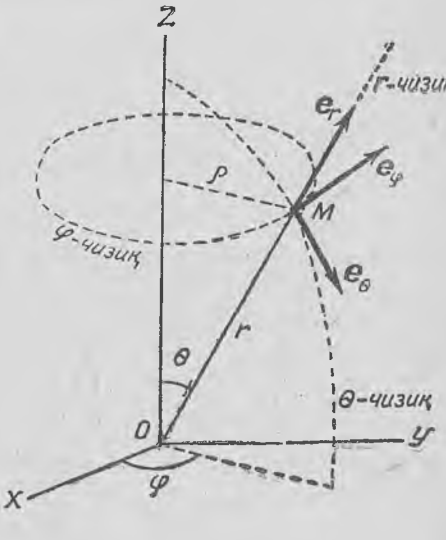
Фазонинг ҳамма нуқталарини аниқлаш учун r ни 0 дан ∞ гача, θ ни 0 дан π гача ва φ ни 0 дан 2π гача ўзгартамиз. x, y, z ни r, θ, φ орқали ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (37.1)$$

Координат сиртлар:

1) $q_1 = r = \text{const}$,
булар маркази O нуқтадаги сфералардир,

2) $q_2 = \theta = \text{const}$,



142- расм.

булар учлари O нуқтада ва умумий ўқи Oz бўлган ярим конус сиртлардир,

3) $q_3 = \varphi = \mathrm{const}$,

булар Oz уқ билан чегараланган ярим текисликлардир.

Координат чизиқлар:

1) $q_1 = r$ чизиқлар — булар $q_2 = \theta = \mathrm{const}$ ва $q_3 = \varphi = \mathrm{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари — радиуслардир,

2) $q_2 = \theta$ чизиқлар — булар $q_3 = \varphi = \mathrm{const}$ ва $q_1 = r = \mathrm{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари—меридианлардир,

3) $q_3 = \varphi$ чизиқлар — булар $q_1 = r = \mathrm{const}$ ва $q_2 = \theta = \mathrm{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари— параллеллардир.

142- расмдан кўрамизки:

$$ds_1 = ds_r = dr,\ ds_2 = ds_\theta = rd\theta,\ ds_3 = ds_\varphi = r\sin\theta\, d\varphi.$$

Бу ердан, (35.16) га биноан, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_r = 1, \\ H_2 &= H_\theta = r, \\ H_3 &= H_\varphi = r\sin\theta. \end{aligned} \tag{37.2}$$

Ламэ коэффициентларини, (35.12) га мувофиқ, (37.1) дан фойдаланиб топсак ҳам бўлар эди.

(37.2) ни (36.2) га қўйсак:

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{37.3}$$

(37.2) ни (36.6) га қўйсак:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(a_r r^2\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi r)\right\}$$

ёки

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{37.4}$$

(37.2) ни (36.7) га қўйсак:

$$\Delta F = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\right\}$$

ёки

$$\Delta F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} \tag{37.5}$$

бўлади. Лапласиан сферик координаталарда қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{37.6}$$

Сўнгги икки ҳад фақат бурчакларнинг ўзгаришига боғлиқдир. $r=1$ деб, шу сўнгги икки ҳадни манфий ишора билан олиб, Λ орқали белгилайлик:

$$\Lambda = -\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\right. \tag{37.7}$$

Бу ерда кўрсатилган оператор математик физикада катта аҳамиятга эга бўлиб, одатда, у Лежандр оператори дейилади.

(37.2) ни (36.17) га қўйсак:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi r\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\theta r)\right\}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r)-\frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r\sin\theta)\right\}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(a_\theta r)-\frac{\partial}{\partial\theta}(a_r)\right\}\boldsymbol{e}_\varphi$$

ёки

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\varphi)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right\}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{37.8}$$

келиб чиқади. (37.3) дан фойдаланиб, набланинг сферик координаталардаги ифодасини кўрсатишимиз мумкин:

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{37.9}$$

Набланинг шу шаклига асосланиб, фазовий ҳосилаларнинг сферик координаталарда ифодаланишини бевосита келтириб чиқариш мумкин эди. Бунинг учун (33.5), (33.6), (33.7) формулалардан фойдаланиш лозим. Лекин бу масалага бу ерда тўхтаб ўтирмаймиз.

38. ФАЗОВИЙ ҲОСИЛАЛАРНИНГ ЦИЛИНДРИК КООРДИНАТАЛАРДА ЁЗИЛИШИ

Фазо нуқтасининг цилиндрик координаталарини ρ, φ, z орқали белгилайлик (143- расм); демак, $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$.

Фазонинг ҳамма нуқталарини аниқлаш учун ρ ни 0 дан ∞ гача, φ ни 0 дан 2π гача ва z ни $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгартирамиз. x, y, z ни ρ, φ, z орқали ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{38.1}$$

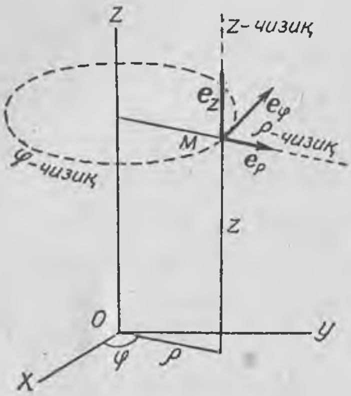
Координат сиртлар:

1) $q_1 = \rho = \text{const}$,

булар умумий ўқи Oz бўлган цилиндрлардир,

2) $q_2 = \varphi = \text{const}$,

булар Oz ўқ билан чегараланган ярим текисликлардир,



143- расм.

3) $q_3 = z = \text{const}$,

булар Oz ўққа перпендикуляр бўлган текисликлардир.

Координат чизиқлар:

1) $q_1 = \rho$ чизиқлар — булар $q_2 = \varphi = \text{const}$ ва $q_3 = z = \text{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари — Oz ўққа перпендикуляр радиуслардир,

2) $q_2 = \varphi$ чизиқлар — булар $q_3 = z = \text{const}$ ва $q_1 = \rho = \text{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари — марказлари Oz ўқда жойлашган ва шу ўққа перпендикуляр текисликда ётган айланалардир,

3) $q_3 = z$ чизиқлар — булар $q_1 = \rho = \text{const}$ ва $q_2 = \varphi = \text{const}$ координат сиртларнинг кесишган чизиқлари — Oz ўққа параллел тўғри чизиқлардир. 143- расмдан қуйидагиларни ёзамиз:

$$ds_1 = ds_\rho = d\rho,$$
$$ds_2 = ds_\varphi = \rho d\varphi,$$
$$ds_3 = ds_z = dz.$$

Бу ердан, (35.16) га биноан, қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_\rho = 1, \\ H_2 &= H_\varphi = \rho, \\ H_3 &= H_z = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (38.2)$$

(35.12) га мувофиқ, Ламэ коэффициентларини (38.1) дан фойдаланиб топсак ҳам бўлар эди.

(38.2) ни (36.2) га қўйсак:

$$\text{grad}\, F = \frac{\partial F}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} e_r. \qquad (38.3)$$

(38.2) ни (36.6) га қўйсак:

$$\text{div}\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}(a_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(a_z \rho)\right\}$$

ёки

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{38.4}$$

(38.2) ни (36.7) га қўйсак:

$$\Delta F = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\}$$

ёки

$$\Delta F = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{38.5}$$

бўлади. Демак, лапласиан цилиндрик координаталарда қуйидагича ёзилади:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{38.6}$$

(38.2) ни (36.17) га қўйсак:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(\boldsymbol{a}_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{a}_\varphi\rho)\right\}\boldsymbol{e}_\rho + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(a_\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(a_z)\right\}\boldsymbol{e}_\varphi + \\ + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\varphi\rho) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\rho)\right\}\boldsymbol{e}_z$$

ёки

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_\varphi)\right\}\boldsymbol{e}_\rho + \left\{\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi + \\ + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\varphi - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_z \tag{38.7}$$

бўлади. (38.3) га биноан, цилиндрик координаталарда набла қуйидагича ёзилади:

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{38.8}$$

Фазовий ҳосилаларни цилиндрик координаталарда, (38.8) га биноан, бевосита ифодалаш мумкин. Бунинг учун фазовий ҳосилаларни набла орқали ифодаловчи (33.5), (33.6), (33.7) формулалардан фойдаланиш керак бўлади.

39. ГРИН ФОРМУЛАЛАРИ

Майдон назариясида учрайдиган баъзи муҳим дифференциал тенгламаларни текшириш учун махсус шаклларда ёзилган Гаусс—Остроградский формуласидан фойдаланишга тўғри келади.

Даставвал Гаусс — Остроградский формуласини эслайлик:

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \oint a_n dS. \tag{39.1}$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ ни тубандаги шаклда олайлик:

$$\boldsymbol{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi,$$

бу ерда φ, ψ функциялар ва уларнинг ҳосилалари майдоннинг чекли, бир қийматли ва узлуксиз функцияларидир, яъни стандарт шартлар номи билан юритилувчи шартларга бўйсунган функциялардир.

Сўнгги формулалардан кўрамизки, $a_n = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ва (34.9) га мувофиқ:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) + \\ + \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) + \varphi \Delta \psi.$$

Шуларга кўра, (39.1) бундай ёзилади:

$$\int \Big\{ (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) + \varphi \Delta \psi \Big\} dV = \oint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \qquad (39.2)$$

Қисман, $\varphi = \psi$ учун бу формула қуйидагича ёзилади:

$$\int \Big\{ (\operatorname{grad} \varphi)^2 + \varphi \Delta \varphi \Big\} dV = \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \qquad (39.3)$$

Агар (39.2) да φ ва ψ ўринлари алмаштирилса:

$$\int \Big\{ (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi) + \psi \Delta \varphi \Big\} dV = \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

булади. Сўнгги ифода билан (39.2) ифода айирмасини ёзайлик:

$$\int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, dV = \oint \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \qquad (39.4)$$

(39.2), (39.3) ва (39.4) ифодалар *Грин формулалари* дейилади. Бу формулалардан қандай фойдаланишни кўрсатиш учун бир муҳим масалани кўриб чиқайлик.

Майдоннинг бирор M нуқтасида φ функцияни аниқламоқчимиз. Майдондаги бошқа Q нуқта билан M нуқта орасидаги масофа r бўлсин. ψ функцияни $\frac{1}{r}$ га тенг қилиб олайлик:

$$\psi = \frac{1}{r}. \qquad (39.5)$$

Буни юқоридаги Грин формуласи (39.4) га қўйсак:

$$\int \left\{ \frac{\Delta \varphi}{r} - \varphi \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dV = \oint \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \qquad (39.6)$$

бўлади. Бу ердаги $\Delta \left(\frac{1}{r} \right)$ ни махсус қараб чиқмоқчимиз. Q билан M орасидаги масофа:

$$r = \left\{ (x_Q - x_M)^2 + (y_Q - y_M)^2 + (z_Q - z_M)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

бўлади. Энди $\frac{1}{r}$ дан Q нуқтада x бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар олайлик:

$$\frac{\partial}{\partial x_Q}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_Q}=-\frac{1}{r^2}\frac{x_Q-x_M}{r}=-\frac{x_Q-x_M}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_Q}\left(-\frac{x_Q-x_M}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+(x_Q-x_M)\frac{3}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_Q}=$$

$$=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x_Q-x_M)^2}{r^5}.$$

Бошқа координаталар бўйича олинган мос ҳосилалар ҳам шулар сингари бўлади. У вақтда:

$$\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_Q^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y_Q^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z_Q^2}\left(\frac{1}{r}\right)=$$

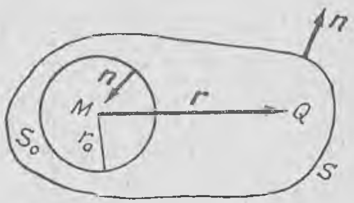
$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^5}\left\{(x_Q-x_M)^2+(y_Q-y_M)^2+(z_Q-z_M)^2\right\}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}.$$

Юқоридаги ҳисобларни M нуқтага нисбатан ҳам такрорлашимиз мумкин, натижада: $\Delta_M\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}$. Шундай қилиб:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3} \tag{39.7}$$

бўлади. r масофа нолга тенг бўлмагандагина, яъни Q нуқта M нуқта билан бирлашиб кетмагандагина, ўзгарувчи Q нуқта функцияси бўлган $\frac{1}{r}$ учун тубандаги дифференциал тенгламани ёзиш мумкин:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0. \tag{39.8}$$



144- расм.

Q нуқта M нуқта билан бирлашиб кетган тақдирда, масофа $r=0$, демак, $\frac{1}{r}$ чексиз ва (39.7) га мувофиқ, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ мавжуд эмас. Ваҳоланки, Грин формуласи (39.6) да иштирок қилувчи функциялар ва уларнинг ҳосилалари узлуксиз ҳисобланади. Бу шартнинг бажарилиши учун M нуқтани интеграллаш ҳажмидан ажратиб чиқариш керак. Шу мақсадда кичик r_0 радиусли ва маркази M нуқтада ўрнашган сферик сирт S_0 ни олайлик. Натижада интеграллаш ҳажми ички сирт S_0 ва ташқи сирт S билан чегараланган бўлади (144- расм).

(39.8) ни (39.6) га қуйсак:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{r} dV = \oint\limits_{S} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS +$$

$$+ \oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS_0 \tag{39.9}$$

келиб чиқади.

Интеграллаш ҳажмига нисбатан ташқи нормаль йўналиши M нуқтани қуршаган сферик сиртда ичкарига қаратилган, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ эса ўша сферик сиртдан ташқарига қаратилган, демак:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

Шуларга биноан, (39.9) даги ички сферик сирт S_0 бўйича олинган интегрални ёзамиз:

$$\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS_0 = \oint\limits_{S_0}\left\{-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2}\right\} dS_0.$$

Бу ифоданинг ўнг томонига математик анализдан маълум бўлган ўрта қийматлар теоремасини татбиқ этайлик:

$$\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS_0 = -\left\{\frac{1}{r_0}\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)} + \frac{1}{r_0^2}\overline{\varphi}\right\}\oint\limits_{S_0} dS_0.$$

Бу ерда $\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}$ ва $\overline{\varphi}$ лар ички сферик сиртда $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ва φ нинг қандайдир ўрта қийматларидир. $\oint\limits_{S_0} dS_0$ интеграл эса $4\pi r_0^2$ га тенг.

Натижада:

$$\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS_0 = -4\pi\left\{r_0\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)} + \overline{\varphi}\right\}.$$

Энди r_0 нолга интилса, ички сферик сирт S_0 кичрайиб бориб, оқибатда M нуқта билан бирлашиб кетади, функциянинг S_0 сиртдаги ўрта қиймати $\overline{\varphi}$ шу M нуқтадаги функция қиймати φ_M га ўтади. Натижада:

$$\lim_{r_0\to 0}\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS_0 = -4\pi\varphi_M$$

бўлади.

Шуни назарда тутиб, (39.9) ни бундай ёзамиз:

$$\varphi_M = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta\varphi}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS. \qquad (39.10)$$

Демак, ҳажмнинг бирор нуқтасида функция қийматини билиш учун, қисман, функциянинг ва бу функциядан нормаль бўйича олинган ҳосиланинг шу ҳажмни чегараловчи сиртдаги қийматлари маълум бўлиши керак.

Ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажм манбалардан озод (яъни $\Delta\varphi = \mathrm{div\,grad}\,\varphi = 0$) бўлса, (39.10) дан қуйидагини топамиз:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS, \qquad (39.11)$$

яъни манбалар бўлмаган ҳажм ичида φ функция қийматининг аниқланиши учун шу ҳажмни чегараловчи сиртда φ функция ва унинг нормаль бўйича $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ҳосиласи берилган бўлиши лозим.

Энди ҳажмни чегараловчи сиртни чексизликка узоқлаштирилган деб ҳисоблайлик, яъни интеграллаш ҳажми деб чексиз фазони қабул қилайлик. Шу билан бирга, функция ва унинг нормаль ҳосиласи чексизликда ушбу шартларга бўйсунсин:

$$r \to \infty \text{ бўлса, } r\varphi \text{ ва } r^2\frac{\partial\varphi}{\partial n} \text{ чеклидир,} \qquad (39.12)$$

яъни чексиз узоқлаштирилган сирт учун φ функциянинг нолга интилиш тартиби $\frac{1}{r}$ каби, шу функциядан нормаль бўйича олинган $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ҳосиланинг нолга интилиш тартиби эса $\frac{1}{r^2}$ каби булади. Бошқача қилиб айтсак, $r \to \infty$ экан, функция ва унинг ҳосиласи нолга интилади.

Ҳажмни чегараловчи ёпиқ сиртни сфера шаклида олишимиз мумкин. У вақтда сиртнинг юзи r^2 га пропорционал ва $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$ бўлади. Юқорида келтирилган чексизликдаги шарт (39.12) га кўра, (39.11) да интеграл остидаги ифоданинг нолга интилиши $\frac{1}{r^3}$ каби булади. Шундай қилиб, чексиз узоқлаштирилган сирт учун:

$$\lim_{r\to\infty}\oint\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS = 0.$$

Буни назарда тутиб, чексиз фазо учун (39.10) дан қуйидагини топамиз:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta\varphi}{r}dV. \qquad (39.13)$$

Бу ерда φ тайин M нуқтада текширилаётган функциядир, бу функциянинг $\Delta\varphi$ лапласиани ҳажм элементи dV турган Q нуқтада олинади, r эса M билан Q орасидаги масофадир. Юқоридаги (39.13) формуладан электр майдони назарияси, гравитацион майдон назарияси ва бошқа соҳаларда кенг фойдаланилади.

Бир мисол олайлик. Гравитацион майдон дифференциал тенгламаси мана бундай шаклга эга:

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho, \tag{39.14}$$

бу ерда γ — гравитацион константадир, ρ — масса зичлиги. У вақтда (39.13) га биноан, гравитацион майдон потенциали учун қуйидагини ёзамиз:

$$\varphi = -\gamma\int\frac{\rho}{r}dV. \tag{39.15}$$

Бу формула гравитация назариясидан маълум бўлган Ньютон потенциалини ифодалайди.

40. ВЕКТОР МАЙДОН ПОТЕНЦИАЛЛАРИ

Вектор майдонни тасвирловчи вектор турли характерда бўлиши мумкин. Масалан, майдон вектори $\boldsymbol{a}$ уюрмасиз булиб, дивергенцияси нолдан фарқли бўлиши мумкин, яъни:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0, \tag{40.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = F. \tag{40.2}$$

Уюрмасиз векторнинг потенциал характерга эгалигини биламиз, демак, (40.1) га биноан:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi \tag{40.3}$$

ва буни (40.2) га қўйсак:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = F$$

ёки

$$\Delta\varphi = F \tag{40.4}$$

келиб чиқади. Бу ерда F — берилган φ функция билан тасвирланаётган вектор майдон манбаини характерловчи скаляр функция.

(*40.4*) *ифода Пуассон дифференциал тенгламаси дейилади*. Агар $F = 0$ бўлса, яъни манба йўқ нуқталарда:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{40.5}$$

бўлади. *Бу тенглама Лаплас дифференциал тенгламаси дейилади.*

Шундай қилиб, потенциал характердаги вектор майдонни текшириш Пуассон дифференциал тенгламасига келтирилади.

Скаляр функция φ вектор майдоннинг скаляр-потенциали дейилади.

Вектор майдоннинг дивергенцияси йўқ ва уюрмаси нолдан фарқли бўлиши мумкин:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0, \tag{40.6}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}. \tag{40.7}$$

Дивергенцияси нолга тенг векторнинг, яъни соленоидал векторнинг уюрмали вектор бўлиши бизга маълум, демак, (40.6) га биноан:

$$\boldsymbol{b} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{40.8}$$

бўлади ва буни (40.7) га қўйсак:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$$

келиб чиқади. Аммо (34.7) га мувофиқ:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A},$$

демак:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}. \tag{40.9}$$

Аммо $\boldsymbol{A}$ вектор

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{40.10}$$

шартга бўйсунадиган қилиб олиниши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (40.8) га мувофиқ, $\boldsymbol{A}$ ўрнига $\boldsymbol{A}' + \operatorname{grad} f$ ни олиш ҳам мумкин:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \operatorname{grad} f, \tag{40.11}$$

бу ерда f — ихтиёрий скаляр функция. Сўнгги ифоданинг чап ва ўнг томонларидан уюрма ва дивергенция ҳосил қилайлик:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \Delta f.$$

f функция ихтиёрий бўлганлигидан фойдаланиб, уни $div\, A' = -\Delta f$ шартга бўйсунадиган қилиб оламиз. У вақтда $div\, A = 0$, яъни исбот қилиниши лозим бўлган ифода келиб чиқди. (40.10) ни (40.9) га қўйсак:

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{c} \tag{40.12}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_x &= -c_x, \\ \Delta A_y &= -c_y, \\ \Delta A_z &= -c_z \end{aligned}\right\} \tag{40.13}$$

бўлади, биз яна Пуассон тенгламаларига дуч келдик.

Шундай қилиб, соленоидал майдонни текшириш вектор шаклдаги Пуассон дифференциал тенгламасини ечишга келтирилади. *Вектор функция* $\boldsymbol{A}$ *вектор майдоннинг вектор-потенциали дейилади.*

Энди Пуассон дифференциал тенгламалари (40.4) ва (40.12) дан ёки, барибир, (40.4) ва (40.13) дан скаляр-потенциал φ ва вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ ни аниқлаб олишимиз керак. Бу потенциалларни *тўла майдон* учун, яъни чексиз фазо учун топайлик.

Чексиз фазо учун, (39.13) га мувофиқ, функция ўзининг лапласиани орқали ифодаланиши маълум:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta\Phi}{r} dV. \tag{40.14}$$

Демак, (40.4) ва (40.14) га биноан:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{F}{r} dV, \tag{40.15}$$

(40.13) ва (40.14) га биноан эса:

$$A_x = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_x}{r} dV,$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_y}{r} dV,$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_z}{r} dV$$

бўлади. Булардан:

$$A = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c}{r} dV \tag{40.16}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, вектор майдоннинг φ ва $\boldsymbol{A}$ потенциалларини аниқлаб олдик. Бу потенциаллар Пуассон дифференциал тенгламаларининг ечимларидир, демак, улар (яъни φ, A_x, A_y, A_z) чексизликдаги (39.12) шартларга бўйсунади. Биз топган (40.16) даги $\boldsymbol{A}$ вектор юқоридаги шартимиз (40.10) га бўйсуниши керак. Ҳақиқатан, ихтиёрий олинган кузатиш нуқтаси M десак:

$$\mathrm{div}_M \boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}_M \int \frac{c}{r} dV = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}_M\left(\frac{c}{r}\right) dV$$

бўлади. Аммо c вектор кузатиш нуқтаси M га боғлиқ эмас, у фақат элементар ҳажм dV нинг Q нуқтасигагина боғлиқдир. Демак, (29.8) билан (34.9) га мувофиқ:

$$\mathrm{div}_M\left(\frac{c}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{div}_M c + \left(c \ \mathrm{grad}_M \frac{1}{r}\right) = -\left(c \ \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right).$$

Яна (34.9) га биноан:

$$\mathrm{div}_Q\left(\frac{c}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{div}_Q \, c + \left(c \ \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right).$$

Бу ердан:

$$-\left(c \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{div}_Q c - \operatorname{div}_Q \left(\frac{c}{r}\right) = -\operatorname{div}_Q \left(\frac{c}{r}\right),$$

чунки (32.8) билан (40.7) га мувофиқ, $\operatorname{div}_Q c = 0$. Демак:

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{c}{r}\right) = -\operatorname{div}_Q \left(\frac{c}{r}\right).$$

Юқоридаги формула қуйидагича ёзилади:

$$\operatorname{div}_M A = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}_Q \left(\frac{c}{r}\right) dV,$$

ёки Гаусс — Остроградский теоремасидан фойдалансак:

$$\operatorname{div}_M A = -\frac{1}{4\pi} \oint \left(\frac{c}{r}\, dS\right)$$

бўлади. Ёпиқ сиртни чексизликка узоқлаштириб, чексизликдаги (39.12) шартларни назарда тутсак, $\operatorname{div}_M A = 0$ бўлади, яъни (40.16) да ифодаланган A вектор-потенциал (40.10) шартга бўйсунади.

Пуассон дифференциал тенгламасининг чексизликдаги (39.12) *шартларга бўйсунган ечимининг фақат биргиналигини таъкидлаб ўтамиз.*

Ҳақиқатан, Пуассон дифференциал тенгламаси берилган бўлсин:

$$\Delta\psi = \rho. \tag{40.17}$$

Унинг чексиз фазо учун топилган ечимини биламиз:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r}\, dV. \tag{40.18}$$

Агар иккита турли ψ_1, ψ_2 ечимлар мавжуд бўлса, у вақтда, $\Delta\psi_1 = \rho$, $\Delta\psi_2 = \rho$ ва буларнинг айирмаси $\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2 = \Delta(\psi_1 - \psi_2) = 0$ бўлади. $\psi_1 - \psi_2$ айирмани ψ_3 орқали белгиласак:

$$\psi_3 = \psi_1 - \psi_2 \tag{40.19}$$

$$\Delta\psi_3 = 0 \tag{40.20}$$

бўлади. Энди (39.3) да ифодаланган Грин формуласидан фойдаланайлик:

$$\int \left\{ (\operatorname{grad} \psi_3)^2 + \psi_3 \Delta\psi_3 \right\} dV = \oint \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n}\, dS.$$

Демак, (40.20) га биноан:

$$\int (\operatorname{grad} \psi_3)^2\, dV = \oint \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n}\, dS.$$

Чексиз фазо учун сўнгги ифоданинг ўнг томони нолга тенг бўлиши керак, чунки ψ функция, демак ψ_1 билан ψ_2 ва уларнинг айирмаси ψ_3 чексизликдаги (39.12) шартларга бўйсунади, яъни ψ_3 билан $\frac{\partial\psi_3}{\partial n}$ ёпиқ сирт чексизликка узоқлаштирилганда нолга интилади. Натижада $\int (\mathrm{grad}\,\psi_3)^2\, dV = 0$. Интеграл остидаги ифода мусбат бўлганлигидан $(\mathrm{grad}\,\psi_3)^2 = 0$ бўлади. Бу ердан $\mathrm{grad}\,\psi_3 = 0$, яъни $\psi_3 = \mathrm{const}$.

Фазонинг барча нуқталаридаги бу константа чексизликда нолга тенгдир. Демак, умуман, $\psi_3 = 0$ ёки, (40.19) га биноан:

$$\psi_1 = \psi_2. \tag{40.21}$$

Шундай қилиб, *Пуассон дифференциал тенгламаси фақат биттагина ечимга эгадир.*

41. ВЕКТОРНИНГ ПОТЕНЦИАЛ ВА СОЛЕНОИДАЛ ВЕКТОРЛАРГА АЖРАТИЛИШИ

Бирор $\boldsymbol{a}$ вектор билан характерланувчи майдон берилган бўлсин. $\boldsymbol{a}$ вектор ва унинг фазовий ҳосилаларини узлуксиз функциялар деб ҳисоблаймиз. Шу билан бирга, берилган майдоннинг чексизликка узоқлаштирилаётган нуқталарида $\boldsymbol{a}$ вектор ва унинг фазовий ҳосилалари ҳам нолга интила борсин. *Шу шартларга бўйсунган $\boldsymbol{a}$ векторни потенциал вектор $\boldsymbol{a}_1$ билан соленоидал вектор $\boldsymbol{a}_2$ йиғиндиси деб қараш мумкин*:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \tag{41.1}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \mathrm{grad}\,\varphi, \tag{41.2}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \tag{41.3}$$

бу ерда φ скаляр-потенциал ва $\boldsymbol{A}$ вектор-потенциал бўлиб, улар $\boldsymbol{a}$ вектор орқали аниқланиши мумкин.

Дарҳақиқат, қандайдир номаълум F вектор Пуассон дифференциал тенгламаси орқали бизга берилган $\boldsymbol{a}$ вектор билан шундай боғланган бўлсин:

$$\Delta \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{a}. \tag{41.4}$$

У вақтда, (40.12) билан (40.16) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{a}}{r}\, dV. \tag{41.5}$$

Шундай қилиб, берилган $\boldsymbol{a}$ вектор орқали $\boldsymbol{F}$ вектор бемалол аниқланади.

Ҳозирги текширишимизда бир неча формулалардан фойдаланишга тўғри келади. Улар бизга илгаридан маълум:

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{b}\, dV = \oint (\boldsymbol{b} d\boldsymbol{S}), \tag{41.6}$$

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{b} dV = \oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{b}], \tag{41.7}$$

$$\operatorname{div}(\beta \boldsymbol{b}) = \beta \operatorname{div} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \operatorname{grad} \beta), \tag{41.8}$$

$$\operatorname{rot}(\beta \boldsymbol{b}) = \beta \operatorname{rot} \boldsymbol{b} + [\operatorname{grad} \beta \boldsymbol{b}], \tag{41.9}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{b} - \Delta \boldsymbol{b}. \tag{41.10}$$

Сўнгги формулада $\boldsymbol{b}$ ни $\boldsymbol{F}$ га алмаштирсак:

$$-\Delta \boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{F} + rot\, rot\, \boldsymbol{F} \tag{41.11}$$

булади. Агар $-\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ ни φ ва $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ ни $\boldsymbol{A}$ орқали белгиласак:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \varphi, \tag{41.12}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \tag{41.13}$$

бўлади, аввалги (41.11) ифодани қайтадан кўчириб ёзишимиз мумкин:

$$-\Delta \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

ёки (41.4) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{41.14}$$

Бу эса, (41.2) билан (41.3) назарда тутилса, (41.1) ифоданинг ўзгинасидир.

Энди φ билан $\boldsymbol{A}$ ни берилган $\boldsymbol{a}$ вектор орқали топиш масаласига утамиз. Шу мақсадда (41.5) ни (41.12) билан (41.13) га қўямиз:

$$\varphi = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{a}}{r}\, dV\right),$$

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{a}}{r}\, dV\right).$$

Текширилаётган φ билан $\boldsymbol{A}$—тайин M нуқтанинг функцияси, интеграл остидаги $\boldsymbol{a}$ вектор эса ўзгарувчи Q нуқтанинг функциясидир, r—шу икки нуқта орасидаги масофа. Шунинг учун:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}_M\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) dV,$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{rot}_M\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) dV.$$

(41.8) ва (41.9) га мувофиқ:

$$\operatorname{div}_M\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}_M \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{a} \operatorname{grad}_M \frac{1}{r}\right) = \left(\boldsymbol{a} \operatorname{grad}_M \frac{1}{r}\right),$$

$$\operatorname{rot}_M\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}_M \boldsymbol{a} + \left[\operatorname{grad}_M \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\right] = \left[\operatorname{grad}_M \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\right],$$

демак:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\boldsymbol{a}\ \mathrm{grad}_M \frac{1}{r}\right) dV,$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\ \mathrm{grad}_M \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\right] dV.$$

Масофанинг четки нуқталари учун қуйидаги бизга маълум (29.8):

$$\mathrm{grad}_M \frac{1}{r} = -\,\mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}.$$

Демак:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\boldsymbol{a}\ \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right) dV,$$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\ \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\right] dV.$$

Яна (41 8) билан (41.9) дан фойдаланайлик:

$$\left(\boldsymbol{a}\ \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right) = \mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) - \frac{\mathrm{div}_Q \boldsymbol{a}}{r},$$

$$\left[\mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\right] = \mathrm{rot}_Q \frac{\boldsymbol{a}}{r} - \frac{\mathrm{rot}_Q \boldsymbol{a}}{r},$$

демак:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right) dV - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{div}_Q \boldsymbol{a}}{r}\, dV,$$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{rot}_Q \frac{\boldsymbol{a}}{r}\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{rot}_Q \boldsymbol{a}}{r}\, dV.$$

Агар (41.6) билан (41.7) ни назарга олсак:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\oint\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}\, d\boldsymbol{S}\right) - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{div}_Q \boldsymbol{a}}{r}\, dV,$$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi}\oint\left[d\boldsymbol{S}\frac{\boldsymbol{a}}{r}\right] + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{rot}_Q \boldsymbol{a}}{r}\, dV$$

бўлади.

Юқоридаги шартимизга мувофиқ, чегараловчи ёпиқ сирт чексизликка узоқлаштирилганда $\boldsymbol{a}$ вектор нолга интилади, демак, сўнгги ифодалардаги ёпиқ сирт бўйича олинган интеграллар нолга интилади. Натижада:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{div}_Q \boldsymbol{a}}{r}\, dV, \tag{41.15}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{rot}_Q\, \boldsymbol{a}}{r}\, dV \tag{41.16}$$

бўлади, яъни берилган $\boldsymbol{a}$ векторнинг дивергенцияси ва уюрмаси орқали φ ва $\boldsymbol{A}$ функциялар бемалол аниқланади.

Шундай қилиб, *берилган узлуксиз ва чексизликда нолга интилувчи ҳар қандай* $\boldsymbol{a}$ *векторнинг биргина йўл билан икки векторга ажратилиши мумкин (41.1): бири потенциал вектор (41. 2) ва иккинчиси соленоидал вектор (41.3). Скаляр-потенциал берилган векторнинг дивергенцияси орқали аниқланади (41.15). Вектор-потенциал берилган векторнинг уюрмаси орқали аниқланади (41.16). Дивергенцияси билан уюрмаси маълум бўлган векторни тўла аниқлаш мумкинлиги энди равшан бўлди.*

Векторнинг дивергенцияси билан оқими ва уюрмаси билан циркуляцияси ўзаро қандай боғланганлиги бизга илгаридан маълум. Демак, векторнинг оқими билан циркуляцияси маълум бўлса, текширилаётган вектор майдон тўла аниқланади.

Чекли соҳали вектор майдоннинг бир қийматли аниқланиши учун, соҳанинг ички нуқталаридаги дивергенция ва уюрмадан ташқари, яна шу соҳа чегарасидаги нормал компоненти ҳам маълум бўлиши лозим.

Ҳақиқатан ҳам, масала икки $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}''$ ечимга эга бўлсин:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}' = \psi, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{w}, \quad (\boldsymbol{a}'\boldsymbol{n}) = \xi,$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}'' = \psi, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{w}, \quad (\boldsymbol{a}''\boldsymbol{n}) = \xi,$$

бу ердан кўрамизки:

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'') = 0, \tag{41.17}$$
$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'') = 0, \tag{41.18}$$
$$(\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'', \ \boldsymbol{n}) = 0. \tag{41.19}$$

(41.18) га биноан бундай ёзамиз:

$$\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'' = \operatorname{grad} f. \tag{41.20}$$

У вақтда (41.14) ва (41.19) дан:

$$\Delta f = 0, \tag{41.21}$$
$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \tag{41.22}$$

бўлади. Бу дифференциал тенгламаларнинг ечими $f = \text{const}$ бўлади. Демак, (41.20) дан: $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{a}$.

42. ЎЗГАРУВЧИ МАЙДОН

Ҳозиргача биз шуғулланиб келган майдонлар вақтнинг ўзгаришига боғлиқ эмас эди. *Вақт ўзгариши билан ўзгармасдан қолувчи майдон стационар майдон дейилади.*

Ностационар майдон учун:

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t) \text{ ёки } \varphi = \varphi(x,\ y,\ z,\ t),$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t) \text{ ёки } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)$$

бўлади.

Ностационар майдон скаляр функциясининг ўзгаришини текшириб кўрайлик. Бу майдонда ҳаракатланувчи бирор заррача тезлиги $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ва унинг Декарт компонентлари:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{42.1}$$

бўлсин. Текширилаётган скаляр функция $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ вақтга нисбатан мураккаб функциядир, чунки бу ерда Декарт координаталари ҳам вақтга боғлиқдир. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб, бундай ёзамиз:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ёки (42.1) га мувофиқ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

демак:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\ \varphi)$$

ёки

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\varphi \tag{42.2}$$

бўлади. *Бу формулада* $\frac{d\varphi}{dt}$ *функция* φ *нинг* t *вақт бўйича тўла ҳосиласи,* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ *эса функция* φ *нинг* t *вақт бўйича хусусий ҳосиласидир. Ҳаракатсиз заррача учун* ($\boldsymbol{v} = 0$), *(42.2)га мувофиқ, функциянинг бирор ҳаракатсиз нуқтада вақтгагина боғлиқ ҳолда ўзгариши хусусий ҳосила* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ *билан аниқланади. Шу сабабли хусусий ҳосила* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ *функция* φ *нинг локал ҳосиласи, яъни маҳаллий ҳосиласи дейилади. Ҳаракатдаги заррачага боғлиқ бўлган тўла ҳосила* $\frac{d\varphi}{dt}$ *эса функция* φ *нинг субстанциал ҳосиласи, яъни асосий ҳосиласи дейилади.*

Ностационар майдонни характерловчи вектор учун ҳам ушбуни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{da}{dt}=\frac{\partial a}{\partial t}+(v\nabla)\,a, \tag{42.3}$$

чунки a векторнинг Декарт компонентлари a_x, a_y, a_z нинг ҳар бири учун (42.2) ни ишлатишимиз мумкин. *Бу ерда* $\frac{da}{dt}$ *вектор a нинг t вақт бўйича тўла ҳосиласи,* $\frac{\partial a}{\partial t}$ *эса вектор a нинг t вақт бўйича хусусий ҳосиласидир.* (42.2) ва (42.3) дан аёнки, вақт ўтиши билан бирор майдон функциясининг тўла ўзгаришини кўрсатувчи шу функциянинг вақт бўйича олинган тўла ҳосиласи икки қисмдан иборат: 1) биринчи ҳад—хусусий ҳосила функциянинг ҳаракатсиз нуқтадаги ўзгаришини кўрсатади, 2) иккинчи ҳад эса функциянинг заррача ҳаракати туфайли ўзгаришини кўрсатади. Ҳаракатсиз заррача учун майдон функциясининг вақт бўйича олинган тўла ҳосиласи ва хусусий ҳосиласи орасида ҳеч қандай фарқ қолмайди.

Стационар майдонни характерловчи функция бу майдоннинг ҳар бир нуқтасида вақт ўтиши билан ўзгармасдан сақланади. *Шундай қилиб, стационар майдоннинг скаляр функцияси φ ёки вектор функцияси a учун бундай ёзишимиз мумкин:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \ \frac{\partial a}{\partial t}=0.$$

43. ҲАРАКАТДАГИ СОҲА ИНТЕГРАЛЛАРИНИНГ ЎЗГАРИШИ

Ҳаракатланувчи бирор соҳа (ҳажм, сирт ёки чизиқ) бўйича олинган майдон функциялари интегралларининг вақтга нисбатан ўзгаришини текшириб кўрайлик. Масалан, ушбу интеграллар берилган бўлсин:

$$\varphi=\int\rho\,dV, \tag{43.1}$$

$$\Phi=\int(a\,dS), \tag{43.2}$$

$$F=\int(a\,dl). \tag{43.3}$$

Интеграл остидаги ифодаларни нуқта ва вақт функциялари деб ҳисоблаймиз. Бу интеграллардан ҳар бирининг ўзгариши интеграл остидаги функциянинг ўзгариши билан интеграллаш соҳасининг ўзгаришига боғлиқдир.

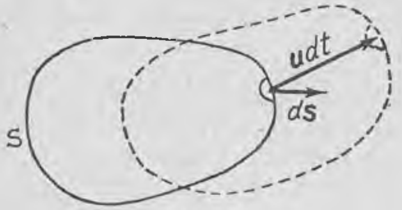
Вақт ўзгариши билан ҳажм интеграли (43.1) ўзгаришини текширайлик. Бу ҳажм интегралининг dt вақт давомида умумий орттирмаси икки қисмдан иборат: биринчиси (I) фақат ρ функциянинг ўзгаришига боғлиқ, иккинчиси (II) фақат V ҳажмнинг ўзгаришига боғлиқдир. Шундай қилиб:

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV dt = \mathrm{I}\int \rho\, dV + \mathrm{II}\int \rho\, dV.$$

Ҳажм ўзгармас экан, у вақтда ҳажм ичидаги бирор нуқтада функция орттирмаси $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ бўлади. Бутун ҳажм бўйича олинган интеграл орттирмаси эса қуйидагича бўлади:

$$\mathrm{I}\int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt.$$

Энди иккинчи қисмни ҳисоблаб чиқайлик. V ҳажмни чегараловчи ёпиқ сирт S нинг элементар юз вектори $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{dSn}$ бўлсин. Бу элементар юз $\boldsymbol{u}$ тезлик билан ҳаракат қилса, dt вақт ичида унинг силжиши $\boldsymbol{u}dt$ бўлади. Демак, элементар юз ҳаракати туфайли dt вақтда элементар ҳажм $(\boldsymbol{udS})\ dt$ ҳосил бўлади. 145- расмда ёпиқ сиртнинг янги вазияти штрих чизиқ орқали кўрсатилган. Бу элементар ҳажмнинг интеграл



145- расм.

$\int \rho dV$ орттирмасига берган ҳиссаси $\rho\,(\boldsymbol{udS})\ dt$ га тенг. Ҳажм ўзгариши натижасида интегралнинг мавжуд бўлган барча орттирмаси:

$$\mathrm{II}\int \rho\, dV = \oint \rho\, (\boldsymbol{udS})\, dt$$

бўлади. Сўнгги уч формулага мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV dt = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \oint (\rho\, \boldsymbol{udS})\, dt$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint (\rho\, \boldsymbol{udS}).$$

Ўнг томондаги иккинчи интегралга Гаусс—Остроградский формуласини татбиқ этсак,

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u})\, dV$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = \int \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u})\right\} dV \qquad (43.4)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, *скаляр функциядан ҳаракатдаги ҳажм бўйича олинган интегралнинг вақтга нисбатан тўла ҳосиласини аниқладик.* Ҳажм ўзгармас, яъни ҳаракатсиз ($u = 0$) бўлса, у вақтда:

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{43.5}$$

бўлади.

Ҳаракатдаги сирт орқали вектор оқими ўзгаришини текширайлик. (43.2) да ифодаланган вектор оқимининг dt вақт давомидаги умумий орттирмаси икки қисмдан иборатдир: бири (I) фақат $\boldsymbol{a}$ векторнинг ўзгаришига, иккинчиси (II) эса фақат S сиртнинг ўзгаришига боғлиқ. Шундай қилиб:

$$\frac{d}{dt}\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S})dt = \mathrm{I}\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) + \mathrm{II}\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}). \tag{43.6}$$

S сирт ҳаракатсиз экан, у вақтда, шу сиртга тегишли бирор нуқтада $\boldsymbol{a}$ вектор орттирмаси $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} dt$ бўлади. Бутун сирт бўйича олинган интеграл орттирмаси эса:

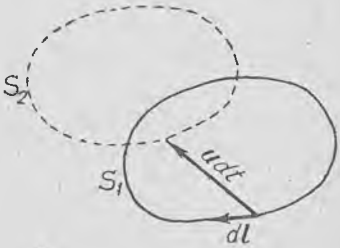
$$\mathrm{I}\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} d\boldsymbol{S}\right) dt \tag{43.7}$$

бўлади.

Энди умумий орттирманинг иккинчи қисмини ҳисоблаб чиқайлик.

Ҳаракат натижасида, умуман, сиртнинг шакли ва фазодаги вазияти ўзгариши мумкин. 146- расмда ҳаракат туфайли аввалги вазияти S_1 дан сўнгги вазияти S_2 га ўтган сирт контури штрихланган чизиқ орқали кўрсатилган. Бизни қизиқтираётган вектор оқимининг орттирмаси сўнгги ва аввалги вазиятлардаги сирт орқали бўлган вектор оқимлари айирмасига тенгдир, яъни:

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) = \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}) - \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}).$$



146- расм.

Лекин S_1 ва S_2 сиртларни чегараловчи контурларнинг бир хил йўналишда эканлиги назарда тутилиши лозим.

Сиртни чегараловчи контур элементи $d\boldsymbol{l}$ ҳаракатининг тезлиги $\boldsymbol{u}$ экан, ҳосил бўлган мос силжиш $\boldsymbol{u}dt$ га тенг бўлади. Контур ҳаракати натижасида ҳосил бўлган сиртни S' десак,

S_1, S_2, S' сиртлар ёпиқ сирт ҳосил қилади. Бу ёпиқ сирт орқали векторнинг оқими:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int_{S_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \int_{S_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \int_{S'} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S})$$

бўлади.

Ташқи нормални мусбат нормаль деб ҳисоблаганимизни эсда тутиб, сўнгги вазиятдаги S_2 сиртнинг нормалини асос қилиб олсак, чегараловчи контур йўналишига мос қилиб олинган S_1 сирт нормалини манфий ташқи нормаль билан алмаштирамиз:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = -\int_{S_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \int_{S_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \int_{S'} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}).$$

Контур ҳаракатида ҳосил бўлган S' сирт нормали ёпиқ сиртнинг ташқарисига қаратилганлиги сабабли, 146-расмдан равшанки, $d\boldsymbol{l}$ нинг $\boldsymbol{u}dt$ силжишда ҳосил қилган юз элементи $d\boldsymbol{S} = [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{u}]\, dt$ бўлади, демак:

$$\int_{S'} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \oint (\boldsymbol{a}\,[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{u}]\, dt) = -\oint (\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{u}d\boldsymbol{l}])\, dt$$

ёки аралаш кўпайтма хусусиятига мувофиқ:

$$\int_{S'} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = -\oint ([\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\, d\boldsymbol{l})\, dt.$$

Шундай қилиб:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = -\int_{S_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \int_{S_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) - \oint ([\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\, d\boldsymbol{l})\, dt$$

ёки

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int_{S_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) - \int_{S_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \oint ([\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\ d\boldsymbol{l})\, dt.$$

Ёпиқ сирт интегралига Гаусс—Остроградский формуласи ва контур интегралига Стокс формуласи татбиқ этилса:

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}dV + \int (\operatorname{rot} [\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\ d\boldsymbol{S})dt$$

булади, бу ерда $d\boldsymbol{S}$ — контур билан чегараланган сирт элементининг вектори, dV — шу сирт элементи $d\boldsymbol{S}$ нинг $\boldsymbol{u}dt$ силжишида ҳосил бўлган ҳажм: $dV = (\boldsymbol{u}d\boldsymbol{s})\, dt$. Демак:

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{u}d\boldsymbol{s})\, dt + \int (\operatorname{rot} [\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\, d\boldsymbol{S})\, dt$$

ёки

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int (\boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + rot\ [\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}], d\boldsymbol{S})\, dt. \tag{43.8}$$

(43.7) билан (43.8) ни (43.6) га қўйсак, ҳаракатда бўлган сирт орқали вектор оқимининг dt вақт орасида тўла орттирмасини топамиз:

$$\frac{d}{dt}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S})dt = \int\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}d\boldsymbol{S}\right)dt + \int (\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}], d\boldsymbol{S})\,dt$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \int\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}], d\boldsymbol{S}\right). \tag{43.9}$$

Шундай қилиб, *ҳаракатдаги сирт орқали вектор оқимининг вақт бўйича тўла ҳосиласини аниқладик.* Епиқ сирт учун (43.9) дан:

$$\frac{d}{dt}\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) = \oint\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{S}\right) \tag{43.10}$$

бўлади, чунки ёпиқ сирт орқали уюрма оқимининг нолга тенглиги бизга илгаридан маълум.

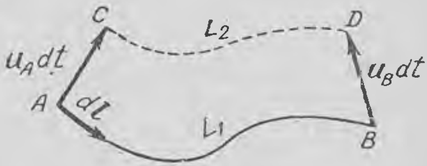
Энди (43.3) да ифодаланган чизиқли интегралнинг вақтга нисбатан қандай ўзгаришини текширайлик. L чизиқ бўйича олинган интегралнинг умумий орттирмаси икки қисмдан иборат: бири (I) фақат $\boldsymbol{a}$ векторнинг ўзгаришига боғлиқ, иккинчиси (II) фақат L чизиқ ўзгаришига боғлиқдир, яъни:

$$\frac{d}{dt}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l})\,dt = \mathrm{I}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + \mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}). \tag{43.11}$$

Агар L чизиқ ўзгармаса, шу L чизиққа тегишли бирор нуқтада $\boldsymbol{a}$ векторнинг орттирмаси $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\,dt$ бўлади. Ўзгармас бутун чизиқ бўйича олинган интеграл орттирмаси эса:

$$\mathrm{I}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\,d\boldsymbol{l}\right)dt \tag{43.12}$$

бўлади.



147- расм.

Энди умумий орттирманинг иккинчи қисмини ҳисоблаш масаласига ўтамиз. Ҳаракат натижасида, умуман, чизиқнинг шакли ва фазодаги вазияти ўзгаради. 147- расмда ҳаракат туфайли аввалги вазияти L_1 дан сўнгги вазияти L_2 га ўтган чизиқ штрихлар билан курсатилган. Сўнгги ва аввалги вазиятлардаги чизиқ бўйича олинган вектор интегралларининг айирмаси бизни қизиқтираётган тўла орттирманинг иккинчи қисмига тенг, яъни:

$$\mathrm{II}\int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}). \tag{43.13}$$

Бу ерда L_1 ва L_2 чизиқлардаги юриш йўналишлари бир хилдир. Чизиқ элементи $d\boldsymbol{l}$ нинг $\boldsymbol{u}$ тезлик билан қилган ҳаракати натижасида мавжуд бўлган элементар силжиш $\boldsymbol{u}dt$ га тенг: $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}dt$. Чизиқнинг чет нуқталари A ва B га тегишли силжишлар билан чизиқнинг аввалги ва сўнгги вазиятлари $CDBAC$ контур ташкил қилади. Бу контур бўйича C дан D га қараб юриш йўналиши мусбат деб ҳисоблансин. У вақтда айтилган контур бўйича олинган $\boldsymbol{a}$ вектор интеграли:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{a}_A\boldsymbol{u}_A)\; dt + \int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - (\boldsymbol{a}_B\boldsymbol{u}_B)\, dt - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}),$$

бундан:

$$\int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{a}_B\boldsymbol{u}_B)\, dt - (\boldsymbol{a}_A\boldsymbol{u}_A)\, dt$$

бўлади. Тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳадга Стокс формуласини татбиқ этамиз:

$$\int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}) + \{(\boldsymbol{a}_B\boldsymbol{u}_B) - (\boldsymbol{a}_A\boldsymbol{u}_A)\}\, dt, \quad (43.14)$$

бу ерда $d\boldsymbol{S}$ чизиқ элементи $d\boldsymbol{l}$ нинг элементар силжиши $\boldsymbol{u}dt$ да ҳосил бўлган юз элементининг векторидир. Юқоридаги контур бўйича юришнинг мусбат йўналишини назарда тутсак: $d\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{u}d\boldsymbol{l}]\, dt$ бўлади.

Потенциал векторнинг бизга маълум хусусиятидан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$(\boldsymbol{a}_B\boldsymbol{u}_B) - (\boldsymbol{a}_A\boldsymbol{u}_A) = \int (\operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{l}).$$

Шу топилган ифодаларни (43.14) га қўямиз:

$$\int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{u}d\boldsymbol{l}])\; dt + \int (\operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{l})\, dt.$$

Аралаш кўпайтма хусусиятига мувофиқ:

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{u}d\boldsymbol{l}]) = (\boldsymbol{u}[d\boldsymbol{l} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}]) = (d\boldsymbol{l}\, [\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{u}])$$

бўлади. Демак:

$$\int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int ([\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}]\, d\boldsymbol{l})\; dt) + \int\; (\operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{l})\, dt$$

ёки

$$\int_{L_2} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) - \int_{L_1} (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int ([\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}] + \operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}), d\boldsymbol{l})\, dt.$$

(43.13) ни назарда тутиб, бундай ёзамиз:

$$\mathrm{II} \int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int ([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}] + \mathrm{grad}\, (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}), d\boldsymbol{l})\, dt. \qquad (43.15)$$

(43.11) га (43.12) билан (43.15) ни олиб бориб қўйсак, ҳаракатдаги чизиқ бўйича олинган вектор интегралининг dt вақт ичида ҳосил бўлган тўла орттирмасини топамиз:

$$\frac{d}{dt} \int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l})\, dt = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} d\boldsymbol{l}\right) dt + \int ([\mathrm{rot}\, \dot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u}] + \mathrm{grad}\, (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}), d\boldsymbol{l})\, dt.$$

Бундан:

$$\frac{d}{dt} \int (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + [\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}] + \mathrm{grad}\, (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}), d\boldsymbol{l}\right). \qquad (43.16)$$

Шундай қилиб, *ҳаракатдаги чизиқ бўйича олинган вектор интегралининг вақтга нисбатан тўла ҳосиласини, яъни вақт бирлигидаги тўла орттирмасини аниқладик.*

Агар интеграллаш чизиғи ёпиқ бўлса:

$$\frac{d}{dt} \oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = \oint \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + [\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}], d\boldsymbol{l}\right) \qquad (43.17)$$

бўлади, чунки градиент циркуляциясининг нолга тенглиги бизга маълум.

Ҳаракатдаги соҳа интегралларининг вақт бўйича олинган тўла ҳосилаларини ифодаловчи юқорида топилган (43.4), (43.9) ва (43.16) формулалар электродинамика, аэрогидромеханика ва бошқа фанлар учун аҳамиятлидир.

Бир мисол билангина кифояланайлик. V ҳажмда ρ зичлик билан жойлашган M скаляр учун $M = \int \rho\, dV$ бўлади.

Шундай скалярлар борки, ишғол қилган ҳажми ва зичлиги қандай ўзгаришидан қатъи назар, уларнинг умумий миқдори ўзгармасдан сақланади. Шунинг учун $\frac{d}{dt} \int \rho\, dV = 0$ ёки, (43.4) га мувофиқ:

$$\int \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\rho \boldsymbol{u})\right\} dV = 0$$

бўлади. Интеграллаш ҳажми ихтиёрий бўлганлиги сабабли:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (43.18)$$

бўлади. *Узлуксизлик дифференциал тенгламаси деб юритилувчи бу дифференциал тенглама берилган скалярнинг сақланиш қонунини ифодалайди.* Бундай скаляр сифатида электр заряди, масса ёки энергия олиниши мумкин.

44. НОСТАЦИОНАР МАЙДОН ПОТЕНЦИАЛЛАРИ

Чексиз фазо учун стационар майдон потенциалини ифодаловчи формула бизга маълум (39.13):

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta\varphi}{r} dV. \tag{44.1}$$

Пуассон дифференциал тенгламасини эслайлик:

$$\Delta\varphi = F, \tag{44.2}$$

бу ерда F — майдон манбаини характерловчи функция. Шундай қилиб:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{F}{r} dV. \tag{44.3}$$

φ нинг M нуқтада ва F нинг Q нуқтада олинганлигини яна уқтириб ўтиш мақсадида бу формулани бундай ёзиб кўрсатайлик:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{F(Q)}{r} dV. \tag{44.4}$$

Бу ифода, одатда, *Ньютон потенциали* номи билан маълум.

Ностационар майдон функциялари вақт ўзгариши билан ўзгаради. Ўзгарувчи манбанинг атрофга бераётган таъсири ҳам ўзгариб туради. Манбадан чиққан таъсирнинг атрофга қандай масофага тарқалиши, тарқалиш тезлигига ва ўтган вақт оралигига боғлиқ. Атроф муҳитнинг хусусиятлари ҳамма жойларда бир хил бўлса, таъсир ҳам ҳар томонга ўзгармас бир хил тезлик билан тарқалади.

Таъсирнинг тарқалиш тезлигини u десак, r масофани ўтишда Q нуқтадан чиқиб, M нуқтага етиб келгунча кетган τ вақт қуйидагича аниқланади:

$$\tau = \frac{r}{u}, \tag{44.5}$$

яъни Q нуқтада пайдо бўлган таъсир M нуқтага $\tau = \frac{r}{u}$ вақт кечикиб келади. Вақтнинг t пайтида M нуқтага келиб етган таъсир, аслида, манба турган Q нуқтада t дан τ вақт илгарироқ пайдо бўлган, яъни вақтнинг $t - \frac{r}{u}$ пайтида пайдо бўлган. Демак, нуқтада вақтнинг t пайтида текширилаётган потенциал $\varphi(M,t)$ учун Q нуқтада жойлашган манбани вақтнинг $t - \frac{r}{u}$ пайтида олиш лозим. Шундай қилиб, чексиз фазо учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$\varphi(M,t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{F\left(Q, t-\frac{r}{u}\right)}{r} dV. \tag{44.6}$$

Шу формула билан ифодаланган функция $\varphi(M,t)$ *майдоннинг кечикувчи потенциали дейилади.* Ўзгармас майдон учун у Ньютон потенциали (44.4) шаклини олади. Майдон вақтга боғлиқ бўлиб, аммо таъсир чексиз катта тезлик билан тарқалса (демак, $u=\infty$), кечикувчи потенциал, барибир, яна Ньютон потенциали шаклини олади.

Ньютон потенциали Пуассон дифференциал тенгламасининг ечими эканлиги маълум. Энди кечикувчи потенциал (44.6) қандай дифференциал тенгламага мос келишини текшириб курайлик.

Кечикувчи потенциални икки қисмга ажратиб ёзайлик:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2, \tag{44.7}$$

$$\varphi_1=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_1}\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}dV, \tag{44.8}$$

$$\varphi_2=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_2}\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}dV. \tag{44.9}$$

Майдон текширилаётган M нуқтани жуда кичик ҳажм ичига олиб, уни V_1 орқали, қолган барча ҳажмни V_2 орқали белгиладик. Биринчи ҳажм V_1 нинг нуқталари M нуқтага жуда яқин турганлигидан, кечикиш вақти $\frac{r}{u}$ ни назарга олмаймиз, демак:

$$\varphi_1=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_1}\frac{F(t)}{r}dV \tag{44.10}$$

бўлади; бу эса Ньютон потенциалидир, шунинг учун дарҳол унга мос бўлган Пуассон дифференциал тенгламасини ёзамиз:

$$\Delta\varphi_1=F. \tag{44.11}$$

Энди φ_2 нинг лапласианини топиш мақсадида (44.9) дан фойдаланамиз. Интеграллаш ҳажми ўзгармас бўлганлигидан:

$$\Delta\varphi_2=-\frac{1}{4\pi}\Delta\int\limits_{V_2}\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}dV=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_2}\Delta\left\{\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}\right\}dV \tag{44.12}$$

бўлади.

Фақат масофагагина боғлиқ функция, масалан ψ учун, (37.6) га мувофиқ, $\Delta\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$ булади. Қавс ичида кўрсатилган ифоданинг ҳосиласи $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$ бўлганлигидан:

$$\Delta\psi = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \tag{44.13}$$

бўлади. Охирги тенгликни ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi). \tag{44.14}$$

Энди, (44.14) га мувофиқ, ψ ўрнига $\frac{1}{r}F\left(t-\frac{r}{u}\right)$ни қўйиб ёзайлик:

$$\Delta\left\{\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}\right\} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right). \tag{44.15}$$

Вақт t ва масофа r функцияси $F\left(t-\frac{r}{u}\right)$дан керакли ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial}{\partial r}F\left(t-\frac{r}{u}\right) = F'\left(t-\frac{r}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right) = F''\left(t-\frac{r}{u}\right)\frac{1}{u^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F\left(t-\frac{r}{u}\right) = F'\left(t-\frac{r}{u}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right) = F''\left(t-\frac{r}{u}\right),$$

натижада:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right)$$

чиқади, буни (44.15) га қўйсак:

$$\Delta\left\{\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}\right\} = \frac{1}{r}\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right)$$

бўлади. Ниҳоят, (44.12) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi u^2}\int\limits_{V_2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right)dV.$$

Масофа ва ҳажм вақтга боғлиқ эмас, демак:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_2}\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}dV\right\}$$

ёки, (44.9) га ва сўнгра (44.7) га мувофиқ:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2(\varphi-\varphi_1)}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}.$$

Аммо (44.8) дан:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{V_1}\frac{F\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}dV = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_1}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F\left(t-\frac{r}{u}\right)dV,$$

чунки ҳажм элементи dV радиус квадратига тўғри пропорционал, демак, интеграл остидаги функция радиусга пропорционал бўлиб, шар шаклида олинган жуда кичик V_1 ҳажмнинг радиуси нолга интилиши билан юқоридаги интеграл йўқолиб кетади. Демак:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (44.16)$$

(44.7) да ифодаланган тенгликнинг икки томонидан лапласиан оламиз: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$, сўнгра (44.11) билан (44.16) ни назарда тутиб, бундай ёзамиз: $\Delta\varphi = F + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, бундан:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = F \qquad (44.17)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, *кечикувчи потенциал* (44.6) *га мос бўлган дифференциал тенгламани топдик. Демак, кечикувчи потенциал юқорида топилган дифференциал тенгламанинг чексиз фазо учун ечими бўлади.* $F = 0$ ҳолда, яъни манбасиз нуқталар учун:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (44.18)$$

бўлади. *Бу дифференциал тенглама тўлқин тенгламаси дейилади. (44.17) да ифодаланган формула бир жинслимас тўлқин тенгламаси ёки Даламбер дифференциал тенгламаси дейилади.*

Биз текшириб чиққан кечикувчи потенциал ностационар майдоннинг кечикувчи скаляр-потенциалидир. Ностационар майдоннинг кечикувчи вектор потенциали ҳам, асосан, ўша дифференциал тенгламаларга бўйсунади. Юқорида келтирилган дифференциал тенгламалар тўлқинлар назариясида катта аҳамиятга эга.

45. БАЪЗИ ҚЎШИМЧАЛАР ВА ТАТБИҚЛАР

I. Натурал триэдр. Заррача ҳаракатининг траекторияси шу заррача радиус-векторининг годографидир. Ҳозир биз эгри чизиқли годограф билан шуғулланмоқчимиз.

Эгри чизиқнинг бирор нуқтасида унинг уринмасига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ нормаль дейилади. Эгри чизиқнинг ўша нуқтасида унинг уринмасига перпендикуляр бўлган текислик нормал текислик дейилади. Эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги барча нормаллар шу нуқтадаги нормал текисликда ётади.

Эгри чизиқнинг тайин нуқтасидан бошлаб, бирор аниқ томонга қаратиб олинган ёй узунлиги s бўлсин. M нуқта радиус-векторининг ёй бўйича ҳосиласи $\frac{dr}{ds}$ эгри чизиқ уринмасининг орти τ га тенглиги маълум:

$$\frac{dr}{ds}=\tau. \tag{45.1}$$

Уринма орти τ дан ёй узунлиги s бўйича ҳосила оламиз: $\frac{d\tau}{ds}=\frac{d^2r}{ds^2}$. Чексиз кичик бурилиш бурчагининг вектори $\delta\varphi$ ва орт дифференциали $d\tau$ орасидаги боғланиш, (21.11) га биноан, $d\tau=$ $=[\delta\varphi, \tau]$, бундан:

$$\frac{d\tau}{ds}=\left[\frac{\delta\varphi}{ds}\ \tau\right]. \tag{45.2}$$

$\frac{d\tau}{ds}$ вектор τ ортга перпендикулярдир, демак, $\frac{d\tau}{ds}$ вектор нормал текисликда ётади. *Бир-бирига чексиз яқин бўлган τ, $\tau+d\tau$ ортлар орқали ўтган текисликнинг лимит ҳолати ёпишма текислик дейилади.* Бошқача қилиб айтсак, ёпишма текислик τ ортнинг бурилиш текислигидир, вектор $\frac{\delta\varphi}{ds}$ эса бурилиш текислигига перпендикулярдир. Демак, (45.2) га мувофиқ $\frac{d\tau}{ds}$ вектор ёпишма текисликда ҳам ётади. *Шундай қилиб, вектор $\frac{d\tau}{ds}$ нормал текислик ва ёпишма текислик кесишган тўғри чизиқда ётиб, йўналиши эса $d\tau$ бўйича, яъни эгри чизиқнинг ботиқлик томонига қаратилган. $\frac{d\tau}{ds}$ вектор йўналишининг ортини ν орқали белгилайлик, у вақтда: $\frac{d\tau}{ds}=\left|\frac{d\tau}{ds}\right|\nu$. Шу ν орт билан аниқланган нормаль бош нормаль дейилади.*

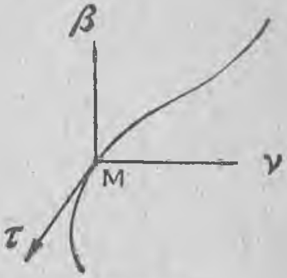
Эгри чизиқнинг бирор нуқтасида уринма ортидан ёй узунлиги бўйича олинган ҳосиланинг модули $\left|\frac{d\tau}{ds}\right|$ эгри чизиқнинг шу нуқтасидаги эгрилиги дейилади ва $\frac{1}{R}$ орқали белгиланади: $\frac{1}{R}=\left|\frac{d\tau}{ds}\right|$, R эса эгрилик радиуси дейилади. Шундай қилиб:

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{\nu}{R}. \tag{45.3}$$

(45.2) га мувофиқ: $\left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\frac{\delta\varphi}{ds}\right|$, демак $\left|\frac{d\tau}{ds}\right|$ эгрилик уринма ортининг эгри чизиқ бўйича бурилиш суръати билан ифодаланади. *Эгри чизиқнинг M нуқтасида ёпишма текисликка перпендикуляр қилиб олинган нормаль бинормаль дейилади.* Бинормаль ортини β орқали белгилайлик. Уринма орти τ билан бош нормаль орти ν бир-бирига перпендикуляр булиб, иккаласи ҳам ёпишма текисликда ётади. Бир-бирига перпендикуляр бўлган бу учта орт ўнг қул қоидасига буйсунсин, бу ҳолда:

$$\beta = [\tau\nu] \tag{45.4}$$

бўлади. (45.1) ва (45.2) дан τ, ν ортларнинг поляр векторлиги, β ортнинг эса псевдовекторлиги равшан. *Бу ортларнинг ўнг ориентация ҳосил қилиши* 148- расмда *тасвирланган бўлиб, улар натурал триэдр ёки табиий триэдрни ташкил қилади деб айтамиз.*



148-расм.

(45.4) дан $\frac{d\beta}{ds} = \left[\frac{d\tau}{ds}\nu\right] + \left[\tau\frac{d\nu}{ds}\right]$ ёки, (45.3) ни назарда тутсак:

$$\frac{d\beta}{ds} = \left[\tau\frac{d\nu}{ds}\right] \tag{45.5}$$

бўлади. Демак, $\frac{d\beta}{ds}$ вектор τ ортга перпендикулярдир; бу вектор β ортнинг ўзига ҳам перпендикуляр, яъни τ билан ν ортлар ётган текисликда ётади. Демак, $\frac{d\beta}{ds}$ вектор τ ортга коллинеардир:

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\nu}{T}, \tag{45.6}$$

бу ерда $\frac{1}{T}$ коэффициент $\frac{d\beta}{ds}$, ν векторларнинг бир йўналишда ёки қарама-қарши йуналишда бўлишига қараб, ё манфий ёки мусбат миқдордир. *Шу $\frac{1}{T}$ миқдор эгри чизиқнинг текширилаётган нуқтасидаги иккинчи эгрилиги ёки буралиши дейилади, T миқдор эса иккинчи эгрилик радиуси ёки буралиш радиуси дейилади.*

β ортнинг чексиз кичик буралиш бурчаги векторини $\delta\varphi$ десак, (21.11) га мувофик, $d\beta = [\delta\varphi\,\beta]$ ёки $\frac{d\beta}{ds} = \left[\frac{\delta\varphi}{ds}\beta\right]$ бўлади. Бундан $\left|\frac{d\beta}{ds}\right| = \left|\frac{\delta\varphi}{ds}\right|$. У вақтда, (45.6) га биноан, $\left|\frac{1}{T}\right| = \left|\frac{\delta\varphi}{ds}\right|$ бўлади. Демак, буралишнинг сон қиймати бинормаль ортининг эгри чизиқ бўйича бурилиш суръати билан ифодаланади. 148- расмдан фойдаланиб бундай ёзиш мумкин $\nu = [\beta\tau]$, бундан:

$$\frac{d\nu}{ds} = \left[\frac{d\beta}{ds}\tau\right] + \left[\beta\frac{d\tau}{ds}\right]$$

ёки, (45.6) ва (45.3) га мувофиқ:

$$\frac{d\nu}{ds} = \left[-\frac{\nu}{T}\tau\right] + \left[\beta\frac{\nu}{R}\right] = \frac{[\tau\nu]}{T} - \frac{[\nu\beta]}{R}.$$

Ўша 148- расмдан: $\tau = [\nu\beta]$. У вақтда, (45.4) га мувофиқ:

$$\frac{d\nu}{ds} = \frac{\beta}{T} - \frac{\tau}{R} \qquad (45.7)$$

бўлади.

Эгри чизиқ бўйича силжиш натижасида уринма орти τ, бинормаль орти β, бош нормаль орти ν нинг ўзгариши кўрсатилган (45.3), (45.6) ва (45.7) тенгликлар Френе-Серре формулалари дейилади.

Эгрилик радиуси оддий скалярдир.

(45.3) билан (45.1) га биноан, $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\nu}{R}$, демак:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^2r}{ds^2}\right). \qquad (45.8)$$

Эгрилик радиусининг оддий скаляр эканлиги бу формуладан ҳам очиқ кўриниб турибди. Аммо буралиш радиуси оддий скаляр эмас, у псевдоскалярдир. Ҳақиқатан, (45.5) ва (45.6) дан $-\frac{\nu}{T} = \left[\tau\frac{d\nu}{ds}\right]$ ёки $\frac{\nu}{T} = \left[\frac{d\nu}{ds}\tau\right]$. Бу вектор тенгликнинг икки томонини ν ортга скаляр кўпайтирайлик: $\frac{1}{T} = \left(\nu\left[\frac{d\nu}{ds}\tau\right]\right)$ ёки аралаш кўпайтма хусусиятидан фойдалансак:

$$\frac{1}{T} = \left(\tau\left[\nu\frac{d\nu}{ds}\right]\right) \qquad (45.9)$$

бўлади. Энди (45.1) дан $\tau = \frac{dr}{ds}$, (45.3) дан эса $\nu = R\frac{d\tau}{ds} = R\frac{d^2r}{ds^2}$.

Бу ердан $\frac{d\nu}{ds} = \frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2} + R\frac{d^3r}{ds^3}$, демак:

$$\left[\nu\frac{d\nu}{ds}\right] = \left[R\frac{d^2r}{ds^2},\ \frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2} + R\frac{d^3r}{ds^3}\right] = R^2\left[\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^3r}{ds^3}\right].$$

Бу топилган натижа билан (45.1) ни назарда тутиб, (45.9) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\frac{1}{T} = R^2\left(\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^3r}{ds^3}\right]\right)$$

ёки (45.8) дан фойдалансак:

$$\frac{1}{T}=\frac{\left(\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^3r}{ds^3}\right]\right)}{\left(\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^2r}{ds^2}\right)} \tag{45.10}$$

бўлади. *Буралиш радиусининг псевдоскаляр эканлиги бундан аён.*

Заррача тезланиш векторини ҳаракат траекториясига нисбатан уринма бўйича ва бош нормаль бўйича олинган компонентларга ажратиш масаласини Френе-Серре формуласидан фойдаланиб ҳал қилиш мумкин. Ҳаракатланувчи заррача радиус-вектори траектория ёйи воситасида вақтнинг мураккаб функциясидир. Шунинг учун тезлик вектори $v=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$ ёки, (45.1) га биноан, $v=\frac{ds}{dt}\tau$ бўлади, бу ердан $v=\frac{ds}{dt}$, яъни *тезликнинг сон қиймати ўтилган йўлнинг вақт бўйича ҳосиласига тенг.* Шундай қилиб, $v=v\cdot\tau$. Тезланиш вектори эса:

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(v\tau)=\frac{dv}{dt}\tau+v\frac{d\tau}{dt}=$$
$$=\frac{dv}{dt}\tau+v\frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}\tau+v^2\frac{d\tau}{ds}.$$

Френе-Серре формуласи (45.3) дан фойдалансак:

$$w=\frac{dv}{dt}\tau+\frac{v^2}{R}\nu.$$

Шундай қилиб, *тезланиш вектори икки векторга ажралади:* 1) *уринма йўналишидаги тангенциал тезланиш* $\frac{dv}{dt}\tau$ *ва* 2) *бош нормаль йўналишидаги нормал тезланиш* $\frac{v^2}{R}\nu$.

II. Галилей-Ньютон алмаштиришлари. Ҳаракатланувчи заррачанинг массаси m ва радиус-вектори r бўлсин. Заррачага таъсир қилувчи f куч билан заррача тезланиши $\frac{d^2r}{dt^2}$ орасидаги боғланиш Ньютоннинг ҳаракат қонунига бўйсунади:

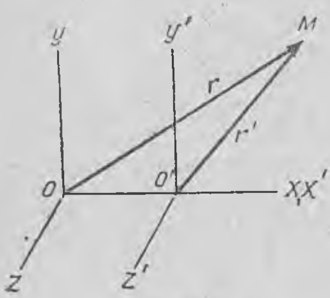
$$f=m\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{45.11}$$

Заррача ҳаракатини аниқлашда санаш системаларидан бири асос қилиб олинади. Санаш системалари бир-бирига нисбатан ҳар қандай ҳаракатда бўлиши мумкин.

Бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги санаш системалари инерциал системалар деб аталади. Бундай системалар чексиз кўп.

Механиканинг нисбийлик принципига биноан, механик ҳодисаларнинг рўй бериши барча инерциал системаларда бир хилдир. Демак, механиканинг асосий қонуни — Ньютоннинг ҳаракат қонуни барча инерциал системаларда бир хил ифодаланади.

Санаш системасида қабул қилинган координаталар ихтиёрий танланиши мумкин. Икки инерциал системани: K система ва K' системани олайлик. K' системанинг K системага нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат тезлиги $\boldsymbol{v}$ бўлсин. Таърифга мувофиқ, $\boldsymbol{v}$ вектор ўзгармасдир. Заррачанинг радиус-вектори ва Декарт координаталари K системада $\boldsymbol{r}$, x, y, z ва K' системада $\boldsymbol{r}'$, x', y', z' бўлсин. Тезлик вектори билан аниқланган тўғри чизиқни x ва x' ўқлар деб ҳисоблайлик (149- расм).



149- расм.

Бошланғич вақт $t = 0$ пайтда K системанинг координаталар боши O ва K' системанинг координаталар боши O' бир нуқтада турган десак, $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{v}t$ бўлади. У вақтда:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \tag{45.12}$$

ёки $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$ бўлганлиги учун:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{45.13}$$

Механикада вақт ўтиши ҳамма системаларда бир хил ҳисобланади, яъни:

$$t' = t. \tag{45.14}$$

Инерциал системаларнинг биридан иккинчисига ўтишни ифодаловчи (45.13) ва (45.14) формулалар тўплами Галилей—Ньютон алмаштиришлари дейилади.

Тинч ҳолатда ҳисобланган K системага нисбатан ҳаракатдаги K' системанинг $\boldsymbol{v}$ тезлиги *кўчирма тезлик* дейилади. Заррачанинг K системага нисбатан $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ тезлиги *абсолют тезлик* дейилади. Заррачанинг K' системага нисбатан $\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ тезлиги *нисбий тезлик* дейилади. Галилей — Ньютон алмаштиришларини вектор шаклда ифодаловчи (45.12) формуладан:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \boldsymbol{v} \tag{45.15}$$

бўлади, яъни *заррачанинг абсолют тезлиги нисбий тезлик билан кўчирма тезлик йиғиндисига тенгдир.* Механиканинг тезликларни қўшиш теоремаси ана шундан иборат. Заррача тезлиги турли инерциал системаларда турлича булади. (45.15) га мувофиқ:

$$\frac{d^2 r}{dt^2}=\frac{d^2 r'}{dt^2}, \tag{45.16}$$

яъни *ҳамма инерциал системаларда заррача бир хил тезланишга эга.* Заррача массасининг ўзгармаслиги, яъни турли инерциал системаларда бир хил бўлиши назарда тутилса, юқорида айтилганлардан равшанки, механиканинг асосий қонунини ифодаловчи (45.11) да кўрсатилган ҳаракат тенгламаси ҳамма инерциал системалар учун бир хил ёзилади.

Классик физика ва механика фанларида Галилей — Ньютон алмаштиришлари асос қилиб олинади.

III. Гравитацион майдон дифференциал тенгламаси. Нуқтавий масса M_i нинг ҳосил қилган гравитацион майдон кучланганлигининг вектори $\mathbf{g}_i$ ва потенциали φ_i учун (29.11), (29.12) ва (29.13) ларга асосан:

$$\mathbf{g}_i=-\gamma\frac{M_i}{r_i^2}\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$$

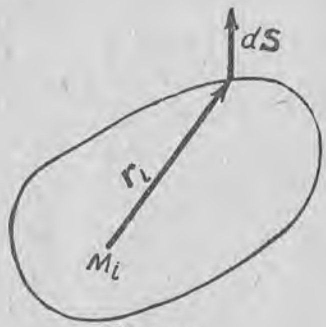
ёки

$$\mathbf{g}_i=-\operatorname{grad}\varphi_i \tag{45.17}$$

бўлади, бу ерда:

$$\varphi_i=-\frac{\gamma M_i}{r_i}. \tag{45.18}$$

Нуқтавий масса M_i ни қуршаб олган ёпиқ сирт орқали $\mathbf{g}_i$ вектор оқимини ҳисоблаб чиқайлик (150- расм):



150- расм.

$$\oint(\mathbf{g}_i d\mathbf{S})=-\oint\left(\gamma\frac{M_i}{r_i^2}\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}d\mathbf{S}\right)=-\gamma M_i\oint\frac{(\mathbf{r}_i d\mathbf{S})}{r_i^3}.$$

Бу ерда ёпиқ сирт орқали ўтувчи оқим фақат берилган нуқтавий M_i массага боғлиқ бўлиб, ёпиқ сирт шаклининг ҳеч қандай аҳамияти йўқ. Шу сабабли, ёпиқ сиртни сферик сирт деб ҳисоблаб, унинг маркази сифатида нуқтавий M_i массани олишимиз мумкин. У вақтда $(\mathbf{r}_i d\mathbf{S})=r_i dS$ ва

$$\oint(\mathbf{g}_i d\mathbf{S})=-\gamma M_i\oint\frac{dS}{r_i^2}=-\frac{\gamma M_i}{r_i^2}\oint dS$$

Сферик сирт юзи $\oint dS = 4\pi r_i^2$ бўлганлигидан:

$$\oint (g_i dS) = -4\pi\gamma M_i \tag{45.19}$$

бўлади.

Ёпиқ сирт ичида нуқтавий M_1, $M_2, \ldots, M_n$ массалар бўлса, шу ёпиқ сирт орқали ўтувчи умумий оқимни билиш учун юқоридаги ифодани i нинг барча қийматлари ($i = 1, 2, \ldots, n$) бўйича йиғиб чиқиш лозим:

$$\oint (\mathbf{g}dS) = -4\pi\gamma M, \tag{45.20}$$

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i, \tag{45.21}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i, \tag{45.22}$$

бу ерда M — ёпиқ сирт билан чегараланган умумий масса, $\mathbf{g}$ — шу умумий масса гравитацион майдони кучланганлигининг вектори, $\oint (\mathbf{g}dS)$ ёпиқ сирт орқали ўтувчи умумий оқим. (45.21) ва (45.17) га биноан:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} \varphi_i = -\operatorname{grad} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

ёки

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{45.23}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \tag{45.24}$$

бу ерда φ — умумий масса гравитацион майдонининг потенциали.

Ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажмда жойлашган масса айрим нуқталарда эмас, балки узлуксиз равишда тақсимланган бўлиши мумкин. Ҳажмни майда элементларга бўлиб чиқиб, улардан ихтиёрий бирини ΔV ва ундаги массани ΔM орқали белгилайлик. Массанинг бирор нуқта атрофида қандай тақсимланганини аниқроқ билиш учун масса элементи ΔM нинг ҳажм элементи ΔV га нисбатини тузамиз ва ҳажм элементини мумкин қадар кичик қилиб оламиз. *Ҳажм элементи ΔV нолга интилганда олинган $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ нисбатнинг лимити массасининг берилган нуқтадаги зичлиги дейилади. Бу зичликни ρ орқали белгиласак, таърифга мувофиқ:*

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \tag{45.25}$$

бўлади. Бу ердан:

$$M = \int \rho \, dV. \tag{45.26}$$

(45.20) ва (45.23) формулаларни узлуксиз тақсимланган масса учун ҳам ишлатсак бўлади. У вақтда (45.20) га (45.26) ни қўйсак:

$$\oint (\boldsymbol{g} \, d\boldsymbol{S}) = -4\pi\gamma \int \rho \, dV \tag{45.27}$$

бўлади. Аммо Гаусс — Остроградский теоремасига мувофиқ $\oint (\boldsymbol{g} d\boldsymbol{S}) = \int \mathrm{div} \boldsymbol{g} dV$. Демак, $\int \mathrm{div} \boldsymbol{g} dV = -4\pi\gamma \int \rho \, dV$. Интеграллаш ҳажми ихтиёрий бўлганлигидан:

$$\mathrm{div} \, \boldsymbol{g} = -4\pi\gamma\rho \tag{45.28}$$

бўлади. *Бу ифода гравитацион майдон назариясининг асосий формулаларидан биридир.* Бу асосий формулани Лаплас оператори орқали ифодалаш мумкин. (45.23) ни (45.28) га қўйсак:

$$\Delta \varphi = 4\pi\gamma\rho \tag{45.29}$$

келиб чиқади ёки Декарт системасида:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi\gamma\rho \tag{45.30}$$

бўлади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалардан иборат бу дифференциал тенглама *гравитацион майдоннинг Пуассон тенгламасидир.* Массасиз нуқталар ($\rho = 0$) учун:

$$\Delta \varphi = 0 \tag{45.31}$$

ёки Декарт координаталарида:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{45.32}$$

бўлади. Бу дифференциал тенглама *гравитацион майдоннинг Лаплас тенгламасидир.*

Юқоридаги (45.18) ва (45.24) га биноан, нуқтавий массалар системасининг потенциали:

$$\varphi = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{r_i}. \tag{45.33}$$

Ихтиёрий олинган V ҳажмда ρ зичлик билан тақсимланган M массани жуда майда қисмларга бўлиб, уларнинг ҳар бирини нуқтавий масса деб қараш мумкин. Элементар ҳажм dV даги масса $dM = \rho \, dV$ бўлади. (45.33) формуладаги йиғиндининг лимити бўлган интегрални ёзиш учун M_i ни ρdV билан алмаштиришимиз керак. Шундай қилиб:

$$\varphi = -\gamma \int \frac{\rho}{r} dV. \tag{45.34}$$

Бу формулада ифодаланган потенциал Ньютоннинг гравитацион потенциали номи билан юритилади.

Потенциал учун ёрдамчи мулоҳазалар воситасида топилган сўнгги ифода юқорида келтирилган Пуассон дифференциал тенгламасининг ечими деб ҳисобланиши мумкин. Бу масала ҳақида 39-параграфда ҳам гапирилган эди.

IV. Марказий кучлар майдонида заррача ҳаракати. Бирор нуқтавий манба, масалан, масса ёки заряд майдони берилган бўлсин. Майдонга киритилган заррачанинг манба турган ўзгармас Q нуқтага нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{r}$, майдоннинг заррачага таъсир кучи $\boldsymbol{F}$ деб фараз қилайлик. Кучнинг миқдори масофа функцияси, йўналиши эса радиус-векторга коллинеар бўлсин, у ҳолда:

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{r}^0 \tag{45.35}$$

бўлади, бу ерда $\boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot$ *Бундай кучлар марказий кучлар дейилади.* Ҳаракат миқдори моментининг таърифига мувофиқ, $\boldsymbol{L} = m[\boldsymbol{rv}] = m\left[\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]$, бу ерда m — заррача массаси. Вақт бўйича $\boldsymbol{L}$ векторданҳосила оламиз:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = m\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] + m\left[\boldsymbol{r}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right] = m\left[\boldsymbol{r}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right] = 0,$$

чунки ҳаракат қонунига биноан $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot$ Шундай қилиб:

$$\boldsymbol{L} = m\left[\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] = \text{const}, \tag{45.36}$$

яъни *марказий кучлар майдонидаги заррачанинг ҳаракат миқдори моменти ўзгармасдан сақланади.* $\boldsymbol{L}$ вектор $\boldsymbol{r}$ ва $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ векторлар текислигига перпендикулярдир, демак, заррача ҳаракати шу ўзгармас текисликда бўлади.

Таъсир кучининг миқдори масофанинг бирор даражасига пропорционал бўлиши мумкин:

$$F(r) = Ar^n, \tag{45.37}$$

бу ерда A — аниқ физик константа, n — бирор мусбат ёки манфий сон. Текширишларда учрайдиган муҳим ҳолларнинг бирига $n = 1$ ва иккинчисига $n = -2$ мос келади. Биринчи ҳол —

бу масофага пропорционал бўлган тортиш кучлари ($A = -\alpha$, $\alpha > 0$):

$$\boldsymbol{F} = -\alpha\boldsymbol{r}. \tag{45.38}$$

Бундай кучлар гармоник кучлар дейилади.

Иккинчи ҳол — бу масофа квадратига тескари пропорционал бўлган тортиш кучлари ($A = -\beta, \beta < 0$):

$$\boldsymbol{F} = -\beta\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}. \tag{45.39}$$

Бу кучларга мисол қилиб, гравитацион кучлар ёки электростатик кучлар курсатилса бўлади.

Биринчи ҳолни қараб чиқайлик.

Ҳаракат қонунига мувофиқ, $\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$, у вақтда (45.38) дан:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0 \tag{45.40}$$

келиб чиқади, бу ерда $\omega^2 = \frac{\alpha}{m}$. Юқоридаги дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_1\cos(\omega t + c_1),$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_2\cos(\omega t + c_2) \tag{45.41}$$

кўринишларда олиниши мумкин ($\boldsymbol{b}_1$ ва $\boldsymbol{b}_2$ — ўзгармас векторлар, c_1 ва c_2—ўзгармас скалярлар). Бу хусусий ечимлар йиғиндиси ўша дифференциал тенгламанинг умумий ечимини беради:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_1\cos(\omega t + c_1) + \boldsymbol{b}_2\cos(\omega t + c_2). \tag{45.42}$$

(45.41) даги хусусий ечимларнинг ҳар бири гармоник тўғри чизиқли вектор тебранишни, (45.42) даги умумий ечим эса гармоник эллиптик вектор тебранишни ифодалайди (18-параграф). *Шундай қилиб, гармоник куч таъсиридаги заррача, умуман олганда, эллипс бўйича ҳаракат қилади.* Куч манбаининг турган нуқтаси шу эллипснинг геометрик марказидир.

Энди иккинчи ҳолни қараб чиқайлик.

(45.39) да $\boldsymbol{F}$ ўрнига ҳаракат қонунига мувофиқ, $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}$ қўйилса:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\beta}{m}\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2} \tag{45.43}$$

бўлади.

Ҳаракат миқдори моментини мослаштириб ёзайлик:

$$L = m\left[r\,\frac{dr}{dt}\right] = m\left[rr^0\,\frac{d}{dt}(rr^0)\right],\quad \frac{d}{dt}(rr^0) = \frac{dr}{dt}\,r^0 + r\,\frac{dr^0}{dt},$$

демак:

$$L = mr^2\left[r^0\,\frac{dr^0}{dt}\right].$$

Сўнгги ва (45.43) ифоданинг чап томонларини ўзаро ва ўнг томонларини ўзаро вектор равишда кўпайтирайлик:

$$\left[L\,\frac{d^2r}{dt^2}\right] = -\beta\left[\left[r^0\,\frac{dr^0}{dt}\right]r^0\right] = \beta\left[r^0\left[r^0\,\frac{dr^0}{dt}\right]\right] =$$
$$= \beta\left\{r^0\left(r^0\,\frac{dr^0}{dt}\right) - \frac{dr^0}{dt}(r^0r^0)\right\} = -\beta\,\frac{dr^0}{dt},$$

чунки орт ва унинг ҳосиласи бир-бирига перпендикуляр бўлганлигидан уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенгдир. (45.36) га мувофиқ, $L = \text{const}$, демак, $\left[L\,\frac{d^2r}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}\left[L\,\frac{dr}{dt}\right]$; у вақтда $\frac{d}{dt}\left[L\,\frac{dr}{dt}\right] = -\beta\,\frac{dr^0}{dt}$ ёки $\frac{d}{dt}\left\{\left[L\,\frac{dr}{dt}\right] + \beta r^0\right\} = 0$ бўлади.

Агар ўзгармас векторни $-\beta e$ орқали белгиласак:

$$\left[L\,\frac{dr}{dt}\right] + \beta\,r^0 = -\beta\,e,\ \text{бундан}\ r^0 + e = \frac{1}{\beta}\left[\frac{dr}{dt}\,L\right]$$

келиб чиқади. Сўнгги ифоданинг икки томонини радиус-векторга скаляр кўпайтирайлик:

$$r + (r\,e) = \frac{1}{\beta}\left(r\left[\frac{dr}{dt}\,L\right]\right) = \frac{1}{\beta}\left(L\left[r\,\frac{dr}{dt}\right]\right).$$

Аммо $(r\,e) = r\,e\cos(\widehat{r,\,e})$, $\left[r\,\frac{dr}{dt}\right] = \frac{1}{m}L$, у вақтда:

$$r\,\{1 + e\cos(\widehat{r,\,e})\} = \frac{L^2}{m\beta}$$

бўлади.

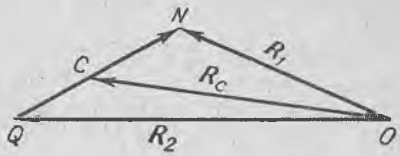
Энди $(\widehat{r,\,e}) = \varphi$ ва $\frac{L^2}{m\beta} = p$ десак:

$$r = \frac{p}{1 + l\cos\varphi}. \tag{45.44}$$

Бу формула аналитик геометриядан маълум бўлган конус кесимининг поляр координаталарда ифодаланган тенгламасидир (p — параметр, e — эксцентриситет). $e < 1$ бўлса, конус кесими эллипс бўлади ва куч манбаининг жойлашган нуқтаси шу эллипс фокусларидан бири ҳисобланади.

Масофа квадратига тескари пропорционал бўлган марказий кучлар таъсиридаги заррача ҳаракати, одатда, Кеплер ҳаракати дейилади.

V. Келтирилган масса. Юқоридаги Кеплер ҳаракатини текширишда юритилган мулоҳазаларда биз майдон таъсиридаги заррача майдон манбаига таъсир қилмайди, демак, бу манба қўзғалмасдан тинч туради деб ҳисоблаган эдик. Ҳақиқатда манба билан заррача ўзаро таъсир қилади.



151-расм.

Манба ҳисобланган заррачанинг массаси M ва фазода ихтиёрий олинган O нуқтага нисбатан радиус-вектори R_2 бўлсин. Манба билан ўзаро таъсир этаётган заррачанинг массаси m ва уша O нуқтага нисбатан радиус-вектори R_1 бўлсин (151-расм). Заррачанинг манбага нисбатан радиус-вектори $\overrightarrow{QN}$ учун:

$$r = R_1 - R_2. \qquad (45.45)$$

Ҳаракатнинг тегишли тенгламаларини ёзайлик:

$$M\frac{d^2R_2}{dt^2} = F_2, \quad m\frac{d^2R_1}{dt^2} = F_1.$$

Бу ерда F_1, F_2 кучлар заррачалар орасидаги масофа функцияси бўлиб, шу масофа бўйича йўналган ва бир-бирига қарама-қаршидир:

$$F_2 = f(r)\,r^0, \quad F_1 = -f(r)\,r^0.$$

У вақтда:

$$M\frac{d^2R_2}{dt^2} = f(r)\,r^0, \; m\frac{d^2R_1}{dt^2} = -f(r)\,r^0 \qquad (45.46)$$

бўлади. Бу тенгламалардан: $M\frac{d^2R_2}{dt} + m\frac{d^2R_1}{dt^2} = 0$, демак:

$$M\frac{dR_2}{dt} + m\frac{dR_1}{dt} = \text{const}. \qquad (45.47)$$

Икки заррача системаси инерция марказининг радиус-вектори, (18.1) га мувофиқ, $R_c = \frac{MR_2 + mR_1}{M+m}$ бўлади. Бундан инерция марказининг тезлигини топамиз:

$$\frac{dR_c}{dt} = \left(\frac{1}{M+m}\right)\left(M\frac{dR_2}{dt} + m\frac{dR_1}{dt}\right).$$

У вақтда, (45.47) га биноан, инерция марказининг тезлиги ўзгармасдан сақланади $\left(\frac{dR_c}{dt} = \text{const}\right)$, яъни ўзаро таъсир этаётган икки заррачанинг инерция маркази тўғри чизиқли текис ҳаракатда ёки тинч ҳолатда бўлади.

Бизни қизиқтирган масала икки заррачанинг ўзаро нисбий ҳаракатидир. Демак, санаш системасини шундай қилиб олиш мумкинки, унга нисбатан инерция маркази тинч ҳолатда бўлсин.

Юқоридаги (45.46) тенгламаларнинг биринчисини M га, иккинчисини m га бўлиб сўнгра улардан айирма олайлик: $\frac{d^2R_2}{dt^2} - \frac{d^2R_1}{dt^2} = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) f(r)\, \boldsymbol{r}^0$ ёки (45.45) га мувофиқ, $-\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) f(r)\, \boldsymbol{r}^0$. Қавсдаги ифодани $\frac{1}{\mu}$ орқали белгилайлик: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$, бундан:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} \tag{45.48}$$

келиб чиқади. У вақтда:

$$-f(r)\, \boldsymbol{r}^0 = \mu \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{45.49}$$

бўлади. Сўнгги ифодани массаси μ бўлган қандайдир заррача ҳаракатининг дифференциал тенгламаси деб ҳисоблаш мумкин. Фараз қилинган бу заррачанинг инерция марказига нисбатан радиус-вектори ўзаро таъсир қилувчи икки заррачанинг нисбий радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ га тенглигини кўриб турибмиз. (45.48) *га мувофиқ таърифланган масса келтирилган масса деб аталади.*

Шундай қилиб, ўзаро таъсир қилувчи икки заррача системасининг ҳаракати ўрнига келтирилган массага эга заррачанинг инерция маркази атрофидаги ҳаракатини текшириш мумкин.

(45.48) га мувофиқ:

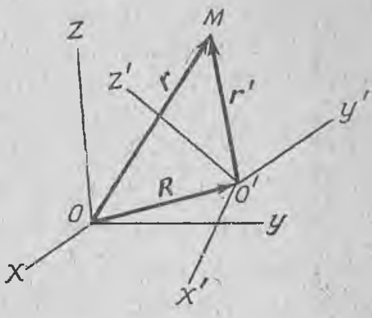
$$\mu = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}. \tag{45.50}$$

Биз майдон манбаининг массаси майдондаги заррача массасига нисбатан жуда катта ($M \gg m$) бўлгандагина келтирилган массани m билан алмаштириш мумкинлигини кўриб турибмиз; демак, майдон манбаи турган нуқта ҳаракатсиз инерция маркази деб қаралса бўлади.

Осмон механикаси, атом назарияси ва бошқа соҳаларда келтирилган масса тушунчаси катта аҳамиятга эгадир.

VI. Заррачанинг мураккаб ҳаракати. Заррачанинг ҳаракати турли санаш системаларига нисбатан турличадир. Санаш системалари ҳам бир-бирига нисбатан турлича ҳаракат қилиши мумкин. Асосий деб ҳисобланган санаш системаси K система ва унга нисбатан ҳаракатланувчи санаш системаси K' система бўлсин. Заррачанинг радиус-вектори K системада $\boldsymbol{r}$ ва K' системада $\boldsymbol{r}'$ бўлсин, K' система бошининг K система бошига нисбатан радиус-вектори $\boldsymbol{R}$ булсин (152-расм). *Заррачанинг K системага нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат (ёки абсолют ҳаракат) ва K' системага нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат, K' системанинг K системага нисбатан ҳаракати эса кўчирма ҳаракат дейилади.* Расмдан равшанки:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'. \tag{45.51}$$



152-расм.

Ўзгармас деб ҳисобланган K системанинг Декарт ортлари $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ҳам ўзгармайди, ҳаракатланувчи K' системанинг Декарт ортлари $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ эса ўзгаради. Тегишли радиус-векторлар:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}' &= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \end{aligned} \tag{45.52}$$

бўлади. Сўнгги ифодани вақт бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'\right) + \left(x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right).$$

Векторнинг чизиқли тезлиги ва бурчак тезлиги орасидаги боғланишни ифодаловчи Эйлер формуласи (21.16) га биноан:

$$\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{i}'], \quad \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{j}'], \quad \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{k}'] \tag{45.53}$$

бўлади. У вақтда:

$$x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}'],$$

демак:

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'\right) + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}']. \tag{45.54}$$

Шуни назарда тутиб, (45.51) ни вақт бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'\right) + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}']. \tag{45.55}$$

Заррачанинг K системага нисбатан тезлиги абсолют тезлик дейилади:

$$v_a = \frac{dr}{dt}. \tag{45.56}$$

Агар K' система K системага нисбатан ҳаракатсиз бўлса, $\frac{dR}{dt} = 0$ ва $\omega = 0$ бўлади. *K' системада заррача турган нуқтанинг K системага нисбатан тезлиги кўчирма тезлик дейилади, демак, у:*

$$v_k = \frac{dR}{dt} + [\omega r'] \tag{45.57}$$

бўлади. Агар K' система айланма ҳаракатда бўлмаса ($\omega = 0$), унинг барча нуқталари бир хил $\frac{dR}{dt}$ кўчирма тезлик билан ҳаракатланади, яъни бу нуқталар бир хил силжиш билан илгариланади. *Бундай ҳаракат илгариланма ҳаракат, $\frac{dR}{dt}$ эса илгариланма тезлик дейилади.* Илгариланма тезликни v_u орқали белгиласак:

$$v_u = \frac{dR}{dt}. \tag{45.58}$$

бўлади.

Заррачанинг K' системага нисбатан тезлиги нисбий тезлик дейилади, демак у:

$$v_н = \frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k' \tag{45.59}$$

бўлади. Шундай қилиб:

$$v_a = v_u + v_н + [\omega r'] \tag{45.60}$$

ёки

$$v_a = v_k + v_н,$$

яъни *абсолют тезлик кўчирма тезлик билан нисбий тезлик йиғиндисига тенг.*

Заррачанинг ҳаракат тезланишини текшириб кўрамиз. Шу мақсадда (45.60) ни вақт бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_u}{dt} + \frac{dv_н}{dt} + \left[\frac{d\omega}{dt} r'\right] + \left[\omega \frac{dr'}{dt}\right], \tag{45.61}$$

бу ерда бурчак тезлигининг вақт бўйича $\frac{d\omega}{dt}$ ҳосиласи *бурчак тезланишидир.*

Заррачанинг *абсолют тезланиши* ва *илгариланма тезланиши учун* қуйидагиларни ёзамиз:

$$w_a = \frac{dv_a}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}, \tag{45.62}$$

$$w_u = \frac{dv_u}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2}. \tag{45.63}$$

(45.59) дан:

$$\frac{dv_н}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} i' + \frac{d^2y'}{dt^2} j' + \frac{d^2z'}{dt^2} k' + \frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}$$

бўлади. Бу ифоданинг ўнг томонидаги биринчи учта ҳадни ёзишда i', j', k' ортлар ўзгармас деб ҳисобланди. Демак, заррачанинг K' системага нисбатан тезланиши, яъни *нисбий тезланиши* $w_н$ бундай бўлади:

$$w_н = \frac{d^2x'}{dt^2} i' + \frac{d^2y'}{dt^2} j' + \frac{d^2z'}{dt^2} k'. \tag{45.64}$$

демак:

$$\frac{dv_н}{dt} = w_н + \frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}$$

ёки (45.53) ва (45.59) га мувофиқ:

$$\frac{dv_н}{dt} = w_н + [\omega v_н]. \tag{45.65}$$

(45.54) га (45.59) ни қўйсак, $\frac{dr'}{dt} = v_н + [\omega r']$, у вақтда:

$$\left[\omega \frac{dr'}{dt}\right] = [\omega v_н] + [\omega[\omega r']] \tag{45.66}$$

бўлади. Энди (45.62), (45.63), (45.65), (45.66) ларни (45.61) га қўямиз:

$$w_a = w_u + w_н + 2[\omega v_н] + \left[\frac{d\omega}{dt} r'\right] + [\omega[\omega r']]. \tag{45.67}$$

Кўчирма ҳаракат тезланишини билиш учун бу формулада нисбий тезлик билан нисбий тезланиш нолга тенг деб ҳисобланиши керак: $v_н = 0$, $w_н = 0$. Демак, *кўчирма тезланиш учун*:

$$w_k = w_u + \left[\frac{d\omega}{dt} r'\right] + [\omega[\omega r']] \tag{45.68}$$

бўлади. У вақтда:

$$w_a = w_н + w_k + 2[\omega v_н] \tag{45.69}$$

келиб чиқади. *Нисбий ҳаракат билан кўчирма ҳаракатнинг ўзаро таъсирида ҳосил бўлган қўшимча* $2[\boldsymbol{\omega v}_н]$ *тезланиш бурилиш тезланиши ёки Кориолис тезланиши дейилади:*

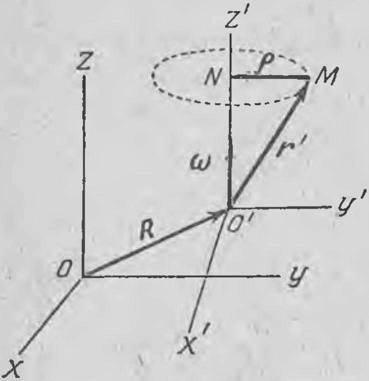
$$\boldsymbol{w}_{кор} = 2[\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{v}_н]. \tag{45.70}$$

Шундай қилиб:

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_н + \boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{w}_{кор}, \tag{45.71}$$

яъни *абсолют тезланиш нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари йиғиндисига тенгдир.* Мураккаб ҳаракатда тезланишларни қўшиш теоремаси ана шундан иборат.

(45.70) га мувофиқ, Кориолис тезланишининг нолга тенг бўлиши учун ё $\boldsymbol{\omega} = 0$ ёки $\boldsymbol{v}_н = 0$, ёхуд $\boldsymbol{\omega}$ билан $\boldsymbol{v}_н$ коллинеар бўлиши керак.



153- расм.

Хусусий бир ҳолни кўриб чиқайлик. K' система ўзгармас ўқ атрофида текис айланма ҳаракатда бўлсин, яъни $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ ва $\boldsymbol{R} = \text{const}$, у вақтда $\boldsymbol{w}_и = 0$ ва $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ бўлади, демак (45.68) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{w}_k = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}']] \tag{45.72}$$

бўлади. 152- расмдаги Z ва Z' ўқларни айланиш ўқига параллел қилиб олишимиз мумкин (153- расм), демак, $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$. Икки қайтали вектор кўпайтма хусусиятига кўра:

$$\boldsymbol{w}_k = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}']] = \omega^2[\boldsymbol{k}'[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}']] =$$
$$= \omega^2\{\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}') - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}'\} = \omega^2\{z'\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{r}'\}$$

бўлади. Бу ердаги $z'\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{r}'$ вектор айирма расмда M нуқтадан айланиш ўқидаги N марказга қаратилган $\boldsymbol{\rho}$ вектор билан тасвирланади. Шундай қилиб:

$$\boldsymbol{w}_k = \omega^2 \boldsymbol{\rho}, \tag{45.73}$$

яъни *кўчирма тезланиш айланиш марказига қаратилган: бу ерда кўчирма тезланиш марказга интилма тезланишдир.* Сўнгги ифодага бошқа шакл бериб ҳам ёзиш мумкин. Биз текшираётган ҳол учун $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = 0$ (чунки $\boldsymbol{R} = \text{const}$) бўлганлигидан, (45.57) га биноан, $v_k = [\omega r']$, у вақтда $v_k = \omega r' \sin \widehat{(\omega, r')} = \omega\rho$, бу ердан $\omega = \frac{v_k}{\rho}$, демак:

$$w_k = \frac{v_k^2}{\rho^2} \rho \tag{45.74}$$

бўлади. K' система K системага нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилса (яъни бу системалар инерциал бўлса), кўчирма тезланиш ва Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади, абсолют тезланиш нисбий тезланишдан фарқ қилмайди, демак, заррача тезланиши барча инерциал системаларда бир хил бўлади. Кўчирма тезланиш билан Кориолис тезланиши инерциал бўлмаган системагагина, яъни ноинерциал системагагина хосдир.

VII. Инерция кучлари. Ньютоннинг ҳаракат қонунига биноан, заррачага таъсир қилувчи f куч заррача массаси m билан тезланиши $\frac{d^2r}{dt^2}$ кўпайтмасига тенг:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = f. \tag{45.75}$$

Механиканинг нисбийлик принципига кўра, Ньютоннинг ҳаракат қонуни барча инерциал системаларда бир хил ифодаланади. Демак, чексиз кўп инерциал системаларнинг ихтиёрий бирини асосий санаш системаси қилиб олиш мумкин. Олдинги иловадаги асосий санаш системаси деб ҳисобланган *K система ана шундай инерциал, K' система эса ноинерциал системадир.*

Асосий санаш системасига — K системага нисбатан заррача тезланиши $\frac{d^2r}{dt^2}$ *абсолют тезланиш* дейилиб, w_a орқали белгиланган эди (45.62), демак, (45.75) га мувофиқ:

$$mw_a = f \tag{45.76}$$

бўлади. Заррачага таъсир қилувчи f куч аслида қандайдир моддий манба билан боғланган бўлади, f куч шу моддий манба ва заррача орасидаги боғланишни, яъни ўзаро таъсирни ифодалайди, демак, у—санаш системаларининг танланишига боғлиқ эмас.

Мураккаб ҳаракатдаги абсолют тезланишни ифодаловчи (45.71) дан фойдалансак, (45.76) га биноан:

$$f = mw_н + mw_k + mw_{кор}$$

бўлади, бу ердан:

$$mw_н = f - mw_k - mw_{кор} \tag{45.77}$$

келиб чиқади. Янги белгилар киритайлик:

$$f_k = -mw_к\,, \tag{45.78}$$

$$f_{кор} = -mw_{кор}\,, \tag{45.79}$$

демак:

$$mw_н = f + f_k + f_{кор} \tag{45.80}$$

бўлади.

Масса ва манфий ишорали тезланиш кўпайтмаси билан ифодаланган кучлар одатда инерция кучлари деб юритилади: f_k — кўчирма инерция кучи ва $f_{кор}$ — Кориолис инерция кучи. (45.70), (45.73), (45.78) ва (45.79) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$f_k = -m\omega^2\rho\,, \tag{45.81}$$

$$f_{кор} = 2m\,[v_н\omega] \tag{45.82}$$

153- расмдан кўрамизки, (45.81) га мувофиқ, f_k куч айланиш ўқидаги N марказдан M нуқта томон қаратилган; *кўчирма инерция кучи f_k марказдан қочирма куч деб аталади.*

Заррача тезланиши w_a барча инерциал системаларда бир хил. Заррачага таъсир қилувчи f куч, Ньютоннинг ҳаракат қонунини ифодаловчи (45.76) формулага биноан, масса ва тезланиш кўпайтмасига тенг. Лекин турли ноинерциал системаларга нисбатан заррача тезланиши турлича бўлади. Массанинг тезланишга кўпайтмаси ҳам турли ноинерциал системаларда турличадир. Заррачага таъсир қилувчи куч санаш системаларига боғланган эмас. У вақтда ноинерциал системага нисбатан олинган заррача тезланиши билан масса кўпайтмаси шу заррачага таъсир қилувчи кучга тенг бўлмайди. Демак, Ньютон ҳаракат қонунининг ифодасидан ноинерциал система учун фойдаланиб бўлмайди. Таъсир кучи билан бирга инерция кучлари ҳам назарга олинса, у вақтда ноинерциал система учун ҳам Ньютоннинг ҳаракат қонунини ишлатиш мумкин. Айтилганлар (45.80) да ифодаланган. *Одатда*, (45.80) *тенглик заррачанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси дейилади.*

Қуёш атрофида ва ўзининг ўқи атрофида айланма ҳаракатдаги Ер ноинерциал системага яққол мисол бўла олади. Ернинг айланиши билан ердаги нисбий ҳаракат туфайли ҳосил булган Кориолис инерция кучлари натижасида рўй берувчи ҳодисалар жуда кўп: Фуко маятниги тебраниш текислигининг бурилиши, ер устида ҳаракатланувчи жисмнинг шимолий ярим шарда ўнгга ва жанубий ярим шарда чапга силжиши (жумладан, дарё қирғоқларининг ёки темир йўл рельсларининг ейилиши) вертикаль бўйлаб тушувчи жисмнинг шарққа қараб четланиши ва ҳоказо. Ер атмосферасидаги, денгиз ва океанлардаги оқимлар билан боғлиқ бўлган баъзи ҳодисаларнинг сабабчиси ҳам шу Кориолис инерция кучларидир.

Инерция кучлари инерциал системаларда рўй бермайди. Инерция кучлари фақат ноинерциал системалардагина мавжуддир.

Ньютон қонунларига асосланган механика фанида инерция кучлари ва гравитацион кучлар бир-биридан фарқли уларoқ, турли табиатли кучлар ҳисобланади. Лекин Эйнштейн яратган умумий нисбийлик назариясида инерция кучлари ва гравитацион кучлар бир-биридан ҳеч қандай фарқ қилмайди, улар ўзаро эквивалентдир.

VIII. Идеал суюқликнинг асосий дифференциал тенгламаси. Суюқлик ичида шу суюқликнинг ёпиқ сирт билан чегараланган заррачаларига бу ёпиқ сиртдан ташқарида турган заррачалари қандайдир кучлар билан таъсир қилади. *Агар шу кучлар ёпиқ сиртнинг ҳар бир нуқтасида перпендикуляр бўйича ичкарига қаратилган бўлса, бундай хусусиятга эга суюқлик идеал суюқлик дейилади. Юз бирлигига перпендикуляр равишда таъсир қилувчи кучнинг сон қиймати босим дейилади.*

Босимни p орқали белгилайдиган бўлсак, сирт элементи $d\boldsymbol{S} = dS\boldsymbol{n}$ орқали ташқаридаги заррачаларнинг ичкаридаги зарраларга таъсир қилувчи кучи $-pd\boldsymbol{S}$ бўлади, чунки нормаль орти $\boldsymbol{n}$ ташқарига қаратилган. Ёпиқ сирт орқали таъсир қилувчи ҳамма куч $\boldsymbol{F}_1 = -\oint pd\boldsymbol{S}$ ёки (30.13) га биноан $\boldsymbol{F}_1 = -\int \operatorname{grad} p\, dV$ бўлади. Заррачаларининг ўзаро таъсиридан қатъи назар, суюқлик қандайдир чет кучлар (масалан, оғирлик кучлари) таъсирида ҳам бўлиши мумкин. Масса бирлигига таъсир қилувчи чет кучни $\boldsymbol{f}$ ва суюқлик массасининг зичлигини ρ орқали белгиласак, элементар ҳажм dV даги массага $\rho \boldsymbol{f} dV$ куч таъсир қилади. Суюқликнинг V ҳажмдаги қисмига таъсир қилувчи ҳамма чет куч $\boldsymbol{F}_2 = \int \rho \boldsymbol{f} dV$ бўлади.

Кучлар таъсирида элементар ҳажмдаги ρdV масса, $\boldsymbol{w}$ тезланиш билан ҳаракат қилади. *Массанинг манфий ишора билан олинган тезланишга кўпайтмаси инерция кучи дейилади.* Шундай қилиб, V ҳажмдаги ҳамма инерция кучи $F_3 = -\int \rho \boldsymbol{w} dV$ бўлади.

Механикадан маълум бўлган Даламбер принципига кўра, системанинг мувозанатда бўлиши учун шу системага таъсир қилувчи кучлар билан инерция кучининг умумий йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак, яъни:

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = -\int \operatorname{grad} p\, dV + \int \rho \boldsymbol{f} dV - \int \rho \boldsymbol{w} dV = 0$$

ёки

$$\int(-\operatorname{grad} p + \rho \boldsymbol{f} - \rho \boldsymbol{w})\, dV = 0.$$

Топилган натижа ҳар қандай ҳажм учун ҳам тўғридир, демак:

$$-\operatorname{grad} p + \rho \boldsymbol{f} - \rho \boldsymbol{w} = 0$$

ёки

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \qquad (45.83)$$

Идеал суюқликнинг бу асосий дифференциал тенгламаси гидродинамикада Эйлер тенгламаси дейилади.

Бу тенгламага бошқа шакл бериш ҳам мумкин. Бунинг учун $\boldsymbol{w}$ ўрнига $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ оламиз:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \qquad (45.84)$$

(42.3) га биноан, $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$. Демак, Эйлер тенгламаси бундай ёзилади:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \qquad (45.85)$$

ёки Декарт координаталарида қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Қулай интеграллаш мақсадида, Эйлер тенгламаси (45.85) ни бошқа шаклда ёзиш мумкин. Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор учун, (34.14) га мувофиқ:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = [\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{a}$$

бўлади, бу ердан:

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{a} = -[\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}] + \operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = [\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{a}] + \operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right).$$

$\boldsymbol{a}$ вектор ўрнига $\boldsymbol{v}$ вектор олинса, (45.85) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + [\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}] + \operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \qquad (45.86)$$

Бу тенглама Громеко тенгламаси ёки Громеко — Ламб тенгламаси дейилади.

IX. Иссиқлик тарқалиш дифференциал тенгламаси. Жисмнинг юқори температурали жойидан паст температурали жойига қараб иссиқлик оқими рўй бериши маълум. Иссиқлик оқимининг йўналишига перпендикуляр жойлашган юз бирлиги орқали вақт бирлигида ўтган иссиқлик миқдорини q билан белгилайлик. *Сон қиймати шу q га тенг бўлиб, иссиқлик оқимининг йўналишида олинган векторни* $\boldsymbol{q}$ *орқали белгилайлик ва уни иссиқлик оқими зичлигининг вектори деб юритайлик.*

У вақтда жисмнинг бирор қисмини чегаралаган ёпиқ сирт орқали dt вақт мобайнида ичкарига кирган иссиқлик миқдори $\Delta Q = -\oint(\boldsymbol{q}d\boldsymbol{S})\,dt$ бўлади, чунки ёпиқ сирт нормали ташқарига қаратилган.

Агар жисмнинг текширилаётган қисмида иссиқликнинг пайдо бўлиши ёки ютилиши билан боғлиқ махсус ҳодисалар бўлмаса, ташқаридан иссиқлик қабул қилган бу қисм муносиб равишда исийди. Жисмнинг масса зичлигини ρ ва солиштирма иссиқлик сиғимини c десак, температураси T бўлган dV ҳажм dt вақт ичида $\rho dVc\,\frac{\partial T}{\partial t}dt$ иссиқлик миқдори орттирмасига эга бўлади, ёпиқ сирт билан чегараланган V ҳажмдаги қисмнинг барча иссиқлик миқдори орттирмаси эса, албатта, ўша ΔQ га тенг бўлади: $\Delta Q = \int \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dt\,dV$. Шундай қилиб:

$$-\oint(\boldsymbol{q}d\boldsymbol{S})\,dt = \int \rho c\,\frac{\partial T}{dt}\,dt\,dV$$

ёки

$$\oint(\boldsymbol{q}d\boldsymbol{S}) + \int \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = 0.$$

Гаусс—Остроградский теоремасидан фойдалансак:

$$\int \operatorname{div}\boldsymbol{q}\,dV + \int \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = 0, \text{ ёки } \int\left(\operatorname{div}\boldsymbol{q} + \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\right)dV = 0$$

бўлади. Интеграллаш ҳажми ихтиёрий бўлганлигидан бундай ёзамиз:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q} + \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \tag{45.87}$$

Аммо $\boldsymbol{q}$ ва T ўзаро боғлиқ, чунки иссиқлик оқими температура пасаювчи томонга қаратилган.

Хусусиятлари ҳамма йўналишларда бир хил бўлган, яъни изотроп жисм учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$\boldsymbol{q} = -l\,\mathrm{grad}\,T, \tag{45.88}$$

бу ерда l миқдор ички иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти дейилади ва фақат жисмнинг ўз хоссаларига боғлиқ бўлади. Сўнгги тенгламадан:

$$\operatorname{div} q = -\operatorname{div}(l \operatorname{grad} T)$$

ёки (34.9) га мувофиқ:

$$\operatorname{div} q = -l \operatorname{divgrad} T - (\operatorname{grad} l \operatorname{grad} 7)$$

бўлади. Бир жинсли жисм учун l ўзгармасдир, демак·

$$\operatorname{div} q = -l \operatorname{divgrad} T = -l\Delta T.$$

Ниҳоят, (45.87) га мувофиқ, $-l\Delta T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

ёки

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{l}{\rho c} \Delta T. \tag{45.89}$$

Бу ифодадаги $\frac{l}{\rho c}$ миқдорни a орқали белгилайлик:

$$a = \frac{l}{\rho c}. \tag{45.90}$$

Бу a миқдорнинг маъносини аниқлаш қийин эмас. Ҳажм бирлигидаги жисм қисмининг температурасини бир градус кўтариш учун миқдори ρc га тенг иссиқлик керак. Аммо шу қисмга берилган иссиқлик миқдори l га тенг бўлса, унинг температураси $\frac{l}{\rho c}$ градус кўтарилади.

Ҳажм бирлигидаги жисм қисмига сон қиймати ички иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти l га тенг иссиқлик бериш натижасида ҳосил бўлган температура кўтарилишини характерловчи бу миқдор махсус ном билан юритилади. *a миқдор температура ўтказувчанлик коэффициенти дейилади.* Шундай қилиб:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T. \tag{45.91}$$

Иссиқлик ўтказувчанлик назариясидаги бу асосий дифференциал тенглама Фурье тенгламаси дейилади.

Жисм ичида dt вақт оралигида юз элементи dS орқали ўтган иссиқлик миқдори, (45.88) га биноан:

$$dQ = (qdS)\,dt = -l(\operatorname{grag} TdS)\,dt = -l\frac{\partial T}{\partial n} dSdt.$$

$$dQ = -l\frac{\partial T}{\partial n} dSdt. \tag{45.92}$$

Иссиқлик назариясида бу формула жуда муҳимдир.

Бирор моддий муҳитда жойлашган жисмнинг температураси T_1, масалан, муҳит температураси T_0 дан юқори бўлса, чегара сирт орқали жисмдан муҳитга қараб иссиқлик оқими ўтади. Бу иссиқлик оқими нурланиш, конвекция ёки иссиқлик ўтказувчанлик туфайли бўлиши мумкин.

Жисмнинг чегара сирт элементи dS орқали dt вақт оралигида муҳитга ўтган иссиқлик миқдори dQ ни dS га, dt га ва температура фарқи $T - T_0$ га пропорционал десак, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$dQ = h(T_0 - T)\,dSdt, \tag{45.93}$$

бу ердаги h миқдор ташқи иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти дейилади ва жисм билан муҳитнинг ҳамда уларни чегараловчи умумий сиртнинг хусусиятларига боғлиқ бўлади. Бу формула жисм совишининг Ньютон қонунини ифодалайди.

X. Уюрма ип. Соленоидал векторни унинг уюрмаси орқали аниқлаш бизга маълум, яъни (40.8), (40.7) ва (40.16) га биноан:

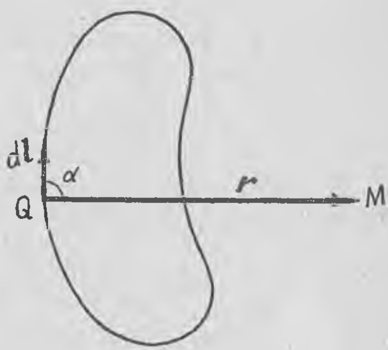
$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{45.94}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{45.95}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{b}dV}{r}. \tag{45.96}$$

Энди шундай бир мисолни олайлик: соленоидал $\boldsymbol{a}$ векторнинг уюрмаси бўлган $\boldsymbol{b}$ векторни тасвирловчи вектор чизиқлар ёпиқ бўлиб, улар фақат биттагина ингичка ип—уюрма ип ташкил қилсин (154-расм). Контур йўналиши уюрма вектор $\boldsymbol{b}$ йўналишидир. Шунинг учун контурнинг вектор элементи $d\boldsymbol{l}$ ва $\boldsymbol{b}$ вектор бир йўналишда бўлади. Уюрма ипнинг кўндаланг кесими dS ва уюрма ип элементининг ҳажми dV бўлса, $dV = dSdl$, демак:

$$\boldsymbol{b}dV = \boldsymbol{b}dSdl = bdSd\boldsymbol{l}. \tag{45.97}$$



154- расм.

(45.95) га биноан, уюрма вектор дивергенцияси нолга тенг: $\operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0$. Демак, Гаусс—Остроградский теоремасига кўра, унинг ихтиёрий ёпиқ сирт орқали тўла оқими нолга тенг бўлади: $\oint(\boldsymbol{b}d\boldsymbol{S}) = 0$.

Уюрма ипнинг турли жойларидаги икки кўндаланг кесими билан чегараланган қисмини оладиган бўлсак, унинг ён сирти билан аввалги икки кўндаланг кесим ёпиқ сирт ҳосил қилади. Ён сирт орқали оқим бўлмайди, чунки уюрма ип, демак, уюрма вектор $\boldsymbol{b}$ кўндаланг кесим dS га перпендикулярдир. Шундай қилиб, уюрма ип қисмининг боши ва охиридаги кундаланг кесимлари орқали оқимлар йиғиндиси нолга тенг булиши керак: $(\boldsymbol{b}d\boldsymbol{S})_1 + (\boldsymbol{b}d\boldsymbol{S})_2 = 0$.

Биринчи кўндаланг кесим нормали уюрма вектор $\boldsymbol{b}$ буйича олинса, иккинчи кундаланг кесим нормали унга қарама-қарши йўналишда олинади. Демак, $(\boldsymbol{b}dS)_1 - (\boldsymbol{b}dS)_2 = 0$, бу ердан $(\boldsymbol{b}dS)_1 = (\boldsymbol{b}dS)_2$, яъни *уюрма векторнинг кўндаланг кесим орқали оқими уюрма ипнинг ҳамма жойида бирдай ва ўзгармас бўлади. Бу ўзгармас миқдорни уюрма оқимининг кучи деб атаб,* J орқали белгилайлик:

$$J = \boldsymbol{b}dS. \tag{45.98}$$

У вақтда (45.97) га биноан:

$$\boldsymbol{b}dV = Jd\boldsymbol{l} \tag{45.99}$$

бўлади. Бу ифодани (45.96) га қўйсак:

$$\boldsymbol{A} = \frac{J}{4\pi}\oint\frac{d\boldsymbol{l}}{r} \tag{45.100}$$

келиб чиқади, (45.94) га биноан, M нуқтада текширилаётган $\boldsymbol{a}$ вектор учун:

$$\boldsymbol{a} = \frac{J}{4\pi}\operatorname{rot}\oint\frac{d\boldsymbol{l}}{r} = \frac{J}{4\pi}\oint\operatorname{rot}\left(\frac{d\boldsymbol{l}}{r}\right) \tag{45.101}$$

бўлади. Интеграл остидаги ифодани ҳисоблаш мақсадида (34.10) дан фойдаланишимиз керак:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\boldsymbol{l}}{r}\right) = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{l}\right] + \frac{1}{r}\operatorname{rot}d\boldsymbol{l}.$$

Q нуқта функцияси бўлган $d\boldsymbol{l}$ вектор ўзгарувчи M нуқтага боғлиқ эмас, демак, $\operatorname{rot}d\boldsymbol{l} = 0$. Натижада:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\boldsymbol{l}}{r}\right) = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{l}\right]$$

бўлади. Аммо $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. Демак:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\boldsymbol{l}}{r}\right) = -\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\boldsymbol{l}\right] = \left[d\boldsymbol{l}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right].$$

Шундай қилиб, (45.101) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{a} = \frac{J}{4\pi}\oint\left[d\boldsymbol{l}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]. \tag{45.102}$$

Бу ердан:

$$da = \frac{J}{4\pi}\left[dl\frac{r}{r^3}\right] \tag{45.103}$$

ёки

$$|da| = \frac{J\,|dl|\sin\alpha}{4\pi r^2}. \tag{45.104}$$

Масалан, ёпиқ занжир ҳосил қилган стационар (доимий) электр ток кучи J ва унинг магнит майдони кучланганлиги вектори H бўлса, мос олинган ўлчов бирликлари системасида қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$|dH| = \frac{J\,dl\sin\alpha}{r^2},$$

$$dH = \left[J\,dl\frac{r}{r^3}\right]. \tag{45.105}$$

Бу формула электродинамикада Био—Савар—Лаплас қонуни номи билан маълум.

XI. Фазонинг боғланишли соҳалари. Стокс теоремасини эслайлик:

$$\oint(a\,dl) = \int(\mathrm{rot}\,a\,dS). \tag{45.106}$$

Бу формулада текширилаётган соҳадаги сиртнинг ва уни чегараловчи контурнинг ҳамма нуқталарида функция ва функциянинг биринчи ҳосилалари, яъни вектор билан векторнинг уюрмаси узлуксиз бўлиши лозим. Аммо айрим ҳолларда шундай соҳалар ҳам учрайдики, уларда баъзи контурлар билан чегараланган сирт нуқталарида вектор уюрмасининг узлуксизлик шарти бажарилмайди. Демак, бундай соҳалардаги баъзи контурлар ўзлари билан чегараланган ва шу соҳаларда мавжуд бўлган сиртларга эга эмас.

Бир мисол келтирайлик. Физикадан маълумки, чексиз узун тўғри симдаги ўзгармас электр токи ҳосил қилган магнит майдони кучланганлигининг сон қиймати:

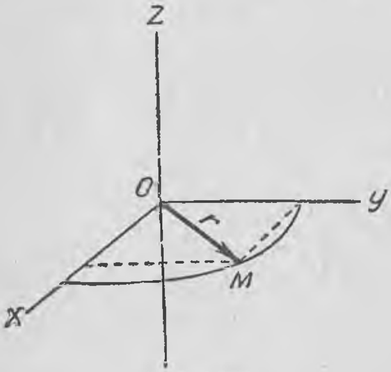
$$H = \frac{2J}{r} \tag{45.107}$$

бўлади, бу ерда J — ток кучи, r — майдон нуқтаси билан сим орасидаги масофа, ўлчов бирликлари эса $CGSM$ системасида олинган. Электр токи йўналишини Z ўқ деб ҳисоблаб, Декарт системасини олайлик. У вақтда магнит майдони куч чизиқлари шу Z ўқ атрофидаги айланалар эканлигини эсласак, ўнг парма қоидасига мувофиқ, кучланганлик вектори учун бундай ёзишимиз мумкин (155- расм):

$$\boldsymbol{H}=\frac{2J}{r^2}[\boldsymbol{kr}] \tag{45.108}$$

ёки $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ бўлганлигидан:

$$\boldsymbol{H}=\frac{2J}{x^2+y^2}[\boldsymbol{k}, x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}].$$



155- расм.

Қавсларни очиб, сўнгра $[\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}$ эканлигини назарда тутсак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\boldsymbol{H}=\frac{2J}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i}). \tag{45.109}$$

Z ўқ ($x=0$, $y=0$) нуқталарида кучланганлик вектори $\boldsymbol{H}$ нинг ноаниқ бўлиб қолишини кўрмоқдамиз. (45.109) формулага биноан, магнит майдони кучланганлиги уюрмасининг компонентларини топайлик:

$$\mathrm{rot}_x\boldsymbol{H}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2Jx}{x^2+y^2}\right)=0,$$

$$\mathrm{rot}_y\boldsymbol{H}=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{2Jy}{x^2+y^2}\right)=0,$$

$$\mathrm{rot}_z\boldsymbol{H}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2Jx}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2Jy}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=2J\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+2J\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=2J\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2J\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Демак, Z ўқда кучланганлик векторининг уюрмаси ноаниқ булиб қолади, аммо Z ўқдан бошқа ҳамма жойларда:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=0 \tag{45.110}$$

бўлади.

Уюрмасиз векторнинг потенциал вектор эканлиги бизга маълум, демак:

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{grad}\,\varphi; \tag{45.111}$$

яъни $H_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $H_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $H_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ва (45.109) га мувофиқ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2Jy}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{2Jx}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{45.112}$$

Шу дифференциал тенгламаларни интеграллаш натижасида номаълум потенциални аниқлаш мумкин:

$$\varphi = -2J \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \qquad (45.113)$$

Ҳақиқатан, бу функциянинг (45.112) да ифодаланган дифференциал тенгламаларни қаноатлантиришини текшириб чиқиш қийин эмас.

(45.113) дан равшанки, майдон потенциалининг қиймати Z ўқда ноаниқ бўлиб қолади. Майдон функциялари (яъни φ, демак H ва $\operatorname{rot} H$) узлуксиз бўлиши учун биз Z ўқни чексиз кичик радиусли цилиндр билан қуршаб олишимиз керак.

(45.113) дан кўрамизки, φ потенциалнинг ўзгариши бурчак $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ нинг ўзгаришига боғлиқ. Z ўқни ҳар айланиб чиқишда бурчакнинг ўзгариши 2π га тенг. Демак, Z ўқни ҳар айланиб чиққанда потенциалнинг ўзгариши $4\pi J$ га тенг, яъни бирор нуқтадан бошлаб, Z ўқни бир айланиб чиқиш билан яна шу нуқтанинг ўзига қайтилса, потенциалнинг қиймати $4\pi J$ га ўзгаради. Потенциалнинг бирор нуқтадаги дастлабки қийматини φ_0 десак, Z ўқни n марта айланиб чиқиш натижасида ўша нуқтадаги потенциал $n4\pi J$ га ўзгаради:

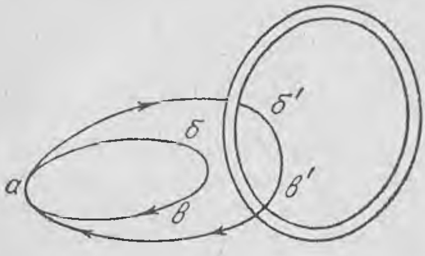
$$\varphi = \varphi_0 + n4\pi J. \qquad (45.114)$$

Шундай қилиб, ўзгармас ток магнит майдонининг потенциали кўп қийматли функция бўлади. Бунга сабаб шуки, Z ўқни ўраб олган контурлар мавжуддир. Потенциалнинг кўп қийматли бўлишидан қутулиш учун Z ўқни ўраб олувчи контурлар бўлмаслиги керак. Шу мақсадда, масалан, Z ўқ билан чегараланган ярим текислик шаклидаги шартли тўсиқ олишимиз мумкин, натижада бу шартли тўсиқ ярим текисликнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтиш мумкин эмас, демак, Z ўқни ўраб олувчи контурларга йўл қўйилмайди. Хуллас, Z ўқни қуршаб олган чексиз кичик радиусли цилиндр билан Z ўқ чегараланган шартли тўсиқ ярим текислик туфайли майдон потенциалини узлуксиз ва бир қийматли функция қилиш мумкин.

Биз текширган магнит майдони соҳасидаги контурларни икки турга ажратсак бўлади: чексиз кичик радиусли цилиндр билан ажратилган Z ўқни қуршаган контурлар ва уни қуршамаган контурлар. Z ўқни қуршамаган контурларни узлуксиз равишда торайтириб деформациялаш воситасида нуқтага айлантириб юбориш мумкин. Z ўқни қуршаган контурларни эса узлуксиз равишда торайтириб деформациялаш воситасида ҳеч қандай қилиб нуқтага айлантириб бўлмайди. Соҳа чегараси бўлган чексиз кичик радиусли цилиндрни бузиб ўтилгандагина қуршаган контурларни нуқтага айлантириш мумкин.

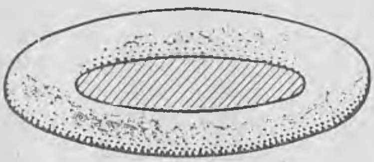
Ана шундай икки турдаги контурлар мавжуд бўлган соҳа икки боғланишли соҳа дейилади. Ҳозиргина кўриб чиқилган магнит майдони соҳаси икки боғланишли соҳадир.

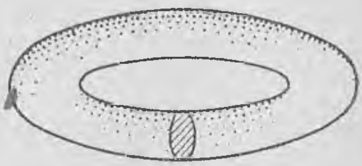
Шундай соҳалар борки, улардаги ҳар қандай контурни, соҳа чегарасини бузмасдан туриб, нуқтага айлантириш мумкин бўлади. *Бундай хусусиятга эга соҳалар бир боғланишли соҳалар дейилади.* Бир боғланишли соҳаларда, демак, фақат бир турдаги контурларгина мавжуддир. Бир боғланишли соҳаларга баъзи мисоллар келтирайлик: чексиз фазо, текислик, текисликнинг битта контур билан чегараланган қисми, фазонинг ёпиқ сирт ичкарисидаги ва ташқарисидаги қисми.



156-расм.

Чексиз кичик кўндаланг кесимли сирт билан чегараланган ёпиқ электр токи магнит майдонидаги ихтиёрий бирор контур (156- расм) шу токни ёки қуршаган бўлиши, ёки қуршамаган бўлиши мумкин. Демак, бу магнит майдони соҳаси икки боғланишли соҳадир. Агар ток унинг контури чегаралаган бирор шартли тўсиқ сирт билан қопланса, қуршаб олувчи контурлардан қутулиш мумкин, натижада бир боғланишли соҳа ҳосил бўлади.

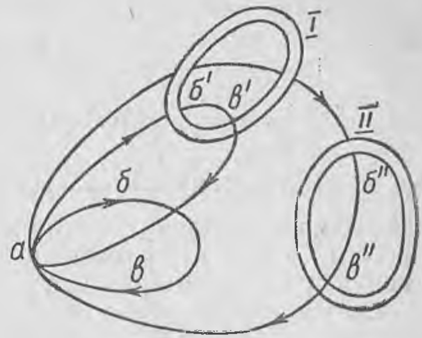

157- расм.


158- расм.

Доира шу доира текислигида ётган ва доирани кесиб ўтмаган тўғри чизиқ атрофида айлантирилганда ҳосил бўладиган ҳалқасимон геометрик шакл тор дейилади. Сувда чўкаётган одамларни қутқазиш чамбараги ёки тешик кулча торга мисол бўла олади. Фазонинг тор ичкарисидаги қисми ёки ташқарисидаги қисми икки боғланишли соҳалардир. Тор чегаралаган тешик бирор шартли тўсиқ сирт билан қопланса (157- расм), торнинг ташқариси бир боғланишли соҳа бўлади. Торнинг ичкарисига бирор кўндаланг шартли тўсиқ қопланса (158- расм), торнинг ичкариси ҳам бир боғланишли соҳага айланади.

Энди иккита электр токи магнит майдонини олайлик. Бу ерда уч турдаги контурлар учрайди: токларни қуршамаган контурлар, биринчи токни қуршаган контурлар, иккинчи токни қуршаган контурлар (159- расм).

Уч турдаги контурлар мавжуд бўлган соҳа уч боғланишли соҳа дейилади. Юқоридаги токлар магнит майдони уч боғланишли соҳадир. Икки токнинг бири ўзига мос шартли тўсиқ сирт билан қопланса, икки боғланишли соҳа ҳосил бўлади. Агар қопланмасдан қолган ток ҳам бирор шартли тўсиқ билан қопланса, ниҳоят, бир боғланишли соҳа ҳосил булади.



159- расм.

Умуман n турдаги контурлар мавжуд бўлган соҳа n боғланишли соҳа дейилади. Албатта, n боғланишли соҳани 1 шартли тўсиқ воситасида $(n-1)$ боғланишли соҳага, 2 шартли тўсиқ воситасида $(n-2)$ боғланишли соҳага, m шартли тўсиқ $(m<n)$ воситасида $(n-m)$ боғланишли соҳага, ниҳоят, $n-1$ шартли тўсиқ воситасида бир боғланишли соҳага айлантириш мумкин. Демак, кўп боғланишли соҳани бошқача таърифлаш ҳам мумкин: *$n-1$ шартли тўсиқлар воситасида бир боғланишли соҳага айлантирилиши мумкин бўлган соҳа n боғланишли соҳа дейилади.*

Уюрмасиз ҳар қандай векторнинг потенциал векторлигини биламиз:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0, \tag{45.115}$$

$$\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{45.116}$$

Юқорида айтилганлардан равшанки, бир боғланишли соҳадагина потенциал бир қийматли бўлади, демак, ҳар қандай контур бўйича олинган вектор интеграли нолга тенг:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) = 0. \tag{45.117}$$

Кўп боғланишли соҳаларда потенциал кўп қийматли бўлганлигидан баъзи контурлар бўйича олинган вектор интеграли нолга тенг бўлмаслиги мумкин:

$$\oint (\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}) \neq 0. \tag{45.118}$$

Мос олинган кўп боғланишли соҳалардаги шартли тўсиқларга яққол мисоллар қилиб, физикадан маълум бўлган бир томони мусбат зарядли ва иккинчи томони манфий зарядли электр ёки магнит қатламларини кўрсатиб ўтса бўлади.

XII. Электромагнит майдоннинг дифференциал тенгламалари. Электромагнит майдоннинг Максвелл тенгламалари деб аталувчи асосий дифференциал тенгламалари қуйидагичадир:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{45.119}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{45.120}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{45.121}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi\frac{\boldsymbol{i}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{45.122}$$

бу ерда $c = 3\cdot 10^{10}\frac{см}{сек}$, ρ—эркин электр заряди зичлиги, $\boldsymbol{i}$—ўтказувчанлик токининг зичлиги, $\boldsymbol{E}$ — электр майдони кучланганлиги, $\boldsymbol{H}$ — магнит майдони кучланганлиги, $\boldsymbol{D}$ — электр индукцияси ва $\boldsymbol{B}$ — магнит индукцияси.

Юқоридаги дифференциал тенгламалар электромагнит ҳодисаларини ҳар томонлама ўрганиш хулосаларининг умумлашган ифодасидир.

Максвелл тенгламаларини интеграл шаклда ёзиб кўрсатайлик. Гаусс — Остроградский теоремасига асосланиб, (45.119) тенгламани бундай ёзамиз:

$$\oint(\boldsymbol{D}d\boldsymbol{S}) = 4\pi\int\rho dV \tag{45.123}$$

ёки ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажмдаги эркин зарядни (электр миқдорини) e орқали белгиласак $\left(e = \int\rho dV\right)$, ниҳоят, бундай бўлади:

$$\oint(\boldsymbol{D}d\boldsymbol{S}) = 4\pi e. \tag{45.124}$$

Кўрамизки, ёпиқ сирт орқали ўтувчи электр индукциясининг тўла оқими 4π карра олинган шу сирт ичидаги эркин зарядга тенгдир.

Гаусс—Остроградский теоремаси асосида (45.120) тенглама бундай ёзилади:

$$\oint(\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}) = 0. \tag{45.125}$$

Демак, ёпиқ сирт орқали ўтувчи магнит индукциясининг тўла оқими нолга тенгдир. Бунинг маъноси шуки, магнит индукциясининг вектор чизиқлари ҳамма вақт ёпиқ бўлиб, уларнинг бошланган ёки тугалган жойлари йўқ.

Стокс теоремасини (45.121) га татбиқ этиб, шуни ёзиш мумкин:

$$\oint (\boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int(\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}). \qquad (45.126)$$

Тенгликнинг чап томонидаги интеграл берилган сиртни чегараловчи контурдаги электр юритувчи кучнинг миқдорий ифодасидир. Юқоридаги формуланинг физик маъноси шуки, бирор сирт орқали ўтувчи магнит индукцияси оқимининг вақт бирлигидаги ўзгариши шу сиртни чегараловчи контурда ўзига тўғри пропорционал электр юритувчи куч ҳосил қилади. Физикадаги электромагнит индукцияси қонуни ана шундан иборатдир.

(45.122) нинг ўнг томонида $\frac{4\pi}{c}$ ни қавслар ташқарисига чиқарсак:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

бўлади. *Қавслар ичидаги иккинчи ҳад силжиш токи зичлиги деб аталади.* Уни $\boldsymbol{i}_c$ орқали белгиласак:

$$\boldsymbol{i}_c = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad (45.127)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}_c) \qquad (45.128)$$

бўлади. Энди Стокс теоремасини татбиқ этамиз:

$$\oint(\boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c}\left\{\int(\boldsymbol{i}d\boldsymbol{S}) + \int(\boldsymbol{i}_c d\boldsymbol{S})\right\}. \qquad (45.129)$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл ўтказувчанлик токининг кучи, иккинчи интеграл эса силжиш токининг кучи деб юритилади. Уларни мос равишда J ва J_c орқали белгиласак:

$$J = \int(\boldsymbol{i}d\boldsymbol{S}), \qquad (45.130)$$

$$J_c = \int(\boldsymbol{i}_c d\boldsymbol{S}) \qquad (45.131)$$

бўлади. Шундай қилиб:

$$\oint (\boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c}(J + J_c). \qquad (45.132)$$

Стационар электромагнит процессида вақт бўйича олинган хусусий ҳосила нолга тенгдир, демак, (45.127) га мувофиқ, $\boldsymbol{i}_c = 0$ ва (45.131) га мувофиқ $J_c = 0$, яъни силжиш токи йўқ.

У вақтда (45.132) формула стационар электромагнит процесси учун бундай ёзилади:

$$\oint (H dl) = \frac{4\pi}{c} J. \qquad (45.133)$$

Бу тенглик бизга маълум бўлган Био—Савар—Лаплас қонунининг интеграл шаклда ифодаланишидир: *ёпиқ занжирдаги стационар электр токи ўз атрофида уюрмали магнит майдони ҳосил қилади.*

Стационар электромагнит процесслар учун топилган Био—Савар—Лаплас қонунини ностационар электромагнит процесслар учун умумлаштириб, Максвелл (45.122) формулани ёки барибир, унинг бошқачароқ шакли (45.132) формулани таклиф этди: *ўтказувчанлик токи билан силжиш токи ўзаро ҳамма вақт ёпиқ занжир ташкил этади ва атрофда уюрмали магнит майдони ҳосил қилади. Физикадаги магнитоэлектр индукцияси қонуни ана шундан иборат.*

Одатда, электр миқдорлар *CGSE* ўлчов бирликлари системасида ва магнит миқдорлар *CGSM* ўлчов бирликлари системасида олинади. Юқорида келтирилган формулаларда ана шулар назарда тутилди.

XIII. Телеграфчилар тенгламаси. Максвелл тенгламаларига асосланган назария ва практикада катта аҳамиятга эга бўлган ҳамда телеграфчилар тенгламаси деб юритиладиган муҳим бир формула билан танишиб чиқайлик.

Максвелл тенгламаларида иштирок қилувчи электромагнит майдони векторлари, одатда, тубандагича ўзаро боғланган:

$$I = \gamma E, \qquad (45.134)$$

$$D = \varepsilon E, \qquad (45.135)$$

$$B = \mu H, \qquad (45.136)$$

бу ерда γ — электр ўтказувчанлик коэффициенти, ε — диэлектрик коэффициент ва μ — магнит коэффициент.

Бир жинсли моддий муҳит учун бу коэффициентлар ўзгармас бўлади. Бир жинсли ўтказувчан муҳитда $\rho = 0$ деб ҳисоблаш мумкин. У вақтда, сўнгги формулаларга биноан, (45.119), (45.120), (45.121), (45.122) ларда ифодаланган Максвелл тенгламалари бундай шаклга киради:

$$\operatorname{div} E = 0, \qquad (45.137)$$

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad (45.138)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (45.139)$$

$$\operatorname{rot} H = 4\pi\frac{\gamma E}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (45.140)$$

Сўнгги тенгламани вақт бўйича дифференциаллаймиз:

$$\mathrm{rot}\,\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{4\pi\gamma}{c}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ёки (45.139) га мувофиқ:

$$-\frac{c}{\mu}\mathrm{rot\,rot}\,E=\frac{4\pi\gamma}{c}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \qquad (45.141)$$

Биламизки: $\mathrm{rot\,rot}\,E=\mathrm{grad\,div}\,E-\Delta E$ ёки (45.137) га мувофиқ $\mathrm{rot\,rot}\,E=-\Delta E$. Буни (45.141) га қўйсак:

$$\frac{c}{\mu}\Delta E=\frac{4\pi\gamma}{c}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ёки

$$\Delta E=4\pi\frac{\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (45.142)$$

келиб чиқади.

H вектор учун ҳам худди шунинг каби тенглама чиқади:

$$\Delta H=4\pi\frac{\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \qquad (45.143)$$

E вектор ёки *H* векторнинг бирор Декарт компонентини ψ орқали белгиласак:

$$\Delta\psi=4\pi\frac{\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (45.144)$$

бўлади.

Бу типдаги дифференциал тенглама телеграфчилар тенгламаси номи билан маълум.

Диэлектрик муҳит учун $\gamma=0$, демак:

$$\Delta\psi=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

ёки

$$\Delta\psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \qquad (45.145)$$

бу ерда:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (45.146)$$

(45.145) формула бизга илгаридан маълум бўлган (44.18) тўлқин тенгламасидир. (45.146) формула электромагнит тўлқинининг диэлектрик муҳитда тарқалиш тезлигини ифодалайди. Вакуум (бўшлиқ) учун $\varepsilon=1$ ва $\mu=1$, демак, $v=c=3\cdot 10^{10}\,\frac{см}{сек}$, яъни электромагнит тўлқини (демак, шу жумладан ёруғлик ҳам) вакуумда $3\cdot 10^{10}\,\frac{см}{сек}$ га тенг тезлик билан тарқалади.

XIV. Гармоник электромагнит тўлқини. Бир жинсли диэлектрик муҳитда электромагнит тулқини тарқалишини ифодаловчи (45.145) дифференциал тенглама ечими вақт билан фазо нуқтаси функциясидир: $\psi = \psi(x, y, z, t)$. Текширишни соддалаштириш мақсадида бизни қизиқтираётган функцияни вақт билан биттагина координатага, масалан, z координатага боғлиқ деб ҳисоблайлик, яъни $\psi = \psi(z, t)$. Энди Z ўқ ортини $\boldsymbol{n}$ орқали белгиласак:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial z} = \boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

(45.145) тулқин тенгламаси эса:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{45.147}$$

булади. Бу дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини гармоник функция шаклида, яъни қуйидагича оламиз:

$$\psi = \psi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right], \tag{45.148}$$

бу ерда ψ_0, ω, α — ўзгармас миқдорлар: ψ_0 — амплитуда, ω — циклик частота, α — бошланғич фаза. Сунгги ифода тўлқин тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \psi_0\frac{\omega}{v}\sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right], \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\psi_0\frac{\omega^2}{v^2}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right] = -\frac{\omega^2}{v^2}\psi,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\psi_0\omega\sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right], \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\psi_0\omega^2\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right] = -\omega^2\psi,$$

бу топилган қийматлар ўз ўринларига қўйилса, тўлқин тенгламаси айнан қаноатлантирилади.

Тенгламадаги ψ функция электромагнит майдон векторлари $\boldsymbol{E}$ ёки $\boldsymbol{H}$ нинг Декарт компонентлари (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z) дан бирини ифодалайди. Керакли хусусий ечимни вектор шаклда ёзсак булади:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right], \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \beta\right], \end{aligned}\right\} \tag{45.149}$$

бу ерда $\boldsymbol{E}_0$ ва $\boldsymbol{H}_0$ мос олинган вектор амплитудалар бўлиб, турли хусусий ечимларда турлича ўзгармас векторлардир. Хусусий ечимлар йиғиндиси янада ўша тўлқин тенглама ечими булади:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0'\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha'\right] + \boldsymbol{E}_0''\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha''\right], \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0'\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \beta'\right] + \boldsymbol{H}_0''\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \beta''\right]. \end{aligned}\right\} \tag{45.150}$$

Кўрамизки Z ўққа перпендикуляр бўлган текисликнинг ҳамма нуқталарида $\boldsymbol{E}$ вектор бир хил, $\boldsymbol{H}$ вектор ҳам бир хилдир. Бошланғич вақтга мос келган Z ўқ нуқтасини координаталар боши деб ҳисоблайлик, яъни $t=0$ бўлганда $z=0$ бўлсин. У вақтда (45.150) га биноан, t вақтда $z=vt$ текисликдаги ва $t=0$ вақтда $z=0$ текисликдаги майдон векторлари бир хил бўлади. Демак, ҳамма нуқталарида бир хил E векторга ва бир хил H векторга эга текислик Z ўқ бўйича v тезлик билан ҳаракат қилади. *Шундай қилиб,* (145.150) *формула Z ўқ бўйича тарқалувчи ясси гармоник электромагнит тўл.инини ифодалайди.*

Тўлқиннинг тарқалиш йўналишига нисбатан E ва H векторлар перпендикулярдир. Ҳақиқатан, Максвелл тенгламаси (45.138) га биноан, $\operatorname{div} \boldsymbol{H}=0$. Аммо $\operatorname{div} \boldsymbol{H}=(\nabla \boldsymbol{H})$ ва бизни қизиқтираётган ҳол учун $\nabla=\boldsymbol{n} \frac{\partial}{\partial z}$ эди, демак:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}=(\nabla \boldsymbol{H})=\left(\boldsymbol{n} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}\right)=0,$$

яъни $\boldsymbol{n}$ ва $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}$ векторлар ўзаро перпендикулярдир.

(45·150) ни z бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}=\frac{\omega}{v}\left\{\boldsymbol{H}_0' \sin \left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\beta'\right]+\boldsymbol{H}_0'' \sin \left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\beta''\right]\right\} \quad (45.151)$$

Демак, фигурали қавслар ичидаги вектор, яъни $\boldsymbol{H}_0'$, $\boldsymbol{H}_0''$ векторлар текислигидаги вектор берилган $\boldsymbol{n}$ векторга перпендикуляр. Аммо (45.150) га мувофиқ, $\boldsymbol{H}$ вектор ҳам ўша текисликда ётади. Демак, $\boldsymbol{H}$ вектор тўлқиннинг тарқалиш йўналишига перпендикулярдир. Максвелл тенгламаси (45.137) дан фойдаланиб, $\boldsymbol{E}$ векторнинг ҳам тўлқин тарқалиш йўналишига перпендикуляр эканлигини кўрсатиш мумкин.

Хуллас, электр ва магнит майдонлари тўлқиннинг тарқалиш йўналишига перпендикуляр ҳолда тебраниб туради. *Тебранишлари тарқалиш йўналишига перпендикуляр бўлган тўлқин кўндаланг тўлқин дейилади. Демак, электромагнит тўлқини кўндаланг тўлқиндир.*

$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ векторлар ҳам ўзаро перпендикулярдир. Ҳақиқатан, бир жинсли диэлектрик муҳит учун Максвелл тенгламалари (45.139) дан ёки $\gamma=0$ ҳисоблаб, (45.140) дан фойдаланамиз. Аммо $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}=[\nabla \boldsymbol{H}]=\left[\boldsymbol{n} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}\right]$, у вақтда (45.140) га мувофиқ:

$$\left[\boldsymbol{n} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}\right]=\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (45.152)$$

бўлади. (45.150) дан:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\omega\left\{E_0'\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\alpha'\right]+E_0''\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\alpha''\right]\right\},$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\omega}{v}\left\{E_0'\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\alpha'\right]+E_0''\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\alpha''\right]\right\}$$

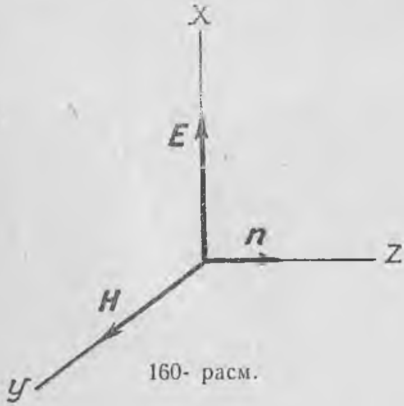
келиб чиқади, демак, $\frac{\partial E}{\partial t} = -v\frac{\partial E}{\partial z}$; буни (45.152) га қўямиз:

$$\left[n\frac{\partial H}{\partial z}\right] = -\frac{\varepsilon v}{c}\frac{\partial E}{\partial z}. \qquad (45.153)$$

Бу дифференциал тенгламани интеграллаганда ҳосил бўладиган ўзгармас электр ва магнит векторларини нолга тенг деб ҳисоблашимиз мумкин, чунки биз текшираётган векторлар z координатанинг ўзгаришига боғлиқ векторлардир. Шундай қилиб, $[nH] = -\frac{\varepsilon v}{c}E$, бу ердан:

$$[Hn] = \frac{\varepsilon v}{c}E, \qquad (45.154)$$

яъни E, H векторлар ўзаро перпендикулярдир. E, H векторларнинг n векторга перпендикулярлигини юқорида кўрган эдик. Шундай қилиб, бу учта H, n, E вектор ўзаро перпендикуляр. Шу айтилганлар 160- расмда тасвирланган.



160- расм.

Ясси гармоник электромагнит тулқинини ифодаловчи (45.150) формулаларга қайтиб, муайян z координатали ўзгармас текисликдаги E ва H векторларнинг тебранишини текширайлик. (45.150) га биноан, E ёки H векторнинг тебраниши бир хил частотали, лекин тўғри чизиқли ва гармоник вектор тебраниш йиғиндисидан иборатдир. Бундай йиғинди тебранишнинг эллиптик тебраниш эканлиги бизга маълум. Демак, E, H векторларнинг ҳар бири эллиптик тебранишда бўлиб, уларнинг тебраниш текислиги тўлқин тарқалиши йўналишида v тезлик билан ҳаракат қилади.

Шундай қилиб, (45.150) да ифодаланган *ясси гармоник электромагнит тўлқини, умуман, эллиптик қутбланғандир. Амплитудалари ва бошланғич фазаларига қараб, у доиравий ёки тўғри чизиқли қутбланган бўлади. Тўғри чизиқли қутбланган тўлқиннинг тебранувчи электр вектори перпендикуляр бўлган текислик поляризация* (*қутбланиш*) *те-*

кислиги дейилади. Демак, тебранувчи магнит вектор поляризация (қутбланиш) текислигида ётади.

Тўлқиннинг тарқалиш йўналишига перпендикуляр бўлган текислик нуқтасининг радиус-векторини $\boldsymbol{r}$ десак, $z=(\boldsymbol{rn})$ бўлади. Аммо $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, бу ерда ν — тебраниш частотаси ва T — тебраниш даври. *Бир тебраниш вақтида тўлқиннинг ўтган йўли тўлқин узунлиги дейилади:* $\lambda = Tv$. Шуларга мувофиқ:

$$\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)=\omega t-\frac{\omega}{v}(\boldsymbol{rn})=\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{rn}).$$

Бу ердаги $\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n}$ вектор *тўлқин вектори* дейилади ва, одатда, $\boldsymbol{k}$ билан белгиланади:

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n}, \tag{45.155}$$

у вақтда $\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)=\omega t-(\boldsymbol{rk})$ бўлиб, (45.150) га биноан:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0'\cos[\omega t-(\boldsymbol{rk})+\alpha']+\boldsymbol{E}_0''\cos[\omega t-(\boldsymbol{rk})+\alpha''],\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_0'\cos[\omega t-(\boldsymbol{rk})+\beta']+\boldsymbol{H}_0''\cos[\omega t-(\boldsymbol{rk})+\beta''].\end{aligned}\right\} \tag{45.156}$$

Шундай қилиб, ясси гармоник электромагнит тўлқини бекоординат шаклда ифодаланди. *Гармоник тўлқин оптикада монохроматик тўлқин дейилади.*

XV. Функционал вариацияси. Бирор системани характерловчи эгри чизиқли $q_1, q_2, \ldots, q_n$ координаталар p параметрнинг функциялари бўлсин:

$$q_i=q_i(p), \text{ бу ерда } i=1,2,\ldots,n. \tag{45.157}$$

Эгри чизиқли координаталарнинг хилма-хиллиги конфигурацион фазо деб аталади. Юқорида ёзилган тенгламалар n ўлчовли конфигурацион фазода чизиқни параметрик шаклда ифодалайди, q_i функцияларнинг ўзгариши билан уларни тасвирловчи чизиқ ҳам ўзгаради.

q_i координаталар, уларнинг параметр бўйича $\frac{dq_i}{dp}=\dot{q}_i$ ҳосилалари ва параметр функцияси:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, p)$$

берилган бўлсин; уни қисқача $L(q, \dot{q}, p)$ шаклда ёзайлик. Шу функциядан параметрнинг $p=p_1$ билан $p=p_2$ қийматлари орасида интеграл олайлик:

$$S=\int_{p_1}^{p_2}L(q,\dot{q},p)\,dp. \tag{45.158}$$

Параметрнинг p_1, p_2 қийматларига конфигурацион фазода M_1, M_2 нуқталар мос келади. Шундай қилиб, M_1, M_2 нуқталардан ўтган чизиқ бўйича олинган бу интеграл шу чизиқни ифодаловчи функцияга боғлиқдир. Турли шаклда олинган q_i функциялар турлича чизиқлар билан тасвирланади. Аммо тайин q_i функцияларга S миқдорнинг мос олинган аниқ бир қиймати тўғри келади. *Қиймати функцияларнинг шаклларига боғланиб, ўзгарувчи миқдор функционал дейилади.* (45.158) да ифодаланган ва S билан белгиланган интеграл функционалдир. Битта p параметрга боғлиқ q_i функциялар геометрик равишда чизиқ билан тасвирланади. Шу сабабли бир параметрли функциялардан ҳосил бўлган функционал баъзан *чизиқ функцияси* деб ҳам юритилади.

M_1, M_2 нуқталардан бир-бирига чексиз яқин бўлган жуда кўп чизиқ ўтказиш мумкин. Шу чизиқларнинг қайси бири бўйича олинган S функционал ё минимумга ёки максимумга (яъни экстремумга) эришади? Бу муҳим масалани текшириш мақсадида биз M_1, M_2 нуқталардан ўтувчи чизиқлардан, яна ихтиёрий бирини параметрик шаклда олайлик:

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(p), \tag{45.159}$$

бу ерда $\sim$ тилда деган белгидир. Параметрнинг ўзгармас қийматида мос олинган q_i ва $\tilde{q}_i$ функциялар шакллари билангина фарқланади, яъни q_i функция шаклининг ўзгариши туфайли $\tilde{q}_i$ функция ҳосил бўлади. *q_i функция шаклининг ўзгариши билан боғланган $\tilde{q}_i - q_i$ айирма шу q_i функциянинг вариацияси дейилади ва δq_i орқали белгиланади:*

$$\delta q_i = \tilde{q}_i - q_i. \tag{45.160}$$

Параметр сифатида вақт олиниши мумкин. Шу сабабли юқорида таърифланган вариация *синхрон вариация* ёки *изохрон вариация* номи билан юритилади. Функция вариацияси ҳам ўша p параметрнинг функцияси бўлади. Шуниси муҳимки, q_i параметрнинг қайси қийматида олинган бўлса, $\tilde{q}_i$ ҳам параметрнинг ўша қийматида олинади, яъни параметр вариацияланмайди. Демак, функцияни вариациялаш ва параметр бўйича дифференциаллаш бир-бирига боғланмаган амалдир. Ҳақиқатан, (45.160) га биноан, δq_i функция вариациясини p параметр бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{d}{dp}(\delta q_i) = \frac{d\tilde{q}_i}{dp} - \frac{dq_i}{dp}.$$

Вариация таърифига мувофиқ, $\frac{dq_i}{dp}$ функция вариацияси учун қуйидагини ёзишга ҳақлимиз:

$$\delta\left(\frac{dq_i}{dp}\right) = \frac{d\tilde{q}_i}{dp} - \frac{dq_i}{dp}.$$

Шундай қилиб, кўрамизки:

$$\frac{d}{dp}\delta q_i = \delta\frac{dq_i}{dp} \tag{45.161}$$

ёки

$$\frac{dq_i}{dp} = \dot{q}_i \text{ десак,}$$

$$\frac{d}{dp}\delta q_i = \delta\dot{q}_i. \tag{45.162}$$

(45.160) дан:

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i. \tag{45.163}$$

Бу ифодани параметр бўйича дифференциаллаб, сўнгра (45.162) назарга олинса:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i \tag{45.164}$$

келиб чиқади. (45.159) да ифодаланган чизиқ бўйича олинган функционал учун

$$\tilde{S} = \int_{p_1}^{p_2} L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, p)\,dp$$

ёки

$$\tilde{S} = \int_{p_1}^{p_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, p)\,dp. \tag{45.165}$$

(45.157) да ифодаланган чизиқдан (45.159) да ифодаланган чизиққа ўтиш натижасида ҳосил бўлган функционалнинг орттирмаси қуйидагича:

$$\Delta S = \tilde{S} - S,$$

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2} \{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, p)\}\,dp. \tag{45.166}$$

Интеграл остидаги $L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, p)$ функцияни Тейлор қаторига δq_i, $\delta\dot{q}_i$ нинг даражалари бўйича ёйилик:

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, p) = L(q, \dot{q}, p) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + R, \tag{45.167}$$

бу ерда R орқали δq_i, $\delta\dot{q}_i$ вариацияларга нисбатан иккинчи, учинчи ва юқори тартибли миқдорлар тўплами белгиланди. Сўнгги икки формулага биноан:

$$\Delta s = \int_{p_1}^{p_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dp + \int_{p_1}^{p_2} R\,dp \tag{45.168}$$

бўлади.

Функционал орттирмасининг δq_i, $\delta \dot{q}_i$ вариацияларга нисбатан биринчи тартибли бўлган қисми, яъни бош чизиқли қисми шу функционалнинг вариацияси дейилади ва δS орқали белгиланади:

$$\delta S = \int_{p_1}^{p_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dp. \qquad (45.169)$$

(45.162) га мувофиқ, $\delta \dot{q}_i dp = \frac{d}{dp} (\delta q_i)\, dp = d\delta q_i$, демак:

$$\delta S = \int_{p_1}^{p_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dp + \int_{p_1}^{p_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i. \qquad (45.170)$$

Ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи ҳадни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{p_1}^{p_2} - \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dp} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) \delta q_i dp, \qquad (45.171)$$

чунки

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dp\, \delta q_i.$$

Демак:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{p_1}^{p_2} + \int_{p_1}^{p_2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dp \qquad (45.172)$$

бўлади. Бу формуладан геометрия, механика, физика ва бошқа соҳаларда кенг фойдаланилади.

Агар (45.157) да ифодаланган чизиқ бўйича олинган функционал экстремумга эришса, у вақтда (45.159) да ифодаланган чизиққа ўтиш натижасида функционал орттирмаси ё мусбат, ёки манфийгина бўлиши, яъни бир ишоралигина бўлиши керак. Функционал орттирмасининг бош чизиқли қисми билангина чекланилса, ΔS, δS нинг ишоралари бир хил бўлади. Аммо (45.162) ва (45.169) дан равшанки, δS нинг ишораси ихтиёрий олинган δq_i нинг ишораси билан аниқланади, яъни δS доимо бир ишорали бўлолмайди. *Функционалнинг экстремумга эришиши учун, демак, шу функционалнинг вариацияси нолга тенг бўлиши лозим:*

$$\delta S = 0 \qquad (45.173)$$

ёки (45.158) га мувофиқ:

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} L(q, \dot{q}, p)\, dp = 0 \qquad (45.174)$$

бўлади. Аммо юқоридаги шартимизга кўра, параметрнинг $p = p_1$ ва $p = p_2$ қийматларида (45.157) ва (45.159) да ифодаланган чизиқлар M_1, M_2 нуқталарда кесишади, демак, параметрнинг шу қийматларига мос $q_i(p)$ функция вариацияси нолга тенг бўлади:

$$\delta q_i(p_1) = 0, \quad \delta q_i(p_2) = 0. \tag{45.175}$$

У вақтда (45.172) ва (45.173) га биноан:

$$\int_{p_1}^{p_2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i dp = 0.$$

Бу ердаги δq_i билан dp ихтиёрий бўлганлигидан:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{45.176}$$

бўлади. *Бу дифференциал тенгламалар Эйлер — Лагранж тенгламалари дейилади. $L(q, \dot{q}, p)$ функция Лагранж функцияси ёки лагранжиан деб аталади.*

Эйлер — Лагранж тенгламаларини интеграллаш натижасида q_i координаталар p параметр орқали аниқланади:

$$q_i = q_i(p). \tag{45.177}$$

Бу тенглама чизиқнинг параметрик тенгламасидир. Шундай қилиб, M_1, M_2 нуқталардан ўтувчи шу чизиқ бўйича олинган функционал, яъни Лагранж функциясининг интеграли экстремумга эгадир. Шу сабабли *Эйлер — Лагранж дифференциал тенгламаларига бўйсунган чизиқ экстремал чизиқ ёки экстремаль деб юритилади.*

(45.174) дан кўрамизки, функционалнинг максимумга ёки минимумга эришиш-эришмаслигидан қатъи назар, унинг вариацияси нолга тенг. *Вариацияси нолга тенг функционал одатда стационар функционал дейилади.* Шундай қилиб, (45.174) да *функционалнинг стационарлик шарти* ифодаланган.

XVI. Вариацион принцип ва ҳаракат тенгламалари. *Система вазиятини аниқловчи мустақил эгри чизиқли q_1, q_2, ..., q_n координаталар одатда системанинг умумлашган координаталари деб, бу умумлашган координаталар сони эса системанинг эркинлик даражалари сони деб аталади.*

Моддий нуқтанинг фазодаги вазияти учта мустақил умумлашган координата билан аниқланади. Демак, моддий нуқтанинг эркинлик даражалари сони 3 га тенг.

Масофаси ўзгармас икки моддий нуқта системасининг эркинлик даражалари сони 5 га тенг бўлади: моддий нуқталардан биттасининг эркинлик даражалари сони 3 га тенгдир, иккинчи моддий нуқта эса биринчи моддий нуқта атрофида ўзгармас радиусли сферик сиртдагина ҳаракат қилиб, вазияти иккита умумлашган координата билан аниқланади, демак, иккинчи моддий нуқтанинг эркинлик даражалари сони 2 га тенг бўлади. Шундай қилиб, бу системанинг эркинлик даражалари 5 тадир.

Бир-биридан ораликлари ўзгармас учта моддий нуқта системасининг эркинлик даражалари сони 6 га тенгдир: 5 та эркинлик даражасига эга икки моддий нуқта орқали ўтган тўғри чизиқ атрофида учинчи моддий нуқта ўзгармас радиусли айлана бўйича ҳаракатланиб, вазияти битта умумлашган координата билан аниқланади, демак, учинчи моддий нуқтанинг эркинлик даражаси биттагинадир. Шундай қилиб, бу система 6 та эркинлик даражасига эга. Абсолют қаттиқ жисмнинг вазияти у билан мустаҳкам боғланган учбурчак вазияти билан аниқланади. Демак, абсолют қаттиқ жисмнинг эркинлик даражалари сони 6 га тенг.

Умумлашган координаталарни вақт функцияси деб ҳисоблаймиз:

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{45.178}$$

Бу тенгламалар системанинг ҳаракат қонунини ифодалайди. Умумлашган координаталарнинг вақт бўйича биринчи ҳосилалари $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$ *умумлашган тезликлар ва иккинчи ҳосилалари* $\frac{d^2q_i}{dt^2} = \ddot{q}_i$ *умумлашган тезланишлар деб юритилади. Координаталар, тезликлар ва тезланишларни боғлаган муносабатлар ҳаракат тенгламалари дейилади.*

Системани характерловчи умумлашган координаталар, тезликлар ва вақтга боғлиқ функция берилган бўлсин:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \ldots, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t). \tag{45.179}$$

Бу функция системанинг Лагранж функцияси дейилади.

Системанинг Лагранж функциясидан $t = t_1$ *ва* $t = t_2$ *вақт оралигида олинган қуйидаги:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n t) \tag{45.180}$$

интеграл системанинг таъсири ёки таъсир функцияси, гоҳо таъсир интеграли деб аталади.

Механика ва физикадаги вариацион принцип шундан иборатки, ҳақиқий ҳаракатдаги системанинг таъсир интеграли экстремал қийматга эга, яъни таъсир интегралининг вариацияси нолга тенгдир:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0. \tag{45.181}$$

Вариацион принцип баъзан таъсир интегралининг стационарлик принципи ёки Остроградский—Гамильтон принципи деб ҳам юритилади.

(45.174) ва (45.176) га биноан, (45.181) га мос келувчи ушбу дифференциал тенгламалар мавжуддир:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{45.182}$$

Бу дифференциал тенгламалар Лагранж ҳаракат тенгламалари дейилади. Лагранж функциясининг умумлашган тезлик бўйича хусусий ҳосиласи умумлашган импульс дейилади ва p_i билан ишораланади:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{45.183}$$

У вақтда Лагранж тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{45.184}$$

Ҳаракат тенгламаларининг яна бир шакли—каноник тенгламалар билан танишайлик. Шу мақсадда *умумлашган координаталар, умумлашган импульслар ва вақт функцияси ҳисобланган Гамильтон функциясини ёки гамильтониан киритамиз:*

$$H=H(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ t). \tag{45.185}$$

Лагранж функцияси билан Гамильтон функцияси орасидаги боғланиш қуйидагича таърифланади:

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L. \tag{45.186}$$

Бу ифодадан тўла дифференциал оламиз:

$$dH=\sum_{i=1}^{n}p_i d\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}dp_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

ёки (45.183) ва (45.184) га мувофиқ:

$$dH=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i dp_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{dp_i}{dt}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{45.187}$$

бўлади. Энди (45.185) дан тўла дифференциал оламиз:

$$dH=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt. \tag{45.188}$$

Сўнгги икки ифодани таққослаб, ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{45.189}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{45.190}$$

Шу (45.190) *дифференциал тенгламалар системаси ҳаракатнинг каноник тенгламалари ёки Гамильтон тенгламалари дейилади.*

Умумлашган q_i *координаталар билан умумлашган* p_i *импульслар каноник қўшма миқдорлар дейилади.*

Умумлашган $q_1, \ldots, q_n$ *координаталар хилма-хиллиги конфигурацион фазо, тўғрироғи, n-ўлчовли конфигурацион фазо деб юритилади. Умумлашган* $q_1, \ldots, q_n$ *координаталар билан умумлашган* $p_1, \ldots, p_n$ *импульслар хилма-хиллиги эса фазавий фазо (фазалар фазоси), тўғрироғи, 2n-ўлчовли фазавий фазо дейилади.*

(45.188) га мувофиқ:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

ёки (45.190) назарга олинса:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{45.191}$$

бўлади. Лагранж функцияси ошкор равишда вақтга боғланмаган, яъни $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ бўлса, у вақтда, (45.189) га мувофиқ, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ бўлади, демак, $\frac{dH}{dt} = 0$, яъни Гамильтон функцияси ўзгармасдан сақланади.

Кинетик энергияси T ва потенциал энергияси U бўлган система учун:

$$L = T - U, \tag{45.192}$$

$$H = T + U \tag{45.193}$$

эканлигини таъкидлаб ўтиш мумкин. Лагранж функцияси кинетик ва потенциал энергиялар айирмасига тенг. Гамильтон функцияси эса кинетик ва потенциал энергиялар йиғиндисига, яъни система энергиясига тенгдир. Шундай қилиб, Гамильтон функцияси умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар орқали кўрсатилган система энергиясини ифодалайди.

XVII. Таъсир функцияси билан импульснинг боғланиши. Бизга маълум бўлган (45.180) ва (45.172) таърифларга биноан, системанинг таъсир функцияси:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,dt \tag{45.194}$$

ва бу таъсир функциясининг вариацияси:

$$\delta S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}\delta q_i dt$$

бўлади. Ҳақиқий ҳаракатдаги система учун Лагранж тенгламалари (45.182) мавжуд:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0.$$

У вақтда

$$\delta S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

бўлади.

Ҳақиқий ҳаракат билан боғланган ўзгаришларда вариациялар ўрнига дифференциал олишимиз лозим. Шундай қилиб:

$$dS=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}dq_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

бўлади. Юқори чегара t_2 ни ўзгарувчи деб ҳисоблаб, t орқали белгиласак, у вақтда сўнгги ифодадан:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

келиб чиқади ёки $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ўрнига умумлашган импульс таърифи (45.183) га мувофиқ p_i қўйилса:

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{45.195}$$

бўлади. (45.194) дан:

$$\frac{dS}{dt}=L \tag{45.196}$$

келиб чиқади. Таъсир функцияси S ни q_i координаталар ва вақт функцияси деб ҳисоблаймиз:

$$S=S(q_1, \ldots, q_n, t) \tag{45.197}$$

Бу ҳолда:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}$$

ёки (45.195) билан (45.196) дан фойдалансак:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dt}$$

бўлади. Бу ифоданинг ўнг томонида турган миқдор (45.186) га мувофиқ, манфий ишорали Гамильтон функциясидир, демак:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{45.198}$$

Гамильтон функцияси таърифига кўра, у координаталар, импульслар ва вақт функциясидир:

$$H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

ёки (45.195) га мувофиқ:

$$H = H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n} t\right). \tag{45.199}$$

(45.197) ва (45.199) га биноан, (45.198) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q, \ldots, q_n, t) + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0. \tag{45.200}$$

Бу дифференциал тенглама Гамильтон—Якоби тенгламаси деб юритилади. Механика, оптика, квантлар назарияси ва бошқа соҳаларда Гамильтон—Якоби тенгламасининг аҳамияти катта.

II БОБГА ОИД МАШҚЛАР

Ушбу функцияларнинг биринчи ҳосилалари топилсин (27—32):

27. $\left(a \frac{da}{dt}\right)$.

28. $\left[a \frac{da}{dt}\right]$.

29. $\left[a\left[\frac{db}{dt} c\right]\right]$.

30. $\left(\frac{da}{dt}\left[a \frac{d^2a}{dt^2}\right]\right)$.

31. $\left(\left[a \frac{da}{dt}\right]\left[\frac{da}{dt} \frac{d^2a}{dt^2}\right]\right)$.

32. $\frac{a}{b}$.

33. $\frac{d^2a}{dt} = bt$ тенгламадан a вектор аниқлансин. Бу ерда b вектор ўзгармас.

34. $\frac{d^3a}{dt^3} = 0$ тенгламадан a вектор аниқлансин.

35. Скаляр функция градиентининг Декарт компонентлари орқали ёзилиш формуласидан фойдаланиб, $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ функциянинг градиенти топилсин.

Ушбу функцияларнинг градиентлари топилсин (36—39):

36. $\Phi(\varphi)$.

37. $\varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.
38. $R(r)$.
39. $F(f_1, f_2, f_3)$.
40. Масофа градиенти $\mathrm{grad}\, r$ радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ нинг орти эканлиги кўрсатилсин: $\mathrm{grad}\, r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

41. $Ax + By + Cz + D$ функциянинг градиенти ўзгармас вектор эканлиги кўрсатилсин. Бу ерда A, B, C, D—ўзгармас сонлардир.

42. $(\boldsymbol{ar})$ функциянинг градиенти аниқлансин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$ ўзгармас вектор.

43. $r^{(\boldsymbol{ab})}$ функциянинг градиенти топилсин. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — ўзгармас векторлар.

44. $\{(\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})\}$ функциянинг градиенти топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — ўзгармас векторлар.

45. $\frac{([\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{cr})}$ функциянинг градиенти топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — ўзгармас векторлар.

46. $\boldsymbol{r}$ радиус-векторнинг $\boldsymbol{a}$ вектор бўйича градиенти $(\boldsymbol{a}\nabla)\,\boldsymbol{r}$ топилсин.

47. $\boldsymbol{r}$ радиус-векторнинг дивергенцияси топилсин.

48. $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{r}$ вектор функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда a — ўзгармас скаляр.

49. $\boldsymbol{A} = r\boldsymbol{a}$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$—ўзгармас вектор.

50. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{ra})\,\boldsymbol{b}$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$— ўзгармас векторлар.

51. $\boldsymbol{A} = r^n\boldsymbol{a}$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$ — ўзгармас вектор.

52. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{ar}]$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$ — ўзгармас вектор.

53. $\boldsymbol{A} = r^n\boldsymbol{r}$ функциянинг дивергенцияси топилсин.

54. $\boldsymbol{A} = M\boldsymbol{a}(\boldsymbol{rb}) + N\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ba})$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — ўзгармас векторлар ва M, N — ўзгармас скалярлар.

55. $\boldsymbol{A} = r[\boldsymbol{ar}]$ функциянинг дивергенцияси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$ — ўзгармас вектор.

56. $\boldsymbol{r}$ радиус-векторнинг уюрмаси топилсин.

57. $\boldsymbol{A} = r\boldsymbol{a}$ функциянинг уюрмаси топилсин. $\boldsymbol{a}$ — вектор ўзгармас.

58. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{ra})\,\boldsymbol{b}$ функциянинг уюрмаси топилсин. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$—векторлар ўзгармас.

59. $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{ar}]$ функциянинг уюрмаси топилсин. Бу ерда $\boldsymbol{a}$ — ўзгармас вектор.

60. $\boldsymbol{A} = f(r)\,\boldsymbol{r}$ функциянинг уюрмаси топилсин.

61. $\boldsymbol{A} = [M_1 \,\mathrm{grad}\, \varphi_1 \; M_2 \,\mathrm{grad}\, \varphi_2]$ функциянинг дивергенцияси топилсин.

62. $\boldsymbol{A} = \varphi_1 \,\mathrm{grad}\, \varphi_2$ вектор ўзининг уюрмасига перпендикулярлиги исботлансин.

63. Ўзгармас $\boldsymbol{a}$ вектор учун $\oint (\boldsymbol{ar})\, d\boldsymbol{S} = V\boldsymbol{a}$ эканлиги курсатилсин. Бу ерда V — ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажм.

64. Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор ва F скаляр учун

$$\oint ([\mathrm{grad}\, F\, \boldsymbol{a}]\, d\boldsymbol{S}) = -\int (\mathrm{grad}\, F \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})\, dV$$

эканлиги кўрсатилсин.

Векторларнинг Декарт ифодаларидан фойдаланиб, қуйидагилар исботлансин (65—73):

65. $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, \varphi = 0$.
66. $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} = 0$.

67. $\text{rot rot}\, \boldsymbol{a} = \text{grad div}\, \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}$.
68. $\text{grad}\,(\varphi\psi) = \varphi\, \text{grad}\, \psi + \psi\, \text{grad}\, \varphi$.
69. $\text{div}\,(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi\, \text{div}\, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\, \text{grad}\, \varphi)$.
70. $\text{rot}\,(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi\, \text{rot}\, \boldsymbol{a} + [\text{grad}\varphi \boldsymbol{a}]$.
71. $\text{div}\,[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{b}\, \text{rot}\, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\, \text{rot}\, \boldsymbol{b})$.
72. $\text{rot}\,[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a}\, \text{div}\, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\, \text{div}\, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\, \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\, \boldsymbol{b}$.
73. $\text{grad}\,(\boldsymbol{ab}) = [\boldsymbol{a}\, \text{rot}\, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\, \text{rot}\, \boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\, \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\, \boldsymbol{a}$.

74. Цилиндрик координаталар системаси ортларининг шу координаталар бўйича ҳосилалари:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\boldsymbol{e}_\rho, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z} = 0$$

эканлиги кўрсатилсин.

75. Цилиндрик координаталар системасини тасвирловчи 143- расмдан фойдаланиб, $\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \sin\varphi\, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\, \boldsymbol{j}$ эканлиги кўрсатилсин.

76. Юқоридаги 74- масалани 75- масала жавобидан фойдаланиб ечинг.

77. Сферик координаталар системасини тасвирловчи 142- расмдан фойдаланиб, ушбулар исботлансин:

$$\boldsymbol{e}_z = \sin\theta\cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\, \boldsymbol{j} + \cos\theta\, \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\varphi\cos\theta\, \boldsymbol{j} - \sin\theta\, \boldsymbol{k}.$$

78. Сферик координаталар системаси ортларининг шу координаталар бўйича ҳосилалари қуйидагича эканлиги исботлансин:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta.$$

79. Набла орқали вектор дивергенциясининг ёзилиши (33.6) ва набланинг сферик координаталар системасидаги ёзилиши (37.9) дан фойдаланиб, сферик координаталар системасида вектор дивергенциясини ифодаловчи (37.4) формула чиқарилсин.

80. Набла орқали вектор дивергенциясининг ёзилиши (33.6) билан набланинг цилиндрик координаталар системасидаги ёзилиши (38.8) дан фойдаланиб, цилиндрик координаталар системасида вектор дивергенциясини ифодаловчи (38.4) формула чиқарилсин.

81. Набла орқали вектор уюрмасининг ёзилиши (33.7) ва набланинг сферик координаталар системасидаги ёзилиши (37.9) дан фойдаланиб, сферик координаталар системасида вектор уюрмасини ифодаловчи (37.8) формула чиқарилсин.

82. Набла орқали вектор уюрмасининг ёзилиши (33.7) ва набланинг цилиндрик координаталар системасидаги ёзилиши (38.8) дан фойдаланиб, цилиндрик координаталар системасида вектор уюрмасини ифодаловчи (38.7) формула чиқарилсин.

83. Скаляр функциядан бирор контур бўйича олинган $\oint \varphi d\boldsymbol{l}$ интеграл шу функция градиентининг берилган контур билан чегараланган сирт бўйича олинган $\int [d\boldsymbol{S}\, \text{grad}\, \varphi]$ интегралига тенг: $\oint \varphi\, d\boldsymbol{l} = \int [d\boldsymbol{S}\, \text{grad}\, \varphi]$. Шу исботлансин.

84. Қуйидаги ифода исботлансин:

$$\left(\frac{di}{dt}\left[\frac{dj}{dt}\,\frac{dk}{dt}\right]\right)=0.$$

Гаусс—Остроградский теоремасидан фойдаланиб, қуйидагилар исботлансин (85—89):

85. $\oint\cos(\widehat{n,x})\,dS=0,\ \oint\cos(\widehat{n,y})\,dS=0,\ \oint\cos(\widehat{n,z})\,dS=0.$

86. $\oint z\cos(\widehat{n,z})\,dS=V,\ \oint y\cos(\widehat{n,y})\,dS=V,\ \oint x\cos(\widehat{n,x})\,dS=V.$

87. $\oint\{x\cos(\widehat{n,x})+y\cos(\widehat{n,y})+z\cos(\widehat{n,z})\}\,dS=3V.$

88. $\oint x\cos(\widehat{n,z})\,dS=0,\ \oint y\cos(\widehat{n,z})\,dS=0.$

89. $\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dV=\oint\varphi\cos(\widehat{n,x})\,dS,\ \int\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dV=\oint\varphi\cos(\widehat{n,y})dS,$

$\int\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dV=\oint\varphi\cos(\widehat{n,z})\,dS.$

МАШҚЛАРГА ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

27. $\frac{d}{dt}\left(a\frac{da}{dt}\right)=\left|\frac{da}{dt}\right|^2+\left(a\frac{d^2a}{dt^2}\right).$

28. $\frac{d}{dt}\left[a\frac{da}{dt}\right]=\left[a\frac{d^2a}{dt^2}\right].$

29. $\frac{d}{dt}\left[a\left[\frac{db}{dt}c\right]\right]=\left[\frac{da}{dt}\left[\frac{db}{dt}c\right]\right]+\left[a\left[\frac{d^2b}{dt^2}c\right]\right]+\left[a\left[\frac{db}{dt}\,\frac{dc}{dt}\right]\right].$

30. Уч векторнинг иккитаси бир хил бўлганда аралаш кўпайтманинг нолга тенг бўлиши назарда тутилсин.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\left[a\frac{d^2a}{dt^2}\right]\right)=\left(\frac{da}{dt}\left[a\frac{d^3a}{dt^3}\right]\right).$$

31. $\frac{d}{dt}\left(\left[a\frac{da}{dt}\right]\left[\frac{da}{dt}\,\frac{d^2a}{dt^2}\right]\right)=\left(\left[a\frac{d^2a}{dt^2}\right]\left[\frac{da}{dt}\,\frac{d^2a}{dt^2}\right]\right)+\left(\left[a\frac{da}{dt}\right]\left[\frac{da}{dt}\,\frac{d^3a}{dt^3}\right]\right).$

32. $\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{dt}-\frac{db}{dt}a\right).$

33. $\frac{da}{dt}=\frac{bt^2}{2}+c,\quad a=\frac{bt^3}{6}+ct+e,$

бу ерда c, e — ўзгармас векторлар.

34. $\frac{d^2a}{dt^2}=b,\ \frac{da}{dt}=bt+c,\ a=\frac{bt^2}{2}+ct+e,$

бу ерда b, c, e — ўзгармас векторлар.

35. Фойдаланиш лозим бўлган формула:

$$\operatorname{grad}\varphi=i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+j\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.$$

Бу хусусий ҳосилаларни мос равишда i, j, k га купайтириб, сунгра чиққан натижалар қўшилса:

$$\operatorname{grad}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad}\varphi_1$$

булади.

36. Аввалги масала жавобида қўлланилган градиент формуласидан фойдаланилсин:

$$\frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Декарт ортларига кўпайтирилиб, сўнгра ўзаро қўшилса:

$$\operatorname{grad}\Phi(\varphi) = \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}\operatorname{grad}\varphi$$

бўлади.

37. Аввалги икки масалага қаралсин.

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \frac{1}{\varphi_2^2}(\varphi_2 \operatorname{grad}\varphi_1 - \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2).$$

38. Юқоридаги 36-масалага қаралсин.

$$\operatorname{grad} R(r) = \frac{dR(r)}{dr}\operatorname{grad} r.$$

39. Асосан аввалги масаладагидек,

$$\operatorname{grad} F(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial F(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_1}\operatorname{grad} f_1 + \frac{\partial F(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_2}\operatorname{grad} f_2 + \\ + \frac{\partial F(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_3}\operatorname{grad} f_3.$$

40. r масофани Декарт координаталари x, y, z орқали ифодалаб: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Булардан:

$$\operatorname{grad} r = \frac{1}{r}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

бўлади.

41. $\operatorname{grad}(Ax + By + Cz + D) = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, яъни натижа ўзгармас вектордир.

42. $(\boldsymbol{ar}) = a_x x + a_y y + a_z z$ ни дифференциалласак:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{ar}) = a_x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{ar}) = a_y, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{ar}) = a_z$$

бўлади, натижада:

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ar}) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}$$

келиб чиқади.

43. $\operatorname{grad} r^{(\boldsymbol{ab})} = (\boldsymbol{ab})\, r^{(\boldsymbol{ab})-1}\operatorname{grad} r = (\boldsymbol{ab})\, r^{(\boldsymbol{ab})-2}\boldsymbol{r}$.

44. $\operatorname{grad}\{(\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})\} = (\boldsymbol{ar})\operatorname{grad}(\boldsymbol{br}) + (\boldsymbol{br})\operatorname{grad}(\boldsymbol{ar})$, аммо $\operatorname{grad}(\boldsymbol{br}) = \boldsymbol{b}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{ar}) = \boldsymbol{a}$, демак:

$$\operatorname{grad}\{(\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})\} = (\boldsymbol{ar})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{br})\boldsymbol{a}.$$

45. Юқоридаги 37 ва 42- масала натижаларидан фойдаланамиз.

$$\operatorname{grad}\frac{([ab]r)}{(cr)}=\frac{1}{(cr)^2}\{(cr)\operatorname{grad}([ab]\,r)-([ab]\,r)\operatorname{grad}(cr)\}=$$
$$=\frac{1}{(cr)^2}\{(cr)\,[ab]-([ab]\,r)\,c\}.$$

Икки қайтали вектор купайтма формуласи $(A\,[BC])=B\,(AC)-C\,(AB)$ дан фойдалансак:

$$\operatorname{grad}\frac{([ab]\,r)}{(cr)}=\frac{1}{(cr)^2}\left[r\,[[ab]\,c]\right]$$

булади.

46. $(a\nabla)\,r=(a\nabla)\,xi+(a\nabla)\,yj+(a\nabla)\,zk=(a\nabla x)\,i+(a\nabla y)\,j+(a\nabla z)\,k=$ $=(ai)\,i+(aj)\,j+(ak)\,k=a_xi+a_yj+a_zk=a.$

47. Қуйидагилардан фойдаланилсин:

$$r=xi+yj+zk,$$
$$\operatorname{div} r=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

48. Юқоридаги 47-масаланинг жавобига қаралсин:

$$\operatorname{div}(ar)=a\operatorname{div} r=3a.$$

49. Юқоридаги 40-масаланинг жавобига қаралсин:

$$\operatorname{div}(ra)=\frac{\partial(a_xr)}{\partial x}+\frac{\partial(a_yr)}{\partial y}+\frac{\partial(a_zr)}{\partial z}=$$
$$=a_x\frac{\partial r}{\partial x}+a_y\frac{\partial r}{\partial y}+a_z\frac{\partial r}{\partial z}=(a\operatorname{grad} r)=\left(a\frac{r}{r}\right)=\frac{(ar)}{r}.$$

50. Скаляр купайтмани Декарт компонентлари орқали ифодалаймиз:

$$(ra)=xa_x+ya_y+za_z.$$
$$\operatorname{div}(ra)\,b=\frac{\partial}{\partial x}\{(ra)\,b_x\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(ra)\,b_y\}+\frac{\partial}{\partial z}\{(ra)\,b_z\}=$$
$$=b_x\frac{\partial}{\partial x}(ra)+b_y\frac{\partial}{\partial y}(ra)+b_z\frac{\partial}{\partial z}(ra)=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=(ba).$$

51. Юқоридаги 40-масаланинг жавобига қаралсин:

$$\operatorname{div}(r^na)=a_x\frac{\partial r^n}{\partial x}+a_y\frac{\partial r^n}{\partial y}+a_z\frac{\partial r^n}{\partial z}=$$
$$=a_xnr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}+a_ynr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}+a_znr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}=$$
$$=nr^{n-1}(a\operatorname{grad} r)=nr^{n-1}\left(a\frac{r}{r}\right)=nr^{n-2}(ar).$$

52.

$$\operatorname{div}[ar]=\frac{\partial}{\partial x}(a_yz-a_zy)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zx-a_xz)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xy-a_yx)=0.$$

53. Скаляр билан вектор φa купайтмасининг дивергенцияси формуласи (34.9) дан фойдаланиш мумкин:

$$\operatorname{div}(r^nr)=r^n\operatorname{div} r+(\operatorname{grad} r^nr).$$

38, 40 ва 48- масалаларнинг жавобларига қаралсин:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3,$$

$$\operatorname{grad} r^n = nr^{n-1} \operatorname{grad} r = nr^{n-1} \frac{\boldsymbol{r}}{r} = nr^{n-2} \boldsymbol{r},$$

$$\operatorname{div} (r^n \boldsymbol{r}) = 3r^n + nr^{n-2} r^2 = (n+3) r^n.$$

54. $\operatorname{div} \{M\boldsymbol{a} (\boldsymbol{rb}) + N\boldsymbol{r} (\boldsymbol{ba})\} = \operatorname{div} \{M\boldsymbol{a} (\boldsymbol{rb})\} + \operatorname{div} \{N\boldsymbol{r} (\boldsymbol{ba})\}$.

(34.9) формуладан ҳамда 42 билан 38-масаланинг жавобларидан фойдаланиб, бундай ёзиш мумкин:

$$\operatorname{div} \{M\boldsymbol{a} (\boldsymbol{rb})\} = M (\operatorname{grad} (\boldsymbol{rb})\, \boldsymbol{a}) = M (\boldsymbol{ba}),$$

$$\operatorname{div} \{N\boldsymbol{r} (\boldsymbol{ba})\} = N (\boldsymbol{ba}) \operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3N (\boldsymbol{ba}), \text{ демак,}$$

$$\operatorname{div} \{M\boldsymbol{a} (\boldsymbol{rb}) + N\boldsymbol{r} (\boldsymbol{ba})\} = (M + 3N) (\boldsymbol{ba}).$$

55. (34.9) формуладан ҳамда 52 билан 40-масаланинг жавобларидан фойдаланилсин:

$$\operatorname{div} r [\boldsymbol{ar}] = r \operatorname{div} [\boldsymbol{ar}] + (\operatorname{grad} r [\boldsymbol{ar}]) = r \cdot 0 + \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} [\boldsymbol{ar}]\right) = 0,$$

чунки иккитаси коллинеар булган уч векторнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.

56. Уюрманинг Декарт системасида ёзилишидан фойдаланиш мумкин:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \text{ ва}$$

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{r} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \operatorname{rot}_y \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \boldsymbol{r} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Демак: $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = 0.$

57.
$$\operatorname{rot}_x (r\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial y} (ra_z) - \frac{\partial}{\partial z} (ra_y) = a_z \frac{\partial r}{\partial y} - a_y \frac{\partial r}{\partial z} =$$

$$= [\operatorname{grad} r\, \boldsymbol{a}]_x = \frac{1}{r} [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}]_x.$$

Шунингдек: $\operatorname{rot}_y (r\boldsymbol{a}) = \frac{1}{r} [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}]_y$, $\quad \operatorname{rot}_z (r\, \boldsymbol{a}) = \frac{1}{r} [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}]_z$,

демак: $\operatorname{rot} (r\, \boldsymbol{a}) = \frac{1}{r} [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}]$.

58. Аввало $(\boldsymbol{ra}) = xa_x + ya_y + za_z$.

$$\operatorname{rot}_x (\boldsymbol{ra})\, \boldsymbol{b} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\boldsymbol{ra}) b_z \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\boldsymbol{ra})\, b_y \right\} =$$

$$= b_z \frac{\partial}{\partial y} (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}) - b_y \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}) = b_z a_y - b_y a_z = [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}]_x.$$

Худди шунингдек: $\operatorname{rot}_y (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}]_y$, $\operatorname{rot}_z (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{ab}]_z$, демак:

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{ab}].$$

59. $\operatorname{rot}_x \frac{1}{2} [\boldsymbol{ar}] = \frac{1}{2} \operatorname{rot}_x [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{r}] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{r}]_z - \frac{\partial}{\partial z} [\boldsymbol{ar}]_y \right\} =$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (a_x y - a_y x) - \frac{\partial}{\partial z} (a_z x - a_x z) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ a_x - 0 - 0 + a_x \right\} = a_x.$$

Худди шунингдек: $\mathrm{rot}_y \frac{1}{2}[\boldsymbol{ar}] = a_y$, $\mathrm{rot}_z \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}] = a_z$,

демак: $\mathrm{rot}\,\frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{a}$.

60. Масофа функция градиенти (29.5) га мувофиқ:

$$\mathrm{grad}\,F(r) = \frac{dF(r)}{dr}\,\mathrm{grad}\,r = \frac{dF}{dr}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

$\frac{dF}{dr}\,\frac{1}{r}$ ни $f(r)$ билан белгиласак:

$$\mathrm{grad}\,F(r) = f(r)\,\boldsymbol{r}$$

бўлади. Функция градиентининг уюрмаси нолга тенг эканлиги бизга маълум, демак: $\mathrm{rot}\left\{f(r)\,\boldsymbol{r}\right\} = 0$.

Бу натижани бевосита Декарт системасидан фойдаланиб ҳосил қилиш ҳам мумкин:

$$\mathrm{rot}_x\left\{f(r)\,\boldsymbol{r}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{f(r)\,z\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{f(r)y\right\} = z\frac{\partial}{\partial y}f(r) - y\frac{\partial}{\partial z}f(r) =$$

$$= [\mathrm{grad}\,f(r)\,\boldsymbol{r}]_x = \frac{df(r)}{dr}\,[\mathrm{grad}\,r\,\boldsymbol{r}]_x = \frac{df(r)}{dr}\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r},\ \boldsymbol{r}\right]_x = 0.$$

Худди шунингдек: $\mathrm{rot}_y\{f(r)\,\boldsymbol{r}\} = o$, $\mathrm{rot}_z\{f(r)\,\boldsymbol{r}\} = 0$.

демак: $\mathrm{rot}\,\{f(r)\,\boldsymbol{r}\} = 0$.

61. Вектор кўпайтма дивергенцияси формуласи (34.11) дан фойдаланилсин:

$$\mathrm{div}\,[M_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1\,M_2\,\mathrm{grad}\,\varphi_2] = M_1M_2\,\mathrm{div}\,[\mathrm{grad}\,\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2] =$$
$$= M_1M_2\,\{(\mathrm{grad}\,\varphi_2\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi_1) - (\mathrm{grad}\,\varphi_1\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi_2)\} = 0,$$

чунки функция градиентининг уюрмаси нолга тенг.

62. Скаляр билан вектор купайтмасининг уюрмаси формуласи (34.10) дан фойдаланилсин:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,(\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2) = \varphi_1\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi_2 + [\mathrm{grad}\,\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2] =$$
$$= [\mathrm{grad}\,\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2],$$

чунки функция градиентининг уюрмаси нолга тенг. Берилган векторнинг ўз уюрмасига скаляр купайтмасини ёзайлик:

$$(\boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = (\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2\,[\mathrm{grad}\,\varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2]) = 0.$$

Шундай қилиб, $\boldsymbol{A} = \varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_2$ вектор ўзининг уюрмасига перпендикулярдир.

63. Маълум (26.13) формуладан фойдаланилсин:

$$\oint(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{S} = \int \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{ar})\,dV = \int \boldsymbol{a}\,dV = \boldsymbol{a}\int dV = \boldsymbol{a}V,$$

чунки $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}$ (42- масаланинг жавобига қаралсин).

64. Гаусс—Остроградский теоремаси ва вектор кўпайтма дивергенцияси формуласи (34.11) дан фойдаланилсин:

$$\oint([\operatorname{grad} F\, \boldsymbol{a}]\, d\boldsymbol{S}) = \int \operatorname{div}[\operatorname{grad} F\, \boldsymbol{a}]\, dV,$$

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad} F\, \boldsymbol{a}] = (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \operatorname{grad} F) - (\operatorname{grad} F \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) =$$

$$= -(\operatorname{grad} F \operatorname{rot} \boldsymbol{a}),\ \text{чунки}\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0.$$

Демак: $\oint([\operatorname{grad} F\, \boldsymbol{a}]\, d\boldsymbol{S}) = -\int(\operatorname{grad} F \operatorname{rot} \boldsymbol{a})\, dV.$

65. $$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{grad}_z \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{grad}_y \varphi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0.$$

Худди шунингдек: $\operatorname{rot}_y \operatorname{grad} \varphi = 0$, $\operatorname{rot}_z \operatorname{grad} \varphi = 0$.
Демак: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

66. $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot}_x \boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0.$$

67. $$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{a} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z}.$$

Ўнг томонга $\pm \dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$ ни қўшсак, натижа ўзгармайди. Демак:

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \operatorname{grad}_x \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta a_x.$$

Худди шунингдек: $\operatorname{rot}_y \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}_y \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta a_y.$

$$\operatorname{rot}_z \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta a_z.$$

Натижада: $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}$.

68. $$\operatorname{grad}_x(\varphi \psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \psi) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Худди шунингдек: $\operatorname{grad}_y(\varphi \psi) = \varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\operatorname{grad}_z(\varphi \psi) = \varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$,

демак: $\operatorname{grad}(\varphi \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$.

69. $$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_z) =$$
$$= \varphi\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z\frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$
$$= \varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \left(a_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi).$$

70. $$\operatorname{rot}_x(\varphi\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_y) = \varphi\frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$
$$= \varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right) = \varphi\operatorname{rot}_x\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}]_x.$$

Худди шунинг каби: $\operatorname{rot}_y(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}_y\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}]_y$,
$$\operatorname{rot}_z(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}]_z.$$

Демак: $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}]$.

71. $$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]_x + \frac{\partial}{\partial y}[\boldsymbol{ab}]_y + \frac{\partial}{\partial z}[\boldsymbol{ab}]_z =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z - a_zb_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x - a_xb_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y - a_yb_x) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z) - \frac{\partial}{\partial x}(a_zb_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x) - \frac{\partial}{\partial y}(a_xb_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y) - \frac{\partial}{\partial z}(a_yb_x) =$$
$$= a_y\frac{\partial b_z}{\partial x} + b_z\frac{\partial a_y}{\partial x} - a_z\frac{\partial b_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial a_z}{\partial x} + a_z\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_x\frac{\partial a_z}{\partial y} - a_x\frac{\partial b_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial a_x}{\partial y} +$$
$$+ a_x\frac{\partial b_y}{\partial z} + b_y\frac{\partial a_x}{\partial z} - a_y\frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x\frac{\partial a_y}{\partial z}.$$

Энди умумий коэффициентли ҳадларни йиғиб ёзамиз:
$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) -$$
$$- a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) =$$
$$= b_x\operatorname{rot}_x\boldsymbol{a} + b_y\operatorname{rot}_y\boldsymbol{a} + b_z\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a} - a_x\operatorname{rot}_x\boldsymbol{b} - a_y\operatorname{rot}_y\boldsymbol{b} + a_z\operatorname{rot}_z\boldsymbol{b} =$$
$$= (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$$

72. $$\operatorname{rot}_x[\boldsymbol{ab}] = \frac{\partial}{\partial y}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]_z - \frac{\partial}{\partial z}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]_y =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(a_xb_y - a_yb_x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_zb_x - a_xb_z) = a_x\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_y\frac{\partial a_x}{\partial y} - a_y\frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x\frac{\partial a_y}{\partial y} -$$
$$- a_z\frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x\frac{\partial a_z}{\partial z} + a_x\frac{\partial b_z}{\partial z} + b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

Ўнг томонга $\pm a_x \frac{\partial b_x}{\partial x}, \pm b_x \frac{\partial a_x}{\partial x}$ қўшилса, натижа ўзгармайди. Умумий коэффициентли ҳадларни йиғиб ёзамиз:

$$\mathrm{rot}_x\,[a\,b] = a_x\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) - b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) +$$

$$+\left(b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) - \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}\right) =$$

$$= a_x \operatorname{div} \boldsymbol{b} - b_x \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\,\mathrm{grad}\,a_x) - (\boldsymbol{a}\,\mathrm{grad}\,b_x) =$$

$$= a_x \operatorname{div} \boldsymbol{b} - b_x \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,a_x - (\boldsymbol{a}\nabla)\,b_x.$$

Худди шунингдек:

$$\mathrm{rot}_y\,[\boldsymbol{ab}] = a_y \operatorname{div} \boldsymbol{b} - b_y \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,a_y - (\boldsymbol{a}\nabla)b_y,$$

$$\mathrm{rot}_z\,[\boldsymbol{ab}] = a_z \operatorname{div} \boldsymbol{b} - b_z \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,a_z - (\boldsymbol{a}\nabla)\,b_z.$$

Демак: $\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\,\nabla)\,\boldsymbol{b}.$

73. $\mathrm{grad}_x(\boldsymbol{ab}) = \mathrm{grad}_x(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) = \frac{\partial}{\partial x}(a_xb_x) + \frac{\partial}{\partial x}(a_yb_y) + \frac{\partial}{\partial x}(a_zb_z) =$$

$$= a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial x}.$$

Ўнг томонга $\pm\left(a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}\right)$ ва $\pm\left(b_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)$ қўшилса натижа ўзгармайди. Мос ҳадларни йиғиб шундай ёзсак бўлади:

$$\mathrm{grad}_x(\boldsymbol{ab}) = \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}\right) + \left(b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) +$$

$$+\left\{a_y\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\right\} + \left\{b_y\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - b_z\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\right\} =$$

$$= (\boldsymbol{a}\,\mathrm{grad}\,b_x) + (\boldsymbol{b}\,\mathrm{grad}\,a_x) +$$

$$+ \{a_y\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{b} - a_z\,\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{b}\} + \{b_y\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{a} - b_z\,\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{a}\} =$$

$$= (\boldsymbol{a}\nabla)\,b_x + (\boldsymbol{b}\,\nabla)\,a_x + [\boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}]_x + [\boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}]_x.$$

Худди шунингдек:

$$\mathrm{grad}_y(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}\,\nabla)\,b_y + (\boldsymbol{b}\,\nabla)\,a_y + [\boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}]_y + [\boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}]_y,$$

$$\mathrm{grad}_z(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}\nabla)\,b_z + (\boldsymbol{b}\nabla)\,a_z + [\boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}]_z + [\boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}]_z.$$

Демак: $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{ab}) = [\boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a}.$

74. Цилиндрик координаталар системасини тасвирловчи 143-расмдан фойдаланиш лозим. Бирор координата бўйича хусусий ҳосила олинганда, қолган координаталарнинг ўзгармаслиги назарда тутилиши керак.

$\frac{\partial e_\rho}{\partial \rho} = 0$, чунки $\varphi = \mathrm{const}$ ва $z = \mathrm{const}$ бўлганлигидан $\boldsymbol{e}_\rho = \mathrm{const}$ дир.

$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \rho} = 0$, чунки $\varphi = \mathrm{const}$ ва $z = \mathrm{const}$ бўлганлигидан $\boldsymbol{e}_\varphi = \mathrm{const}$ дир.

$\frac{\partial e_z}{\partial \rho} = 0$, чунки $e_z = \text{const}$ дир.

$\frac{\partial e_\rho}{\partial \varphi} = e_\rho$, чунки $\rho = \text{const}$ ва $z = \text{const}$ бўлганлигидан орт e_φ ниuг бурилиш бурчаги $d\varphi = d\varphi e_z$ бўлади ва Эйлер формуласи (21.11) га мувофиқ:

$$de_\rho = [d\varphi\, e_z e_\rho] = d\varphi\, [e_z e_\rho] = d\varphi e_\varphi .$$

$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -e_\rho$, чунки $\rho = \text{const}$ ва $z = \text{const}$ бўлганлигидан орт e_φ ниuг бурилиш бурчаги $d\varphi = d\varphi\, e_z$ бўлади ва Эйлер формуласи (21.11) га мувофиқ:

$$de_\varphi = [d\varphi\, e_z e_\varphi] = d\varphi\, [e_z e_\varphi] = -d\varphi e_\rho .$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial \varphi} = 0, \text{ чунки } e_z = \text{const}$$

$\frac{\partial e_\rho}{\partial z} = 0$, чунки $\varphi = \text{const}$ ва $\rho = \text{const}$ сабабли $e_\rho = \text{const}$ бўлади.

$\frac{\partial e_\varphi}{\partial z} = 0$, чунки $\rho = \text{const}$ ва $\varphi = \text{const}$ сабабли $e_\varphi = \text{const}$ бўлади.

$\frac{\partial e_z}{\partial z} = 0$, чунки $e_z = \text{const}$.

Топилган натижаларни қулайлик учун жадвал шаклида ёзиш мумкин:

	e_ρ	e_φ	e_z
$\frac{\partial}{\partial \rho}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	e_φ	$-e_\rho$	0
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0

75. Цилиндрик координаталар системасини тасвирловчи 143- расмдан:

$$(e_\rho)_x = (e_\rho\, i) = \cos\varphi,\ (e_\rho)_y = (e_\rho\, j) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

келиб чиқади. Демак:

$$e_\rho = \cos\varphi\, i + \sin\varphi\, j.$$

Ўша расмдан:

$$e_\varphi = [e_z e_\rho] \text{ ва } e_z = k$$

бўлади. Демак: $e_\varphi = [k,\ \cos\varphi\, i + \sin\varphi j] = \cos\varphi\, [k\, i] + \sin\varphi\, [kj]$,

аммо $[ki] = j$, $[kj] = -i$, шундай қилиб, $e_\varphi = -\sin\varphi\, i + \cos\varphi\, j$.

76. e_ρ, e_φ, e_z ортлар учун топилган ифодалар мос равишда дифференциаллаб чиқилади.

77. Сферик координаталар системасини тасвирловчи 142- расмдан фойдаланиш лозим.

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

демак:

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}$$

ёки (37.1) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}.$$

Расмдан:

$$(\boldsymbol{e}_\varphi)_x = (\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{i}) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

$$(\boldsymbol{e}_\varphi)_y = (\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{j}) = \cos\varphi$$

булади, демак:

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

Равшанки: $\boldsymbol{e}_\theta = [\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{e}_r]$ ёки юқоридаги формулаларга биноан:

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin^2\varphi\sin\theta\,[\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}] - \sin\varphi\cos\theta\,[\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}] +$$
$$+ \cos^2\varphi\sin\theta\,[\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}] + \cos\varphi\cos\theta\,[\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}]$$

булади. Аммо $[\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}$, демак:

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin^2\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{k} + \sin\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j} - \cos^2\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{k} + \cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} =$$
$$= -\sin\theta\,\boldsymbol{k} + \sin\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} \quad \text{ёки}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}.$$

78. Аввалги масалада $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ ортлар учун топилган натижалардан фойдаланилсин:

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{i} - \sin\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j} - \cos\theta\,\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{e}_r,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} = \sin\theta(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\cos\theta\, \boldsymbol{j} = \cos\theta(-\sin\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\, \boldsymbol{j}) = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\, \boldsymbol{i} - \sin\varphi\, \boldsymbol{j}.$$

Аммо $\boldsymbol{e}_r$ ифодасининг икки томонини $\sin\theta$ га ва $\boldsymbol{e}_\theta$ ифодасининг икки томонини $\cos\theta$ га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшсак: $\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta = \cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \sin\varphi\, \boldsymbol{j}$ бўлади, демак:

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta\, .$$

Топилган натижаларни қулайлик учун жадвал шаклида ёзиш мумкин:

	$\boldsymbol{e}_r$	$\boldsymbol{e}_\theta$	$\boldsymbol{e}_\varphi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\boldsymbol{e}_\theta$	$-\boldsymbol{e}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi$	$\cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi$	$-\cos\theta \boldsymbol{e}_\theta - \sin\theta \boldsymbol{e}_r$

79. Бу масалада:

$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a})$,

$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$,

$\boldsymbol{a} = a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi$.

Шундай қилиб:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi},\ a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) =$$
$$= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r},\ a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) +$$
$$+ \left(\boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) +$$
$$+ \left(\boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi},\ a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) =$$
$$= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r},\ a_r \boldsymbol{e}_r\right) + \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r},\ a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta\right) + \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r},\ a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) +$$
$$+ \left(\boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ a_r \boldsymbol{e}_r\right) + \left(\boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ a_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta\right) + \left(\boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ a_\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\right) +$$

$$+\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ a_r e_r\right)+\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ a_\theta e_\theta\right)+$$

$$+\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ a_\varphi e_\varphi\right).$$

Бу скаляр кўпайтмаларнинг ҳар бирини алоҳида текшириб чиқиш керак:

$$\left(e_r \frac{\partial}{\partial r},\ a_r e_r\right)=\left(e_r, \frac{\partial}{\partial r}[a_r e_r]\right)=\left(e_r, \frac{\partial a_r}{\partial r}e_r\right)+\left(e_r, a_r\frac{\partial e_r}{\partial r}\right)=$$

$$=\frac{\partial a_r}{\partial r}(e_r e_r)+a_r\left(e_r \frac{\partial e_r}{\partial r}\right).$$

Худди шунингдек:

$$\left(e_r \frac{\partial}{\partial r}, a_\theta e_\theta\right)=\frac{\partial a_\theta}{\partial r}(e_r e_\theta)+a_\theta\left(e_r \frac{\partial e_\theta}{\partial r}\right),$$

$$\left(e_r \frac{\partial}{\partial r}, a_\varphi e_\varphi\right)=\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}(e_r e_\varphi)+a_\varphi\left(e_r \frac{\partial e_\varphi}{\partial r}\right),$$

$$\left(e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\ a_r e_r\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}(e_\theta e_r)+\frac{1}{r}a_r\left(e_\theta \frac{\partial e_r}{\partial\theta}\right),$$

$$\left(e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, a_\theta e_\theta\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}(e_\theta e_\theta)+\frac{1}{r}a_\theta\left(a_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$\left(e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\ a_\varphi e_\varphi\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}(e_\theta e_\varphi)+\frac{1}{r}a_\varphi\left(e_\theta \frac{\partial e_\varphi}{\partial\theta}\right),$$

$$\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ a_r e_r\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}(e_\varphi e_r)+\frac{1}{r\sin\theta}a_r\left(e_\varphi \frac{\partial e_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ a_\theta e_\theta\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}(e_\varphi e_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}a_\theta\left(e_\varphi \frac{\partial e_\theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$\left(e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, a_\varphi e_\varphi\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}(e_\varphi e_\varphi)+\frac{1}{r\sin\theta}a_\varphi\left(e_\varphi \frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}\right).$$

e_r, e_θ, e_φ ортлар ўзаро перпендикулярдир, уларнинг ҳосилалари эса 78- машқнинг жавобидан маълум. Шуларни назарда тутиб, юқоридаги асосий формуламизни тубандагича ёзамиз:

$$\operatorname{div} a=\frac{\partial a_r}{\partial r}+0+0+0+0+0+$$

$$+0+\frac{1}{r}a_r+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+0+0+0+$$

$$+0+\frac{1}{r\sin\theta}a_r\sin\theta+0+\frac{1}{r\sin\theta}a_\theta\cos\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+0=$$

$$=\frac{\partial a_r}{\partial r}+2\frac{a_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\frac{a_\theta\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Ўнг томондаги биринчи ҳад билан иккинчи ҳад йиғиндиси:

$$\frac{\partial a_r}{\partial r} + 2\frac{a_r}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r),$$

учинчи ҳад билан тўртинчи ҳад йиғиндиси эса:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta \cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\theta).$$

Ниҳоят:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Бу эса чиқарилиши талаб қилинган (37.4) формуладир.

80. Бу масалада:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{a}),$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{a} = a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + a_z\boldsymbol{e}_z.$$

Демак:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = (\nabla\boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z},\ a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + a_z\boldsymbol{e}_z\right) =$$

$$= \frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}(\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{e}_\rho) + a_\rho\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}(\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{e}_\varphi) + a_\varphi\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\rho}\right) +$$

$$+ \frac{\partial a_z}{\partial\rho}(\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{e}_z) + a_z\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{e}_\rho) + \frac{a_\rho}{\rho}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi) + \frac{a_\varphi}{\rho}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{e}_z) + \frac{a_z}{\rho}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{\partial a_\rho}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_\rho) + a_\rho\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial z}\right) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_\varphi) + a_\varphi\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial a_z}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z) + a_z\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial z}\right).$$

$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ ортлар ўзаро перпендикулярдир, уларнинг ҳосилалари 78-машқнинг жавобидан маълум. Шунинг учун:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 +$$

$$+ 0 + \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial a_z}{\partial z} + 0 =$$

$$= \frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} + \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ўнг томондаги биринчи ва иккинчи ҳад йиғиндиси:

$$\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} + \frac{a_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)$$

Бу топилган натижани шундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_\varphi)\right\}\boldsymbol{e}_\rho +$$

$$+ \left\{\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right\}\boldsymbol{e}_z.$$

Бу эса чиқарилиши талаб қилинган (38.7) формуладир.

83. Ўзгармас $\boldsymbol{a}$ вектор учун бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\boldsymbol{a} \oint \varphi\, d\boldsymbol{l}\right) = \oint (\boldsymbol{a}\, \varphi\, d\boldsymbol{l}) = \oint (\varphi\, \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l}).$$

Стокс теоремасидан фойдалансак, $\left(\boldsymbol{a} \oint \varphi d\boldsymbol{l}\right) = \int (\operatorname{rot} \varphi\, \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S})$ бўлади. Аммо (34.10) га мувофиқ:

$$\operatorname{rot} \varphi\, \boldsymbol{a} = [\operatorname{grad} \varphi\, \boldsymbol{a}] + \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\operatorname{grad} \varphi\, \boldsymbol{a}].$$

Демак:

$$\left(\boldsymbol{a} \oint \varphi\, d\boldsymbol{l}\right) = \int ([\operatorname{grad} \varphi\, \boldsymbol{a}]\, d\boldsymbol{S}).$$

Аралаш кўпайтма хусусиятидан фойдалансак:

$$\left(\boldsymbol{a} \oint \varphi\, d\boldsymbol{l}\right) = \int ([d\boldsymbol{S} \operatorname{grad} \varphi]\, \boldsymbol{a}) \quad \text{ёки} \quad \left(\boldsymbol{a}, \oint \varphi d\boldsymbol{l} - \int [d\boldsymbol{S} \operatorname{grad} \varphi]\right) = 0$$

бўлади. Нолга тенг скаляр кўпайтмадаги биринчи кўпайтирилувчи $\boldsymbol{a}$ векторнинг аниқ ўзгармас эканлигидан, иккинчи кўпайтирилувчи векторни нолга тенг деб олишга мажбурмиз:

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{l} - \int [d\boldsymbol{S} \operatorname{grad} \varphi] = 0 \ \text{ёки} \ \oint \varphi\, d\boldsymbol{l} = \int [d\boldsymbol{S}\, grad\, \varphi].$$

84. Эйлер формуласига мувофиқ:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\omega \boldsymbol{i}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\omega \boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\omega \boldsymbol{k}].$$

Икки қайтали вектор кўпайтма ва аралаш кўпайтма хоссасига мувофиқ:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right] = [[\omega \boldsymbol{j}]\ [\omega \boldsymbol{k}]] = \omega\, (\boldsymbol{k}\, [\omega\, \boldsymbol{j}]) - \boldsymbol{k}\, (\omega\, [\omega\, \boldsymbol{j}] =$$

$$= \omega\, (\omega\, [\boldsymbol{j}\, \boldsymbol{k}]) = \omega\, (\omega\, \boldsymbol{i}).$$

Демак:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\left|\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right|\right) = ([\omega\, \boldsymbol{i}]\ \omega\, (\omega\, \boldsymbol{i})) = (\omega\, \boldsymbol{i})\, ([\omega\, \boldsymbol{i}]\ \omega) = 0.$$

85. Гаусс — Остроградский теоремасига мувофиқ: $\oint (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\ dV.$ Жумладан, ўзгармас $\boldsymbol{a}$ вектор учун $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, у вақтда $\oint (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \left(\boldsymbol{a} \oint d\boldsymbol{S}\right) = 0$, демак, $\oint d\boldsymbol{S} = 0$ ёки

$$\oint \cos(\widehat{n, x})\, dS = 0, \ \oint \cos(\widehat{n, y})\, dS = 0, \ \oint \cos(\widehat{n, z})\, dS = 0$$

бўлади.

86. Масалан: $y\cos(\widehat{n, y})\, dS = (y\, \boldsymbol{j}\, dS)$
ва Гаусс—Остроградский теоремасига мувофиқ:

$$\oint y\cos(\widehat{n, y})\, dS = \oint (y\, \boldsymbol{j}\, dS) = \int \operatorname{div}(y\, \boldsymbol{j})\, dV = \int dV = V.$$

Қолган икки ифода ҳам шунинг сингари топилади.

87. $\{x\cos(\widehat{n, x}) + y\cos(\widehat{n, y}) + z\cos(\widehat{n, z})\}\, dS = (\boldsymbol{r}\, dS)$. Гаусс—Остроградский теоремасига мувофиқ:

$$\oint \{x\cos(\widehat{n, x}) + y\cos(\widehat{n, y}) + z\cos(\widehat{n, z})\}\, dS =$$
$$= \oint (\boldsymbol{r}\, dS) = \int \operatorname{div} \boldsymbol{r}\, dV = 3V.$$

88. $x\cos(\widehat{n, z})\, dS = (x\, \boldsymbol{k}\, dS)$. Гаусс—Остроградский теоремасига мувофиқ: $\oint x\cos(\widehat{n, z})\, dS = \oint (x\, \boldsymbol{k}\, d\, S) = \int \operatorname{div}(x\, \boldsymbol{k})\, dV = 0$. Иккинчи ифода ҳам шунинг каби топилади.

89. $\varphi\cos(\widehat{n, x})\, dS = (\varphi \boldsymbol{i}\, dS)$. Гаусс—Остроградский теоремасига мувофиқ:

$$\oint \varphi\cos(\widehat{n, x})\, dS = \oint (\varphi\, \boldsymbol{i}\, dS) = \int \operatorname{div}(\varphi\, \boldsymbol{i})\, dV = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dV.$$

Қолган икки ифода ҳам шунинг каби топилади. Масаладаги учта ифоданинг чап ва ўнг томонларини мос равишда $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ортларга кўпайтириб, сўнгра қўшсак, қуйидаги натижа чиқади:

$$\oint \varphi\, dS = \int \operatorname{grad} \varphi\, dV.$$

Бу эса аввалдан маълум ифодадир.

III БОБ

ОДДИЙ ТЕНЗОРЛАР АНАЛИЗИ

Вектор тушунчасини умумлаштириб, тензор тушунчаси ҳосил қилиш мумкинлигини кириш сўзида таъкидлаган эдик. Координаталарнинг турли системаларида вектор турлича компонентларга эгадир. Оддий тензор тушунчасига келиш учун Декарт системалари ортларининг ўзаро боғланишини аниқлаш масаласидан бошлаймиз.

46. ДЕКАРТ ОРТЛАРИНИ АЛМАШТИРИШ

Уч ўлчовли фазода бошлари бир нуқтада жойлашган ва ўзаро перпендикуляр бўлган учта e_1, e_2, e_3 бирлик векторни олайлик. Бундай бирлик векторларни биз илгари Декарт ортлари деб атаб, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ орқали белгилаган эдик.

Асос қилиб олинган e_1, e_2, e_3 *векторлар координат векторлар ёки базис векторлар деб ҳам юритилади.*

Бошлари фазонинг бирор нуқтасида бўлган ўзаро перпендикуляр учта орт e_1, e_2, e_3 аниқ бир Декарт триэдрини ҳосил қилса, фазонинг худди ўша нуқтасида жойлашган ўзаро перпендикуляр бошқа учта e_1', e_2', e_3' орт ҳам қандайдир янги Декарт триэдрини ҳосил қилади.

Ҳар қандай векторни компланар бўлмаган учта вектор бўйича ажратиш мумкин. Демак, янги Декарт триэдри ортлари e_1', e_2', e_3' ни дастлабки эски Декарт триэдри ортлари e_1, e_2, e_3 бўйича ажратиш мумкин:

$$\begin{aligned} e_1' &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \alpha_{13} e_3, \\ e_2' &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \alpha_{23} e_3, \\ e_3' &= \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{33} e_3 \end{aligned} \tag{46.1}$$

ёки қисқачаси:

$$e_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} e_k, \tag{46.2}$$

бу ерда i ва k индекслар бирдан учгача ўзгаради. *Юқоридаги формулада ифодаланган эски триэдр ортларидан янги триэдр ортларига ўтишни ортларни тўғри алмаштириш дейилади.* Тўғри алмаштириш коэффициентлари булган α_{ik}, эски ортлар системасига нисбатан янги ортларнинг компонентларидир.

Эски ортларни ҳам янги ортлар бўйича ажратиш мумкин:

$$e_i = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik} e'_k. \tag{46.3}$$

Бу формулада ифодаланган янги ортлардан эски ортларга ўтишни ортларни тескари алмаштириш дейилади. Тескари алмаштиришнинг β_{ik} коэффициентлари эса янги ортлар системасига нисбатан эски ортларнинг компоненларидир.

Эски ортлар ўзаро перпендикуляр, янги ортлар ҳам ўзаро перпендикуляр бўлганлигидан:

$$\left.\begin{array}{l} (e_1 e_1) = 1,\ (e_1 e_2) = 0,\ (e_1 e_3) = 0, \\ (e_2 e_1) = 0,\ (e_2 e_2) = 1,\ (e_2 e_3) = 0, \\ (e_3 e_1) = 0,\ (e_3 e_2) = 0,\ (e_3 e_3) = 1, \end{array}\right\} \tag{46.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} (e'_1 e'_1) = 1,\ (e'_1 e'_2) = 0,\ (e'_1 e'_3) = 0, \\ (e'_2 e'_1) = 0,\ (e'_2 e'_2) = 1,\ (e'_2 e'_3) = 0, \\ (e'_3 e'_1) = 0,\ (e'_3 e'_2) = 0,\ (e'_3 e'_3) = 1 \end{array}\right\} \tag{46.5}$$

бўлади. Энди икки индексли шартли белги — символ δ_{ik} киритайлик.

i индекс билан k индекс бир хил бўлса, бу символ бирга тенг, акс ҳолда нолга тенг бўлсин. *Одатда δ_{ik} символ Кронекер символи деб аталади.* Демак, Кронекер символи учун таърифга мувофиқ:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq k, \\ 1, & \text{агар } i = k \end{cases} \tag{46.6}$$

бўлади. Кронекер символидан фойдаланиб юқоридаги (46.4) ва (46.5) формулаларни қисқача бундай ёзамиз:

$$(e_i\ e_k) = \delta_{ik} \tag{46.7}$$

$$(e'_i\ e'_k) = \delta_{ik} \tag{46.8}$$

(46.2) нинг икки томонини орт e_j га скаляр кўпайтириб, сўнгра (46.7) ни назарга олсак:

$$(e'_i e_j) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} (e_k\ e_j) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} \delta_{kj} = \alpha_{ij},$$

яъни:

$$\alpha_{ij} = (e'_i\ e_j) \tag{46.9}$$

бўлади.

Энди (46.3) нинг икки томонини орт e'_j га кўпайтириб, сўнгра (46.8) ни назарда тутсак:

$$(e_i e'_j) = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik} (e'_k e'_j) = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}\delta_{kj} = \beta_{ij},$$

яъни:

$$\beta_{ij} = (e_i e'_j) \tag{46.10}$$

бўлади.

Тўғри алмаштиришнинг α_{ik} коэффициентлари билан тескари алмаштиришнинг β_{ik} коэффициентлари орасида боғланиш бор. Ҳақиқатан, (46.2) ва (46.3) га биноан:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} e_k = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{3} \beta_{kj}\, e'_j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\ \beta_{kj} \right) e'_j,$$

яъни:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\ \beta_{kj} \right) e'_j.$$

Бу формуланинг икки томонида ҳам e'_1, e'_2, e'_3 ортлар иштирок қилади. Демак, ўнг томондаги $i = j$ индексли ортнинг олдидаги коэффициенти бирга тенг, $i \neq j$ индексли ортнинг олдидаги коэффициенти эса нолга тенг бўлиши лозим. Шунинг учун:

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\ \beta_{kj} = \delta_{ij} \tag{46.11}$$

бўлади. Бу формулани бошқа шаклда ҳам ёзиш мумкин. (46.3) ва (46.2) га мувофиқ:

$$e_i = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}\, e'_k = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{kj}\, e_j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}\, \alpha_{kj} \right) e_j.$$

Юқоридаги сингари, бу ерда ҳам:

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}\, \alpha_{kj} = \delta_{ij}. \tag{46.12}$$

бўлади. Сўнгги икки формула бир-бирига эквивалент формулалардир. Уларни янада қулайроқ шаклда ёзишимиз мумкин. (46.10) билан (46.9) га мувофиқ:

$$\beta_{ij} = (e_i\ e'_j) = (e'_j\ e_i) = \alpha_{ji}. \tag{46.13}$$

Демак, (46.11) ва (46.12) формулалар бундай ёзилади:

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\, \alpha_{jk} = \delta_{ij}, \tag{46.14}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\, \alpha_{kj} = \delta_{ij} \tag{46.15}$$

(46.13) ға мувофиқ, тескари алмаштириш формуласи қуйидаги шаклни олади:

$$e_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\, e'_k. \tag{46.16}$$

Декарт ортлари ўзаро ортогонал бўлганлигидан, (46.2) *билан* (46.16) *да ифодаланган алмаштиришлар тўғри ва тескари ортогонал алмаштиришлар деб аталади,* (46.14) *ёки* (46.15) *формула эса ортогоналлик шарти дейилади.*

Алмаштириш коэффициентларини жадвалда ёзиб кўрсатайлик:

	e_1	e_2	e_3
e'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
e'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
e'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси таърифига мувофиқ e'_i, e_j ортлар учун:

$$(e'_i e_j) = |e'_i||e_j| \cos (\widehat{e'_i, e_j}) = \cos (\widehat{e'_i, e_j})$$

бўлади. Демак:

$$\alpha_{ij} = \cos(\widehat{e'_i, e_j}), \tag{46.17}$$

яъни *α_{ij} коэффициент e'_i, e_j векторлар орасидаги бурчак косинусига тенгдир. Бу косинуслар бир Декарт триэдрининг иккинчисига нисбатан йўналтирувчи косинуслари дейилади.* Йўналтирувчи косинуслар сони тўққизта бўлиб, улар орасида олтита боғланиш бор.

Ҳақиқатан, ортогоналлик шарти (46.14) ни муфассал ёзайлик:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^3 + \alpha_{33}^2 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (46.18)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (46.19)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{12} + \alpha_{23}\alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22} + \alpha_{33}\alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{33} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (46.20)$$

Диққат билан қаралса, (46.19) ва (46.20) бир-биридан фарқ қилмайди. Шундай қилиб, тўққизта йўналтирувчи косинус олтита боғланишга бўйсунади. Демак, йўналтирувчи косинуслардан учтаси берилган бўлса, қолган олтитасини шулар орқали ифодалаш мумкин. Шунга кўра, бир Декарт системасининг иккинчи Декарт системасига нисбатан вазияти учта миқдор билан аниқланади. Текширилиши лозим бўлган масаланинг мазмунига қараб, бу учта миқдорни турлича танлаш мумкин. Механикада бундай учта миқдор сифатида Эйлер бурчаклари қабул қилинади (57- параграфдаги I иловага қаранг).

Ортогонал алмаштириш коэффициентларидан тузилган детерминантни ёзайлик:

$$|\alpha_{mn}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}, \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}, \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \qquad (46.21)$$

ёки (46.9) га мувофиқ:

$$|\alpha_{mn}| = \begin{vmatrix} (e_1' \; e_1) & (e_1' \; e_2) & (e_1' \; e_3), \\ (e_2' \; e_1) & (e_2' \; e_2) & (e_2' \; e_3), \\ (e_3' \; e_1) & (e_3' \; e_2) & (e_3' \; e_3). \end{vmatrix} \qquad (46.22)$$

Векторлар алгебрасидан (12- параграф) маълумки:

$$(e_1' \, [e_2' e_3']) \; (e_1 \, [e_2 e_3]) = \begin{vmatrix} (e_1' e_1) & (e_1' e_2) & (e_1' e_3), \\ (e_2' e_1) & (e_2' e_2) & (e_2' e_3), \\ (e_3' e_1) & (e_3' e_2) & e_3' e_3) \end{vmatrix} \qquad (46.23)$$

бўлади.

Янги e_1', e_2', e_3' ортлар билан эски e_1, e_2, e_3 ортларнинг иккаласи ҳам бир ориентацияли экан, яъни иккала триэдр ҳам ўнг ёки иккаласи ҳам чап ориентацияли бўлса:

$$(e_1' [e_2' e_3']) = 1, \ (e_1 [e_2 e_3]) = 1$$

бўлади, демак:

$$|\alpha_{mn}| = 1 \tag{46.24}$$

Триэдрлар турли ориентацияли (яъни бири ўнг, иккинчиси чап ориентацияли) бўлса:

$$(e_1' [e_2' \ e_3']) = -1, \quad (e_1 [e_2 e_3]) = 1$$

бўлади, у вақтда:

$$|\alpha_{mn}| = -1. \tag{46.25}$$

Шундай қилиб, ортогонал алмаштириш коэффициентларидан тузилган детерминант ориентация ўзгармаганда мусбат бирликка, ориентация ўзгарганда эса манфий бирликка тенг. Ориентациянинг ўзгариш-ўзгармаслигидан қатъи назар, ортогонал алмаштириш коэффициентларидан тузилган детерминантнинг квадрати мусбат бирга тенгдир:

$$|\alpha_{mn}|^2 = 1. \tag{46.26}$$

Бошлари бир нуқтада жойлашган икки Декарт триэдри бир ориентацияли бўлса, ўша нуқта атрофида узлуксиз айлантириш йўли билан улардан бирини иккинчиси билан устма-уст келтириш мумкин. Турли ориентацияли триэдрлар учун бу ҳол юз бера олмайди.

Ортларнинг йўналишларини тескарига алмаштириб, икки триэдрнинг биридан иккинчисини ҳосил қилиш инверсия дейилади. Демак, инверсия таърифига мувофиқ:

$$\begin{aligned} e_1' &= -e_1, \\ e_2' &= -e_2, \\ e_3' &= -e_3 \end{aligned} \tag{46.27}$$

бўлади. *Инверсия натижасида ориентация ўзгаради.*

Инверсияга боғлиқ алмаштириш коэффициентлари (46.17) ва (46.27) га биноан, бундай бўлади:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \\ &\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = -1, \quad \alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = -1. \end{aligned} \tag{46.28}$$

Фазо ориентациясининг ўзгариши фазо инверсияси деб ҳам аталади.

47. ВЕКТОРНИ АНАЛИТИК ТАЪРИФЛАШ

Бошлари бир нуқтада жойлашган икки Декарт системаси S, S' берилган бўлиб, уларнинг ортлари e_1, e_2, e_3 ва e'_1, e'_2 e'_3 бўлсин.

Фазодаги бирор нуқтанинг координаталар бошига нисбатан радиус-вектори r ни ўша нуқтанинг S системадаги x_1, x_2, x_3 координаталари орқали ва S' системадаги x'_1, x'_2, x'_3 координаталари орқали ифодалаймиз:

$$r = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3,$$
$$r = x'_1\, e'_1 + x'_2\, e'_2 + x'_3\, e'_3$$

ёки қисқартирилган шаклда бундай бўлади:

$$r = \sum_{i=1}^{3} x_i\, e_i, \tag{47.1}$$

$$r = \sum_{j=1}^{3} x'_j\, e'_j. \tag{47.2}$$

Сўнгги тенгликнинг икки томонини e'_k ортга скаляр кўпайтирайлик:

$$(r\, e'_k) = \sum_{j=1}^{3} x'_j (e'_j\, e'_k) = \sum_{j=1}^{3} x'_j\, \delta_{jk} = x'_k.$$

Энди (47.1) нинг икки томонини яна ўша e'_k ортга скаляр кўпайтирайлик:

$$(r\, e'_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i (e_i e'_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i (e'_k e_i) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki}\, x_i,$$

$$x'_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki}\, x_i \tag{47.3}$$

бўлади.

Бу формула дастлабки координаталардан янги координаталарга ўтишни ифодалайди.

Янги координаталардан дастлабки координаталарга ўтиш формуласини топиш қийин эмас. Бунинг учун (47.1) билан (47.2) формулаларнинг чап ва ўнг томонларини e_k ортга скаляр кўпайтирамиз:

$$(r\ e_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i (e_i e_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, \delta_{ik} = x_k,$$

$$(r\ e_k) = \sum_{j=1}^{3} x'_j \cdot (e'_j\, e_k) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk}\, x'_j,$$

демак:

$$x_k = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} x'_j \tag{47.4}$$

Бу формула эса янги координаталардан дастлабки координаталарга ўтишни ифодалайди. Юқоридаги (47.3) *ва* (47.4) *формулалар координаталарнинг ортогонал алмаштирилишларини кўрсатади.* Бу формулаларни базис векторларни алмаштириш формулалари (46.2) ва (46.16) билан солиштирсак, алмаштиришларнинг умумий қонунга бўйсунишини кўрамиз: *базис векторлар қандай алмаштирилса, координаталар ҳам худди шундай алмаштирилади.*

Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор учун:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i, \tag{47.5}$$

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{3} a'_j \boldsymbol{e}'_j, \tag{47.6}$$

бу ерда a_i, a'_j сонлар $\boldsymbol{a}$ векторнинг эски ва янги Декарт системасида олинган мос компонентларидир. Бу компонентларнинг алмаштириш қонунини аниқламоқчимиз. Сўнгги икки формуладан фойдаланиб бундай ёзамиз:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}'_k) = \sum_{i=1}^{3} a_i (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}'_k) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_i,$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}'_k) = \sum_{j=1}^{3} a'_j (\boldsymbol{e}'_j \boldsymbol{e}'_k) = \sum_{j=1}^{3} a'_j \delta_{jk} = a'_k,$$

демак:

$$a'_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_i. \tag{47.7}$$

Шунинг каби усул билан тубандаги формулани ҳам чиқариш мумкин:

$$a_k = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} a'_j. \tag{47.8}$$

Сўнгги икки формуладан кўрамизки, базис векторлар қандай алмаштирилса, векторнинг компонентлари ҳам худди шундай алмаштирилади. Уларни алмаштириш қонуни бир хилдир. Ана шу алмаштириш қонунига асосланиб, векторга янги таъриф бериш мумкин.

Векторлар алгебрасида векторга берилган геометрик таърифни эслайлик: сон қийматлари билан йўналишлари аниқ ва параллелограмм қоидасига мувофиқ қўшилувчи миқдорлар векторлар деб аталади. Векторни компланар бўлмаган векторлар буйича ажратиш формуласи шу параллелограмм қоидасига асосланган эди. Вектор компонентларини алмаштириш формулалари (47.7) ва (47.8) эса вектор билан ортларни ажратиш формулаларидан келиб чиққан натижадир. Демак, векторга яққоллик нуқтаи назаридан берилган геометрик таъриф ўрнига унга эквивалент аналитик таъриф бериш мумкин:

Декарт системаси S да учта скаляр миқдор a_1, a_2, a_3 ва бошқа Декарт системаси S' да учта скаляр миқдор a'_1, a'_2, a'_3 берилган бўлсин. Базис векторларни ёки координаталарни алмаштириш қонунига бўйсунган юқоридаги учта скаляр миқдор тўплами $\boldsymbol{a}$ *векторни аниқлайди. Векторни бундай англашни векторнинг аналитик таърифи дейишимиз мумкин. Шундай қилиб,* (47.7) *ёки* (47.8) *формулалар векторнинг аналитик таърифини ифодалайди.*

Тензорлар тушунчасини киритишда шу мулоҳазалар асосий роль ўйнайди.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг a_1, a_2, a_3 компонентлари скаляр миқдорлардир. Векторнинг компонентлари, нуқтанинг координаталари каби, турли системаларда турлича бўлади.

Жисмнинг массаси, температураси, энергияси ёки векторнинг модули скаляр миқдорлардир; аммо улар координата системаларига боғлиқ эмас, ҳамма системада бир хилдир. *Умуман, сон қиймати координата системаларининг танланишига боғлиқ бўлмаган, яъни координаталарнинг ҳар қандай системасида сон қиймати бир хил бўлган миқдор инвариант дейилади. Демак, таърифга мувофиқ инвариант— бу координаталарни алмаштиришда, яъни координаталар системаларининг биридан иккинчисига ўтилганда сон қиймати узгармасдан қолувчи миқдордир.* Жисмнинг массаси, энергияси, температураси, вектор модули — буларнинг ҳаммаси инвариантга мисоллардир. *Координата системаларининг биридан иккинчисига ўтганда ёзилиш шакли ўзгармасдан қолувчи математик ифодалар инвариант ифодалар* (*ёки ковариант ифодалар*) *дейилади.*

Масалан, координаталар квадратларининг йиғиндисини текшириб кўрайлик. (47.3) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3} x'_i x'_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, x_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, a_{ik}\right) x_j\, x_k.$$

Энди ортогоналлик шарти (46.15) дан фойдаланайлик:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk}\, x_j\, x_k = \sum_{j=1}^{3} x_j x_j = \sum_{j=1}^{3} x_j^2,$$

яъни:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{j=1}^{3} x_j^2. \tag{47.9}$$

Шундай қилиб, *координаталар квадратларининг йиғиндиси ортогонал алмаштиришга нисбатан инвариант ифодадир.*

Икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси ҳамма системада бир хилдир, чунки таърифга мувофиқ, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси кўпайтирилувчи векторлар модулларининг шу векторлар орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенгдир.

Икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторни олайлик:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j\, \boldsymbol{e}_j.$$

Бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси бундай бўлади:

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{3} b_j \boldsymbol{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i\, b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i. \tag{47.9'}$$

Демак, *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторларнинг мос компонентлари кўпайтмаларининг йиғиндисидир.*

Вектор компонентларини алмаштириш формуласи (47.8) га биноан:

$$a_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\, a_k', \quad b_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}\, b_j'$$

бўлади. У вақтда:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki} a_k'\right)\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} b_j'\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_k'\, b_j' \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki}\, \alpha_{ji}$$

келиб чиқади. Энди ортогоналлик шарти (46.14) дан фойдалансак:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\ b_i = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_k' b_j' \delta_{kj} = \sum_{j=1}^{3} a_j' b_j' \tag{47.10}$$

бўлади, демак, *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ортогонал алмаштиришларга нисбатан инвариантлик хусусияти-*

га эгадир, яъни ҳамма Декарт системаларида бир хил математик шаклда ифодаланади.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ бўлса, $a_i = b_i$, $a'_j = b'_j$ бўлади, (47.10) формулага биноан:

$$a^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i a_i = \sum_{j=1}^{3} a'_j\, a'_j \tag{47.11}$$

ёки, барибир:

$$a^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 = \sum_{j=1}^{3} a_j'^2, \tag{47.12}$$

яъни *вектор компонентлари квадратларининг йиғиндиси инвариантдир.* Масалан, бирор нуқтанинг иккинчи нуқтага нисбатан радиус-вектори:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i\, \boldsymbol{e}_i$$

бўлса, нуқталар орасидаги s масофа квадрати учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \Delta x_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta x'_j \Delta x'_j \tag{47.13}$$

ёки, барибир:

$$s^2 = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_i^2 = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j'^2. \tag{47.14}$$

Шундай қилиб, икки нуқта орасидаги масофа квадрати ифодаси ортогонал алмаштиришларга нисбатан инвариантлик хусусиятига эга. Аксинча, масофа квадрати ифодасининг инвариантлигидан ортогоналлик шартини келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан, (47.7) га мувофиқ, $\Delta \boldsymbol{r}$ вектор компонентларини алмаштириш формуласи:

$$\Delta x'_j = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} \Delta x_k$$

дан фойдаланиб, масофа квадрати учун бундай ёзамиз:

$$s^2 = \sum_{j=1}^{3} \Delta x'_j \Delta x'_j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} \Delta x_k \right) \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}\, \Delta x_i \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk}\, \alpha_{ji} \right) \Delta x_k\, \Delta x_i.$$

Аммо, шу билан бирга, масофа квадратининг инвариант бўлганлигидан:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \ \Delta x_i$$

бўлади. Демак:

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \Delta x_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} \ \alpha_{ji} \right) \Delta x_k \ \Delta x_i.$$

Бу ердан:

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} \ \alpha_{ji} = \delta_{ki},$$

яъни илгаридан маълум бўлган ортогоналлик шарти (46.15) келиб чиқди.

48. ТЕНЗОР ТУШУНЧАСИ

Аввалги параграфларда йиғинди олиш амали билан боғланган (46.2), (47.3), (47.4) формулалар ёки (47. 9) ни келтириб чиқаришдаги формулаларга диққат қиладиган бўлсак, шундай нарса кўзга ташланади: йиғинди олинаётган индекс икки марта учрайди ва уни хоҳлаган ҳарф билан ишоралаш мумкин. Тензорлар назариясида йиғинди олиш амалини ёзишда мана бундай усул қабул қилинган: *бирор индекс бўйича йиғинди олинганда бу индекс икки марта ёзилиб, йиғиш белгиси* $\sum$ *ёзилмайди.* Шу айтилганлар назарда тутилса, (46.2), (46.16), (47.3), (47.4), (47.7), (47.8), (46.14), (46.15) формулалар хипча шаклда ёзилиши мумкин:

$$e_i' = \alpha_{ik} \ e_k \tag{48.1}$$

$$e_m = \alpha_{nm} e_n' \tag{48.2}$$

$$x_i' = \alpha_{ik} \, x_k \tag{48.3}$$

$$x_m = \alpha_{nm} \, x_n' \tag{48.4}$$

$$a_i' = \alpha_{ik} \ a_k \tag{48.5}$$

$$a_m = \alpha_{nm} \ a_n' \tag{48.6}$$

$$\alpha_{ik} \ \alpha_{jk} = \delta_{ij} \tag{48.7}$$

$$\alpha_{li} \ \alpha_{lj} = \delta_{ij} \tag{48.8}$$

Йиғиш индекси (48.1) да k билан, (48.2) да n билан ёки (48.8) да l билан кўрсатилган. Йиғиш индекси қайси ҳарф билан кўрсатилмасин, текширилаётган математик ифоданинг маъноси ўзгармасдан қолаверади. Масалан, (48.5) ни ёзишда йиғиш индекси k ўрнига f, m, n, l, s, p ёки яна бошқа хил ҳарфларни ишлатишимиз мумкин:

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k = \alpha_{ij} a_j = \alpha_{im} a_m = \alpha_{is} a_s = \alpha_{ip} a_p.$$

Юқоридаги мисолларимиздан шуниси ҳам равшанки, йиғинди олиш амалига дахлсиз булган индекс ёки индекслар тенгликнинг иккала томонида ўзгармасдан сақланади. Формулаларда иштирок қилувчи индексларнинг ҳар бири ё 1 га ё 2 га ёки 3 га тенг бўлиши мумкин.

Векторнинг аналитик таърифини ифодаловчи (48.5) формулада ёки (48.6) формулада йиғинди ҳадларининг ҳар бирида учрайдиган вектор компоненти биринчи даражадагина иштирок қилади. Демак, *вектор компонентларини алмаштириш формуласи вектор компонентларига нисбатан бир жинсли ва чизиқлидир.* Шунинг учун, бирор Декарт системасида нолга тенг булган вектор бошқа Декарт системасида ҳам нолга тенг бўлади.

Тензорларни таърифлашда вектор компонентларини алмаштириш формуласи асос қилиб олинади.

Қуйидаги учта вектор берилган бўлсин:

$$a'_i = \alpha_{il}\, a_l,\ b'_j = \alpha_{jm}\, b_m,\ c'_k = \alpha_{kn}\, c_n.$$

Биринчи ва иккинчи вектор компонентларининг иккиталаб олинган купайтмасини ёзайлик:

$$a'_i\ b'_j = \alpha_{il}\ \alpha_{jm}\ a_l\ b_m.$$

Чап томондаги $a'_i\ b'_j$ кўпайтмаларнинг умумий сони $3^2 = 9$ дир. Ўнг томондаги $a_l\, b_m$ кўпайтмаларнинг умумий сони ҳам $3^2 = 9$. Энди учта вектор компонентларининг учталаб олинган кўпайтмасини ёзайлик:

$$a'_i\, b'_j\, c'_k = \alpha_{il}\ \alpha_{jm}\ \alpha_{kn}\ a_l\ b_m\ c_n.$$

Чап томондаги $a'_i\, b'_j\, c'_k$ кўпайтмаларнинг умумий сони $3^3 = 27$, ўнг томонидаги $a_l\, b_m\, c_n$ кўпайтмаларнинг умумий сони ҳам $3^3 = 27$ дир.

Сунгги формулаларнинг муҳим томони шундан иборатки, вектор компонентларининг кўпайтмалари аниқ алмаштириш қонунларига буйсунади. Бу алмаштириш формулалари компонентларнинг кўпайтмаларига нисбатан чизиқли ва бир жинслидир.

Тензор деб аталувчи миқдор ҳам ўзига хос алмаштириш қонунларига эга.

Икки Декарт системасининг бирида $3^2 = 9$ та T'_{ij} миқдор тўплами, иккинчисида эса $3^2 = 9$ та бошқа T_{lm} миқдор тўплами берилиб, бу икки тўплам миқдорлари ушбу алмаштириш қонунига бўйсунсин деб фараз қилайлик.

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\,\alpha_{jm}\,T_{lm}. \tag{48.9}$$

Шу алмаштириш қонунига бўйсунган $3^2 = 9$ та *миқдор тўплами иккинчи рангли (иккинчи тартибли) тензор дейилади.*

Энди икки Декарт системасининг биридаги $3^3 = 27$ та T'_{ijk} миқдор тўплами билан иккинчисидаги $3^3 = 27$ та бошқа T_{lmn} миқдор тўплами қуйидаги алмаштириш қонунига бўйсунсин:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il}\,\alpha_{jm}\,\alpha_{kn}\,T_{lmn}. \tag{48.10}$$

Алмаштириш қонуни шу формулада ифодаланган $3^3 = 27$ та миқдор тўплами учинчи рангли (учинчи тартибли) тензор дейилади. Шунинг сингари давом эттириб, юқори рангли (юқори тартибли) тензорлар тушунчасини киритиш мумкин. Масалан, бешинчи рангли (бешинчи тартибли) тензор учун бундай ёзамиз:

$$T'_{ijklm} = \alpha_{ip}\,\alpha_{jq}\,\alpha_{kr}\,\alpha_{ls}\,\alpha_{mt}\,T_{pqrst}. \tag{48.11}$$

Координаталарнинг маълум системасида тензорни ташкил қилувчи тўплам миқдорлари тензорнинг шу системадаги компонентлари дейилади. Тензор индексларининг сони τ тензорнинг рангини (тензорнинг тартибини) кўрсатади. Тензор компонентларининг сони N албатта 3^τ га тенгдир:

$$N = 3^\tau. \tag{48.12}$$

Баъзи авторлар тензорнинг рангини *тензорнинг валентлиги* ва тензорнинг компонентларини *тензорнинг координаталари* деб аташади.

Тензор компонентларини алмаштириш формулалари, тензор компонентларига нисбатан чизиқли ва бир жинслидир. Демак, тензор компонентлари бирор системада нолга тенг экан, ҳар қандай системада ҳам бу компонентлар нолга тенг бўлади.

Тензор компонентларини алмаштириш формулаларида алмаштириш коэффициентлари α_{mn} нинг қандай иштирок қилиши диққатга сазовордир: тензор компонентларини алмаштириш формулаларидаги ҳар бир ҳадда кўпайтма ҳосил қилувчи алмаштириш коэффициентларининг умумий сони тензор рангига тенг, масалан, (48.11) да 5 га, (48.10) да 3 га, (48.9) да 2 га тенгдир. Вектор компонентларини алмаштириш формуласида эса алмаштириш коэффициентлари фақат биринчи даражадагина иштирок қилади. Демак, *вектор тензорнинг хусусий ҳолидир: вектор—биринчи рангли тензордир.*

Инвариантни ҳам тензорнинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин. Ҳақиқатан ҳам ҳар қандай системада бирдай бўлиб қоладиган, яъни координаталар алмаштирилганда ўзгармасдан сақланадиган миқдорнинг инвариант дейилишини биламиз. Демак, таърифга мувофиқ:

$$I' = I \tag{48.13}$$

бўлади. Инвариантни алмаштириш формуласида алмаштириш коэффициентлари ҳеч иштирок қилмайди. Шундай қилиб, *инвариант—индекссиз тензор, яъни ноль рангли тензор бўлиб, биргина компонентга эга*, чунки бу ерда $\tau = 0$ эканлиги сабабли, (48.12) га мувофиқ:

$$N = 3^0 = 1$$

бўлади.

Бизга маълум Кронекер символи δ_{mn} (46.6) ҳамма системада бир хил сонларни, яъни координаталарни алмаштиришда ўзгармасдан сақланиб қолувчи сонларни ифодалашига қарамасдан, аслида у иккинчи рангли тензордир. Ҳақиқатан ҳам иккинчи рангли тензорни ифодаловчи формула (48.9) нинг ўнг томони (46.6) га мувофиқ:

$$\alpha_{im}\ \alpha_{jn}\ \delta_{mn} = \alpha_{im}\ \alpha_{jm}$$

бўлади.

Бу ерда алмаштириш коэффициентларининг биринчи индекслари штрихланган (янги) системага дахлли эканлигини эсласак, у вақтда ортогоналлик шарти (46.14) га кўра, сўнгги тенгламанинг ўнг томони δ'_{ij} бўлади, демак:

$$\alpha_{im}\ \alpha_{jn}\ \delta_{mn} = \delta'_{ij}$$

ёки:

$$\delta'_{ij} = \alpha_{im}\ \alpha_{jn}\ \delta_{mn},$$

яъни Кронекер символи иккинчи рангли тензордир. *Турли индексли компонентлари нолга тенг ва бир хил индексли компонентлари бирга тенг бўлган тензор бирлик тензор дейилади.* Бирлик тензорни матрица шаклида ёзиш мумкин:

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{48.14}$$

Шундай қилиб, Кронекернинг δ_{ik} символи бирлик тензордир.

Матрица шаклида, масалан, иккинчи рангли тензорни тубандагича ёзамиз:

$$\|T_{ik}\| = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (48.15)$$

Иккинчи рангли тензорларга мисол қилиб, қаттиқ жисм инерция моментларининг тензори I_{ik}, эластик жисм кучланишлар тензори P_{ik}, эластик жисм деформация тензори U_{ik}, жисмларнинг электромагнит хусусиятларини ифодаловчи диэлектрик коэффициентлар (диэлектрик константалар) тензори ε_{ik}, магнит коэффициентлари тензори μ_{ik}, электр ўтказувчанлик коэффициентлари тензори γ_{ik} кабиларни кўрсатиб ўтиш мумкин.

49. ТЕНЗОРЛАР БИЛАН БАЖАРИЛАДИГАН АСОСИЙ АЛГЕБРАИК АМАЛЛАР

Тензорларни қўшиш масаласидан бошлайлик. Учинчи рангли иккита тензор берилган бўлсин:

$$A'_{ijk} = \alpha_{il}\ \alpha_{jm}\ \alpha_{kn}\ A_{lmn}, \qquad (49.1)$$

$$B'_{ijk} = \alpha_{il}\ \alpha_{jm}\ \alpha_{kn}\ B_{lmn}. \qquad (49.2)$$

Бу тензорларнинг мос компонентларини қўшайлик:

$$A'_{ijk} + B'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}A_{lmn} + \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}B_{lmn} =$$
$$= \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}(A_{lmn} + B_{lmn}). \qquad (49.3)$$

$A_{lmn} + B_{lmn}$ ни C_{lmn} орқали белгиласак:

$$A_{lmn} + B_{lmn} = C_{lmn} \qquad (49.4)$$

бўлади, у вақтда:

$$C'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}C_{lmn}. \qquad (49.5)$$

Бу формула учинчи рангли тензор компонентларини алмаштириш қонунини ифодалайди.

(49.4) *га мувофиқ ҳосил қилинган C_{lmn} тензор A_{lmn}, B_{lmn} тензорларнинг йиғиндиси дейилади. Албатта, бир хил рангли тензорларнигина қўшиш мумкин, натижада ўша рангли тензор ҳосил бўлади.*

Шунингдек, бир хил рангли икки тензор айирмаси ҳам ўша рангли тензор бўлади. Масалан, юқоридаги учинчи рангли тензорлар учун:

$$A_{lmn} - B_{lmn} = D_{lmn} \qquad (49.6)$$

бўлади. Тензорларни кўпайтириш масаласига ўтамиз. (49.1) да ифодаланган учинчи рангли тензорни бирор I инвариантга кўпайтирайлик:

$$IA'_{ijk} = I\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}A_{lmn} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}IA_{lmn}. \tag{49.7}$$

IA_{lmn} ни T_{lmn} орқали белгиласак:

$$IA_{lmn} = T_{lmn} \tag{49.8}$$

бўлади, ниҳоят:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}T_{lmn}. \tag{49.9}$$

Натижада яна *ўша рангли тензор ҳосил бўлди. T_{lmn} тензор I инвариант билан A_{lmn} тензорнинг кўпайтмаси дейилади.* Инвариантни тензорга кўпайтириш тензорнинг рангини ўзгартирмайди.

Иккинчи рангли бирор тензор берилган бўлсин:

$$D'_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs}D_{rs}. \tag{49.10}$$

Учинчи рангли тензор ва иккинчи рангли тензор компонентларининг кўпайтмаларини ёзайлик:

$$B'_{ijk}D'_{pq} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}B_{lmn}\alpha_{pr}\alpha_{qs}D_{rs} = \\ = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{pr}\alpha_{qs}B_{lmn}D_{rs}. \tag{49.11}$$

$B_{lmn}D_{rs}$ ни E_{lmnrs} орқали белгиласак:

$$B_{lmn}D_{rs} = E_{lmnrs} \tag{49.12}$$

бўлади, демак:

$$E'_{ijkpq} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{pr}\alpha_{qs}E_{lmnrs}, \tag{49.13}$$

яъни бешинчи рангли тензор ҳосил бўлди. (49.12) га мувофиқ: *ҳосил қилинган E_{lmnrs} тензор берилган B_{lmn}, D_{rs} тензорларнинг кўпайтмаси дейилади.* Бизнинг мисолимизда учинчи рангли тензор билан иккинчи рангли тензор кўпайтмаси бешинчи рангли тензор бўлади. Шунинг сингари, биринчи рангли икки тензор кўпайтмаси, яъни икки вектор кўпайтмаси иккинчи рангли тензор бўлади, иккинчи рангли тензор билан биринчи рангли тензор кўпайтмаси учинчи рангли тензор бўлади ва ҳоказо. *Икки тензор кўпайтмаси тензор бўлиб, унинг ранги кўпайтирилувчи тензорлар рангларининг йиғиндисига тенг. Демак, тензорларни бир-бирига кўпайтириш натижасида юқори рангли тензор вужудга келади.*

Векторлар компонентларининг кўпайтмалари тегишли рангли тензорларни ҳосил қилади. Масалан:

$$T_{ij} = a_ib_j, \tag{49.14}$$

$$T_{ijk} = a_i c_k b_j.$$

Компонентлари тегишли векторлар компонентларининг кўпайтмаларидан ташкил топган тензор мультипликатив тензор дейилади. Иккинчи рангли мультипликатив тензор, яъни икки вектор компонентларининг иккиталаб олинган кўпайтмалари (49.14) *диада деб аталади.*

Тензорларни кўпайтириш тартиби ўзгарса, натижа умуман ўзгаради. Масалан:

$$A_{ijk}\, B_{lm} = C_{ijklm}, \tag{49.15}$$

$$B_{ij}\, A_{klm} = D_{ijklm}. \tag{49.16}$$

Бу икки тензор компонентлари тўплами бир хил бўлса-да, бир хил жойларда бир хил индекслар билан ёзиб курсатилган компонентлар фарқ қилади. Демак, *тензорлар кўпайтмаси, умуман айтганда, коммутативлик хусусиятига эга эмас.*

Энди содда бир мисол кўриб ўтайлик.

Кронекер тензори δ_{ik} ни I инвариантга кўпайтирсак, иккинчи рангли тензор A_{ik} ҳосил бўлади:

$$A_{ik} = I\delta_{ik}. \tag{49.17}$$

Бу тензорни иккинчи рангли бошқа B_{ik} тензорга қўшсак ёки ундан айирсак, иккинчи рангли янги C_{ik} ва D_{ik} тензорлар ҳосил қиламиз:

$$C_{ik} = B_{ik} + I\delta_{ik}, \tag{49.18}$$

$$D_{ik} = B_{ik} - I\delta_{ik}. \tag{49.19}$$

Бу формулалар тез-тез учраб туради.

50. ТЕНЗОРЛАР СИММЕТРИЯСИ ВА АНТИСИММЕТРИЯСИ

Тензор индексларининг ўринларини алмаштириш натижасида яна тензор ҳосил бўлади. Масалан, A_{ijk} тензордан унинг j индекси билан k индекси ўринларини алмаштириш натижасида вужудга келган миқдорларни B_{ikj} орқали белгилайлик:

$$B_{ikj} = A_{ijk}.$$

Шу B_{ikj} миқдорлар тензор компонентларидир. Ҳақиқатан:

$$B_{ikj} = A'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}A_{lmn} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}B_{lnm} =$$

$$= \alpha_{il}\alpha_{kn}\alpha_{jm}B_{lnm}$$

бўлади.

Тензор индексларидан иккитасининг ўрнини алмаштириш амали тензорни транспозициялаш дейилади. Транспозициялаш йўли билан ҳосил қилинган тензор транспозицияланган тензор дейилади.

Масалан, иккинчи рангли тензор:

$$\|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

бўлса, бунга нисбатан транспозицияланган тензор:

$$\|B_{ik}\| = \|A_{ki}\| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

бўлади.

Индексларидан иккитасининг ўрнини алмаштириш натижасида мос компонентларининг сон қийматлари ва ишоралари ўзгармайдиган тензор шу икки индексга нисбатан симметрик тензор дейилади. Масалан, учинчи рангли T_{ijk} тензор j, k индексларга нисбатан симметрик экан:

$$T_{ijk} = T_{ikj}$$

бўлади.

Иккинчи рангли симметрик S_{ij} тензор учун:

$$S_{ij} = S_{ji}. \tag{50.1}$$

Тензорнинг симметриклиги инвариантлик хусусиятига эга: бирор координаталар системасида симметрик бўлган тензор, ҳар қандай бошқа системада ҳам симметрик тензор бўлади. Ҳақиқатан, тензор таърифига ва (50.1) га биноан:

$$S'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}S_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}S_{lk} = \alpha_{jl}\alpha_{ik}S_{lk} = S'_{ji}$$

бўлади.

Иккинчи рангли симметрик тензорнинг ҳаммаси бўлиб тўққизта компоненти бор. Аммо булардан учтаси (50.1) га асосан мос олинган бошқа учтасига тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, *иккинчи рангли симметрик тензорнинг ўзаро боғланмаган компонентлари фақат олтитадир.*

Индексларидан иккитасининг ўрни алмаштирилганда компонентларининг сон қийматлари сақланиб, фақат ишораларигина тескарига ўзгарадиган тензор шу икки индексга нисбатан антисимметрик тензор дейилади. Масалан, учинчи рангли F_{ijk} тензор биринчи ва иккинчи индексларга нисбатан антисимметрик экан:

$$F_{ijk} = -F_{jik}$$

бўлади. Иккинчи рангли антисимметрик тензор A_{ij} учун:

$$A_{ij} = -A_{ji} \tag{50.2}$$

бўлади.

Тензор антисимметрияси ҳам юқоридаги маънода инвариантлик хусусиятига эга. Бирор координаталар системасида антисимметрик булган тензор ҳар қандай бошқа координаталар системаслда ҳам антисимметрик тензор бўлиб қолади. Ҳақиқатан:

$$A'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}A_{kl} = -\alpha_{ik}\alpha_{jl}A_{lk} = -\alpha_{jl}\alpha_{ik}A_{lk} = -A'_{ji}.$$

Антисимметрик тензорнинг бир хил индексли компонентлари нолга тенг. Ҳақиқатан:

$$A_{11} = -A_{11},\ A_{22} = -A_{22},\ A_{33} = -A_{33},$$

демак:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Қолган олтита компонентнинг учтаси бошқа учтасидан ўзининг ишораси билан фарқ қилади, холос. Шундай қилиб, *иккинчи рангли антисимметрик тензорнинг ўзаро боғланмаган компонентлари фақат учтагинадир.* Яққоллик учун бу антисимметрик тензорни матрица шаклида ифодалайлик:

$$\|A_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{50.3}$$

Бир мисолни кўриб чиқайлик. Иккинчи рангли мультипликатив (49- параграф) тензор берилган бўлсин:

$$T_{ij} = a_i\, b_j. \tag{50.4}$$

Энди бундай тензор ташкил қилайлик:

$$S_{ij} = a_i\, b_j + a_j\, b_i. \tag{50.5}$$

Бундан:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

бўлади, яъни янги S_{ij} тензор симметрик тензордир.

Энди берилган T_{ij} тензордан қуйидагича ифодаланган тензор ташкил қилайлик:

$$A_{ij} = a_i\, b_j - a_j\, b_i. \tag{50.6}$$

Бундан:

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

бўлади, яъни янги A_{ij} тензор антисимметрикдир. Унинг ўзаро боғланмаган учта компоненти қуйидагилардир:

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \\ A_{23} &= a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ A_{31} &= a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \end{aligned}\right\}. \tag{50.7}$$

Бу компонентлар эса икки векторнинг вектор кўпайтмаси компонентларидир. *Шундай қилиб, иккинчи рангли антисимметрик* A_{ij} *тензорни уч ўлчовли фазода икки векторнинг вектор кўпайтмаси деб қараш мумкин.*

Симметрик ёки антисимметрик бўлмаган тензор одатда асимметрик тензор дейилади. Лекин иккинчи рангли ҳар қандай тензордан симметрик тензор ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан, берилган иккинчи рангли ихтиёрий T_{ij} тензордан иккинчи рангли янги S_{ij} тензор тузайлик:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}). \qquad (50.8)$$

Индексларнинг ўринларини алмаштириб ёзайлик:

$$S_{ji} = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}).$$

Сўнгги икки формуладан:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

бўлади. Энди ўша тензор T_{ij} дан яна иккинчи рангли бошқа A_{ij} тензор тузайлик:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \qquad (50.9)$$

Индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$A_{ji} = \frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij})$$

бўлади. Аввалги ва сўнгги формулалардан қуйидагини топамиз:

$$A_{ij} = -A_{ji}.$$

Демак, *иккинчи рангли ҳар қандай тензордан антисимметрик тензор ҳам ҳосил қилиш мумкин.* (50.8) ва (50.9) га мувофиқ, симметрик S_{ij} тензор билан антисимметрик A_{ij} тензорнинг йиғиндиси берилган T_{ij} тензорнинг ўзига тенг:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}. \qquad (50.10)$$

Шундай қилиб, иккинчи рангли ҳар қандай тензорни симметрик ва антисимметрик қисмларга ажратиш мумкин.

Иккитадан кўпроқ индексларга нисбатан тензорнинг симметрияси ёки антисимметрияси ҳақида гапириш мумкин.

Тайин индекслари тўпламининг ҳар қандай иккитасига нисбатан симметрик бўлган тензор шу индекслар тўпламига нисбатан симметрик тензор дейилади. Масалан, тўртинчи рангли T_{pqrs} тензор биринчи учта индексига нисбатан симметрик тензор бўлсин, у вақтда:

$$T_{pqrs} = T_{qrps} = T_{rpqs} = T_{qprs} = T_{prqs} = T_{rqps}$$

булади.

Тензор симметрияси унинг ҳамма индекслари тўпламига нисбатан ҳам мавжуд бўлиши мумкин, бундай хусусиятга эга тензор бутунлай симметрик тензор деб юритилади.

Тайин индекслари тўпламининг ҳар қандай иккитасига нисбатан антисимметрик бўлган тензор шу индекслар тўпламига нисбатан антисимметрик тензор дейилади.

Мисол учун бешинчи рангли D_{pqrst} тензор охирги учта индексига нисбатан антисимметрик бўлса, бундай ёзишимиз мумкин:

$$T_{pqrst} = -T_{pqsrt} = T_{pqstr} = -T_{pqtsr} = T_{pqtrs} = -T_{pqrts}.$$

Ҳамма индекслари тўпламига нисбатан антисимметрик бўлган тензор бутунлай антисимметрик тензор дейилади. Индекслари $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *бўлган бутунлай антисимметрик* $T_{i_1 i_2 \ldots, i_p}$ *тензор баъзан р-вектор ёки поливектор дейилади.* $p = 0$, $p = 1$ ҳолларнинг биринчисида поливектор скаляр, иккинчисида эса вектор бўлади. $p = 2$ да поливектор бивектор дейилиб, иккинчи рангли антисимметрик тензорни беради.

Уч ўлчовли фазода бутунлай антисимметрик тензор индексларининг сони учтадан ошиқ бўлмайди. Ҳақиқатан, уч ўлчовли фазода индексларнинг ҳар бири ё 1 га, ёки 2 га, ёхуд 3 га тенгдир. Индекслар сони учтадан ошиқ бўлса, у вақтда тензор компонентларининг ҳар бирида 1, 2, 3 нинг ҳар бири камида икки мартадан учрар эди. Лекин антисимметрик тензорнинг бир хил индексли компонентлари нолга тенг. *Шундай қилиб, уч ўлчовли фазода бутунлай антисимметрик тензор фақат учинчи рангли бўлади. Учинчи рангли поливектор, одатда, тривектор деб аталади.*

n ўлчовли фазода ҳар бир индекснинг 1 га, 2 га, 3 га ва ҳоказо n га тенглигини назарда тутиб, юқоридаги мулоҳазалар мос равишда такрорланса, n ўлчовли фазода бутунлай антисимметрик тензор индекслари сонининг n дан кам бўлиши ёки кўпи билан n га тенг бўлиши ўз-ўзидан аёндир.

Юқори рангли тензордан тайин индекслари тўпламига нисбатан симметрик тензор ва антисимметрик тензор тузиш мумкин.

Берилган $T_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ тензор индексларининг сони N бўлсин. Индексларнинг m тасига нисбатан $(m \leqslant N)$ симметрик бўлган тензор тузайлик, унинг учун шу индекслардан

$m! = 1.2.3 \ldots m$ ўрин алмаштиришлар ҳосил қилиб,уларга мос тензор компонентларидан уртача арифметик қиймат оламиз, яъни мос тензор компонентлари йиғиндисини $m!$ га бўламиз. *Берилган тензордан мана шундай усул билан унинг тайин индекслари тўпламига нисбатан симметрик тензор ҳосил қилиш амали берилган тензорни ўша индекслар тўпламига нисбатан симметриялаш дейилади.* Масалан, T_{ijklq} тензордан унинг биринчи ва учинчи индексларига нисбатан (демак, $m=2$) симметрик тензор тузайлик:

$$S_{ijklq} = \frac{1}{2} (T_{ijklq} + T_{kjilq}).$$

Шу T_{ijklq} тензордан сўнгги учта индексига нисбатан (демак, $m = 3$) тузилган симметрик тензор эса:

$$S_{ijklq} = \frac{1}{6} (T_{ijklq} + T_{ijlqk} + T_{ijqkl} + T_{ijlkq} + T_{ijkql} + T_{ijqlk})$$

бўлади.

Симметриялаш натижасини белгилаш учун симметриялашда иштирок қилувчи индекслар кичик қавсларга олиб ёзилади. Масалан, сўнгги формуламизда:

$$S_{ijklq} = T_{ij(klq)}.$$

Симметриялаш ҳақида юқорида айтилганлардан равшанки, тайин индексларига нисбатан симметрик бўлган тензорни бу индексларга нисбатан симметриялаш натижаси берилган шу симметрик тензорнинг ўзига айнан тенгдир.

Энди берилган $T_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ тензордан унинг m та индексига нисбатан антисимметрик бўлган тензор тузайлик. Бунинг учун шу индекслардан $m! = 1.2.3 \ldots m$ ўрин алмаштиришлар ҳосил қиламиз. Берилган тензорнинг жуфт ўрин алмаштиришларга мос келган компонентларини ўз ишоралари билан қолдириб, тоқ урин алмаштиришларга мос компонентларининг ишораларини қарама-қаршисига ўзгартирамиз-да, сўнгра улардан ўртача арифметик қиймат оламиз. *Шу усул воситасида, берилган тензордан унинг тайин индекслари тўпламига нисбатан антисимметрик тензор ҳосил қилиш амали берилган тензорни ўша индекслар тўпламига нисбатан альтернациялаш дейилади.*

Масалан, берилган T_{ijklq} тензордан унинг иккинчи ва учинчи индексларига нисбатан (демак, $m = 2$) антисимметрик тензор тузайлик:

$$A_{ijklq} = \frac{1}{2} (T_{ijklq} - T_{ikjlq}).$$

Энди ўша тензордан биринчи учта индексга нисбатан (демак, $m = 6$) антисимметрик тензор тузайлик:

$$A_{ijklq} = \frac{1}{6} (T_{ijklq} + T_{jkilp} + T_{kijlq} - T_{jiklq} - T_{ikjlq} - T_{kjilq}).$$

Альтернациялаш натижасини шу альтернациялашда иштирок қилувчи индексларни квадрат қавсларга олиб кўрсатилади. Олдинги учта индекс бўйича альтернациялаш мисолини мана бундай ёзиб кўрсатишимиз мумкин:

$$A_{ijklq} = T_{[ijk]lq}.$$

Тайин индексларига нисбатан антисимметрик бўлган тензорни бу индексларга нисбатан альтернациялаш натижасида шу антисимметрик тензорнинг ўзи ҳосил бўлади.

51. ТЕНЗОРЛАРНИ ЙИҒИШТИРИШ

Тензорларни бир-бирига кўпайтириб, яна юқори рангли тензор ҳосил қилишни юқорида кўрган эдик. Энди тензорнинг рангини камайтириш мумкинлигини текшириб кўрайлик. Масалан, учинчи рангли тензор берилган бўлсин:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il}\, \alpha_{jm}\, \alpha_{kn}\, T_{lmn}. \tag{51.1}$$

Иккинчи ва учинчи индексларни бир хил деб ҳисоблаб ($j=k$), шу бир хил индекслар бўйича тензор компонентларининг йиғиндисини олайлик:

$$T'_{ijj} = \alpha_{il}\, \alpha_{jm}\alpha_{jn}\, T_{lmn}.$$

Ортогоналлик шарти (48. 8) га мувофиқ:

$$\alpha_{jm}\, \alpha_{jn} = \delta_{mn}$$

бўлади, демак:

$$T'_{ijj} = \alpha_{il}\, \delta_{mn}\, T_{lmn} = \alpha_{il}\, T_{lmm}$$

ёки

$$T_{ijj} = \alpha_{il}\, T_{lmm}. \tag{51.2}$$

Натижада учинчи рангли тензордан биринчи рангли янги тензор ҳосил бўлди, яъни тензорнинг ранги иккитага камайди.

Яна бир мисол сифатида, тўртинчи рангли тензор олиб текширайлик:

$$T'_{ijkl} = \alpha_{im}\, \alpha_{jn}\, \alpha_{kp}\, \alpha_{lq}\, T_{mnpq}. \tag{51.3}$$

Биринчи ва тўртинчи индексларни бир хил деб ҳисоблаб ($i=l$) тензорнинг мос компонентлари йиғиндисини топайлик:

$$T_{ijki} = \alpha_{im}\, \alpha_{jn}\, \alpha_{kp}\, \alpha_{iq}\, T_{mnpq} = \alpha_{jn}\, \alpha_{kp}\, \alpha_{im}\, \alpha_{iq}\, T_{mnpq}.$$

Юқорида эслатиб ўтилган ортогоналлик шартидан фойдалансак:

$$T'_{ijki} = \alpha_{jn}\ \alpha_{kp}\ \delta_{mq}\ T_{mnpq} = \alpha_{jn}\ \alpha_{kp}\ T_{mnpm}$$

ёки

$$T'_{ijki} = \alpha_{jn}\ \alpha_{kp}\ T_{mnpm} \tag{51.4}$$

бўлади.

Туртинчи рангли тензордан иккинчи рангли тензор ҳосил қилинди, яъни тензор ранги иккитага камайди. Энди иккинчи ва учинчи индексларни бир хил деб ҳисоблаб ($j = k$), бу янги тензорнинг мос компонентларини йиғиб чиқайлик:

$$T'_{ijji} = \alpha_{jn}\ \alpha_{jp}\ T_{mnpm}.$$

Яна ўша ортогоналлик шартига мувофиқ:

$$T'_{ijji} = \delta_{np}\ T_{mnpm} = T_{mppm}$$

ёки

$$T'_{ijji} = T_{mppn} \tag{51.5}$$

бўлади.

Янги тензорнинг ранги ҳам иккитага камайиб, ниҳоят ноль рангли тензор, яъни инвариант вужудга келди.

Бир хил булган иккита индекс буйича йиғинди олиш билан тензорнинг рангини камайтириш амали тензорни йиғиштириш (ёки соддалаштириш) дейилади. Иккита индекс буйича йиғиштиришда тензор ранги иккитага камаяди. Демак, жуфт рангли тензорни йиғиштира бориб, ниҳоят инвариант топамиз, тоқ рангли тензорни йиғиштира бориб, ниҳоят биринчи рангли тензор, яъни вектор топамиз. Йиғиштириш индексини ҳар қандай ҳарф билан ёзиб курсатишимиз мумкин.

Кўпайтириш амали билан йиғиштириш амалини маълум равишда боғлаб ишлатиш мумкин. Икки тензор кўпайтмаси бўлган юқори рангли тензорга йиғиштириш амали ишлатилса, тензор ранги камаяди.

Масалан, биринчи рангли икки тензор берилган бўлсин:

$$a'_i = \alpha_{ij}\ a_j,\ b'_m = \alpha_{mn}\ b_n.$$

Буларнинг кўпайтмаси бўлган иккинчи рангли тензорни йиғиштирсак, инвариант ҳосил булади:

$$I = a'_i b'_i = a_i\ b_i. \tag{51.6}$$

Бу эса икки векторнинг скаляр кўпайтмасидир. Шунинг учун (51.6) *да ифодаланган I инвариант биринчи рангли a_j ва b_j тензорларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади.*

Энди иккинчи рангли T_{ij} тензор билан биринчи рангли A_k тензор кўпайтмаси булган учинчи рангли C_{ijk} тензорни олайлик:

$$C_{ijk} = T_{ij} A_k.$$

Бу тензорни j, k индекслар бўйича йиғиштирсак, i индексли вектор ҳосил булади:

$$C_{ijj} = T_{ij} A_j.$$

Ҳосил қилинган векторни B_i билан белгилайлик:

$$B_i = T_{ij} A_j. \tag{51.7}$$

Бу ердаги B_i вектор иккинчи рангли T_{ij} тензор билан биринчи рангли A_k тензорнинг скаляр кўпайтмаси дейилади. B_i векторни A_k векторнинг чизиқли вектор функцияси деб ҳам айтилади. Бир вектор компонентларини иккинчи вектор компонентлари орқали бир жинсли чизиқли функция қилиб кўрсатувчи иккинчи рангли тензор геометрияда, одатда, аффиннор дейилади. Демак, аффиннор хусусий ҳолда олинган иккинчи рангли тензордир.

Иккинчи рангли B_{ij}, C_{kl} тензорларнинг кўпайтмаси бўлган тўртинчи рангли D_{ijkl} тензорни j ва k индекслар буйича йиғиштирсак, иккинчи рангли T_{il} тензор ҳосил булади:

$$D_{ijkl} = B_{ij} C_{kl},$$

$$T_{il} = B_{ij} C_{jl}. \tag{51.8}$$

Бу формуладаги T_{il} тензор берилган B_{ij} тензор билан C_{kl} тензорнинг скаляр кўпайтмаси дейилади. Умуман, икки тензорнинг кўпайтмасини йиғиштириш амали шу икки тензорнинг скаляр кўпайтмаси дейилади.

Янги тензорлар тузишда ёки тензорни йиғиштиришда Кронекернинг бирлик тензоридан кенг фойдаланилади.

Масалан, тубанда ёзилганлар ўз-ўзидан аён:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij} A_j &= A_i, \\ \delta_{ij} A_{kj} &= A_{ki}, \\ \delta_{ij} A_{jk} &= A_{ik}, \\ \delta_{ij} A_{kjl} &= A_{kil}. \end{aligned}\right\} \tag{51.9}$$

Текширилаётган тензор индексини бирлик тензор ёрдами билан ихтиёрий танланган бошқа индексга алмаштириш мумкинлигини кўрмоқдамиз. Ана шундан фойдаланиб, баъзи формулаларни керакли равишда ёзиб олиш учун тегишли вектор қавс ташқарисига чиқарилса бўлади:

$$A_{ij} B_j \pm B_i = A_{ij} B_j \pm \delta_{ij} B_j = (A_{ij} \pm \delta_{ij}) B_j.$$

Энди Кронекер тензори ёрдами билан тескари тензор тушунчасини киритайлик. Иккинчи рангли шундай икки A_{ij}, B_{kl} тензор оламизки, уларнинг скаляр кўпайтмаси бирлик тензор ҳосил қилсин:

$$A_{ij}\ B_{jl} = \delta_{il}.$$

Бирор B_{jl} тензорга скаляр кўпайтирганда бирлик тензор ҳосил қилган A_{ij} тензор шу B_{jl} тензорга тескари тензор дейилади ва B_{ij}^{-1} символи билан белгиланади:

$$B_{ij}^{-1}\ B_{jl} = \delta_{il}. \tag{51.10}$$

Бу ерда тензор ўзининг тескарисига чап томондан кўпайтирилган. Тензор ўзининг тескарисига ўнг томондан кўпайтирилса ҳам бирлик тензор ҳосил бўлади:

$$B_{ij}\ B_{jl}^{-1} = \delta_{il}. \tag{51.11}$$

Ҳақиқатан, (51.10) ни унг томондан тескари B_{lk}^{-1} тензорга кўпайтирайлик:

$$B_{ij}^{-1}\ B_{jl}\ B_{lk}^{-1} = \delta_{il}\ B_{lk}^{-1} = B_{ik}^{-1}.$$

Энди буни тескари тензорнинг тескари тензори бўлган $(B_{mi}^{-1})^{-1}$ га чап томондан кўпайтирайлик:

$$(B_{mi}^{-1})^{-1}\ B_{ij}^{-1}\ B_{jl}\ B_{lk}^{-1} = (B_{mi}^{-1})^{-1}\ B_{ik}^{-1}.$$

Бу ердан, (51.10) га мувофиқ:

$$\delta_{mj}\ B_{jl}\ B_{lk}^{-1} = \delta_{mk}$$

ёки

$$B_{ml}\ B_{lk}^{-1} = \delta_{mk}$$

бўлади.

B_{ij} тензорнинг тескариси бўлган B_{ij}^{-1} га тескари $(B_{ij}^{-1})^{-1}$ тензор аввалги B_{ij} тензорнинг ўзидир. Ҳақиқатан, тескари тензор таърифига мувофиқ:

$$(B_{ij}^{-1})^{-1}\ B_{jl}^{-1} = \delta_{il},$$

сунгра (51.11) дан фойдалансак:

$$(B_{ij}^{-1})^{-1} = B_{ij} \tag{51.12}$$

бўлади.

Тензорга тескари тензор компонентларини шу тензор компонентлари орқали аниқлаш мумкин. Бу мақсадда тензор билан векторнинг скаляр кўпайтмасини ҳосил қилайлик:

$$b_i = T_{ij}\ a_j. \tag{15.13}$$

Бу ердан:

$$T_{ki}^{-1}\, b_i = T_{ki}^{-1}\, T_{ij}\, a_j = \delta_{kj}\, a_j = a_k$$

ёки

$$a_k = T_{ki}^{-1}\, b_i. \qquad (51.14)$$

Тензор компонентларидан тузилган детерминант:

$$|T_{ij}| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \qquad (51.15)$$

одатда, шу тензорнинг дискриминанти деб юритилади. Тескари тензорнинг T_{ki}^{-1} компоненти учун олий алгебрадан маълум бўлган Крамер формуласига биноан тубандагини ёзиш мумкин:

$$T_{ki}^{-1} = \frac{A_{ik}}{|T_{ij}|}, \qquad (51.16)$$

бу ерда:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\, \Delta_{ik},$$

Δ_{ik} юқоридаги детерминант (51.15) элементи T_{ik} нинг минори, A_{ik} ўша T_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси.

(51.16) даги тензорнинг $|T_{ij}|$ дискриминанти нолга тенг эмас, акс ҳолда тескари тензор ҳақида гапиришга асос қолмайди.

52. ТЕНЗОРДАН ИНВАРИАНТ ТУЗИШ

Иккинчи рангли тензорни тегишли индекслари бўйича йиғиштириш натижасида ҳосил қилинган инвариантлар татбиқларда муҳим аҳамиятга эга. Иккинчи рангли тензорни матрица шаклида ва аналитик шаклда ифодалайлик:

$$\|T_{kl}\| = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{matrix} \right\|. \qquad (52.1)$$

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\, \alpha_{jl}\, T_{kl}. \qquad (52.2)$$

Бу тензорнинг икки индексини ўзаро тенглаштириб, сўнгра йиғиштирсак, тубандаги инвариант ҳосил бўлади:

$$I_1 = T_{kk} \qquad (52.3)$$

ёки муфассалроқ ёзилса:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} \qquad (52.4)$$

бўлади.

I_1 инвариант T_{kl} тензорнинг чизиқли инварианти дейилади. Тензорнинг чизиқли инварианти индекслари бир хил бўлган (яъни диагоналда ётган) компонентларининг йиғиндисига тенг.

Чизиқли инварианти I_1 нолга тенг бўлган тензор девиатор дейилади. Иккинчи рангли антисимметрик тензорнинг индекслари бир хил бўлган компонентлари нолга тенг, демак, *иккинчи рангли ҳар қандай антисимметрик тензор девиатор бўлади.*

Энди иккинчи рангли T_{kl} тензорнинг ўз-ўзига кўпайтмасини икки индекси бўйича йиғиштирсак, янги инвариант ҳосил бўлади:

$$I_2 = T_{kl}\, T_{kl} = T^2_{kl} \tag{52.5}$$

ёки муфассалроқ ёзилса:

$$I_2 = T^2_{11} + T^2_{12} + T^2_{13} + T^2_{21} + T^2_{22} + T^2_{23} + T^2_{31} + T^2_{32} + T^2_{33} \tag{52.6}$$

бўлади.

I_2 инвариант T_{kl} тензорнинг квадратик инварианти дейилади. Тензорнинг квадратик инварианти шу тензор компонентлари квадратларининг йиғиндисига тенгдир.

Тензор компонентларидан тузилган детерминант, яъни тензор дискриминанти ҳам инвариант бўлади. Ҳақиқатан, детерминантлар кўпайтмаси хусусиятини назарда тутиб, (52.2) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$|T'_{ij}| = |\alpha_{ik}\, \alpha_{jl}\, T_{kl}| = |\alpha_{ik}\,||\alpha_{jl}\, T_{kl}| = |\alpha_{ik}|\cdot|\alpha_{jl}|\cdot|T_{kl}| = |\alpha_{ik}|^2\,|T_{kl}|.$$

Аммо ортогонал алмаштиришлар коэффициентларидан тузилган детерминант квадратининг мусбат бирга тенглиги бизга маълум эди (46.26). Демак:

$$|T'_{ij}| = |T_{kl}|,$$

яъни тензор дискриминанти инвариантдир. Бу инвариантни I_3 билан белгилаймиз:

$$I_3 = |\,T_{kl}\,| \tag{52.7}$$

ёки

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}. \tag{52.8}$$

I_3 инвариант T_{kl} тензорнинг кубик инварианти дейилади.

Шундай қилиб, биз иккинчи рангли тензорнинг учта I_1, I_2, I_3 инварианти билан танишиб чиқдик. Бу инвариантлардан турлича бошқа инвариантлар ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи рангли симметрик S_{ij} тензор билан антисимметрик A_{kl} тензорнинг скаляр кўпайтмасини йиғиштириб, инвариант ҳосил қилишимиз мумкин:

$$I = S_{ij} A_{ji}.$$

Аммо:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad A_{ji} = -A_{ij}$$

бўлганлиги сабабли:

$$I = S_{ij} A_{ji} = -S_{ji} A_{ij}$$

булади. Бу формуланинг ўнг томонидаги йиғиштириш индексларининг бири ўрнига бемалол иккинчисини ёзишимиз мумкин:

$$I = S_{ij} A_{ji} = -S_{ji} A_{ij} = -S_{ij} A_{ji}$$

ёки

$$2 S_{ij} A_{ji} = 0,$$

демак:

$$S_{ij} A_{ji} = 0, \tag{52.9}$$

яъни иккинчи рангли симметрик тензор билан антисимметрик тензорнинг йиғиштирилган скаляр кўпайтмаси нолга тенгдир. Купайтирилувчи тензорларнинг ўринлари алмаштирилса ҳам бу натижа ўз кучини сақлайди.

Иккинчи рангли тензор ва вектор компонентларидан квадратик шаклли инвариант ҳосил қилайлик:

$$I = T_{ij} a_i a_j.$$

Бу ердаги T_{ij} тензор симметрик тензор ҳисобланиши мумкин. Ҳақиқатан, ҳар қандай тензорнинг симметрик ва антисимметрик тензорлар йиғиндиси шаклида ёзилиши бизга маълум (50.6). Шу сабабли:

$$I = T_{ij} a_i a_j = S_{ij} a_i a_j + A_{ij} a_i a_j$$

бўлади. Аммо $a_i a_j = a_j a_i$ симметрик тензор бўлганлигидан юқоридаги (52.9) га мувофиқ:

$$A_{ij} a_i a_j = 0$$

булади. У вақтда:

$$I = T_{ij} a_i a_j = S_{ij} a_i a_j,$$

демак:

$$T_{ij} = S_{ij}$$

ва натижада:

$$I = S_{ij} a_i a_j$$

бўлади.

Симметрик тензорни яққол геометрик равишда тасвирлаш мумкин. Ҳақиқатан, *иккинчи тартибли марказий сирт* тенгламаси қуйидагичадир:

$$S_{ij}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) = 1.$$

x_{0k} координаталарига эга нуқта *сирт маркази* дейилади. Сирт марказини координаталар боши деб ҳисобласак, сирт тенгламаси ушбу шаклни олади:

$$S_{ij} x_i x_j = 1 \tag{52.10}$$

ёки муфассалроқ ёзилса:

$$S_{11} x_1^2 + S_{22} x_2^2 + S_{33} x_3^2 + 2 S_{12} x_1 x_2 + 2 S_{23} x_2 x_3 + \\ + 2 S_{31} x_3 x_1 = 1 \tag{52.11}$$

бўлади.

Сиртнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топиш қийин эмас. x_1 координата ўқида $x_2 = x_3 = 0$, x_2 координата ўқида $x_3 = x_1 = 0$ ва x_3 координата ўқида $x_1 = x_2 = 0$, демак:

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{S_{11}}}, \\ x_2 &= \pm \frac{1}{\sqrt{S_{22}}}, \\ x_3 &= \pm \frac{1}{\sqrt{S_{33}}}. \end{aligned} \tag{52.12}$$

Координата ўқларини фазода қандай жойлаштириш бизнинг ихтиёримизда. Масалан, координаталар бошидан утган ихтиёрий тўғри чизиқни координата ўқларининг бири сифатида қабул қилишимиз мумкин. Бу ҳолда тўғри чизиқнинг сирт билан кесишган нуқтасини координаталар боши билан бирлаштирувчи кесманинг узунлиги, (52.12) га мувофиқ, икки индекси ҳам бир хил бўлган тензор компонентларидан олинган квадрат илдизнинг тескарисига тенгдир. Ана шундай кесма охирларининг геометрик ўрни (52.11) да ифодаланган сиртдан иборат.

Энди координаталарнинг шундай янги системасига ўтайликки, унда тензорнинг турлича индексли компонентлари нолга тенг бўлсин. У вақтда текширилаётган сирт тенгламаси бундай ёзилади:

$$S_{11} x_1^2 + S_{22} x_2^2 + S_{33} x_3^2 = 1. \tag{52.13}$$

Шу системанинг координата ўқлари сиртнинг бош ўқлари бўлади. Агар S_{11}, S_{22}, S_{33} коэффициентларни мос равишда λ_1, λ_2, λ_3 орқали белгиласак:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1 \tag{52.14}$$

бўлади.

λ_1, λ_2, λ_3 коэффициентларнинг ишораларига қараб, сиртлар турлича бўлади. Биз коэффициентлар мусбат бўлган ҳол билангина чекланайлик. У вақтда юқоридаги тенглама ярим ўқлари $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ га тенг бўлган эллипсоидни ифодалайди.

Шундай қилиб, сиртнинг бош ўқлари координата ўқлари сифатида қабул қилинган системада тензор матрицаси қуйидагича ёзилади:

$$|S_{ij}| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \qquad (52.15)$$

Бош ўқлар тензорнинг бош ўқлари дейилади ва бу ўқларга мос йўналишлар тензорнинг бош йўналишлари ёки хусусий йўналишлари деб аталади. λ_1, λ_2, λ_3 сонлар тензорнинг бош қийматлари ёки хусусий қийматлари дейилади. Тензорнинг бош ўқлари координат ўқлар ҳисобланган системада тензорнинг турли индексли компонентлари нолга тенг бўлиб кетади.

Шундай қилиб, симметрик тензорнинг геометрик тасвири эллипсоиддир.

Симметрик S_{ij} тензорни бирор a_j векторга скаляр купайтириб, натижада янги b_i векторни топамиз:

$$b_i = S_{ij} a_j. \qquad (52.16.)$$

Тензорнинг бош ўқлари янги координата ўқлари ҳисобланган системада бу векторларнинг компонентлари қуйидагича боғланган:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \lambda_1 a_1 \\ b_2 &= \lambda_2 a_2 \\ b_3 &= \lambda_3 a_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (52.17)$$

Бош қийматлари ўзаро тенг ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$) *тензор сферик тензор дейилади*: ҳамма ярим ўқлари бир хил эллипсоид сфера бўлади.

Демак, фазодаги ҳар қандай йўналиш сферик тензорнинг бош йўналиши бўлади. Сферик тензорнинг ўзаро перпендикуляр учта бош йўналишини ихтиёримизча танлашимиз мумкин.

Сферик тензор билан боғланган икки b_i ва a_j вектор учун:

$$b_1 = \lambda a_1$$
$$b_2 = \lambda a_2$$
$$b_3 = \lambda a_3$$

бўлади, яъни бу векторлар коллинеар векторлардир. Сферик тензор σ_{ij} бирлик тензор δ_{ij} билан тубандагича боғланган:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}. \qquad (52.18)$$

Демак, сферик тензорнинг ҳар хил индексли компонентлари нолга тенг, бир хил индексли компонентлари эса ўзаро тенг.

Бирлик тензорнинг геометрик тасвири радиуси бирга тенг сферадир. Симметрик тензорларни тасвирловчи эллипсоидлардан физика, механика, техникада кенг фойдаланилади.

Бир мисол келтирайлик. Электродинамикадан маълумки, жисмнинг диэлектрик коэффициентлари тензори ε_{ij} симметрик тензордир:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

Жисмнинг ҳар бир нуқтасида шу тензорни тасвирловчи эллипсоид олишимиз мумкин.

Электр майдони индукция вектори D_i электр майдони кучланганлиги вектори E_j ва ε_{ij} тензор мана бундай боғланган:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j.$$

Тензорнинг бош ўқларига нисбатан бу тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1,$$
$$D_2 = \varepsilon_2 E_2,$$
$$D_3 = \varepsilon_3 E_3.$$

Демак, электр майдони кучланганлиги вектори ва индукция вектори коллинеар бўлмаган векторлардир.

Бундай хусусиятга эга жисмлар электр жиҳатдан анизотроп жисмлар деб юритилади Аммо, одатда, кўпчилик жисмлар учун ε_{ij} тензор сферик тензордир ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$), демак:

$$D_1 = \varepsilon E_1, \qquad D_2 = \varepsilon E_2, \qquad D_3 = \varepsilon E_3,$$

яъни электр майдони кучланганлиги вектори билан индукция вектори параллел векторлардир. *Бундай хусусиятга эга жисмлар электр жиҳатдан изотроп жисмлар дейилади.*

53. МИҚДОРНИНГ ТЕНЗОРЛИК АЛОМАТИ

Текширилаётган миқдорнинг тензор бўлиш-бўлмаслигини билиб олиш муҳим масаладир.

Миқдорнинг тензорлик аломатларидан баъзилари бизга маълум: 1) ортогонал алмаштириш қонунларига итоат қилган миқдор тензор бўлади; 2) бир хил рангли тензорлар йиғиндиси ёки айирмаси тензор бўлади; 3) тензорлар кўпайтмаси яна тензор бўлади; 4) тензорларни йиғиштириш натижаси тензордир.

Турли миқдорларнинг тензорлик характерини аниқлашдаги яна бир муҳим усул билан танишиб чиқайлик.

Тензор ҳақидаги асосий теоремани бундай ифодалашимиз мумкин: агар тензорлиги номаълум бўлган миқдорлар тўпламининг ихтиёрий тензор билан скаляр купайтмаси тензор бўлса, бундай миқдорлар тўплами тензор булади.

Ҳақиқатан, координаталарнинг бирор системасида уч индексли, аммо тензорлиги номаълум булган $C_{(ijk)}$ миқдорлар тўпламини олайлик. Индексларни қавслар ичига олиб ёзишдан мақсадимиз ҳам текширилаётган шу миқдорлар тўпламининг тензорлиги номаълумлигини кўрсатишдир. Шу тупламни ташкил қилувчи миқдорлар бошқа системада $C'_{(lmn)}$ булсин. Шу миқдорларнинг иккинчи рангли бирор ихтиёрий T'_{np} тензор билан скаляр кўпайтмаси учинчи рангли тензор τ'_{lmp} бўлсин:

$$\tau'_{lmp} = C'_{(lmn)} T'_{np} \tag{53.1}$$

ёки

$$\tau_{ijk} = C_{(ijq)} T_{qk}. \tag{53.2}$$

Учинчи ва иккинчи рангли тензорлар таърифига мувофиқ:

$$\tau'_{lmp} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{pk}\left\{C_{(ijq)}T_{qk}\right\},$$

$$T_{qk} = \alpha_{nq}\alpha_{sk}T'_{ns}$$

бўлади. Сўнгги формулани аввалгисига қўямиз:

$$\tau'_{lmp} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{pk}\alpha_{nq}\alpha_{sk}\left\{C_{(ijq)}T'_{ns}\right\}.$$

Ортогоналлик шартига кўра:

$$\alpha_{pk}\alpha_{sk} = \delta_{ps} = \begin{cases} 0, p \neq s \\ 1, p = s. \end{cases}$$

Натижада:

$$\tau'_{lmp} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nq}\left\{C_{(ijq)}T'_{np}\right\}$$

бўлади.

Бу формуланинг ўнг томони билан (53.1)нинг ўнг томони тенгдир:

$$C'_{(lmn)}T'_{np} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nq}\left\{C_{(ijq)}T'_{np}\right\}.$$

Энди ҳамма ҳадларни бир томонга ўтказиб, сўнгра умумий кўпайтувчи T'_{np} ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

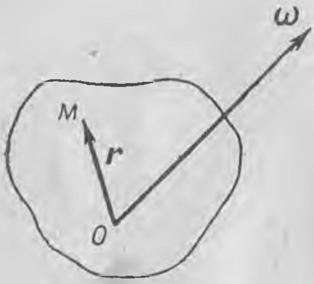
$$\left\{C'_{(lmn)} - \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nq}C_{(ijq)}\right\}T'_{np} = 0.$$

Бу ердаги T'_{np} тензор ихтиёрий бўлганлигидан, унга кўпайтирилаётган катта қавслар ичидаги ифода айнан нолга тенг бўлиши керак. Демак:

$$C'_{(lmn)} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nq}C_{(ijq)}.$$

Бу эса учинчи рангли тензор компонентларини ортогонал алмаштириш қонунидир. Шундай қилиб, тензорлиги номаълум, аммо ихтиёрий T_{qk} тензор билан скаляр кўпайтмаси тензор бўлган $C_{(ijq)}$ миқдорлар тўплами тензор бўлади.

Ранги нолга тенг тензорнинг инвариант эканлиги ва ранги бирга тенг тензорнинг вектор эканлиги назарда тутилса, юқоридаги теоремани хусусий ҳоллар учун шундай ифодалаш мумкин: *тензорлиги номаълум миқдорлар тўпламининг ихтиёрий тензор билан скаляр кўпайтмаси инвариант ёки вектор бўлса, бундай миқдорлар тўплами тензор бўлади.*



161- расм.

Айтилганларга мисол келтирайлик. Ҳаракатсиз O нуқта (координаталар боши) атрофида айланувчи қаттиқ жисмга тегишли бирор M нуқтанинг чизиқли тезлик вектори $\boldsymbol{v}$, кинематикадан маълум Эйлер формуласига мувофиқ бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ билан шундай боғланган:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}],$$

бу ерда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ ўша O нуқтага нисбатан олинган.

Жисмнинг M нуқтани қуршаб олган элементар қисмидаги массасини dm десак, бу элементар қисмнинг ҳаракат миқдори $\boldsymbol{v}dm$ ва ҳаракат миқдори моменти $[\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{v}]\, dm = [\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]]\, dm$ бўлади.

Барча элементар қисмлар бўйича олинган ҳаракат миқдори моментларининг йиғиндиси жисмнинг тўла ҳаракат миқдори моменти $\boldsymbol{L}$ ни ҳосил қилади:

$$\boldsymbol{L} = \int [\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]]\, dm \tag{53.3}$$

ёки компонентлари орқали бундай ёзилади:

$$L_j = \int [\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]]_j\, dm. \tag{53.4}$$

Икки қайтали вектор кўпайтма формуласига биноан:

$$[\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]] = \boldsymbol{\omega} r^2 - \boldsymbol{r}\, (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\omega}).$$

Радиус-вектор квадрати координаталар квадратларининг йиғиндисига тенг:

$$r^2 = x_k\, x_k,$$

скаляр кўпайтма $(\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\omega})$ эса:

$$(\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\omega}) = x_i\, \omega_i$$

бўлади. Буларни ўз ўринларига қўямиз:

$$[\boldsymbol{r}\,[\omega\,\boldsymbol{r}]] = \omega\, x_k\, x_k - \boldsymbol{r}\, x_i\, \omega_i$$

ёки компонентлар орқали ёзилса:

$$[\boldsymbol{r}\,[\omega\,\boldsymbol{r}]]_j = \omega_j\, x_k\, x_k - x_j\, x_i\, \omega_i$$

бўлади. Аммо

$$\omega_j = \delta_{ij}\,\omega_i$$

бўлганлигидан:

$$[\boldsymbol{r}\,[\omega\,\boldsymbol{r}]]_j = \delta_{ij}\,\omega_i\, x_k\, x_k - x_j\, x_i\, \omega_i = (\delta_{ij}\, x_k\, x_k - x_i\, x_j)\,\omega_i$$

келиб чиқади. Топилган натижани (53.4) га қўямиз:

$$L_j = \left\{ \int (\delta_{ij}\, x_k\, x_k - x_i\, x_j)\, dm \right\} \omega_i\,.$$

Катта қавслар ичидаги ифодани I_{ji} орқали белгилайлик:

$$I_{ji} = \int (\delta_{ij}\, x_k\, x_k - x_i\, x_j)\, dm \tag{53.5}$$

у вақтда:

$$L_j = I_{ji}\,\omega_i. \tag{53.6}$$

Демак, I_{ji} миқдорлар тўплами билан бурчак тезлик векторининг скаляр кўпайтмаси ҳаракат миқдори моментининг векторидан иборат, шунинг учун I_{ji} иккинчи рангли тензор бўлади.

(53.5) *даги I_{ji} тензор жисмнинг инерция моментлари тензори дейилади.* Инерция моментлари тензорининг матрицасини ёзайлик:

$$|I_{ji}| = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix}. \tag{53.7}$$

Инерция моментлари тензори симметрик тензордир:

$$I_{ji} = I_{ij}. \tag{53.8}$$

Бу тензорнинг компонентлари (53.5) га мувофиқ, қуйидагилардан иборат:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm, \\
I_{22} &= \int (x_3^2 + x_1^2)\, dm, \\
I_{33} &= \int (x_1^2 + x_2^2)\, dm, \\
I_{12} &= I_{21} = -\int x_1\, x_2\, dm, \\
I_{23} &= I_{32} = -\int x_2\, x_3\, dm, \\
I_{31} &= I_{13} = -\int x_3\, x_1\, dm.
\end{aligned} \tag{53.9}$$

I_{11} компонент жисмнинг x_1 ўқига нисбатан инерция моменти дейилади. Шунингдек, I_{22}, I_{33} компонентлар ҳам жисмнинг x_2, x_3 ўқларига нисбатан инерция моментларидир. Манфий ишорали I_{12} компонент жисмнинг x_1, x_2 ўқларига нисбатан девиация моменти дейилади ёки марказдан қочирма инерция моменти деб ҳам юритилади. Ҳар хил индексли қолган компонентлар ҳам жисмнинг тегишли ўқларга нисбатан девиация моментларидир.

Инерция моментлари тензорининг чизиқли инварианти I_1 ни топиш учун юқоридаги (53.9) билан (52.4) дан фойдаланамиз:

$$I_1 = I_{11} + I_{22} + I_{33} = \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm + \int (x_3^2 + x_1^2)\, dm + \\ + \int (x_1^2 + x_2^2)\, dm$$

ёки

$$I_1 = 2 \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dm,$$

ёхуд

$$I_1 = 2 I_0, \tag{53.10}$$

бу ерда:

$$I_0 = \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dm. \tag{53.11}$$

Бу формулада ифодаланган I_0 инвариант жисмнинг O нуқтага нисбатан инерция моменти дейилади.

Янги координаталар системасининг ўқлари сифатида тензорнинг бош ўқларини қабул қилайлик. У вақтда тензорнинг ҳар хил индексли компонентлари нолга тенг бўлиб, фақат бир хил индексли компонентларигина қолади (52- параграфга қаралсин):

$$\|I_{ji}\| = \begin{Vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{Vmatrix},$$

бу ерда I_{11}, I_{22}, I_{33}—бош инерция моментлари дейилади. Координаталар боши O нуқтага нисбатан олинган инерция моментлари тензори I_{ji} ни тасвирловчи эллипсоид ясаш мумкин ва бу эллипсоиднинг ярим ўқлари $I_{11}^{-\frac{1}{2}}$, $I_{22}^{-\frac{1}{2}}$, $I_{33}^{-\frac{1}{2}}$ га тенг бўлади (ўша 52- параграфга қаралсин).

54. ТЕНЗОРЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

Тензор компонентлари бирор скаляр аргумент t нинг функциялари бўлсин. t аргументнинг турли қийматларига тензор компонентларининг тегишли қийматлари тўғри келади.

Тензор компонентлари вариант миқдорлар, яъни координаталарнинг турли системасида турлича ифодаланувчи оддий скаляр миқдорлардир. Шунинг учун тензор компонентларини, тензорлар йиғиндисини ва кўпайтмасини одатдаги математика анализ қоидалари бўйича дифференциаллаш мумкин. Декарт системаларида, ортогонал алмаштириш коэффициентлари ўзгармас бўлиб, скаляр аргумент t га боғлиқ эмас.

Бирор тензор берилган бўлсин:

$$T'_{ij\ldots n} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots\alpha_{nv}T_{pq\ldots v}. \tag{54.1}$$

Юқоридаги айтилганларни назарда тутиб, бу тензордан скаляр аргумент t бўйича ҳосила олайлик:

$$\frac{d}{dt}\left(T'_{ij\ldots n}\right) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots\alpha_{nv}\frac{d}{dt}\left(T_{pq\ldots v}\right). \tag{54.2}$$

Натижада яна ўша рангли янги тензор ҳосил бўлди. *Тензор компонентларининг скаляр аргумент бўйича ҳосилалари тўплами янги тензор ҳосил қилади, лекин унинг ранги ўзгармайди.* Мисол сифатида заррача координаталарини ортогонал алмаштириш формуласи

$$x'_i = \alpha_{ij}x_j$$

ни ёзиб, t вақт бўйича координаталардан биринчи ва иккинчи ҳосилалар олайлик:

$$\frac{d}{dt}x'_i = \alpha_{ij}\frac{d}{dt}x_j,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i^2 = \alpha_{ij}\frac{d^2}{dt^2}x_j.$$

Бу ҳосилалар заррача тезлиги ва тезланиши векторларининг компонентларидир.

Текширилаётган тензор нуқта функцияси бўлсин. *Нуқта функцияси бўлган тензорнинг мавжудлик соҳаси шу тензорнинг майдони дейилади.* Шундай қилиб, тензорни координаталар бўйича дифференциаллаш масаласига ўтамиз.

Юқоридаги тензордан (54.1) x'_r координата бўйича ҳосила олайлик:

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}\left(T'_{ij\ldots n}\right) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots\alpha_{nv}\frac{\partial}{\partial x'_r}\left(T_{pq\ldots v}\right).$$

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига мувофиқ бундай ёзишимиз мумкин:

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}\left(T_{pq\ldots v}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(T_{pq\ldots v}\right)\frac{\partial x_s}{\partial x'_r}.$$

Демак:

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}\left(T'_{ij\ldots n}\right) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots\alpha_{nv}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(T_{pq\ldots v}\right)\frac{\partial x_s}{\partial x'_r}$$

бўлади. Ортогонал алмаштириш формуласи:

$$x_s = \alpha_{rs} x'_r$$

дан:

$$\frac{\partial x_s}{\partial x'_r} = \alpha_{rs}$$

бўлади. Натижада:

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}\left(T'_{ij\ldots n}\right) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots\alpha_{nv}\alpha_{rs}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(T_{pq\ldots v}\right) \tag{54.3}$$

келиб чиқади. Аввалги тензор (54.1) рангига нисбатан ранги биттага ошиқ янги тензор ҳосил бўлди. *Тензор компонентларидан координаталар бўйича олинган биринчи ҳосилалар тўплами янги тензор* (54.3) *ҳосил қилади. Бу янги тензорнинг ранги дифференциалланувчи тензор рангидан биттага ошиқдир.*

Биз ҳозирча тензордан координаталар буйича олинган биринчи ҳосилалар билан шуғулландик. Тензордан координаталар бўйича олинган иккинчи, учинчи ва бундан ҳам юқори тартибли ҳосилалар ҳақида гапириш мумкин. Албатта, ҳар дифференциалланишда тензор ранги биттага ошади.

Инвариант ноль рангли тензордир ($\varphi' = \varphi$). Демак, инвариантни координаталар бўйича дифференциаллаганда, биринчи рангли тензор, яъни вектор ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \alpha_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}. \tag{54.4}$$

Компонентлари φ скаляр функциянинг координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилаларига тенг бўлган векторнинг шу скаляр функция градиенти дейилиши бизга аввалдан маълум.

Инвариантдан координаталар бўйича олинган иккинчи ҳосилалар $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ тўплами иккинчи рангли тензор ҳосил қилади. Аммо, координаталар бўйича дифференциаллашда дифференциаллаш тартиби роль ўйнамайди:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_i},$$

демак, инвариантнинг иккинчи ҳосилалари тўплами иккинчи рангли симметрик тензордир.

Биринчи рангли тензордан, яъни a_i вектордан олинган биринчи ҳосилалар тўплами иккинчи рангли T_{ij} тензорни ҳосил қилади:

$$T_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}. \tag{54.5}$$

Иккинчи рангли тензорнинг чизиқли инварианти I_1 нинг қандай ёзилишини эслайлик:

$$I_1 = T_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \tag{54.6}$$

ёки, муфассалроқ ёзилса, бундай бўлади:

$$I_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}. \tag{54.7}$$

Бу формуланинг ўнг томони вектор дивергенциясидир. *Умуман, дифференциалланиш индекси билан яна бошқа бирор индекси бўйича йиғиштирилган тензор шу индекслар бўйича олинган тензор дивергенцияси дейилади.* Масалан, $\frac{\partial}{\partial x_s} T_{pq \dots v}$ тензорнинг s билан p индекслар бўйича олинган дивергенцияси $\frac{\partial}{\partial x_s} T_{sq \dots v}$ бўлади, s билан v индекслар бўйича олинган дивергенцияси $\frac{\partial}{\partial x_s} T_{pq \dots s}$ бўлади ва ҳоказо. Демак, тензор дивергенциясининг ранги шу тензор рангидан биттага камдир.

Юқоридаги (54.5) иккинчи рангли T_{ij} тензордан иккинчи рангли янги тензор қуйидагича ҳосил қилинган бўлсин:

$$A_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}. \tag{54.8}$$

Бундан:

$$A_{ij} = -A_{ji};$$

бу тензор антисимметрикдир. Антисимметрик бу тензорнинг ўзаро боғланмаган компоненти қуйидагилардир:

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \\ A_{23} &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ A_{31} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{54.9}$$

Бу ифодалар эса вектор уюрмасининг компонентларидир. *Шундай қилиб, иккинчи рангли антисимметрик* (54.8) *тензор уч ўлчовли фазода вектор уюрмаси сифатида тасвирланади.*

Энди координаталар буйича дифференциалланган тензор формуласи (54.3) га қайтиб, уни векторга нисбатан татбиқ этайлик:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial x_r'} = \alpha_{ip}\,\alpha_{rs}\,\frac{\partial a_p}{\partial x_s}. \qquad (54.10)$$

Векторнинг тўла дифференциали:

$$da_i' = \frac{\partial a_i'}{\partial x_r'}\,d\,x_r',$$

$$da_p = \frac{\partial a_p}{\partial x_s}\,dx_s.$$

Ортогонал алмаштириш формуласи:

$$x_j' = \alpha_{jk}\,x_k$$

дан:

$$dx_j' = \alpha_{jk}\,dx_k$$

бўлади.

(54.10) нинг икки томонини $d\,x_j'$ га кўпайтириб, сўнгра r ва j индекслар буйича йиғиштирамиз:

$$d\,a_i' = \frac{\partial a_i'}{\partial x_r'}\,d\,x_r' = \alpha_{ip}\,\alpha_{rs}\,\frac{\partial a_p}{\partial x_s}\,d\,x_r' =$$

$$= \alpha_{ip}\,\alpha_{rs}\,\alpha_{rk}\,\frac{\partial a_p}{\partial x_s}\,d\,x_k = \alpha_{ip}\,\delta_{sk}\,\frac{\partial a_p}{\partial x_s}\,d\,x_k =$$

$$= \alpha_{ip}\,\frac{\partial a_p}{\partial x_s}\,dx_s = \alpha_{ip}\,da_p$$

ёки

$$d\,a_i' = \alpha_{ip}\,d\,a_p. \qquad (54.11)$$

Жуда муҳим натижа келиб чиқди: *Декарт системасида вектор компонентлари дифференциалларининг тўплами вектор ҳосил қилади* ёки, қисқача қилиб айтсак, *Декарт системасида вектор дифференциали вектор бўлади.* Вектор компонентларини ортогонал алмаштириш формуласидан бевосита дифференциал олинса ҳам яна шу натижанинг ўзига келамиз. *Аммо вектор компонентларидан Декарт координаталари буйича олинган ҳосилалар тўплами иккинчи рангли тензор ҳосил қилади* (54.10).

Энди тензордан дифференциал олайлик (54.1):

$$d\,T_{ij\,\ldots\,n}' = \alpha_{ip}\,\alpha_{jq}\,\ldots\,\alpha_{nv}\,d\,T_{pq\,\ldots\,v}. \qquad (54.12)$$

Демак, Декарт системаларида олинган тензор дифференциали яна ўша рангли тензор ҳосил қилади. Аммо тензордан Декарт координаталари бўйича олинган ҳосилаларнинг ранги биттага ошиқ бўлган янги тензор ҳосил қилиши бизга маълум (54.3).

55. ПСЕВДОТЕНЗОР

Псевдовектор ва псевдоскаляр тушунчалари билан векторлар алгебрасида танишдик. Фазодаги координаталар системасининг ориентацияси фазо ориентацияси деб, фазо ориентациясининг ўзгаришини эса фазо инверсияси деб атаган эдик. *Фазо ориентациясининг ўзгариши билан йўналишини қарама-қаршисига ўзгартирувчи вектор псевдовектор деб, ишорасини қарама-қаршисига ўзгартувчи скаляр эса, псевдоскаляр деб аталган эди.* Координаталарни алмаштиришда ориентация ўзгармаса, псевдовекторнинг вектордан ва псевдоскалярнинг скалярдан ҳеч қандай фарқи қолмайди. Шу айтилганларни форфулалар билан ифодалайлик.

Аввалдан маълум таърифга мувофиқ, *координата системаларининг биридан иккинчисига ўтишда, уларнинг ориентацияларидан қатъи назар, скаляр (инвариант) ҳисобланган миқдор ўзгармай қолади:*

$$I' = I. \tag{55.1}$$

Псевдоскалярга берилган таърифга мувофиқ, *ориентация ўзгариши билан псевдоскаляр ҳисобланган миқдорнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгаради:*

$$\varphi' = -\varphi. \tag{55.2}$$

Координаталарни алмаштириш формуласини эслайлик:

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j. \tag{55.3}$$

Энди фазо ориентациясининг ўзгариши билан боғланган алмаштириш формуласи (46.28) назарга олинса, охирги муносабат ушбу шаклни олади:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1, \\ x_2' &= -x_2, \\ x_3' &= -x_3. \end{aligned} \tag{55.4}$$

Координаталарни алмаштириш қонуни (55.3) фазо ориентациясининг ўзгариши ёки ўзгармаслигига боғлиқ эмас. *Векторнинг компонентлари ушбу алмаштириш қонунига бўйсунади:*

$$P_i' = \alpha_{ij} P_j. \tag{55.5}$$

Демак, фазо ориентацияси ўзгариши билан вектор компонентлари қуйидаги алмаштириш қонунига бўйсунади:

$$\left.\begin{aligned} P_1' &= -P_1 \\ P_2' &= -P_2 \\ P_3' &= -P_3 \end{aligned}\right\}. \tag{55.6}$$

Векторлар алгебрасида таърифланган поляр векторнинг аналитик ифодасини (55.5) *формулада ёки хусусий ҳол — фазо инверсиясига боғлиқ бўлган* (55.6) *формулада кўрамиз. Демак, инверсияли алмаштиришда поляр вектор компонентларининг ишоралари қарама-қаршисига ўзгаради.*

Икки поляр $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторнинг вектор кўпайтмаси:

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] \tag{55.7}$$

нинг псевдовектор бўлиши бизга маълум. Поляр вектор компонентлари формуласи (55.6)ни назарда тутиб, юқоридаги вектор кўпайтма компонентларини ёзайлик:

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= a_2' b_3' - a_3' b_2' = a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_1 \\ c_2' &= a_3' b_1' - a_1' b_3' = a_3 b_1 - a_1 b_3 = c_2 \\ c_3' &= a_1' b_2' - a_2' b_1' = a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_2 \end{aligned}\right\}, \tag{55.8}$$

яъни *инверсияли алмаштиришда псевдовектор компонентларининг ишоралари ўзгармасдан сақланади.* (55.8) билан (55.4) дан кўрамизки, *инверсияли алмаштиришда псевдовектор компонентларининг ишоралари координаталарнинг ишораларига нисбатан қарама-қаршисига ўзгаради.* Инверсиясиз алмаштиришда псевдовектор вектордан фарқ қилмайди, демак, псевдовектор компонентлари, вектор компонентлари сингари, координаталарга ухшаш бир хил алмаштириш қонунига бўйсунади. Ана шу айтилганларни назарда тутиб, координаталарни алмаштириш қонуни (55.3) га нисбатан псевдовектор компонентларини алмаштириш қонунини бундай ёзамиз:

$$c_i' = -\alpha_{ij} c_j. \tag{55.9}$$

Инверсияли алмаштириш коэффициентларидан тузилган детерминант, (46.25) га биноан, манфий бирга тенгдир:

$$|\alpha_{mn}| = -1, \tag{55.10}$$

демак, *псевдовектор компонентларини алмаштириш қонуни шундай ёзилади:*

$$c_i' = |\alpha_{mn}|\, \alpha_{ij} c_j. \tag{55.11}$$

Псевдоскалярни алмаштириш формуласи (55.2) ҳам, (55.10) га биноан, тубандагича ёзилади:

$$\varphi' = |\alpha_{mn}|\varphi. \tag{55.12}$$

Скаляр ва вектор тушунчаларини умумлаштириб, тензор тушунчасига келган эдик. Шунга ўхшаш, псевдоскаляр ва псевдовектор алмаштириш қонунларини умумлаштириб, псевдотензор тушунчаси ҳосил қилишимиз мумкин.

Скаляр псевдоскалярга нисбатан ва вектор псевдовекторга нисбатан қандай муносабатда бўлиши (55.1), (55.12), (55.5), (55.11) формулалардан аёндир. Тензор ҳам псевдотензорга нисбатан худди шундай муносабатда бўлади.

Тензорнинг таърифига мувофиқ, унинг компонентларини алмаштириш қонунини ёзайлик:

$$T'_{ij\,\ldots\,n} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\,\ldots\,\alpha_{ns}T_{pq\,\ldots\,s}. \tag{55.13}$$

Энди, текширилиши лозим бўлган миқдорлар тўпламининг турли системалардаги қийматлари қуйидагича боғланган бўлсин:

$$P'_{ij\,\ldots\,n} = |\alpha_{mn}|\alpha_{ip}\alpha_{jq}\,\ldots\,\alpha_{ns}P_{pq\,\ldots\,s}. \tag{55.14}$$

Шу алмаштириш қонунига бўйсунган миқдорлар тўплами псевдотензор дейилади. Псевдотензор индексларининг умумий сони псевдотензор ранги дейилади. Кўрамизки, псевдотензор ранги нолга тенг ва бирга тенг бўлган ҳолларда (55.14) формуладан юқорида ёзилган псевдоскаляр формуласи (55.12) ва псевдовектор формуласи (55.11) келиб чиқади.

Оддий тензорлар сингари, псевдотензорларни ҳам қўшиш, айириш, кўпайтириш, йиғиштириш, симметриялаш, альтернациялаш, дифференциаллаш мумкин. Масалан, бир хил рангли псевдотензорлар йиғиндиси ёки айирмаси ўша рангли псевдотензор ҳосил қилади. Лекин ранглари бир хил бўлса-да, тензор билан псевдотензорнинг йиғиндиси ёки айирмаси бўлмайди.

Тензорнинг тензорга кўпайтмаси тензор бўлиши бизга маълум. Бир псевдотензорнинг иккинчи псевдотензорга кўпайтмаси тензор бўлади, чунки $|\alpha_{mn}|^2 = 1$. Аммо бир псевдотензорнинг бошқа бир тензорга кўпайтмаси псевдотензордир.

Бир мисол келтирайлик. Жисмнинг массаси скаляр миқдор, жисмнинг ҳажми эса псевдоскаляр миқдордир (10-параграф). Шуларга биноан жисм массасининг зичлиги псевдоскаляр бўлади.

Ҳамма индексларига нисбатан антисимметрик уч индексли миқдорлар тўпламини олиб, уни ε_{ijk} символи орқали белгилайлик. У вақтда, икки индекс бир хил бўлганда, ёки уч индекс бир хил бўлганда мос миқдорлар нолга тенг бўлади. Нолга тенг бўлмаган миқдорларнинг учта индекси ҳам ҳар хил бўлиб, улар 1, 2, 3 сонларнинг турли тартибда олинган ўрин алмаштиришларидан иборатдир. Аммо 1, 2, 3 сонлардан $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ҳар хил ўриналмаштириш тузиш мумкин (123, 231, 312, 213, 132, 321). Шундай қилиб, тўпламдаги $3^3 = 27$ миқдордан фақат $3! = 6$ та миқдор нолдан фарқ қилади. Антисимметриялик хусусияти туфайли, бу олтита миқдор бир-биридан узларининг ишоралари билангина фарқ қилади. Энди аниқлик учун $\varepsilon_{123} = 1$ деб қабул қилайлик. У вақтда ўриналмаштиришларнинг жуфтлиги ёки тоқлигига қараб, шу олти миқдорнинг ҳар бири ё мусбат бирга ёки манфий бирга тенг бўлади.

Шундай қилиб, учта i, j, k индексли ва ε_{ijk} символ билан белгиланган миқдор: 1) *i, j, k индекслардан иккитаси бир хил бўлса, ёки ҳаммаси ҳам бир хил бўлса, нолга тенг бўлади,* 2) *i, j, k индекслар ҳосил қилган ўриналмаштириш 1, 2, 3 сонларга нисбатан жуфт ўриналмаштириш бўлса, мусбат бирга тенг,* 3) *i, j, k индекслар ҳосил қилган ўриналмаштириш 1, 2, 3 сонларга нисбатан тоқ ўриналмаштириш бўлса, манфий бирга тенг бўлади.*

Ана шу хусусиятларни ифодаловчи ε_{ijk} символ одатда Леви-Чивита символи дейилади. Леви-Чивита символининг юқорида курсатилган хусусиятлари координаталарнинг ҳар қандай системасида ўринлидир.

Энди Леви-Чивита символи ε_{ijk} нинг аслида учинчи рангли псевдотензор эканлигини кўрсатайлик. Учинчи рангли шундай δ_{pqr} псевдотензор олайликки, у координаталар системаларининг бирида Леви-Чивита символи ε_{pqr} хусусиятларига эга бўлсин. Псевдотензор таърифига мувофиқ:

$$\delta'_{ijk} = |\alpha_{mn}| \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \delta_{pqr}$$

ёки шартимизга биноан $\delta_{pqr} = \varepsilon_{pqr}$ бўлганлигидан:

$$\delta'_{ijk} = |\alpha_{mn}| \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \varepsilon_{pqr}$$

бўлади.

Ҳамма индексларига нисбатан антисимметриялик хусусияти бўлганлигидан, псевдотензор компонентларининг ҳар бири ё нолга тенг бўлади, ёки $+\delta'_{123}$ га тенг, ёхуд $-\delta'_{123}$ га тенг бўлади. Демак, биттагина δ'_{123} компонентни билиш кифоя:

$$\delta'_{123} = |\alpha_{mn}| \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{3r} \varepsilon_{pqr}.$$

Ўриналмаштиришнинг жуфт ёки тоқ бўлишига қараб, ε_{pqr} ё $+\varepsilon_{123}$ га, ёки $-\varepsilon_{123}$ га тенгдир. У вақтда:

$$\delta'_{123} = \varepsilon_{123} |\alpha_{mn}| \sum \pm \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{3r}.$$

бўлади. Детерминант таърифига мувофиқ, тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди $|\alpha_{mn}|$ га тенг. Натижада:

$$\delta'_{123} = \varepsilon_{123} |\alpha_{mn}|^2 = \varepsilon_{123}$$

бўлади. Демак, псевдотензор δ_{ijk} ҳар қандай системада Леви-Чивита символи ε_{ijk} дан фарқ қилмайди, яъни *Леви-Чивита символи учинчи рангли псевдотензордир. Леви-Чивита псевдотензори* ε_{ijk} *бирлик псевдотензор деб ҳам айтилади.*

Бирлик псевдотензордан фойдаланиш баъзан анчагина қулайлик туғдиради.

Масалан, I скаляр ва φ псевдоскаляр бўлса, $\varepsilon_{ijk} I$ учинчи рангли бутунлай антисимметрик псевдотензор, $\varepsilon_{ijk}\varphi$ эса учинчи рангли бутунлай антисимметрик тензор бўлади. ε_{ijk} билан иккинчи рангли тензор T_{mn} кўпайтмаси $\varepsilon_{ijk} T_{mn}$ бешинчи рангли псевдотензордир. Энди бу псевдотензор $m=j$ ва $n=k$ индекслар бўйича йиғиштирилса, биринчи рангли псевдотензор, яъни псевдовектор ҳосил бўлади. Бу псевдовекторни P_i орқали белгилаймиз:

$$P_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk} \tag{55.15}$$

ёки компонентлар орқали:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= T_{23} - T_{32} \\ P_2 &= T_{31} - T_{13} \\ P_3 &= T_{12} - T_{21} \end{aligned}\right\} \tag{55.16}$$

бўлади. (55.15) формулани бундай ёзайлик:

$$P_i = \varepsilon_{ikj} T_{kj},$$

чунки йиғиштириш индексини ихтиёримизча белгилашимиз мумкин. У вақтда:

$$P_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} T_{jk} + \varepsilon_{ikj} T_{kj})$$

ёки

$$P_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(T_{jk} - T_{kj}) \tag{55.17}$$

бўлади, чунки:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}.$$

Антисимметрик тензор $T_{jk} - T_{kj}$ ни A_{jk} орқали белгилайлик:

$$A_{jk} = T_{jk} - T_{kj}, \tag{55.18}$$

натижада:

$$P_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} A_{jk} \tag{55.19}$$

бўлади, яъни *псевдовектор иккинчи рангли антисимметрик тензорга эквивалентдир. Сўнгги формуладаги псевдовектор*

P_i иккинчи рангли антисимметрик тензор A_{jk} га нисбатан дуал бўлган псевдовектор дейилади. (55.19) дан:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= A_{23}, \\ P_2 &= A_{31}, \\ P_3 &= A_{12} \end{aligned}\right\} \tag{55.20}$$

ёки бирлик псевдотензордан фойдалансак:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} P_k \tag{55.21}$$

бўлади. *Бу ердаги иккинчи рангли антисимметрик A_{ij} тензор псевдовектор P_k га нисбатан дуал бўлган тензор дейилади.*

Умуман, дастлаб берилган тензордан (ёки псевдотензордан) бирлик псевдотензор воситасида ҳосил қилинган псевдотензор (ёки тензор) дастлабкиларга нисбатан дуал бўлган псевдотензор (ёки тензор) дейилади.

Иккинчи рангли антисимметрик тензорнинг ўзаро боғланмаган учта компоненти борлиги бизга маълум. Бу учта компонент, (55.20) га мувофиқ, псевдовектор компонентларига айнан тенгдир. Демак, *иккинчи рангли антисимметрик тензорни псевдовектор билан, яъни фазо ориентацияси ўзгарганда йўналишини қарама-қаршисига ўзгартувчи вектор ёрдамида тасвирлаш мумкин. Бу айтилганлар фақат уч ўлчовли фазодагина тўғридир.* Кўп ўлчовли фазода иккинчи рангли антисимметрик тензорни псевдовектор билан тасвирлаш мумкин эмас, чунки бу тензорнинг ўзаро боғланмаган компонентлари сони ва псевдовектор компонентлари сони ҳар хилдир.

Агар T_{jk} тензор икки a_j, b_k вектордан

$$T_{jk} = a_j b_k \tag{55.22}$$

формула бўйича тузилган бўлса, (55.18) га мувофиқ:

$$A_{jk} = a_j b_k - a_k b_j \tag{55.23}$$

бўлади. Демак, (55.15) ва (55.19) га биноан, бундай ёзамиз:

$$P_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \tag{55.24}$$

ёки компонентлар орқали қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ P_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ P_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}\right\} \tag{55.25}$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонлари икки векторнинг вектор кўпайтмаси компонентларидир.

Агар энди T_{jk} тензор вектор ҳосилаларидан ташкил топса:

$$T_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}. \tag{55.26}$$

(55.18), (55.15) ва (55.19) га асосан:

$$A_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \tag{55.27}$$

$$P_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk} \tag{55.28}$$

бўлади. Сўнгги формуладан:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ P_2 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \\ P_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \tag{55.29}$$

келиб чиқади. Бу тенгликларнинг ўнг томонлари вектор уюрмасининг компонентларидир.

Шундай қилиб, икки векторнинг вектор кўпайтмаси билан векторнинг уюрмаси аслида иккинчи рангли антисимметрик тензорлардир. Уч ўлчовли фазодагина улар псевдовекторлар билан тасвирланади.

56. КЎП ЎЛЧОВЛИ ФАЗО ТЕНЗОРЛАРИ ВА ПСЕВДОТЕНЗОРЛАРИ

Биз уч ўлчовли фазодаги тензорлар ва псевдотензорлар билан танишиб чиқдик. Ҳозиргача Декарт координаталари x_1, x_2, x_3 билан иш кўрган эдик.

Физикада вақт ва учта фазовий координата, яъни тўртта ўзгарувчи миқдор тўплами билан боғланган воқеалар фазоси ёки тўрт ўлчовли фазо тушунчаси киритилади.

Турли шаклда олинган кўп ўлчовли фазо тушунчаси физикада тез-тез учраб туради: тезликлар фазоси, импульслар фазоси, фазалар фазоси, конфигурациялар фазоси ва ҳоказо. Албатта, ҳақиқий, моддий фазо фақат уч ўлчовлидир.

n-та ихтиёрий ўзгарувчи $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ миқдорлар хилма-хиллиги n ўлчовли фазо деб қабул қилинган.

Бу ихтиёрий ўзгарувчи $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ миқдорларнинг аниқ тўплами n ўлчовли фазо нуқтаси деб, миқдорларнинг ўзи эса нуқта координаталари деб аталади. Биз уч ўлчовли фазодаги Декарт ортлари, Декарт координаталарини алмаштириш билан боғлиқ бўлган асосий формулаларни n ўлчовли фазо учун умумлаштириб қабул қилишимиз мумкин, бу ҳолда ҳар бир индекс 1, 2, 3, ..., n қийматларга эга бўлади.

n ўлчовли фазода Декарт ортлари ва Декарт координаталарини алмаштириш формулалари:

$$e_i' = \alpha_{ij} e_j \tag{56.1}$$

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j \tag{56.2}$$

бўлади. Алмаштириш коэффициентларининг ортогоналлик шарти:

$$\alpha_{ij} \alpha_{ik} = \alpha_{jk} \tag{56.3}$$

ва бу коэффициентлардан тузилган детерминант:

$$|\alpha_{mn}| = \begin{cases} +1 \\ \text{ёки} \\ -1 \end{cases} \tag{56.4}$$

бўлади. Тензор ва псевдотензор компонентларини алмаштириш формулалари:

$$T'_{ij\ldots n} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \ldots \alpha_{ns} T_{pq\ldots s} \tag{56.5}$$

$$P'_{ij\ldots n} = |\alpha_{lm}| \alpha_{ip} \alpha_{jq} \ldots \alpha_{ns} P_{pq\ldots s} \tag{56.6}$$

бўлади.

Тензор ёки псевдотензор рангини, яъни индекслар сонини R билан белгилаймиз. Бу индексларнинг ҳар бири n ўлчовли фазода 1, 2, 3, ..., n сонларга тенг. Демак, R рангли тензор ёки псевдотензор компонентларининг n ўлчовли фазодаги умумий сони $N = n^R$ бўлади.

Масалан, иккинчи рангли T_{ij} тензор учун $N = n^2$. Бу тензор антисимметрик тензор бўлса ($T_{ij} = -T_{ij}$), унинг n-та компоненти нолга тенг бўлиб, нолга тенг бўлмаган компонентларининг сони $n^2 - n = n(n-1)$ бўлади. Бу компонентларнинг ярми қолганларидан фақат ишоралари билан фарқ қилади. Демак, ўзаро боғланмаган компонентлар сони $\frac{n(n-1)}{2}$ га тенг; жумладан, уч ўлчовли фазода $\frac{3(3-1)}{2} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ га тенг бўлади. Псевдовектор P_i учун, умуман, $N = n$ бўлиб, уч ўлчовли фазода $N = 3$ дир. Демак, илгари кўрганимиздек, иккинчи рангли антисимметрик тензор фақат уч ўлчовли фазода псевдовектор билан тасвирланади.

Икки индексли символ δ_{jk} (Кронекер символи) бу ерда n ўлчовли фазодаги бирлик тензордир:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{агар } j = k, \\ 0, & \text{агар } j \neq k. \end{cases} \tag{56.7}$$

Уч ўлчовли фазодаги учинчи рангли бирлик псевдотензор ε_{ijk} (Леви-Чивита символи) ўрнига n ўлчовли фазо учун n

рангли бирлик псевдотензор $\varepsilon_{ijk\,\ldots\,s}$ *киритамиз. Таърифига кўра, ҳамма индексларига нисбатан антисимметрик ва* $\varepsilon_{123\,\ldots\,n} = 1$ *бўлганлигидан, бу бирлик псевдотензорнинг* $ijk \ldots s$ *индекслар билан кўрсатилган компоненти:* 1) $ijk \ldots$ $\ldots s$ *индекслар орасида бир хиллари учраса нолга тенг,* 2) $ijk \ldots s$ *индекслар ҳосил қилган ўриналмаштириш* $123 \ldots n$ *сонларга нисбатан жуфт ўриналмаштириш бўлса, мусбат бирга тенг,* 3) $ijk \ldots s$ *индекслар ҳосил қилган ўриналмаштириш* $123 \ldots n$ *сонларга нисбатан тоқ ўриналмаштириш бўлса, манфий бирга тенг бўлади.*

Бирлик псевдотензорнинг нолга тенг бўлмаган компонентларининг сони N $1, 2, 3 \ldots, n$ сонлардан ҳосил қилинган ўриналмаштиришлар сонига тенгдир, яъни:

$$N = n! = 1.2.3.4 \ldots n.$$

Уч ўлчовли фазода қўшиш, айириш, кўпайтириш, йиғиштириш, симметриялаш, альтернациялаш, дифференциаллаш амаллари n ўлчовли фазо учун ҳам аввалгидек қолаверади.

n ўлчовли фазода градиент, дивергенция, уюрма, лапласиан тушунчалари умумлаштирилади. Масалан, скаляр функция градиентининг компонентлари $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, вектор дивергенцияси $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ вектор уюрмасининг компонентлари $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$, лапласиан эса $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ бўлади. Ҳар бир индекснинг 1,2,3, ... n қийматларга эга бўлиши назарда тутилиши лозим.

n ўлчовли фазонинг Декарт ортларини $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ орқали белгиласак, нуқтанинг радиус-вектори учун бундай ёзамиз:

$$\boldsymbol{r} = x_j \boldsymbol{e}_j, \tag{56.8}$$

бу ерда x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ шу нуқтанинг Декарт координаталаридир. Бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтишда тегишли радиус-векторлар айирмаси, яъни уларнинг нисбий радиус-вектори:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x_j \boldsymbol{e}_j \tag{56.9}$$

бўлади, бу ерда $\Delta x_j (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ шу нуқталар координаталарининг айирмаларидир.

Икки нуқта орасидаги масофани Δs орқали белгилайлик:

$$\Delta s^2 = (\Delta \boldsymbol{r} \Delta \boldsymbol{r}) = (\Delta x_i \boldsymbol{e}_i, \Delta x_j \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) \Delta x_i \Delta x_j. \tag{56.10}$$

Янги белги киритайлик:

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j), \tag{56.11}$$

у вақтда:

$$\Delta s^2 = g_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{56.12}$$

бўлади. g_{ij} символ аслида иккинчи рангли тензордир. Ҳақиқатан, координаталарнинг янги системасида:

$$g'_{ij} = (e'_i e'_j)$$

бўлади, демак, (56.1) га биноан:

$$g'_{ij} = (e'_i e'_j) = (\alpha_{im} e_m, \alpha_{jn} e_n) =$$
$$= \alpha_{im} \alpha_{jn} (e_m e_n) = \alpha_{im} \alpha_{jn} g_{mn}.$$

Бу g_{ij} *тензор метрик тензор* дейилади. Декарт ортлари ўзаро перпендикуляр бўлганлиги сабабли, метрик тензорнинг турли индексли компонентлари нолга тенгдир. Лекин текширилаётган фазонинг характерига қараб, метрик тензорнинг бир хил индексли компонентлари ё мусбат бирга, ёки манфий бирга тенг бўлиши мумкин.

Квадрати манфий бирга тенг ортни мавҳум орт деб, у аниқлаган ўқни эса мавҳум ўқ деб атаймиз.

n-та ортдан m таси мавҳум бўлса, масофа квадратининг формуласи (56.12) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta s^2 = -\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 - \cdots - \Delta x_m^2 + \Delta x_{m+1}^2 + \Delta x_{m+2}^2 +$$
$$+ \cdots + \Delta x_n^2. \tag{56.13}$$

Ортлар ичида мавҳуми ҳеч бўлмаса, бундай ёзилади:

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2. \tag{56.14}$$

Масалан, уч ўлчовли фазодаги Декарт ортлари e_1, e_2, e_3 учун метрик тензор компонентлари мана бундайдир:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0,$$
$$g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1, \quad g_{23} = 0,$$
$$g_{31} = 0, \quad g_{32} = 0, \quad g_{33} = 1,$$

у вақтда:

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{56.15}$$

бўлади. *Бу формула одатдаги Эвклид геометрияси учун хосдир.*

Масофа квадрати Δs^2 инвариантдир. Масофа квадратини ифодаловчи (56.12) формуланинг инвариантлигини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан, алмаштириш формулалари ва ортогоналлик шартидан фойдалансак, қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$g'_{mn}\Delta x'_m \Delta x'_n = \alpha_{mi}\alpha_{nj}g_{ij}\alpha_{mk}\Delta x_k \alpha_{ne}\Delta x_e =$$

$$= \alpha_{mi}\alpha_{mk}\alpha_{nj}\alpha_{ne}g_{ij}\Delta x_k \Delta x_e = \delta_{ik}\delta_{je}g_{ij}\Delta x_k \Delta x_e = g_{ij}\Delta x_i \Delta x_j.$$

Икки нуқтаси орасидаги масофа квадрати (56.14) *да ифодаланган n-ўлчовли фазо n-ўлчовли Эвклид фазоси дейилади. Икки нуқтаси орасидаги масофа квадрати* (56.13) *да ифодаланган n-ўлчовли фазо n-ўлчовли Эвклид псевдофазоси дейилади.*

Эвклид геометриясида оддий уч ўлчовли фазодаги икки нуқта орасидаги масофа Δs мусбат сондир; демак, унинг Δs^2 квадрати ҳам, мусбат сон бўлади.

Аммо кўп ўлчовли фазо билан боғлиқ бўлган текширишларда икки нуқта орасидаги масофа квадрати ё мусбат, ёки манфий, ёхуд ноль бўлиши мумкин. Бу ҳолда масофанинг ўзи ё ҳақиқий, ёки мавҳум ёхуд ноль бўлади. Ўзаро масофаси ноль бўлган нуқталар кўп ўлчовли фазонинг турли жойларидаги нуқталар бўлиши ҳам мумкин. Демак, векторнинг узунлиги ё ҳақиқий, ё мавҳум ёки ноль бўлиши мумкин. *Компонентлари ноль бўлмаса-да, лекин узунлиги нолга тенг вектор изотроп вектор дейилади.*

Кўп ўлчовли фазо мисоли сифатида физикадаги воқеалар фазосини кўрсатиб ўтиш мумкин. *Оддий, уч ўлчовли фазода тайин бир нуқтада тайин бир вақтда рўй берувчи ҳодиса воқеа деб аталади.* Воқеа учта x, y, z координата ва t вақтга боғлиқ.

Инерциал системаларда физик процессларни текширишлар ҳар қандай икки воқеа учун ушбу инвариантнинг мавжудлигини кўрсатади:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + c^2\Delta t^2, \tag{56.16}$$

бу ерда c — ёруғликнинг вакуумда (бўшлиқда) тарқалиш тезлиги $\left(c = 3\cdot 10^{10}\,\frac{см}{сек}\right)$. Юқоридаги формулада ифодаланган инвариант нисбийлик назариясида муҳим роль ўйнайди.

Агар:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict\ \ (i = \sqrt{-1}) \tag{56.17}$$

қилиб олинса, (56.16) бундай ёзилади:

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2. \tag{56.18}$$

Бу ерда ҳамма ўқлар ҳақиқий бўлиб, вақтга боғлиқ координатагина мавҳумдир. Воқеалар фазоси бу ерда тўрт ўлчовли Эвклид фазоси бўлади.

Агар:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ct. \tag{56.19}$$

қилиб олинса, (56.16) бундай ёзилади:

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta x_4^2. \qquad (56.20)$$

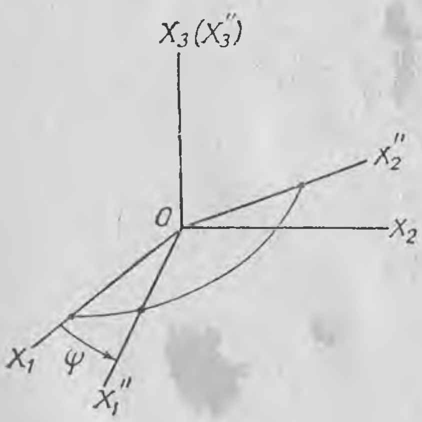
Бу ерда вақтга боғлиқ координатага мос ўқ мавҳум бўлиб, ҳамма координаталар ҳақиқийдир. Воқеалар фазоси бу ерда тўрт ўлчовли Эвклид псевдофазоси бўлади.

Хусусий нисбийлик назариясини математик ўрганишда ё (56.18) ёки (56.20) формула асос қилиб олинади.

Тўрт ўлчовли фазо учун бирлик псевдотензор ε_{ijkl} компонентларининг сони $N = 4^4 = 256$ бўлади. Лекин булардан нолга тенг эмаслари фақат $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ дир.

57. БАЪЗИ ҚЎШИМЧАЛАР ВА ТАТБИҚЛАР

I. Эйлер бурчаклари. Декарт ортларини алмаштириш ҳақида гапирилганда Эйлер бурчаклари тилга олиб ўтилган эди. Энди шу Эйлер бурчаклари тушунчаси билан танишиб чиқмоқчимиз.



162- расм.

Масалан, ўнг ориентацияли икки Декарт системасининг боши битта нуқтада деб фараз қилайлик. У вақтда тубандагича учта айлантириш натижасида биринчи $Ox_1x_2x_3$ системадан иккинчи $Ox_1'x_2'x_3'$ системани ҳосил қилиш мумкин.

Айланиш ўқи билан айланиш йўналиши ўзаро, албатта, ўнг ориентация ҳосил қилади.

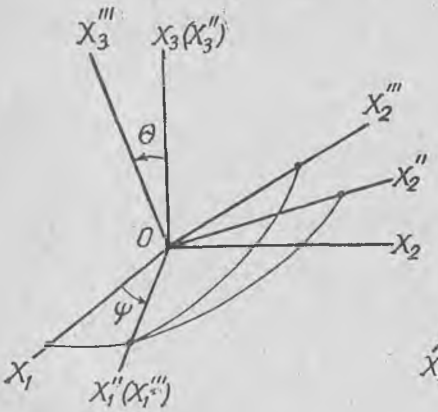
1) Биринчи $Ox_1x_2x_3$ системани Ox_3 ўқ атрофида ψ бурчакка айлантирсак, янги $Ox_1''x_2''x_3''$ система ҳосил бўлади (162- расм).

2) Сўнгги янги $Ox_1''x_2''x_3''$ системани Ox_1'' ўқ атрофида θ бурчакка айлантирсак $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ система ҳосил бўлади (163- расм).

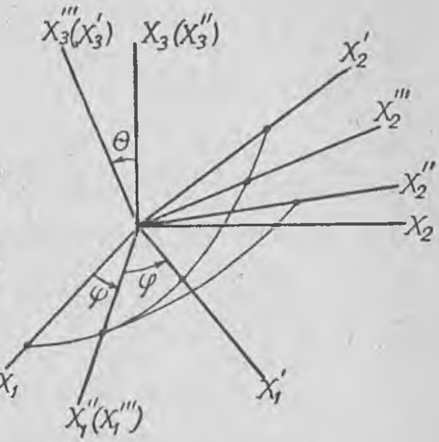
3) Ниҳоят, энг сўнгги $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ системани Ox_3''' ўқ атрофида φ бурчакка айлантирсак, берилган иккинчи $Ox_1'x_2'x_3'$ система келиб чиқади (164- расм).

Ёрдамчи $Ox_1''x_2''x_3''$ ва $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ системаларни олиб ташласак, биринчи $Ox_1x_2x_3$ системадан иккинчи $Ox_1'x_2'x_3'$ системага ўтишни янада яққолроқ тасвирлаш мумкин (165- расм).

Юқоридаги айланиш бурчаклари ψ, φ, θ *Эйлер бурчаклари дейилади.* Эйлер бурчакларидан биринчиси ψ *прецессия бурчаги,* иккинчиси θ ***нутация бурчаги,*** учинчиси φ эса — *соф айланиш бурчаги* дейилади. x_1Ox_2 *координат текислик билан* $x_1'Ox_2'$ *координат текислик кесишган* ON *чизиқ тугун чизиғи ва бу чизиққа мос олинган ўқ* ($\overrightarrow{ON}$) *тугун ўқи деб аталади.*



163- расм.



164- расм.

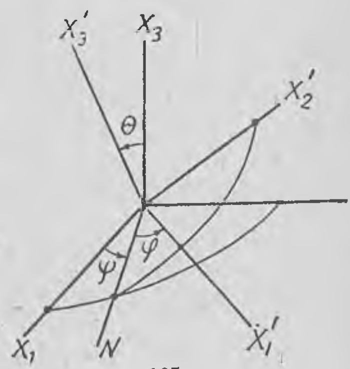
II. Ортогонал алмаштириш коэффициентларининг Эйлер бурчаклари орқали ифодаланиши. Ортогонал алмаштириш коэффициентларини Эйлер бурчаклари орқали ифодалаш мумкин. Декарт координаталарини алмаштириш формуласи:

$$x_i' = \alpha_{ij}\, x_j$$

даги α_{ij} коэффициент Ox_i' ўқ билан Ox_j ўқ орасидаги бурчак косинусидир.

$Ox_1x_2x_3$ системадан $Ox_1''x_2''x_3''$ системага ўтишда алмаштириш формуласи:

$$x_i'' = \beta_{ij}\, x_j$$



165- расм.

даги β_{ij} коэффициентларни 162- расмдан фойдаланиб топамиз:

$$\beta_{11}=\cos\psi, \beta_{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\sin\psi, \beta_{13}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

$$\beta_{21}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=-\sin\psi,\ \beta_{22}=\cos\psi, \beta_{23}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\beta_{31}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \beta_{32}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \beta_{33}=\cos 0=1.$$

Буларни ўз ўринларига қўйсак:

$$x_1''=x_1\cos\psi+x_2\sin\psi,\ x_2''=-x_1\sin\psi+x_2\cos\psi,\ x_3''=x_3$$

бўлади. $Ox_1''x_2''x_3''$ системадан $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ системага ўтишда алмаштириш формуласи:

$$x_i'''=\gamma_{ij}x_j''$$

даги γ_{ij} коэффициентларни 163- расмдан фойдаланиб топамиз:

$$\gamma_{11}=\cos 0=1,\ \gamma_{12}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \gamma_{13}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\gamma_{21}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \ \gamma_{22}=\cos\theta,\ \gamma_{23}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,$$

$$\gamma_{31}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \gamma_{32}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\ \gamma_{33}=\cos\theta.$$

Буларни ўз ўринларига қўямиз:

$$x_1'''=x_1'',\ x_2'''=x_2''\cos\theta+x_3''\sin\theta,\ x_3'''=-x_2''\sin\theta+x_3''\cos\theta$$

бўлади ва x_1'', x_2'', x_3'' нинг x_1, x_2, x_3 орқали юқорида топилган қийматларини назарда тутсак:

$$x_1'''=x_1\cos\psi+x_2\sin\psi,\ x_2'''=(-x_1\sin\psi+x_2\cos\psi)\cos\theta+x_3\sin\theta,$$
$$x_3'''=-(-x_1\sin\psi+x_2\cos\psi)\sin\theta+x_3\cos\theta$$

бўлади. Ниҳоят, $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ системадан $Ox_1'x_2'x_3'$ системага ўтишда алмаштириш формуласи:

$$x_i'=\lambda_{ij}x_j'''$$

даги λ_{ij} коэффициентларни 164- расмдан фойдаланиб топамиз:

$$\lambda_{11}=\cos\varphi,\ \lambda_{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,\ \lambda_{13}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\lambda_{21}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi,\ \lambda_{22}=\cos\varphi,\ \lambda_{23}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\lambda_{31}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \lambda_{32}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \lambda_{33}=\cos 0=1.$$

Буларни ўз ўринларига қўямиз:

$$x_1' = x_1''' \cos\varphi + x_2''' \sin\varphi,$$
$$x_2' = -x_1''' \sin\varphi + x_2''' \cos\varphi,$$
$$x_3' = x_3'''.$$

Энди x_1''', x_2''', x_3''' билан x_1, x_2, x_3 нинг боғланиш формулаларидан фойдалансак:

$$x_1' = (x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi)\cos\varphi + \{(-x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi)\cos\theta + \\ + x_3 \sin\theta\}\sin\varphi,$$
$$x_2' = -(x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi)\sin\varphi + \{(-x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi)\cos\theta + \\ + x_3 \sin\theta\}\cos\varphi,$$
$$x_3' = -(-x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi)\sin\theta + x_3 \cos\theta$$

бўлади. Бу тенгликларнинг ўнг томонларидаги қавсларни очиб юбориб, сўнгра бир хил координатали ҳадларни тўпласак, натижада:

$$x_1' = x_1(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta) + x_2(\sin\psi\cos\varphi + \\ + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta) + x_3(\sin\varphi\sin\theta),$$
$$x_2' = x_1(-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) + x_2(-\sin\psi\sin\varphi + \\ + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) + x_3(\cos\varphi\sin\theta),$$
$$x_3' = x_1(\sin\psi\sin\theta) + x_2(-\cos\psi\sin\theta) + x_3\cos\theta$$

бўлади. Бу формулалар, дастлабки x_j координаталарни янги x_i координаталар билан алмаштириш α_{ij} коэффициентларини Эйлер бурчаклари ёрдамида аниқлайди. Шундай қилиб:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
\alpha_{12} &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
\alpha_{13} &= \sin\varphi\sin\theta,\\
\alpha_{21} &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
\alpha_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
\alpha_{23} &= \cos\varphi\sin\theta,\\
\alpha_{31} &= \sin\psi\sin\theta,\\
\alpha_{32} &= -\cos\psi\sin\theta,\\
\alpha_{33} &= \cos\theta
\end{aligned} \tag{57.1}$$

булади.

III. Иккинчи рангли тензор — учта вектор тўплами. Иккинчи рангли тензор компонентларини алмаштириш формуласи бизга маълум:

$$T'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kn}T_{mn} \tag{57.2}$$

T'_i векторнинг e'_k орт йўналишидаги компоненти T'_{ik} бўлади, T_m векторнинг e_n орт йўналишидаги компоненти эса T_{mn} бўлади:

$$T'_{ik} = (T'_i\, e'_k),$$
$$T_{mn} = (T_m\, e_n)$$

Буларни (57. 2) га қўямиз:

$$(T'_i\, e'_k) = \alpha_{im}\, \alpha_{kn}\, (T_m\, e_n) = \alpha_{im}\, (T_m\, \alpha_{kn}\, e_n).$$

Лекин:

$$e'_k = \alpha_{kn}\, e_n.$$

Демак:

$$(T'_i\, e'_k) = \alpha_{im}\, (T_m\, e'_k).$$

e'_k орт ихтиёрий бўлганлигидан:

$$T'_i = \alpha_{im}\, T_m \tag{57.3}$$

бўлади.

Шундай қилиб, *иккинчи рангли тензор ана шу алмаштириш қонунига бўйсунган учта вектор тўпламига эквивалентдир.* Аксинча, (53.3) дан (57. 2) ни келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан, (57.3) нинг икки томонини e'_k ортга скаляр равишда кўпайтирайлик:

$$(T'_i\, e'_k) = \alpha_{im}\, (T_m\, e'_k) = \alpha_{im}\, (T_m\, \alpha_{kn}\, e_n) =$$
$$= \alpha_{im}\, \alpha_{kn}\, (T_m\, e_n)$$

ёки

$$T'_{ik} = \alpha_{im}\, \alpha_{kn}\, T_{mn},$$

бу эса (57.2) нинг ўзидир.

Иккинчи рангли T_{ik} тензорни ${}^2T$ ёки ${}^{(2)}T$ шаклда ҳам ёзишади.

IV. Гаусс—Остроградский формуласини тензорга мослаштириш. Электродинамикада, узлуксиз муҳитлар механикасида иккинчи рангли тензорга мослаштирилган Гаусс—Остроградский формуласи билан иш кўрилади.

Иккинчи рангли тензорни учта вектор тўплами деб қараш мумкинлиги бизга маълум:

$$T'_i = \alpha_{im}\, T_m, \tag{57.4}$$

бу ерда:

$$\alpha_{im} = (e'_i\, e_m) \tag{57.5}$$

ва

$$T_m = T_{mj}\, e_j. \tag{57.6}$$

Янги e_i ортни танлаб олиш бизнинг ихтиёримизда. Масалан, элементар юз нормалининг орти $\boldsymbol{n}$ ($d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS$) янги орт сифатида қабул қилиниши мумкин. У вақтда:

$$\alpha_{nm} = (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{e}_m) \qquad (57.7)$$

ва нормаль йўналишига мос олинган векторимизни $\boldsymbol{T}_n$ орқали белгиласак, (57.4) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{T}_n = \alpha_{nm}\, \boldsymbol{T}_m \qquad (57.8)$$

бўлади. Нормаль орти сифатида янги ортлар қабул қилинса, бу формула яна аввалги (57.4) формула шаклини олади. Сўнгги учта формуладан:

$$\boldsymbol{T}_n = (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{e}_m) T_{mj} \boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{n}\, T_{mj} \boldsymbol{e}_m) \boldsymbol{e}_j$$

бўлади.

Бу ифодадан ёпиқ сирт бўйича интеграл олайлик:

$$\oint \boldsymbol{T}_n\, dS = \oint (\boldsymbol{n}\, T_{mj} \boldsymbol{e}_m)\, \boldsymbol{e}_j\, dS.$$

Гаусс—Остроградский теоремасига биноан:

$$\oint (\boldsymbol{n}\, T_{mj} \boldsymbol{e}_m)\, dS = \int \operatorname{div}(T_{mj} \boldsymbol{e}_m)\, dV.$$

Лекин, вектор дивергенциясининг таърифига мувофиқ:

$$\operatorname{div}(T_{mj} \boldsymbol{e}_m) = \frac{\partial T_{mj}}{\partial x_m},$$

у вақтда:

$$\oint (\boldsymbol{n}\, T_{mj} \boldsymbol{e}_m)\, dS = \int \frac{\partial T_{mj}}{\partial x_m}\, dV.$$

Шундай қилиб:

$$\oint \boldsymbol{T}_n\, dS = \int \frac{\partial T_{mj}}{\partial x_m} \boldsymbol{e}_j\, dV = \int \frac{\partial}{\partial x_m} (T_{mj} \boldsymbol{e}_j)\, dV = \int \frac{\partial \boldsymbol{T}_m}{\partial x_m}\, dV \qquad (57.9)$$

бўлади.

Иккинчи рангли тензорнинг координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилалари учинчи рангли тензор ҳосил қилиши бизга маълум. Бу тензор координата индекси билан қолган икки индекслардан бири бўйича йиғиштирилганда ҳосил бўлган биринчи рангли тензорнинг (яъни векторнинг) берилган иккинчи рангли тензор дивергенцияси дейилиши маълум. Иккинчи рангли тензор дивергенциясини $\operatorname{div}^{(2)} \boldsymbol{T}$ билан белгилайлик:

$$\operatorname{div}^{(2)} \boldsymbol{T} = \frac{\partial T_{mj}}{\partial x_m} \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_m} (T_{mj} \boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial \boldsymbol{T}_m}{\partial x_m}. \qquad (57.10)$$

Демак, иккинчи рангли тензор дивергенциясининг компонентлари тубандагичадир:

$$(\mathrm{div}\,^{(2)}\boldsymbol{T})_j = \frac{\partial T_{mj}}{\partial x_m} \tag{57.11}$$

ёки муфассалроқ ёзилса:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\,^{(2)}\boldsymbol{T})_1 &= \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3},\\
(\mathrm{div}\,^{(2)}\boldsymbol{T})_2 &= \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3},\\
(\mathrm{div}\,^{(2)}\boldsymbol{T})_3 &= \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{57.12}$$

бўлади. (57.9) ва (57.10) га биноан:

$$\oint \boldsymbol{T}_n\, dS = \int \mathrm{div}\,^{(2)}\boldsymbol{T} dV \tag{57.13}$$

бўлади. *Иккинчи рангли тензор учун мослаштирилган Гаусс—Остроградский формуласи ана шундан иборат.*

V. Тензордан девиатор ва сферик тензор тузиш. Иккинчи рангли ҳар қандай тензордан чизиқли инварианти нолга тенг бўлган иккинчи рангли янги тензор ҳосил қилиш мумкин.

Ҳақиқатан, берилган тензор T_{ij} бўлсин. Унинг чизиқли инварианти, таърифга мувофиқ (52- параграф):

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

булади. Инвариант $\frac{1}{3} I_1$ билан бирлик тензор δ_{ij} кўпайтмаси иккинчи рангли тензор ҳосил қилади:

$$S_{ij} = \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}. \tag{57.14}$$

Дастлабки берилган T_{ij} ва сўнгги S_{ij} тензорлар айирмаси ҳам иккинчи рангли тензор ҳосил қилади:

$$D_{ij} = T_{ij} - S_{ij}. \tag{57.15}$$

Бу тензорнинг чизиқли инвариантини топиш учун, $i = j$ қилиб, уни йиғиштириш керак:

$$D_{ii} = T_{ii} - S_{ii} =$$
$$= I_1 - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ii} = I_1 - \frac{1}{3} I_1(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) = I_1 - \frac{1}{3} I_1(1 + 1 + 1) = 0.$$

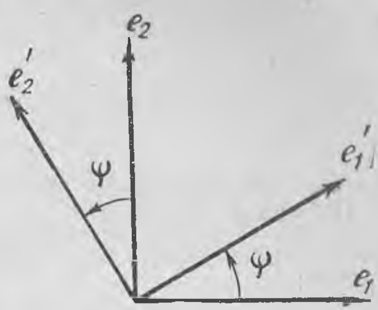
Натижада, изланган тензорни топдик. Энди (57.15) ни бундай ёзайлик:

$$T_{ij} = S_{ij} + D_{ij}. \tag{57.16}$$

Чизиқли инварианти нолга тенг бўлган D_{ij} тензор девиатор деб юритилади (52-параграф).

Ҳар хил индексли компонентлари нолга тенг ва бир хил индексли компонентлари ўзаро тенг бўлган S_{ij} тензор сферик тензор дейилади (52-параграф).

Шундай қилиб, (57.16) га мувофиқ, *иккинчи рангли ҳар қандай тензорни девиатор ва сферик тензор йиғиндиси деб ҳисоблаш мумкин.*



166- расм.

VI. Верзор. Декарт координаталари системасининг e_3 орти қоғоз бетига перпендикуляр бўлиб, китобхонга қаратилсин (166- расм).

Бу системани e_3 орт атрофида ψ бурчакка буриб, янги система ҳосил қилиш мумкин. Алмаштириш коэффициентлари $\alpha_{ij} = (e_i' e_j)$ тубандагича қийматларга эгадир:

$$\alpha_{11} = \cos\psi,\ \alpha_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi,\ \alpha_{13} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\alpha_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin\psi, \alpha_{22} = \cos\psi, \alpha_{23} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\alpha_{31} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \alpha_{32} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \alpha_{33} = \cos 0 = 1.$$

Бурилувчи система билан мустаҳкам боғланган бирор $\boldsymbol{a}$ векторнинг узунлиги ўзгармайди, аммо фазодаги йўналиши бошқа бўлади. Узунлиги $\boldsymbol{a}$ вектор узунлигига тенг бўлиб, шу йўналишдаги векторни A орқали белгилайлик. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$ векторлар ва иккинчи рангли V_{ij} тензор қуйидагича боғланган бўлсин:

$$A_i = V_{ij}\ a_j,$$

бу ерда:

$$A_i = (A\,e_i),\ a_j = (\boldsymbol{a}\ e_j).$$

$\boldsymbol{A}$ векторни e_k' орт йўналишида ва $\boldsymbol{a}$ векторни e_k орт йўналишида олсак, яъни:

$$A = a\,e_k',\ \boldsymbol{a} = a\,e_k$$

бўлса:

$$A_i = a\ (e_k' e_i),\ a_j = a\ (e_k\ e_j)$$

бўлади. У вақтда:

$$(e_k'\ e_i) = V_{ij}\ (e_k\ e_j)$$

ёки:

$$\alpha_{ki} = V_{ij}\,\delta_{kj} = V_{ik} \tag{57.17}$$

келиб чиқади.

Юқорида топилган α_{ki} коэффициентлардан тузилган тензор V_{ij} компонентларини матрица шаклида ёзайлик:

$$\|V_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{57.18}$$

Ана шу тензор верзор деб аталади.

Ортогоналлик шарти:

$$\alpha_{ji}\ \alpha_{ki} = \delta_{jk}$$

ўрнига:

$$V_{ij}\ V_{ik} = \delta_{jk}$$

бўлади.

Энди, верзор воситасида $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{A}$ векторга ва $\boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{B}$ векторга ўтсин, яъни:

$$A_i = V_{ij}\ a_j,$$

$$B_i = V_{ik}\ b_k$$

бўлсин, у вақтда:

$$A_i B_i = V_{ij} a_j V_{ik} b_k = V_{ij} V_{ik} a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k = a_j b_j = a_i b_i$$

ёки

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}) \tag{57.19}$$

бўлади. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ бўлган ҳолда:

$$A^2 = a^2$$

келиб чиқади, *яъни верзор воситасида аввалги ҳолатдан сўнгги ҳолатга ўтган вектор узунлиги ўзгармайди.*

(57.19) га биноан, *верзор воситасида бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтган икки векторнинг узунликлари ва орасидаги бурчаги ўзгармайди.* Қаттиқ жисм механикасини ўрганишда верзор муҳим аҳамиятга эгадир.

Верзорни симметриялаш ва альтернациялаш мумкин:

$$\|S_{ij}\| = \left\|\frac{1}{2}(V_{ij} + V_{ji})\right\| = \begin{Vmatrix} \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\|R_{ij}\| = \left\|\frac{1}{2}(V_{ij} - V_{ji})\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Бурилиш бурчаги чексиз кичик бўлса, $\sin\psi$ ўрнига $\delta\psi$ ва $\cos\psi$ ўрнига 1 олишимиз мумкин, демак:

$$\|S_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\|R_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -\delta\psi & 0 \\ \delta\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Равшанки:

$$A_i = V_{ij} a_j = (S_{ij} + R_{ij})\ a_j.$$

Бу ердан:

$$A_1 = a_1 - \delta\psi a_2,$$
$$A_2 = \delta\psi a_1 + a_2,$$
$$A_3 = a_3$$

ёки

$$A_1 = a_1 + [\delta\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}]_1,$$
$$A_2 = a_2 + [\delta\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}]_2,$$
$$A_3 = a_3 + [\delta\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}]_3,$$

яъни:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + [\delta\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}]$$

бўлади. Бу формулада $\delta\boldsymbol{\psi}$ — чексиз кичик бурилиш бурчагининг вектори.

Юқорида айтилганлардан равшанки, чекли бурчакка бурилиш верзор воситасида, аммо чексиз кичик бурчакка бурилиш вектор воситасида ифодаланади. Бу ҳақда векторлар алгебрасида ҳам айтиб ўтилган эди.

VII. Кинетик энергиянинг инерция моментлари тензори орқали ифодаланиши. Ўзининг бирор нуқтаси атрофида айланувчи қаттиқ жисмни олайлик. Жисмнинг айланиш нуқтасини координаталар боши деб ҳисоблайлик. Жисмга тегишли бирор нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ бўлсин. Ўша нуқтанинг чизиқли тезлик вектори $\boldsymbol{v}$ билан бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ орасидаги боғланиш маълум:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{r}].$$

Жисмнинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm,$$

бу ерда dm — элементар масса. Энди:

$$v^2 = (v\,v) = (v[\omega r])$$

ёки аралаш кўпайтманинг хоссасига биноан:

$$v^2 = (\omega[r\,v]),$$

v ўрнига $[\omega\ r]$ ни қўяйлик:

$$v^2 = (\omega[r[\omega\,r]]).$$

Бу ердаги икки қайтали вектор кўпайтмани ажратиб ёзайлик:

$$[r[\omega\,r]] = \omega\,r^2 - r\,(\omega\,r).$$

У вақтда аввалги формула бундай ёзилади:

$$v^2 = \omega^2 r^2 - (\omega\,r)\ (\omega\,r)$$

ёки

$$v^2 = \omega_i\,\omega_j\,\delta_{ij}\,x_k\,x_k - \omega_i\,x_i\,\omega_j\,x_j =$$
$$= (\delta_{ij}\,x_k\,x_k - x_i\,x_j)\,\omega_i\,\omega_j,$$

чунки:

$$\omega^2 = \omega_i\,\omega_j\,\delta_{ij},$$
$$(\omega\,r) = \omega_i\,x_i = \omega_j\,x_j,$$
$$r^2 = x_k\,x_k.$$

Шундай қилиб:

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int(\delta_{ij}x_k\,x_k - x_i\,x_j)\,\omega_i\,\omega_j\,dm$$

ёки

$$T = \frac{1}{2}\left\{\int(\delta_{ij}\,x_k\,x_k - x_i\,x_j)\,dm\right\}\ \omega_i\,\omega_j$$

бўлади.

Тензорлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ (53- параграф), бу ердаги интеграл иккинчи рангли тензор бўлади, чунки T инвариант ва $\omega_i\,\omega_j$ иккинчи рангли тензордир. Интеграл шаклидаги бу тензор инерция моментлари тензори деб аталган эди (ўша параграфда):

$$I_{ij} = \int(\delta_{ij}\,x_k\,x_k - x_i\,x_j)\,dm. \tag{57.20}$$

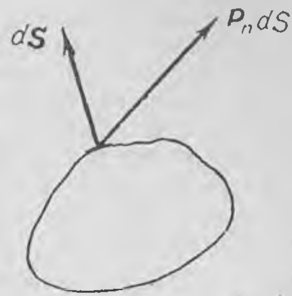
Шундай қилиб:

$$T = \frac{1}{2}I_{ij}\ \omega_i\,\omega_j \tag{57.21}$$

бўлади, яъни қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси унинг инерция моментлари тензори орқали ифодаланди.

VIII. Эластик кучланишлар тензори. Бирор куч таъсир қилмаса, жисмнинг ҳар бир қисми мувозанатда туради. Кучлар таъсирида жисм қисмларининг бир-бирига нисбатан мувозанати бузилиши мумкин.

Жисм ҳажми ёки шаклининг ўзгариши унинг деформацияси дейилади. Деформацияланган жисмнинг аввалги шакли ва ҳажмига интилиш хусусияти унинг эластиклиги дейилади. Деформация натижасида жисм қисмларида пайдо бўлган ўзаро таъсир кучлари жисмнинг эластик кучланишлари деб юритилади. Жисмнинг бирор қисмига унинг қолган қисмлари томонидан таъсир қилувчи куч шу қисмни чегараловчи ёпиқ сирт орқалигина мумкин (167-расм).



167-расм.

Сирт элементи орқали таъсир қилувчи куч шу сирт элементининг қийматига ва йўналишига боғлиқдир.

Нормалининг орти $\boldsymbol{n}$ *бўлган юз бирлигига мос кучни эластик кучланиш вектори дейлик ва уни* $\boldsymbol{P}_n$ *орқали белгилайлик.* У вақтда dS сирт элементи орқали таъсир қилувчи куч $\boldsymbol{P}_n\,dS$ бўлади. Эластик кучланиш вектори $\boldsymbol{P}_n$ ва нормаль орти $\boldsymbol{n}$, умуман олганда, ўзаро коллинеар эмас. Лекин нормаль ортининг ўзгариши билан эластик кучланиш векторининг қиймати ва йўналиши ўзгариши мумкин. Жисмнинг ҳар бир нуқтасига нормаль орти $\boldsymbol{n}$ га мос ўзининг эластик кучланиш вектори $\boldsymbol{P}_n$ тўғри келади. Демак, жисмнинг ҳар бир нуқтасида учта декарт орти $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ га учта $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ эластик кучланиш векторлари мос келади. Бу учта вектор тўплами аслида иккинчи рангли тензор ҳосил қилади.

Ҳақиқатан ҳам, деформацияланган жисмнинг бирор ёпиқ сирт билан чегараланган қисмига таъсир қилувчи куч шу ёпиқ сирт элементлари орқали таъсир қилувчи эластик кучлар йиғиндиси $\oint \boldsymbol{P}_n\,dS$ га тенг бўлади.

Лекин маълум (57.9) формулага биноан:

$$\oint \boldsymbol{P}_n dS = \int \operatorname{div} {}^{(2)}\boldsymbol{P} dV, \tag{57.22}$$

бу ерда ${}^{(2)}\boldsymbol{P}$ — иккинчи рангли тензор:

$$\|{}^{(2)}\boldsymbol{P}\| = \left\|\begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{matrix}\right\|. \tag{57.23}$$

Шу тензор жисмнинг эластик кучланишлар тензори дейилади.

Эластик кучланиш вектори $\boldsymbol{P}_n$ *нинг нормал (яъни юзга перпендикуляр) йўналишидаги компоненти нормал кучланиш деб, нормалга перпендикуляр (яъни юзга уринма) компоненти эса уринма кучланиш деб аталади.*

Масалан, қирралари Декарт ўқлари ҳисобланган чексиз кичик параллелепипед шаклидаги жисм элементини олайлик. У вақтда P_{11}, P_{22}, P_{33} — нормал кучланишлар ва P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{23}, P_{31}, P_{32} — уринма кучланишлар бўлади. Нормал кучланишларга параллелепипеднинг кенгайиши ёки сиқилиши, уринма кучланишларга эса параллелепипед ёқларининг бир-бирига нисбатан сурилиши мос келади.

IX. Узлуксиз муҳит механикасининг асосий дифференциал тенгламаси. Эластик жисмнинг масса зичлиги ρ ва масса бирлигига таъсир қилувчи ташқи куч $\boldsymbol{f}$ бўлсин. Тезланиш вектори $\boldsymbol{w}$ десак, инерция кучларининг зичлиги $-\rho\boldsymbol{w}$ бўлади. Эластик жисмнинг ёпиқ сирт билан чегараланган қисмига таъсир қилувчи кучлар қуйидагилардан иборат: 1) ташқи кучлар $\int \rho \boldsymbol{f} dV$, 2) инерция кучлари $-\int \rho \boldsymbol{w} dV$, 3) эластик кучлар $\oint \boldsymbol{P}_n dS$.

Ёпиқ сирт билан чегараланган жисм қисмининг мувозанатда бўлиши учун, Даламбер принципига биноан, бу кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим:

$$\int \rho \boldsymbol{f} dV - \int \rho \boldsymbol{w} dV + \oint \boldsymbol{P}_n \, dS = 0.$$

Эластик кучланиш вектори $\boldsymbol{P}_n$ билан эластик кучланишлар тензори ${}^{(2)}\boldsymbol{P}$ нинг ўзаро боғланиш формуласини биламиз (57.22):

$$\int \boldsymbol{P}_n \, dS = \int \operatorname{div}^{(2)} \boldsymbol{P} dV.$$

У вақтда аввалги тенглама бундай ёзилади:

$$\int (\rho \boldsymbol{f} - \rho \boldsymbol{w} + \operatorname{div}{}^{(2)}\boldsymbol{P})\, dV = 0.$$

Ёпиқ сирт билан чегараланган ҳажм ихтиёрий бўлганлигидан:

$$\rho \boldsymbol{f} - \rho \boldsymbol{w} + \operatorname{div}^{(2)} \boldsymbol{P} = 0$$

ёки

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}^{(2)} \boldsymbol{P} \tag{57.24}$$

бўлади.

Узлуксиз муҳит механикасининг асосий дифференциал тенгламаси ана шундан иборат. Газ ёки суюқлик ҳам узлуксиз муҳитдир. Суюқлик қисмларининг ўзларига тегишли умумий юз бўйича бир-бирига таъсир қилиш хусусияти *суюқликнинг ёпишқоқлиги (ёки ички ишқалиши) дейилади.* Демак, ёпишқоқ суюқлик учун уринма кучланишлар нолдан фарқлидир. Идеал суюқликда босимнинг нормал йўналишига қарама-қаршилиги бизга маълум (45-параграф, VI). Демак, идеал суюқлик учун уринма кучланишлар нолга тенг бўлиб, нормал кучланишлар эса:

$$P_{11} = -P,$$
$$P_{22} = -P,$$
$$P_{33} = -P$$

ёки

$$P_{ij} = -\delta_{ij} P. \qquad (57.25)$$

Иккинчи рангли тензор дивергенцияси таърифига мувофиқ (57.11):

$$\operatorname{div}_i {}^{(2)}\boldsymbol{P} = \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j}$$

бўлади.

У вақтда аввалги формуладан:

$$\operatorname{div}_i {}^{(2)}\boldsymbol{P} = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\delta_{ij}\ P.) = -\frac{\partial P}{\partial x_i},$$

яъни

$$\operatorname{div} {}^{(2)}\boldsymbol{P} = -\operatorname{grad} P \qquad (57.26)$$

келиб чиқади. Ниҳоят, (57.24) формула бундай шаклни олади:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P,$$

яъни илгаридан маълум бўлган идеал суюқликнинг Эйлер дифференциал тенгламаси келиб чиқди (45.28).

X. Эластик кучланишлар тензорининг симметриклиги. Жисмнинг ёпиқ сирт билан чегараланган бирор қисмида мувозанат бўлиши учун, унга таъсир қилувчи кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлиши билан бирга, бу кучларнинг моментлари йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлиши керак. Бундан олдин ташқи кучлар, инерция кучлари ва эластик кучлар ҳақида айтилганлардан фойдаланиб, бундай ёзамиз:

$$\int [\boldsymbol{r}\rho\boldsymbol{f}]\, dV + \int [\boldsymbol{r}, -\rho\,\boldsymbol{w}]\, dV + \oint [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{P}_n]\, dS = 0. \qquad (57.27)$$

Гаусс—Остроградскийнинг умумлаштирилган формуласига биноан (57.9):

$$\oint \boldsymbol{Q}_n dS = \int \frac{\partial}{\partial x_m} \boldsymbol{Q}_m\, dV,$$

$$\oint [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{P}_n]\, dS = \int \frac{\partial}{\partial x_m} [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{P}_m]\, dV \qquad (57.28)$$

бўлади. Энди:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}[r\ P_m] = \left[\frac{\partial r}{\partial x_m} P_m\right] + \left[r\ \frac{\partial P_m}{\partial x_m}\right].$$

Аммо:

$$r = x_m\ e_m,$$

демак:

$$\frac{\partial r}{\partial x_m} = e_m$$

ва (57.10) га мувофиқ:

$$\frac{\partial P_m}{\partial x_m} = \mathrm{div}^{(2)} P.$$

Шундай қилиб:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}[r\ P_m] = [e_m\ P_m] + [r\ \mathrm{div}^{(2)} P].$$

У вақтда (57. 28) бундай шаклни олади:

$$\oint [r\ P_n]\, dS = \int \{[e_m P_m] + [r\ \mathrm{div}^{(2)} P]\}\ dV.$$

Бунга кўра (57.27) ни қайтариб ёзамиз:

$$\int [r \rho f]\, dV + \int [r, -\rho w]\ dV + \int \{[e_m P_m] + [r\, \mathrm{div}^{(2)} P]\}\ dV = 0$$

ёки

$$\int [r, \rho f - \rho w + \mathrm{div}^{(2)} P]\, dV + \int [e_m\ P_m]\, dV = 0.$$

Узлуксиз муҳит механикасининг асосий дифференциал тенгламаси бўлган (57.24) га биноан, сўнгги формуладаги биринчи интеграл нолга тенгдир. Демак:

$$\int [e_m\ P_m]\ dV = 0.$$

Интеграллаш ҳажми ихтиёрий бўлганлигидан:

$$[e_m\ P_m] = 0$$

ёки батафсил ёзсак:

$$[e_1\ P_1] + [e_2\ P_2] + [e_3\ P_3] = 0$$

бўлади. Энди бу тенгламанинг икки томонини e_1 ортга скаляр кўпайтирсак, аралаш кўпайтма ва ортлар хусусиятидан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$(e_1 [e_2 P_2]) + (e_1 [e_3 P_3]) = 0$$
$$(P_2 [e_1 e_2]) + (P_3 [e_1 e_3]) = 0,$$
$$(P_2 e_3) + (P_3, - e_2) = 0,$$
$$P_{23} - P_{32} = 0,$$
$$P_{23} = P_{32}.$$

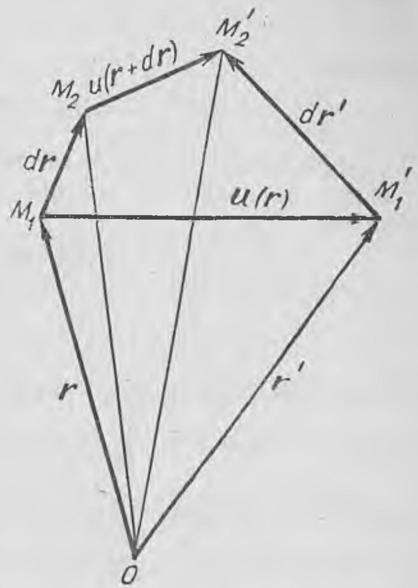
Худди шунингдек, юқоридаги тенгламани e_2 ва e_3 ортларга скаляр кўпайтирсак, натижада $P_{31} = P_{13}$ ва $P_{12} = P_{21}$ бўлади.

Шундай қилиб:

$$P_{ij} = P_{ji}, \tag{57.29}$$

яъни *эластик кучланишлар тензори симметрик тензордир.*

XI. Деформация тензори. Деформация натижасида эластик жисм нуқталарининг вазиятлари ўзгаради. Деформациядан олдин нуқта вазияти M_1 ва унга қўшни нуқта вазияти M_2, M_1 нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ ва M_2 нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ бўлсин. Жисмнинг бу икки нуқтасининг деформациядан сўнгги вазиятлари M_1' билан M_2' ва радиус-векторлари $\boldsymbol{r}'$ билан $\boldsymbol{r}' + d\boldsymbol{r}'$ бўлсин (168-расм).



168-расм.

Деформацияланган жисмнинг турли нуқталари турлича силжийди. Демак, нуқтанинг силжиш вектори шу нуқта вазиятининг функциясидир. Биринчи нуқтанинг силжиш вектори $\boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{r}) = \overrightarrow{M_1M_1'}$, қўшни иккинчи нуқтанинг силжиш вектори $\boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = \overrightarrow{M_2M_2'}$. Қўшни икки нуқтанинг силжиш векторлари $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$ билан $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ нинг ўзаро қандай боғланганлигини текширайлик. 168-расмдан фойдаланиб қуйидагиларни ёзамиз:

$$\overrightarrow{OM_1'} = \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{r}). \tag{57.30}$$

Бу ердан:

$$d\boldsymbol{r}' = d\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{r}). \tag{57.31}$$

Ўша расмдан:

$$\overrightarrow{OM_2'} = \boldsymbol{r}' + d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

ва $\boldsymbol{r}'$ билан $d\boldsymbol{r}'$ ўрнига уларнинг юқоридаги ифодаларини олиб қўйсак:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) + d\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

бўлади, демак:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})+d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}). \tag{57.32}$$

Юқоридаги (57.30) ва (57.31) формулаларни компонентлар орқали ёзайлик:

$$x'_i = x_i + u_i,$$

$$dx'_i = dx_i + du_i$$

ёки

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j, \tag{57.33}$$

чунки:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Деформация натижасида жисмнинг икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгаради. Бу масофа квадрати деформациядан олдин бундай:

$$(dr)^2 = dx_i\, dx_i$$

ва деформациядан сўнг эса бундай:

$$(dr')^2 = dx'_i\, dx'_i = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j\right)\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k\right)$$

бўлади. Қавсларни очиб ёзамиз:

$$(dr')^2 = dx_i dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_j\, dx_k.$$

Йиғиштириш индексини ҳар қандай ҳарф билан кўрсатиб ёзишни биламиз. Юқоридаги тенгликнинг ўнг томонида турган иккинчи ҳадда k индекс ўрнига j ни ёзайлик:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j,$$

сўнгра йиғиштириш индекслари ҳисобланган i, j нинг бири ўрнига иккинчисини ёзамиз:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j dx_i.$$

Тўртинчи ҳадда эса i индекс ўрнига k ни, k ўрнига j ни, j ўрнига i ни ёзайлик:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i\, dx_j,$$

у вақтда:

$$(dr')^2 = dx_i dx_i + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

ёки

$$(dr')^2 = (dr)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) dx_i\, dx_j$$

бўлади. Тенгликнинг ўнг томонида турган иккинчи қавс ичидаги ҳадларнинг ҳар бири иккинчи рангли тензордир, уларнинг йиғиндиси ҳам иккинчи рангли тензор бўлади. Бу йиғинди тензорни 2 u_{ij} орқали белгилайлик:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right), \tag{57.34}$$

демак:

$$(dr')^2 = (dr)^2 + 2u_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{57.35}$$

бўлади. (57.34) *формула воситасида ифодаланган u_{ij} тензор деформация тензори дейилади.* Бу таърифнинг ўзидан равшанки, *деформация тензори симметрик тензордир.*

$$u_{ij} = u_{ji}. \tag{57.36}$$

Кичик деформация натижасида жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофанинг ўзгариши масофанинг ўзидан кичикдир, демак, (57.35) га биноан деформация тензорининг компонентлари ҳам кичик бўлади. (57.34) даги учинчи ҳадни биринчи ва иккинчи кичик ҳадларга нисбатан иккинчи тартибли кичик миқдор бўлганлигидан, эътиборга олмаслигимиз мумкин, демак:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{57.37}$$

Шу формула воситасида ифодаланган u_{ij} тензор кичик деформация тензори дейилади.

Бу тензорни матрица шаклида ёзиб кўрсатайлик:

$$\|u_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{matrix} \right\|. \tag{57.38}$$

Тензорнинг бош ўқлари координата ўқлари деб ҳисобланса:

$$\|u_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{matrix} \right\|$$

бўлади. У вақтда (57.33) га мувофиқ:

$$dx_1' = dx_1 + u_{11}\,dx_1 = (1 + u_{11})\,dx_1,$$
$$dx_2' = dx_2 + u_{22}\,dx_2 = (1 + u_{22})\,dx_2,$$
$$dx_3' = dx_3 + u_{33}\,dx_3 = (1 + u_{33})\,dx_3$$

келиб чиқади. Бундан:

$$\frac{dx_1' - dx_1}{dx_1} = u_{11},$$
$$\frac{dx_2' - dx_2}{dx_2} = u_{22},$$
$$\frac{dx_3' - dx_3}{dx_3} = u_{33}$$

бўлади.

Биринчи бош ўққа параллел олинган кесманинг узунлиги деформациядан олдин dx_1 *ва деформациядан сўнг* dx_1' *бўлсин. Деформация натижасида бу кесманинг нисбий чўзилиши (ёки нисбий қисқариши), демак, деформация тензорининг биринчи бош қиймати* u_{11} *га тенг бўлади. Шунингдек, иккинчи ва учинчи бош ўқларга параллел кесмаларнинг деформация натижасида нисбий чўзилишлари (ёки нисбий қисқаришлари) деформация тензорининг иккинчи ва учинчи бош қийматлари* u_{22}, u_{33} *га мос равишда тенг бўлади.*

Жисмнинг элементар ҳажми тўғри бурчакли параллелепипед шаклида ва унинг қирралари бош ўқларга параллел бўлсин. Бу параллелепипеднинг ҳажми деформациядан олдин $dV = dx_1\,dx_2\,dx_3$ ва деформациядан сўнг $dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$ бўлсин. Юқоридаги формулаларга биноан:

$$dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3' = (1 + u_{11})\ (1 + u_{22})\ (1 + u_{33})\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

бўлади. Бу қавсларни очганда кичик деформацияда u_{11}, u_{22}, u_{33} нинг кичиклиги ва уларнинг кўпайтмалари яна юқори тартибли кичик миқдор бўлиши назарда тутилса, бундай ёзишимиз мумкин:

$$dV' = dV(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33})$$

ёки

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = u_{kk}. \qquad (57.39)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода деформация тензорининг чизиқли инвариантидир. *Шундай қилиб, деформация натижасида жисм элементар ҳажмининг нисбий кенгайиши* *(ёки нисбий торайиши) деформация тензорининг чизиқли инвариантига тенгдир.*

Агар жисмнинг кенгайиши (ёки торайиши) ҳамма йўналишда бир текис бўлса, $u_{11} = u_{22} = u_{33}$ бўлади.

Деформация тензорининг чизиқли инварианти деформация натижасидаги силжиш векторининг дивергенциясидир:

$$u_{kk} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \boldsymbol{u}. \qquad (57.40)$$

У вақтда (57.39) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \operatorname{div} \boldsymbol{u}.$$

XII. Узлуксиз муҳит элементининг бурилиш тензори. Деформация натижасида бир нуқтанинг иккинчи нуқтага нисбатан силжишини ифодаловчи (57.32) формулага қайтайлик. Нуқтанинг силжиш вектори $\boldsymbol{u}$ шу нуқта координаталарининг функциясидир, демак:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j. \qquad (57.41)$$

Равшанки:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (57.42)$$

Бу ердаги иккинчи рангли антисимметрик тензор:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (57.43)$$

билан дуал бўлган псевдовектор (55.21) ни олайлик:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ijk} P_k \qquad (57.44)$$

ёки батафсил ёзсак:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = P_3,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = P_1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = P_2,$$

яъни:

$$\boldsymbol{P} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \qquad (57.45)$$

бўлади. (57.37), (57.44) ни назарга олинса, (57.42) даги муносабат ушбу кўринишга келади:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{ij} + \varepsilon_{ijk} P_k,$$

демак:

$$du_i = u_{ij}\,dx_j + \varepsilon_{ijk}\;P_k\,dx_j. \tag{57.46}$$

Масалан, $i = 1$ учун:

$$\varepsilon_{1jk}P_k dx_j = dx_2 P_3 - dx_3 P_2 = [d\boldsymbol{r}\;\boldsymbol{P}]_1 = -[\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{r}]_1$$

ёки (57.45) га биноан:

$$\varepsilon_{1jk}P_k\,dx_j = \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}]_1$$

бўлади. Худди шунингдек:

$$\varepsilon_{2jk}P_k\,dx_j = \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}]_2,$$

$$\varepsilon_{3jk}P_k\,dx_j = \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}]_3.$$

Демак:

$$\varepsilon_{ijk}P_k\,dx_j = \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}\,]_i$$

бўлади. Бу ифодани (57.46) га қўямиз:

$$du_i = u_{ij}\,dx_j + \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}]_i.$$

Жисм нуқтасининг фақат деформациягагина боғлиқ бўлган махсус силжиш векторини $d\boldsymbol{R}$ десак, у вақтда:

$$dR_i = u_{ij}\,dx_j \tag{57.47}$$

бўлади, демак:

$$d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{r}]. \tag{57.48}$$

Қаттиқ жисм учун бурчак тезлиги вектори $\boldsymbol{\omega}$ билан чизиқли тезлик вектори $\boldsymbol{v}$ орасидаги боғланиш бизга маълум:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega\rho}],$$

бу ерда $\boldsymbol{\rho}$ — жисмга қарашли нуқтанинг қўзгалмас нуқтасига нисбатан радиус-вектори.

Чексиз кичик вақт dt давомида чексиз кичик бурилиш бурчаги векторини $\delta\boldsymbol{\varphi}$ ва нуқтанинг шу ҳаракат натижасида чексиз кичик силжиш векторини $d\boldsymbol{l}$ десак:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt},\; \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

бўлади, демак:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \left[\frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{dt}\boldsymbol{\rho}\;\right]$$

ёки

$$d\boldsymbol{l} = [\delta\boldsymbol{\varphi\rho}].$$

Бу ердаги $[\delta\varphi\rho]$ ни (57.48) даги $\frac{1}{2}[\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{r}]$ билан солиштириб, M_2 нуқтани (168- расм) ўз ичига олган жисм элементи M_1 нуқта атрофида $\frac{1}{2}$ rot $\boldsymbol{u}$ векторга мос чексиз кичик бурчакка бурилишини кўрамиз:

$$\delta\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}. \tag{57.49}$$

Шунга кўра, сўнгги формула ушбу шаклни олади:

$$d\boldsymbol{l} = \frac{1}{2} [\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\; d\boldsymbol{r}]. \tag{57.50}$$

Антисимметрик A_{ij} *тензор* (57.43) *узлуксиз муҳит элементининг бурилиш тензори дейилади.*

(57.48) билан (57.50) дан:

$$d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{l}$$

келиб чиқади. Энди (57.32) дан:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) + d\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{l} \tag{57.51}$$

бўлади.

Шундай қилиб, узлуксиз муҳит элементи нуқтасининг чексиз кичик силжиши учта қисмдан: 1) бир бутун деб ҳисобланган элементнинг илгариланма силжиши $\boldsymbol{u}$*; 2) бир бутун деб ҳисобланган элементнинг бурилишига боғлиқ силжиши* $d\boldsymbol{l}$*; 3) элемент деформациясига боғлиқ силжиши* $d\boldsymbol{R}$ *дан иборат.*

XIII. Деформация девиатори ва сферик тензори. Деформацияланган жисм элементи ҳажмининг нисбий кенгайиши (ёки нисбий торайиши) деформация тензорининг чизиқли инварианти u_{kk} га тенг (57.39). Ҳажм ўзгармаса, $u_{kk} = 0$ бўлади. Деформацияланган жисм элементининг ҳажми ўзгармаса-да, унинг шакли ўзгариши мумкин. *Жисмнинг уринма кучланишлар туфайли пайдо бўлган деформацияси сурилиш дейилади.*

Деформация тензори учун мана бундай айният ёзиш мумкин:

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} u_{kk}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\, u_{kk},$$

яъни деформация тензори икки тензор йиғиндисидир:

$$u_{ij} = S_{ij} + C_{ij}, \tag{57.52}$$

$$S_{ij} = u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\, u_{kk}, \tag{57.53}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\, u_{kk}. \tag{57.54}$$

(57.53)дан:

$$S_{ii}=u_{ii}-\frac{1}{3}3\ u_{kk}=0$$

булади. Чизиқли инварианти нолга тенг тензорнинг девиатор дейилиши бизга маълум (52-параграф). *S_{ij} тензор деформация девиатори дейилади.* Демак, деформация девиатори жисм элементининг сурилишини характерлайди.

Сферик тензор тушунчасини эслайлик (52-параграф). *C_{ij} тензор деформациянинг сферик тензоридир.* Деформациянинг сферик тензори жисм элементининг нисбий кенгайишини (ёки нисбий торайишини) характерлайди. *Шу сабабли C_{ij} тензор кенгайиш тензори деб юритилади.*

Шундай қилиб, (57.52)*га асосан, жисм элементининг деформацияси кенгайиш (ёки торайиш) деформацияси билан сурилиш деформациясидан иборатдир.*

XIV. Эластиклик тензорлари. Узлуксиз муҳит механикасида асосий тензорлар булган кучланишлар тензори P_{ij} билан деформация тензори u_{ij} бизга маълум. Эластиклик назариясида шу икки тензорнинг узаро боғланиш қонуни аҳамиятга эгадир.

Жисмдаги кучланишнинг деформация билан қандай боғланганлиги айрим содда ҳолларда батафсил текширилган булиб, натижада *Гук қонуни* юзага келган.

Масалан, бир жинсли материалдан қилинган ва узунлиги l, диаметри эса D булган цилиндр (стержень) олайлик. Кундаланг кесимининг ҳамма жойида баравар булиб, стержень буйича таъсир қилувчи куч F булсин. Бу кучнинг кундаланг кесимга нисбати $p=\frac{F}{S}$ *кучланиш* дейилади.

Куч таъсирида деформацияланувчи стерженнинг узунлиги Δl га ва диаметри ΔD га ўзгаради. Масалан, жисмнинг узунлиги ошса, унинг диаметри камайиши мумкин. Узунлик билан диаметрнинг нисбий ўзгаришлари $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{\Delta D}{D}$ бўлиб, стерженнинг деформациясини характерлайди.

Деформацияланган стержень узунлиги билан диаметрининг нисбий ўзгаришлари, Гук қонунига биноан, кучланишга пропорционалдир:

$$\frac{\Delta l}{l}=\alpha p, \qquad (57.55)$$

$$\frac{\Delta D}{D}=\beta p, \qquad (57.56)$$

бу ерда α ва β жисмнинг эластиклик коэффициентлари деб, уларга тескари $\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}$ миқдорлар эса эластиклик модуллари деб аталади.

Диаметр билан узунлик нисбий ўзгаришларининг:

$$\mu = \frac{\Delta D}{D} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (57.57)$$

нисбати Пуассон коэффициенти деб, $\frac{1}{\alpha} = E$ *эса Юнг модули деб аталади.*

Шундай қилиб, Гук қонунига мувофиқ:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} p, \qquad (57.58)$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\mu}{E} p \qquad (57.59)$$

бўлади.

Деформация билан кучланишнинг пропорционаллиги ҳақидаги Гук қонунини умумлаштириб, деформация тензори u_{ij} *билан кучланишлар тензори* P_{kl} *ўзаро қуйидагича боғланган дейиш мумкин:*

$$u_{ij} = a_{ijkl} P_{kl} \qquad (57.60)$$

ёки

$$P_{ij} = b_{ijkl} u_{kl}. \qquad (57.61)$$

Тензор ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ, бу ердаги a_{ijkl}, b_{ijkl} миқдорлар тўртинчи рангли тензорлардир. a_{ijkl} *тензор эластиклик коэффициентлари тензори деб,* b_{ijkl} *тензор эса эластиклик модуллари тензори деб аталади.* Эластиклик тензорлари ажойиб хусусиятларга эга. Масалан, деформация тензори билан кучланишлар тензори симметрик бўлганлигидан, юқоридаги формулаларга биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{aligned} a_{ijkl} &= a_{jikl}, \\ a_{ijkl} &= a_{ijlk}, \\ b_{ijkl} &= b_{jikl}, \\ b_{ijkl} &= b_{ijlk}, \end{aligned}\right\} \qquad (57.62)$$

яъни эластиклик тензорлари олдинги икки индексига ва сўнгги икки индексига нисбатан симметрик тензорлардир. Шуниси муҳимки, жисмларнинг кристалл тузилиши ва бошқа хусусиятларига қараб, эластиклик тензори турли характерда бўлади.

XV. Бирлик псевдотензорнинг бирлик тензор орқали ифодаланиши. Детерминантлар назариясидан фойдаланиб, бирлик псевдотензорни бирлик тензор компонентларидан ташкил топган детерминант шаклида ёзиш мумкин:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1i_1}, \delta_{1i_2} & \dots & \delta_{1i_n} \\ \delta_{2i_1}, \delta_{2i_2} & \dots & \delta_{2i_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{ni_1}, \delta_{ni_2} & \dots & \delta_{ni_n} \end{vmatrix} \qquad (57.63)$$

ёки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ индекслар ўрнига $j_1, j_2, \ldots, j_n$ индекслар олинса:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1j_1}, \delta_{1j_2} \ldots \delta_{1j_n} \\ \delta_{2j_1}, \delta_{2j_2} \ldots \delta_{2j_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{nj_1}, \delta_{nj_2} \ldots \delta_{nj_n} \end{vmatrix} \tag{57.64}$$

бўлади. Бу псевдотензорлар кўпайтмасини тузайлик:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1i_1}, \delta_{1i_2} \ldots \delta_{1i_n} \\ \delta_{2i_1}, \delta_{2i_2} \ldots \delta_{2i_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{ni_1}, \delta_{ni_2} \ldots \delta_{ni_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1j_1}, \delta_{1j_2} \ldots \delta_{1j_n} \\ \delta_{2j_1}, \delta_{2j_2} \ldots \delta_{2j_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{nj_1}, \delta_{nj_2} \ldots \delta_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

Мос устунлар элементларини кўпайтириб қўшиш қоидаси ва бирлик тензор таърифига мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{1i_1}\delta_{1j_1} + \delta_{2i_1}\delta_{2j_1} + \ldots + \delta_{ni_1}\delta_{nj_1} = \delta_{i_1j_1}, \\ \delta_{1i_1}\delta_{1j_2} + \delta_{2i_1}\delta_{2j_2} + \ldots + \delta_{ni_1}\delta_{nj_2} = \delta_{i_1j_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{1i_n}\delta_{1j_n} + \delta_{2i_n}\delta_{2j_n} + \ldots + \delta_{ni_n}\delta_{nj_n} = \delta_{i_nj_n} \end{array}\right\} \tag{57.65}$$

демак:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1j_1} & \delta_{i_1j_2} \ldots & \delta_{i_1j_n} \\ \delta_{i_2j_1} & \delta_{i_2j_2} \ldots & \delta_{i_2j_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \delta_{i_nj_1} & \delta_{i_nj_2} \ldots & \delta_{i_nj_n} \end{vmatrix}. \tag{57.66}$$

Жумладан уч ўлчовли фазода:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{j_1 j_2 j_3} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1j_1} & \delta_{i_1j_2} & \delta_{i_1j_3} \\ \delta_{i_2j_1} & \delta_{i_2j_2} & \delta_{i_2j_3} \\ \delta_{i_3j_1} & \delta_{i_3j_2} & \delta_{i_3j_3} \end{vmatrix} \tag{57.67}$$

бўлади ёки детерминантни очиб ёзсак:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{j_1 j_2 j_3} = \delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\delta_{i_3j_3} + \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_3}\delta_{i_3j_1} + \delta_{i_1j_3}\delta_{i_2j_1}\delta_{i_3j_2} -$$
$$- \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1}\delta_{i_3j_3} - \delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_3}\delta_{i_3j_2} - \delta_{i_1j_3}\delta_{i_2j_2}\delta_{i_3j_1}$$

бўлади. Бу ифодани мос индекслар бўйича йиғиштириш мумкин. Масалан, $i_3 = j_3$ учун $\delta_{j_3j_3} = 3$ бўлади ва (57.65) га биноан:

$$\delta_{i_2j_3}\delta_{j_3j_1} = \delta_{i_2j_1}, \quad \delta_{i_1j_3}\delta_{j_3j_2} = \delta_{i_1j_2},$$
$$\delta_{i_2j_3}\delta_{j_3j_2} = \delta_{i_2j_2}, \quad \delta_{i_1j_3}\delta_{j_3j_1} = \delta_{i_1j_1}$$

бўлади, демак:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{j_1 j_2 i_3} = 3\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} + \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_1 j_2} -$$
$$- 3\delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} - \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_1 j_1} =$$
$$= \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} \end{vmatrix}. \quad (57.69)$$

Сўнгги ифодада $i_2 = j_2$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш амалини ишлатайлик:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{j_1 i_2 i_3} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 i_2} - \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 j_1} = 3\delta_{i_1 j_1} - \delta_{i_1 j_1} = 2\delta_{i_1 j_1}, \quad (57.70)$$

ниҳоят, бу натижани ҳам $i_1 = j_1$ деб ҳисоблаб, сунгра йиғиштирсак:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = 2\delta_{i_1 i_1} = 6 \quad (57.71)$$

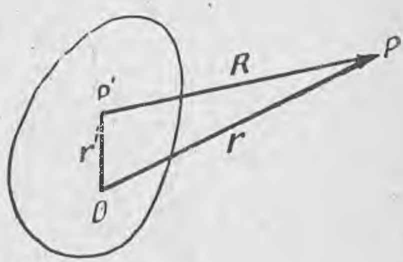
бўлади.

XVI. Турли тартибдаги мультиполлар моменти. Системадаги электр зарядларининг ҳажм зичлиги ρ деб фараз қилинса, йиғинди заряд:

$$e = \int \rho \, dV \quad (57.72)$$

бўлади, бу ерда dV — элементар ҳажм.

Системанинг бирор ички нуқтасини координаталар боши сифатида қабул қилайлик (169-расм).



169- расм.

Элементар ҳажм жойлашган P' нуқтанинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}'$ (координаталари x_1', x_2', x_3'), ихтиёрий олинган кузатиш нуқтаси P нинг радиус-вектори $\boldsymbol{r}$ (координаталари x_1, x_2, x_3), кузатиш нуқтасининг P' нуқтага нисбатан радиус-вектори эса $\boldsymbol{R}$ бўлсин.

Зарядлар системаси потенциалининг кузатиш нуқтасида қандай ифодаланиши бизга маълум: $\varphi = \int \frac{\rho \, dV}{R}$. Расмдан кўрамизки, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, демак:

$$\varphi = \int \frac{\rho \, dV}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \quad (57.73)$$

бўлади. Интеграллашда ρ билан dV нинг P' нуқта функцияси эканлиги назарда тутилиши лозим.

Зарядлар системасидан жуда узоқдаги кузатиш нуқталари ($r \gg r'$) учун Тэйлор қаторидан фойдаланиб, тубандагини ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}-x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2!}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}x_i'x_j'x_k'\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)+\ldots .$$

У вақтда:

$$\varphi=\frac{1}{r}\int\rho\,dV-\int x_i'\rho\,dV\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\int x_i'x_j'\rho\,dV\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\int x_i'x_j'x_k'\rho\,dV\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)+\ldots \tag{57.74}$$

ёки

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\ldots . \tag{57.75}$$

Бу ерда:

$$\varphi^{(0)}=\frac{1}{r}\int\rho\,dV=\frac{e}{r}, \tag{57.76}$$

$$\varphi^{(1)}=-\int x_i'\rho\,dV\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{57.77}$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\int x_i'x_j'\rho\,dV\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{57.78}$$

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{6}\int x_i'x_j'x_k'\rho\,dV\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{57.79}$$

Қаторнинг биринчи ҳади $\varphi^{(0)}$ нуқтавий заряд потенциалини ифодалайди; бу нуқтавий заряд системанинг йиғинди зарядига тенг ва O нуқтада жойлашган деб ҳисобланади.

Қаторнинг иккинчи ҳади $\varphi^{(1)}$ эса диполь потенциалини ифодалайди. Ҳақиқатан, скаляр кўпайтмани кўпаювчи векторлар компонентлари орқали ифодаловчи формулага биноан:

$$\varphi^{(1)}=-\int x_i'\rho\,dV\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)=-\left(\int\boldsymbol{r}'\rho\,dV,\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$

бўлади. $\int\boldsymbol{r}'\rho\,dV$ ифода зарядлар системасининг *электр моменти* ёки *диполь моменти* дейилади ва $\boldsymbol{P}$ билан белгиланади:

$$\boldsymbol{P}=\int\boldsymbol{r}'\rho\,dV \tag{57.80}$$

ёки компонентлар шаклида:

$$P_i=\int x_i'\rho\,dV \tag{57.81}$$

бўлади. Биламизки, $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\mathrm{grad}\, r = -\frac{r}{r^3}$, демак:

$$\varphi^{(1)} = -\left(\boldsymbol{P}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right) = \frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{r})}{r^3}.$$

Бу эса диполь потенциалининг ифодасидир.

Майдон потенциали скаляр миқдордир. Координаталар бўйича скалярдан олинган n-тартибли ҳосилалар n-рангли тензор ҳосил қилади. Тензорлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ, $\int x_i' x_j' \rho\, dV$ миқдорлар иккинчи рангли, $\int x_i' x_j' x_k' \rho\, dV$ миқдорлар эса учинчи рангли тензор ҳосил қилади. Биринчи интеграл зарядлар системасининг *квадруполь моменти* дейилади:

$$P_{ij} = \int x_i' x_j' \rho\, dV. \qquad (57.82)$$

Иккинчи интеграл зарядлар системасининг *октуполь моменти* дейилади:

$$P_{ijk} = \int x_i' x_j' x_k' \rho\, dV. \qquad (57.83)$$

Шу йўсинда давом қилиб, *мультиполь моменти* тушунчасини киритиш мумкин: n-тартибли мультиполь моменти n-рангли тензор ҳосил қилади. *Аниқ мультиполь моментига мос манба мультиполь дейилади.*

Системанинг йиғинди заряди нолинчи тартибли мультиполь моменти бўлади. Диполь биринчи тартибли мультиполь, квадруполь иккинчи тартибли мультиполь, октуполь учинчи тартибли мультиполь бўлади ва ҳоказо. Шундай қилиб, (57.74) га мувофиқ, *узоқ кузатиш нуқталарида майдон потенциали текширилганда зарядлар системаси турли тартибдаги мос мультиполлар системаси деб қаралади.*

Одатда, квадруполь моменти тубандагича аниқланади:

$$P_{ij} = \int (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\rho\, dV, \qquad (57.84)$$

бу ерда $r'^2 = x_i' x_i'$ ва δ_{ij} — Кронекер символи. У вақтда $\varphi^{(2)}$ ни бундай ёзса бўлади:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{6} P_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ҳақиқатан:

$$\frac{1}{6} P_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{6}\int (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\rho\, dV \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int x_i' x_j' \rho\, dV \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{6}\int \delta_{ij} r'^2 \rho\, dV \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Аммо Лаплас тенгламасига биноан:

$$\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

Демак:

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\int x_i' x_j' \rho\, dV \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right),$$

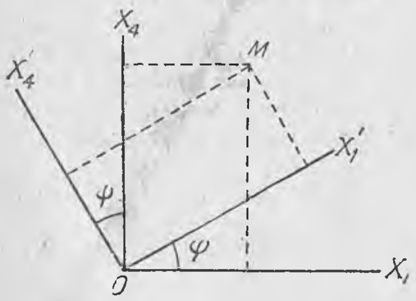
яъни (57.78) да ифодаланган квадруполь потенциалидир. (57.84) дан кўрамизки, квадруполь моменти тензори бўлган P_{ij} симметрик тензордир. Иккинчи рангли симметрик тензорнинг 9 компонентидан 6 таси ўзаро боғланмаган бўлади. Лекин P_{ij} тензорнинг узаро боғланмаган компоненти фақат 5 тадир, чунки (57.84) га биноан, компонентлар орасида қуйидагича боғланиш бор: $P_{ii}=\int(3x_i' x_i' - 3r'^2)\rho\, dV=0$.

XVII. Лоренц алмаштиришлари. Иккита K, K' инерциал система берилган бўлсин. Бирор воқеанинг K системадаги Декарт координаталари x, y, z, вақти t, K' системада эса Декарт координаталари x', y', z' ва вақти t' булсин. Ҳар қандай икки воқеа учун нисбийлик назариясида шундай инвариант мавжуд:

$$I=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2, \tag{57.85}$$

бу ерда $c=3\cdot 10^{10}\frac{см}{сек}$. Тўрт ўлчовли фазо тушунчасини киритайлик:

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=ict\,(i=\sqrt{-1}). \tag{57.86}$$



170- расм.

У вақтда юқоридаги инвариант учун:

$$I=\Delta x_j^2,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{57.87}$$

бўлади. Координаталарни алмаштирайлик:

$$x_k'=\alpha_{kj}x_j. \tag{57.88}$$

Бу алмаштиришда x_1, x_4 координат текисликдаги бурилишни текширайлик (170- расм). Алмаштириш коэффициентлари матрицасини ёзайлик:

$$\|\alpha_{kj}\|=\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44}\end{Vmatrix}. \tag{57.89}$$

(57.88) га мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{14} x_4, \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{44} x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (57.90)$$

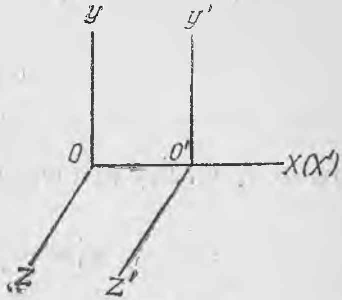
бўлади. Бу формулаларнинг маъноси шундан иборат: текширилаётган икки инерциал системанинг ордината ўқлари ўзаро параллел, аппликата ўқлари ҳам ўзаро параллел бўлиб, уларнинг нисбий ҳаракати умумий абсцисса ўқи йўналишида бўлади (171- расм). Энди 170- расмдан фойдаланиб бундай ёзамиз:

$$\alpha_{11} = \cos\psi,$$

$$\alpha_{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi,$$

$$\alpha_{41} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin\psi,$$

$$\alpha_{44} = \cos\psi.$$



171- расм.

Шундай қилиб:

$$x_1' = x_1 \cos\psi + x_4 \sin\psi,$$

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3,$$

$$x_4' = -x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi. \qquad (57.91)$$

Бу алмаштиришлар нуқтанинг танланишига боғлиқ эмас. Масалан, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (яъни K инерциал системанинг координаталар боши) бўлсин. Бу ҳолда:

$$x_1' = x_4 \sin\psi,$$

$$x_4' = x_4 \cos\psi$$

бўлади, бу ердан эса:

$$\frac{x_1'}{x_4'} = \operatorname{tg}\psi$$

ёки (57.86) га мувофиқ:

$$\frac{x'}{ict} = \operatorname{tg}\psi$$

бўлади. Инерциал система K' нинг инерциал система K га нисбатан тезлиги v орқали белгиланган бўлсин. У вақтда K инерциал система координаталар бошининг K' инерциал системага нисбатан ҳаракати қарама-қарши йўналишда ҳисобланиб, тезлиги $\frac{x'}{t'} = -v$ бўлади. Демак:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{v}{ic}. \tag{57.92}$$

Шу натижадан фойдаланиб, $\sin \psi$ билан $\cos \psi$ аниқланиши мумкин:

$$\sin \psi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ниҳоят, (57.91) га биноан:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{i\frac{v}{c}x_4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= \frac{-i\frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^4}}} + \frac{x_4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right| \tag{57.93}$$

Энди (57.86) ни назарга олайлик. У вақтда:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right| \tag{57.94}$$

бўлади. *Бу формулалар Лоренц алмаштиришлари номи билан машҳурдир.*

Агар нисбий тезликлар ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик бўлса $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, у вақтда Лорентц алмаштиришлари соддалашади:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned}\right| \qquad (57.95)$$

Бу формулалар бизга маълум ва (45.13) билан (45.14) формулаларда ифодаланган Галилей — Ньютон алмаштиришларининг ўзидир.

Ҳозирги замон физикасида Лорентц алмаштиришларининг аҳамияти жуда катта.

III БОБГА ОИД МАШҚЛАР

90. Иккинчи рангли тензорни ифодаловчи:

$$T'_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn}$$

формула билан ортогоналлик шартидан фойдаланиб, T_{mn} ни T'_{ij} орқали ифодалансин.

91. Учинчи рангли тензорни ифодаловчи:

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$$

формула билан ортогоналлик шартидан фойдаланиб, T_{lmn} ни T'_{ijk} орқали ифодалансин.

92. Берилган $a_i b_j$ тензорни симметриялаштирилсин.

93. Берилган $a_i b_j$ тензорни альтернациялаштирилсин.

94. Берилган $a_i b_j$ тензорни симметриялаш ва альтернациялашдан ҳосил бўлган тензорлар айирмаси топилсин.

95. Икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор компонентларидан тузилган иккинчи рангли тензор $T_{ij} = a_i b_j$ нинг чизиқли инварианти T_{ii} аниқлансин.

96. Бирлик тензор δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ нинг чизиқли инварианти δ_{ii} топилсин.

97. Бирлик тензор δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ нинг квадратик инварианти $\delta_{ij}\,\delta_{ij}$ топилсин.

98. Бирлик тензор δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ нинг кубик инварианти, яъни дискриминанти $|\delta_{ij}|$ топилсин.

99. Бирлик тензор учун $\delta_{ij}\,\delta_{jk}\,\delta_{ki}$ ҳисоблаб топилсин.

100. Берилган T_{ij} тензор билан унга тескари T_{ij}^{-1} тензордан скаляр аргумент σ бўйича олинган ҳосилалар ўзаро қандай боғланган?

101. Ушбу:

$$\frac{dT_{lm}}{d\sigma} = -T_{ij} \frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} T_{lm}$$

формуладан фойдаланиб, $\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma}$ тензорни $\frac{dT_{im}}{d\sigma}$ тензор орқали ифодалансин.

102. Ушбу:

$$\frac{dT_{nl}^{-1}}{d\sigma} = -T_{ni}^{-1}\frac{dT_{ij}}{d\sigma}T_{jl}^{-1}$$

формуладан фойдаланиб, $\frac{dT_{ij}}{d\sigma}$ тензорни $\frac{dT_{nl}^{-1}}{d\sigma}$ тензор орқали ифодалансин.

103. Декарт ортлари e_i ва t вақт буйича $\frac{de_j}{dt}$ ҳосилаларнинг скаляр купайтмалари $\left(e_i\frac{de_j}{dt}\right)$ тўплами иккинчи рангли тензор булади. Шуни исботлансин.

104. Декарт ортларидан тузилган $\left(e_i\frac{de_j}{dt}\right)$ тензорнинг антисимметрик эканлиги курсатилсин.

105. I инвариант билан бирлик тензор δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ купайтмаси булган $I\delta_{ij}$ тензорнинг дивергенцияси топилсин.

106. Икки φ_j, a_j тензор учун:

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_l \partial x_l} = a_k \text{ ва } \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k} = 0$$

булса, у вақтда:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_k} = 0$$

булади. Шуни исботлансин.

107. Векторнинг векторга скаляр купайтмаси ва псевдовекторнинг псевдовекторга скаляр купайтмаси скаляр эканлиги курсатилсин.

108. Векторнинг псевдовекторга скаляр купайтмаси псевдоскаляр эканлиги курсатилсин.

109. Икки векторнинг вектор купайтмаси ва икки псевдовекторнинг вектор купайтмаси псевдовектор эканлиги курсатилсин.

110. Векторнинг псевдовекторга вектор купайтмаси вектор эканлиги курсатилсин.

111. Бирлик псевдотензор учун $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$ ҳисоблаб чиқилсин.

112. Куч моментининг псевдовектори $M = [r\,F]$ га дуал булган антисимметрик M_{ij} тензор топилсин.

113. Ҳаракат миқдори моментининг псевдовектори $N = [rp]$ га дуал булган антисимметрик тензор топилсин.

114. Антисимметрик тензор (104- масала) $A_{ij} = \left(\frac{de_i}{dt}e_j\right)$ билан бурчак тезлиги вектори ω орасидаги богланиш аниқлансин.

115. Псевдоскаляр градиентининг псевдовектор булиши курсатилсин.

116. Псевдовектор дивергенциясининг псевдоскаляр эканлиги курсатилсин.

117. Псевдовектор уюрмасининг вектор эканлиги курсатилсин.

118. n-улчовли фазода бирлик тензор учун δ_{ii} ҳисоблаб чиқилсин.

119. n-улчовли фазода бирлик псевдотензор учун $\varepsilon_{ij\ldots s}\,\varepsilon_{ij\ldots s}$ ҳисоблаб чиқилсин.

120. n-улчовли фазо бирлик псевдотензори $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ воситасида l рангли тензордан $n-l$ рангли псевдотензор ҳосил қилинсин.

121. Турт улчовли фазо бирлик псевдотензор ε_{ijkl} воситаси билан I скалярга дуал булган туртинчи рангли ва ҳамма индексларига нисбатан антисимметрик псевдотензор ҳосил қилинсин.

122. Тўрт ўлчовли фазо бирлик псевдотензори ε_{ijkl} воситаси билан псевдовектор P_l га дуал бўлган учинчи рангли ва ҳамма индексларига нисбатан антисимметрик тензор ҳосил қилинсин.

123. Тўрт ўлчовли фазо бирлик псевдотензори ε_{ijkl} воситаси билан иккинчи рангли тензор T_{kl} га дуал бўлган иккинчи рангли антисимметрик псевдотензор ҳосил қилинсин.

124. Иккинчи рангли антисимметрик тензорнинг координаталар бўйича ҳосилаларидан ҳосил қилинган учинчи рангли тензор:

$$B_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} \pm \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}$$

нинг ҳамма индексларига нисбатан антисимметриклиги кўрсатилсин.

125. Иккинчи рангли антисимметрик тензор:

$$\| A_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & ib_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & ib_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & ib_3 \\ -ib_1 & -ib_2 & -ib_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

нинг $I = A^2_{ij}$ инварианти ҳисоблаб чиқилсин.

126. Бирлик псевдотензор ε_{ijkl} компонентларининг қийматлари топилсин.

127. Юқоридаги 125-масалада кўрсатилган иккинчи рангли антисимметрик тензордан ҳосил бўлган псевдоскаляр $P = \varepsilon_{ijkl} A_{ij} A_{kl}$ ҳисоблаб чиқилсин.

МАШҚЛАРГА ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

90. Берилган формуланинг икки томонини $\alpha_{ip}\alpha_{jq}$ га кўпайтириб, сўнгра ортогоналлик шартидан фойдаланамиз.

$$\alpha_{ip}\,\alpha_{jq} T'_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{im}\alpha_{jn}T_{mn} = \delta_{pm}\,\delta_{qn}\,T_{mn} = T_{pq}$$

ёки p ўрнига m ва q ўрнига n олсак:

$$T_{mn} = \alpha_{im}\alpha_{jn}T'_{ij}$$

бўлади.

91. Берилган формуланинг икки томонини $\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}$ га кўпайтириб, ортогоналлик шартидан фойдаланилсин, сўнгра p ўрнига l, q ўрнига m ва r ўрнига n олинсин:

$$T_{lmn} = \alpha_{il}\,\alpha_{jm}\,\alpha_{kn}\,T'_{ijk}.$$

92. $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_ib_j + a_jb_i\right)$ ёки матрица шаклида бундай бўлади:

$$\| S_{ij} \| = \begin{Vmatrix} a_1 b_1 & \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) & \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3 b_1) \\ \frac{1}{2}(a_2b_1 + a_1b_2) & a_2b_2 & \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_3b_2) \\ \frac{1}{2}(a_3b_1 + a_1b_3) & \frac{1}{2}(a_3b_2 + a_2b_3) & a_3b_3 \end{Vmatrix}.$$

93. $A_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i)$

ёки матрица шаклида бундай бўлади:

$$\| A_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1) & \frac{1}{2}(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ \frac{1}{2}(a_2 b_1 - a_1 b_2) & 0 & \frac{1}{2}(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \frac{1}{2}(a_3 b_1 - a_1 b_3) & \frac{1}{2}(a_3 b_2 - a_2 b_3) & 0 \end{matrix} \right\|$$

94. $S_{ij} - A_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i) - \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i) = a_j b_i.$

95. $T_{ii} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (ab).$

96. $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$

97. $\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \delta_{ij}^2 = \delta_{11}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{33}^2 = 3.$

98. $$|\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

99. $\delta_{ij}\,\delta_{jk}\,\delta_{ki} = \delta_{11}\,\delta_{11}\,\delta_{11} + \delta_{22}\,\delta_{22}\,\delta_{22} + \delta_{33}\,\delta_{33}\delta_{33} = 3.$

100. Тескари тензор таърифига мувофиқ:

$$T_{ij}\,T_{jl}^{-1} = \delta_{il}.$$

Бирлик тензор ўзгармасдир, демак:

$$\frac{dT_{ij}}{d\sigma}\,T_{jl}^{-1} + T_{ij}\,\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} = 0.$$

Бу формуланинг икки томонини ўнгдан T_{lm} га кўпайтирсак:

$$\frac{dT_{ij}}{d\sigma}\,T_{jl}^{-1}\,T_{lm} + T_{ij}\,\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma}\,T_{lm} = 0$$

ва чапдан T_{ni}^{-1} га кўпайтирсак:

$$T_{ni}^{-1}\,\frac{dT_{ij}}{d\sigma}\,T_{jl}^{-1} + T_{ni}^{-1}\,T_{ij}\,\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} = 0$$

бўлади. Аммо тескари тензор таърифига мувофиқ:

$$T_{jl}^{-1}\,T_{lm} = \delta_{jm} \quad \text{ва} \quad T_{ni}^{-1}\,T_{ij} = \delta_{nj}$$

бўлганлигидан:

$$\frac{dT_{ij}}{d\sigma}\,\delta_{jm} + T_{ij}\,\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma}\,T_{lm} = 0,$$

$$T_{ni}^{-1}\,\frac{dT_{ij}}{d\sigma}\,T_{jl}^{-1} + \delta_{nj}\,\frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} = 0,$$

яъни:

$$\frac{dT_{im}}{d\sigma} = - T_{ij} \frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} T_{lm},$$

$$\frac{dT_{nl}^{-1}}{d\sigma} = - T_{ni}^{-1} \frac{dT_{ij}}{d\sigma} T_{jl}^{-1}$$

бўлади.

101. Берилган формуланинг икки томонини ўнгдан T_{mp}^{-1} га ва чапдан T_{qi}^{-1} га кўпайтирайлик:

$$T_{qi}^{-1} \frac{dT_{im}}{d\sigma} T_{mp}^{-1} = - T_{qi}^{-1} T_{ij} \frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} T_{lm} T_{mp}^{-1}.$$

Аммо тескари тензор таърифига мувофиқ:

$$T_{qi}^{-1} T_{ij} = \delta_{qj},$$

$$T_{lm} T_{mp}^{-1} = \delta_{lp},$$

демак:

$$T_{qi}^{-1} \frac{dT_{im}}{d\sigma} T_{mp}^{-1} = - \delta_{qj} \frac{dT_{jl}^{-1}}{d\sigma} \delta_{lp},$$

яъни:

$$\frac{dT_{qp}^{-1}}{d\sigma} = - T_{qi}^{-1} \frac{dT_{im}}{d\sigma} T_{mp}^{-1}$$

бўлади. Энди q ўрнига j ва p ўрнига l олинса:

$$\frac{dT_{jl}}{d\sigma} = - T_{ji}^{-1} \frac{dT_{im}}{d\sigma} T_{ml}^{-1}$$

келиб чиқади.

102. Берилган формуланинг икки томонини ўнгдан T_{lp} га ва чапдан T_{rn} га кўпайтирамиз:

$$T_{rn} \frac{dT_{nl}^{-1}}{d\sigma} T_{lp} = - T_{rn} T_{ni}^{-1} \frac{dT_{ij}}{d\sigma} T_{jl}^{-1} T_{lp} = - \delta_{ri} \frac{dT_{ij}}{d\sigma} \delta_{jp} = - \frac{dT_{rp}}{d\sigma}$$

ёки r ўрнига i ва p ўрнига j олсак:

$$\frac{dT_{ij}}{d\sigma} = - T_{in} \frac{dT_{nl}^{-1}}{d\sigma} T_{lj}$$

бўлади.

103. Декарт ортлари учун:

$$e_j' = \alpha_{ik} e_k,$$

$$e_j = \alpha_{jm} e_m.$$

Демак:

$$\frac{de'_j}{dt} = a_{jm}\frac{de_m}{dt},$$

$$\left(e'_i\frac{de'_j}{dt}\right) = \left(a_{ik}e_k a_{jm}\frac{de_m}{dt}\right) = a_{ik}a_{jm}\left(e_k\frac{de_m}{dt}\right).$$

Шундай қилиб, Декарт ортлари билан уларнинг вақт бўйича ҳосилаларининг скаляр кўпайтмалари тўплами иккинчи рангли тензордир.

104. Декарт ортлари учун:

$$(e_ie_j) = \delta_{ij}.$$

Демак:

$$\frac{d}{dt}(e_ie_j) = \left(\frac{de_i}{dt}e_j\right) + \left(e_i\frac{de_j}{dt}\right) = 0$$

ёки

$$\left(e_i\frac{de_j}{dt}\right) = -\left(e_j\frac{de_i}{dt}\right).$$

Шундай қилиб, Декарт ортларидан ҳосил бўлган тензор $\left(e_i\frac{de_j}{dt_j}\right)$ антисимметрик тензордир.

105. $I\delta_{ij}$ тензордан x_k координата бўйича ҳосила оламиз: $\frac{\partial}{\partial x_k}(I\delta_{ij})$, сўнгра $k = i$ деб фараз қилиб, уни йиғиштирамиз:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(I\delta_{ij}) = \frac{\partial I}{\partial x_j}$$

ёки батафсил ёзилса: $\frac{\partial I}{\partial x_1}, \frac{\partial I}{\partial x_2}, \frac{\partial I}{\partial x_3}$ бўлади. Бу ҳосилалар эса I инвариантдан олинган градиент grad I нинг компонентларидир. Шундай қилиб, $I\delta_{ij}$ тензор дивергенцияси I инвариантнинг градиентидир.

106. Берилган биринчи формуланинг икки томонидан x_m координаталар бўйича ҳосилалар оламиз, сўнгра $m = k$ деб фараз қилиб, уларни йиғиштирамиз:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial a_k}{\partial x_k}.$$

Берилган иккинчи формулага биноан, $\frac{\partial a_k}{\partial x_k} = 0$ бўлади.

107. Координаталар системасининг инверсияси формулаларидан фойдаланилсин. Векторлар учун:

$$a'_1 = -a_1,\quad a'_2 = -a_2,\quad a'_3 = -a_3,$$
$$b'_1 = -b_1,\quad b'_2 = -b_2,\quad b'_3 = -b_3.$$

Энди (ab) скаляр кўпайтмани ҳисоблаймиз:

$$a'_1b'_1 + a'_2b'_2 + a'_3b'_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

яъни векторнинг векторга скаляр кўпайтмаси скалярдир.

Псевдовекторлар учун:

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2, \quad a_3' = a_3,$$
$$b_1' = b_1, \quad b_2' = b_2, \quad b_3' = b_3,$$

демак:

$$a_1' b_1' + b_2' b_2' + a_3' b_3' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

бўлади, яъни псевдовекторнинг псевдовекторга скаляр кўпайтмаси скалярдир.

Вектор ва псевдовекторнинг таърифларидан бевосита фойдалансак ҳам шу натижа чиқади. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$a_i' b_i' = \alpha_{im} a_m \alpha_{in} b_n = \delta_{mn} a_m b_n = a_n b_n = a_l b_l.$$

Псевдовекторларнинг скаляр кўпайтмаси эса:

$$a_i' b_i' = |\alpha_{kl}| \alpha_{im} a_m |\alpha_{kl}| \alpha_{in} b_n = |\alpha_{kl}|^2 \delta_{mn} a_m b_n = |\alpha_{kl}|^2 a_n b_n = a_l b_l$$

бўлади.

108. Координаталарни инверсияли алмаштиришда вектор учун:

$$a_1' = -a_1, \quad a_2' = -a_2, \quad a_3' = -a_3$$

ва псевдовектор учун:

$$b_1' = b_1, \quad b_2' = b_2, \quad b_3' = b_3$$

бўлади. Шуларга биноан, скаляр кўпайтма (ab) ни ҳисоблаймиз:

$$a_1' b_1' = a_2' b_2' + a_3' b_3' = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),$$

яъни векторнинг псевдовекторга скаляр кўпайтмаси псевдоскалярдир.

Псевдоскаляр, вектор ва псевдовекторнинг таърифларидан фойдаланса ҳам бўлади. Векторнинг псевдовекторга скаляр кўпайтмаси:

$$a_i' b_i' = \alpha_{im} a_m |\alpha_{kl}| \alpha_{in} b_n = |\alpha_{kl}| \delta_{mn} a_m b_n = |\alpha_{kl}| a_n b_n = |\alpha_{kl}| a_l b_l$$

яъни псевдоскалярдир.

109. Инверсияли алмаштириш формулаларидан фойдаланилсин. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси $c = [ab]$ нинг биринчи компоненти:

$$c_1' = a_2' b_3' - a_3' b_2' = (-a_2)(-b_3) - (-a_3)(-b_2) = a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_1$$

бўлади. Шунингдек, иккинчи ва учинчи компонентлар:

$$c_2' = a_3' b_1' - a_1' b_3' = a_3 b_1 - a_1 b_3 = c_2,$$
$$c_3' = a_1' b_2' - a_2' b_1' = a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_3$$

бўлади. Шундай қилиб, икки векторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектордир.

Икки псевдовекторнинг вектор кўпайтмаси компонентлари:

$$c_1' = a_2' b_3' - a_3' b_2' = a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_1, \quad c_2' = c_2, \quad c_3' = c_3$$

бўлади, яъни икки псевдовекторнинг вектор кўпайтмаси псевдовектордир.

110. Инверсияли алмаштириш формулаларидан фойдаланилсин. a вектор билан b псевдовекторнинг вектор кўпайтмаси $c = [ab]$ нинг компонентлари учун:

$$c_1' = a_2' b_3' - a_3' b_2' = (-a_2) b_3 - (-a_3) b_2 = -a_2 b_3 + a_3 b_2 = -(a_2 b_3 - a_3 b_2) = -c_1$$

бўлади; худди шунингдек: $c_2' = -c_2$ ва $c_3' = -c_3$.

Шундай қилиб, векторнинг псевдовекторга вектор кўпайтмаси вектордир.

111. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^2_{ijk} = \varepsilon^2_{123} + \varepsilon^2_{231} + \varepsilon^2_{312} + \varepsilon^2_{213} + \varepsilon^2_{132} + \varepsilon^2_{321} = 6.$

112. $M_{ij} = \varepsilon_{ijk}M_k,$
$M_{12} = \varepsilon_{123}M_3 = x_1F_2 - x_2F_1,$
$M_{23} = \varepsilon_{231}M_1 = x_2F_3 - x_3F_2,$
$M_{31} = \varepsilon_{312}M_2 = x_3F_1 - x_1F_3.$

113. $N_{ij} = \varepsilon_{ijk}N_k,$
$N_{12} = \varepsilon_{123}N_3 = x_1p_2 - x_2p_1,$
$N_{23} = \varepsilon_{231}N_1 = x_2p_3 - x_3p_2,$
$N_{31} = \varepsilon_{312}N_2 = x_3p_1 - x_1p_3.$

114. Декарт ортларининг ўзаро боғланиши ва Эйлер формуласини эслансин:

$$e_1 = [e_2e_3], \quad e_2 = [e_3e_1], \quad e_3 = [e_1e_2],$$

$$\frac{de_i}{dt} = [\omega e_i].$$

Шуларга биноан:

$$A_{23} = \left(\frac{de_2}{dt}e_3\right) = ([\omega e_2]\, e_3) = (\omega\, [e_2e_3]) = (\omega e_1) = \omega_1$$

ва

$$A_{31} = \omega_2, \quad A_{12} = \omega_3, \text{ демак: } \quad \omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}A_{ij}$$

бўлади, яъни бурчак тезлик вектори ω_k антисимметрик A_{ij} тензорга дуал бўлган псевдовектордир.

115. Псевдоскаляр таърифига мувофиқ:

$$S' = |\alpha_{mn}|\, S \text{ ва } x_j = \alpha_{ij}x'_i$$

бўлганлигидан:

$$\frac{\partial S'}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\frac{\partial S}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\frac{\partial S}{\partial x_j}\alpha_{ij} = |\alpha_{mn}|\,\alpha_{ij}\frac{\partial S}{\partial x_j}$$

бўлади, демак, псевдоскаляр градиенти псевдовектордир.

116. Псевдовектор таърифига мувофиқ:

$$a'_i = |\alpha_{mn}|\,\alpha_{ij}a_j \text{ ва } x_k = \alpha_{ik}x'_i$$

бўлганлигидан:

$$\frac{\partial a'_i}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\,\alpha_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\,\alpha_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = |\alpha_{mn}|\,\alpha_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\alpha_{ik} =$$

$$= |\alpha_{mn}|\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\delta_{jk} = |\alpha_{mn}|\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

бўлади, демак, псевдовектор дивергенцияси псевдоскалярдир.

117. Берилган псевдовектор компонентларидан координаталар буйича олинган ҳосилалар иккинчи рангли псевдотензор ҳосил қилади:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial x_k'} = \frac{\partial}{\partial x_k'}(|\alpha_{mn}|\alpha_{ij}a_j) = |\alpha_{mn}|\alpha_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_k'} = |\alpha_{mn}|\alpha_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_k'} =$$

$$= |\alpha_{mn}|\alpha_{ij}\alpha_{kl}\frac{\partial a_j}{\partial x_l}.$$

Бу псевдотензордан ҳосил бўлган антисимметрик псевдотензор $A_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}$ га дуал бўлган $P_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right)$ вектор берилган псевдовектор уюрмасидир.

118. $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \ldots + \delta_{nn} = n.$

119. $\varepsilon_{ij\ldots s}\varepsilon_{ij\ldots s} = \varepsilon^2_{ij\ldots s} = 1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\,n = n!$

120. $P_{i_{l+1}i_{l+2}\ldots i_{l+(n-l)}} = \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_li_{l+1}i_{l+2}\ldots i_{l+(n-l)}}T_{i_1i_2\ldots i_l}.$

121. $P_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl}I.$

122. $T_{ijk} = \varepsilon_{ijkl}P_l.$

123. $P_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}T_{kl}.$

124. Масаладаги учинчи рангли тензор таърифига мувофиқ, B_{jik} учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$B_{jik} = \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j}.$$

Аммо берилган иккинчи рангли тензор антисимметрик бўлганлигидан:

$$A_{ji} = -A_{ij},\quad A_{kj} = -A_{jk},\quad A_{ik} = -A_{ki}$$

бўлади. Буларни ўринларига қўйсак:

$$B_{jik} = -\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j}\right)$$

келиб чиқади. Бу формуланинг ўнг томони ва масалада B_{ijk} учун келтирилган формуланинг ўнг томони фақат ишораси билан фарқ қилади, демак:

$$B_{ijk} = -B_{jik}.$$

Шунинг сингари, бундай кўрсатиш мумкин. $B_{ijk} = -B_{ikj}$, $B_{ijk} = -B_{kji}$.

125. $I = A_{ij}^2 = 2\left\{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\right\}.$

126.
$$\begin{array}{llll}
\varepsilon_{1234} = 1, & \varepsilon_{2341} = -1, & \varepsilon_{3412} = 1, & \varepsilon_{4123} = -1,\\
\varepsilon_{2314} = 1, & \varepsilon_{3142} = -1, & \varepsilon_{1423} = 1, & \varepsilon_{4231} = -1,\\
\varepsilon_{3124} = 1, & \varepsilon_{1243} = -1, & \varepsilon_{2431} = 1, & \varepsilon_{4312} = -1,\\
\varepsilon_{2134} = -1, & \varepsilon_{1342} = 1, & \varepsilon_{3421} = -1, & \varepsilon_{4213} = 1,\\
\varepsilon_{1324} = -1, & \varepsilon_{3241} = 1, & \varepsilon_{2413} = -1, & \varepsilon_{4132} = 1,\\
\varepsilon_{3214} = -1, & \varepsilon_{2143} = 1, & \varepsilon_{1432} = -1, & \varepsilon_{4321} = 1.
\end{array}$$

127. 126- масала жавобидан фойдаланилсин.

$$P = \varepsilon_{ijkl}A_{ij}A_{kl} = -ia_3b_3 - ia_1b_1 - ia_3b_3 - ia_1b_1 -$$
$$- ia_1b_1 - ia_2b_2 - ia_1b_1 - ia_2b_2 - ia_2b_2 - ia_3b_3 - ia_2b_2 - ia_3b_3 -$$
$$- ia_3b_3 - ia_2b_2 - ia_3b_3 - ia_2b_2 - ia_2b_2 - ia_1b_1 - ia_2b_2 - ia_1b_1 -$$
$$- ia_1b_1 - ia_3b_3 - ia_1b_1 - ia_3b_3 = -8i\,(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3).$$

IV БОБ

УМУМИЙ ТЕНЗОРЛАР АНАЛИЗИ

Оддий тензорлар анализини ўрганишда биз тўғри чизиқли тўғри бурчакли координаталарни, яъни Декарт координаталарини ишлатган эдик. Декарт координаталаридан фойдаланиб, самарали натижаларга эришиш мумкинлигини аввалги бобларда текширилган масалаларда кўрдик. Декарт координаталарини эгри чизиқли координаталарга ёки эгри чизиқли координаталарни Декарт координаталарида алмаштириш бизга маълум. Масалан, уч ўлчовли фазода сферик ёки цилиндрик координаталар ўрнида Декарт координаталарини ишлатиш бемалол мумкин. Лекин Декарт координаталари иш бермайдиган ҳоллар ҳам учрайди. Бу ҳолларда турли эгри чизиқли координаталар билан иш кўришга тўғри келади.

58. УМУМИЙ АЛМАШТИРИШЛАР ГРУППАСИ

Координата деганда бундан буён эгри чизиқли координата назарда тутилади. Декарт координаталарини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ шаклда ёзган эдик. Эгри чизиқли координаталарни эса $x^1, x^2, \ldots, x^n$ шаклда ёзайлик. Масалан, x^2 ни координата квадрати эмас, балки иккинчи координата деб тушуниш лозим.

Кўп ўлчовли фазо нуқтасини аниқлаш учун мумкин бўлган координата системаларидан истаганимизни танлаб олишимиз мумкин. n ўлчовли фазо нуқтаси n та координата билан аниқланади ва мос индексларнинг ҳар бири $1, 2, 3, \ldots, n$ қийматларга эга бўлиши мумкин. Координаталарнинг иккита S_1, S' системаси берилган бўлсин. Уларнинг биридаги координаталарни $x^1, x^2, \ldots, x^n$ орқали, иккинчисидаги координаталарни эса $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ орқали белгилайлик. Кўп ўлчовли фазо нуқтасини аниқловчи иккинчи система координаталари ўша

Юқоридаги формулаларни қисқа ёзиб кўрсатиш мумкин:

$$x'^{i} = x'^{i}(x^{j}), \tag{58.3}$$

$$dx'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\, dx^{j}. \tag{58.4}$$

Алмаштириш якобианини $\left|\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\right|$ шаклда ёзсак, шартимизга мувофиқ $\left|\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\right| \neq 0$.

Мумкин булган координаталар системалари тўпламидан қайси бирини танлаб олиш ихтиёрий бўлганлиги сабабли, иккинчи система координаталари $x'^{1}, x'^{2}, \ldots, x'^{n}$ ни учинчи система координаталари $x''^{1}, x''^{2}, \ldots, x''^{n}$ га алмаштирса бўлади; у вақтда, шуларни ёзишимиз мумкин:

$$x''^{k} = x''^{k}(x'^{i}), \tag{58.5}$$

$$dx''^{k} = \frac{\partial x''^{k}}{\partial x'^{i}}\, dx'^{i}. \tag{58.6}$$

Иккинчи система координаталари x'^{i} ни учинчи система координаталарни x''^{k} га алмаштириш якобиани нолдан фарқ қилади:

$$\left|\frac{\partial x''^{k}}{\partial x'^{i}}\right| \neq 0.$$

Сўнгги формулалардаги x'^{i} ва dx'^{i} ўринларига уларнинг (58.3), (58.4) даги ифодаларини олиб қўяйлик:

$$x''^{k} = x''^{k}(x'^{i}(x^{j})), \tag{58.7}$$

$$dx''^{k} = \frac{\partial x''^{k}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\, dx^{j}. \tag{58.8}$$

Сўнгги формулани бундай ёзишимиз мумкин:

$$dx''^{k} = \frac{\partial x''^{k}}{\partial x^{j}}\, dx^{j}, \tag{58.9}$$

чунки мураккаб функцияларни дифференциаллаш қоидасига биноан, бундай бўлади:

$$\frac{\partial x''^{k}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial x''^{k}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}. \tag{58.10}$$

Биринчи системанинг x^{j} координаталарини учинчи системанинг x''^{k} координаталари билан алмаштириш мумкин, агар алмаштириш якобиани $\left|\frac{\partial x''^{k}}{\partial x^{j}}\right|$ мавжуд бўлса $\left(\text{яъни } \left|\frac{\partial x''^{k}}{\partial x^{j}}\right| \neq 0\right)$.

Детерминантлар кўпайтмаси қоидасидан фойдаланиб, (58.10) га биноан, қуйидагини ёзамиз:

$$\left|\frac{\partial x''^k}{\partial x^j}\right| = \left|\frac{\partial x''^k}{\partial x'}\right| \cdot \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|.$$

Берилган:

$$\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| \neq 0 \text{ ва } \left|\frac{\partial x''^k}{\partial x'^i}\right| \neq 0,$$

шартлар назарда тутилса, сўнгги формуладан:

$$\left|\frac{\partial x''^k}{\partial x^j}\right| \neq 0,$$

яъни биринчи системанинг x^j координаталарини учинчи системанинг x''^k координаталарига алмаштириш мумкин. (58.3) да ифодаланган биринчи алмаштиришда x^j дан x'^i га ўтилади, (58.5) да ифодаланган иккинчи алмаштиришда эса x'^i дан x''^k га ўтилади. Бирин-кетин бажарилган биринчи ва иккинчи алмаштиришлар натижасида x^j дан x''^k га ўтилади. x^j ни x''^k га бевосита алмаштириш (58.7) да ифодаланган.

Кетма-кет бажарилган иккита алмаштириш натижасида ҳосил бўлган натижавий алмаштириш ўша алмаштиришлар кўпайтмаси дейилади. Алмаштиришлар кўпайтмасининг якобиани алмаштиришлар якобианларининг кўпайтмасига тенг эканлигини юқорида кўрдик.

Учинчи системанинг x''^k координаталаридан, масалан, тўртинчи системанинг x'''^l координаталарига ўтайлик:

$$x'''^l = x'''^l(x''^k),$$

демак:

$$dx'''^l = \frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k} dx''^k.$$

Энди аввалги айтилганларни назарда тутсак, қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$dx'''^l = \frac{\partial x'''^l}{\partial x^j} dx^j,$$

$$dx'''^l = \frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k} \frac{\partial x''^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j,$$

$$\frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k} \frac{\partial x''^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'''^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'''^l}{\partial x^j},$$

$$\frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k} \frac{\partial x''^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k} \frac{\partial x''^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x'''^l}{\partial x^j},$$

яъни

$$\left(\frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k}\frac{\partial x''^k}{\partial x'^l}\right)\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}=\frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k}\left(\frac{\partial x''^k}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x'''^l}{\partial x''^k}\frac{\partial x''^k}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \qquad (58.11)$$

Бу формулада алмаштиришларнинг ассоциативлик қонуни ифодаланган.

(58.3) да ифодаланган алмаштиришлар якобиани нолдан фарқли эканлиги сабабли x^j ни x'^i орқали аниқлаш мумкин:

$$x^j = x^j(x'^i). \qquad (58.12)$$

Бу алмаштириш якобиани $\left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right|$ бўлади. Сўнгги формуладан:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}dx'^i. \qquad (58.13)$$

Бу формуладаги dx'^i ўрнига (58.4) даги ифодани қўяйлик:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k.$$

У вақтда:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$$

бўлади. Аммо $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар учун:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta^j_k, \qquad (58.14)$$

бу ерда δ^j_k бошқача ишораланган Кронекер символи:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 0, \text{ агар } j \neq k, \\ 1, \text{ агар } j = k. \end{cases} \qquad (58.15)$$

Натижада:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \delta^j_k \qquad (58.16)$$

келиб чиқади. Ўз-ўзидан аёнки:

$$|\delta^j_k| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

бўлади. Шундай қилиб, (58.16) га биноан:

$$\left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right| \cdot \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right| = 1 \qquad (58.17)$$

бўлади. (58.12) *даги алмаштириш* (58.3) *даги алмаштиришга нисбатан тескари алмаштириш дейилади.* (58.3) *даги алмаштириш эса тўғри алмаштириш дейилади.* Тўғри алмаштириш ва тескари алмаштириш якобианлари (58.17) даги ифодаланган шартга бўйсунадилар.

Тўғри алмаштириш коэффициентлари $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$ *ва тескари алмаштириш* $\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ *коэффициентлари орасидаги боғланиш* (58.16) *формулада ифодаланган.* Бу формулага бошқа шакл ҳам бериш мумкин. Ҳақиқатан, (58.4) ва (58.13) га мувофиқ:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^k, \; dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^k.$$

Охирги тенгликдан:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta^i_k \tag{58.18}$$

келиб чиқади.

Крамер формуласига биноан, тескари алмаштириш коэффициентлари тўғри алмаштириш коэффициентлари орқали ва, аксинча, тўғри алмаштириш коэффициентлари тескари алмаштириш коэффициентлари орқали ифодаланиши мумкин:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{A^i_k}{\left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right|}, \tag{58.19}$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \frac{B^k_i}{\left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|}, \tag{58.20}$$

бу ерда A^i_k билан $\left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right|$ якобиан элементи $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$ нинг алгебраик тўлдирувчиси, B^k_i билан эса $\left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|$ якобиан элементи $\left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|$ нинг алгебраик тўлдирувчиси белгиланди.

Кетма-кет бажарилган алмаштириш ва тескари алмаштириш натижасида яна ўша аввалги алмаштириш ҳосил бўлади. Бундай алмаштириш айнан алмаштириш дейилади. Алмаштириш ва унга тескари алмаштириш кўпайтмаси айнан алмаштириш ҳосил қилади. Айнан алмаштиришда $x'^i = x^i$ бўлиб, тегишли якобиан бирга тенгдир.

Алмаштиришлар кўпайтмаси билан тескари ва айнан алмаштиришларни ўз ичига олиб, ассоциативлик қонунига бўйсунган алмаштиришлар тўплами алмаштиришлар группаси деб аталади. Алмаштиришлар группасига қарашли алмаштиришларнинг баъзи хусусий тўпламлари ҳам группалик хусусиятига эга бўлиши мумкин. *Ана шундай хусусий алмаштиришлар тўплами алмаштиришлар группасининг группачаси дейилади.*

Хусусий ҳолни кўриб чиқайлик. x'^i билан x^j чизиқли боғланган бўлсин, яъни:

$$x'^i = A^i_j x^j + B^i, \tag{58.21}$$

бу ерда A^i_j, B^i — ўзгармас сонлар. *Бу чизиқли алмаштиришлар умумий аффин алмаштиришлар дейилади.*

Умумий аффин алмаштиришлар группаси умумий алмаштиришлар группасининг группачасидир. $B^i = 0$ бўлган ҳолда:

$$x'^i = A^i_j x^j \tag{58.22}$$

бўлади. *Чизиқли ва бир жинсли бўлган бу алмаштиришлар, одатда марказий аффин алмаштиришлар дейилади.* Марказий аффин алмаштиришлар группаси умумий аффин алмаштиришлар группасининг группачасидир.

Энди биз Декарт координаталарини алмаштириш ва ортогоналлик шартини эслайлик:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j, \tag{58.23}$$

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}. \tag{58.24}$$

Бу алмаштиришлар (58.22) *даги марказий аффин алмаштиришларнинг хусусий ҳоли бўлиб, ортогонал аффин алмаштиришлар деб аталади.* Ортогонал аффин алмаштиришлар группаси марказий аффин алмаштиришлар группасининг группачасидир.

59. КОВАРИАНТ ВЕКТОР. КОНТРАВАРИАНТ ВЕКТОР

Олинган икки система координаталари орасидаги тўғри ва тескари алмаштириш берилган бўлсин:

$$x'^i = x'^i(x^j), \tag{59.1}$$

$$x^j = x^j(x'^k). \tag{59.2}$$

Бу ерда $x'^i(x^j)$ ва $x^j(x'^k)$ функциялар бир қийматли, узлуксиз ва керакли марта дифференциалланувчи функциялардир. Тўғри алмаштириш якобиани $\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|$ ва тескари алмаштириш якобиани $\left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^k}\right|$ нолга тенг бўлмаган функциялардир.

(59.1) ва (59.2) дан:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{59.3}$$

ва

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^k. \qquad (59.4)$$

Тўғри алмаштиришнинг $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ коэффициентлари билан тескари алмаштиришнинг $\frac{\partial x^j}{\partial x'^k}$ коэффициентлари ва уларга мос якобианлар нуқта функцияларидир. Бир система координаталарининг дифференциаллари иккинчи система координаталарининг дифференциалларига нисбатан чизиқли ва бир жинсли функциялардир.

Тўғри алмаштириш коэффициентлари билан тескари алмаштириш коэффициентлари орасидаги боғланишнинг (58.16) ва (58.18) га мувофиқ икки шаклда ифодаланиши бизга маълум:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \delta^j_k, \qquad (59.5)$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta^i_k. \qquad (59.6)$$

Координаталарни алмаштиришда қиймати сақланувчи миқдор инвариант ёки скаляр дейилади. Масалан, ҳар қандай ўзгармас сон инвариантдир. Эски $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталарнинг $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ функцияси ва янги $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ координаталарнинг $\varphi'(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$ функцияси инвариант экан, таърифга мувофиқ, улар бир-бирига тенг:

$$\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \varphi'(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n), \qquad (59.7)$$

яъни инвариант бўлган миқдорнинг қиймати координата системаларининг танланишига боғлиқ бўлмасдан, фақат координаталар функцияси—нуқта функциясидир.

Инвариантнинг дифференциали ҳам инвариант бўлади:

$$d\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = d\varphi'(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n). \qquad (59.8)$$

Энди инвариантдан олинган хусусий ҳосилалар орасидаги боғланишни аниқлайлик. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига мувофиқ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x'^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}$$

ёки қисқача:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \qquad (59.9)$$

бўлади. Худди шунингдек:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x'^j}. \qquad (59.10)$$

(59.3) билан (59.9) ёки (59.4) билан (59.10) формулаларда тўғри ва тескари алмаштириш коэффициентлари турлича иштирок қилади. (59.3) билан (59.9) дан кўрамизки, координаталарнинг дифференциалларини тўғри алмаштиришда тўғри алмаштириш коэффициентлари иштирок қилади, скаляр функция хусусий ҳосилаларини тўғри алмаштиришда эса тескари алмаштириш коэффициентлари иштирок қилади, шунингдек, (59.4) билан (59.10) га асосан координаталарнинг дифференциалларини тескари алмаштиришда тескари алмаштириш коэффициентлари иштирок қилади, скаляр функция хусусий ҳосилаларини тескари алмаштиришда эса тўғри алмаштириш коэффициентлари иштирок қилади.

Шу икки хил алмаштириш қонунлари асосида ковариант вектор ва контравариант вектор тушунчаларини киритиш мумкин.

Агар $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида n та $a_1, a_2 \ldots a_n$ *миқдорлар берилган бўлиб, координаталарни* (59.1) *формула бўйича алмаштирганда бу миқдорлар $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ миқдорларга*

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j \qquad (59.11)$$

формула бўйича алмаштирилса, бу ҳолда шу n та $a_1, a_2, \ldots, a_n$ миқдор тўплами ковариант вектор дейилади, миқдорларнинг ўзи эса унинг компонентлари деб аталади. (59.9) *ва* (59.11) *дан кўрамизки, скаляр функция хусусий ҳосилалари қандай алмаштириш қонунига бўйсунса, ковариант вектор компонентлари ҳам шу алмаштириш қонунига бўйсунади. Шундай қилиб, скаляр функция хусусий ҳосилаларининг тўплами ковариант вектор бўлиб, скаляр функциянинг градиенти дейилади.* Скаляр функция хусусий ҳосилалари шу функция градиентининг компонентларидир. Скаляр функция градиенти ковариант векторга бевосита мисолдир.

Контравариант вектор ҳам худди шунингдек таърифланади. *Агар $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида n* та $a^1, a^2, \ldots, a^n$ *миқдорлар берилган бўлиб, координаталарни* (59.1) *формула бўйича алмаштирганда бу миқдорлар $a'^1, a'^2, a'^3, \ldots, a'^n$ миқдорларга*

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \qquad (59.12)$$

формула бўйича алмаштирилса, бу ҳолда шу n та a^1, a^2, ..., a^n *миқдор тўплами контравариант вектор дейилади, миқдорларнинг ўзи эса унинг компонентлари деб аталади.* (59.3) *ва* (59.12) *дан кўрамизки, координаталарнинг дифференциаллари қандай алмаштириш қонунига бўйсунса, контравариант векторнинг компонентлари ҳам ўша алмаштириш қонунига бўйсунади.* Координаталарнинг дифференциаллари тўплами контравариант вектор бўлади ва бир нуқтадан унга чексиз яқин бўлган иккинчи нуқтага қараб силжишни ифодалайди. Координаталарнинг дифференциаллари чексиз кичик силжиш векторининг компонентларидир. Чексиз кичик силжиш вектори, яъни элементар силжиш вектори контравариант векторга мисолдир. Муҳими шундаки, *координаталарнинг ўзи вектор компонентларини ташкил қилмайди, аммо координаталарнинг дифференциаллари вектор компонентларидир.*

Ковариант векторни контравариант вектордан фарқ қилиш учун индексларни ёзиб кўрсатиш усулига диққат қилинсин: ковариант вектор индекслари ўнг ёнининг пастига ёзилади (масалан, a_i, b_l ва ҳоказо), контравариант вектор индекслари эса ўнг ёнининг тепасига ёзилади (масалан, a^i, b^j ва ҳоказо).

Координаталарни тескари алмаштиришда вектор компонентларининг қандай алмаштирилишини текшириб чиқайлик. Ковариант вектор компонентларини тўғри алмаштириш формуласи (59.11) дан фойдаланиб, a'_i ни a_j га алмаштириш формуласини чиқариш мумкин. Бунинг учун ўша формуланинг икки томонини $\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}$ га кўпайтириб, $m = i$ деб йиғиштирайлик:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j,$$

(59.5) ни назарга олсак:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a'_i = \delta^j_k \, a_j$$

бўлади, демак:

$$a_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a'_i. \tag{59.13}$$

Бу формула ковариант вектор компонентларини тескари алмаштириш қонунини ифодалайди.

Контравариант вектор компонентларини тўғри алмаштириш формуласи (59.12) дан a'^i ни a^j га алмаштириш формуласини чиқариш мумкин. Бунинг учун ўша формуланинг икки томонини $\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}$ га кўпайтирайлик, сўнгра $m = i$ деб йиғиштирайлик:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j$$

ва яна (59.5) га мувофиқ:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a'^i = \delta^k_j a^j,$$

демак:

$$a^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a'^i \tag{59.14}$$

бўлади. *Бу формула контравариант вектор компонентларини тескари алмаштириш қонунини ифодалайди.*

Юқорида келтирилган вектор компонентларини алмаштириш формулалари (59.11) билан (59.12) дан, ёки (59.13) билан (59.14) дан равшанки, *векторнинг алмаштирилувчи компонентлари орасидаги боғланиш бир жинсли ва чизиқли боғланишдир.* Шунинг учун, векторнинг компонентлари бирор системада нолга тенг бўлса, улар ҳар қандай бошқа системада ҳам нолга тенг бўлади. *Компонентлари нолга тенг бўлган вектор ноль-вектор дейилади.* Иккита ковариант вектор олайлик:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j,$$

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} b_j.$$

Бу ердан:

$$a'_i + b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} (a_j + b_j),$$

$$a'_i - b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} (a_j - b_j),$$

яъни ковариант вектор йиғиндиси ва айирмаси ковариант вектор ҳосил қилади. Бирор I скалярнинг ковариант векторга кўпайтмасини олайлик:

$$Ia'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} Ia_j,$$

демак, скалярнинг ковариант векторга кўпайтмаси ковариант вектор ҳосил қилади.

Худди шунингдек, контравариант векторлар йиғиндиси ва айирмаси ҳамда скалярнинг контравариант векторга кўпайтмаси контравариант вектор ҳосил қилади.

Контравариант ва ковариант векторларни бир-бирига қўшиш ёки уларни бир-биридан айиришнинг маъноси йўқ.

Декарт координаталарини алмаштириш, яъни ортогонал алмаштириш формулаларини эслайлик:

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j,$$
$$x_j = \alpha_{ij} x_i'.$$

Бу ердан:

$$dx_i' = \alpha_{ij} dx_j,$$
$$dx_j = \alpha_{ij} dx_i'.$$

Демак, ўзларининг дифференциаллари сингари, Декарт координаталари ҳам вектор компонентлари бўлади.

Сунгги формулалардан:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \alpha_{ij}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \alpha_{ij}$$

бўлади. *Шундай қилиб, Декарт координаталари системасида контравариант вектор билан ковариант вектор орасида ҳеч қандай фарқ йўқ.*

60. ТЕНЗОРЛАР

Тензор тушунчасини киритишда ковариант вектор ва контравариант вектор компонентларини алмаштириш қонунлари асос қилиб олинади. Координаталарни алмаштиришда, ковариант ва контравариант вектор компонентларининг алмаштириш формулалари маълум:

$$x'^i = x'^i(x^l), \tag{60.1}$$

$$a_i' = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} a_l, \tag{60.2}$$

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} a^l. \tag{60.3}$$

Агар $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида N та индексли $T_{lms\cdot\cdot\cdot uv}$ миқдорлар берилган бўлиб, координаталарни (60.1) *бўйича алмаштириш натижасида бу миқдорлар янги N та индексли $T'_{ijk\cdot\cdot\cdot pq}$ миқдорларга ушбу:*

$$T'_{ijk\cdot\cdot\cdot pq} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \cdots \frac{\partial x^u}{\partial x'^p} \frac{\partial x^v}{\partial x'^q} T_{lms\cdot\cdot\cdot uv} \tag{60.4}$$

қонунга мувофиқ алмаштирилса, бу ҳолда шу $T_{lms\cdot\cdot\cdot uv}$ миқдорлар тўплами ҳамма индексларига нисбатан ковариант бўлган N-рангли (тартибли) тензор дейилади, миқдорларнинг ўзи эса шу тензорнинг компонентлари деб аталади.

Ковариант тензорни ташкил қилган тўплам миқдорларини ҳар бир индексга нисбатан алмаштириш ковариант вектор компонентларини алмаштиришга ўхшайди. Масалан, икки марта ковариант бўлган иккинчи рангли тензор учун

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}T_{lm}$$

бўлади, ёки уч марта ковариант бўлган учинчи рангли тензор учун

$$T'_{ijk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}T_{lms}$$

бўлади. Ковариант векторга биринчи рангли ковариант тензор деб қарашимиз мумкин.

Контравариант тензор ҳам шунингдек таърифланади:

$x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида N та индексли $T^{lms \cdot \cdot \cdot uv}$ миқдорлар берилган бўлиб, координаталарни (60.1) *буйича алмаштириш натижасида бу миқдорлар янги N та индексли $T'^{ijk \cdot \cdot \cdot pq}$ миқдорларга*

$$T'^{ijk \cdot \cdot \cdot pq} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\cdots\frac{\partial x'^p}{\partial x^u}\frac{\partial x'^q}{\partial x^v}T^{lms \cdot \cdot \cdot uv} \tag{60.5}$$

қонунга мувофиқ алмаштирилса, бу ҳолда шу $T^{lms \cdot \cdot \cdot uv}$ миқдорлар тўплами ҳамма индексларига нисбатан контравариант бўлган N рангли (тартибли) тензор дейилади, миқдорларнинг ўзи эса шу тензорнинг компонентлари деб аталади. Контравариант тензорни ташкил қилган тўплам миқдорларини ҳар бир индексга нисбатан алмаштириш контравариант вектор компонентларини алмаштиришга ўхшайди. Контравариант векторни биринчи рангли контравариант тензор деб тушунишимиз мумкин. Яна содда мисоллар сифатида икки марта контравариант бўлган иккинчи рангли тензор ёки турт марта контравариант бўлган тўртинчи рангли тензор олиш мумкин:

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}T^{lm},$$

$$T'^{ijkt} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial x'^t}{\partial x^w}T^{lmsw}.$$

Энди аралаш тензор тушунчасини киритамиз.

Пастки индексларининг сони N_1, устки индексларининг сони N_2 ҳамма индексларининг сони эса $N = N_1 + N_2$ га тенг бўлган миқдорлар $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида $T_{lms \cdot \cdot}^{\cdot \cdot \cdot uv}$ булсин ва $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ координаталар системасида эса $T'^{\cdot \cdot \cdot pq}_{ijk \cdot \cdot}$ булсин. Координаталар (60.1) га асосан алмаштирилганда *бу миқдорлар ушбу* қонунга мувофиқ алмаштирилсин:

$$T'_{ijk\cdot\cdot\cdot}{}^{\cdot\cdot\cdot pq} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \cdots \frac{\partial x'^p}{\partial x^u} \frac{\partial x'^q}{\partial x^v} T_{lms\cdot\cdot\cdot}{}^{\cdot\cdot\cdot uv} \qquad (60.6)$$

Шу алмаштириш қонунига бўйсунган миқдорлар тўплами N_1 индексларга нисбатан ковариант ва N_2 индексларга нисбатан контравариант бўлган N-рангли аралаш тензор дейилади, миқдорларнинг ўзи эса шу тензорнинг компонентлари дейилади. Демак, аралаш тензор ташкил қилган тўплам миқдорлари N_1 индексларининг ҳар бирига нисбатан алмаштирилганда ковариант вектор компонентларини алмаштириш қонунига бўйсунади. N_2 индексларининг ҳар бирига нисбатан алмаштирилганда эса контравариант вектор компонентларини алмаштириш қонунига бўйсунади.

Аралаш тензорларга бир неча мисол кўрсатишдан олдин, даставвал, пастки ва устки индексларнинг бирин-кетин ёзилишидаги нисбий тартибни яққол тасвирлаш мақсадида мос индекслардан бўш бўлган жойларни *қора нуқталар* (.) билан белгилаб кўрсатишга келишайлик.

Биринчи индексига нисбатан ковариант ва иккинчи индексига нисбатан контравариант бўлган иккинчи рангли аралаш тензор учун:

$$T'{}_{i.}^{\cdot j} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} T_{l.}^{\cdot m} \qquad (60.7)$$

бўлади. Биринчи индексига нисбатан контравариант ва иккинчи индексига нисбатан ковариант бўлган иккинчи рангли аралаш тензор учун:

$$T'{}^{i\cdot}_{.j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} T^{l\cdot}_{.m} \qquad (60.8)$$

бўлади.

Биринчи ва учинчи индексларига нисбатан контравариант, қолган индексларига нисбатан ковариант бўлган бешинчи рангли аралаш тензор учун:

$$T'{}^{i.k..}_{.j.lm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{p.r..}_{.q.st}$$

бўлади.

Тензор ранги N шу тензор индексларининг умумий сонига тенгдир. Тензор компонентларининг умумий сони n ўлчовли фазода n^N та бўлади.

Хуллас, индексларининг ҳар бирига нисбатан вектор компонентларини алмаштириш қонунига мувофиқ алмаштирилувчи миқдорлар тўплами тензор ҳосил қилади. *Пастки индекслар ковариант индекслар ва устки индекслар контравариант* *индекслар деб ҳам юритилади.* Ковариант индекслар ва контравариант индекслар турли типдаги индекслардир.

Тензор ранги унинг индекслари сонига тенг. Лекин индексларнинг ковариант ёки контравариант бўлишига қараб, тензор тузилиши турлича булиши мумкин: ковариант тензор, контравариант тензор, аралаш тензор.

Ортогонал алмаштиришлар умумий алмаштиришларнинг хусусий ҳолидир. Илгари биз кўриб чиққан оддий тензорлар ортогонал аффин тензорлар дейилиб, умумий тензорларнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

Кронекер символининг таърифига биноан координаталарнинг ҳар қандай системасида ҳам:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = j \\ 0 \text{ агар } i \neq j \end{cases} \tag{60.9}$$

бўлади. Симметриялик хусусиятига эга бу символнинг индексларидан қайсиси биринчи ва қайсиси иккинчи булиши аҳамиятга эга эмас, шу сабабли, δ^i_j ни $\delta^{i}_{.j}$ ва $\delta_{j.}^{\,i}$ шаклларда ҳам ёзиш мумкин.

Аслида Кронекер символи иккинчи рангли аралаш тензордир. Ҳақиқатан, δ^i_j тензор булса, у вақтда δ^i_j ни $\delta^{i}_{.j}$ шаклда олиш мумкинлигини назарда тутиб, (60.8) га мувофиқ, тубандагини ёзишимиз мумкин:

$$\delta'^i_j = \delta'^i_{.j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\,\delta^l_{.m} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\,\delta^l_m\,.$$

Энди (60.9) га мувофиқ, δ^l_m нинг ифодасини сўнгги формуладаги ўрнига қуяйлик:

$$\delta'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}.$$

Бу формуланинг ўнг томонидаги тўғри ва тескари алмаштириш коэффициентлари орасидаги боғланиш ифодаси эса, (58.18) га мувофиқ, δ^i_j бўлади. Шундай қилиб:

$$\delta'^i_j = \delta^i_j,$$

яъни (60.9) да ифодаланган тензор компонентлари ҳар қандай система учун ҳам бир хилдир. *Кронекер символи δ^i_j ни бирлик аралаш тензор десак ҳам бўлади.*

61. ТЕНЗОРЛАР АЛГЕБРАСИ

Тензорлар билан бажариладиган амаллардан энг оддийси тензор индексларидан иккитасининг ўрнини алмаштиришдир. Ўринлари алмашинувчи индексларнинг иккаласи ҳам ковариант ёки иккаласи ҳам контравариант, ёхуд бири ковариант ва иккинчиси контравариант бўлиши мумкин. Масалан, иккинчи рангли a_{pq}, a^{pq}, $a_{p\cdot}^{\cdot q}$ тензорларни олайлик. Индексларининг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган миқдорларни b_{qp}, b^{qp}, $b_{\cdot q}^{p\cdot}$ орқали белгилайлик:

$$a_{pq} = b_{qp} \tag{61.1}$$

$$a^{pq} = b^{qp} \tag{61.2}$$

$$a_{p\cdot}^{\cdot q} = b_{q\cdot}^{\cdot p} \tag{61.3}$$

Тензор таърифидан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$b'_{ji} = a'_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} a_{pq} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} b_{qp} = \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} b_{qp}. \tag{61.4}$$

$$b'^{ji} = a'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} a^{pq} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} b^{qp} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} b^{qp}. \tag{61.5}$$

$$b'^{\cdot i}_{j\cdot} = a'^{\cdot j}_{i\cdot} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} a_{p\cdot}^{\cdot q} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{dx'^j}{\partial x^q} b_{q\cdot}^{\cdot p} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} b_{q\cdot}^{\cdot p} \tag{61.6}$$

Демак, (61.4) *билан* (61.5) *га асосан, тензорнинг иккита ковариант ёки иккита контравариант индексларининг ўринлари алмашинса, натижада ўша рангли ва ўша тузилишдаги тензор ҳосил бўлади.* Аммо (61.6) дан кўрамизки, тензордаги ковариант ва контравариант индекс ўринлари алмаштирилса, натижада унинг тензорлик характери бузилади, чунки ковариант ва контравариант индекслар турли алмаштириш қонунларига бўйсунади. Илгаридан биламизки, тензорлик характерига эга ифодаларда йиғиштириш индекси албатта бир марта ковариант, иккинчи марта эса контравариант бўлиб учрайди. Масалан, (61.4) да ёки (61.5) да йиғиштириш индекслари q билан p нинг ҳар бири ҳам ковариант, ҳам контравариант бўлиб учрайди. (61.6) да эса бундай эмас: йиғиштириш индекси q фақат ковариант бўлиб икки марта такрорланади, йиғиштириш индекси p эса фақат контравариант бўлиб, у ҳам икки марта такрорланади. Шундай қилиб, (61.3) да ифодаланган тенглик тензорлик характерига эга эмас.

Агар тензор ўзининг ковариант индексларига нисбатан координаталарнинг бирор системасида симметриклик ёки антисимметриклик хусусиятига эга бўлса, бошқа ҳар қандай системада ҳам унинг бу хусусияти сақланади, яъни *тензорнинг ковариант индексларига нисбатан симметрияси ёки антисимметрияси инвариант хусусиятдир.* Масалан, $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталар системасида тензор биринчи ва учинчи ковариант индексларига нисбатан симметрик бўлсин:

$$T_{ijk} = T_{kji}.$$

Шуни назарда тутсак, тензорнинг таърифига мувофиқ:

$$T'_{lms} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T_{ijk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T_{kji} =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x'^s}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l} T_{kji} = T'_{sml}$$

бўлади. Худди шунингдек, агар:

$$T_{ijk} = - T_{jik}$$

экан

$$T'_{lms} = - T'_{mls}$$

бўлади. Шу айтилганлар тензорнинг контравариант индексларига нисбатан ҳам тўғридир.

Аралаш тензор ўзининг ковариант ёки фақат контравариант индексларига нисбатан симметрик ёхуд антисимметрик бўлиши мумкин. Лекин турли типдаги индексларига нисбатан, яъни бири ковариант бўлган ва иккинчиси контравариант бўлган индексларига нисбатан, аралаш тензорнинг симметрияси ёки антисимметрияси инвариантлик хусусиятига эга эмас. Масалан, бирор системада учинчи рангли аралаш $T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ тензор биринчи контравариант индекси билан иккинчи ковариант индексига нисбатан симметриклик хусусиятига эга бўлсин:

$$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = T^{j\cdot\cdot}_{\cdot ik} \tag{61.7}$$

Учинчи рангли аралаш тензор таърифига мувофиқ:

$$T'^{l\cdot\cdot}_{\cdot ms} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \tag{61.8}$$

бўлади. (61.7) да ифодаланган шартдан фойдалансак, у вақтда

$$T'^{l\cdot\cdot}_{\cdot ms} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T^{j\cdot\cdot}_{\cdot ik}$$

бўлади. Сўнгги ифода тензорлик хусусиятига эга эмас. Демак, *аралаш тензорнинг турли типдаги индексларига нисбатан симметриклиги ёки антисимметриклиги ҳақида сўз бўлиши мумкин эмас.*

Аммо ковариант ва контравариант индексларнинг турган *жойларига* нисбатан аралаш тензор бирор системада симметрик ёки антисимметрик бўлса, у ҳар қандай бошқа системада ҳам шу хоссага эга бўлади. Масалан, бирор системада учинчи рангли аралаш $T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ тензор ўзининг биринчи контравариант ва учинчи ковариант индексларининг турган жойларига нисбатан симметрик бўлсин:

$$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = T^{\cdot\cdot i}_{kj\cdot}$$

Буни назарда тутиб, (61.8) га биноан, бундай ёзамиз:

$$T'^{l\cdot\cdot}_{\cdot ms} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} T^{\cdot\cdot i}_{kj\cdot} =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x'^s}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^l}{\partial x^i} T^{\cdot\cdot i}_{kj\cdot} = T'^{\cdot\cdot l}_{sm\cdot}$$

Бир хил рангли ва бир хил тузилишдаги тензорларни қўшиш ёки айириш мумкин. Масалан, бир марта контравариант ва уч марта ковариант бўлган тўртинчи рангли иккита тензор берилган бўлсин.

$$A'^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x^q}{\partial x'^l} A^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot npq}, \quad B'^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x^q}{\partial x'^l} B^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot npq}.$$

Бу ифодаларнинг мос томонларини ўзаро қўшиш ёки айириш мумкин:

$$A'^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} \pm B'^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x^q}{\partial x'^l}\left(A^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot npq} \pm B^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot npq}\right)$$

яъни *бир хил ранг ва бир хил тузилишдаги тензорлар йиғиндиси ёки айирмаси ўша рангли ва ўша тузилишдаги тензор ҳосил қилади.*

Скалярнинг аниқ рангли ва тузилишдаги тензорга кўпайтмаси ҳам шу рангли ва шу тузилишдаги тензор ҳосил қилади:

$$\varphi A'^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x^q}{\partial x'^l}\varphi A^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot npk}.$$

Учинчи бобда оддий тензорларни симметриялаш ва альтернациялаш ҳақида айтилганларни бу ерда ҳам такрорлаб ўтишимиз мумкин. Лекин тензорнинг симметриклиги ва антисимметриклиги унинг фақат ковариант ёки фақат контравариант индексларига нисбатан юз бериши мумкинлиги бизга маълум. Демак, *тензорни симметриялаш ёки альтернациялаш амали бу тензорнинг ё ковариант, ёки контравариант индексларигагина нисбатан, яъни бир типдаги индексларигагина нисбатан бажарилиши мумкин.*

Энди иккинчи ва учинчи рангли иккита тензорни олайлик:

$$T'^{\cdot j}_{i\cdot} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q} T^{\cdot q}_{p\cdot},$$

$$T'^{kl\cdot}_{\cdot\cdot m} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{rs\cdot}_{\cdot\cdot t}$$

Бу ифодаларнинг мос томонларини кўпайтирайлик:

$$T'^{\cdot j}_{i\cdot} T'^{kl\cdot}_{\cdot\cdot m} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{\cdot q}_{p\cdot} T^{rs\cdot}_{\cdot\cdot t}$$

Агар:

$$T_{p\,.}^{\cdot\, q}\, T^{rs.}_{\cdot\cdot t} = T_{p\,\ldots\, t}^{\cdot\, q\, r\, s.}$$

деб белгиласак, у вақтда:

$$T'^{\,.\,jkl\,.}_{\;i\,.\,.\,m} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{\cdot\, q\, r\, s.}_{\;p\,\ldots\, t} \tag{61.9}$$

бўлади, *яъни иккинчи рангли ва учинчи рангли тензорлар кўпайтмаси бешинчи рангли натижавий тензор ҳосил қилади, натижавий тензорда кўпайтирилувчи тензорлар индексларининг нисбий жойланиш тартиблари билан типлари ўзгармайди. Умуман тензорлар кўпайтмаси кўпайтирилувчи тензорларнинг ранглари йиғиндисига тенг рангли тензор ҳосил қилади ва ҳар бир индекс ўзининг нисбий жойи билан типини сақлаб қолади.*

Тензорни иккита индекси бўйича йиғиштиришда бир индекс ковариант бўлса, иккинчиси контравариант бўлиши лозим. (61.9) да ифодаланган бешинчи рангли тензорни i ва j, i ва k, i ва l, m ва j, m ва k, m ва l индекслар бўйича йиғиштирса бўлади. Масалан, шу тензорни ковариант i индекс ва контравариант k индекс бўйича йиғиштирайлик (демак, $i=k$ деб ҳисоблаймиз).

$$T'^{\,\cdot\, jil\,\cdot}_{\;i\,\ldots\, m} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T_{p\,\ldots\, t}^{\cdot\, qrs.}$$

Аммо (59.5) га биноан:

$$\frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r} = \delta^p_r$$

бўлади. Демак:

$$T'^{\,\cdot\, jil\cdot}_{i\,.\,.\,m} = \delta^p_r \frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{\cdot\, qrs\,\cdot}_{p\,\ldots\, t} =$$

$$= \frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{\cdot\, qps\,\cdot}_{p\,\ldots\, t}$$

келиб чиқади. Бешинчи рангли тензорни бир марта йиғиштириб, учинчи рангли тензор ҳосил қилинди:

$$T'^{\,jl\,\cdot}_{\;.\,.\,m} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^m} T^{qs\cdot}_{\,.\,.\,t}$$

Бу тензорни ҳам контравариант j индекс ва ковариант m индекс бўйича йиғиштирайлик (демак, $j=m$ деб ҳисоблаймиз):

$$T'^{\,jl\cdot}_{\,.\,.\,j} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^j} T^{\;qs\,\cdot}_{\;.\,.\,t}$$

Яна ўша (59.5) га мувофиқ:

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^t}{\partial x'^j}=\delta^t_q$$

бўлади, демак;

$$T'^{jl}_{..j}=\delta^t_q\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}T^{qs\cdot}_{..t}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}T^{qs\cdot}_{..q}$$

келиб чиқади. Бинобарин, учинчи рангли тензор бир марта йиғиштирилса ёки бешинчи рангли тензор икки марта йиғиштирилса, натижада биринчи рангли тензор ҳосил бўлади. Хуллас: *ҳар бир йиғиштиришда тензорнинг ранги иккитага камаяди*. Ҳар қандай тензорни кетма-кет йиғиштириш натижасида, бу тензор рангининг жуфтлиги ёки тоқлигига қараб, ё скаляр ёки вектор ҳосил бўлади.

Агар тензор иккаласи ҳам ковариант ёки контравариант бўлган индекслар бўйича йиғиштирилса, тензор тушунчасининг таърифидан аёнки чиққан натижа тензорлик характерига эга бўлмайди. Тензорни бири ковариант ва иккинчиси контравариант бўлган индекслар бўйичагина йиғиштириш натижаси тензор ҳосил қилади.

Қўшиш, айириш, кўпайтириш, йиғиштириш каби амалларнинг бажарилиши натижасида тензорлардан тензорлар ҳосил бўлишини кўриб чиқдик. Энди тензорлар ҳақидаги асосий теорема билан танишайлик. Бу теоремани умумий шаклда шундай ифодалаш мумкин: *тензорлиги номаълум бўлиб, лекин ихтиёрий тензорга кўпайтирганда тензор ҳосил қилувчи миқдорлар тўплами тензор бўлади.*

Бу ерда хусусий бир ҳол билангина чекланмоқчимиз. Масалан, тензорлиги номаълум бўлган тўрт индексли миқдорлар тўплами бир системада $X^{\cdot qr\cdot}_{p..s}$ ва бошқа системада $X'^{\cdot jk\cdot}_{i..l}$ бўлсин.

Биринчи индексига нисбатан ковариант ва иккинчи индексига нисбатан контравариант бўлган иккинчи рангли ихтиёрий тензор $T^{\cdot s}_{r\cdot}$ ни олиб, тубандагича ифода тузайлик:

$$X^{\cdot qr\cdot}_{p..s}T^{\cdot s}_{r\cdot}=A^{\cdot q}_{p\cdot}. \qquad (61.10)$$

Бу формуланинг ўнг томонида турган $A^{\cdot q}_{p\cdot}$ биринчи индексига нисбатан ковариант ва иккинчи индексига нисбатан контравариант бўлган иккинчи рангли тензор бўлса, у вақтда $X^{\cdot qr\cdot}_{p..s}$ миқдорлар тўплами биринчи индекс билан тўртинчи индексга нисбатан ковариант ва иккинчи индекс билан учинчи индексга нисбатан контравариант бўлган тўртинчи рангли тензордир. Ҳақиқатан, координаталарнинг ҳар қандай системаси учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$X'^{\cdot jk\cdot}_{i..l}\,T'^{\cdot l}_{k\cdot}=A'^{\cdot j}_{i\cdot}. \qquad (61.11)$$

Тензор таърифига мувофиқ:

$$T'^{\cdot l}_{k\cdot} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} T^{\cdot s}_{r\cdot}$$

ва

$$A'^{\cdot j}_{i\cdot} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} A^{\cdot q}_{p\cdot}$$

У вақтда (61.11) шундай ёзилади:

$$X'^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} T^{\cdot s}_{r\cdot} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} A^{\cdot q}_{p\cdot}$$

ёки $A^{\cdot q}_{p\cdot}$ ифодасини (61.10) дан олиб қўйсак:

$$X'^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} T^{\cdot s}_{r\cdot} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} X^{\cdot qr\cdot}_{p\cdot\cdot s} T^{\cdot s}_{r\cdot}$$

бўлади. Ҳамма ҳадларни тенгликнинг бир томонига ўтказиб, умумий кўпайтувчи $T^{\cdot s}_{r\cdot}$ ни қавслар ташқарисига чиқарамиз:

$$\left(X'^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} - \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} X^{\cdot qr\cdot}_{p\cdot\cdot s}\right) T^{\cdot s}_{r\cdot} = 0.$$

Шартимизга кўра $T^{\cdot s}_{r\cdot}$ ихтиёрий тензордир, демак, қавслар ичидаги ифода нолга тенг бўлади:

$$X'^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} X^{\cdot qr\cdot}_{p\cdot\cdot s}.$$

Бу тенгликнинг икки томонини $\frac{\partial x'^m}{\partial x^u} \frac{\partial x^v}{\partial x'^n}$ га кўпайтирайлик, сўнгра эса $u = r$ ва $v = s$ деб ҳисоблаб йиғиштирайлик:

$$X'^{\cdot jk\cdot}_{i\cdot\cdot l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^s} \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^n} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^n} X^{\cdot qr\cdot}_{p\cdot\cdot s}$$

Аммо (59.6) га мувофиқ:

$$\frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} = \delta^m_k$$

ва

$$\frac{\partial x'^l}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^n} = \delta^l_n$$

бўлади. У вақтда:

$$X'^{\cdot jk}_{i\cdot\cdot l} \delta^m_k \delta^l_n = X'^{\cdot jm\cdot}_{i\cdot\cdot n}$$

демак:

$$X'^{\cdot jm\cdot}_{i\cdot\cdot n} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^n} X^{\cdot qr\cdot}_{p\cdot\cdot s}$$

келиб чиқади. Бу формула биринчи билан тўртинчи индексларга нисбатан ковариант ва иккинчи билан учинчи индексларга нисбатан контравариант бўлган тўртинчи рангли тензорни ифодалайди. Шундай қилиб исбот қилиниши лозим бўлган натижа топилди.

Инвариант билан векторнинг нолинчи ва биринчи рангли тензорлиги назарда тутилса, тензорлар ҳақидаги асосий теоремани шундай ифодалаш мумкин: *тензорлиги номаълум бўлиб, ихтиёрий тензорга кўпайтирганда инвариант ёки вектор ҳосил қилувчи миқдорлар тўплами тензор бўлади.*

Текширишларда учраб турувчи миқдорларнинг тензорлик характерини аниқлашда бу теорема ғоят муҳимдир.

62. МЕТРИК ТЕНЗОР

Оддий уч ўлчовли фазо текширилганда Декарт координаталари ёки эгри чизиқли координаталар билан иш кўрилади. Фазода бирор чизиқ текшириладиган бўлса, ундаги нуқтанинг вазияти учта Декарт координатаси ёки мос олинган эгри чизиқли битта координата билан аниқланади. Сирт берилган булса, бу вазифани ҳам учта Декарт координатаси ёки эгри чизиқли иккита координата бажаради. Эгри чизиқли координаталар орқали ифодаланувчи чизиқ ва сиртни Декарт координаталари орқали ифодаланувчи уч ўлчовли фазога ботирилган бир ўлчовли фазо ва икки ўлчовли фазо деб қараш мумкин. Худди шунингдек $x^1, x^2, \ldots, x^n$ эгри чизиқли координаталар воситасида ифодаланувчи n ўлчовли фазони $x_1, x_2, \ldots, x_N$ Декарт координаталари орқали ифодаланувчи N улчовли фазога ботирилган деб қарашимиз мумкин ($N > n$).

Фазонинг бир-бирига чексиз яқин бўлган икки нуқтаси орасидаги масофанинг квадрати Декарт координаталари воситасида

$$ds^2 = dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + \ldots + dx_Ndx_N$$

ёки қисқача:

$$ds^2 = dx_a dx_a \tag{62.1}$$

бўлади, бу ерда:

$$a = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N.$$

Бир-бирига чексиз яқин икки нуқта орасидаги масофа квадрати координаталар танланишига боғлиқ эмас, яъни у инвариантдир. *Декарт координаталарида бир-бирига чексиз яқин икки нуқтаси орасидаги масофа квадрати* (62.1) *га мувофиқ аниқланувчи фазо Эвклид фазоси деб аталган эди.*

(62.1) *формула N ўлчовли Эвклид фазосида масофа дифференциалининг квадратини ифодалайди.*

n ўлчовли фазо нуқтасининг эгри чизиқли координаталари $x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n$ бўлсин. Нуқтанинг Декарт координаталари эгри чизиқли координаталарнинг функциялари бўлсин:

$$x_1 = x_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$
$$x_2 = x_2(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_N = x_N(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

ёки қисқача ёзилса, бундай бўлади:

$$x_a = x_a(x^i), \tag{62.2}$$

бу ерда:

$$a = 1, 2, \ldots, N \text{ ва } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(62.2) дан дифференциал олайлик:

$$dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial x^i} dx^i$$

ёки

$$dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial x^j} dx^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

У вақтда (62.1) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$ds^2 = dx_a dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial x^i} \frac{\partial x_a}{\partial x^j} dx^i dx^j. \tag{62.3}$$

Энди координаталар дифференциалларининг $dx^i dx^j$ кўпайтмаси олдидаги коэффициентни g_{ij} орқали

$$g_{ij} = \frac{\partial x_a}{\partial x^i} \frac{\partial x_a}{\partial x^j} \tag{62.4}$$

белгилаб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{62.5}$$

Бир-бирига чексиз яқин бўлган икки нуқтаси орасидаги масофа квадрати (62.5) *формулага мувофиқ аниқланувчи фазо Риман фазоси дейилади.* Риман фазосида, демак, масофа дифференциалининг квадрати координаталар дифференциалларига нисбатан бир жинсли, иккинчи даражали функциядир, яъни бир жинсли квадратик функциядир.

Одатда, координаталар ҳақиқий сонлардан иборат бўлиб, (62.5) нинг ўнг томони мусбат миқдордир, яъни масофа дифференциали ҳақиқийдир. Фазо координаталари комплекс сонлар бўлиши ҳам мумкин (масалан нисбийлик назариясида). У вақтда *масофа дифференциали, яъни элементар вектор узунлиги ҳақиқий, мавҳум ёки ноль бўлиши мумкин. Бундай хусусиятга эга фазо баъзан Риман псевдофазоси деб аталади. Узунлиги нолга тенг бўлган вектор изотроп вектор дейилади.* Масалан, ёруғлик тарқалишининг вақт-фазовий хусусиятларини изотроп чизиқлар воситасида ифодалаш мумкин.

Координаталар дифференциалларининг биринчи рангли контравариант тензор ҳосил қилиши бизга маълум. (62.5) формулада ds^2 инвариант бўлиб, $dx^i dx^j$ эса иккинчи рангли контравариант тензордир. Демак, тензорлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ, g_{ij} миқдорлар тўплами иккинчи рангли ковариант тензордир.

(62.5) формулада йиғиштириш индексларининг ўринлари алмаштирилса ва координаталар дифференциалларининг ўринлари алмаштирилса:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^j dx^i = g_{ji} dx^i dx^j$$

ва координаталарнинг дифференциаллари ихтиёрий бўлганлиги учун:

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{62.6}$$

Бу натижага (62.5) даги g_{ij} тензорни симметрик ва антисимметрик тензорларга ажратиш орқали ҳам келиш мумкин. Антисимметрик тензорнинг симметрик $dx^i dx^j$ тензор билан кўпайтмаси ноль ҳосил қилиши бизга маълум. Шундай қилиб, (62.5) да g_{ij} тензорни симметрик тензор деб ҳисоблашга ҳақлимиз.

Юқоридаги (62.4) дан ҳам бу натижа яққол кўриниб турибди. (62.5) *га мувофиқ, координаталарнинг дифференциаллари орқали масофа дифференциалининг квадратини аниқловчи симметрик g_{ij} тензор ковариант метрик тензор ёки ковариант фундаментал тензор деб юритилади.*

Иккинчи рангли тензор компонентларининг умумий сони n^2 га тенг. Иккала индекси ҳам бир хил бўлган компонентларининг сони n га тенгдир. Иккала индекси ҳар хил бўлган компонентларининг сони $n^2 - n$ бўлади. g_{ij} тензорнинг симметриклиги туфайли, унинг шу $n^2 - n$ та компонентларидан фақат $\frac{n^2 - n}{2}$ тасигина ўзаро боғланмагандир. *Шундай қилиб, ковариант метрик g_{ij} тензорнинг ўзаро боғланмаган компонентларининг умумий сони*

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

бўлади.

Ковариант метрик g_{ij} тензор компонентларидан тузилган детерминантни g орқали белгилайлик:

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} \tag{62.7}$$

Энди тубандаги шартга бўйсунган иккинчи рангли контравариант g^{jk} тензор олайлик:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \tag{62.8}$$

Шу шартга бўйсунган g_{ij} ва g^{jk} тензорларнинг ҳар бири иккинчисига нисбатан тескари тензор дейилади. Бу ерда g_{ij} тензор ўзининг тескариси бўлган g^{jk} тензорга ўнг томондан кўпайтирилган. У ўзининг тескарисига чап томондан кўпайтирилганда ҳам натижа ўзгармайди (51-параграфга қаралсин):

$$g^{kj} g_{ji} = \delta_i^k. \tag{62.9}$$

Крамер формуласига биноан бундай ёзишимиз мумкин:

$$g^{jk} = \frac{A_{kj}}{|g_{kj}|} = \frac{A_{kj}}{g}, \tag{62.10}$$

бу ерда:

$$A_{kj} = (-1)^{k+j} \Delta_{kj},$$

ва Δ_{kj} (62.7) даги детерминант элементи g_{kj} нинг минори, A_{kj} ўша g_{kj} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси. g детерминант нолга тенг бўлмаслиги керак, акс ҳолда тескари тензор ҳақида гапиришнинг маъноси қолмайди.

(62.8) га биноан:

$$|g_{ij}| \cdot |g^{jk}| = |\delta_i^k|$$

ёки

$$|g_{ij}| \cdot |g^{jk}| = 1. \tag{62.11}$$

$|g_{ij}|$ детерминант элементлари симметрикдир, демак, тегишли алгебраик тўлдирувчилар ҳам симметрик бўлади:

$$A_{kj} = A_{jk}. \tag{62.12}$$

У вақтда (12.10) дан:

$$g^{jk} = g^{kj} \tag{62.13}$$

келиб чиқади. *Ковариант метрик тензор g_{ij} га тескари бўлган симметрик g^{jk} тензор контравариант метрик тензор дейилади.* (62.11) га мувофиқ ковариант ва контравариант метрик тензорлар детерминантларининг кўпайтмаси бирга тенгдир.

Контравариант метрик тензор компонентларидан детерминант тузайлик:

$$|g^{jk}| = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \dots & g^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^{n1} & g^{n2} & \dots & g^{nn} \end{vmatrix} \tag{62.14}$$

Крамер формуласидан фойдаланиб, ковариант метрик тензор компонентларини контравариант метрик тензор компонентлари орқали ифодаласак бўлади:

$$g_{kj} = \frac{B^{jk}}{|g^{jk}|}, \tag{62.15}$$

бу ерда детерминант $|g^{jk}|$ элементи g^{jk} нинг алгебраик тўлдирувчиси B^{jk} орқали белгиланади.

(62.5) *формулада Риман фазосининг метрикаси ифодаланган деб ҳам айтишади. Фазо метрикаси бу масофанинг координаталарга боғланиш характеристикасидир.* Ковариант шаклда ёки контравариант шаклда берилган метрик тензор фазо метрикасини аниқлайди. *Метрик тензори берилган фазо метрик фазо дейилади.*

Риманнинг n ўлчовли фазоси Эвклиднинг N ўлчовли фазосига ботирилган фазо деб қаралиши мумкин. Ҳақиқатан, N билан n орасидаги боғланишни топайлик. Эвклид фазоси нуқтаси $x_1, x_2, \dots, x_N$ Декарт координаталари билан аниқланади. Риман фазоси нуқтаси эса $x^1, x^2, \dots, x^n$ эгри чизиқли координаталар билан аниқланади. Берилган n та эгри чизиқли координаталар билан номаълум N та Декарт координаталари ковариант метрик тензор орқали (62.4) даги тенгламалар билан боғланган. Бу теигламаларнинг сони ковариант метрик тензор компонентларининг умумий сонига тенг бўлади, яъни $\frac{n(n+1)}{2}$ га тенгдир. Бу тенгламалардан номаълум Декарт координаталарини аниқлаш учун $N = \frac{n(n+1)}{2}$ деб олишимиз керак. *Шундай қилиб, Риманнинг n ўлчовли фазоси Эвклиднинг $\frac{n(n+1)}{2}$ ўлчовли фазосига ботирилган деб ҳисобланади.* Масалан, Риманнинг икки ўлчовли фазоси (қисман, оддий сферик сирт) Эвклиднинг оддий уч ўлчовли фазосига ботирилган фазодир.

Декарт координаталари системасида ковариантлик ва контравариантлик орасида фарқ қолмаслиги (59-параграф) бизга маълум. (62.1), (62.5) дан бундай система учун қуйидагини ёзамиз:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{62.16}$$

бу ерда δ_{ij} —Кронекер символи. У вақтда, (62.8) га мувофиқ:

$$g^{ik} = \delta_i^k$$

ёки, барибир:

$$g^{ij} = \delta_{ij} \tag{62.17}$$

бўлади. *Шундай қилиб, Декарт системасида метрик тензорнинг бир хил индексли компонентлари бирга тенг, ҳар хил индексли компонентлари эса нолга тенгдир.*

63. ТЕНЗОР ИНДЕКСЛАРИНИ КЎТАРИШ ВА ТУШИРИШ

Тензор индексларининг сони шу тензорнинг рангини аниқлайди. Тензор индексларининг қайсилари ковариант ва қайсилари контравариант бўлишига қараб, тензорнинг тузилиши аниқланади. Лекин берилган тензорнинг рангини ўзгартмасдан, метрик тензор ёрдамида уни турлича ифодалаш мумкин.

Метрик тензор компонентларини алмаштириш формулаларини ёзайлик:

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} g_{pq}, \tag{63.1}$$

$$g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x'^j}{\partial x^q} g^{pq}. \tag{63.2}$$

g_{ij}, g^{jk} тензорлар билан Кронекер символи δ_i^k нинг боғланиши бизга маълум:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \tag{63.3}$$

ёки

$$g^{kj} g_{ji} = \delta_i^k. \tag{63.4}$$

Контравариант g^{ij} тензор билан ковариант a_k вектор кўпайтмаси $g^{ij}a_k$ ни $j = k$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш натижасида ҳосил бўлган контравариант векторни a^i орқали белгилайлик:

$$a^i = g^{ij} a_j. \tag{63.5}$$

Ковариант g_{lm} тензор билан контравариант a^n вектор кўпайтмаси $g_{lm}a^n$ ни, $m = n$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш натижасида ҳосил бўлган ковариант векторни a_l орқали белгилайлик:

$$a_l = g_{lm} a^m. \tag{63.6}$$

Сўнгги икки ифода бир-бирига эквивалентдир, яъни уларнинг биридан иккинчисини келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан, (63.5) нинг икки томонини g_{kl} га кўпайтирайлик, сўнгра $l = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштирсак, (63.3) га биноан:

$$g_{ki} a^i = g_{ki} g^{ij} a_j = \delta_k^j a_j$$

ёки

$$a_k = g_{kl} a^l$$

бўлади.

Энди (63.6) нинг икки томонини g^{ij} га кўпайтирайлик, сўнгра $j = l$ деб ҳисоблаб, йиғиштирсак, (63.4) га биноан:

$$g^{il} a_l = g^{il} g_{lm} a^m = \delta^i_m a^m = a^i$$

ёки

$$a^i = g^{il} a_l$$

бўлади.

Биз a^i миқдорларни контравариант вектор компонентлари, a_i миқдорларни эса ковариант вектор компонентлари деб келган эдик. Лекин ҳозиргина (63.5) ва (63.6) формулаларнинг эквивалентлиги ҳақида айтилганлардан a^i ва a_i *миқдорлар бир векторнинг турлича олинган компонентлари деб қаралиши мумкинлигини кўрдик*: векторнинг контравариант компонентлари a^i бўлса, ўша векторнинг ковариант компонентлари a_i бўлади.

(63.5) га биноан, контрвариант метрик тензор воситасида векторнинг ковариант компонентларидан унинг контравариант компонентларини ҳосил қилиш мумкин, яъни *контравариант метрик тензор воситасида вектор компонентларининг ковариант индексини кўтариб, контравариант индекс ҳосил қилинади.* (63.6) *га мувофиқ, ковариант метрик тензор воситасида вектор компонентларининг контравариант индексини тушириб, ковариант индекс ҳосил қилинади.*

(63.5) ва (63.6) да *метрик тензор индексларидан бири йиғиштириш индекси бўлиб, иккинчиси вектор компонентларининг ҳосил қилинадиган янги индексидир.*

Айтилганлардан равшанки, векторнинг индекси аввал кўтарилса ва сўнгра туширилса, ёки аввал туширилса ва сўнгра кўтарилса, натижада дастлабки векторнинг ўзи ҳосил бўлади.

Метрик тензор воситасида тензорларнинг ҳам индексларини кўтариш ёки тушириш мумкин. Контравариант метрик тензор воситасида индекс кўтарилса, ковариант метрик тензор воситасида индекс туширилади. Метрик тензорнинг йиғиштириш олинмаган, яъни озод индекси берилган тензорнинг янгидан ҳосил қилинган индекси бўлади. Бир неча мисол келтирайлик. Иккинчи рангли контравариант тензор T^{ij} берилган бўлсин. Унинг g_{kl} билан кўпайтмасини $l = i$ деб ҳисоблаб, сўнгра йиғиштирсак, натижада $T_{k.}^{\cdot j}$ тензор вужудга келади:

$$g_{ki} T^{ij} = T_{k.}^{\cdot j} \qquad (63.7)$$

Бу ерда контравариант T^{ij} тензорнинг биринчи контравариант индекси туширилиб, унга мос аралаш $T^{\cdot j}_{k.}$ тензор яратилди. Берилган тензор T^{ij} нинг g_{kl} билан кўпайтмасида $l = j$ деб ҳисоблаб, сўнгра йиғиштирсак, натижада $T^{i\cdot}_{\cdot k}$ тензор келиб чиқади:

$$g_{kj}T^{ij} = T^{i\cdot}_{\cdot k}. \tag{63.8}$$

Бу ерда контравариант T^{ij} тензорнинг иккинчи контравариант индекси туширилиб, унга мос аралаш $T^{i\cdot}_{\cdot k}$ тензор яратилди.

Берилган T^{ij} тензорнинг $g_{kl}\, g_{mn}$ билан кўпайтмасида $l = i$ ва $n = j$ деб ҳисоблаб, сўнгра йиғиштирсак, натижада T_{km} тензор келиб чиқади:

$$g_{ki}\, g_{mj}T^{ij} = g_{ki}\, T^{i\cdot}_{\cdot m} = T_{km}. \tag{63.9}$$

Бу ерда контравариант T^{ij} тензорнинг икки контравариант индекси ҳам туширилиб, унга мос ковариант T_{km} тензор яратилди.

Худди шунингдек, тубандагиларни ҳам ёзиш мумкин:

$$g^{ki}T_{ij} = T^{k\cdot}_{\cdot j}, \tag{63.10}$$

$$g^{kj}T_{ij} = T^{\cdot k}_{i\cdot}, \tag{63.11}$$

$$g^{ki}g^{mj}T_{ij} = g^{ki}T^{\cdot m}_{i\cdot} = T^{km}. \tag{63.12}$$

Демак, метрик тензор воситасида битта тензорни эквивалент булган бир неча шаклларда ёзиб кўрсатиш мумкин. Шунинг учун T_{ij}, $T^{k\cdot}_{\cdot j}$, $T^{\cdot l}_{i\cdot}$, T^{kl} тензорларни аслида иккинчи рангли битта тензорнинг ковариант, аралаш ва контравариант компонентлари деб ҳисоблашимиз лозим.

Метрик тензорнинг индексларини кўтариш ва тушириш масаласини кўриб чиқайлик. Метрик тензорнинг симметриклигини назарда тутсак, (63.7) билан (63.8) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$g^{\cdot j}_{k\cdot} = g_{ki}g^{ij} = g_{ik}g^{ji} = g^{j\cdot}_{\cdot k} \tag{63.13}$$

ёки (63.10) билан (63.11) га биноан, бундай ёзамиз:

$$g^{k\cdot}_{\cdot j} = g^{ki}g_{ij} = g^{ik}g_{ji} = g^{\cdot k}_{j\cdot}, \tag{63.14}$$

яъни метрик тензордан ҳосил қилинган аралаш тензор ўз индексларининг ўринларига нисбатан симметрикдир, демак, индексларининг биринчи ёки иккинчи ўринда туриши аҳамиятга эга эмас. Шунинг учун $g^{\cdot j}_{k\cdot}$ билан $g^{j\cdot}_{\cdot k}$ ни g^j_k орқали ва $g^{k\cdot}_{\cdot j}$ билан $g^{\cdot k}_{j\cdot}$ ни g^k_j орқали белгиласак булади:

$$g^{\cdot j}_{k\cdot} = g^{j\cdot}_{\cdot k} = g^j_k, \tag{63.15}$$

$$g^{k\cdot}_{\cdot j} = g^{\cdot k}_{j\cdot} = g^k_j. \tag{63.16}$$

Шундай қилиб:

$$g_{kl}g^{lj} = g_k^j, \tag{63.17}$$

$$g^{kl}g_{lj} = g_j^k \tag{63.18}$$

бўлади. *Бу тенгликларнинг ўнг томонида турган тензор аралаш метрик тензор дейилади.* Охирги икки формуладан метрик тензорнинг Кронекер символидан фарқ қилмаслиги тўғрисида хулоса чиқарамиз:

$$g_{j.}^{l} = \delta_j^l, \tag{63.19}$$

яъни *аралаш метрик тензорнинг бир хил индексли компонентлари бирга тенг, ҳар хил индексли компонентлари эса нолга тенгдир.* Бу ерда ҳам g_{lj}, g_l^k, g^{kl} тензорлар турли тензорлар бўлмасдан битта тензорнинг—метрик тензорнинг ковариант, аралаш ва контравариант компонентлари деб ҳисобланиши керак.

Аралаш метрик тензор воситасида бирор тензорнинг индексини кўтармасдан ёки туширмасдан, яъни тензор тузилишини ўзгартмасдан қолдириб, унинг индексини бошқа ҳарф билан алмаштириш мумкин бўлади, масалан:

$$\left.\begin{aligned} g_j^l T_{lkl} &= T_{jkl}, \\ g_j^l T^{kj} &= T^{kl}, \\ g_j^l T^{j.}_{.k} &= T^{l.}_{.k}, \\ g_j^l T^{..j}_{kl.} &= T^{..l}_{kl.}\,. \end{aligned}\right\} \tag{63.20}$$

Аралаш метрик тензор g_j^l, шунингдек Кронекер тензори δ_j^l ҳам, баъзан ўрнига қўйиш тензори ёки субституция тензори дейилади.

Тензорларни йиғиштиришда йиғиштириш индексининг бир марта ковариант ва иккинчи марта контравариант бўлиб учраши бизга маълум. Йиғиштиришнинг ковариант индекси кутарилганда, контравариант индекси туширилиши ёки контравариант индекси туширилганда, ковариант индекси кўтарилиши керак. Масалан, A^{ij} тензор билан B_{klm} тензор кўпайтмасида $i=k$ ва $j=m$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш натижасини тубандагича ёзсак бўлади:

$$A^{ij}B_{ilj} = A_{i.}^{.j}B^{i..}_{.lj}, \tag{63.21}$$

$$A^{ij}B_{ilj} = A^{i.}_{.j}B^{..j}_{il.}, \tag{63.22}$$

$$A^{ij}B_{ilj} = A_{ij}B^{i.j}_{.l.}. \tag{63.23}$$

Ҳақиқатан, берилган тензорларнинг индексларини метрик тензор воситасида кўтариш ёки тушириш учун юқорида топилган формулалардан фойдаланайлик:

$$\left.\begin{aligned} A^{ij} &= g^{pi}A_{p.}^{\cdot j} \\ B_{ilj} &= g_{ri}B_{.lj}^{r..} \end{aligned}\right\} \qquad (63.24)$$

$$\left.\begin{aligned} A^{ij} &= g^{pj}A_{\cdot p}^{i\cdot} \\ B_{ilj} &= g_{rj}B_{il.}^{\cdot\cdot r} \end{aligned}\right\} \qquad (63.25)$$

$$\left.\begin{aligned} A^{ij} &= g^{pi}g^{qj}A_{pq} \\ B_{ilj} &= g_{ri}g_{sj}B_{.l.}^{r.s} \end{aligned}\right\} \qquad (63.26)$$

(63.24) ва (63.18) га биноан, бундай ёзамиз:

$$A^{ij}B_{ilj} = g^{pi}A_{p.}^{\cdot j}g_{ri}B_{.lj}^{r..} = g_r^pA_{p.}^{\cdot j}B_{.lj}^{r..} = A_{p.}^{\cdot j}B_{.lj}^{p..}.$$

Энди йиғиштириш индекси p ўрнига i олсак:

$$A^{ij}B_{ilj} = A_{i.}^{\cdot j}B_{.lj}^{i..}$$

бўлади, яъни (63.21) формула келиб чиқди. Худди шунинг сингари, (63.25) ва (63.26) формулалардан фойдаланиб, (63.22) билан (63.23) формулаларни ҳам келтириб чиқариш мумкин.

Векторнинг модулини шу векторнинг Декарт компонентлари орқали ифодалаш мумкинлигини биз биламиз.

Икки векторнинг Декарт компонентлари орқали уларнинг скаляр кўпайтмаси ҳамда орасидаги бурчагининг қандай ифодаланиши ҳам маълум. Ўша айтилганларни умумлаштириб, вектор модули, векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва векторлар орасидаги бурчакни векторнинг ковариант ва контравариант компонентлари орқали ифодалаш мумкин.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг модули:

$$a = \sqrt{a_i a^i} \qquad (63.27)$$

бўлади. Вектор модулини (63.5) ва (63.6) га мувофиқ бошқа шаклларда ёзсак ҳам бўлади:

$$a = \sqrt{g^{ij}a_i a_j},$$
$$a = \sqrt{g_{ij}a^i a^j}.$$

Шундай қилиб:

$$\sqrt{a_i a^i} = \sqrt{g^{ij}a_i a_j} = \sqrt{g_{ij}a^i a^j}$$

ёки вектор модулининг квадрати учун:

$$a_i a^i = g^{ij}a_i a_j = g_{ij}a^i a^j \qquad (63.28)$$

бўлади.

Вектор модулининг квадрати векторнинг нормаси деб ҳам аталади. Икки ***a, b*** *векторнинг скаляр кўпайтмаси:*

$$(\boldsymbol{ab}) = a_i b^i. \tag{63.29}$$

бўлади. Скаляр кўпайтмани бошқа шаклларда ҳам ёзиш мумкин:

$$(\boldsymbol{ab}) = g^{ij} a_i b_j,$$
$$(\boldsymbol{ab}) = g_{ij} a^i b^j.$$

Йиғиштириш индекси бир жойда кўтарилганда иккинчи жойда туширилиши назарда тутилса:

$$(\boldsymbol{ab}) = a^i b_i$$

бўлади. Шундай қилиб:

$$a_i b^i = g^{ij} a_i b_j = g_{ij} a^i b^j = a^i b_i. \tag{63.30}$$

Икки ***a, b*** *вектор орасидаги бурчак косинуси тубандагича бўлади*:

$$\cos\varphi = \frac{a_i b^i}{\sqrt{a_i a^i}\sqrt{b_i b^i}}. \tag{63.31}$$

Юқорида айтилганлар назарда тутилса:

$$\cos\varphi = \frac{a_i b^i}{\sqrt{a_i a^i}\sqrt{b_i b^i}} = \frac{a^i b_i}{\sqrt{a_i a^i}\sqrt{b_i b^i}} = \frac{g^{ij} a_i b_j}{\sqrt{g^{ij} a_i a_j}\sqrt{g^{ij} b_i b_j}} =$$
$$= \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j}\sqrt{g_{ij} b^i b^j}} \tag{63.32}$$

келиб чиқади. Ўзаро перпендикуляр бўлган икки ***a***, ***b*** вектор учун сўнгги формуладан фойдаланиб, тубандагини ёзамиз:

$$a_i b^i = a^i b_i = g^{ij} a_i b_j = g_{ij} a^i b^j = 0. \tag{63.33}$$

64. ТЕНЗОР ЗИЧЛИКЛАР

Скаляр, вектор ва тензор тушунчалари билан анчагина танишиб чиқдик. Скаляр билан векторнинг хусусий ҳоллардаги тензорлар эканлигини ҳам биламиз. Текширилиши лозим бўлган миқдорлар ичида тензорлик характерига эга бўлмаганлари ҳам учрайди. Масалан, оддий тензорлар анализидан бизга маълумки, псевдотензор билан тензор орасида катта тафовут бор, улар турлича алмаштириш қонунларига бўйсунади, псевдотензор компонентларини алмаштириш формулаларида алмаштириш якобиани биринчи даражада иштирок қилади, тензор компонентларини алмаштириш формулаларида эса у умуман иштирок қилмайди. Псевдоскаляр ва псевдовектор псевдотензорнинг хусусий ҳоли деб ҳисобланиши ҳам бизга маълум. Биламизки, Декарт системасида олинган тензор учун:

$$T'_{i\ldots l} = \alpha_{ip} \cdots \alpha_{lv} T_{p\ldots v} \tag{64.1}$$

ва псевдотензор учун:

$$P'_{i\ldots l} = |\alpha_{jk}|\,\alpha_{ip} \cdots \alpha_{lv} P_{p\ldots v} \tag{64.2}$$

бўлади, бу ерда $\alpha_{ip}, \cdots \alpha_{lv}$ — ортогонал алмаштириш коэффициентлари; $|\alpha_{jk}|$ — шу коэффициентлардан тузилган детерминант, яъни ортогонал алмаштириш якобиани.

Энди янги тушунча—тензор зичлик тушунчасини киритайлик.

Дастлабки $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаталарни янги $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ координаталарга алмаштириш қонуни берилган бўлсин:

$$x'^i = x'^i(x^j). \tag{64.3}$$

Координаталарни алмаштириш якобиани нолга тенг эмас деб ҳисобланади:

$$\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| \neq 0. \tag{64.4}$$

Тўғри алмаштириш ва тескари алмаштириш якобианлари орасидаги боғланиш бизга маълум:

$$\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| \cdot \left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right| = 1, \tag{64.5}$$

демак:

$$\left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right| \neq 0. \tag{64.6}$$

r марта контравариант ва s марта ковариант бўлган, демак, $(r+s)$-рангли тензорни ифодаловчи формулани эслайлик:

$$T'^{i\ldots k}_{j\ldots l} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \cdots \frac{\partial x'^k}{\partial x^u} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} \cdots \frac{\partial x^v}{\partial x'^l} T^{p\ldots u}_{q\ldots v}. \tag{64.7}$$

Энди r *та контравариант индекси ва* s *та ковариант индексли миқдорлар тўплами бирор координаталар системасида* $D^{p\ldots u}_{q\ldots v}$ *ва бошқа координаталар системада* $D'^{i\ldots k}_{j\ldots l}$ *бўлсин.*

Бу миқдорлар ушбу алмаштириш қонунига бўйсунсин:

$$D'^{i\ldots k}_{j\ldots l} = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|^{\lambda} \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \cdots \frac{\partial x'^k}{\partial x^u} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} \cdots \frac{\partial x^v}{\partial x'^l} D^{p\ldots u}_{q\ldots v}, \tag{64.8}$$

бу ерда λ — қандайдир ўзгармас сон. Шу алмаштириш қонунига бўйсунган миқдорлар тўплами тензор зичлик деб, тўплам миқдорлари тензор зичликнинг компонентлари деб, ковариант ва контравариант индексларнинг умумий сони тензор зичликнинг ранги ва λ сон тензор зичликнинг вазминлиги деб аталади. Тензор зичликни баъзан нисбий тензор ёки вазмин тензор деб ҳам юритишади.

$\lambda = 0$ бўлган ҳолда яна (64.7) га қайтамиз. Демак, тензор— бу вазминлиги нолга тенг тензор зичликдир. Вазминлиги билан ранги нолга тенг бўлган тензор зичлик скаляр бўлиб, вазминлиги нолга тенг ва ранги бир бўлган тензор зичлик вектордир. (64.8) га биноан *вазминлиги λ бўлган скаляр зичлик учун:*

$$D' = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|^{\lambda} D \tag{64.9}$$

ва *вазминлиги λ бўлган вектор зичлик учун:*

$$D'^i = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|^{\lambda} \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} D^p \tag{64.10}$$

ёки

$$D'_j = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|^{\lambda} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} D_q \tag{64.11}$$

бўлади. (64.8) билан (64.1) ва (64.2) дан аёнки, Декарт системасида олинган тензор — бу вазминлиги нолга тенг бўлган тензор зичлик, псевдотензор эса вазминлиги бирга тенг бўлган тензор зичликдир. Қисман псевдоскаляр, (64.9) га асосан, вазминлиги бирга тенг бўлган скаляр зичликдир ва псевдовектор эса, (64.10) ёки (64.11) га асосан, вазминлиги бирга тенг бўлган вектор зичликдир.

Жисм массасининг зичлиги псевдоскаляр эканлиги бизга маълум (55- параграф) ёки, янги терминологиядан фойдалансак, жисм массасининг зичлиги скаляр зичлик бўлади. Тензор зичлик сўзининг келиб чиқиши ҳам ана шу билан боғлиқдир.

Тензор зичлик таърифни ифодаловчи (64.8) формуладан ушбу натижаларнинг келиб чиқиши ўз-ўзидан равшан:

1. Вазминлиги бир хил ва ковариант ҳам контравариант индексларининг тузилиши бир хил бўлган тензор зичликлар йиғиндиси ёки айирмаси ўша вазминлик билан ўша тузилишга эга тензор зичлик ҳосил қилади:

$$C^{i\,\ldots\,k}_{j\,\ldots\,l} = A^{i\,\ldots\,k}_{j\,\ldots\,l} \pm B^{i\,\ldots\,k}_{j\,\ldots\,l}. \tag{64.12}$$

2. Тензор зичликлар кўпайтмасини ифодаловчи тензор зичликнинг вазминлиги кўпайтирилувчи тензор зичликларнинг

вазминликлари йиғиндисига тенг, ранги эса ўшаларнинг ранглари йиғиндисига тенгдир:

$$D^{l\ldots k\,p\ldots u}_{j\ldots l\,q\ldots v} = A^{l\ldots k}_{j\ldots l}\,B^{p\ldots u}_{q\ldots v}. \tag{64.13}$$

Умуман, тензорлар билан бажариладиган ҳамма алгебраик амалларни тензор зичликларга нисбатан ишлатиш мумкин.

Энди тензор зичликларга бир неча мисол келтирайлик.

Ковариант метрик тензорни алмаштириш формуласини эслайлик.

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}. \tag{64.14}$$

Детерминантлар кўпайтмаси хусусиятини назарда тутсак, (64.14) га биноан, тубандагини ёзишимиз мумкин:

$$\left| g'_{ij} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \right| \left| g_{kl} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|^2 \left| g_{kl} \right|,$$

демак:

$$\left| g'_{ij} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|^2 \left| g_{kl} \right|.$$

Агар $|g'_{ij}|$ ни g' ва $|g_{kl}|$ ни g орқали белгиласак:

$$g' = |g'_{ij}|, \tag{64.15}$$

$$g = |g_{kl}| \tag{64.16}$$

бўлади, у вақтда:

$$g' = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|^2 g \tag{64.17}$$

келиб чиқади. *Шундай қилиб, ковариант метрик g_{ij} тензор компонентларидан тузилган g детерминант вазминлиги иккига тенг бўлган скаляр зичликдир.*

Юқоридаги тенгликнинг икки томонидан квадрат илдиз олайлик:

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right| \sqrt{g}. \tag{64.18}$$

Демак, ковариант метрик g_{ij} тензор компонентларидан тузилган детерминантнинг квадрат илдизи $\sqrt{g}$ вазминлиги бирга тенг бўлган скаляр зичликдир. Бу скаляр зичлик татбиқларда кўп ишлатилади. Скаляр, вектор ёки тензорни $\sqrt{g}$ га кўпайтириб, скаляр зичлик, вектор зичлик ёки тензор зичлик ҳосил қилиш мумкин.

Энди Леви-Чивита символини киритайлик. *Ковариант индексли* $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ *ва контравариант индексли* $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ *символлар координаталарнинг ҳар бир системасида қуйидагича аниқланган бўлсин:*

1) $i_1, i_2, \ldots, i_n$ индекслар орасида бир хиллари учраса $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ ва $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$;

2) $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *индекслар ҳосил қилган ўрин алмаштириш* $1, 2, \ldots, n$ *сонларга нисбатан жуфт ўрин алмаштириш бўлса,* $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = +1$ ва $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = +1$;

3) $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *индекслар ҳосил қилган ўрин алмаштириш* $1, 2, \ldots, n$ *сонларга нисбатан тоқ ўрин алмаштириш бўлса,*

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = -1 \text{ ва } \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = -1.$$

Шу хоссаларга эга $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ *символлар Леви-Чивита символлари дейилади.*

Шу келтирилган таърифдан равшанки:

$$\varepsilon_{12 \ldots n} = +1 \tag{64.19}$$

$$\varepsilon^{12 \ldots n} = +1 \tag{64.20}$$

$$\varepsilon'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{64.21}$$

$$\varepsilon'^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{64.22}$$

бўлади.

Детерминант таърифига мувофиқ, алмаштириш якобиани тубандагича ёзилади:

$$\left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \ldots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \ldots & \frac{\partial x^2}{\partial x'^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^n}{\partial x'^2} & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^1} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^2} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^n}.$$

Буни Леви-Чивита символидан фойдаланиб, бундай ёзайлик:

$$\varepsilon_{12 \ldots n} \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right| = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^1} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^2} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^n}$$

ёки янада умумийроқ шаклда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} \left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right| = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{j_n}}.$$

Бу ердан:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \left| \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right|^{-1} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{j_n}}$$

ёки (64.21) га мувофиқ:

$$\varepsilon'_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

эканлигини назарда тутилса, натижада:

$$\varepsilon'_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \left| \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right|^{-1} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{j_n}} \tag{64.23}$$

бўлади. *Шундай қилиб, ковариант индексли Леви-Чивита символи $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ аслида n-рангли тензор зичлик бўлиб, вазминлиги манфий бирга тенгдир.*

Юқоридаги сингари, контравариант индексли Леви-Чивита символи $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ҳам аслида n-рангли тензор зичлик бўлиб, вазминлиги мусбат бирга тенгдир. Леви-Чивита тензор зичлигини бирлик тензор зичлик деб аташ мумкин.

Юқорида айтилганларга биноан, $\sqrt{g}$ нинг $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ га кўпайтмаси n-рангли бутунлай антисимметрик ковариант тензор ҳосил қилади:

$$E_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{64.24}$$

ва $\frac{1}{\sqrt{g}}$ нинг $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ га кўпайтмаси эса n-рангли бутунлай антисимметрик контравариант тензор ҳосил қилади:

$$E^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{64.25}$$

Жумладан уч ўлчовли фазо учун:

$$E_{i_1 i_2 i_3} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}, \tag{64.26}$$

$$E^{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}. \tag{64.27}$$

Тензор зичлик тушунчасини англатиш учун юқорида келтирилган мисоллар билангина чекланамиз.

65. ВЕКТОРЛАРНИ ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ

Нуқтадан нуқтага ўтиш билан, яъни координаталарнинг ўзгариши билан тензор қийматлари ўзгара боради. Тензорни нуқтанинг бир қийматли, узлуксиз ва керакли марта дифференциалланувчи функцияси деб ҳисоблаймиз. *Тензорнинг мав-*

жудлик соҳаси шу тензорнинг майдони ёки тензор майдон деб юритилади. Тензордан координаталар бўйича ҳосила олиб текширайлик.

Бизга бирор скаляр функция берилган бўлсин:

$$\varphi'(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{65.1}$$

Унинг хусусий ҳосилаларини ва тўла дифференциалини топайлик:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}, \tag{65.2}$$

$$d\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} dx'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} dx'^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} dx^k = d\varphi$$

ёки

$$d\varphi' = d\varphi. \tag{65.3}$$

Демак, скаляр функциянинг координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилалари тўплами ковариант вектор ҳосил қилади, бу функциянинг дифференциали эса скаляр миқдордир. Бу натижалар бизга аввалдан ҳам маълум эди (59-параграфга қаралсин).

Энди вектордан координаталар бўйича хусусий ҳосилалар олайлик. Масалан, ковариант вектор берилган бўлсин:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j. \tag{65.4}$$

Бу вектордан олинган хусусий ҳосилалар:

$$\frac{\partial a'_i}{\partial x'^k} = \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x'^k} a_j + $$

$$+ \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial a_j}{\partial x'^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x'^k} a_j + \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial a_j}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}$$

ёки

$$\frac{\partial a'_i}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial a_j}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x'^k} a_j \tag{65.5}$$

бўлади. a'_i дан тўла дифференциал олиш учун, (65.5) нинг икки томонини dx'^l га кўпайтириб, сўнгра $l = k$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш керак:

$$da'_i = \frac{\partial a'_i}{\partial x'^k} dx'^k = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} dx'^k \frac{\partial a_j}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x'^k} a_j d' x^k.$$

Аммо:

$$dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} dx^r,$$

демак:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}dx'^k\frac{\partial a_j}{\partial x^m}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}dx^r\frac{\partial a_j}{\partial x^m}=$$

$$=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\delta^m_r dx^r\frac{\partial a_j}{\partial x^m}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}dx^m\frac{\partial a_j}{\partial x^m}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}da_j.$$

бўлади. Топилган бу натижани аввалги формулага қўямиз:

$$da'_i=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}da_j+\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i\partial x'^k}a_j dx'^k. \tag{65.6}$$

(65.5) ва (65.6) формулалардан равшанки, умуман:

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i\partial x'^k}\neq 0 \tag{65.7}$$

бўлганда, вектор компонентларининг хусусий ҳосилалари тўплами иккинчи рангли тензор ҳосил қилмайди ва вектор компонентларининг тўла дифференциаллари da_j тўплами ҳам вектор ҳосил қилмайди. Аммо:

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i\partial x'^k}=0$$

шарт бажарилса:

$$\frac{\partial a'_i}{\partial x'^k}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial a^j}{\partial x^m},\quad da'_i=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}da_j$$

бўлади. Декарт координаталари учун:

$$x_j=\alpha_{ij}x'_i,$$

демак:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'^i}=\alpha_{ij}$$

ва

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial x'^i\partial x'^k}=0.$$

Шундай қилиб, Декарт координаталаридан фойдаланиш мумкин бўлган фазодагина вектор компонентларининг хусусий ҳосилалари тўплами тензорни ва тўла дифференциаллари тўплами векторни ҳосил қилади. Лекин Декарт координаталаридан фойдаланиш мумкин бўлмаган фазода эгри чизиқли бошқа координаталардан фойдаланиш мумкин. Вектор компонентларининг хусусий ҳосилалари тўплами ва тўла дифференциаллари тўплами бундай ҳолда тензор характерга эга бўлмайди.

Биз энди тензордан эгри чизиқли координаталар бўйича олинган ҳосилалар ва дифференциалларни шундай тариқада киритишимиз керакки, улар тензор характерига эга бўлсин.

Шу муносабат билан фазонинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига векторни параллел кўчириш масаласини қараб чиқамиз.

Эвклид фазосида бир нуқтадан ихтиёрий иккинчи нуқтага векторни параллел кўчириш, яъни векторнинг модули билан йўналишини ўзгартирмасдан, уни бир нуқтадан бошқа нуқтага кўчириш мумкинлиги бизга маълум. Вектор бир нуқтадан иккинчи нуқтага параллел кўчирилганда, унинг Декарт компонентлари ўзгармайди. Эвклид фазосининг Декарт координаталари $\overset{\circ}{x}{}^1, \overset{\circ}{x}{}^2, \ldots, \overset{\circ}{x}{}^n$ ва эгри чизиқли координаталари $x^1, x^2, \ldots, x^n$ бўлсин. Координаталарни алмаштириш формулаларини ёзайлик:

$$x^i = x^i(\overset{\circ}{x}{}^j),$$
$$\overset{\circ}{x}{}^k = \overset{\circ}{x}{}^k(x^l),$$

бу ердан:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} d\overset{\circ}{x}{}^j, \tag{65.8}$$

$$d\overset{\circ}{x}{}^k = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}{\partial x^l} dx^l \tag{65.9}$$

бўлади. Координаталарнинг дифференциаллари контравариант вектор ҳосил қилади. Демак, координаталарнинг дифференциаллари бир-бирига чексиз яқин икки нуқта орасидаги элементар силжиш векторининг компонентлари деб қаралиши мумкин.

Энди бирор контравариант векторнинг Декарт компонентлари $\overset{\circ}{a}{}^j$ ва эгри чизиқли координаталар системасидаги компонентлари a^i бўлсин. Бундай векторнинг компонентларини алмаштириш қонуни координаталарнинг дифференцалларини алмаштириш қонуни сингари эканлигини биламиз:

$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \overset{\circ}{a}{}^j. \tag{65.10}$$

Бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага ўтишда вектор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришларини топиш учун юқоридаги формулаларнинг икки томонидан тўла дифференциал оламиз:

$$da^i = \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \overset{\circ}{a}{}^j\right) d\overset{\circ}{x}{}^k = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j \partial \overset{\circ}{x}{}^k} \overset{\circ}{a}{}^j d\overset{\circ}{x}{}^k + \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \frac{\partial \overset{\circ}{a}{}^j}{\partial \overset{\circ}{x}{}^k} d\overset{\circ}{x}{}^k,$$

аммо:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{a}{}^j}{\partial \overset{\circ}{x}{}^k} d\overset{\circ}{x}{}^k = d\overset{\circ}{a}{}^j,$$

демак:

$$da^l = \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j \partial \overset{\circ}{x}{}^k} \overset{\circ}{a}{}^j d\overset{\circ}{x}{}^k + \frac{\partial x^l}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} d\overset{\circ}{a}{}^j \tag{65.11}$$

бўлади. Бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчиришдаги чексиз кичик ўзгаришларни δ орқали белгилайлик. У вақтда:

$$\delta \overset{\circ}{a}{}^j = 0 \tag{65.12}$$

бўлади, чунки параллел кўчирилган векторнинг Декарт компонентлари ўзгармайди. Демак, параллел кўчирилган вектор учун (65.11) формула, (65.12) га асосан, шундай ёзилади:

$$\delta a^l = \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j \partial \overset{\circ}{x}{}^k} \overset{\circ}{a}{}^j d\overset{\circ}{x}{}^k, \tag{65.13}$$

бу ерда δa^l бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчирилган контравариант векторнинг эгри чизиқли координаталар системасидаги компонентларининг чексиз кичик ўзгаришларини ифодалайди.

(65.10) нинг икки томонини $\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^r}{\partial x^s}$ га кўпайтирайлик, сўнгра $s = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^r}{\partial x^i} a^i = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \overset{\circ}{a}{}^j = \delta^r_j \overset{\circ}{a}{}^j = \overset{\circ}{a}{}^r$$

ёки r ўрнига j ни ва i ўрнига m ни ёзсак:

$$\overset{\circ}{a}{}^j = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^j}{\partial x^m} a^m. \tag{65.14}$$

$d\overset{\circ}{x}{}^k$ ва $\overset{\circ}{a}{}^j$ нинг (65.9) билан (65.14) даги қийматларини (65.13) га қўямиз:

$$\delta a^l = \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j \partial \overset{\circ}{x}{}^k} \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^j}{\partial x^m} \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}{\partial x^l} a^m dx^l. \tag{65.15}$$

Шундай қилиб, параллел кўчирилган контравариант вектор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришлари δa^l шу векторнинг a^m компонентлари билан элементар силжиш векторининг dx^l компонентларига тўғри пропорционалдир. (65.15) ни чиқаришда Декарт координаталаридан фойдаландик. Текширилаётган фазо Эвклид фазоси булмаса, Декарт координаталаридан фойдаланиб бўлмайди. Лекин бу ҳолда ҳам биз (65.15) формулада ифодаланган қонуниятни қабул қиламиз: *параллел кўчирилган вектор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришлари шу вектор компонентларига ва элементар силжиш векторининг компонентларига тўғри пропорционалдир. Шундай қилиб, бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчирилган контравариант вектор учун:*

$$\delta a^i = B^i_{ml} a^m dx^l, \tag{65.16}$$

ковариант вектор учун эса:

$$\delta a_i = C^m_{il} a_m dx^l \tag{65.17}$$

бўлади. Векторлари шу қонун бўйича параллел кўчирилган фазо аффин боғланишлик фазоси дейилади. Уч индексли B^i_{ml} ва C^m_{il} миқдорлар эса аффин боғланишлик коэффициентлари деб аталади. Аффин боғланишлик коэффициентлари фақат фазо нуқтаси координаталарининг функциясидир:

$$B^i_{jk} = B^i_{jk}(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$
$$C^i_{jk} = C^i_{jk}(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Бу коэффициентларнинг бирини иккинчиси орқали ифодалаш мумкинлигини кейинроқ кўрамиз.

66. ТЕНЗОРЛАРНИ ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ

Векторларни параллел кўчириш ҳақида айтилганларни умумлаштириб, тензорларни параллел кўчириш тушунчасини киритиш мумкин.

Элементар силжишда параллел кўчирилган вектор компонентларининг қандай ўзгариши бизга маълум:

$$\delta a^i = B^i_{ml} a^m dx^l, \tag{66.1}$$

$$\delta a_i = C^m_{il} a_m dx^l. \tag{66.2}$$

Бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчирилган тензор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришлари ҳар бир контравариант индекс бўйича (66.1) *га мувофиқ олинган ва ҳар бир ковариант индекс бўйича* (66.2) *га мувофиқ олинган ҳадлар йиғиндисидан иборат деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, тензорнинг бир нуқтадан* *унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчирилиши шундай ифодаланади:*

$$\delta T^{ij\dots}{}_{\dots pq} = B^{i}_{ml} T^{mj\dots}{}_{\dots pq}\, dx^{l} + B^{j}_{ml} T^{im\dots}{}_{\dots pq}\, dx^{l} + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + C^{m}_{pl} T^{ij\dots}{}_{\dots mq} dx^{l} + C^{m}_{ql} T^{ij\dots}{}_{\dots pm} dx^{l}. \qquad (66.3)$$

Қисман иккинчи рангли аралаш тензор учун:

$$\delta T^{i\cdot}_{\cdot p} = B^{i}_{ml} T^{m\cdot}_{\cdot p} dx^{l} + C^{m}_{pl} T^{i\cdot}_{\cdot m} dx^{l}. \qquad (66.4)$$

Энди аффин боғланишликнинг B^{i}_{jk}, C^{i}_{jk} коэффициентлари орасидаги муносабатни аниқлайлик. Бунинг учун бирлик аралаш δ^{i}_{p} тензорнинг параллел кўчирилишини текшириб кўрайлик. (66.4) га биноан:

$$\delta(\delta^{i}_{p}) = B^{i}_{ml}\,\delta^{m}_{p}\, dx^{l} + C^{m}_{pl}\,\delta^{i}_{m}\, dx^{l} = B^{i}_{pl}\, dx^{l} + C^{i}_{pl}\, dx^{l} = \\ = (B^{i}_{pl} + C^{i}_{pl})\, dx^{l},$$

демак:

$$\delta(\delta^{i}_{p}) = (B^{i}_{pl} + C^{i}_{pl})\, dx^{l}. \qquad (66.5)$$

Бирлик аралаш тензор δ^{i}_{p} нинг таърифига мувофиқ, координаталарнинг ҳар қандай системасида ҳам унинг компонентлари фазонинг ҳамма нуқталарида бир хил. Шунга кўра, бирлик аралаш тензорни параллел кўчирганда:

$$\delta(\delta^{i}_{p}) = 0 \qquad (66.6)$$

бўлади. Сўнгги икки формуладан:

$$(B^{i}_{pl} + C^{i}_{pl})\, dx^{l} = 0$$

ёки чексиз кичик силжиш вектори dx^{l} ихтиёрий бўлганлигидан:

$$B^{i}_{pl} + C^{i}_{pl} = 0 \qquad (66.7)$$

бўлади. C^{i}_{pl} ни Γ^{i}_{pl} билан белгиласак:

$$\Gamma^{i}_{pl} = C^{i}_{pl} = -B^{i}_{pl} \qquad (66.8)$$

бўлади. Шу топилган натижадан фойдаланиб, вектор ва тензорларнинг параллел кўчирилишини ифодаловчи (66.1), (66.2) ва (66.3) формулаларни бошқача шаклда ёзиш мумкин:

$$\delta a^{i} = -\Gamma^{i}_{ml} a^{m} dx^{l}, \qquad (66.9)$$

$$\delta a_{i} = \Gamma^{m}_{il} a_{m} dx^{l}, \qquad (66.10)$$

$$\delta T^{ij\dots}{}_{\dots pq} = -\Gamma^{i}_{ml} T^{mj\dots}{}_{\dots pq}\, dx^{l} - \Gamma^{j}_{ml} T^{im\dots}{}_{\dots pq}\, dx^{l} + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + \Gamma^{m}_{pl} T^{ij\dots}{}_{\dots mq}\, dx^{l} + \Gamma^{m}_{ql} T^{ij\dots}{}_{\dots pm}\, dx^{l}. \qquad (66.11)$$

Шундай қилиб, элементар силжишда тензорларнинг параллел кўчирилиши аффин боғланишлик коэффициентлари бўлган Γ^l_{jk} орқали ифодаланди.

Мисол сифатида икки векторнинг скаляр кўпайтмасини олайлик. Скаляр кўпайтманинг тўла дифференциали:

$$d(a_i b^i) = da_i b^i + a_i db^i$$

бўлади. Параллел кўчирилганда d ўрнига δ олиниши керак:

$$\delta(a_i b^i) = \delta a_i b^i + a_i \delta b^i.$$

Параллел кўчирилувчи a_i ва b^i векторлар учун, (66.9) билан (66.10) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\delta a_i = \Gamma^m_{il}\, a_m\, dx^l,$$
$$\delta b^i = -\Gamma^i_{ml} b^m dx^l,$$

у вақтда:

$$\delta(a_i b^i) = \Gamma^m_{il} a_m b^i dx^l - \Gamma^i_{ml} a_i b^m dx^l$$

бўлади. Аммо йиғиштириш индексларини ихтиёримизча алмаштирсак бўлади, m нинг ўрнига i ни ва i нинг ўрнига m ни ёзиш мумкин:

$$\Gamma^m_{il} a_m b^i = \Gamma^i_{ml} a_i b^m.$$

У вақтда:

$$\delta(a_i b^i) = 0$$

бўлади. Шундай қилиб, *параллел кўчирилувчи икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ўзгармайди.* Жумладан:

$$\delta(a_i a^i) = 0$$
$$\delta(b_i b^i) = 0,$$

яъни параллел кўчирилувчи вектор узунлигининг квадрати ўзгармай сақланади. Икки a_i, b^i вектор орасидаги бурчак косинуси қуйидагича бўлади (63.31):

$$\cos\varphi = \frac{a_i b^i}{\sqrt{a_i a^i}\sqrt{b_i b^i}}.$$

Параллел кўчирилувчи икки вектор орасидаги бурчакнинг ҳам ўзгармаслиги энди аён.

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси инвариантга хусусий мисолдир. Инвариант деганда биз ранги нолга тенг бўлган тензорни, яъни ҳеч қандай индекси йўқ тензорни англаймиз. Шу сабабли, бирор I инвариантнинг параллел кўчирилиши учун, (66.11) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\delta I = 0, \qquad (66.12)$$

яъни *параллел кўчирилувчи инвариант ўзгармай сақланади.*

67. КРИСТОФФЕЛЬ СИМВОЛЛАРИ

Энди аффин боғланишлик коэффициентларини алмаштириш қонунини аниқлайлик.

Бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага ўтишда вектор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришлари вектор ҳосил қилмаслиги бизга маълум. Масалан, ковариант

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j$$

вектор учун:

$$da'_i = \frac{\partial a'_i}{\partial x'^k} dx'^k = \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j\right) dx'^k =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{dx^j}{dx'^i} a_j\right)\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} dx'^k = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j\right) dx^l =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial a_j}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x^l} a_j dx^l = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} da_j + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x^l} a_j dx^l$$

бўлади. Демак:

$$da'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} da_j + \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'^i \partial x^l} a_j dx^l.$$

Агар чексиз кичик силжишда вектор параллел кўчирилган бўлса, da'_i ни $\delta a'_i$ га ва da_j ни δa_j га алмаштирамиз:

$$\delta a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \delta a_j + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^i \partial x^l} a_j dx^l. \tag{67.1}$$

Параллел кўчириш формуласи (66.10) га биноан:

$$\delta a'_i = \Gamma'^m_{is} a'_m dx'^s \tag{67.2}$$

$$\delta a_j = \Gamma^r_{jl} a_r dx^l \tag{67.3}$$

бўлади. Аммо:

$$a'_m = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} a_r,$$

$$dx'^s = \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} dx^l$$

булганлигидан, (67.2) ни бундай ёзамиз:

$$\delta a'_i = \Gamma'^m_{is} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} a_r \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} dx^l. \tag{67.4}$$

Энди $\delta a'_i$ ва δa_j ифодаларини (67.4) билан (67.3) дан олиб, (67.1) га қўямиз:

$$\Gamma'^m_{is} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} a_r \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} dx^l = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \Gamma^r_{jl} a_r dx^l + \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'^i \partial x^l} a_j dx^l,$$

Формуланинг ўнг томонида турган иккинчи ҳаддаги йиғиштириш индекси j нинг ўрнига r ни ёзишимиз мумкин. У вақтда:

$$\Gamma'^{m}_{is} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} a_r dx^l = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l} \right) a_r dx^l$$

бўлади. Бу ерда a_r билан dx^l ихтиёрий бўлганлигидан:

$$\Gamma'^{m}_{is} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l}$$

келиб чиқади. Формуланинг икки томонини

$$\frac{\partial x^p}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^v}$$

га кўпайтириб, сўнгра $p = l$ ва $v = r$ деб ҳисоблаб, йиғиштирамиз:

$$\Gamma'^{m}_{is} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \\ + \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l}.$$

Аммо

$$\frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} = \delta^u_m,$$

$$\frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} = \delta^s_q,$$

у вақтда:

$$\Gamma'^{m}_{is} \delta^u_m \delta^s_q = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \\ + \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l}$$

бўлади, демак:

$$\Gamma'^{u}_{iq} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \\ + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r}$$

ёки

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^q}$$

бўлганлигидан:

$$\Gamma'^{u}_{iq} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \tag{67.5}$$

келиб чиқади. *Бу формула аффин боғланишлик коэффициентларини алмаштириш қонунини ифодалайди.*

Координаталарнинг бирор системасида Γ^r_{jl} коэффициентлар нолга тенг булса-да, бошқа системада Γ'^u_{iq} коэффициентлар нолга тенг булмаслиги мумкин. (67.5) нинг ўнг томонидаги биринчи ҳад учинчи рангли тензор алмаштириш қонуни шаклида ёзилган, иккинчи ҳад эса i ва q индексларига нисбатан симметрикдир. Умуман айтганда:

$$\Gamma^r_{jl} \neq \Gamma^r_{lj}. \tag{67.6}$$

Агар бирор координат системада $\Gamma^r_{jl} = 0$ экан, албатта, ҳар қандай бошқа системада $\Gamma'^u_{iq} = \Gamma'^u_{qi}$ бўлади. Худди шунингдек, бирор системада:

$$\Gamma^r_{jl} = \Gamma^r_{lj} \tag{67.7}$$

экан, у вақтда, (67.5) га мувофиқ, ҳар қандай системада ҳам:

$$\Gamma'^u_{iq} = \Gamma'^u_{qi} \tag{67.8}$$

бўлади, яъни бирор системада аффин боғланишлик коэффициентлари пастки индексларига нисбатан симметрик бўлса, ҳар қандай системада ҳам бу хосса мавжуд бўлади. *Бундан буён биз аффин боғланишлик коэффициентларини пастки индексларига нисбатан симметрик деб ҳисоблаймиз, яъни* (67.7) *ва* (67.8) *формулаларни асос қилиб оламиз.*

Шуниси муҳимки, алмаштириш формуласи (67.5) га мувофиқ Γ^r_{jl} коэффициентлар тўплами тензор ҳосил қилмайди.

Энди аффин боғланишлик коэффициентларини метрик тензор орқали ифодалайлик. Бунинг учун вектор модулининг квадрати ҳосил қилган инвариант ифодасини эслайлик:

$$I = g_{ij} a^i a^j. \tag{67.9}$$

Бундан:

$$dI = dg_{ij} a^i a^j + g_{ij} d a^i a^j + g_{ij} a^i da^j$$

булади. Бу ерда:

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} dx^l,$$

демак:

$$dI = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} a^i a^j dx^l + g_{ij} da^i a^j + g_{ij} a^i da^j.$$

Агар чексиз кичик силжишда инвариант ўзгариши векторни параллел кўчириш билан боғланган бўлса:

$$\delta I = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} a^i a^j dx^l + g_{ij} \delta a^i a^j + g_{ij} a^i \delta a^j \tag{67.10}$$

бўлади. Инвариант билан векторни параллел кўчириш қонунлари бизга маълум. (66.12) ва (66.9) га мувофиқ:

$$\delta I = 0,$$
$$\delta a^i = -\Gamma^i_{ml} a^m dx^l,$$
$$da^j = -\Gamma^j_{ml} a^m dx^l$$

бўлади. У вақтда:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} a^i a^j dx^l - g_{ij}\Gamma^i_{ml} a^m a^j dx^l - g_{ij}\Gamma^j_{ml} a^m a^i dx^l = 0$$

келиб чиқади ёки йиғиштириш индексларидан иккинчи ҳаддаги m ўрнига i ни ва i ўрнига m ни ёзсак, учинчи ҳадда эса m ўрнига j ни ва j ўрнига m ни ёзсак:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} a^i a^j dx^l - g_{mj}\Gamma^m_{il} a^i a^j dx^l - g_{im}\Gamma^m_{jl} a^j a^i dx^l = 0$$

ёки

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - g_{mj}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{jl}\right) a^i a^j dx^l = 0$$

бўлади. Чексиз кичик силжиш вектори билан параллел кўчирилувчи вектор ихтиёрий олингани сабабли:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - g_{mj}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{jl} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{mj}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{jl} \qquad (67.11)$$

келиб чиқади. Энди i, j, l индексларни аввал l, i, j тартибда, сўнгра эса j, l, i тартибда олсак, юқоридаги формулага мувофиқ:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = g_{mi}\Gamma^m_{lj} + g_{lm}\Gamma^m_{ij}, \qquad (67.12)$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g_{ml}\Gamma^m_{ji} + g_{jm}\Gamma^m_{li} \qquad (67.13)$$

бўлади. Метрик тензор билан аффин боғланишлик коэффициентларининг пастки индексларига нисбатан симметриклигини назарда тутиб, (67.11) ва (67.12) тенгликлар йиғиндиси билан (67.13) тенгликнинг айирмасини тузамиз:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = 2g_{mi}\Gamma^m_{jl}$$

ёки

$$g_{mi}\Gamma^m_{jl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right). \qquad (67.14)$$

Агар

$$\Gamma_{jl,\,i} = g_{mi}\Gamma^m_{jl} \tag{67.15}$$

қилиб белгиласак:

$$\Gamma_{jl,\,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right) \tag{66.16}$$

бўлади.

(67.15) нинг икки томонини g^{kr} га кўпайтирайлик, сўнгра $r = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштирамиз:

$$g^{ki}\Gamma_{jl,\,i} = g^{ki}g_{mi}\Gamma^m_{jl} = \delta^k_m\Gamma^m_{jl} = \Gamma^k_{jl},$$

яъни

$$\Gamma^k_{jl} = g^{ki}\Gamma_{jl,\,i} \tag{67.17}$$

ёки (67.16) га мувофиқ:

$$\Gamma^k_{jl} = \frac{1}{2}\,g^{ki}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right) \tag{67.18}$$

бўлади.

Метрик тензор орқали ифодаланган аффин боғланишликнинг Γ^k_{jl} коэффициентлари одатда Кристоффелнинг иккинчи тур символи дейилади, $\Gamma_{jl,\,i}$ эса Кристоффелнинг биринчи тур символи деб аталади. Баъзи авторлар Кристоффелнинг биринчи тур символи $\Gamma_{jl,\,i}$ ўрнига квадрат қавслар шаклида — $[jl,\ i]$ ёки $\left[{jl \atop i}\right]$ ёзишади. Кристоффелнинг иккинчи тур символи Γ^k_{jl} ўрнига катта қавслар шаклида — $\left\{{k \atop jl}\right\}$ ёки $\{jl,\ k\}$ ёзишади. Кристоффель символларини гоҳо *Кристоффель қавслари* деб ҳам юритишади.

Метрик тензорнинг симметриклиги назарда тутилса, (67.16) га мувофиқ:

$$\Gamma_{jl,\,i} = \Gamma_{lj,\,i} \tag{67.19}$$

ва (67.18) га мувофиқ:

$$\Gamma^k_{jl} = \Gamma^k_{lj} \tag{67.20}$$

бўлади.

Метрик тензор ҳосиласини Кристоффелнинг биринчи тур символи орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, (67.11) ва (67.15) га мувофиқ:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \Gamma_{il,\,j} + \Gamma_{jl,\,i} \tag{67.21}$$

бўлади. Γ^k_{jl} символнинг тензор эмаслиги (67.5) дан, $\Gamma_{jl,\,i}$ нинг тензор эмаслиги эса (67.15) дан аён, яъни Кристоффелнинг иккинчи ва биринчи тур символлари тензор эмас. Шундай бўлса-да, бу символлар тензорлар назариясида ғоят муҳим аҳамиятга эга.

Эвклид фазосида метрик тензор бирлик тензор шаклини олади:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \tag{67.21}$$

Шунга ва (67.16) билан (67.18) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Gamma_{jl,\ i} = 0, \tag{67.22}$$

$$\Gamma^k_{jl} = 0, \tag{67.23}$$

яъни Декарт системасида Кристоффелнинг биринчи ва иккинчи тур символлари нолга тенгдир.

68. ГЕОДЕЗИК ЧИЗИҚЛАР

Олдинги параграфда фазонинг ички хусусиятларини ифодаловчи метрик тензор билан Кристоффель символлари орасидаги боғланишни аниқладик. Энди Кристоффель символлари тушунчасидан фойдаланиб, фазонинг икки нуқтаси орасидаги энг қисқа масофани дифференциал тенгламалар билан ифодалаш масаласига ўтамиз.

Оддий Эвклид фазосида икки нуқтани бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси шу икки нуқта орасидаги энг қисқа масофадир. Фазодаги бирор эгри сиртнинг икки нуқтасини тамоман шу сирт устида ётувчи тўғри чизиқ билан бирлаштириш умуман мумкин бўлмаса-да, уларни энг қисқа чизиқ билан бирлаштириш мумкин. Ана шундай *энг қисқа чизиқ одатда геодезик чизиқ номи билан юритилади.* Масалан, текисликнинг геодезик чизиқлари тўғри чизиқлардир, доиравий цилиндрик сиртнинг геодезик чизиқлари унинг ясовчилари ва винт чизиқларидир, сферик сиртнинг геодезик чизиқлари унинг катта доираларидир.

Умуман, бир-бирига етарли даражада яқин турган ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги ёй узунликлари энг қисқа бўлган чизиқлар геодезик чизиқлар дейилади. Бизни қизиқтирган масала кўп ўлчовли фазо геодезик чизиқларининг дифференциал тенгламаларини топишдан иборат. Кўп ўлчовли фазодаги чизиқни параметрик шаклда олайлик:

$$x^i = x^i(p),$$

бу ерда p — ихтиёрий параметр.

Бир-бирига чексиз яқин икки нуқта орасидаги масофа билан координаталарнинг дифференциаллари метрик тензор орқали қандай боғланганлиги бизга маълум:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{68.1}$$

бу ердан:

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}.$$

Аммо

$$dx^i = \frac{dx^i}{dp}dp = \dot{x}^i dp,$$

$$dx^j = \frac{dx^j}{dp}dp = \dot{x}^j dp,$$

демак:

$$ds = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dp.$$

Параметрнинг $p = p_1$, $p = p_2$ қийматларига чизиқнинг M_1, M_2 нуқталари мос келиб, улар орасидаги ёй узунлиги қуйидагича бўлади:

$$s = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{p_1}^{p_2}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dp.$$

Икки нуқтани туташтирувчи чизиқ ёйининг энг қисқа бўлиши учун, яъни юқорида ифодаланган интегралнинг минимумга эга бўлиши учун бу интегралнинг вариацияси нолга тенг бўлиши лозим (45- параграф, XV):

$$\delta\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dp = 0,$$

бу ерда интеграл остидаги функция Лагранж функциясидир:

$$L = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}. \tag{68.2}$$

Лагранж функцияси Эйлер — Лагранж дифференциал тенгламаларига бўйсунади:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0. \tag{68.3}$$

Энди Лагранж функциясининг ҳосилаларини ҳисоблаб чиқайлик. (68.2) га биноан:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j),$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = g_{ij}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^k}\dot{x}^j + g_{ij}\dot{x}^i\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^k} = g_{ij}\delta^i_k\dot{x}^j + g_{ij}\dot{x}^i\delta^j_k =$$

$$= g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i$$

бўлади, яъни:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i). \tag{68.4}$$

Яна ўша (68.2) дан:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) =$$

$$= \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

келиб чиқади, яъни:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{68.5}$$

Лагранж функцияси ҳосилаларининг (68.4) ва (68.5) даги ифодаларини (68.3) га қўямиз:

$$\frac{d}{dp}\left[(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i)\right] - (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0. \tag{68.6}$$

Энди чизиқ ёйининг узунлигини параметр деб ҳисоблайлик:

$$x^i = x^i(s),$$

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}ds\frac{dx^j}{ds}ds = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j ds^2,$$

яъни:

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1. \tag{68.7}$$

У вақтда (68.6) тенглама ушбу шаклни олади:

$$\frac{d}{ds}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0. \tag{68.8}$$

Тенгламанинг биринчи ҳадини муфассал ёзайлик:

$$\frac{d}{ds}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i) = \frac{d}{ds}(g_{kj}\dot{x}^j) + \frac{d}{ds}(g_{ik}\dot{x}^i) =$$

$$= \frac{dg_{kj}}{ds}\dot{x}^j + g_{kj}\ddot{x}^j + \frac{dg_{ik}}{ds}\dot{x}^i + g_{ik}\ddot{x}^i,$$

аммо

$$\frac{dg_{kj}}{ds} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\frac{dx^m}{ds} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\dot{x}^m,$$

$$\frac{dg_{ik}}{ds} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\frac{dx^m}{ds} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m,$$

демак:

$$\frac{d}{ds}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i) = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^j + g_{kj}\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^i + g_{ik}\ddot{x}^i$$

бўлади. Тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ва тўртинчи ҳадлар бир-бирига тенг, чунки йиғиштириш индекси j ўрнига i ни ёзиш мумкин ва $g_{ki} = g_{ik}$, демак:

$$\frac{d}{ds}(g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i) = 2g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^i$$

бўлади. Бу ифодани (68.8) даги ўрнига қўямиз:

$$2g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^i - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Тенгламанинг иккинчи ҳадида йиғиштириш индекси m ўрнига i ни ва учинчи ҳадида m ўрнига j ни ёзиш мумкин. У вақтда:

$$2\,g_{ik}\ddot{x}^i + \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

ёки

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

бўлади. Кристоффелнинг биринчи тур символи таърифига мувофиқ (67.16):

$$\Gamma_{ij,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

демак:

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \Gamma_{ij,\,k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

бўлади. Тенгламанинг икки томонини g^{ml} га кўпайтирайлик, сўнгра, $l = k$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$g^{mk}g_{ik}\ddot{x}^i + g^{mk}\Gamma_{ij,\,k}\,\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Маълумки:

$$g^{mk}g_{ik} = \delta_i^m$$

ва (67.17) га мувофиқ:

$$g^{mk}\Gamma_{ij,\,k} = \Gamma_{ij}^m$$

бўлади, бу ерда Γ_{ij}^m Кристоффелнинг иккинчи тур символидир. Шундай қилиб:

$$\delta_i^m\ddot{x}^i + \Gamma_{ij}^m\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,$$

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{ij}^m\dot{x}^i\dot{x}_j = 0 \qquad (68.9)$$

ёки

$$\frac{d^2x^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m\frac{dx^i}{ds}\frac{ds^j}{ds} = 0 \qquad (68.10)$$

бўлади. *Бу тенгламалар n ўлчовли фазо геодезик чизиқларининг дифференциал тенгламаларидир. Геодезик чизиқ энг қисқа узунликка эга бўлганлигидан, у экстремал чизиқ деб ҳам аталади.*

Декарт координаталарида олинган Эвклид фазоси учун $\Gamma_{ij}^{m}=0$ (67.23), у вақтда:

$$\frac{d^2x_m}{ds^2}=0,$$

$$\frac{dx_m}{ds}=A_m,$$

$$x_m=A_m s+B_m \tag{68.11}$$

бўлади, бу ерда A_m, B_m — ўзгармас миқдорлар. Сўнгги формула параметрик шаклда ёзилган тўғри чизиқни ифодалайди. Демак, Эвклид фазосида геодезик чизиқ тўғри чизиқ бўлади.

Ноаниқ метрикали фазода масофа дифференциали ҳақиқий, мавҳум ёки ноль бўлиши мумкин. Бундай фазодаги геодезик чизиқлар орасида узунлиги нолга тенг бўлганлари ҳам учрайди. *Узунлиги нолга тенг геодезик чизиқлар изотроп геодезик чизиқлар дейилади.*

Геодезик чизиқ тушунчаси параллел кўчириш тушунчаси билан ҳам мустаҳкам боғлангандир. Эгри чизиқ бўйича координаталарнинг чексиз кичик узгаришлари шу эгри чизиқ бўйича олинган элементар силжиш векторини ташкил қилади. $\frac{dx^m}{ds}=\dot{x}^m$ вектор эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида унга уринади. Вектор модули квадратининг таърифи (63.28) га кўра, (68.7) га асосан бу уринма векторнинг модули бирга тенг. Уринма бирлик $\dot{x}^m$ вектор ўз-ўзига параллел қилиб кўчирилса, контравариант векторни параллел кўчириш формуласи (66.9) га асосан ёзишимиз мумкин:

$$d\dot{x}^m=-\Gamma_{ij}^{m}\dot{x}^i dx^j,$$

аммо

$$d\dot{x}^m=\frac{d\dot{x}^m}{ds}ds=\ddot{x}^m ds,$$

$$dx^j=\frac{dx^j}{ds}ds=\dot{x}^j ds,$$

демак:

$$\ddot{x}^m ds=-\Gamma_{ij}^{m}\dot{x}^i\dot{x}^j ds$$

ёки

$$\ddot{x}^m+\Gamma_{ij}^{m}\dot{x}^i\dot{x}^j=0,$$

яъни геодезик чизиқнинг илгариги (68.9) дифференциал тенгламалари ҳосил бўлди. Шундай қилиб, бирлик уринма вектор параллел кўчирилувчи эгри чизиқ геодезик чизиқ бўлади.

Параллел кўчирилувчи икки вектор орасидаги бурчакнинг ўзгармаслиги бизга маълум (66- параграф). Шунинг учун геодезик чизиқ бўйича параллел кўчирилувчи бирор векторнинг бирлик уринма вектор билан ҳосил қилган бурчаги ўзгармайди. Жумладан, геодезик чизиқнинг бирор нуқтасида уринма бўлган ҳар қандай векторни шу чизиқ бўйлаб параллел кўчирганда, у геодезик чизиқнинг бошқа нуқталарида ҳам чизиққа уринма бўлади.

69. ТЕНЗОРНИНГ КОВАРИАНТ ҲОСИЛАСИ

Бир-бирига чексиз яқин нуқталарнинг биридан иккинчисига ўтишда вектор компонентларининг чексиз кичик ўзгаришлари вектор ҳосил қилмаслиги бизга маълум. Мисол учун x^j нуқтада бирор контравариант a^i вектор берилган бўлсин. x^j нуқтадан x^j+dx^j нуқтага ўтишда векторнинг da^i дифференциали иккинчи нуқтадаги

$$a^i+da^i=a^i+\frac{\partial a^i}{\partial x^j}dx^j$$

вектор билан аввалги нуқтадаги a^i вектор айирмасидир. Бу ерда вектор дифференциалининг вектор ҳосил қилмаслигига сабаб шундан иборатки, айирмаси олинувчи векторлар бир нуқтада эмас, балки турли нуқталарда жойлашган. Икки векторни таққослаш учун улар бир нуқтада бўлишлари керак, шундагина бу векторлар айирмаси вектор бўлади. Шундай қилиб, биз a^i векторни x^j нуқтадан x^j+dx^j нуқтага параллел кўчирайлик.

Сўнгги нуқтага параллел кўчирилган контравариант вектор учун, (66.9) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$a^i+\delta a^i=a^i-\Gamma^i_{mj}a^m dx^j.$$

Энди бир нуқтада олинган a^i+da^i ва $a^i+\delta a^i$ векторлар айирмаси

$$Da^i=(a^i+da^i)-(a^i+\delta a^i)$$

шубҳасизки, вектор бўлади. Шундай қилиб:

$$Da^i=\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{mj}a^m\right)dx^j. \tag{69.1}$$

Шу формулага мувофиқ ифодаланган Da^i вектор контравариант a^i векторнинг абсолют дифференциали дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазаларни ковариант векторга нисбатан татбиқ қилиб, (66.10) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$Da_i=\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\Gamma^m_{ij}a_m\right)dx^j. \tag{69.2}$$

Бу формула ковариант a_i векторнинг абсолют дифференциалини ифодалайди.

Тензорнинг абсолют дифференциали тушунчасини киритишда иккинчи рангли аралаш тензор $T_{i.}^{\cdot k}$ билан чеклансак ҳам бўлади. x^j нуқтадан $x^j + dx^j$ нуқтага ўтиш натижасида $x^j + dx^j$ нуқтадаги тензор учун:

$$T_{i.}^{\cdot k} + dT_{i.}^{\cdot k} = T_{i.}^{\cdot k} + \frac{\partial T_{i.}^{\cdot k}}{\partial x^j} dx^j$$

ва параллел кўчирилган тензор учун (66.11) га биноан:

$$T_{i.}^{\cdot k} + \delta T_{i.}^{\cdot k} = T_{i.}^{\cdot k} + \Gamma_{ij}^{m} T_{m.}^{\cdot k} dx^j - \Gamma_{mj}^{k} T_{i.}^{\cdot m} dx^j$$

бўлади. *Бир нуқтада олинган* $T_{i.}^{\cdot k} + dT_{i.}^{\cdot k}$, $T_{i.}^{\cdot k} + \delta T_{i.}^{\cdot k}$ *тензорлар айирмаси тензор бўлади ва берилган* $T_{i}^{\cdot k}$ *тензорнинг абсолют дифференциали деб юритилади:*

$$DT_{i.}^{\cdot k} = \left(\frac{\partial T_{i.}^{\cdot k}}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^{m} T_{m.}^{\cdot k} + \Gamma_{mj}^{k} T_{i.}^{\cdot m} \right) dx^j. \tag{69.3}$$

Кўрамизки, тензорнинг абсолют дифференциалини ифодаловчи формуланинг ўнг томонида шу тензорнинг ҳар бир индексига Кристоффелнинг иккинчи тур символи иштирок қилган алоҳида ҳад мос келади: ковариант индексга манфий ишорали ҳад, контравариант индексга эса мусбат ишорали ҳад мос келади. Шу айтилганларни назарда тутиб, ихтиёрий рангли ва ихтиёрий тузилишдаги тензорнинг абсолют дифференциали учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$DT_{l_1 l_2 \ldots}^{k_1 k_2 \ldots} = \left(\frac{\partial T_{l_1 l_2 \ldots}^{k_1 k_2 \ldots}}{\partial x^j} - \Gamma_{l_1 j}^{m} T_{m l_2 \ldots}^{k_1 k_2 \ldots} - \Gamma_{l_2 j}^{m} T_{l_1 m \ldots}^{k_1 k_2 \ldots} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \Gamma_{mj}^{k_1} T_{l_1 l_2 \ldots}^{m k_2 \ldots} + \Gamma_{mj}^{k_2} T_{l_1 l_2 \ldots}^{k_1 m \ldots} + \ldots \right) dx^j. \tag{69.4}$$

Бирор I вариант, яъни ҳар қандай индекслардан маҳрум бўлган тензор учун:

$$DI = \frac{\partial I}{\partial x^j} dx^j = dI \tag{69.5}$$

бўлади, демак, *инвариантнинг абсолют дифференциали шу инвариантнинг оддий дифференциалидан фарқ қилмайди. Аниқ рангли ва аниқ тузилишдаги тензорнинг абсолют дифференциали ўша рангли ва ўша тузилишдаги тензор бўлади.*

Тензорнинг абсолют дифференциали унинг ковариант дифференциали деб ҳам юритилади.

Тензорнинг параллел кўчирилиши билан абсолют дифференциали орасидаги боғланишни англаш қийин эмас. Тензорнинг абсолют дифференциалига илгари берилган таъриф бўйича, бирор нуқтада тензорнинг абсолют дифференциалини ҳосил қилиш учун чексиз яқин нуқтадаги тензор биринчи нуқтага параллел кўчирилиб, сўнгра ўша нуқтадаги аввалги ва параллел кўчирилган тензорлар айирмаси олинади. Шу таърифга кўра, параллел кўчирилувчи тензорнинг абсолют дифференциали нолга тенг бўлиши керак, чунки берилган нуқтадаги тензор ва бу нуқтага параллел кўчирилган тензор аслида бир тензор бўлиб, уларнинг айирмаси нолга тенгдир. Шу айтилганларни тегишли формулалардан келтириб чиқариш ҳам мумкин. Ҳақиқатан, бир нуқтадан унга чексиз яқин иккинчи нуқтага параллел кўчирилган вектор учун (66.9) га ёки (66.10) га мувофиқ:

$$\delta a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j = \Gamma^m_{ij} a_m dx^j,$$

$$\delta a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} dx^j = -\Gamma^i_{mj} a^m dx^j$$

бўлади. Шуларга биноан, (69.1) билан (69.2) дан:

$$Da^i = 0,$$
$$Da_i = 0$$

келиб чиқади, *яъни параллел кўчирилувчи векторнинг абсолют дифференциали нолга тенг. Шунингдек,* (66.11) *билан* (69.4) *га мувофиқ параллел кўчирилувчи тензорнинг абсолют дифференциали нолга тенгдир.*

Энди тензорнинг абсолют дифференциали тушунчасидан фойдаланиб, тензорнинг ковариант ҳосиласи ва, демак, тензорни ковариант дифференциаллаш тушунчасини киритайлик. Бунинг учун тензорлар ҳақидаги асосий теоремани эслайлик: тензорлиги номаълум миқдорнинг тензорга кўпайтмаси тензор бўлса, у миқдорнинг ўзи ҳам тензор бўлади. Координаталарнинг дифференциаллари туплами контравариант вектор ҳосил қилади. Шуларга кура, ушбу натижаларга келамиз.

(69.1) *нинг чап томонидаги абсолют дифференциал контравариант вектор бўлганлиги сабабли, ўнг томонда қавслар ичида турган ифода бир марта контравариант ва бир марта ковариант бўлган тензордир. Бу тензор контравариант* a^i *векторнинг* x^j *координата бўйича олинган ковариант ҳосиласи дейилади ва одатда* $\nabla_j a^i$ *орқали белгиланади:*

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{mj} a^m. \tag{69.6}$$

(69.2) *нинг чап томонидаги абсолют дифференциал ковариант вектор бўлганлиги сабабли, ўнг томонда қавслар ичида турган ифода иккинчи рангли ковариант тензордир.*

Бу тензор ковариант a_i векторнинг x^j координата бўйича олинган ковариант ҳосиласи дейилади:

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^m_{ij} a_m. \tag{69.7}$$

(69.3) *нинг чап томонидаги абсолют дифференциал бир марта контрвариант ва бир марта ковариант тензор бўлганлиги сабабли, ўнг томонда қавслар ичида турган ифода бир марта контравариант ва икки марта ковариант бўлган учинчи рангли тензордир. Бу тензор $T^{\cdot k}_{i\cdot}$ тензорнинг x^j координата бўйича олинган ковариант ҳосиласи дейилади:*

$$\nabla_j T^{\cdot k}_{i\cdot} = \frac{\partial T^{\cdot k}_{i\cdot}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{ij} T^{\cdot k}_{m\cdot} + \Gamma^k_{mj} T^{\cdot m}_{i\cdot} \tag{69.8}$$

(69.4) *нинг чап томонидаги абсолют дифференциал берилган тензорнинг ранги ва тузилишидаги тензор бўлганлиги сабабли ўнг томонда қавслар ичида турган ифода берилган тензорга нисбатан ранги биттага ошиқ бўлган тензордир. Бу тензор $T^{k_1k_2\ldots}_{i_1i_2\ldots}$ тензорнинг x^j координата бўйича олинган ковариант ҳосиласи дейилади.*

$$\nabla_j T^{k_1k_2\ldots}_{i_1i_2\ldots} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{k_1k_2\ldots}_{i_1i_2\ldots}\right) - \Gamma^m_{i_1j} T^{k_1k_2\ldots}_{mi_2\ldots} - \Gamma^m_{i_2j} T^{k_1k_2\ldots}_{i_1m\ldots} +$$
$$+ \ldots + \Gamma^{k_1}_{mj} T^{mk_2\ldots}_{i_1i_2\ldots} + \Gamma^{k_2}_{mj} T^{k_1m\ldots}_{i_1i_2\ldots} + \ldots \tag{69.9}$$

Шундай қилиб, (69.9) га мувофиқ, тензорнинг x^j координата бўйича олинган ковариант ҳосиласи қуйидаги ифодалар йиғиндисига тенг:

1) тензорнинг x^j координата бўйича олинган одатдаги хусусий ҳосиласининг ифодаси:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{\cdots}_{\cdots}\right);$$

2) тензор ковариант индексларининг ҳар бири учун олинган ифода:

$$-\Gamma^m_{ij} T^{\cdots\cdots}_{\ldots m\ldots};$$

3) тензор контравариант индексларининг ҳар бири учун олинган ифода:

$$\Gamma^k_{mj} T^{\ldots m\ldots}_{\cdots\cdots}$$

бўлади. (69.4) ва (69.9) га мувофиқ:

$$DT^{k_1k_2\ldots}_{i_1i_2\ldots} = \nabla_j T^{k_1k_2\ldots}_{i_1i_2\ldots} dx^j. \tag{69.10}$$

Тензорнинг хусусий ҳосилалари билан унинг одатдаги тўла дифференциали орасидаги боғланиши:

$$dT^{k_1k_2\dots}_{i_1i_2\dots} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{k_1k_2\dots}_{i_1i_2\dots}\right)dx^j. \tag{69.11}$$

Тензорнинг ковариант ҳосилалари билан абсолют дифференциали орасидаги боғланиш хусусий ҳосилалар билан одатдаги тўла дифференциал орасидаги боғланиш сингаридир.

(69.5) ва (69.10) га мувофиқ, инвариант учун:

$$\nabla_j I = \frac{\partial I}{\partial x^j} \tag{69.12}$$

бўлади, яъни инвариантнинг одатдаги хусусий ҳосиласи ва ковариант ҳосиласи бир-биридан фарқ қилмайди.

Тензорлар йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва йиғиштирилишига нисбатан ковариант дифференциаллаш амаллари одатдагидайдир. Бу амалларни бир неча оддий мисолларда кўриб чиқайлик.

I. *Тензорлар йиғиндиси ва айирмаси учун*:

$$\nabla_j\left(A^{\cdot k}_{i\cdot} \pm B^{\cdot k}_{i\cdot}\right) = \nabla_j A^{\cdot k}_{i\cdot} + \nabla_j B^{\cdot k}_{i\cdot}. \tag{69.13}$$

Ҳақиқатан, (69.9) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\nabla_j\left(A^{\cdot k}_{i\cdot} \pm B^{\cdot k}_{i\cdot}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(A^{\cdot k}_{i\cdot} \pm B^{\cdot k}_{i\cdot}\right) - \Gamma^m_{ij}\left(A^{\cdot k}_{m\cdot} \pm B^{\cdot k}_{m\cdot}\right) +$$

$$+ \Gamma^k_{mj}\left(A^{\cdot m}_{i\cdot} \pm B^{\cdot m}_{i\cdot}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} A^{\cdot k}_{i\cdot} - \Gamma^m_{ij} A^{\cdot k}_{i\cdot} + \Gamma^k_{mj} A^{\cdot m}_{i\cdot}\right) \pm$$

$$\pm \left(\frac{\partial}{\partial x^j} B^{\cdot k}_{i\cdot} - \Gamma^m_{ij} B^{\cdot k}_{i\cdot} + \Gamma^k_{mj} B^{\cdot m}_{i\cdot}\right) = \nabla_j A^{\cdot k}_{i\cdot} \pm \nabla_j B^{\cdot k}_{i\cdot}$$

II. *Тензорлар кўпайтмаси учун:*

$$\nabla_j\left(A_i B^{\cdot l}_{k\cdot}\right) = \nabla_j A_i B^{\cdot l}_{k\cdot} + A_i \nabla_j B^{\cdot l}_{k\cdot}. \tag{69.14}$$

Ҳақиқатан, (69.9) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\nabla_j\left(A_i B^{\cdot l}_{k\cdot}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(A_i B^{\cdot l}_{k\cdot}\right) - \Gamma^m_{ij} A_m B^{\cdot l}_{k\cdot} - \Gamma^m_{kj} A_i B^{\cdot l}_{m\cdot} +$$

$$+ \Gamma^l_{mj} A_i B^{\cdot m}_{k\cdot} = \frac{\partial}{\partial x^j} A_i B^{\cdot l}_{k\cdot} + A_i \frac{\partial}{\partial x^j} B^{\cdot l}_{k\cdot} -$$

$$- \Gamma^m_{ij} A_m B^{\cdot l}_{k\cdot} - \Gamma^m_{kj} A_i B^{\cdot l}_{m\cdot} + \Gamma^l_{mj} A_i B^{\cdot m}_{k\cdot} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} A_i - \Gamma^m_{ij} A_m\right) B^{\cdot l}_{k\cdot} +$$

$$+ A_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j} B^{\cdot l}_{k\cdot} - \Gamma^m_{kj} B^{\cdot l}_{m\cdot} + \Gamma^l_{mj} B^{\cdot m}_{k\cdot}\right) = \nabla_j A_i B^{\cdot l}_{k\cdot} + A_i \nabla_j B^{\cdot l}_{k\cdot}.$$

Қисман инвариант билан тензор кўпайтмаси учун, (69.12) га мувофиқ (69.14) дан бундай ёзамиз:

$$\nabla_j\left(IB_{k.}^{\cdot l}\right)=\frac{\partial I}{\partial x^j}B_{k.}^{\cdot l}+I\nabla_j B_{k.}^{\cdot l}. \tag{69.15}$$

III. *Йиғиштирилган тензор учун:*

$$\nabla_j\left(T_{i..}^{\cdot ik}\right)=\nabla_j T_{i..}^{\cdot ik} \tag{69.16}$$

бўлади, яъни тензорни ковариант дифференциаллаш ва уни йиғиштириш амалларининг ўринларини алмаштириб ёзиш мумкин.

Ҳақиқатан, (69.9) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\nabla_j\left(T_{i..}^{\cdot ik}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}T_{i..}^{\cdot ik}+\Gamma_{mj}^{k}T_{i..}^{\cdot im} \tag{69.17}$$

Ўша (69.9) га мувофиқ, учинчи рангли $T_{i..}^{\cdot lk}$ тензорнинг ковариант ҳосиласи:

$$\nabla_j T_{i..}^{\cdot lk}=\frac{\partial}{\partial x^j}T_{i..}^{\cdot lk}-\Gamma_{ij}^{m}T_{m..}^{\cdot lk}+\Gamma_{mj}^{l}T_{i..}^{\cdot mk}+\Gamma_{mj}^{k}T_{i..}^{\cdot lm}$$

бўлади. Бу ҳосилани $i=l$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$\nabla_j T_{i..}^{\cdot ik}=\frac{\partial}{\partial x^j}T_{i..}^{\cdot ik}-\Gamma_{ij}^{m}T_{m..}^{\cdot ik}+\Gamma_{mj}^{i}T_{i..}^{\cdot mk}+\Gamma_{mj}^{k}T_{i..}^{\cdot im}.$$

Ўнг томондаги иккинчи ва учинчи ҳадлар йиғиндиси нолга тенг, чунки, масалан, иккинчи ҳаддаги йиғиштириш индексларини ўзаро алмаштириш (m ўрнига i ни ва i ўрнига m ни ёзиш) мумкин, у вақтда:

$$\nabla_j T_{i..}^{\cdot ik}=\frac{\partial}{\partial x^j}T_{i..}^{\cdot ik}+\Gamma_{mj}^{k}T_{i..}^{\cdot im} \tag{69.18}$$

бўлади. Айтганларимизни (69.17) билан (69.18) тасдиқлайди.

(69.14) билан (69.16) дан фойдаланиб, тензорларнинг йиғиштирилган кўпайтмаси учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$\nabla_j\left(A_{i.}^{\cdot k}C_{mk.}^{\cdot\cdot l}\right)=\nabla_j A_{i.}^{\cdot k}C_{mk.}^{\cdot\cdot l}+A_{i.}^{\cdot k}\nabla_j C_{mk.}^{\cdot\cdot l}. \tag{69.19}$$

Ковариант ҳосилаларнинг юқорида текширилган асосий хусусиятлари (69.10) га мувофиқ, абсолют дифференциалларга ҳам хосдир.

Биз бу параграфда тензорларни ковариант дифференциаллаш ва унинг асосий хусусиятлари билан танишиб чиқдик. Айрим авторлар ковариант ҳосилани *абсолют ҳосила* деб ҳам юритишади.

Баъзи авторлар тензорни оддий дифференциаллаш белгиси $\frac{\partial}{\partial x^j}$ ўрнига тензорнинг ўнг томонидан пастда, j ёзишади ва ковариант дифференциаллаш белгиси ∇_j ўрнига; j ёзишади. Масалан, (69.6), (69.7) ва (69.8) формулаларни янги белгилар орқали тубандагича ёзиб кўрсатиш мумкин:

$$a^i_{;j} = a^i_{,j} + \Gamma^i_{mj} a^m,$$

$$a_{i;j} = a_{i,j} - \Gamma^m_{ij} a_m,$$

$$T^{\cdot k}_{i\cdot ;j} = T^{\cdot k}_{i\cdot ,j} - \Gamma^m_{ij} T^{\cdot k}_{m\cdot} + \Gamma^k_{mj} T^{\cdot m}_{i\cdot}$$

Эвклид фазосида Декарт системасидаги Кристоффель символлари нолга тенг булганлигидан, тензорларни ковариант дифференциаллаш билан уларни оддий дифференциаллаш орасида ҳеч қандай фарқ бўлмайди.

Тензордан олинган ковариант ҳосиланинг ўзи ҳам тензордир. Тензорнинг ковариант ҳосиласидан яна ковариант ҳосила олинса, натижада тензорнинг иккинчи тартибли ковариант ҳосиласи пайдо булади. Шу равишда мос тензордан учинчи, тўртинчи, умуман, юқори тартибли ковариант ҳосилалар олиниши мумкин. Юқорида айтиб ўтилган биринчи тартибли ковариант ҳосилаларга нисбатан, юқори тартибли ковариант ҳосилалар анча мураккаб хусусиятларга эга. Бу масала билан махсус шуғулланиб ўтирмаймиз. Аммо тензорни ковариант дифференциаллаш тартиби ҳақида кейинчалик алоҳида айтиб ўтишга тўғри келади.

Ковариант дифференциаллаш воситасида тензор рангини кўпайтириш мумкин. Аксинча, ковариант дифференциалланган тензорни йиғиштириб, унинг рангини камайтириш мумкин.

Ковариант дифференциалланиш индекси билан яна бошқа бирор контравариант индекси бўйича йиғиштирилган тензор, одатда, шу индекслар бўйича олинган тензор дивергенцияси дейилади. Масалан, T^i ёки $T^i_{\cdot j}$ тензорларнинг тегишли дивергенциялари $\nabla_i T^i$ ва $\nabla_i T^i_{\cdot j}$ бўлади.

70. МЕТРИК ТЕНЗОРНИНГ КОВАРИАНТ ҲОСИЛАСИ

Ковариант метрик g_{ij} тензорнинг ковариант ҳосиласи (69.9) га биноан, тубандагича ёзилади:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma^m_{ik} g_{mj} - \Gamma^m_{jk} g_{im}$$

ёки (67.15) дан фойдалансак:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma_{ik,j} - \Gamma_{jk,i}.$$

бўлади. Аммо (67.21) га мувофиқ:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \Gamma_{ik,\,j} + \Gamma_{jk,\,i},$$

демак:

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{70.1}$$

бўлади, *яъни ковариант метрик тензорнинг ковариант ҳосиласи нолга тенгдир.*

Аралаш метрик тензор g_l^j нинг ковариант ҳосиласи ҳам нолга тенг. Яна ўша (69.9) *га биноан:*

$$\nabla_k g_i^l = \frac{\partial}{\partial x^k} g_i^l - \Gamma_{ik}^m g_m^l + \Gamma_{mk}^l g_i^m = 0 - \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^l = 0,$$

$$\nabla_k g_i^l = 0 \tag{70.2}$$

бўлади.

Контравариант метрик g^{jl} тензорнинг ковариант ҳосиласи ҳам нолга тенг. Контравариант метрик тензор таърифига мувофиқ:

$$g_{ij} g^{jl} = g_i^l$$

бўлади. Бу ердан, (70.2) га биноан:

$$\nabla_k (g_{ij} g^{jl}) = 0$$

бўлади. Тензорларнинг йиғиштирилган кўпайтмасидан олинган ковариант ҳосила формуласи (69.19) га мувофиқ:

$$\nabla_k (g_{ij} g^{jl}) = \nabla_k g_{ij} g^{jl} + g_{ij} \nabla_k g^{jl} = 0$$

ёки (70.1) ни назарда тутсак:

$$g_{ij} \nabla_k g^{jl} = 0$$

бўлади. Бу тенгламанинг икки томонини g^{mr} га кўпайтирайлик, сўнгра $r = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$g^{mi} g_{ij} \nabla_k g^{jl} = g_j^m \nabla_k g^{jl} = \nabla_k g^{ml} = 0,$$

$$\nabla_k g^{ml} = 0. \tag{70.3}$$

(70.1), (70.2) ва (70.3) га биноан, *ковариант дифференциаллашда метрик тензор ўзгармас миқдор сингаридир* (Риччи теоремаси). Демак, метрик тензорларни ковариант дифференциаллаш белгисига нисбатан унинг олдида ёки кетида ёзишимиз мумкин. Масалан:

$$\nabla_k \left(g_{ij} T_{rs.}^{..j} \right) = g_{ij} \nabla_k T_{rs.}^{..j}$$

$$\nabla_k \left(g^{ri} T_{rs..}^{..ml} \right) = g^{ri} \nabla_k T_{rs..}^{..ml},$$

$$\nabla_k \left(g_j^i T_{rs..}^{..ml} \right) = g_j^i \nabla_k T_{rs..}^{..ml}.$$

Ҳисобларда қулайлик яратиш мақсадида векторни ва тензорни контравариант дифференциаллаш тушунчаси киритилади. *Ковариант дифференциаллаш амали* ∇_j *дан контравариант дифференциаллаш амали* ∇^k *га ўтиш тубандагича ифодаланади:*

$$\nabla^k = g^{kj}\nabla_j. \tag{70.4}$$

Масалан, ковариант векторнинг контравариант ҳосиласи учун:

$$\nabla^k a_i = g^{kj}\nabla_j a_i, \tag{70.5}$$

контравариант векторнинг контравариант ҳосиласи учун:

$$\nabla^k a^i = g^{kj}\nabla_j a^i. \tag{70.6}$$

Ихтиёрий тензорнинг контравариант ҳосиласи учун эса:

$$\nabla^k T^{s_1 s_2 \dots}_{r_1 r_2 \dots} = g^{kj}\nabla_j T^{s_1 s_2 \dots}_{r_1 r_2 \dots} \tag{70.7}$$

бўлади, яъни тензорнинг контравариант ҳосиласини топиш учун, аввало, шу тензорнинг ковариант ҳосиласи олинади, сўнгра контравариант метрик тензор воситасида дифференциаллаш индекси кўтарилади. Бир мисол келтирайлик. Контравариант векторнинг контравариант ҳосиласи, иккинчи рангли контрвариант тензордир. Бу тензор компонентларини турли шаклларда ёзиб курсатиш мумкин:

$$\nabla^k a^i, \quad \nabla_j a^l, \quad \nabla^k a_l, \quad \nabla_j a_l.$$

Ҳақиқатан, маълумки:

$$a^i = g^{il} a_l.$$

У вақтда (70.6) га ва Риччи теоремасига мувофиқ:

$$\nabla^k a^i = g^{kj}\nabla_j a^i = g^{kj}\nabla_j (g^{il} a_l) = g^{kj} g^{il}\nabla_j a_l = g^{il}\nabla^k a_l$$

бўлади.

71. КОВАРИАНТ ҲОСИЛА ВА ЭГРИЛИК ТЕНЗОРИ

Тензорларни ковариант дифференциаллаш масаласи билан шуғулланишимизни давом қилайлик. Иккинчи рангли аралаш тензорнинг ковариант ҳосиласи учун:

$$\nabla_r T^{.i}_{s.} = \frac{\partial}{\partial x^r} T^{.i}_{s.} - \Gamma^m_{sr} T^{.i}_{m.} + \Gamma^i_{mr} T^{.m}_{s.} \tag{71.1}$$

ва контравариант векторнинг ковариант ҳосиласи учун эса:

$$\nabla_s a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{ls} a^l \tag{71.2}$$

бўлади. Контравариант a^i векторнинг x^s координата бўйича ковариант ҳосиласи $\nabla_s a^i$ иккинчи рангли тензордир. Шу тензордан x^r координата бўйича олинган ковариант $\nabla_r \nabla_s a^i$ ҳосила учинчи рангли тензор бўлиб, контравариант a^i векторнинг иккинчи тартибли ковариант ҳосиласидир. Аралаш $T^{\cdot i}_{s}$ тензор ўрнига $\nabla_s a^i$ ни олсак, (71.1) га мувофиқ:

$$\nabla_r \nabla_s a^i = \frac{\partial}{\partial x^r}(\nabla_s a^i) - \Gamma^m_{sr}(\nabla_m a^i) + \Gamma^i_{mr}(\nabla_s a^m)$$

бўлади. Бу формуланинг ўнг томонида қавслар ичида турган ифодаларни (71.2) дан олиб қўяйлик:

$$\nabla_r \nabla_s a^i = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{ls} a^l\right) - \Gamma^m_{sr}\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^m} + \Gamma^i_{lm} a^l\right) + \Gamma^i_{mr}\left(\frac{\partial a^m}{\partial x^s} + \Gamma^m_{ls} a^l\right).$$

Энди қавсларни очиб ёзамиз:

$$\nabla_r \nabla_s a^i = \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^s \partial x^r} + \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^i_{ls} a^l + \Gamma^i_{ls}\frac{\partial a^l}{\partial x^r} -$$
$$- \Gamma^m_{sr}\frac{\partial a^i}{\partial x^m} - \Gamma^m_{sr}\Gamma^i_{lm} a^l + \Gamma^i_{mr}\frac{\partial a^m}{\partial x^s} + \Gamma^i_{mr}\Gamma^m_{ls} a^l. \qquad (71.3)$$

Бу формулада r ва s индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$\nabla_s \nabla_r a^i = \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^i_{lr} a^l + \Gamma^i_{lr}\frac{\partial a^l}{\partial x^s} -$$
$$- \Gamma^m_{rs}\frac{\partial a^i}{\partial x^m} - \Gamma^m_{rs}\Gamma^i_{lm} a^l + \Gamma^i_{ms}\frac{\partial a^m}{\partial x^r} + \Gamma^i_{ms}\Gamma^m_{lr} a^l \qquad (71.4)$$

бўлади. Ўзаро боғланмаган координаталар бўйича одатдагидай дифференциаллашда дифференциаллаш тартибини ўзгартириб ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial x^s \partial x^r} = \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^r \partial x^s}.$$

Йиғиштириш индексини танлаш бизнинг ихтиёримизда, демак:

$$\Gamma^i_{ls}\frac{\partial a^l}{\partial x^r} = \Gamma^i_{ms}\frac{\partial a^m}{\partial x^r}$$

ва

$$\Gamma^i_{mr}\frac{\partial a^m}{\partial x^s} = \Gamma^i_{lr}\frac{\partial a^l}{\partial x^s}$$

бўлади.

Кристоффель символларининг пастки индексларга нисбатан симметриклиги назарда тутилса:

$$\Gamma^m_{sr}\frac{\partial a^i}{\partial x^m} = \Gamma^m_{rs}\frac{\partial a^i}{\partial x^m} \quad \text{ва} \quad \Gamma^m_{sr}\Gamma^i_{lm} a^l = \Gamma^m_{rs}\Gamma^i_{lm} a^l$$

бўлади. Сўнгги формулалардан фойдаланиб, (71.3) билан (71.4) га биноан, бундай ёзамиз:

$$\nabla_r \nabla_s a^i - \nabla_s \nabla_r a^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^i_{ls} - \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^i_{lr} + \Gamma^i_{mr}\Gamma^m_{ls} - \Gamma^i_{ms}\Gamma^m_{lr}\right)a^l. \qquad (71.5)$$

Бу тенгликнинг чап томони бир марта контравариант ва икки марта ковариант бўлган учинчи рангли тензорни ифодалайди. Демак, тензорлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ, (71.5) нинг ўнг томонида қавслар ичида турган ифода уч марта ковариант ва бир марта контравариант булган тўртинчи рангли тензордир. *Бу тензор эгриликнинг аралаш тензори дейилади. Эгриликнинг аралаш тензорини* $R_{srl.}^{\ \ \ \ i}$ *орқали белгилайлик:*

$$R_{srl.}^{\ \ \ \ i} = \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^i_{ls} - \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^i_{lr} + \Gamma^i_{mr}\Gamma^m_{ls} - \Gamma^i_{ms}\Gamma^m_{lr}. \qquad (71.6)$$

Бу ифоданинг ўнг томонини r ва s индексларга нисбатан альтернациялаш символи воситасида ҳам ёзиб кўрсатишимиз мумкин:

$$R_{srl.}^{\ \ \ \ i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^i_{ls} + \Gamma^i_{mr}\Gamma^m_{ls}\right)_{[rs]}.$$

(71.5) нинг икки томонини манфий бирга кўпайтириб, сўнгра (71.6) дан фойдалансак:

$$\nabla_s \nabla_r a^i - \nabla_r \nabla_s a^i = -R_{srl.}^{\ \ \ \ i} a^l \qquad (71.7)$$

бўлади. Демак, *контравариант векторни* x^r, x^s *координаталар бўйича ковариант дифференциаллаш натижаси дифференциаллаш тартибига боғлиқ, яъни контравариант векторни ковариант дифференциаллаш коммутативлик хусусиятига эга эмас.*

Контравариант вектордан (71.7) *да кўрсатилган равишда ҳосил қилинган ковариант ҳосилани контравариант векторнинг альтернацияланган ковариант ҳосиласи деб ҳам юритишади.*

(69.12) га биноан, инвариантни ковариант дифференциаллаш оддий дифференциаллаш сингаридир:

$$\nabla_r I = \frac{\partial I}{\partial x^r}.$$

Ковариант $\nabla_r I$ векторнинг x^s координата бўйича ковариант ҳосиласи, (69.7) га биноан, бундай ёзилади:

$$\nabla_s \nabla_r I = \frac{\partial}{\partial x^s}\nabla_r I - \Gamma^m_{rs}\nabla_m I$$

ёки юқоридаги формуладан фойдалансак:

$$\nabla_s \nabla_r I = \frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{\partial I}{\partial x^r}\right) - \Gamma^m_{rs} \frac{\partial I}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^r \partial x^s} - \Gamma^m_{rs} \frac{\partial I}{\partial x^m}$$

бўлади. s, r индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$\nabla_r \nabla_s I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^s \partial x^r} - \Gamma^m_{sr} \frac{\partial I}{\partial x^m}$$

келиб чиқади. Сўнгги икки формулага биноан:

$$\nabla_s \nabla_r I - \nabla_r \nabla_s I = 0 \tag{71.8}$$

бўлади, чунки:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^r \partial x^s} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^s \partial x^r} \quad \text{ва} \quad \Gamma^m_{rs} = \Gamma^m_{sr}.$$

Шундай қилиб, инвариантни ковариант дифференциаллашда дифференциаллаш тартиби аҳамиятга эга эмас, яъни инвариантнинг альтернацияланган ковариант ҳосиласи нолга тенг.

Ковариант b_l вектор учун (71.7) сингари формула топиш мақсадида инвариант тузайлик:

$$I = b_l a^l.$$

Тензорларнинг йиғиштирилган кўпайтмасини ковариант дифференциаллаш формуласи (69.19) га биноан, юқоридаги инвариантдан x^r координата бўйича ковариант ҳосила олайлик:

$$\nabla_r I = \nabla_r b_l a^l + b_l \nabla_r a^l.$$

Чиққан бу натижадан x^s координата бўйича яна ковариант ҳосила олайлик:

$$\nabla_s \nabla_r I = \nabla_s \nabla_r b_l a^l + \nabla_r b_l \nabla_s a^l + \nabla_s b_l \nabla_r a^l + b_l \nabla_s \nabla_r a^l.$$

Бу формуладаги s, r индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$\nabla_r \nabla_s I = \nabla_r \nabla_s b_l a^l + \nabla_s b_l \nabla_r a^l + \nabla_r b_l \nabla_s a^l + b_l \nabla_r \nabla_s a^l$$

бўлади. Аввалги тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи ҳадлар йиғиндиси сўнгги тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи ҳадлар йиғиндисига тенг. Демак, (71.8) га биноан:

$$\nabla_s \nabla_r b_l a^l + b_l \nabla_s \nabla_r a^l = \nabla_r \nabla_s b_l a^l + b_l \nabla_r \nabla_s a^l$$

бўлади, бу ердан:

$$(\nabla_s \nabla_r b_l - \nabla_r \nabla_s b_l)\, a^l = -\, b_l (\nabla_s \nabla_r a^l - \nabla_r \nabla_s a^l)$$

келиб чиқади. Тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиштириш индекси l ўрнига i олсак, (71.7) га мувофиқ:

$$(\nabla_s \nabla_r b_l - \nabla_r \nabla_s b_l)\, a^l = b_i R_{srl}{}^{i} a^l$$

бўлади, контравариант a^l вектор ихтиёрий бўлганлиги сабабли:

$$\nabla_s\nabla_r b_l - \nabla_r\nabla_s b_l = R_{srl}^{\cdot\cdot\cdot i} b_i \tag{71.9}$$

келиб чиқади, яъни *ковариант векторни ковариант дифференциаллаш коммутативлик хусусиятига эга эмас.*

Контравариант ва ковариант векторларнинг альтернацияланган ковариант ҳосилаларини ифодаловчи (71.7), (71.9) формулалардан фойдаланиб, ҳар қандай тензорнинг альтернацияланган ковариант ҳосиласини ҳисоблаб чиқиш қийин эмас. Масалан, аралаш тензор $T_{p.}^{\cdot q}$ берилган бўлсин.

У вақтда шу тензордан иккита ихтиёрий вектор воситасида инвариант тузишимиз мумкин:

$$I = T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q.$$

Инвариантнинг альтернацияланган ковариант ҳосиласи (71.8) га биноан нолга тенгдир:

$$\nabla_s\nabla_r (T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q) - \nabla_r\nabla_s (T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q) = 0. \tag{71.10}$$

Тензорларнинг йиғиштирилган кўпайтмасини ковариант дифференциаллаш формуласи (69.19) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\nabla_r (T_{.p}^{\cdot q} a^p b_q) = \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} \nabla_r a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_r b_q$$

Бу ифодани яна x^s бўйича ковариант дифференциаллайлик:

$$\nabla_s\nabla_r (T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q) = \nabla_s\nabla_r T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q + \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} \nabla_s a^p b_q +$$
$$+ \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_s b_q + \nabla_s T_{p.}^{\cdot q} \nabla_r a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} \nabla_s\nabla_r a^p b_q +$$
$$+ T_{p.}^{\cdot q} \nabla_r a^p \nabla_s b_q + \nabla_s T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_r b_q + T_{p.}^{\cdot q} \nabla_s a^p \nabla_r b_q + T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_s\nabla_r b_q.$$

Бу ерда s, r индекслар алмаштирилса, иккинчи ва тўртинчи, учинчи ва еттинчи, олтинчи ва саккизинчи ҳадларнинг мос йиғиндилари ўзгармайди. Демак:

$$\nabla_s\nabla_r (T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q) - \nabla_r\nabla_s (T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q) =$$
$$= (\nabla_s\nabla_r T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} \nabla_s\nabla_r a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_s\nabla_r b_q) -$$
$$- (\nabla_r\nabla_s T_{p.}^{\cdot q} a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} \nabla_r\nabla_s a^p b_q + T_{p.}^{\cdot q} a^p \nabla_r\nabla_s b_q).$$

Мос кўпайтирувчиларни қавслар олдига чиқарсак, (71.10) га биноан, бундай ёзамиз:

$$a^p b_q (\nabla_s\nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r\nabla_s T_{p.}^{\cdot q}) + T_{p.}^{\cdot q} b_q (\nabla_s\nabla_r a^p - \nabla_r\nabla_s a^p) +$$
$$+ T_{p.}^{\cdot q} a^p (\nabla_s\nabla_r b_q - \nabla_r\nabla_s b_q) = 0.$$

Контравариант ва ковариант векторларнинг альтернацияланган ковариант ҳосилалари ўрнига уларнинг (71.7) билан (71.9) га мувофиқ олинган ифодаларини қўяйлик:

$$a^p b_q (\nabla_s \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r \nabla_s T_{p.}^{\cdot q}) + T_{p.}^{\cdot q} b_q (- R_{srl.}^{\ \ \ \ p} a^l) + T_{p.}^{\cdot q} a^p (R_{srq.}^{\ \ \ \ l} b_l) = 0,$$

бу ердан:

$$a^p b_q (\nabla_s \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r \nabla_s T_{p.}^{\cdot q}) = a^l b_q R_{srl.}^{\ \ \ \ p} T_{p.}^{\cdot q} - a^p b_i R_{srq.}^{\ \ \ \ i} T_{p.}^{\cdot q}$$

бўлади ёки ўнг томонда биринчи ҳаддаги йиғиштириш индекслари бўлган l билан p ўзаро алмаштирилса, иккинчи ҳадда ҳам i билан q ўзаро алмаштирилса, сўнгра $a^p b_q$ қавслар олдига чиқарилса:

$$a^p b_q (\nabla_s \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r \nabla_s T_{p.}^{\cdot q}) = a^p b_q (R_{srp.}^{\ \ \ \ l} T_{l.}^{\cdot q} - R_{sri.}^{\ \ \ \ q} T_{p.}^{\cdot i})$$

бўлади.

Олинган векторларнинг ихтиёрий бўлганлиги сабабли, сўнгги натижага биноан бундай ёзамиз:

$$\nabla_s \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r \nabla_s T_{p.}^{\cdot q} = R_{srp.}^{\ \ \ \ l} T_{l.}^{\cdot q} - R_{srl.}^{\ \ \ \ q} T_{p.}^{\cdot l}$$

ёки йиғиштириш индекслари бўлган l, i ўрнига m ни олсак, ниҳоят:

$$\nabla_s \nabla_r T_{p.}^{\cdot q} - \nabla_r \nabla_s T_{p.}^{\cdot q} = R_{srp.}^{\ \ \ \ m} T_{m.}^{\cdot q} - R_{srm.}^{\ \ \ \ q} T_{p.}^{\cdot m} \tag{71.11}$$

келиб чиқади.

Юқоридаги сингари мулоҳазалардан фойдаланиб, ҳар қандай тензорнинг альтернацияланган ковариант ҳосиласини эгриликнинг аралаш тензори воситасида ифодалаш мумкин.

72. ЛОКАЛ-ГЕОДЕЗИК КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Риман фазосида элементар масофа квадрати учун:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

бўлади, бу ерда метрик g_{ij} тензор координаталар функциясидир. Эвклид фазосида метрик тензорнинг турли индексли компонентлари нолга тенг бўлиб, бир хил индексли компонентлари мусбат бирга тенгдир. Эвклид псевдофазосида эса метрик тензорнинг турли индексли компонентлари нолга тенг, аммо бир хил индексли компонентларининг баъзилари мусбат бирга ва баъзилари манфий бирга тенгдир. Бу икки тур фазо метрик тензорининг компонентлари ўзгармасдир. Умуман, *аниқ координаталарнинг системасида олинган метрик тензорининг компонентлари ўзгармас бўлган фазо текис фазо дейилади.* Эвклид фазоси билан Эвклид псевдофазоси текис фазонинг хусусий ҳолларидир.

Метрик тензорнинг Декарт системасидаги компонентлари ўзгармас бўлганлиги сабабли (67.18) га мувофиқ, *текис фазонинг ҳамма нуқталарида Кристоффель символлари нолга тенг.* Шу сабабли, (71.6) га биноан, текис фазонинг эгрилик тензори бу системада нолга тенгдир. Тензор таърифи бўйича, бирор системада нолга тенг бўлган тензор ҳар қандай бошқа системада ҳам нолга тенг бўлади. *Шундай қилиб, текис фазонинг эгрилик тензори ҳар қандай системада нолга тенгдир:* $R_{srl}^{\;\;\;\;i} = 0$ *ва аксинча, эгрилик тензори нолга тенг бўлган фазо текис фазо бўлади.* Аммо бунинг исботи сердиққат иш бўлганлиги учун, юқорида айтилганлар билангина чекланамиз.

Кристоффель символларидан фойдаланиб, тензорларни параллел кўчириш, геодезик чизиқларни ифодалаш ва тензорларни ковариант дифференциаллаш масалалари билан шуғулланган эдик. Шу символлар воситасида энди Риман фазосининг текис фазога бўлган муносабатини аниқлаб чиқайлик.

Риман фазосида метрик тензор компонентлари ва Кристоффель символлари координаталар функцияларидир. Аммо координаталар системасини шундай танлаш мумкинки, берилган нуқта учун бу системада ифодаланган Кристоффель символлари нолга тенг бўлади.

Ҳақиқатан, (67.5) да ифодаланган Кристоффель символларини алмаштириш қонунини эслайлик:

$$\Gamma'^{u}_{iq} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^q}\frac{\partial x'^u}{\partial x^r}\Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^q}\frac{\partial x'^u}{\partial x^r}.$$

Штрихли координаталар системасидан штрихсиз координаталар системасига ўтилса, у вақтда:

$$\Gamma^{u}_{iq} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x^q}\frac{\partial x^u}{\partial x'^r}\Gamma'^r_{jl} + \frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^i \partial x^q}\frac{\partial x^u}{\partial x'^r} \qquad (72.1)$$

бўлади.

Фазонинг берилган нуқтасида штрихсиз координаталар системасида олинган Кристоффель символлари Γ^u_{iq} аниқ қийматга эгадир. Агар фазонинг ўша нуқтасида штрихли координаталар системасида олинган Кристоффель символи Γ'^r_{jl} нолга тенг:

$$\Gamma'^r_{jl} = 0 \qquad (72.2)$$

бўлса, у ҳолда (72.1) га биноан:

$$\Gamma^u_{iq} = \frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^l \partial x^q}\frac{\partial x^u}{\partial x'^r}$$

бўлади. Бу тенгликнинг икки томонини $\frac{\partial x'^m}{\partial x^u}$ га кўпайтирайлик:

$$\Gamma^u_{iq}\frac{\partial x'^m}{\partial x^u}=\frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^i\partial x^q}\frac{\partial x^u}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^m}{\partial x^u}=\frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^i\partial x^q}\delta^m_r$$

ёки

$$\Gamma^u_{iq}\frac{\partial x'^m}{\partial x^u}=\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^i\partial x^q}. \tag{72.3}$$

Демак, штрихли координаталарнинг штрихсиз координаталар бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалари (72.3) да ифодаланган шартга бўйсунса, Кристоффель символлари Γ'^r_{ji} фазонинг берилган нуқтасида нолга тенг бўлади. (72.3) да ифодаланган шартни бажариш учун координаталарни шундай алмаштирайлик:

$$x'^m=x^m-x^m_0+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{iq})_0(x^i-x^i_0)(x^q-x^q_0), \tag{72.4}$$

бу ерда $(\Gamma^m_{iq})_0$, x^m_0, x^i_0, x^q_0 Кристоффель символлари билан штрихсиз координаталарнинг текширилаётган нуқтада олинган қийматларидир. (72.4) ни x^r бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^r}=\frac{\partial x^m}{\partial x^r}+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{iq})_0\frac{\partial x^i}{\partial x^r}(x^q-x^q_0)+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{iq})_0(x^i-x^i_0)\frac{\partial x^q}{\partial x^r}=$$

$$=\delta^m_r+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{iq})_0\delta^i_r(x^q-x^q_0)+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{iq})_0(x^i-x^i_0)\delta^q_r=$$

$$=\delta^m_r+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{rq})_0(x^q-x^q_0)+\frac{1}{2}(\Gamma^m_{ir})_0(x^i-x^i_0)$$

ёки сўнгги ҳаддаги йиғиштириш индекси i ўрнига q ёзилса ва Кристоффель символларининг пастки индексларга нисбатан симметриклиги назарда тутилса:

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^r}=\delta^m_r+(\Gamma^m_{rq})_0(x^q-x^q_0) \tag{72.5}$$

бўлади. Бу ердан текширилаётган $x^q=x^q_0$ нуқтада:

$$\left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^r}\right)=\delta^m_r \tag{72.6}$$

бўлади.

Энди (72.5) ни x^s бўйича дифференциаллаб, текширилаётган нуқта учун бундай ёзамиз:

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^r\partial x^s}\right)_0=(\Gamma^m_{rq})_0\left(\frac{\partial x^q}{\partial x^s}\right)_0=(\Gamma^m_{rq})_0\delta^q_s$$

ёки

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^r \partial x^s}\right)_0 = (\Gamma^m_{rs})_0, \qquad (72.7)$$

яъни (72.3) да ифодаланган шарт текширилаётган нуқтада бажарилди, демак, (72.4) га мувофиқ танланган штрихли системада Кристоффелнинг Γ'^r_{jl} символлари нолга тенг бўлади.

Фазонинг берилган нуқтасида Кристоффель символлари Γ'^r_{jl} ни нолга айлантирувчи x'^m координаталар системаси локал-геодезик координаталар системаси дейилади.

Агар метрик тензор ҳосилалари билан Кристоффель символлари орасидаги (67.21) да ёки (67.11) да ифодаланган боғланишни эсласак, у вақтда, (72.2) га биноан, метрик тензор компонентларининг ҳосилалари текширилаётган нуқтада нолга тенг бўлади, демак, текширилаётган нуқтада метрик тензор компонентлари ўзгармайди. (72.6) дан ҳам аёнки, текширилаётган нуқтада олинган ҳар қандай тензорнинг компонентлари штрихли ва штрихсиз системаларда ўзгармасдан қолади, жумладан метрик тензор компонентлари ҳам ўзгармайди.

Берилган нуқтада локал-геодезик координаталарни чизиқли алмаштириш мумкин бўлади, яъни:

$$x'^m = \alpha^m_i x''^i + \beta^m, \qquad (72.8)$$

бу ерда α^m_i, β^m — ўзгармас миқдорлар. Ҳақиқатан, (72.8) га мувофиқ:

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x''^i} = \alpha^m_i, \qquad (72.9)$$

$$\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x''^i \partial x''^j} = 0. \qquad (72.10)$$

Кристоффель символларини алмаштириш қонуни (67.5) га биноан:

$$\Gamma''^u_{ij} = \frac{\partial x'^q}{\partial x''^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^j}\frac{\partial x''^u}{\partial x'^r}\Gamma'^r_{ql} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x''^i \partial x''^j}\frac{\partial x''^u}{\partial x'^m}$$

бўлади ёки (72.10) ни назарга олсак, бу ердан:

$$\Gamma''^u_{ij} = \frac{\partial x'^q}{\partial x''^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^j}\frac{\partial x''^u}{\partial x'^r}\Gamma'^r_{ql}$$

келиб чиқади. Аммо текширилаётган нуқтада, (72.2) га биноан, Кристоффель символлари $\Gamma'^r_{ql} = 0$, демак, $\Gamma''^u_{ij} = 0$, яъни чизиқли алмаштирилган икки штрихли координаталар системаси локал-геодезик системадир.

Фазонинг ҳар қандай нуқтасида локал-геодезик системада олинган метрик тензор компонентлари ўзгармас миқдордир, яъни ҳар қандай аниқ бир нуқтада локал-геодезик система воситасида Риман фазосини текис фазога айлантириш мумкин. *Шундай қилиб, ҳар қандай нуқтанинг чексиз кичик атрофида Риман фазоси текис фазо шаклини олади.*

Локал-геодезик системада Кристоффель символлари нолга тенг бўлганлигидан, бу системада ҳар қандай тензорнинг ковариант ҳосиласи унинг одатдаги ҳосиласига тенг бўлади:

$$\nabla_j T^{\dots u}_{i\dots} = \frac{\partial}{\partial x^j} T^{\dots u}_{i\dots} \tag{72.11}$$

73. ЭГРИЛИК ТЕНЗОРИНИНГ БАЪЗИ ХУСУСИЯТЛАРИ

Эгриликнинг аралаш тензори (71.6) га мувофиқ:

$$R_{srl.}{}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^{i}_{ls} - \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^{i}_{lr} + \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{m}_{ls} - \Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{m}_{lr} \tag{73.1}$$

бўлади. Биринчи ва иккинчи индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$R_{rsl.}{}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^{i}_{lr} - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^{i}_{ls} + \Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{m}_{lr} - \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{m}_{ls}$$

келиб чиқади. Бу тенгликни аввалгиси билан таққосласак:

$$R_{srl.}{}^{i} = -R_{rsl.}{}^{i} \tag{73.2}$$

бўлади, *яъни эгриликнинг аралаш тензори ўзининг биринчи ва иккинчи индексларига нисбатан антисимметрикдир.*

Эгрилик аралаш тензорининг биринчи, иккинчи ва учинчи индекслари циклик равишда алмаштирилса, яъни srl ўрнига lsr ва сўнгра rls олинса, (73.1) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$R_{lsr.}{}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^{i}_{rl} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^{i}_{rs} + \Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{m}_{rl} - \Gamma^{i}_{ml}\Gamma^{m}_{rs},$$

$$R_{rls.}{}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^{i}_{sr} - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^{i}_{sl} + \Gamma^{i}_{ml}\Gamma^{m}_{sr} - \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{m}_{sl}.$$

Кристоффель символларининг пастки индексларига нисбатан симметриклиги назарга олинса, сўнгги икки тенгликнинг ўнг томонлари билан (73.1) тенгликнинг ўнг томони йиғиндиси нолга тенг бўлади:

$$R_{srl.}{}^{i} + R_{lsr.}{}^{i} + R_{rls.}{}^{i} = 0, \tag{73.3}$$

яъни биринчи учта индекси циклик равишда алмаштирилган эгрилик аралаш тензорининг йиғиндиси нолга тенгдир.

Эгрилик аралаш тензорининг контравариант индексини тушириб, эгриликнинг ковариант тензори ҳосил қилиш мумкин.

$$R_{srlk} = g_{ki} R_{srl.}^{\;\;\;\;\;i} \tag{73.4}$$

ва аксинча:

$$R_{srl.}^{\;\;\;\;\;i} = g^{ik} R_{srlk} \tag{73.5}$$

Эгриликнинг ковариант тензорини Кристоффель символлари ва метрик тензорнинг иккинчи ҳосилалари орқали ифодалаш мумкин. (73.4) ва (73.1) га мувофиқ:

$$R_{srlk} = g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma^i_{ls} - g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma^i_{lr} + g_{ki} \Gamma^i_{mr} \Gamma^m_{ls} - g_{ki} \Gamma^i_{ms} \Gamma^m_{lr} \tag{73.6}$$

бўлади. Ўз-ўзидан аёнки:

$$g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma^i_{ls} = \frac{\partial}{\partial x^r} (g_{ki} \Gamma^i_{ls}) - \Gamma^i_{ls} \frac{\partial q_{ki}}{\partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{ls,\,k} - \Gamma^i_{ls} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^r},$$

чунки Кристоффелнинг биринчи ва иккинчи тур символлари орасидаги боғланиш (67.15) га мувофиқ:

$$\Gamma_{ls,\,k} = g_{ki} \Gamma^i_{ls}.$$

Шунингдек:

$$g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma^i_{lr} = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{lr,\,k} - \Gamma^i_{lr} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s}$$

бўлади. У вақтда (73.6) ушбу шаклни олади:

$$R_{srlk} = \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{ls,\,k} - \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{lr,\,k} - \Gamma^i_{ls} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^r} + \Gamma^i_{lr} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s} + \\ + \Gamma_{mr,\,k} \Gamma^m_{ls} - \Gamma_{ms,\,k} \Gamma^m_{lr}.$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги сўнгги икки ҳадда йиғиштириш индекси m ўрнига i олинса, умумий кўпайтувчиларни қавслар ташқарисига чиқариб ёзиш мумкин:

$$R_{srlk} = \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{ls,\,k} - \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{lr,\,k} - \Gamma^i_{ls} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^r} - \Gamma_{ir,\,k} \right) + \\ + \Gamma^i_{lr} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s} - \Gamma_{is,\,k} \right).$$

Аммо (67.21) га мувофиқ:

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^r} = \Gamma_{kr,\,i} + \Gamma_{ir,k} \quad \text{ва} \quad \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s} = \Gamma_{ks,\,i} + \Gamma_{is,\,k}$$

бўлади. У вақтда:

$$R_{srlk} = \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{ls,k} - \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{lr,k} - \Gamma^i_{ls} \Gamma_{kr,\,i} + \Gamma^i_{lr} \Gamma_{ks,\,i} \tag{73.7}$$

келиб чиқади. (67.16) га мувофиқ:

$$\Gamma_{ls,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^k}\right), \quad \Gamma_{lr,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k}\right).$$

Бу ердан:

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma_{ls,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^r} + \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^s \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ls}}{\partial x^k \partial x^r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma_{lr,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial x^l \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{lr}}{\partial x^k \partial x^s}\right).$$

Энди

$$\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^s \partial x^r} = \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^r \partial x^s}$$

эканлиги назарга олинса:

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma_{ls,\,k} - \frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma_{lr,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ls}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{lr}}{\partial x^k \partial x^s}\right)$$

бўлади. Шунга биноан (73.7) бундай ёзилади:

$$R_{srlk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ls}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{lr}}{\partial x^k \partial x^s}\right) + \\ + \Gamma^i_{lr}\Gamma_{ks,\,i} - \Gamma^i_{ls}\Gamma_{kr,\,i}. \tag{73.8}$$

Шундай қилиб, эгриликнинг ковариант тензори учун айтилган ифода топилди. Шу ифодадан фойдаланиб, эгрилик тензорининг бир неча муҳим алгебраик хоссаларини ўрганиб чиқамиз.

(73.8) да s, r индексларнинг ўринлари алмаштирилганда:

$$R_{srlk} = -R_{rslk} \tag{73.9}$$

бўлади, *яъни эгриликнинг ковариант тензори ўзининг биринчи ва иккинчи индексларига нисбатан антисимметрикдир.* Бу хусусият биргаликда олинган (73.2) билан (73.4) дан ҳам равшан.

(73.8) да l ва k индексларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$R_{srkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{rl}}{\partial x^k \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x^l \partial x^s}\right) + \Gamma^i_{kr}\Gamma_{ls,\,i} - \Gamma^i_{ks}\Gamma_{lr,\,i}$$

бўлади. Йиғиштириш индексининг бир жойда кўтарилганда иккинчи жойда туширилишини эслайлик:

$$\Gamma^i_{kr}\Gamma_{ls,\,i} = \Gamma_{kr,\,i}\,\Gamma^i_{ls} \quad \text{ва} \quad \Gamma^i_{ks}\Gamma_{lr,\,i} = \Gamma_{ks,\,i}\Gamma^i_{lr}.$$

Шуларга кўра, аввалги формула (73.8) билан солиштирилса:

$$R_{srlk} = -R_{srkl} \tag{73.10}$$

Энди учта индекси ҳар хил бўлган компонентлар сонини ҳисоблайлик. Масалан, R_{srsk}, R_{rssk}, R_{srsk}, R_{rsks} бўлса, юқоридагидек бу компоненглар ичида фақат биттасигина, айтайлик, R_{srsk} гина ихтиёрий булади. s индекс учун олинган 1, 2, ..., n қийматларнинг ҳар бирига қолган $n-1$ сонлардан ҳосил бўлган r, k индексли жуфтлар мос келади; ҳар хил булган бундай жуфтлар сони юқоридаги сингари $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ га тенгдир. Демак, учта индекси ҳар хил булган ихтиёрий компонентлар сони $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ га тенг бўлади.

Ниҳоят, ҳамма тўртта индекси ҳам ҳар хил бўлган компонентлар сонини топайлик. Биринчи sr жуфтлар сони $\frac{1}{2}n(n-1)$ га тенгдир. Қолган $n-2$ та сондан тузилган иккинчи lk жуфтлар сони $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ га тенгдир. Демак, тўртта индекси ҳар хил бўлган компонентлар сони $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$ га тенг. Аммо (73.11) га мувофиқ, биринчи ва иккинчи жуфтларнинг ўрин алмаштирилиши натижани ўзгартирмайди. Шунинг учун, юқорида келтирилган сонни икки марта камайтириш керак, яъни бунда компонентлар сони $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ га тенгдир. (73.12) га биноан, учта компонентдан иккитаси ихтиёрий булиб, шу иккитаси орқали учинчисини аниқлаш мумкин. Демак, ҳозиргина топилган компонентларнинг учдан икки қисмигина ихтиёрийдир, яъни тўртта индекси ҳар хил бўлган ихтиёрий компонентлар сони $\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$ булади.

Шундай қилиб, компонентларнинг умумий сони

$$N=\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

ёки қавсларни очиб ҳисоблаб чиқсак:

$$N=\frac{1}{12}n^2(n^2-1) \tag{73.14}$$

булади. *Бу формула n ўлчовли фазо эгрилик тензорининг ўзаро боғланмаган компонентлари сонини ифодалайди.* Хусусий ҳолларда:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ n=2, \quad N=1,\\ &\beta)\ n=3, \quad N=6,\\ &\gamma)\ n=4, \quad N=20 \end{aligned}$$

бўлади.

74. ЭГРИЛИК ТЕНЗОРИНИ ЙИҒИШТИРИШ

Эгрилик тензори бир марта йиғиштирилса, ундан иккинчи рангли янги тензор ҳосил бўлади. Эгрилик тензорини турли усуллар билан йиғиштириш мумкин:

1) $R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sr}$,

2) $R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sl}$,

3) $R_{srl.}^{\ \ \ s}$,

4) $R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{rl}$,

5) $R_{srl.}^{\ \ \ r}$,

6) $R_{srl.}^{\ \ \ l}$.

Биринчи ва олтинчи ҳоллардаги йиғиштириш натижаси нолга тенг бўлади. Ҳақиқатан, биринчи ҳолдаги йиғиштириш индексларини алмаштириб, сўнгра метрик тензор симметриклиги билан (73.2) назарда тутилса, бундай ёзиш мумкин:

$$R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sr} = R_{rsl.}^{\ \ \ k} g^{rs} = R_{rsl.}^{\ \ \ k} g^{sr} = -R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sr},$$

бу ердан:

$$2R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sr} = 0,$$

демак:

$$R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sr} = 0$$

бўлади. Шунингдек, (73.10) га мувофиқ:

$$R_{srl.}^{\ \ \ l} = R_{srlk} g^{lk} = R_{srkl} g^{kl} = R_{srkl} g^{lk} = -R_{srlk} g^{lk},$$

бу ердан:

$$2R_{srlk} g^{lk} = 0,$$

демак:

$$R_{srl.}^{\ \ \ l} = 0$$

бўлади. Энди иккинчи, тўртинчи ва бешинчи ҳоллардаги йиғиштириш натижаларини учинчи ҳолдаги йиғиштириш натижаси орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, (73.11) ва (73.10) га мувофиқ шундай ёзсак булади:

$$R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{sl} = R_{srlm} g^{mk} g^{sl} = R_{lmsr} g^{mk} g^{sl} = -R_{lmrs} g^{mk} g^{sl} = \\ = -R_{lmr.}^{\ \ \ \ l} g^{mk}.$$

Шунингдек тўртинчи ҳолни тубандагича ёзамиз:

$$R_{srl.}^{\ \ \ k} g^{rl} = R_{srlm} g^{mk} g^{rl} = R_{lmsr} g^{mk} g^{rl} = R_{lms.}^{\ \ \ \ l} g^{mk}.$$

Ниҳоят бешинчи ҳолни ҳам тубандагича ёзишга ҳақлимиз:

$$R_{srl.}^{\ \ \ r} = -R_{rsl.}^{\ \ \ r}$$

Шундай қилиб, эгрилик тензорини бир марта йиғиштириш натижасида иккинчи рангли битта ковариант $R_{srl.}^{\;\;\;\;s}$ тензор ҳосил бўлади. Бу тензор эгриликнинг йиғиштирилган ковариант тензори дейилади ва R_{rl} орқали белгиланади:

$$R_{rl} = R_{srl.}^{\;\;\;\;s} \qquad (74.1)$$

Бу тензор симметрикдир:

$$R_{rl} = R_{lr}. \qquad (74.2)$$

Ҳақиқатан, (74.1) ни (73.9), (73.10) ва (73.11) га мувофиқ шундай ёзишимиз мумкин:

$$R_{rl} = R_{srl.}^{\;\;\;\;s} = R_{srlm}g^{ms} = -R_{rslm}g^{ms} = R_{rsml}g^{ms} = R_{mlrs}g^{ms} = \\ = R_{mlr.}^{\;\;\;\;m} = R_{lr}.$$

Эгриликнинг йиғиштирилган тензорини аралаш ва контравариант шаклларда ҳам ифодалаш мумкин:

$$R_l^k = g^{kr}R_{lr}, \qquad (74.3)$$

$$R^{ik} = g^{il}g^{kr}R_{lr}. \qquad (74.4)$$

(74.2) ва (74.4) дан:

$$R^{ik} = R^{ki}. \qquad (74.5)$$

Эгриликнинг йиғиштирилган тензорини йиғиштириш натижаси фазо эгрилигининг скаляри дейилади ва R билан белгиланади:

$$R = R_k^k \qquad (74.6)$$

Энди тензорлар назариясида муҳим бўлган Эйнштейн тензори билан танишайлик. Бунинг учун Бианки-Падова айнияти (73.13) дан фойдаланайлик:

$$\nabla_j R_{srlk} + \nabla_s R_{rjlk} + \nabla_r R_{jslk} = 0. \qquad (74.7)$$

Ковариант дифференциаллашга нисбатан метрик тензор ўзгармас бўлганлигидан (74.7) нинг икки томонини g^{km} га кўпайтириш натижасида k индексни кўтариш мумкин:

$$\nabla_j R_{srl.}^{\;\;\;\;m} + \nabla_s R_{rjl.}^{\;\;\;\;m} + \nabla_r R_{jsl.}^{\;\;\;\;m} = 0.$$

Бу тенгламада $s = m$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$\nabla_j R_{srl.}^{\;\;\;\;s} + \nabla_s R_{rjl.}^{\;\;\;\;s} + \nabla_r R_{jsl.}^{\;\;\;\;s} = 0. \qquad (74.8)$$

Аммо (73.2) ва (74.1) га биноан:

$$R_{jsl.}^{\;\;\;\;s} = -R_{sjl.}^{\;\;\;\;s} = -R_{jl}$$

бўлади, у вақтда:

$$\nabla_j R_{rl} + \nabla_s R_{rjl.}^{\;\;\;\;s} - \nabla_r R_{jl} = 0$$

келиб чиқади, тенгламанинг икки томонини g^{lm} га кўпайтирсак:

$$\nabla_j R^m_r + \nabla_s R_{rj..}^{\ \ \,ms} - \nabla_r R^m_j = 0 \tag{74.9}$$

булади. (73.10) га мувофиқ:

$$R_{rj..}^{\ \ \,ms} = R_{rjpq} g^{pm} g^{qs} = - R_{rjqp} g^{pm} g^{qs} = - R_{rj..}^{\ \ \,sm}$$

ва буни (74.9) га қўйсак:

$$\nabla_j R^m_r - \nabla_s R_{rj..}^{\ \ \,sm} - \nabla_r R^m_j = 0$$

келиб чиқади. Бу тенгламада $m = r$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$\nabla_j R^m_m - \nabla_s R_{mj..}^{\ \ \ \,sm} - \nabla_m R^m_j = 0. \tag{74.10}$$

(74.1) дан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$R_{mj..}^{\ \ \ \,sm} = R_{mjp.}^{\ \ \ \ \,m} g^{ps} = R_{jp} g^{ps} = R^s_j,$$

у вақтда (74.6) га мувофиқ, (74.10) тубандагича ёзилади:

$$\nabla_j R - \nabla_s R^s_j - \nabla_m R^m_j = 0 \quad \text{ёки} \quad \nabla_j R - 2\nabla_m R^m_j = 0.$$

Бу тенгламанинг икки томонини g^{jk} га кўпайтирайлик:

$$\nabla_j (R g^{jk}) - 2\nabla_m (R^m_j g^{jk}) = 0,$$
$$\nabla_j (R g^{jk}) - 2\nabla_m R^{mk} = 0,$$
$$\nabla_m (R g^{mk}) - 2\nabla_m R^{mk} = 0,$$
$$\nabla_m R^{mk} - \frac{1}{2} \nabla_m (R g^{mk}) = 0,$$
$$\nabla_m \left(R^{mk} - \frac{1}{2} R g^{mk}\right) = 0. \tag{74.11}$$

Охирги тенгламанинг чап томонидаги қавс ичида турган тензор Эйнштейн тензори дейилади:

$$G^{mk} = R^{mk} - \frac{1}{2} R g^{mk}. \tag{74.12}$$

(74.11) га мувофиқ:

$$\nabla_m G^{mk} = 0 \tag{74.13}$$

булади, *яъни Эйнштейн тензорининг дивергенцияси нолга тенг. Эйнштейн тензори консерватив тензор деб ҳам юритилади.*

75. БАЪЗИ МИСОЛЛАР ВА ТАТБИҚЛАР

I. Координат векторлар системасида метрик тензор билан Кристоффель символларининг ифодаланиши. Куп улчовли фазо нуқтасининг радиус вектори шу нуқта эгри чизиқли координаталарининг функцияси бўлганлигидан, чексиз кичик силжиш вектори учун:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i$$

бўлади, бу ерда $i = 1, 2, 3 \ldots n$.

$\frac{\partial r}{\partial x^i}$ вектор x^i координат чизиққа уринма бўлиб, модули ва йўналиши турли нуқтада турличадир. *Чизиқли боғланмаган бу n та вектор координат векторлар ёки базис векторлар дейилади.* Координат вектор $\frac{\partial r}{\partial x^i}$ ни e_i орқали белгилайлик:

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}, \tag{75.1}$$

у ҳолда:

$$dr = e_i dx^i \tag{75.2}$$

бўлади. *Асосий координат векторлар e_i га нисбатан ўзаро координат векторлар e^j ни қуйидагича ифодалайлик:*

$$(e_i e^j) = \delta_i^j, \tag{75.3}$$

бу ерда δ_i^j — Кронекер символи.

Ҳар қандай a векторни асосий координат векторлар ва ўзаро координат векторлар бўйича ажратиш мумкин:

$$a = a^i e_i \tag{75.4}$$

$$a = a_j e^j. \tag{75.5}$$

Фазо нуқтасининг ўзаро координат векторлар системасида олинган эгри чизиқли координаталарини x_j орқали белгиласак:

$$dr = e^j dx_j \tag{75.6}$$

бўлади. Бир-бирига чексиз яқин бўлган икки нуқта орасидаги масофа квадрати ds^2 учун (75.2) ва (75.6) га биноан, тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (e_k e_m) dx^k dx^m = (e^k e^m) dx_k dx_m = \\ &= (e_k e^m) dx^k dx_m = (e^k e_m) dx_k dx^m. \end{aligned} \tag{75.7}$$

Риман фазосида метрик тензор таърифига биноан, (75.7) дан:

$$(e_k e_m) = g_{km}, \tag{75.8}$$

$$(e^k e^m) = g^{km} \tag{75.9}$$

ва (75.3) дан фойдалансак

$$(e^k e_m) = g_m^k = \delta_m^k \tag{75.10}$$

бўлади. *Бу формулалар метрик тензорни координат векторлар орқали ифодалайди.*

(75.4) ва (75.5) га мувофиқ бундай ёзамиз:

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i = a_i \boldsymbol{e}^i. \tag{75.11}$$

Бу ифоданинг икки томонини $\boldsymbol{e}^j$ га ёки $\boldsymbol{e}_j$ га скаляр равишда кўпайтирайлик:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^j) = a^i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j) = a_i(\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j)$$
$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_j) = a^i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) = a_i(\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j).$$

Юқоридаги формулалардан фойдалансак:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^j) = a^j = g^{ij}a_i \tag{75.12}$$
$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_j) = a_j = g_{ij}a^i \tag{75.13}$$

бўлади. Шундай қилиб, бирор векторнинг асосий координат векторлар системасидаги компонентлари шу векторнинг контрвариант компонентлари, ўша векторнинг ўзаро координат векторлар системасига нисбатан олинган компонентлари эса унинг ковариант компонентлари бўлади.

(75.11) даги a^i қийматини (75.12) дан олиб қўйсак:

$$g^{ij}a_j\boldsymbol{e}_i = a_i\boldsymbol{e}^i = a_j\boldsymbol{e}^j$$

бўлади, бу ердан:

$$\boldsymbol{e}^j = g^{ij}\boldsymbol{e}_i \tag{75.14}$$

келиб чиқади. (75.11) даги a_i қийматини (75.13) дан олиб қўйайлик.

$$a^i\boldsymbol{e}_i = g_{ij}a^j\boldsymbol{e}^i = g_{ji}a^i\boldsymbol{e}^j,$$

бу ердан:

$$\boldsymbol{e}_i = g_{ji}\boldsymbol{e}^j \tag{75.15}$$

бўлади. Сўнгги икки формулада метрик тензор воситасида асосий ва ўзаро координат векторлар орасидаги боғланиш ифодаланган.

Координаталарни алмаштириш қонуни берилган бўлсин:

$$x'^i = x'^i(x^j),$$

у ҳолда:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j \tag{75.16}$$

бўлади.

Энди координат векторларни алмаштириш қонунларини аниқлайлик. Бундай ёзишимиз мумкин:

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial x'^i},$$

яъни:

$$e'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j. \tag{75.17}$$

Шундай қилиб, векторнинг ковариант компонентлари ва асосий координат векторлар бир хил алмаштириш қонунига бўйсунади.

Бу формуланинг икки томонини g'^{kl} га кўпайтириб, сўнгра, $l = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштирсак, (75.14) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$e'^k = g'^{ki} e'_i = g'^{ki} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s} g^{rs} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j =$$

$$= \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} \delta^j_s g^{rs} e_j = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} g^{rs} e_s,$$

яъни:

$$e'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} e^r \tag{75.18}$$

бўлади. *Шундай қилиб, векторнинг контравариант компонентлари ва ўзаро координат векторлар бир хил алмаштириш қонунига бўйсунади.*

Кристоффель символларини координат векторлар ва уларнинг ҳосилалари орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, таърифга мувофиқ:

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i},$$

$$e_j = \frac{\partial r}{\partial x^j}$$

бўлади. Бундан:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\right)$$

ёки

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \tag{75.19}$$

келиб чиқади, демак:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} + \frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right)$$

бўлади. Бу формуланинг икки томонини e_k га скаляр равишда кўпайтирайлик:

$$\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2}\left(e_k \frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right)$$

ёки:

$$\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}(e_k e_i) - \left(e_i \frac{\partial e_k}{\partial x^j}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(e_k e_j) - \left(e_j \frac{\partial e_k}{\partial x^i}\right)\right\}.$$

(75.19) назарга олинса:

$$\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}(e_k e_i) + \frac{\partial}{\partial x^i}(e_k e_j) - \frac{\partial}{\partial x^k}(e_i e_j)\right\}$$

бўлади, ниҳоят, (75.8) дан фойдалансак:

$$\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\}$$

ёки, (75.19) га мувофиқ:

$$\left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \left(e_k \frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{75.20}$$

бўлади. Бу формуланинг икки томонини g^{ml} га кўпайтирайлик, сўнгра $l = k$ деб ҳисоблаб, йиғиштирсак, (75.14) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\left(e^m \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2} g^{mk}\left\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\}$$

ёки, (75.10) га мувофиқ:

$$\left(e^m \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = -\left(e_i \frac{\partial e^m}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2} g^{mk}\left\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\} \tag{75.21}$$

бўлади. Кристоффель символларининг (67.16) ва (67.18) ифодалари билан (75.20) ва (75.21) га биноан:

$$\Gamma_{ij,\,k} = \left(e_k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = \left(e_k \frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right) \tag{75.22}$$

$$\Gamma^m_{ij} = \left(e^m \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right) = -\left(e_i \frac{\partial e^m}{\partial x^j}\right) \tag{75.23}$$

бўлади. *Бу формулалар Кристоффель символларини координат векторлар ва уларнинг ҳосилалари орқали ифодалайди.*

II. Ортогонал координаталар системасида метрик тензор ва Кристоффель символларининг ифодаланиши. Ортогонал координаталар системасида элементар масофа квадрати фақат координаталарнинг квадратлари орқали ифодаланади:

$$ds^2 = g_{11}\, dx^{12} + g_{22}\, dx^{22} + \ldots + g_{nn}\, dx^{n2}. \tag{75.24}$$

Демак, ортогонал координаталар системасида метрик тензорнинг турли индексли компонентлари нолга тенг:

$$g_{ij} = 0, \text{ агар } i \neq j \text{ бўлса.} \tag{75.25}$$

Бу ҳолда метрик тензор дискриминанти:

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} = g_{11}\, g_{22} \dots g_{nn} \qquad (75.26)$$

бўлади.

Метрик тензорнинг контравариант компонентларини унинг ковариант компонентлари орқали ифодалаш формуласи (62.9) дан фойдалансак, (75.26) дан бундай ёзишимиз мумкин:

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}},\; g^{22} = \frac{1}{g_{22}},\; g^{33} = \frac{1}{g_{33}},\; \dots,\; g^{nn} = \frac{1}{g_{nn}}; \qquad (75.27)$$

Кристоффель символларини ифодаловчи (67.16) ва (67.18) формулалар ва (75.25) дан учта индекси турлича бўлган Кристоффель символларининг нолга тенглигини кўрамиз:

$$\Gamma_{ij,k} = 0, \text{ агар } i \neq j \neq k \neq i \text{ булса.} \qquad (75.28)$$

$$\Gamma^{k}_{ij} = 0, \text{ агар } i \neq j \neq k \neq i \text{ бўлса.} \qquad (75.29)$$

Учта индекси бир хил бўлган ($i = j = k$) Кристоффель символлари учун:

$$\Gamma_{ii,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} \qquad (75.30)$$

бўлади. Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, бу шартли ёзилган формулада битта индекснинг уч марта такрорланиши йиғиштириш амали эмас. Бу формуланинг маъносини очиб ёзайлик:

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{22,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\,.$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Gamma_{nn,n} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^n}\,.$$

(67.17) билан (75.27) дан кўрамизки, (75.30) га биноан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Gamma^{i}_{ii} = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \qquad (75.31)$$

ёки муфассалроқ ёзсак, қуйидагидек бўлади:

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1};$$

$$\Gamma^{2}_{22} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}, \dots, \Gamma^{n}_{nn} = \frac{1}{2g_{nn}} \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^n}\,.$$

Учта индексидан иккитаси бир хил бўлган Кристоффель символлари учун:

$$\Gamma_{ii,j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}. \tag{75.32}$$

$$\Gamma_{ij,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \tag{75.33}$$

бўлади, ёки (67.17) билан (75.27) ни назарда тутсак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Gamma^j_{ii} = -\frac{1}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}. \tag{75.34}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}. \tag{75.35}$$

Энди, ҳисоблаш тажрибасида кўпроқ учраб турувчи ортогонал эгри чизиқли координаталардан, масалан, уч ўлчовли фазодаги сферик координаталар билан цилиндрик координаталарни олиб, уларда метрик тензор ва Кристоффель символларининг қандай ифодаланишини аниқлайлик.

Сферик координаталар системасида (37- параграф):

$$x^1 = r, \ x^2 = \theta, \ x^3 = \varphi$$

ва масофа элементининг квадрати учун:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

бўлади, демак:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{22} &= r^2 \\ g_{33} &= r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{75.36}$$

Метрик тензорнинг қолган компонентлари эса нолга тенг. (75.36) ни назарда тутиб, (75.31), (75.34) ва (75.35) дан Кристоффелнинг иккинчи тур символларидан нолга тенг бўлмаганларини аниқлаш мумкин:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -r \\ \Gamma^1_{33} &= -r^2\sin^2\theta \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{32} &= \operatorname{ctg}\theta. \end{aligned} \tag{75.37}$$

Цилиндрик координаталар системасида (38- параграф):

$$x^1 = \rho,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = z$$

ва масофа элементининг квадрати учун:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

бўлади, демак, метрик тензор компонентларининг нолга тенг бўлмаганлари қуйидагилардир:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{22} &= \rho^2, \\ g_{33} &= 1. \end{aligned} \tag{75.38}$$

Энди (75.34) ва (75.35) дан кўрамизки, Кристоффелнинг иккинчи тур символларидан нолга тенг булмаганлари аниқланади:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\rho, \\ \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \tag{75.39}$$

III. Векторнинг натурал компонентлари. Асосий ва ўзаро координат векторлар таърифига мувофиқ:

$$(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}^j) = \delta_i^j \tag{75.40}$$

бўлади. Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ векторни бу координат векторлар бўйича ажратиб ёзиш мумкинлиги бизга маълум:

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + a^n \boldsymbol{e}_n = a_1 \boldsymbol{e}^1 + a_2 \boldsymbol{e}^2 + \ldots + a_n \boldsymbol{e}^n. \tag{75.41}$$

Ортогонал координаталар системасида, (75.27) га биноан:

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}},\ g^{22} = \frac{1}{g_{22}},\ g^{33} = \frac{1}{g_{33}}, \ldots, g^{nn} = \frac{1}{g_{nn}} \tag{75.42}$$

бўлади. (75.8) ва (75.9) дан:

$$g_{11} = e_1^2,\ g_{22} = e_2^2, \ldots, g_{nn} = e_n^2, \tag{75.43}$$

$$g^{11} = e^{1^2},\ g^{22} = e^{2^2}, \ldots, g^{nn} = e^{n^2} \tag{75.44}$$

келиб чиқади. Демак:

$$e^1 = \frac{1}{e_1},\ e^2 = \frac{1}{e_2}, \ldots, e^n = \frac{1}{e_n}. \tag{75.45}$$

Энди $\boldsymbol{e}_i$ ва $\boldsymbol{e}^i$ дан иборат координат векторлар ўрнига $\boldsymbol{t}_i$, $\boldsymbol{t}^i$ дан иборат ушбу координат ортларни киритайлик:

$$\boldsymbol{e}_1 = e_1 \boldsymbol{t}_1,\ \boldsymbol{e}_2 = e_2 \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n = e_n \boldsymbol{t}_n, \tag{75.46}$$

$$\boldsymbol{e}^1 = e^1 \boldsymbol{t}^1,\ \boldsymbol{e}^2 = e^2 \boldsymbol{t}^2, \ldots, \boldsymbol{e}^n = e^n \boldsymbol{t}^n, \tag{75.47}$$

у ҳолда (75.41) ни бундай ёзамиз:

$$a = a^1 e_1 t_1 + a^2 e_2 t_2 + \ldots + a^n e_n t_n = \\ = a_1 e^1 t^1 + a_2 e^2 t^2 + \ldots + a^n e^n t^n. \tag{75.48}$$

Аввалги учта формула билан (75.40) дан:

$$t_1 = t^1,\ t_2 = t^2, \ldots, t_n = t^n \tag{75.49}$$

бўлади, (75.48) ни координат ортларга скаляр равишда кўпайтирсак:

$$\begin{aligned} (a\, t_1) &= a^1 e_1 = a_1 e^1, \\ (a\, t_2) &= a^2 e_2 = a_2 e^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a\, t_n) &= a^n e_n = a_n e^n \end{aligned} \tag{75.50}$$

келиб чиқади. *Векторнинг координат ортлар йўналишидаги ортогонал проекциялари векторнинг натурал компонентлари ёки физик компонентлари дейилади.*

$\boldsymbol{a}$ векторнинг натурал компонентларини $a_x{}^i$ билан белгиласак:

$$\begin{aligned} a_x{}^1 &= a^1 e_1 = a_1 e^1, \\ a_x{}^2 &= a^2 e_2 = a_2 e^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_x{}^n &= a^n e_n = a_n e^n \end{aligned} \tag{75.51}$$

бўлади ёки (75.45) га мувофиқ, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} a_x{}^1 &= a^1 e_1 = \frac{a_1}{e_1} \\ a_x{}^2 &= a^2 e_2 = \frac{a_2}{e_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_x{}^n &= a^n e_n = \frac{a_n}{e_n}. \end{aligned} \tag{75.52}$$

Ортогонал эгри чизиқли координаталар билан дастлаб шуғулланганлигимизни эсласак (35- параграф), асосий координат $\boldsymbol{e}_i$ вектор модули e_i нинг Ламэ коэффициенти H_i га тенглигини кўрамиз, яъни (75.43) га мувофиқ:

$$g_{11} = H_1^2, g_{22} = H_2^2, \ldots, g_{nn} = H_n^2 \tag{75.53}$$

ва (75.42) га мувофиқ:

$$g^{11} = \frac{1}{H_1^2}, g^{22} = \frac{1}{H_2^2}, \ldots, g^{nn} = \frac{1}{H_n^2} \tag{75.54}$$

бўлади. У ҳолда:

$$a_{x^1} = H_1 a^1 = \frac{a_1}{H_1}$$
$$a_{x^2} = H_2 a^2 = \frac{a_2}{H_2} \qquad (75.55)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{x^n} = H_n a^n = \frac{a_n}{H_n}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, *бу формулалар векторнинг ортогонал координаталар системасидаги контрвариант, ковариант ва натурал компонентларини Ламэ коэффициентлари воситасида ифодалаб беради.*

Векторнинг натурал компонентлари тушунчасини умумийлаштириш асосида тензорнинг натурал компонентлари тушунчасини киритиш мумкин.

Векторнинг контравариант ва ковариант компонентларидан унинг натурал компонентларига ўтиш формулалари бўлган (75.55) дан фойдаланиб, тензорнинг натурал компонентларини аниқласа бўлади. Масалан, иккинчи рангли тензорнинг натурал компоненти $T_{x^1 x^2}$ учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$T_{x^1 x^2} = H_1 H_2 T^{12} = \frac{1}{H_1 H_2} T_{12} = \frac{H_1}{H_2} T_2^1 = \frac{H_2}{H_1} T_1^2.$$

IV. Йиғиштирилган Кристоффель символларининг метрик тензор дискриминанти орқали ифодаланиши. Метрик тензор дискриминанти (детерминанти), таърифга мувофиқ, қуйидагича бўлади:

$$g = A_{ij} g_{ij},$$

бу ерда A_{ij} — g_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси; демак:

$$A_{ij} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \qquad (75.56)$$

бўлади.

Метрик тензорнинг контравариант компонентлари учун Крамер формуласи (62.9) га биноан, бундай ёзамиз:

$$g^{ij} = \frac{A_{ij}}{g}$$

ёки (75.56) формуладан фойдалансак:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \qquad (75.57)$$

бўлади.

Кристоффель иккинчи тур символининг метрик тензор орқали (67.18) ифодаланишини эслайлик:

$$\Gamma^{l}_{ik} = \frac{1}{2} g^{lj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right).$$

бу ерда $i = l$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$\Gamma^{i}_{ik} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Формуланинг ўнг томонидаги иккинчи ҳадда йиғиштириш индекси бўлган j ўрнига i ни ва i ўрнига j ни ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} g^{ji} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}.$$

Метрик тензор симметрик бўлганлигидан, бундай ёзамиз:

$$\Gamma g^{ji} = g^{ij}, \ g_{ki} = g_{ik},$$

демак:

$$\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

яъни юқоридаги формуланинг ўнг томондаги иккинчи ҳад учинчи ҳаддан фақат ишораси билангина фарқ қилади. Шундай қилиб:

$$\Gamma^{i}_{ik} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{75.58}$$

Бу ердаги g^{ij} нинг ифодасини (75.57) дан олиб қўямиз:

$$\Gamma^{i}_{ik} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k},$$

демак:

$$\Gamma^{i}_{ik} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^k} =$$

$$= \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} \tag{75.59}$$

бўлади. *Бу формула йиғиштирилган Кристоффель символи Γ^{i}_{ik} ни метрик тензор дискриминанти орқали ифодалайди.*

Баъзан Γ^{i}_{ik} ни Γ_k орқали ҳам белгилашади:

$$\Gamma_k = \Gamma^{i}_{ik},$$

демак:

$$\Gamma_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}.$$

Кристоффель символининг қуйидагича йиғиштирилган ифодасини Γ^l орқали белгилайлик:

$$\Gamma^l = g^{ik} \Gamma^l_{ik}.$$

Бу символни ҳам метрик тензор дискриминанти орқали ифодалаш мумкин. Бунинг учун (67.18) га мувофиқ, юқоридаги формулани қайта ёзайлик:

$$\Gamma^l = \frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g^{lk} g^{lj} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Бу ердаги ҳадларнинг ҳар бирини алоҳида ҳисоблаб чиқайлик:

$$g^{lj} g_{ij} = \delta^l_i,$$

бундан:

$$g^{lj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = - g_{ij} \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^k}$$

бўлади. Демак, юқоридаги биринчи ва иккинчи ҳадлар учун:

$$\frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} g^{ik} g_{ij} \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} \delta^k_j \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^k},$$

$$\frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} g^{ik} g_{kj} \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \delta^i_j \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{li}}{\partial x^i}.$$

Учинчи ҳад учун, (75.57) га мувофиқ, бундай ёзамиз:

$$\frac{1}{2} g^{ik} g^{lj} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} g^{lj} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} g^{lj} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Шу топилган натижаларни ўз ўринларига қўямиз:

$$\Gamma^l = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^k} + \frac{\partial g^{li}}{\partial x^i} + g^{lj} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^j} \right)$$

ёки йиғиштириш индекслари $k,\ i,\ j$ ўрнига m олинса:

$$\Gamma^l = -\left(\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m} + g^{lm} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m} \right)$$

бўлади. Демак:

$$\Gamma^l = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{g}\, g^{lm} \right).$$

V. Градиент, дивергенция ва уюрма ифодалари. Скаляр функция φ нинг x^j координата бўйича ковариант ҳосиласи:

$$\nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \tag{75.60}$$

бўлади. Бу ковариант вектор скаляр функция градиенти grad φ бўлиб, ҳар қандай системада ҳам унинг компонентлари шу формулага мувофиқ аниқланади.

Бирор контравариант a^i вектордан x^j координата бўйича олинган ковариант ҳосилани (69.6) таърифга мувофиқ, бундай ёзамиз:

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{mj} a^m.$$

Бу иккинчи рангли аралаш тензорни $j = i$ деб ҳисоблаб, йиғиштириш натижасида чиққан $\boldsymbol{a}$ векторнинг дивергенцияси div $\boldsymbol{a}$ бўлиб, ҳар қандай системада ҳам тубандагича ёзилади:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{mi} a^m. \tag{75.61}$$

Кристоффелнинг иккинчи тур символлари пастки индексларига нисбатан симметрик, шунинг учун, (75.59) га мувофиқ:

$$\Gamma^i_{mi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}$$

бўлади, демак, (75.61) қуйидагича ёзилади:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m} a^m,$$

йиғиштириш индекси m ўрнига i олинса:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} a^i$$

ёки

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, a^i \right) \tag{75.62}$$

бўлади. Аммо

$$a^i = g^{ij} a_j$$

эканлигидан:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} a_j \right) \tag{75.63}$$

бўлади. Агар $\boldsymbol{a}$ вектор сифатида grad φ олинса, у ҳолда:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi, \quad a_j = \nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

бўлади, демак, (75.63) ушбу шаклни олади:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right). \tag{75.64}$$

Бу формула скаляр функцияга татбиқ қилинган Лаплас операторини ифодалайди.

Энди ковариант вектордан (69.7) га мувофиқ тубандагича ковариант ҳосилалар тузайлик:

$$\nabla_i a_j = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^m a_m \tag{75.65}$$

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^m a_m.$$

Бундан:

$$\nabla_i a_j - \nabla_j a_i = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \tag{75.66}$$

бўлади, чунки:

$$\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{ij}^m.$$

Сўнгги формулада ифодаланган иккинчи рангли ковариант антисимметрик тензор компонентлари одатдаги вектор уюрмаси компонентларига ўхшаб кетади. Уларнинг фақат уч ўлчовли фазодагина бир-бирига эквивалентлиги бизга маълум.

Энди уч ўлчовли фазодаги эгри чизиқли координаталар системаси билангина чекланайлик. Уч ўлчовли фазода метрик тензор билан Леви-Чивита тензор зичлиги воситасида қуйидагича ҳосил қилинган учинчи рангли контравариант бутунлай антисимметрик тензор (64.27) ни учратган эдик:

$$E^{kij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{kij} \tag{75.67}$$

ёки муфассалроқ ёзилганда бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} E^{123} = E^{231} = E^{312} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \\ E^{132} = E^{321} = E^{213} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \end{aligned}\right\}. \tag{75.68}$$

Энди қуйидагича контравариант вектор ҳосил қилайлик:

$$c^k = E^{kij} \nabla_i a_j, \tag{75.69}$$

унинг айрим компонентлари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} c^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right), \\ c^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right), \\ c^3 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \end{aligned}\right\} \tag{75.70}$$

Декарт координаталарида $\sqrt{g}=1$; шунинг учун, бу формулаларда c векторнинг контравариант компонентлари $\boldsymbol{a}$ вектор уюрмаси rot $\boldsymbol{a}$ нинг Декарт компонентлари билан бир хилдир, демак, (75.70) да ҳар қандай эгри чизиқли координаталар учун ҳам rot $\boldsymbol{a}$ нинг контравариант компонентлари ифодаланган. Уч улчовли фазодаги ортогонал координаталар системасида (75.26), (75.53), (75.54) ва (75.55) га мувофиқ:

$$\sqrt{g}=H_1H_2H_3, \tag{75.71}$$

$$g_{11}=H_1^2,\ g_{22}=H_2^2,\ g_{33}=H_3^2, \tag{75.72}$$

$$g^{11}=\frac{1}{H_1^2},\ g^{22}=\frac{1}{H_2^2},\ g^{33}=\frac{1}{H_3^2}, \tag{75.73}$$

$$\begin{aligned} a_{x^1}&=H_1a^1=\frac{a_1}{H_1},\\ a_{x^2}&=H_2a^2=\frac{a_2}{H_2},\\ a_{x^3}&=H_3a^3=\frac{a_3}{H_3} \end{aligned} \tag{75.74}$$

бўлади. Вектор уюрмаси rot $\boldsymbol{a}$ нинг контравариант компонентлари c^1, c^2, c^3 дан фойдаланиб, унинг натурал компонентлари $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^1}$, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^2}$, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^3}$ ни аниқлаш қийин эмас. Бунинг учун (75.70), (75.71) ва (75.74) дан фойдаланиб, тубандагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^1}&=\frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(H_3a_{x^3})}{\partial x^2}-\frac{\partial(H_2a_{x^2})}{\partial x^3}\right\},\\ (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^2}&=\frac{1}{H_3H_1}\left\{\frac{\partial(H_1a_{x^1})}{\partial x^3}-\frac{\partial(H_3a_{x^3})}{\partial x^1}\right\},\\ (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{x^3}&=\frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial(H_2a_{x^2})}{\partial x^1}-\frac{\partial(H_1a_{x^1})}{\partial x^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{75.75}$$

Шундай қилиб, илгаридан (36-параграфдан) маълум бўлган формулалар келиб чиқди.

Скаляр функция градиенти grad φ нинг ковариант компонентлари $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$ дан фойдаланиб, унинг натурал компонентлари $(\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^1}$, $(\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^2}$, $(\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^3}$ ни аниқлаш мумкин. Бунинг учун (75.60) ва (75.74) дан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} (\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^1}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\\ (\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^2}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2},\\ (\mathrm{grad}\,\varphi)_{x^3}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}. \end{aligned} \tag{75.76}$$

Бу формулалар эса бизга (36- параграфдан) маълум.

Вектор дивергенцияси div $\boldsymbol{a}$ ни шу векторнинг натурал компонентлари орқали аниқлашимиз мумкин. Ҳақиқатан, (75.63) билан (75.71) ва (75.73) билан (75.74) дан:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial (H_2H_3a_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial (H_3H_1a_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial (H_1H_2a_{x^3})}{\partial x^3}\right\} \qquad (75.77)$$

бўлади. Бу формула ҳам бизга (36- параграфдан) маълум.

Энди $\boldsymbol{a}$ вектор сифатида скаляр функция φ градиенти grad φ олинса, (75.76) га мувофиқ:

$$a_{x^1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \qquad a_{x^2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \qquad a_{x^3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$$

бўлади, демак:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right\}. \qquad (75.78)$$

Скаляр функцияга татбиқ қилинган Лаплас операторининг бу ифодасини ҳам аввал (ўша 36- параграфда) учратган эдик.

VI. Заррачанинг ҳаракат тенгламалари. Векторнинг абсолют дифференциали вектор бўлиб, (69.1) ва (69.2) га биноан, қуйидагиларни ёзамиз:

$$Da^i = da^i + \Gamma^i_{lj}\, a^l\, dx^j. \qquad (75.79)$$

$$Da_i = da_i - \Gamma^l_{ij}\, a_l dx^j. \qquad (75.80)$$

Уч ўлчовли фазода заррача ҳаракатини текширайлик. Скаляр аргумент сифатида вақт t олинса, заррача координаталари вақт функцияси бўлади:

$$x^j = x^j(t).$$

Координаталарнинг дифференциаллари чексиз кичик силжиш векторининг компонентларидир. Координаталарнинг вақт бўйича ҳосилалари эса тезлик векторининг контравариант компонентларини ташкил қилади:

$$v^j = \frac{dx^j}{dt}. \qquad (75.81)$$

Заррача тезлигининг ковариант компонентлари бундай бўлади:

$$v_k = g_{kj}v^j. \qquad (75.82)$$

Заррача тезланишининг контравариант ва ковариант компонентлари таърифга биноан, қуйидагича ёзилади:

$$w^j = \frac{Dv^j}{dt},$$

$$w_k = \frac{Dv_k}{dt}$$

ёки (75.79), (75.80) ва (75.81) га мувофиқ:

$$w^j = \frac{dv^j}{dt} + \Gamma^j_{li} v^l v^i. \tag{75.83}$$

$$w_k = \frac{dv_k}{dt} - \Gamma^l_{ki} v_l v^i \tag{75.84}$$

бўлади.

Ньютон қонунига кўра, эркин ҳаракатдаги заррача массасининг тезланишига кўпайтмаси шу заррачага таъсир қилувчи кучга тенгдир:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}$$

ёки

$$F^j = mw^j. \tag{75.85}$$

$$F_k = mw_k, \tag{75.86}$$

бу ерда F^j — кучнинг контравариант компоненти, F_k — кучнинг ковариант компоненти. Шундай қилиб, заррачанинг ҳаракат тенгламалари, эгри чизиқли координаталар системасида бундай ёзилади:

$$F^j = m\left(\frac{dv^j}{dt} + \Gamma^j_{li} v^l v^i\right). \tag{75.87}$$

$$F_k = m\left(\frac{dv_k}{dt} - \Gamma^l_{ki} v_l v^i\right). \tag{75.88}$$

Ортогонал эгри чизиқли координаталардан сферик координаталар ва цилиндрик координаталар билан чекланайлик.

Сферик координаталар системасида $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ эканлиги, метрик тензор билан Кристоффель символларининг (75.36) ва (75.37) да ифодаланган қийматлари назарда тутилса, юқоридаги (75.81), (75.82), (75.83) ва (75.84) формулаларга мувофиқ, тезлик билан тезланиш компонентларининг ифодаларини топиш мумкин. Биз тезлик ва тезланишнинг фақат контравариант компонентлари ифодаларинигина ёзиб кўрсатайлик:

$$v^1 = \frac{dr}{dt}, \quad v^2 = \frac{d\theta}{dt}, \quad v^3 = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{75.89}$$

$$\left.\begin{aligned} w^1 &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w^3 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{75.90}$$

Цилиндрик координаталар системасида $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ бўлиб, метрик тензор ва Кристоффель символларининг қийматлари (75.38) билан (75.39) да ифодаланган. Демак, тезлик ва тезланишнинг контравариант компонентлари тубандагичадир:

$$v^1 = \frac{d\rho}{dt}, \quad v^2 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad v^3 = \frac{dz}{dt}. \tag{75.91}$$

$$\left.\begin{aligned} w^1 &= \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}, \\ w^3 &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right| \tag{75.92}$$

Векторнинг контравариант ва натурал компонентлари орасидаги боғланиш (75.53), (75.55) бизга маълум:

$$\begin{aligned} a_{x1} &= H_1a^1 = \sqrt{g_{11}}\,a^1, \\ a_{x2} &= H_2a^2 = \sqrt{g_{22}}\,a^2, \\ a_{x3} &= H_3a^3 = \sqrt{g_{33}}\,a^3. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, сферик координаталар системасида тезлик билан тезланишнинг натурал компонентлари учун:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \; v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}, \; v_\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}. \tag{75.93}$$

$$\left.\begin{aligned} w_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w_\theta &= r\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}, \\ w_\varphi &= r\sin\theta\left\{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right\} \end{aligned}\right| \tag{75.94}$$

бўлади. (75.85) га мувофиқ, ҳаракат тенгламалари ушбу шаклни олади:

$$\begin{aligned} F_r &= mw_r, \\ F_\theta &= mw_\theta, \\ F_\varphi &= mw_\varphi, \end{aligned} \tag{75.95}$$

бу ерда F_r, F_θ, F_φ — кучнинг натурал компонентлари.

Шунинг сингари, цилиндрик координаталар системасида ҳам натурал компонентлар учун тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \; v_\varphi = \rho\frac{d\varphi}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{75.96}$$

$$\left.\begin{aligned} w_\rho &= \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w_\varphi &= \rho\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\,\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}, \\ w_z &= \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{75.97}$$

ҳаракат тенгламалари эса:

$$\left.\begin{aligned} F_\rho &= mw_\rho, \\ F_\varphi &= mw_\varphi, \\ F_z &= mw_z \end{aligned}\right\} \tag{75.98}$$

бўлади.

VII. Узлуксиз муҳитнинг асосий дифференциал тенгламалари. Муҳит массасининг сақланиш қонунини ифодаловчи дифференциал тенглама (43- параграфдан) маълум:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{75.99}$$

ва (57.24) га мувофиқ узлуксиз муҳит механикасининг асосий дифференциал тенгламаси эса

$$\rho\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{f} + \operatorname{div}^{(2)}\boldsymbol{P} \tag{75.100}$$

бўлади, бу ерда ρ — масса зичлиги, $\boldsymbol{v}$ — тезлик вектори, $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ — тезланиш вектори, $\boldsymbol{f}$ — масса бирлигига таъсир қилувчи ташқи куч, ${}^{(2)}\boldsymbol{P}$ — эластик кучланишлар тензори.

Декарт системасида:

$${}^{(2)}\boldsymbol{P} = \begin{Vmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{Vmatrix}$$

ва (57.11) га биноан:

$$(\operatorname{div}{}^{(2)}\boldsymbol{P})^i = \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k}$$

бўлади. У ҳолда (75.100) ушбу шаклни олади:

$$\rho\,\frac{dv^i}{dt} = \rho f^i + \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k}, \tag{75.101}$$

(75.99) эса тубандагича ёзилади:

$$\frac{\partial\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k} = 0. \tag{75.102}$$

Декарт системасида ёзилган бу асосий дифференциал тенгламаларни уч ўлчовли фазонинг ихтиёрий эгри чизиқли координаталар системасига ҳам мослаштириш мумкин. Бунинг учун Декарт координаталари бўйича олинган хусусий ҳосилалар $\frac{\partial}{\partial x^k}$ ковариант ҳосилалар ∇_k билан алмаштирилади ва тезлик вектори компонентларининг оддий dv^i дифференциаллари уларнинг абсолют дифференциаллари Dv^i билан алмаштирилади:

$$\rho \frac{Dv^i}{dt} = \rho f^i + \nabla_k p^{ik}. \tag{75.103}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k) = 0. \tag{75.104}$$

Биринчи формуладаги тезланиш векторининг контравариант компоненти $\frac{Dv^i}{dt}$ ўрнига унинг (75.83) да ифодаланган қийматини ёзиш ҳам мумкин.

VIII. Кинетик кучланишлар тензори. Декарт системасида ифодаланган узлуксиз муҳитнинг ҳаракат дифференциал тенгламалари бизга маълум (75.101):

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho f^i + \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k}.$$

Тезлик компонентлари координаталар билан вақт функцияси бўлганлигидан, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k,$$

у ҳолда юқоридаги дифференциал тенглама бундай ёзилади:

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k = \rho f^i + \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k}.$$

Аммо:

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) - \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i,$$

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k = \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) v^i.$$

Бу ифодаларни ўз ўринларига қўямиз:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) - \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) v^i =$$

$$= \rho f^i + \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k}$$

ёки

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k - p^{ik}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) - \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k)\right\} v^i = \rho f^i.$$

Массанинг сақланиш қонунини ифодаловчи дифференциал тенгламани эслайлик (75.102):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0. \tag{75.105}$$

Шунга кўра юқоридаги дифференциал тенглама ушбу шаклни олади:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k - p^{ik}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) = \rho f^i. \tag{75.106}$$

Юқоридаги ифодаларда индекслар уч ўлчовли фазога тегишлидир: $i, k = 1, 2, 3$. Лекин узлуксиз муҳитнинг (75.105) билан (75.106) даги асосий дифференциал тенгламаларини координаталари:

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4 = t \tag{75.107}$$

бўлган тўрт ўлчовли фазога мослаштириш мумкин. Бунинг учун

$$f^4 = 0 \tag{75.108}$$

деб қабул қиламиз ва қуйидагича ифодаланган иккинчи рангли тензорни киритамиз:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \rho v^1 v^1 - p^{11}, & \rho v^1 v^2 - p^{12}, & \rho v^1 v^3 - p^{13}, & \rho v^1 \\ \rho v^2 v^1 - p^{21}, & \rho v^2 v^2 - p^{22}, & \rho v^2 v^3 - p^{23}, & \rho v^2 \\ \rho v^3 v^1 - p^{31}, & \rho v^3 v^2 - p^{32}, & \rho v^3 v^3 - p^{33}, & \rho v^3 \\ \rho v^1, & \rho v^2, & \rho v^3, & \rho \end{pmatrix} \tag{75.109}$$

Бу тензор кинетик кучланишлар тензори (ёки энергия-импульс тензори) дейилади. Шу айтилганларга биноан (75.106) билан (75.105) ни бирлаштириб, тубандагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \rho f^i, \tag{75.110}$$

бу ердаги индекслар тўрт ўлчовли фазога тегишли: $i, k = 1, 2, 3, 4$.

Декарт системасидан эгри чизиқли координаталар системасига ўтилса хусусий ҳосилалар ковариант ҳосилалар билан алмаштирилади:

$$\nabla_k T^{ik} = \rho f^i, \tag{75.111}$$

$$i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Узлуксиз муҳитнинг асосий дифференциал тенгламалари кинетик кучланишлар тензори орқали ана шундай ифодаланади.

IX. Фазо буралишининг тензори. Аффин боғланишлик коэффициентларини ифодаловчи уч индексли Γ^r_{jl} миқдорлардан фойдаланиб, тензорлар назариясининг бир неча муҳим масалалари (геодезик чизиқлар, тензорларни параллел кўчириш, тензорларни ковариант дифференциаллаш) билан танишиб чиқдик.

Аффин боғланишлик коэффициентлари тензор ташкил қилмаса-да ушбу алмаштириш қонунига буйсунади (67.5):

$$\Gamma'^{u}_{iq} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r}. \tag{75.112}$$

Бирор системада:

$$\Gamma^r_{jl} = \Gamma^r_{lj}$$

бўлса, ҳар қандай системада ҳам:

$$\Gamma'^u_{iq} = \Gamma'^u_{qi}$$

бўлади, чунки:

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^q} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^q \partial x'^i}. \tag{75.113}$$

Умуман айтганда, аффин боғланишлик коэффициентлари ўзларининг пастки индексларига нисбатан симметрик бўлмаслиги мумкин:

$$\Gamma^r_{jl} \neq \Gamma^r_{lj}. \tag{75.114}$$

Қуйидаги миқдорни текшириб кўрайлик:

$$T^r_{jl} = \Gamma^r_{jl} - \Gamma^r_{lj}. \tag{75.115}$$

Бу миқдор бир марта контравариант ва икки марта ковариант бўлган тензордир. Ҳақиқатан, аффин боғланишлик коэффициентларини алмаштириш қонунига мувофиқ (75.112):

$$\Gamma'^u_{qi} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^q} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{jl} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^q \partial x'^i} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r}$$

ёки йиғиштириш индексларидан j ўрнига l ни ва l ўрнига j ни олсак:

$$\Gamma'^u_{qi} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \Gamma^r_{lj} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^q \partial x'^i} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} \tag{75.116}$$

бўлади.

Энди (75.113) ни назарда тутиб (75.112) билан (75.116) нинг айирмасини ёзайлик:

$$\Gamma'^u_{iq} - \Gamma'^u_{qi} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} (\Gamma^r_{jl} - \Gamma^r_{lj})$$

ёки

$$T_{iq}^{\ \ u} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^u}{\partial x^r} T_{jl}^r. \tag{75.117}$$

Шундай қилиб, (75.115) *да ифодаланган T_{jl}^r миқдор тензор бўлиб, биз уни фазо буралишининг тензори деб атаймиз.*

Баъзи авторлар бу тензорни *симметрал* номи билан юритишади. (75.115) га биноан, фазо буралишининг тензори пастки индексларига нисбатан антисимметрикдир:

$$T_{jl}^r = -T_{lj}^r. \tag{75.118}$$

Бирор системада нолга тенг бўлган тензор ҳар қандай системада ҳам нолга тенгдир. Фазо буралишининг тензори бирор системада ноль бўлса, бошқа системада ҳам ноль бўлади. Демак, аффин боғланишлик коэффициентлари пастки индексларига нисбатан бирор системада симметрик бўлса, ҳар қандай бошқа системада ҳам симметрик бўлади.

Риман фазосида аффин боғланишлик коэффициентларининг пастки индексларига нисбатан симметриклиги маълум. Демак, Риман фазоси буралишининг тензори нолга тенгдир.

Буралиш тензори тушунчаси ҳозирги замон геометрик таълимотларининг ривожланишида вужудга келган муҳим тушунчалардан бирйдир.

X. Баъзи дифференциал инвариантлар. Бирор скаляр функциянинг ковариант ҳосиласини олиб, сўнгра ундан контравариант метрик тензор воситасида инвариант тузайлик:

$$I_1 = g^{ij} \nabla_i \psi \nabla_j \psi. \tag{75.119}$$

Энди ўша скаляр функциядан иккинчи тартибли ковариант ҳосила олиб, сўнгра контравариант метрик тензор воситасида янги инвариант ҳосил қилайлик:

$$I_2 = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \psi. \tag{75.120}$$

Функция ва унинг ҳосилаларидан тузилган инвариантлар дифференциал инвариантлар дейилади. Биринчи дифференциал инвариант (75.119) *Бельтраминнинг биринчи тур дифференциал параметри дейилади ва $\Delta_1\psi$ билан белгиланади:*

$$\Delta_1\psi = g^{ij} \nabla_i \psi \nabla_j \psi. \tag{75.121}$$

Бельтраминнинг биринчи тур дифференциал параметри скаляр функция градиенти модулининг квадратини ифодалайди.

Иккинчи дифференциал инвариант (75.120) *Бельтраминнинг иккинчи тур дифференциал параметри дейилади ва $\Delta_2\psi$ билан белгиланади:*

$$\Delta_2\psi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \psi. \tag{75.122}$$

Ковариант дифференциаллашга нисбатан метрик тензор ўзгармас бўлганлигидан, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Delta_2\psi = \nabla_i(g^{ij}\nabla_j\psi). \tag{75.123}$$

Бельтрамининг иккинчи тур дифференциал параметри скаляр функция градиентининг дивергенциясини ифодалайди.

Скаляр функция ковариант ҳосиласи одатдаги хусусий ҳосиладан фарқ қилмаганлигидан (69 параграф), қуйидагини ёза оламиз:

$$\Delta_1\psi = g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}. \tag{75.124}$$

Декарт системасида Бельтрамининг биринчи тур дифференциал параметри учун:

$$\Delta_1\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i},$$

яъни:

$$\Delta_1\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^2 \tag{75.125}$$

бўлади.

Бельтрамининг иккинчи тур дифференциал параметри учун эса бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Delta_2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial {x_i}^2},$$

яъни:

$$\Delta_2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2} \tag{75.126}$$

бўлади. Бу формула Лаплас операторини ифодалайди.

XI. Векторни параллел кўчириш ва эгрилик тензори. Оддий фазода векторни параллел кўчиришда кўчириш йўлини танлаш ўзимизнинг ихтиёримизда. Бирор нуқтадаги векторни ёпиқ йўл бўйича ўзига параллел кўчириб, ҳеч ўзгартирмасдан яна аввалги нуқтасига қайтарса булади. Бу хусусият ҳар қандай фазода ҳам мавжуд бўлавермайди. Векторни турли йўллар бўйлаб параллел кўчирсак, натижа умуман турлича бўлади.

Аффин боғланишлик коэффициентлари ихтиёрий (яъни умуман $\Gamma^k_{il} \neq \Gamma^k_{li}$) бўлган фазода чексиз кичик контур бўйича параллел кўчирилувчи векторнинг ўзгаришини текширайлик.

Чексиз кичик контур буйича параллел кўчирилувчи ковариант векторнинг ўзгариши қуйидагича бўлади:

$$\Delta a_i = \oint \delta a_i.$$

Бу ерда вектор ўзгаришининг ўзи ҳам вектор булади, чунки у бир нуқтада олинган вектор билан ўша нуқтага параллел кўчирилиб қайтарилган аввалги вектор орасидаги айирмага тенгдир.

Элементар силжишда параллел кўчирилувчи ковариант вектор ўзгариши эса (66.10) га мувофиқ:

$$\delta a_i = \Gamma^k_{il} a_k dx^l,$$

демак:

$$\Delta a_i = \oint \Gamma^k_{il}\, a_k dx^l. \tag{75.127}$$

Чексиз кичик контур ичидаги тайин 0 нуқта билан унинг бошқа M нуқтаси координаталари бир-биридан чексиз кичик фарқ қилади, яъни координаталар айирмаси чексиз кичик $(x^l)_M - (x^l)_0$ миқдордир. Юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар назарга олинмаса, Тейлор қаторига ажратиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Gamma^k_{il} = (\Gamma^k_{il})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m}\right)_0 [x^m - (x^m)_0],$$

$$a_k = (a_k)_0 + (\Gamma^s_{kr})_0 (a_s)_0 [x^r - (x^r)_0].$$

Юқорида ёзилган тенгликдаги $x^m - (x^m)_0$ ни u^m билан белгилаймиз:

$$x^m - (x^m)_0 = u^m. \tag{75.128}$$

Шуларга асосланиб, (75.127) ни қайтадан ёзайлик:

$$\Delta a_i = \oint \left[(\Gamma^k_{il})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m}\right)_0 u^m\right]\left[(a_k)_0 + (\Gamma^s_{kr})_0\ (a_s)_0\, u^r\right] du^l,$$

қавслар очиб юборилса, бундай булади:

$$\Delta a_i = (\Gamma^k_{il})_0 (a_k)_0 \oint du^l + \left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m}\right)_0 (a_k)_0 \oint u^m du^l +$$
$$+ (\Gamma^k_{il})_0 (\Gamma^s_{kr})_0 (a_s)_0 \oint u^r du^l +$$
$$+ \left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m}\right)_0 (\Gamma^s_{kr})_0 (a_s)_0 \oint u^m u^r\, du^l. \tag{75.129}$$

Контурнинг дастлабки нуқтасига қайтиш натижасида координаталарнинг ўзгариши нолга тенг:

$$\oint du^l = 0.$$

Юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар назарга олинмаганлигидан:

$$\oint u^m u^r du^l = 0$$

бўлади. У вақтда (75.129) нинг ўнг томонида фақат иккинчи ва учинчи ҳадларгина қолади. Учинчи ҳадда йиғиштириш индекслари k билан s нинг ўринлари алмаштирилса ва r урнига m олинса, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\Delta a_i = \left[\left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m}\right)_0 + (\Gamma^s_{il})_0 (\Gamma^k_{sm})_0\right] (a_k)_0 \oint u^m du^l. \qquad (75.130)$$

Энди:

$$d(u^m u^l) = u^m du^l + u^l du^m,$$

бундан:

$$u^m du^l - \frac{1}{2} d(u^m u^l) = \frac{1}{2}(u^m du^l - u^l du^m)$$

бўлади. У вақтда:

$$\oint u^m du^l = \frac{1}{2} \oint (u^m du^l - u^l du^m)$$

келиб чиқади. Координаталарнинг чексиз кичик ўзгаришлари биринчи рангли контравариант тензор, уларнинг кўпайтмалари эса иккинчи рангли контравариант тензор бўлганлигидан, юқоридаги ифода иккинчи рангли антисимметрик контравариант тензордир. Бу тензорни ΔF^{ml} орқали белгилайлик:

$$\Delta F^{ml} = \oint u^m du^l = \frac{1}{2} \oint (u^m du^l - u^l du^m). \qquad (75.131)$$

0 нуқта сифатида контур ичидаги ихтиёрий нуқта олиниши мумкин. Шунинг учун (75.131) ни (75.130) га қўйиб, сўнгра 0 белгини олиб ташласак:

$$\Delta a_i = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m} + \Gamma^s_{il} \Gamma^k_{sm}\right) a_k \Delta F^{ml}$$

бўлади. Йиғиштириш индекслари m ва l нинг ўринлари алмаштирилса:

$$\Delta a_i = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{im} \Gamma^k_{sl}\right) a_k \Delta F^{lm}$$

келиб чиқади, демак:

$$\Delta a_i = -\left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{im} \Gamma^k_{sl}\right) a_k \Delta F^{ml},$$

чунки:

$$\Delta F^{lm} = -\Delta F^{ml}.$$

Сўнгги икки формуладан:

$$\Delta a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m} + \Gamma^s_{il}\Gamma^k_{sm} - \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x} - \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{sl}\right) a_k \Delta F^{ml}$$

ёки

$$\Delta a_i = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^m} - \Gamma^s_{il}\Gamma^k_{sm} + \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{sl}\right) a_k \Delta F^{lm}$$

келиб чиқади.

Тенгликнинг чап томонидаги Δa_i билан ўнг томонидаги a_k, ΔF^{lm} миқдорлар тензор бўлганлигидан тензорлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ кўрамизки, қавслар ичидаги ифода уч марта ковариант ва бир марта контравариант бўлган тўртинчи рангли тензордир. Бу тензор бизга маълум ва (71.6) да ифодаланган эгрилик тензоридир.

У вақтда сўнгги топилган натижа бундай ёзилади:

$$\Delta a_i = \frac{1}{2} R_{mli\cdot}^{\ \ \ \ k}\, a_k \Delta F^{lm}. \tag{75.132}$$

Бу формула чексиз кичик контур бўйича параллел кўчирилувчи ковариант векторнинг ўзгаришини ифодалайди. Юқоридагидек мулоҳазалардан фойдаланиб, чексиз кичик контур бўйича параллел кўчирилувчи контравариант векторнинг ўзгаришини ифодаловчи ушбу формулани ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$\Delta a^i = -\frac{1}{2} R_{mlk\cdot}^{\ \ \ \ i}\, a^k \Delta F^{lm}. \tag{75.133}$$

Шундай қилиб, чексиз кичик контур бўйича параллел кўчирилувчи векторнинг ўзгариши, умуман, нолга тенг эмас. Ҳар қандай контур ўзининг ихтиёрий иккита нуқтасини бирлаштирувчи иккита йўлдан иборатдир. Демак, ўзаро чексиз яқин нуқталарнинг биридан иккинчисига векторни параллел кўчириш натижаси кўчириш йўлининг қандайлигига боғлиқ: параллел кўчириш натижаси турли йўллар учун турличадир.

Эгрилик тензори нолга тенг бўлгандагина, чексиз кичик контур бўйича параллел кўчирилувчи векторнинг ўзгариши нолга тенг бўлади. Шундай қилиб, *эгрилик тензори нолга тенг бўлган фазода векторнинг параллел кўчирилиши йўлларнинг қандайлигига ҳеч боғлиқ эмас.*

Векторни параллел кўчиришда йўлларнинг танланиши аҳамиятга эга бўлмаган фазо абсолют параллелизмли фазо дейилади.

Абсолют параллелизмли фазо, баъзан дистанцион параллелизмли фазо ёки интеграллланувчи аффин боғланишли фазо деб ҳам аталади.

Текис фазода, жумладан Эвклид фазосида, эгрилик тензори нолга тенг. Демак, Эвклид фазоси ана шу абсолют параллелизмли фазоларга оддий мисолдир.

IV БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

128. Метрик тензор учун:

$$g^{ij}g_{ij} = n$$

эканлиги курсатилсин.

129. Тўртинчи рангли $T^{\cdot\cdot i_3 i_4}_{i_1 i_2 \cdot\cdot}$ тензорни мос индекслар буйича йиғиштириш йўли билан иккинчи рангли тўртта тензор ҳосил қилинсин.

130. Олдинги масаладаги иккинчи рангли тензорларни йиғиштириб, иккита инвариант ҳосил қилинсин.

131. Иккинчи рангли контравариант $T^{i_1 i_2}$ тензор билан ковариант A_{i_3} вектор купайтмасини мос индекслар бўйича йиғиштириб, иккита контравариант вектор ҳосил қилинсин.

132. Контравариант метрик g^{ij} тензор ковариант метрик g_{rs} тензор орқали ифодалансин.

133. Берилган $T^{\cdot i_2 i_3}_{i_1 \cdot\cdot}$ тензордан метрик тензор воситасида $T^{j_1 i_2 i_3}$, $T^{\cdot\cdot i_3}_{i_1 j_2 \cdot}$, $T^{\cdot i_2 \cdot}_{i_1 \cdot j_3}$ тензорлар ҳосил қилинсин.

134. Берилган $T_{i_1 i_2 i_3}$ тензордан метрик тензор воситасида $T^{j_1 j_2 \cdot}_{\cdot\cdot i_3}$, $T^{\cdot j_2 j_3}_{i_1 \cdot\cdot}$, $T^{j_1 \cdot j_3}_{\cdot i_2 \cdot}$ тензорлар ҳосил қилинсин.

135. Берилган T^{ijk} тензордан метрик тензор воситасида T_{pqr} тензор ҳосил қилинсин.

136. Иккинчи рангли тензор учун:

$$T^{i\cdot}_{\cdot i} = T^{\cdot i}_{i\cdot}$$

эканлиги кўрсатилсин.

137. Метрик тензор учун:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ir}g^{is}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}$$

эканлиги кўрсатилсин.

138. Метрик тензор учун:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ir}\,g_{js}\frac{\partial g^{rs}}{\partial x^k}$$

эканлиги курсатилсин.

139. Ковариант a_k вектордан тузилган:

$$T_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$$

миқдорнинг иккинчи рангли ковариант тензор эканлиги кўрсатилсин.

140. Иккинчи рангли ковариант антисимметрик тензор $A_{ij} = -A_{ji}$ дан тузилган:

$$T_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j}$$

миқдорнинг учинчи рангли ковариант тензор эканлиги кўрсатилсин.

141. Олдинги масаладаги учинчи рангли ковариант T_{ijk} тензорнинг бутунлай антисимметрик тензор эканлиги курсатилсин.

142. Иккинчи рангли контравариант антисимметрик тензор $A^{ij} = -A^{ji}$ учун:

$$\Gamma^k_{ij} A^{ij} = 0$$

эканлиги курсатилсин.

143. Иккинчи рангли контравариант антисимметрик тензор $A^{ij} = -A^{ji}$ учун:

$$\nabla_j A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} A^{ij})$$

эканлиги кўрсатилсин.

144. Агар ковариант вектор бирор скаляр функциянинг градиенти экан, яъни: $a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ бўлса:

$$\nabla_i a_j - \nabla_j a_i = 0$$

эканлиги кўрсатилсин.

145. Иккинчи рангли ковариант симметрик тензор $T_{jk} = T_{kj}$ учун тубандаги ифоданинг учинчи рангли ковариант тензор эканлиги исботлансин:

$$T_{jki} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - 2\Gamma^m_{ij} T_{mk}.$$

146. Икки вектор скаляр кўпайтмаси $a_i b^i$ нинг хусусий ҳосиласи $\frac{\partial}{\partial x^j}(a_i b^i)$ шу векторларнинг ковариант ҳосилалари $\nabla_j a_i$ ва $\nabla_j b^i$ орқали ифодалансин.

147. Контравариант метрик тензорнинг хусусий ҳосиласи:

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^r} = -\Gamma^p_{sr} g^{sq} - \Gamma^q_{sr} g^{ps}$$

эканлиги кўрсатилсин.

148. Иккинчи рангли тензорнинг ковариант ҳосилалари учун қуйидагилар исботлансин:

$$\nabla_k T_{ij} = g_{jm} \nabla_k T_{i.}^{\cdot m} = g_{il} \nabla_k T^{l\cdot}_{\cdot j} = g_{il} g_{jm} \nabla_k T^{lm}.$$

149. $\overset{1}{\varphi}, \overset{2}{\varphi}, \ldots, \overset{n}{\varphi}$ инвариантларнинг хусусий ҳосилаларидан тузилган:

$$\left| \frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x^j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \overset{1}{\varphi}}{\partial x^1} & \frac{\partial \overset{1}{\varphi}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \overset{1}{\varphi}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \overset{2}{\varphi}}{\partial x^1} & \frac{\partial \overset{2}{\varphi}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \overset{2}{\varphi}}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \overset{n}{\varphi}}{\partial x^1} & \frac{\partial \overset{n}{\varphi}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \overset{n}{\varphi}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг вазминлиги мусбат бирга тенг бўлган скаляр зичлик эканлиги кўрсатилсин.

150. Иккинчи рангли симметрик тензор учун қуйидагиларни исботланг:

$$\Gamma_{ij,k}T^{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}T^{ik}.$$

151. Иккинчи рангли симметрик тензор дивергенцияси учун:

$$\nabla_i T^i_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}T^k_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}T^{ik}$$

эканлиги кўрсатилсин.

МАШҚЛАРГА ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

128. $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ ифодани $(i, j, k = 1,2, \ldots, n)$. $i = k$ деб ҳисоблаб йиғиштирсак, қуйидагича бўлади:

$$g^{ij}g_{ji} = g^{ij}g_{ij} = \delta^i_i = n.$$

129. $A^{\cdot i_4}_{i_2 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_1 i_4}_{i_1 i_2 \cdot\cdot}, \quad B^{\cdot i_3}_{i_1 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_3 i_2}_{i_1 i_2 \cdot\cdot}, \quad C^{\cdot i_3}_{i_2 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_3 i_1}_{i_1 i_2 \cdot\cdot}, \quad D^{\cdot i_4}_{i_1 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_2 i_4}_{i_1 i_2 \cdot\cdot}.$

130. $\varphi = A^{\cdot i_2}_{i_2 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_1 i_2}_{i_1 i_2 \cdot\cdot} = B^{\cdot i_1}_{i_1 \cdot},$

$\psi = C^{\cdot i_2}_{i_2 \cdot} = T^{\cdot\cdot i_2 i_1}_{i_1 i_2 \cdot\cdot} = D^{\cdot i_1}_{i\ \cdot}.$

131. $B^{i_2} = T^{i_1 i_2}A_{i_1},$

$C^{i_1} = T^{i_1 i_2}A_{i_2}.$

132. $g^{ij} = g^{ir}g^{js}g_{rs}.$

133. $T^{j_1 i_2 i_3} = g^{j_1 i_1}\, T^{\cdot i_2 i_3}_{i_1 \cdot\cdot},$

$T^{\cdot\cdot i_3}_{i_1 j_2 \cdot} = g_{j_2 i_2}\, T^{\cdot i_2 i_3}_{i_1 \cdot\cdot},$

$T^{\cdot i_2 \cdot}_{i_1 \cdot j_3} = g_{j_3 i_3}\, T^{\cdot i_2 i_3}_{i_1 \cdot\cdot}.$

134. $T^{j_1 j_2 \cdot}_{\cdot\cdot i_3} = g^{j_1 i_1}\, g^{j_2 i_2}\, T_{i_1 i_2 i_3},$

$T^{\cdot j_2 j_3}_{i_1 \cdot\cdot} = g^{j_2 i_2}\, g^{j_3 i_3}\, T_{i_1 i_2 i_3},$

$T^{j_1 \cdot j_3}_{\cdot i_2 \cdot} = g^{j_1 i_1}\, g^{j_3 i_3}\, T_{i_1 i_2 i_3}.$

135. $$T_{pqr} = g_{pi}g_{qj}g_{rk}T^{ijk}.$$

136. $$T^{i\cdot}_{\cdot i} = g^{ij}\,g_{ik}\,T^{\cdot k}_{j\cdot} = \delta^{j}_{k}\,T^{\cdot k}_{j\cdot} = T^{\cdot j}_{j\cdot} = T^{\cdot i}_{i\cdot}$$

137. $g^{pl}g_{lq} = \delta^{p}_{q}$ формула асос қилиб олинсин. Бу формуладан:

$$\frac{\partial g^{pl}}{\partial x^m}\,g_{lq} = -\,g^{pl}\,\frac{\partial g_{lq}}{\partial x^m}. \qquad (*)$$

Тенгликнинг икки томонини g^{nw} га кўпайтирайлик ва $w = q$ деб ҳисоблаб, йиғиштирайлик:

$$g^{nq}\frac{\partial g^{pl}}{\partial x^m}\,g_{lq} = -\,g^{pl}g^{nq}\,\frac{\partial g_{lq}}{\partial x^m},$$

аммо:

$$g^{nq}g_{lq} = \delta^{n}_{l},$$

демак:

$$\frac{\partial g^{pn}}{\partial x^m} = -\,g^{pl}g^{nq}\,\frac{\partial g_{lq}}{\partial x^m}$$

бўлади.

138. Олдинги масала жавобида келтирилган (*) формуланинг икки томони g_{nw} га кўпайтирилсин, сўнгра $w = p$ деб ҳисоблаб, йиғиштирилсин, натижада:

$$g_{np}\frac{\partial g^{pl}}{\partial x^m}\,g_{lq} = -\,g_{np}g^{pl}\,\frac{\partial g_{lq}}{\partial x^m} = -\,\delta^{l}_{n}\,\frac{\partial g_{lq}}{\partial x^m}$$

ёки

$$\frac{\partial g_{nq}}{\partial x^m} = -\,g_{np}g_{ql}\,\frac{\partial g^{pl}}{\partial x^m}$$

чиқади.

139. Ковариант вектор таърифига кўра:

$$a'_r = \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\,a_i,$$

$$a'_s = \frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\,a_i$$

бўлади. Буларни дифференциалласак:

$$\frac{\partial a'_r}{\partial x'^s} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^r \partial x'^s}\,a_i + \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\,\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

$$\frac{\partial a'_s}{\partial x'^r} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^s \partial x'^r}\,a_i + \frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\,\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial x'^r}$$

чиқади, сўнгги формуланинг ўнг томонида турган иккинчи ҳаддаги йиғиштириш индекслари i ўрнига j ни ва j ўрнига i ни ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial a'_s}{\partial x'^r} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^s \partial x'^r}\,a_i + \frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\,\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T'_{rs}=\frac{\partial a'_r}{\partial x'^s}-\frac{\partial a'_s}{\partial x'^r}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}T_{ij}.$$

140. Иккинчи рангли ковариант тензор таърифига кўра:

$$A'_{rs}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}A_{ij}$$

бўлади. Бу тензордан x'^m координата бўйича ҳосила олайлик:

$$\frac{\partial A'_{rs}}{\partial x'^m}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^r\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}A_{ij}+\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^s\partial x'^m}A_{ij}+$$
$$+\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}.$$

Энди r,s,m индексларни циклик равишда smr ва mrs га алмаштирсак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\frac{\partial A'_{sm}}{\partial x'^r}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^s\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}A_{ij}+\frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^m\partial x'^r}A_{ij}+$$
$$+\frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r},$$

$$\frac{\partial A'_{mr}}{\partial x'^s}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m\partial x'^s}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r}A_{ij}+\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^r\partial x'^s}A_{ij}+$$
$$+\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s}.$$

Юқоридаги учта тенгликлардаги мос ҳадлардан иккита ҳаднинг бирида йиғиштириш индекслари i билан j ўзаро алмаштирилса ва антисимметрик тензор учун $A_{ij}+A_{ji}=0$ эканлиги назарда тутилса:

$$\frac{\partial A'_{rs}}{\partial x'^m}+\frac{\partial A'_{sm}}{\partial x'^r}+\frac{\partial A'_{mr}}{\partial x'^s}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}+$$
$$+\frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}+\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^s}$$

бўлади. Бу формуланинг ўнг томонида турган иккинчи ва учинчи ҳадлардаги йиғиштириш индекслари i, j, k ни циклик равишда jki ва kij га мос алмаштириш мумкин, у ҳолда:

$$\frac{\partial A'_{rs}}{\partial x'^m}+\frac{\partial A'_{sm}}{\partial x'^r}+\frac{\partial A'_{mr}}{\partial x'^s}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j}\right),$$

$$T'_{rsm}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}T_{ijk}$$

бўлади.

141. Берилган иккинчи рангли тензорнинг антисимметриклигини назарда тутиб, тубандагиларни ёзиш мумкин:

$$T_{jik} = \frac{\partial A_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} = -\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} = -T_{ijk},$$

$$T_{ikj} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x^k} = -\frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = -T_{ijk},$$

$$T_{kji} = \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} = -\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} = -T_{ijk}.$$

Учинчи рангли бутунлай антисимметрик бу T_{ijk} тензор берилган антисимметрик A_{ij} тензорнинг цикли дейилади.

142.

$$\Gamma^k_{ij} A^{ij} = \Gamma^k_{ji} A^{ji} = -\Gamma^k_{ji} A^{ij} = -\Gamma^k_{ij} A^{ij},$$

бундан:

$$2\,\Gamma^k_{ij} A^{ij} = 0, \text{ демак } \Gamma^k_{ij} A^{ij} = 0.$$

143. Тензорнинг ковариант ҳосиласи таърифига мувофиқ:

$$\nabla_k A^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mj} + \Gamma^j_{mk} A^{im}$$

бўлади, $k = j$ деб ҳисоблаб, йиғиштирсак:

$$\nabla_j A^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i_{mj} A^{mj} + \Gamma^j_{mj} A^{im}$$

чиқади. Аммо (75.59) га биноан:

$$\Gamma^j_{mj} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}$$

бўлади, антисимметрик тензор учун эса:

$$\Gamma^i_{mj} A^{mj} = 0$$

(олдинги масала жавобига қаралсин). Шундай қилиб:

$$\nabla_j A^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m} A^{im}$$

ёки тенгликнинг ўнг томонида турган иккинчи ҳаддаги йиғиштириш индекси m ўрнига j олинса:

$$\nabla_j A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} A^{ij})$$

бўлади.

144.

$$\nabla_i a_j = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ji} a_k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} - \Gamma^k_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} a_k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

демак:

$$\nabla_i a_j - \nabla_j a_i = 0,$$

чунки:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j},$$

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}.$$

145. Тензорнинг ковариант ҳосиласи таърифига мувофиқ:

$$\nabla_i T_{jk} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^m_{ji} T_{mk} - \Gamma^m_{ki} T_{jm},$$

$$\nabla_j T_{ki} = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{kj} T_{mi} - \Gamma^m_{ij} T_{km},$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} T_{mj} - \Gamma^m_{jk} T_{im}$$

бўлади. Биринчи ифода билан иккинчи ифода йиғиндисидан учинчиси айирилса, берилган тензор ва Кристоффель символлари пастки индексларига нисбатан симметрик бўлганлигидан, бундай ёзиш мумкин:

$$\nabla_i T_{jk} + \nabla_j T_{ki} - \nabla_k T_{ij} =$$

$$= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - 2\Gamma^m_{ij} T_{mk}.$$

Бу тенгликнинг чап томони учинчи рангли ковариант тензордир, демак, унинг ўнг томони ҳам учинчи рангли ковариант тензор бўлади.

146. Инвариант ва йиғиштирилган кўпайтмани ковариант дифференциаллаш формулалари (69.12) билан (69.19) га биноан:

$$\nabla_j (a_i b^i) = \frac{\partial}{\partial x^j} (a_i b^i),$$

$$\nabla_j (a_i b^i) = \nabla_j a_i b^i + a_i \nabla_j b^i,$$

демак:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (a_i b^i) = \nabla_j a_i b^i + a_i \nabla_j b^i$$

бўлади.

147. Контравариант метрик тензорнинг ковариант ҳосиласи нолга тенг эканлиги маълум (70.3):

$$\nabla_r g^{pq} = \frac{\partial g^{pq}}{\partial x^r} + \Gamma^p_{sr} g^{sq} + \Gamma^q_{sr} g^{ps} = 0,$$

демак:

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} = -\Gamma^p_{sr} g^{sq} - \Gamma^q_{sr} g^{ps}$$

бўлади.

148. Маълумки:

$$T_{ij} = g_{jm} T_{i.}^{\ m} = g_{il} T^{l.}_{\ j} = g_{il} g_{jm} T^{lm}.$$

Ковариант дифференциаллашга нисбатан метрик тензорнинг ўзгармас бўлиши назарда тутилса, юқоридаги формуладан талаб қилинган натижа келиб чиқади.

149. Инвариантнинг хусусий ҳосилалари ковариант вектор эканлиги маълум:

$$\frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x^k}$$

Детерминантлар кўпайтмаси теоремасидан фойдалансак:

$$\left| \frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x'^j} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \right| \left| \frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x^k} \right|$$

бўлади. Шундай қилиб, скаляр зичлик таърифини ифодаловчи (64.9) га биноан, масалада текширилаётган детерминант вазминлиги мусбат бирга тенг бўлган скаляр зичликдир.

150. Берилган тензорнинг симметрик бўлганлигидан:

$$\Gamma_{ij,k}\, T^{ik} = \Gamma_{ij,k}\, T^{ki}$$

ёки йиғиштириш индексларининг ўринлари алмаштирилса:

$$\Gamma_{ij,k}\, T^{ki} = \Gamma_{kj,i} T^{ik}$$

бўлади. Бундан:

$$\Gamma_{ij,k}\, T^{ik} = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij,k}\, T^{ik} + \Gamma_{kj,i}\, T^{ik}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i})\, T^{ik}$$

келиб чиқади. (67.21) га мувофиқ:

$$\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

демак:

$$\Gamma_{ij,k}\, T^{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\, T^{ik}$$

бўлади.

151. Иккинчи рангли аралаш тензорнинг ковариант ҳосиласи (69.8) га мувофиқ:

$$\nabla_l T^{k.}_{.j} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(T^{k.}_{.j}\right) - \Gamma^m_{lj} T^{k.}_{.m} + \Gamma^k_{lm}\, T^{m.}_{.j}.$$

Берилган тензор дивергенциясини топиш учун ана шу ифода, $l = k$ деб ҳисоблаб, йиғиштирилади. Симметрик тензор учун $T^{k.}_{.j} = T^{.k}_{j.} = T^k_j$, демак унинг дивергенцияси:

$$\nabla_l\, T^l_j = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(T^l_j\right) - \Gamma^m_{lj}\, T^l_m + \Gamma^l_{lm}\, T^m_j$$

бўлади. Формуланинг ўнг томонидаги иккинчи ҳадни метрик тензор воситасида бундай ёзиш мумкин:

$$\Gamma^m_{lj}\, T^l_m = g^{mk}\, \Gamma_{lj,k}\, g_{ml}\, T^{il} =$$

$$= \delta^k_l\, \Gamma_{ij,k}\, T^{il} = \Gamma_{ij,k}\, T^{ik},$$

демак:

$$\nabla_i T^i_j = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(T^i_j\right) - \Gamma_{ij,k} T^{ik} + \Gamma^i_{im} T^m_j.$$

Бундан олдинги масаладан:

$$\Gamma_{ij,k} T^{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} T^{ik}$$

ва (75.59) га мувофиқ:

$$\Gamma^i_{im} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}.$$

Натижада:

$$\nabla_i T^i_j = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(T^i_j\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} T^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m} T^m_j$$

келиб чиқади ёки формуланинг ўнг томонидаги йиғиштириш индекси m ўрнига i ни олсак:

$$\nabla_i T^i_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, T^i_j\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} T^{ik}$$

бўлади.

АДАБИЁТ

П. Бергман. Введение в теорию относительности. С предисловием А. Эйнштейна. Госиздат Ин. Лит, М., 1947.

Т. Блинчиков. Тензорный анализ с приложениями к геометрии и механике твердых и жидких тел. Л., 1941.

А. И. Борисенко и И. Е. Тарапов. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Издание второе, дополненное. Государственное издательство „Высшая школа“, Москва, 1963.

И. А. Гольдфайн. Векторный анализ и теория поля. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, 1962.

Я. С. Дубнов. Основы векторного исчисления. ч. I, М.—Л., 1950. ч. 2, М. 19 2.

Duschek und Hochrainer. Grundzüge der tensorrechnung in analytischer darstellung. I Teil: Tehsoralgebra, 1946. II Teil: Tensoranalysis, 1950. III Teil: Anwendungen in physik und technik, 1955. Wien. Springer-Verlag.

Р. Искандаров. Олий алгебра. I қисм, иккинчи нашри. ЎзССР „Ўрта ва олий мактаб“ Давлат нашриёти. Тошкент, 1963.

В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. ч. I, М.—Л., 1947, ч. 2, М. — Л., 1948.

Н. А. Кильчевский. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1954.

Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, М., 1961.

С. П. Кузнецов и Л. В. Шагарова. Основы векторного исчисления. Издательство Томского университета. Томск, 1961.

M. Lagally. Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig, AVG, 5 Aufl. 1956. (Русча таржимаси: М. Лагалли, Векторное исчисление ОНТИ, М.—Л., 1936).

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля. Издание 4-е, исправленное и дополненное. Физматгиз, Москва, 1962.

В. И. Левин. Методы математической физики. Издание второе. Учпедгиз, Москва, 1960.

Э. Маделунг. Математический аппарат физики. Перевод с 6 немецкого издания, под редакцией В. И. Левина. Физматгиз, Москва, 1960.

А. Дж. Мак-Коннел. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. Перевод с английского под редакцией Г. В. Корнева. Госуд. изд-во физ.-мат. литературы, Москва, 1963.

Р. Х. Маллин. Векторлар назариясининг элементлари. ЎзССР Давлат Ўқув-педагогика нашриёти, Тошкент, 1955.

Мари-Антуанетт Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. Перевод с французского Г. А. Зайцева. Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.

Основные формулы физики. Составлено группой под редакцией Д. Мензела. Перевод с английского под редакцией И. С. Шапиро. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1957.
Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Перевод с английского под редакцией С. П. Аллилуева, Н. С. Кошлякова, А. Д. Мышкиса и А. Г. Свешникова. Том I. Издательство иностранной литературы, Москва, 1958.
C. Moller. The theory of relativity. Oxford, 1952.
В. Паули. Теория относительности. Перевод с немецкого В. Л. Гинзбурга и Л. М. Левина. ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1947, Ленинград.
А. З. Петров. Пространства Эйнштейна. Гос. изд-во физико-мат. литературы, Москва, 1961.
П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание второе, издательство „Наука", Москва, 1964.
М. А. Собиров ва А. Ё. Юсупов. Дифференциал геометрия курси. Тузатилган ва тўлдирилган иккинчи нашри. „Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 1965.
I. Schouten. Tensor analysis for physicists. Oxford, 1954.
В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Издание 2-е, дополненное. физматгиз, М., 1961.
Я. И. Френкель. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. ГИЗ ТТЛ. Л.—М., 1940.
28. А. Э.— А. Хатипов. Основы тензорного исчисления и римановой геометрии. Под редакцией А. П. Нордена. Издательство Узб. Гос. Университета, Самарканд, 1956.
Г. Е. Шилов. Лекции по векторному анализу. Гостехиздат, М., 1954.
А. С. Эддингтон. Теория относительности. Перевод с английского. Редакция Д. Д. Иваненко. ГТТИ. М.—Л., 1934.
А. А. Эйхенвальд. Теоретическая физика. Часть первая. Теория поля. Издание третье. Госуд. технико-теоретич. издательство, М.—Л., 1934.
М. Ўразбоев. Назарий механика асосий курси. Қайта ишланган иккинчи нашри. Проф. Х. А. Раҳматулин таҳрири остида. Ўзбекистон ССР Давлат нашриёти. Тошкент, 1959.

АЛФАВИТЛИ КЎРСАТКИЧ

В

Г

Д

Й

К

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Ю

Я

Ў

Қ

Ҳ

МУНДАРИЖА

II боб. **Векторлар анализи**

III боб. Оддий тензорлар анализи

IV боб. **Умумий тензорлар анализи**

На узбекском языке

РАХМАТУЛЛА ХАЛМУРАДОВИЧ МАЛЛИН

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Допущено Министерством высшего и
среднего специального образования
УзССР в качестве учебного пособия
для ВУЗов

Издательство „Учитель"
Ташкент — 1965

Махсус редактор *М. А. Собиров*

Нашриёт редактори *А. С. Тўрахонов*

Бадиий редактор *И. Исроилов*
Техредактор *Н. Печенкина*
Корректор *Ж. Нуриддинова*

Теришга берилди 7/VI-1965 й. Босишга рухсат этилди 22/XI-1965 й. Қоғози $60 \times 90^1/_{16}$. Физик б. л. 30,75 Нашр. л. 32,56 Тиражи 5000. Р06075.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 12-62. Баҳоси 98 т. Муқоваси 15 т.

ЎзССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг 1- босмахонаси, Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1965. Заказ № 632.