БАЪЗИ БЕЛГИЛАШЛАР

Механикавий катталиклар

Умумлашган координаталар ва импульслар — q_i, p_i

Лагранж ва Гамильтон функциялари — L ва H (II қисмда: L ва $\mathscr{H}$)

Зарра энергияси ва импульси — E ва $\mathbf{p}$ (II қисмда: $\mathscr{E}$ ва $\mathbf{p}$)

Импульс моменти — $\mathbf{M}$

Куч моменти — $\mathbf{K}$

Инерция тензори — I_{ik}

Электромагнит катталиклар

Электромагнит майдоннинг скаляр ва вектор потенциаллари — φ ва $\mathbf{A}$

Электр ва магнит майдон кучланганликлари — $\mathbf{E}$ ва $\mathbf{H}$

Зарядлар ва токлар зичлиги — ρ ва $\mathbf{j}$

Электр ва магнит диполь моментлари — $\mathbf{d}$ ва $\mathbf{m}$

Математикавий белгилашлар

Ҳажм, юз ва узунлик элементлари — dV, $d\mathbf{f}$, $d\mathbf{l}$

Уч ўлчовли векгор ва тензор индекслар x, y, z қийматларни қабул этувчи i, k, l, ... латин ҳарфлари билан белгиланади

Тўрт ўлчовли вектор ва тензор индекслар 0, 1, 2, 3 қийматларни қабул этувчи λ, μ, ν, ... грек ҳарфлари билан белгиланади

Тўрт ўлчовли индексларни кўтариш ва пастга тушириш қоидаси — 140-бетда

Икки марта такрорланувчи (соқов) индекслар бўйича йиғинди олиш қоидаси — 88 ва 140-бетларда

БИРИНЧИ ҚИСМ

МЕХАНИКА

I боб

ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1- §. Умумлашган координаталар

*Моддий нуқта*1) тушунчаси механиканинг асосий тушунчаларидан биридир. Моддий нуқта дейилганда жисм ҳаракатини баён этишда унинг ўлчамларини ҳисобга олмаса ҳам бўладиган жисм тушунилади. Мана шундай тушуниш у ёки бу масаланинг конкрет шартларига боғлиқ, албатта. Жумладан, планеталарнинг Қуёш атрофидаги ҳаракати ўрганилаётганда уларни моддий нуқталар деб ҳисоблаш мумкин, суткалик айланишлари кўрилаётганда эса бу тахмин ўринли эмас.

Моддий нуқтанинг фазодаги ҳолати радиус-вектор $\mathbf{r}$ орқали аниқланади. $\mathbf{r}$ нинг компонентлари нуқтанинг декарт координаталари x, y, z га мос келади. Радиус-векторнинг t бўйича биринчи ҳосиласи

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

тезлик деб аталади, иккинчи ҳосиласи $d^2\mathbf{r}/dt^2$ эса нуқтанинг тезланишини кўрсатади. Биз қуйида вақт бўйича дифференциаллашни, қабул этилганига кўра, ҳарф устига қўйилган нуқта ($\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$) кўринишида белгилаймиз.

N та моддий нуқтадан иборат системанинг фазодаги ўрнини аниқлаш учун N та радиус-вектор, яъни $3N$ та координата берилиши лозим. Умуман система ҳолатини аниқ белгилаш учун зарур бўлган мустақил катталиклар сони система *эркинлик даражасининг* сони дейилади; мазкур ҳолда бу сон $3N$ га тенг. Мустақил кат-

---

1) „Моддий нуқта" термини ўрнига биз кўпинча „зарралар" ҳақида гапирамиз.

таликлар албатта нуқталарнинг декарт координаталари бўлиши шарт эмас. Масала шартига кўра бирорта бошқа координаталарни танлаш қулайроқ бўлиши ҳам мумкин. Эркинлик даражаси s бўлган система ҳолатини тўла характерловчи s та исталган $q_1, q_2, \ldots, q_s$ катталиклар шу системанинг *умумлашган координаталари* деб, $\dot{q}_i$ ҳосилалар эса унинг *умумлашган тезликлари* деб аталади.

Лекин умумлашган координаталар қийматларининг берилиши системанинг мазкур вақтдаги „механикавий ҳолатини“ (система ҳолатини вақтнинг келгуси моментларида олдиндан кўрсатиб бера олмаслиги маъносида) ҳали аниқламайди. Координаталарнинг берилган қийматларида система ихтиёрий тезликларга эга бўлиши мумкин. Бу тезликларнинг катталигига қараб вақтнинг кейинги моментларида (яъни чексиз кичик вақт интервали dt ўтгандан сўнг) система ўрни ҳам турлича бўлади.

Тажрибанинг кўрсатишича, барча координата ва тезликларнинг бир вақтнинг ўзида берилиши система ҳолатини тўла аниқлайди ва принцип жиҳатдан унинг кейинги ҳаракатини олдиндан айтиб беришга имкон беради. Математик нуқтаи назардан барча q координаталар ва $\dot{q}$ тезликларнинг бирор вақт моментида берилиши орқали тезланиш $\ddot{q}$ ларнинг қийматлари ҳам мазкур моментда аниқ белгиланади[1].

Тезланишларни координаталар ва тезликлар билан боғловчи муносабатлар *ҳаракат тенгламалари* дейилади. Улар $q(t)$ функцияларга нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардир. Бу тенгламаларни интеграллаб $q(t)$ функцияларни, яъни механикавий системанинг ҳаракат траекторияларини аниқлаш мумкин.

2-§. Энг кичик таъсир принципи

Механикавий системалар ҳаракат қонунининг энг умумий ифодаси *энг кичик таъсир принципи* (ёки *Гамильтон принципи*) деб аталувчи принцип орқали берилади. Бу принципга кўра ҳар бир механикавий система маълум

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

ёки қисқача $L(q, \dot{q}, t)$ функция билан характерланади. Бунда система ҳаракати қуйидаги шартни қаноатлантиради. Система $t = t_1$ ва $t = t_2$ вақт моментларида координаталарнинг қийматлари $q^{(1)}$ ва $q^{(2)}$ бўлган тўпламлар орқали характерланувчи маълум ҳолатларда жойлашсин. У ҳолда бу ҳолатлар орасида система шундай ҳаракатланадики,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2.1}$$

интеграл мумкин бўлган энг кичик қийматга эришади. L функция мазкур системанинг *Лагранж функцияси*, (2.1) интеграл эса *таъсир* деб аталади.

Лагранж функцияси ўз ичига координаталарнинг вақт бўйича юқори ҳосилаларини эмас, фақат q ва $\dot{q}$ ларни олганлиги, механикавий ҳолат координаталар ва тезликлар орқали тўла аниқланади деган фактнинг ифодасидир.

Энди (2.1) интегралнинг минимумини аниқлаш масаласини ҳал қилувчи дифференциал тенгламаларни келтириб чиқарайлик. Соддалаштириш мақсадида, аввало, система фақат биргина эркинлик даражасига эга деб фараз қилайлик. Шунга кўра фақат биргина $q(t)$ функция аниқланиши лозим.

Фараз қилайлик, $q = q(t)$ шундай функция бўлсинки, унинг учун S минимумга эришсин. Шунга кўра $q(t)$ ни

$$q(t) + \delta q(t) \tag{2.2}$$

кўринишдаги исталган функция билан алмаштирилганда S ортади. Бу ерда $\delta q(t)$ функция t_1 дан t_2 гача вақт интервалида кичик бўлган функция (уни $q(t)$ функциянинг вариацияси дейилади); $t = t_1$ ва $t = t_2$ да барча таққосланаётган (2.2) функциялар бир хил $q^{(1)}$ ва $q^{(2)}$ қийматларни қабул этиши лозимлигидан

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.3}$$

бўлиши керак.

---

[1] Соддалаштириш мақсадида биз, шартли равишда, q орқали барча $q_1, q_2, \ldots q_s$ координаталар тўпламини (мос ҳолда, $\dot{q}$ орқали барча тезликлар мажмуасини) тушунамиз.

q ни $q+\delta q$ га алмаштирганда S нинг ўзгариши

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\ \dot q+\delta\dot q,\ t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot q,\ t)dt$$

айирма орқали берилади. Бу айирмани δq ва $\delta\dot q$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиш биринчи тартибли ҳадлардан бошланади. Бу ҳадлар тўпламининг нолга тенглашиши S минималлигининг зарурий шартидир: уни интегралнинг биринчи вариацияси дейилади. Шундай қилиб, энг кичик таъсир принципини

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot q,\ t)dt=0 \qquad (2.4)$$

кўринишда ёки вариациялаб,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta\dot q\right)dt=0$$

ҳолда ёзиш мумкин. $\delta\dot q=\frac{d}{dt}\delta q$ эканини ҳисобга олиб, иккинчи ҳадни бўлаклаб интеграллаймиз. У ҳолда

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\delta q\,dt=0. \qquad (2.5)$$

Лекин (2.3) шартга кўра бу ифоданинг биринчи ҳади йўқолади ва δq нинг исталган қийматларида нолга тенг бўладиган интеграл қолади. Интеграл нолга тенг бўлиши учун интеграл остидаги ифода нолга айланиши лозим. Шундай экан

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

Бир нечта эркинлик даражаси мавжуд бўлган ҳолда энг кичик таъсир принципига кўра s та турли $q_i(t)$ функциялар мустақил ҳолда вариацияланиши керак. У ҳолда, биз s та тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (2.6)$$

Булар изланаётган дифференциал тенгламалар бўлиб, механикада *Лагранж тенгламалари*[1] дейилади. Агар берилган механикавий системанинг Лагранж функцияси маълум бўлса, (2.6) тенгламалар тезланишлар, тезликлар ва координаталар ўртасида боғланиш ўрнатади, яъни системанинг ҳаракат тенгламаларини ҳосил қилади. Математикавий нуқтаи назардан (2.6) тенгламалар s та номаълумли $q_i(t)$ функция учун иккинчи тартибли s та тенглама системасидан иборат. Бундай системанинг умумий ечимида $2s$ та ихтиёрий ўзгармас бор. Уларни топиш ва шу тариқа механикавий системанинг ҳаракатини тўла аниқлаш учун системанинг бирон-бир берилган вақт моментидаги ҳолатини характерловчи бошланғич шартларни, масалан, барча координата ва тезликларнинг дастлабки қийматларини билиш зарур.

Айтайлик, механикавий система иккита A ва B қисмдан иборат бўлсин. Ҳар бир қисм берк бўлиб, улар Лагранж функцияси сифатида L_A ва L_B функцияларга эга. Агар қисмлар бир-биридан ўзаро таъсир ҳисобга олинмайдиган даражада узоқлаштирилса, системанинг тўла Лагранж функцияси:

$$\lim L=L_A+L_B \qquad (2.7)$$

чегарага интилади. Лагранж функциясининг бу аддитивлик хусусияти ўзаро таъсирлашмайдиган ҳар бир қисм ҳаракат тенгламаларида системанинг бошқа қисмига тегишли катталиклар қатнашмаслигини кўрсатади.

Механикавий системанинг Лагранж функциясини ихтиёрий ўзгармасга кўпайтириш ўз ҳолича ҳаракат тенгламаларида акс этмайди, албатта. Бундан қуйидаги ноаниқлик келиб чиқиши мумкин: турли изоляциянган механикавий системаларнинг Лагранж функциялари ҳар хил ихтиёрий ўзгармасларга кўпайтирилиши мумкин. Аддитивлик хоссаси бу ноаниқликни бартараф этади— — унга кўра бир вақтнинг ўзида барча системаларнинг Лагранж функцияларини фақат бир хил ўзгармасга кўпайтириш ўринлидир. Шу тариқа биз физикавий катталик ўлчов бирлигини ихтиёрий танлашга ҳақли бўлиб қоламиз; бу мавзуга 4- § да яна тўхталиб ўтамиз.

---

[1] (2.1) кўринишидаги интеграллар экстремумларини аниқлаш масаласини кўрувчи вариацион ҳисобда уларни Эйлер тенгламалари дейилади.

Қуйидаги умумий мулоҳазани ҳам келтириш лозим. Бир-биридан координата ва вақтнинг бирор $f(q, t)$ функциясидан вақт бўйича олинган тўла ҳосилага фарқ қилувчи иккита $L'(q, \dot{q}, t)$ ва $L(q, \dot{q}, t)$ функцияни кўриб ўтайлик:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \qquad (2.8)$$

Шу икки функция ёрдамида ҳисобланган (2.1) интеграллар

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, q, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

муносабат бўйича боғланган, яъни бир-биридан таъсирни вариациялашда йўқолувчи қўшимча ҳадга фарқ қилади, шунинг учун $\delta S' = 0$ шарт $\delta S = 0$ шартга мос тушади ва ҳаракат тенгламасининг кўриниши ўзгармай қолади.

Шундай қилиб, Лагранж функцияси маълум аниқликдагина топилди. Бу аниқлик координата ва вақтнинг ихтиёрий функциясидан олинган тўла ҳосилага тенг.

3-§. Галилейнинг нисбийлик принципи

Табиатда юз берадиган процессларни баён этиш учун у ёки бу *саноқ системаси* зарурдир. Зарраларнинг фазодаги ўрнини кўрсатадиган координаталар системаси ва шу системага боғланган вақтни билдирувчи соатлар биргаликда саноқ системасини беради.

Табиат қонунлари, жумладан ҳаракат қонунлари турли саноқ системаларида, умуман айтганда, турли кўринишга эга. Ихтиёрий олинган бирор саноқ системасида жуда оддий ҳодиса қонунлари ҳам мураккаб бўлиб кўриниши мумкин.

Демак, табиат қонунлари энг содда кўринишга эга бўлган саноқ системасини излаб топиш зарурияти пайдо бўлади.

Эркин жисм, яъни ҳеч қандай ташқи таъсирга учрамаган жисм ҳаракати ҳаракатнинг энг содда кўринишидир. Шундай саноқ системалари борки, уларда *эркин ҳаракат* катталиги ва йўналиши ўзгармайдиган тезлик билан ўтади. Бундай саноқ системалари *инерциал* саноқ системалари дейилади, уларнинг мавжудлиги эса *инерция қонунида* ифодаланади.

Инерциаллик хоссасини фазонинг бир жинслилик ва изотроплик ҳамда вақтнинг бир жинслилик хоссаси (шундай саноқ системасига нисбатан) ҳақидаги тасдиқ каби таърифлаш ҳам мумкин. Фазо ва вақтнинг бир жинслилиги фазодаги эркин зарра ҳолатларининг барча вақт моментларида эквивалентлигини, фазонинг изотроплиги эса ундаги барча йўналишлар эквивалентлигини билдиради. Фазонинг исталган йўналиши бўйлаб зарранинг эркин ҳаракат характерининг ўзгармаслиги шу хусусиятлар натижасидир.

Агар икки саноқ системаси бир-бирига нисбатан текис ва тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлса, ва агар улардан бири инерциал бўлса, у ҳолда равшанки, иккинчиси ҳам инерциалдир: ҳар қандай эркин ҳаракат бу системада ҳам ўзгармас тезликда содир бўлади. Шундай қилиб, бир-бирларига нисбатан ўзгармас тезликда ҳаракатланаётган исталганча кўп инерциал саноқ системалари мавжуд.

Лекин турли инерциал саноқ системалари фақат эркин ҳаракат хоссаларига нисбатангина эквивалент бўлмас экан. Тажрибанинг кўрсатишича, *нисбийлик принципи* деб аталган принцип ўринлидир. Бу принципга кўра табиатнинг ҳамма қонунлари барча инерциал саноқ системаларида бир хил. Бошқача сўз билан айтганда, табиат қонунларини ифодаловчи тенгламалар бир инерциал системадан иккинчисига ўтишдаги координата ва вақт алмаштиришларига нисбатан инвариантдир. Демак, табиат қонунларининг координаталар ва вақт орқали ифодаланган тенгламалари турли инерциал саноқ системаларида ягона кўринишга эга.

Нисбийлик принципи билан бир қаторда, *классик* (ёки *ньютон*) механика[1] тасаввурлари асосида *вақтнинг абсолютлиги ҳақидаги* — барча инерциал саноқ системаларида вақт ўтишининг бир хиллиги ҳақидаги фараз ётади. Шу фараз билан бирлаштирилган нисбийлик принципи *Галилейнинг нисбийлик принципи* дейилади.

---

[1] VIII, IX бобларда кўриладиган *релятивистик* (ёки *Эйнштейн*) механикасидан фарқли ҳолда.

Бири иккинчисига нисбатан **V** тезликда ҳаракатланаётган K ва K' инерциал саноқ системаларида бир нуқтанинг **r** ва **r**$'$ координаталари ўзаро

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{V}t \tag{3.1}$$

муносабатда боғланган, бу ерда t — иккала системада бир хил бўлган вақт:

$$t=t' \tag{3.2}$$

(3.1) тенгламанинг иккала қисмини вақт бўйича дифференциаллаб, *тезликларни қўшиш қонунини* оламиз:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{V} \tag{3.3}$$

(3.1), (3.2) ва (3.3) формулаларни *Галилей алмаштиришлари* дейилади. Галилейнинг нисбийлик принципи табиат қонунларининг ана шу алмаштиришларга нисбатан инвариантлигини талаб этади.

Юқорида айтилганлар инерциал саноқ системалар хоссаларининг ўзига хослигини аниқ кўрсатади. Бу хоссаларга кўра, худди ана шу системалар механикавий ҳодисаларни ўрганишда қўлланилиши лозим. Бундан кейин махсус эслатма берилмаган барча ҳолларда саноқ системаси ана шундай танланган деб тушуниш керак.

Шу билан бирга барча инерциал саноқ системаларининг тўла физикавий эквивалентлиги бошқа ҳамма системалардан устун бўладиган „абсолют“ системанинг йўқлигини кўрсатади.

4-§. Эркин зарранинг Лагранж функцияси

Лагранж функциясининг кўринишини аниқлаш учун энг содда ҳол — бир зарранинг инерциал саноқ системага нисбатан эркин ҳаракати ҳолини қараб чиқамиз.

Фазо ва вақтнинг бир жинслилигига кўра эркин зарранинг Лагранж функцияси зарранинг **r** радиус-векторига ҳам, t вақтга ҳам ошкора боғлиқ бўла олмайди, яъни L фақат тезликнинг функциясидир. Фазо изотропиясига кўра эса Лагранж функцияси **v** вектор йўналишига эмас, балки унинг абсолют қийматига, яъни $\mathbf{v}^2=v^2$ га боғлиқ:

$$L=L(v^2).$$

Бу функциянинг кўриниши Галилейнинг нисбийлик принципи томонидан аниқ белгиланади. Шу принципга кўра $L(v^2)$ функция барча инерциал саноқ системаларида бир хил кўринишда бўлиши керак. Иккинчи томондан, бир саноқ системадан бошқасига ўтганда зарранинг тезлиги (3.3) га асосан ўзгаради, яъни $L(v^2)$ функция $L[(\mathbf{v}'+\mathbf{V}^2)]$ га ўтади. Демак, охирги ифода $L(v'^2)$ дан фарқли бўлсада, бу фарқ фақатгина координата ва вақт функциясидан олинган тўла ҳосилага тенг бўлиши лозим; 2-§ охирида баён этилганидек, бундай ҳосила ҳар доим тушириб қолдирилиши мумкин.

Бундай талабни

$$L=av^2$$

кўринишдаги муносабатгина қаноатлантиради. $\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{V}$ алмаштиришга кўра

$$L(v^2)=av^2=a(\mathbf{v}'+\mathbf{V})^2=av'^2+2a\mathbf{v}'\mathbf{V}+aV^2$$

ёки $\mathbf{v}'=\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ эканидан

$$L(v^2)=L(v'^2)+\frac{d}{dt}(2a\mathbf{r}'\mathbf{V}+V^2t).$$

Пайдо бўлган ортиқча ҳад ҳақиқатан ҳам тўла ҳосила экан, уни тушириб қолдириш мумкин.

a доимийни $m/2$ деб белгилаш қабул этилган, шунинг учун эркин ҳаракатланаётган нуқтанинг Лагранж функцияси

$$L=\frac{mv^2}{2} \tag{4.1}$$

кўринишни олади.

m катталик моддий нуқтанинг *массаси* дейилади. Лагранж функциясининг аддитивлик хусусиятига кўра ўзаро таъсирлашмайдиган нуқталар системаси учун[1]:

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4.2}$$

Шу хоссани ҳисобга олингандагина массага берилган таъриф реал маънога эга бўлади. 2-§ да таъкидланганидек, Лагранж функциясини ҳар доим исталган ўзгармас сонга кўпайтириш мумкин; бу ҳол ҳаракат тенгламаларига таъсир этмайди. (4.2) функция учун бун-

---

[1] Зарралар номерини билдирувчи индекс сифатида биз латин алфавитининг бошланғич ҳарфларидан, координаталарни белгиловчи индекслар учун эса i, k, l, ... ҳарфларидан фойдаланамиз.

дай кўпайтириш масса ўлчов бирлигининг ўзгаришига олиб келади; реал физикавий маънога эга бўлган турли зарралар массаларининг нисбати эса бу алмаштиришда ўзгармай қолади.

Массанинг манфий бўла олмаслигини осонгина кўриш мумкин. Дарҳақиқат, энг кичик таъсир принципига биноан зарранинг фазодаги *1* нуқтадан *2* нуқтага томон реал ҳаракати учун

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

интеграл минимумга эга. Агар масса манфий бўлса, зарранинг олдин *1* дан тез узоқлашиб, кейин *2* га тез яқинлашадиган траекториялари учун таъсир интеграли абсолют катталиги жиҳатидан исталганча катта бўлган манфий қийматлар олган бўлар, яъни минимумга эга бўла олмас эди.

Қуйидаги

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \qquad (4.3)$$

тенглик ўринли эканлигидан Лагранж функциясини тузиш учун мос координаталар системасида dl ёй элементи узунлигининг квадратини топиш кифоя.

Масалан, декарт координаталарида $al^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, шунинг учун

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \qquad (4.4)$$

Цилиндрлик координаталарда $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, бундан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \qquad (4.5)$$

Сферик ҳолда эса $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ ва

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2). \qquad (4.6)$$

5-§. Зарралар системасининг Лагранж функцияси

Энди ташқи жисмлар билан эмас, балки фақат ўзаро таъсирлашувчи зарралар системасини кўрайлик; бундай системани *ёпиқ* система дейилади. Бу ҳолда зарралар ўртасидаги ўзаро таъсирни ифодалаш учун ўзаро таъсирлашмайдиган нуқталарнинг Лагранж функциясига маълум (ўзаро таъсир характерига боғлиқ бўлган) координаталар функциясини қўшиш мумкин[1]. Бу функцияни U деб белгилаб, қуйидагики ёзамиз:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \ldots) \qquad (5.1)$$

($\mathbf{r}_a$ катталик a - нуқтанинг радиус-вектори). (5.1) ёпиқ система учун Лагранж функциясининг умумий кўринишидир.

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

йиғинди системанинг *кинетик энергияси* деб, U функция эса *потенциал энергияси* деб аталади; бу номларнинг маъносини 6- § да кўрамиз.

Потенциал энергия барча моддий нуқталарнинг бир вақт моментидаги жойлашишларигагина боғлиқлигидан биргина зарра ўрнининг ўзгариши шу онда бошқаларида акс этади, демак, ўзаро таъсир бир онда „тарқалади“ дейиш мумкин. Классик механикадаги ўзаро таъсир характерининг бундай қатъийлиги вақтнинг абсолютлиги ва Галилей нисбийлик принципининг бевосита натижасидир. Агар ўзаро таъсир бир онда тарқалмаса, у ҳолда унинг тарқалиш тезлиги бир-бирига нисбатан ҳаракатланаётган турли саноқ системаларида турлича бўлар эди. Чунки вақтнинг абсолютлиги автоматик равишда тезликларни қўшишнинг одатдаги қоидасини барча ҳодисаларга қўлланишлигини билдиради. Лекин у ҳолда ўзаро таъсирлашаётган жисмлар учун ҳаракат қонунлари турли инерциал саноқ системаларида турлича бўлар эди, бу эса нисбийлик принципига зиддир.

3- § да биз вақтнинг фақат бир жинслилиги ҳақида гапирдик. Лагранж функцияси (5.1) нинг тузилишига кўра механикада вақт фақат бир жинсли бўлибгина қолмай, балки изотроп ҳамдир, яъни унинг хоссалари иккала йўналишда ҳам бир хилдир. Дарҳақиқат, t ни $-t$ га алмаштириш (вақтни *айлантириш*) Лагранж функциясини ва демак, ҳаракат тенгламасини ўзгартирмайди.

---

[1] Бу тасдиқ классик механикагагина тааллуқлидир.

Бошқача қилиб айтганда, агар системада қандайдир ҳаракат мумкин бўлса, у ҳолда ҳар доим бунга тескари ҳаракат ҳам мумкин бўлади: тескари ҳаракат шундайки, унда система дастлабки ҳолатларни тескари тартибда ўтади. Шу маънода классик механика қонунларига кўра юз берувчи барча ҳаракатлар қайтувчандир.

Лагранж функциясини билган ҳолда биз ҳаракат тенгламаларини туза оламиз[1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\mathbf{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \qquad (5.2)$$

Бунга (5.1) ни қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$m_a\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \qquad (5.3)$$

Шу ҳолдаги ҳаракат тенгламаларини *Ньютон тенгламалари* дейилади. Улар ўзаро таъсирлашаётган зарралар системаси механикасининг асосидир. (5.3) нинг ўнг томонидаги

$$\mathbf{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \qquad (5.4)$$

вектор a-заррага таъсир этувчи *куч* дейилади. У U билан биргаликда зарраларнинг тезлигига эмас, балки фақат координаталарига боғлиқ. Шунинг учун (5.3) тенгламалар зарраларининг тезланиш векторлари ҳам фақат координаталарнинг функциялари эканини кўрсатади.

Потенциал энергия маълум аниқлик билан топиладиган катталикдир; бу аниқликни кўрсатувчи ихтиёрий ўзгармас сон ҳаракат тенгламасини ўзгартирмайди (2·§ да кўрсатилган Лагранж функцияси кўп қийматлилигининг хусусий ҳоли). Бу ўзгармас сонни танлашнинг энг табиий ва одатда қабул этилган усули шундан иборатки, бунда зарралар орасидаги масофанинг ортиши билан потенциал энергияни нолга интилтирилади

Агар ҳаракатни тасвирлашда нуқталарнинг декарт координаталари эмас, балки ихтиёрий умумлашган q_i координаталар қўлланилса, у ҳолда Лагранж функциясини топиш учун мос алмаштиришлар ўтказиш керак:

$$x_a=f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s), \qquad \dot{x}_a=\sum_k\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Бу ифодаларни

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2+\dot{z}_a^2)-U$$

функцияга қўйиб, изланаётган

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\,\dot{q}_k-U(q) \qquad (5.5)$$

кўринишдаги Лагранж функциясини топамиз. Бу ерда a_{ik}—фақат координаталар функцияси. Умумлашган координаталарда кинетик энергия аввалгидек тезликларнинг квадратик функциясидир, лекин у координаталарга ҳам боғлиқ бўлиши мумкин.

Ҳозирга қадар биз фақат ёпиқ системалар ҳақида гапирдик. Энди олдиндан берилган қонун бўйича ҳаракатланувчи B система билан ўзаро таъсирлашаётган ёпиқ бўлмаган A системани кўрайлик. Бундай ҳолда A система берилган ташқи майдон (B система майдони) да ҳаракатланмоқда дейилади. Ҳаракат тенгламалари энг кичик таъсир принципига асосан координаталарнинг ҳар бирини мустақил вариациялаш йўли билан (яъни гўё бошқа координаталар маълум бўлганидек) олинади. Шунинг учун биз A системанинг L_A Лагранж функциясини топишда бутун $A+B$ системанинг L Лагранж функциясидан фойдаланамиз. Бу ҳолда L функциядаги q_B координаталарни берилган вақт функциялари билан алмаштирамиз.

$A+B$ системани ёпиқ деб фараз қилиб, қуйидагини оламиз:

$$L=T_A(q_A, \dot{q}_A)+T_B(q_B, \dot{q}_B)-U(q_A, q_B),$$

бунда биринчи ва иккинчи ҳад A ва B системаларнинг кинетик энергиясини, учинчи ҳад эса иккала системанинг потенциал энергиясини кўрсатади. q_B ўрнига берилган вақт функцияларини қўйиб ва фақат вақтга боғлиқ бўлган ва шунинг учун ҳам қандайдир бошқа

---

[1] Скаляр катталикдан вектор бўйича олинган ҳосила вектор бўлиб, унинг компонентлари шу катталикдан векторнинг мос компонентлари бўйича олинган ҳосилаларга тенг.

вақт функциясини тўла ҳосиласи бўлган $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ ҳадни ташлаб юбориб,

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))$$

ни оламиз. Шундай қилиб, системанинг ташқи майдондаги ҳаракати одатдаги Лагранж функцияси билан берилади, лекин бу ҳолда потенциал энергия вақтга ошкор боғлиқ бўлиши мумкин.

Масалан, битта зарранинг ташқи майдондаги ҳаракати учун Лагранж функциясининг умумий кўриниши

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, \mathrm{t}) \tag{5.6}$$

ва ҳаракат тенгламаси

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \tag{5.7}$$

бўлади.

Ҳар бир нуқтасида заррага бир хил $\mathbf{F}$ куч таъсир қиладиган майдонни *бир жинсли* майдон дейилади. Бундай майдонда потенциал энергия

$$U = -\mathbf{Fr} \tag{5.8}$$

бўлади.

Ушбу параграф сўнгида Лагранж тенгламаларининг турли конкрет масалаларда қўлланилиши тўғрисида қуйидаги мулоҳазани ҳам айтиб ўгамиз. Кўпинча шундай механикавий системалар кўриладики, уларда жисмлар (моддий нуқталар) ўртасидаги ўзаро таъсир *боғланишлар* характерига, яъни жисмларнинг ўзаро жойланишига қўйилган чеклашларга эга. Амалда бундай боғланишлар жисмларни турли стерженлар, иплар, шарнирлар ва ҳ. к. ёрдамида бириктириш йўли билан амалга оширилади. Бу ҳол ҳаракатга янги фактор (жисмлар ҳаракати уларнинг бир-бирига тегишиб турган жойидаги ишқаланиш билан биргаликда бўлади) киритади. Натижада масала умуман олганда, соф механика доирасидан четга чиқади (20-§ га қаранг). Лекин кўпгина ҳолларда системадаги ишқаланиш шунчалик кучсизки, унинг ҳаракатга таъсирини бутунлай ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Агар система „бириктирувчи элементлари“ нинг массаларини ҳам ҳисобга олмаслик мумкин бўлса, у ҳолда бу элементларнинг роли системанинг s эркинлик даражаси сонини ($3N$ га нисбатан) камайтиришдан иборат бўлади. Унинг ҳаракатини аниқлаш учун яна (5.5) кўринишдаги Лагранж функциясидан фойдаланиш мумкин. Бу функциянинг мустақил умумлашган координаталари сони эркинлик даражалари сонига мос келади.

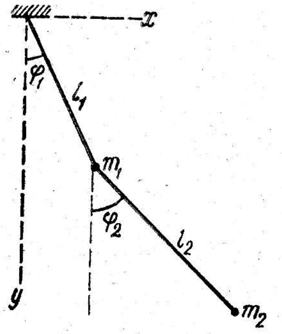
Масалалар

Бир жинсли оғирлик майдонида жойлашган қуйидаги системаларнинг Лагранж функциялари топилсин (оғирлик кучининг тезланиши — g)

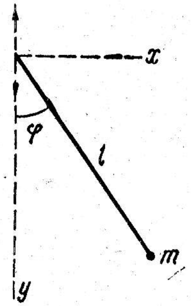
1. Қўш ясси маятник (1-расм).

Ечилиши. Координаталар сифатида l_1 ва l_2 иплар ва вертикал йўналиш орасидаги φ_1 ва φ_2 бурчакларни оламиз. У ҳолда m_1 нуқта учун қуйидагилар аниқланади:

$$T_I = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \qquad U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1.$$



1-расм.



2-расм.

Иккинчи нуқтанинг кинетик энергиясини топиш учун унинг декарт координаталари x_2, y_2 ларни (координата боши осма нуқтасида, y ўқи эса вертикал бўйича пастга йўналган) φ_1, φ_2 бурчаклар орқали ифодалаймиз:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2,$$

у ҳолда

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right],$$

ва, ниҳоят,

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

2. Осма нуқтаси $a \cos \gamma t$ қонун бўйича вертикал тебранадиган ясси маятник (2- расм).

Ечилиши. m нуқтанинг координаталари

$$x = l \sin \varphi, \qquad y = l \cos \varphi + a \cos \gamma t$$

бўлганидан Лагранж функцияси:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mal\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

Бу ерда фақат вақтга боғлиқ бўлган ҳадлар ёзилмаган ва $mal \gamma \cos \varphi \sin \gamma t$ дан вақт бўйича олинган тўла ҳосила чиқариб ташланган.

II боб

САҚЛАНИШ ҚОНУНЛАРИ

6-§. Энергия

Механикавий система ҳаракатида унинг ҳолатини белгиловчи $2s$ та q_i ва $\dot{q}_i (i = 1,2,\ldots s)$ катталиклар вақт ўтиши билан ўзгаради. Лекин бу катталикларнинг шундай функциялари борки, улар ҳаракат вақтида фақат бошланғич шартларга боғлиқ бўлган ўзгармас қийматларни сақлайдилар. Бу функцияларни *ҳаракат интеграллари* дейилади.

Эркинлик даражаси s бўлган ёпиқ механикавий система учун $(2s - 1)$ та мустақил ҳаракат интеграллари бор. Қуйидаги оддий мулоҳазалар буни яққол кўрсатади. Ҳаракат тенгламаларининг умумий ечимида $2s$ та ихтиёрий ўзгармас катталик бўлади (9- бетга қаранг). Ёпиқ система ҳаракат тенгламалари вақтга ошкор боғлиқ бўлмаганидан вақт ҳисобининг бошланиш моментини танлаш бутунлай ихтиёрийдир. Шунга кўра тенгламалар ечимидаги ихтиёрий ўзгармаслардан бирини ҳар доим вақт бўйича аддитив ўзгармас t_0 кўринишида танлаш мумкин. $2s$ та

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1})$$

функциялардан $t + t_0$ ни йўқотиб, $(2s - 1)$ та ихтиёрий $C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}$ ўзгармас катталикларни q ва $\dot{q}$ ларнинг функциялари кўринишида ифодалаймиз. Бу функциялар ҳаракат интеграллари бўлади.

Лекин ҳаракат интегралларининг ҳаммаси ҳам механикада бир хилда катта роль ўйнайвермайди. Улардан баъзиларининг ўзгармаслик хусусияти жуда чуқур маънога эга бўлиб, фазо ва вақтнинг асосий хоссалари — бир жинслилиги ва изотроплигига боғлиқдир. Сақланувчи катталиклар деб ҳисобланган бу интеграллар умумий аддитивлик хоссасига эга: уларнинг бир нечта ўзаро таъсирлашмайдиган бўлаклардан иборат система учун қийматлари системанинг алоҳида олинган ҳар бир қисмига тегишли қийматлари йиғиндисига тенг.

Худди ана шу аддитивлик хоссасига кўра мазкур катталиклар механикада алоҳида ўрин тутади. Фараз қилайлик, масалан, икки жисм ўзаро фақат бирор вақт мобайнида таъсирлашсин. Бутун системанинг ўзаро таъсиргача ва ундан сўнгги аддитив интегралларининг ҳар бири уларнинг алоҳида бир жисмга тегишли қийматлари йиғиндисига тенглигидан, бу катталикларнинг сақланиш қонунлари жисмларнинг ўзаро таъсиргача бўлган ҳолатлари маълум бўлган ҳолда таъсирдан кейинги ҳолатлари ҳақида қатор хулосалар чиқаришга имкон беради.

Вақтнинг бир жинслилиги туфайли юзага келадиган сақланиш қонунидан бошлайлик.

Шу бир жинслиликка кўра ёпиқ системанинг Лагранж функцияси вақтга ошкор боғлиқ бўлмайди. Шунинг учун Лагранж функциясининг вақт бўйича тўла ҳосиласи қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(агар L вақтга ошкор боғлиқ бўлганда эди, тенгликнинг ўнг томонига $\partial L/\partial t$ ҳад қўшилган бўлар эди). $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ ҳосилаларни Лагранж тенгламаларига кўра $\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_i}$ га алмаштирилса,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i \right)$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

ҳосил бўлади. Бундаги

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{6.1}$$

катталик ёпиқ система ҳаракатида ўзгармайди, яъни у ҳаракат интегралларидан биридир. Бу катталик системанинг *энергияси* дейилади. (6.1) га кўра энергия Лагранж функциясига чизиқли боғланган. Шу сабабли энергия аддитивлиги бевосита Лагранж функциясининг аддитивлигидан келиб чиқади.

Энергиянинг сақланиш қонуни фақат ёпиқ системалар учунгина эмас, балки ўзгармас (яъни вақтга боғлиқ бўлмаган) ташқи майдондаги системалар учун ҳам ўринлидир; Лагранж функциясининг юқоридаги хулосада фойдаланилган яккаю-ягона хоссаси—вақтга ошкор боғлиқ эмаслиги бу ҳолда ҳам қўлланилади. Энергиялари сақланадиган механикавий системаларни баъзида *консерватив* системалар дейилади.

5- § да кўрганимиздек, ёпиқ (ёки ўзгармас майдондаги) системанинг Лагранж функцияси

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

кўринишга эга, бу ерда T — тезликларнинг квадратик функцияси. Бунга бир жинсли функциялар ҳақидаги таниш бўлган Эйлер теоремасини қўлланиб,

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

ни оламиз. Бу қийматни (6.1) га қўйсак,

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q), \tag{6.2}$$

декарт координаталарида эса

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots). \tag{6.3}$$

Шундай қилиб, система энергияси иккита бутунлай ҳар хил ҳад — тезликларга боғлиқ бўлган кинетик энергия ва фақат зарраларнинг координаталарига қараб ўзгарадиган потенциал энергия йиғиндиси кўринишида берилиши мумкин.

7- §. Импульс

Фазонинг бир жинслилигидан эса бошқа бир сақланиш қонуни келиб чиқади.

Бу бир жинслиликка кўра ёпиқ системанинг механикавий хоссалари системани яхлит ҳолда фазода исталганча параллел кўчиришда ўзгармайди. Шунга кўра чексиз кичик ε кесмага кўчишни кўриб ўтайлик ва бунда Лагранж функциясининг ўзгармай қолишини шарт қилиб қўйайлик.

Параллел кўчиш системанинг барча нуқталари бир хил масофага силжишини таъминлайдиган алмаштиришни билдиради, яъни нуқталарнинг радиус-вектори ўзгаради: $\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. Зарралар тезликлари ўзгармас бўлган ҳолда, координаталарнинг чексиз кичик ўзгариши L функцияни қуйидагича ўзгартиради:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \varepsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

бунда йиғинди системанинг барча моддий нуқталари бўйича олинади. ε нинг ихтиёрийлигидан $\delta L = 0$ шарт

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \tag{7.1}$$

шартга эквивалентдир. (5.2) Лагранж тенгламаларига кўра

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Шундай қилиб, ёпиқ механикавий система ҳаракатида

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \tag{7.2}$$

вектор катталик ўзгармай қолади деган хулосага келамиз. **P** вектор системанинг *импульси*[1]) дейилади.(5.1) Лагранж функциясини дифференциаллаб, импульс ва нуқталар тезликлари ўртасида қуйидаги ифода мавжудлигини топамиз:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \tag{7.3}$$

Импульснинг аддитивлиги равшан. Унинг устига, энергиядан фарқли ўлароқ, система импульси зарралар ўртасидаги ўзаро таъсирни ҳисобга олиш ёки олмасликдан қатъи назар алоҳида зарралар импульсларининг йиғиндисига тенг:

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a.$$

Импульс вектори учала компонентларининг сақланиш қонуни фақат ташқи майдон йўқлигида ўринлидир. Лекин импульснинг айрим компонентлари майдон бўлган ҳолларда ҳам сақланиши мумкин. Бунинг учун потенциал энергия декарт координаталаридан бирортасига боғлиқ бўлмаслиги лозим. Мос координата ўқи бўйлаб кўчиришда системанинг механикавий хоссалари ўзгармаганидан имульснинг шу ўққа проекцияси сақланади Масалан, z ўқи бўйлаб йўналган бир жинсли майдонда импульснинг x ва y ўқи бўйича компонентлари сақланади.

Дастлабки (7.1) тенглик оддий физикавий маънога эга. $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ ҳосила a-заррага таъсир этувчи $\mathbf{F}_a$ кучни ифодалайди. Шундай қилиб, (7.1) тенглик ёпиқ системанинг барча зарраларига таъсир қилувчи кучлар йиғиндиси нолга тенглигини билдиради:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \tag{7.4}$$

Хусусий ҳолда, иккита моддий нуқтадан иборат системада $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, яъни икки зарра ўртасидаги ўзаро таъсир этадиган кучлар катталик жиҳатдан тенг бўлиб, бир-бирларига қарама-қарши йўналган. Бу хулоса *таъсир ва акс таъсирнинг тенглик қонуни* номи билан маълум.

---

[1]) Ҳаракат миқдори деб ҳам юритилган.

Агар ҳаракат q_i умумлашган координаталар билан ифодаланса, у ҳолда Лагранж функциясининг умумлашган тезликлар бўйича хусусий ҳосилалари

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.5}$$

умумлашган импульслар дейилади,

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

ҳосилалар эса *умумлашган кучлар* дейилади. Шундай ифодалар учун Лагранж тенгламалари

$$\dot{p}_i = F_i \tag{7.7}$$

кўринишга эга.

Умумлашган импульслар декарт координаталарида $\mathbf{p}_a$ векторларнинг компонентларига мос келади. Умумий ҳолда p_i катталиклар $\dot{q}_i$ умумлашган тезликларнинг чизиқли бир жинсли функциялари бўлиб, улар асло массанинг тезликка кўпайтмаларидан иборат эмас.

8- §. Инерция маркази

Ёпиқ механикавий системанинг импульси турли (инерциал) саноқ системаларига нисбатан турлича қийматга эга бўлади. Агар K' саноқ системаси K саноқ системасига нисбатан $\mathbf{V}$ тезликда ҳаракатланса, у ҳолда зарраларнинг шу системалардаги тезликлари $\mathbf{v}'_a$ ва $\mathbf{v}_a$ лар $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ муносабат орқали боғланади. Шунинг учун импульснинг шу системалардаги $\mathbf{P}$ ва $\mathbf{P}'$ қийматлари орасидаги боғланиш

$$\mathbf{P} = \sum_b m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a$$

ёки

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a \tag{8.1}$$

формула ёрдамида берилади. Хусусан, ҳар доим шундай K' саноқ системасини топиш мумкинки, унда тўла импульс нолга айланади (8.1) да $\mathbf{P}' = 0$ деб, қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8.2}$$

Агар механикавий системанинг тўла импульси нолга тенг бўлса, у ҳолда система мазкур саноқ системасига нисбатан тинч турибди дейилади. Бу ҳол алоҳида олинган моддий нуқтанинг тинч ҳолати тушунчасини табиий умумлаштирилишидир. Мос равишда (8.2) формуладаги тезлик механикавий системанинг импульси нолдан фарқли бўлган „яхлит ҳаракат“ тезлиги маъносини олади. Шундай қилиб, импульснинг сақланиш қонуни механикавий системанинг бир бутун ҳолдаги тинч ҳолати ва тезлиги тушунчаларини ифодалашга имкон берар экан.

(8.2) формула бутун системанинг $\mathbf{P}$ импульси ва $\mathbf{V}$ тезлиги ўртасидаги боғланиш, массаси системадаги барча зарралар массаларининг йиғиндисига тенг бўлган $\left(\mu = \sum m_a\right)$ битта моддий нуқтанинг импульси ва тезлиги ўртасидаги боғланиш каби бўлишини кўрсатади. Буни *массанинг аддитивлиги* ҳақида айтилган фикрнинг тасдиғи деса бўлади.

(8.2) формуланинг ўнг томонини

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a} \tag{8.3}$$

ифодадан вақт бўйича олинган тўла ҳосила деб ёзиш мумкин. Яхлит ҳолдаги система тезлигини радиус-вектори (8.3) формула орқали бериладиган нуқтанинг фазода кўчиш тезлиги дейиш мумкин. Бундай нуқта системанинг *инерция маркази* дейилади.

Ёпиқ система импульсининг сақланиш қонунини шундай таърифлаш мумкинки, унга кўра бундай система инерция маркази тўғри чизиқли ва текис ҳаракатда бўлади. Шундай таърифланган бу қонун 3- § да ифодаланган инерция қонунининг „инерция маркази“ ўзи билан мос тушган битта эркин моддий нуқта учун умумлаштирилишидир.

Ёпиқ системанинг механикавий хоссаларини ўрганишда шундай саноқ системасидан фойдаланиш керакки, унда инерция маркази тинч ҳолатда бўлсин. Шундай қилинганда системанинг яхлит ҳолдаги текис ва тўғри чизиқли ҳаракати алоҳида текширилмайди.

Бир бутунлигича тинч ҳолатда турган механикавий системанинг энергияси, одатда, унинг *ички энергияси* — $E_{\text{ич.}}$ дейилади. Бу энергия системадаги зарралар нисбий ҳаракатининг кинетик энергияси ва ўзаро таъсирларининг потенциал энергиясидан иборат. Бир бутун ҳолда $\mathbf{V}$ тезликда ҳаракатланаётган системанинг тўла энергияси эса қуйидагича кўрсатилиши мумкин:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{ич.}} \tag{8.4}$$

Бу формула ўз ҳолича аён бўлса ҳам, уни келтириб чиқарайлик. Механикавий системанинг иккита K ва K' саноқ системасидаги E ва E' энергиялари қуйидагича боғланган:

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\mathbf{v}_a' + \mathbf{V})^2 + U =$$

$$= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V}\sum_a m_a \mathbf{V}_a' + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

ёки

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \tag{8.5}$$

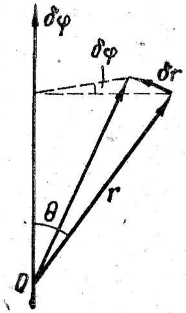
Бир саноқ системасидан иккинчисига ўтилганда импульс алмаштириш қонуни (8.1) формула орқали берилгани каби энергия учун бу қонун (8.5) билан белгиланади. Агар K' системада инерция маркази тинч ҳолда бўлса, $\mathbf{P}' = 0$, $E' = E_{\text{ич.}}$ бўлади ва биз (8.4) формулага эга бўламиз.

9- §. Импульс моменти

Фазо изотропиясига боғлиқ ҳолда вужудга келадиган сақланиш қонунини кўриб чиқайлик.

Мазкур изотропия ёпиқ системанинг механикавий хоссалари система яхлит ҳолда фазода исталганча бурилганда ўзгармаслигини кўрсатади. Шунга кўра системанинг чексиз кичик бурилишини кўрамиз ва бунда унинг Лагранж функцияси ўзгармаслигини шарт қилиб қўямиз.

Абсолют қиймати бурилиш бурчаги $\delta\varphi$ га тенг, йўналиши эса бурилиш ўқига мос тушган чексиз кичик бурилиш вектори $\delta\varphi$ ни ки-



3-расм.

ритамиз (бурилиш йўналиши шундайки, у $\delta\varphi$ йўналишига нисбатан винт қоидасига бўйсунади).

Аввало, айланиш ўқида жойлашган умумий координаталар бошидан бурилувчи система моддий нуқталаридан биронтасига ўтказилган радиус-векторнинг мазкур бурилишдаги ортишини аниқлайлик. Радиус-вектор учининг чизиқли кўчиши бурчак билан қуйидагича боғланган:

$$|\delta\mathbf{r}| = r\sin\theta\cdot\delta\varphi$$

(3- расм). $\delta\mathbf{r}$ векторнинг йўналиши эса $\mathbf{r}$ ва $\delta\varphi$ дан ўтувчи текисликка перпендикуляр. Шунинг учун

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi\cdot\mathbf{r}]. \tag{9.1}$$

Системанинг бурилишида радиус-векторларнинг йўналишигина эмас, балки барча зарралар тезликларининг йўналиши ҳам ўзгаради. Шу билан бирга барча векторлар ўзгариши бир хил қонун бўйича бўлади. Шунинг учун тезликнинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ортиши

$$\delta\mathbf{v} = [\delta\varphi\cdot\mathbf{v}]. \tag{9.2}$$

Бу ифодаларни Лагранж функциясининг буришда ўзгармаслик шарти

$$\delta L = \sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}_a}\delta\mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}_a}\ \delta\mathbf{v}_a\right) = 0$$

га қўйсак ва

$$\partial L/\partial\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a,\ \partial L/\partial\mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{p}}_a,$$

ўзгариш киритсак,

$$\sum_a\left(\dot{\mathbf{p}}_a[\delta\varphi\cdot\mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a[\delta\varphi\cdot\mathbf{v}_a]\right) = 0,$$

экани маълум бўлади. Ва ниҳоят, кўпайтувчиларни циклик ўрин алмаштириб ва $\delta\varphi$ ни йиғинди белгисидан ташқарига чиқариб, қуйидагини топамиз:

$$\delta\varphi\sum_a\left([\mathbf{r}_a\dot{\mathbf{p}}_a) + [\mathbf{v}_a\mathbf{p}_a]\right) = \delta\varphi\frac{d}{dt}\sum_a[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = 0.$$

$\delta\varphi$ нинг ихтиёрийлиги сабабли

$$\frac{d}{dt}\sum[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = 0,$$

яъни ёпиқ система ҳаракатида

$$M = \sum_a[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] \tag{9.3}$$

вектор катталик сақланади, деган хулосага келамиз. Бу катталик системанинг *импульс моменти* (ёки содда қилиб, *моменти*) дейилади[1]). Импульс моментининг аддитивлиги равшан, бунинг устига худди импульсга ўхшаб, бу катталик зарралар ўртасидаги ўзаро таъсирнинг бор ёки йўқлигига боғлиқ эмас.

Ҳаракатнинг аддитив интеграллари ана шулардан иборат. Шундай қилиб, исталган ёпиқ система фақат еттита интегралга эга: Булар импульс ва момент векторларининг учтадан компонентлари ҳамда энергиядир.

Моментни аниқлашда зарраларнинг радиус-векторлари иштирок этганлиги сабабли, унинг қиймати, умуман олганда, координаталар бошини танлашга боғлиқ. Бир нуқтанинг бир-биридан a масофада жойлашган иккита координаталар бошига нисбатан $\mathbf{r}_a$ ва $\mathbf{r}'_a$ радиус-векторлари $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ боғланишга эга. Шунинг учун

$$\mathbf{M} = \sum_a\ [\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = \sum_a[\mathbf{r}'_a\mathbf{p}_a] + [\mathbf{a}\ \sum_a\mathbf{p}_a]$$

ёки

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{aP}]. \tag{9.4}$$

Бу формулага кўра, агар система яхлит ҳолда тинч турсагина (яъни $\mathbf{P} = 0$), унинг моменти координаталар бошини танланишига боғлиқ бўлмайди. Момент қийматидаги бу ноаниқлик моментнинг сақланиш қонунига таъсир этмайди, албатта, чунки ёпиқ системада импульс ҳам сақланади.

Импульс моментининг иккинчиси биринчисига нисбатан $\mathbf{V}$ тезликда ҳаракатланувчи иккита K ва K' инерциал саноқ системасидаги қийматларини ўзаро боғлайдиган формулани келтириб чиқарайлик. K ва K' системалардаги координаталар боши берилган вақт моментида устма-уст тушган, деб ҳисоблайлик. У ҳолда зарраларнинг радиус-векторлари иккала системада ҳам бир хил, тезликлари эса $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ кўринишда боғланган. Шунинг учун

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a[\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a] = \sum_a m_a\,[\mathbf{r}_a\mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a[\mathbf{r}_a\mathbf{V}].$$

---

[1]) Айланма момент ёки бурчак момент деб ҳам аташ мумкин.

Тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи йиғинди $\mathbf{M}$ моментнинг K' системадаги қийматини билдиради: иккинчи йиғиндига (8.3) га кўра инерция марказининг радиус-векторини киритиб,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu[\mathbf{RV}] \qquad (9.5)$$

ни оламиз. Бу формула бир саноқ системасидан иккинчисига ўтилгандаги импульс моментини алмаштириш қонунини ифодалайди. Импульс ва энергия учун худди шундай қонунлар (8.1) ва (8.5) формулалар орқали берилган эди.

Агар берилган механикавий система бир бутунлигича K' саноқ системасида тинч турса, у ҳолда $\mathbf{V}$—механикавий система инерция марказининг тезлигини, $\mu\mathbf{V}$ эса унинг $\mathbf{P}$ (K га нисбатан) тўла импульсини беради. У ҳолда

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{RP}]. \qquad (9.6)$$

Бошқача қилиб айтганда, механикавий системанинг $\mathbf{M}$ импульс моменти шу система тинч турган саноқ системасига нисбатан „хусусий моменти" ва яхлит ҳолдаги ҳаракатига тегишли бўлган $[\mathbf{RP}]$ моментдан иборат.

Моментнинг (ихтиёрий координата бошига нисбатан) учала компонентининг сақланиш қонуни фақат ёпиқ системаларда ўринли бўлса-да, баъзи чегараланган ҳолларда бу қонун ташқи майдонда жойлашган системаларга ҳам тўғри келиши мумкин. Юқорида келтирилган хулосага кўра, агар берилган майдон бирор ўққа нисбатан симметрик бўлса, моментнинг шу ўққа нисбатан проекцияси ҳар доим сақланади. Шунинг учун шу ўқ атрофида исталганча айланиш системанинг механикавий хоссаларини ўзгартирмайди; бу ҳолда мазкур ўқда ётган қандайдир нуқтага (координаталар бошига) нисбатан албатта момент аниқланган бўлиши шарт.

Марказий симметрик майдон ана шундай ҳоллардан энг муҳими ҳисобланади. Бу майдондаги потенциал энергия фақат фазодаги қандайдир маълум нуқта (марказ) гача бўлган масофага боғлиқ. Равшанки, бундай майдондаги ҳаракатда моментнинг марказдан ўтувчи исталган ўққа проекцияси сақланади. Бошқача қилиб айтганда, фазонинг исталган нуқтаси эмас, балки майдон марказига нисбатан аниқланган тўла момент вектори $\mathbf{M}$ ўзгармайди.

Яна бир мисол: z ўқи бўйича бир жинсли бўлган майдон. Бу майдонда моментнинг $\mathbf{M}_z$ проекцияси ўзгармайди, координаталар боши эса ихтиёрий равишда танланиши мумкин. Моментнинг қандайдир ўққа (z ўқи дейлик) проекцияси Лагранж функциясини

$$\mathbf{M}_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \qquad (9.7)$$

формулага кўра дифференциаллаб топиш мумкин. (9.7) даги φ координата z ўқи атрофида бурилиш бурчагини кўрсатади. Бу фикрнинг тўғрилиги илгари кўриб ўтилган момент сақланиш қонунининг характеридан ҳам билинади. Қатъий ишонч ҳосил қилиш учун тўғридан-тўғри ҳисоблаб кўриш ҳам мумкин. r, φ, z цилиндрик координаталарда ($x_a = r_a \cos \varphi_a$, $y_a = r_a \sin \varphi_a$ га кўра)

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \qquad (9.8)$$

Иккинчи томондан, Лагранж функцияси бу ўзгарувчиларда қуйидагича ёзилади:

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U.$$

Бу қийматни (9.7) га қўйсак, яна (9.8) ифода келиб чиқади.

Масала

Қуйидаги майдонларда ҳаракат вақтида $\mathbf{P}$ импульс ва M моментнинг қайси компонентлари сақланади:

а) чексиз бир жинсли текислик майдони.

Жавоб: P_x, P_y, M_z (чексиз текислик—xy текислиги).

б) чексиз бир жинсли цилиндр майдони.

Жавоб: M_z, P_z (цилиндр ўқи—z ўқи).

в) чексиз бир жинсли призма майдони.

Жавоб: P_z (призма қирралари z ўқига параллел).

г) икки нуқта майдони.

Жавоб: M_z (нуқталар z ўқида ётади).

д) чексиз бир жинсли яримтекислик майдони.

Жавоб: P_y (чексиз яримтекислик—xy текислигининг y ўқи билан чегараланган бўлаги).

е) бир жинсли конус майдони.

Жавоб: M_z (конус ўқи—z ўқи)

III боб

ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

10-§. Бир ўлчамли ҳаракат

Бир эркинлик даражасига эга системанинг ҳаракати бир ўлчамли ҳаракат дейилади. Ўзгармас ташқи шароитда жойлашган бундай системанинг Лагранж функцияси қуйидаги умумий кўринишга эга:

$$L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - U(q), \qquad (10.1)$$

бу ерда $a(q)$ — умумлашган координата q нинг бирор функцияси. Хусусан, агар q декарт координатаси (масалан, x) бўлса,

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \qquad (10.2)$$

Шу Лагранж функцияларига тегишли ҳаракат тенгламалари умумий кўринишда интегралланади. Бунда ҳаракат тенгламасининг ўзини ёзиб ўтирмай, бирданига унинг биринчи интеграли—энергия сақланиши қонунини ифодаловчи тенгламадан фойдаланиш мумкин. Масалан, (10.2) Лагранж функцияси учун

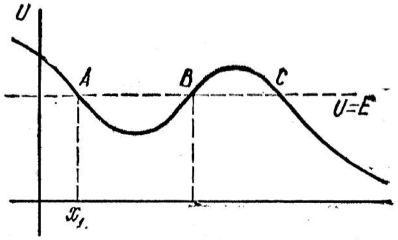
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Бу биринчи тартибли дифференциал тенглама ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан интегралланади:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

бундан

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const}. \qquad (10.3)$$



4-расм.

Ҳаракат тенгламасини ечишда E тўла энергия ва интеграллаш доимийси (const) иккита ихтиёрий доимийнинг вазифасини бажаради.

Кинетик энергия қатъий мусбат катталик бўлганидан ҳаракат вақтида тўла энергия доимо потенциал энергиядан катта бўлади, яъни ҳаракат фазонинг фақат $U(x) < E$ бўлган соҳасида юз беради.

Масалан, фараз қилайлик, $U(x)$ муносабат 4-расмда тасвирланган кўринишга эга. Шу графикнинг ўзида тўла энергиянинг берилган қийматига мос келувчи горизонтал тўғри чизиқ ўтказиб, мумкин бўлган ҳаракат соҳаларини аниқлаймиз. 4-расмда тасвирланган ҳолда ҳаракат фақатгина AB соҳада ёки C дан ўнг томондаги соҳада юз бериши мумкин.

Потенциал энергия тўла энергияга тенг

$$U(x) = E \qquad (10.4)$$

бўлган нуқталар ҳаракат чегарасини белгилайдилар. Улар *тўхташ нуқталари* дейилади, чунки шу нуқталарда тезлик нолга айланади. Агар ҳаракат соҳаси иккита шундай нуқта билан чегараланган бўлса, у ҳолда ҳаракат фазонинг чегараланган соҳасида рўй беради; уни *финит* ҳаракат дейишади. Агар ҳаракат соҳаси чегараланмаган ёки бир тарафдангина чегараланган бўлса, ҳаракат *инфинит* бўлиб, зарра чексизликка кетади.

Бир ўлчамли финит ҳаракат тебранмадир — зарра икки чегара (4-расмдаги AB *потенциал чуқурликда* x_1 ва x_2 нуқта) ўртасида даврий такрорланувчи ҳаракат қилади. Бунда қайтувчанликнинг умумий хоссасига кўра x_1 дан x_2 га томон ҳаракат вақти тескари (x_2 дан x_1 га) ҳаракат вақтига тенг. Шунинг учун T тебраниш даври, яъни нуқта x_1 дан x_2 га бориб, орқага қайтишига кетган вақт $x_1 x_2$ кесмани ўтиш вақтидан икки марта катта бўлади ёки (10.3) га кўра

$$T(E)=\sqrt{2m}\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}},\qquad(10.5)$$

шу билан бирга x_1 ва x_2 чегаралар E нинг берилган қийматидаги (10.4) тенгламанинг илдизларидир. Бу формула ҳаракат даврини зарранинг тўла энергиясига боғлиқ ҳолда аниқлайди.

11- §. Келтирилган масса

Фақат иккита ўзаро таъсирлашувчи заррадан иборат система ҳаракати ҳақидаги жуда муҳим масала *(икки жисм масаласи)* умумий кўринишдаги тўла ечимга эга.

Шу масалани ечишда дастлабки қадам сифатида система ҳаракатини унинг инерция марказининг ҳаракати ва нуқталарнинг шу марказга нисбатан ҳаракатига ажратамиз. Бу масалани анча соддалаштиради.

Икки зарра ўзаро таъсир потенциал энергияси фақат улар орасидаги масофага, яъни радиус-векторлари фарқининг абсолют қийматига боғлиқ. Шунинг учун бундай системанинг Лагранж функцияси

$$L=\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2}-U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|).\qquad(11.1)$$

Иккала нуқтанинг ўзаро масофа вектори

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$$

ни киритсак ва координата бошини инерция марказига жойлаштирсак,

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0$$

бўлади. Сўнгги икки тенгламага кўра

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r},\quad \mathbf{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}.\qquad(11.2)$$

Бу ифодаларни (11.1) га қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$L=\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}-U(r),\qquad(11.3)$$

бу ерда

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\qquad(11.4)$$

белгилаш қабул этилди; m катталик *келтирилган масса* дейилади. (11.3) функция шаклан қўзғалмас координата бошига нисбатан симметрик бўлган ташқи $U(\mathbf{r})$ майдонда ҳаракатланувчи m массали битта моддий нуқтанинг Лагранж функциясига мос келади.

Шундай қилиб, ўзаро таъсирлашувчи икки моддий нуқта ҳаракати ҳақидаги масала бир нуқтанинг берилган ташқи $U(r)$ майдондаги ҳаракати масаласини ечишга келтирилади. Бу масаланинг $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ ечимига кўра m_1 ва m_2 зарралар ҳар бирининг $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(t)$ ва $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(t)$ траекториялари (уларнинг умумий инерция марказларига нисбатан) (11.2) формула бўйича топилади.

12- §. Марказий майдондаги ҳаракат

Икки жисм ҳаракати тўғрисидаги масалани биргина жисм ҳаракати масаласига келтириш билан биз энди зарранинг ташқи майдондаги ҳаракатини аниқлашимиз керак. Зарранинг потенциал энергияси олинган ташқи майдонда фақат маълум қўзғалмас нуқтагача бўлган r масофага боғлиқ; бундай майдон *марказий майдон* дейилади. Заррага таъсир этувчи

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial\mathbf{r}}=-\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

куч ҳам абсолют қиймат жиҳатидан фақат r га боғлиқ ва ҳар бир нуқтада радиус-вектор бўйлаб йўналган.

9- § да илгари кўрсатилганидек, марказий майдондаги ҳаракатда системанинг майдон марказига нисбатан моменти ўзгармайди, яъни битта зарра учун

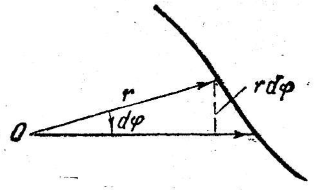
$$\mathbf{M}=[\mathbf{rp}].$$

$\mathbf{M}$ ва $\mathbf{r}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганлигидан $\mathbf{M}$ нинг ўзгармаслиги зарра ҳаракатида унинг радиус-вектори ҳар доим $\mathbf{M}$ га перпендикуляр текисликда қолишини англатади.

Шундай қилиб, зарранинг марказий майдондаги ҳаракат траекторияси бутунлай битта текисликда ётади. Унга r, φ қутб координаталарини киритиб, Лагранж функциясини

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r)\qquad(12.1)$$

кўринишда ёзамиз.



5-расм.

Бу функцияга φ координата ошкор кирмаган. Лагранж функциясига ошкор кирмайдиган ҳар қандай умумлашган q_i координатани *циклик координата* дейилади. Лагранж тенгламасига кўра бундай координата учун

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

яъни унга тегишли $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ импульс ҳаракат интеграли бўлади. Бу ҳол циклик координаталар мавжудлигида ҳаракат тенгламаларини интеграллаш масаласини кескин равишда соддалаштиради.

Мазкур ҳолда умумлашган

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

импульс $M_z = M$ момент билан мос тушади [(9.8) га қаранг] ва биз илгари маълум бўлган моментнинг сақланиш қонуни

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \qquad (12.2)$$

га қайтамиз. Бу қонун марказий майдондаги битта зарранинг ясси ҳаракатига содда геометрик маъно беради. $\frac{1}{2} r \cdot rd\varphi$ катталик иккита чексиз яқин радиус-вектор ва траекториянинг ёй элементи билан чегараланган секторнинг юзини кўрсатади (5-расм). Уни df деб белгилаб, зарра моментини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$M = 2m\dot{f}, \qquad (12.3)$$

бу ерда $\dot{f}$ ҳосилани *секториал тезлик* дейилади. Шунинг учун моментнинг сақланиши секториал тезликнинг доимийлигини—ҳаракатланувчи нуқтанинг радиус-вектори тенг вақт оралиқларида тенг юзалар чизишини (*Кеплернинг иккинчи қонуни*[1]) билдиради.

Марказий майдондаги зарра ҳаракати масаласининг тўла ечимини ҳаракат тенгламаларини ёзиб ўтирмасдан, энергия ва моментнинг сақланиш қонунига кўра осонгина аниқлаш мумкин.

$\dot{\varphi}$ ни (12.2) даги M орқали ёзиб, энергия ифодасига қўйсак,

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(\mathbf{r}) \qquad (12.4)$$

ҳосил бўлади. Бу ердан

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (12.5)$$

ёки ўзгарувчиларни ажратсак ва интегралласак:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const}. \qquad (12.6)$$

(12.2) ни

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}\,dt$$

кўринишда ёзиб, бу ерга (12.5) дан dt ни қўйиб ва интеграллаб,

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const} \qquad (12.7)$$

эканини топамиз.

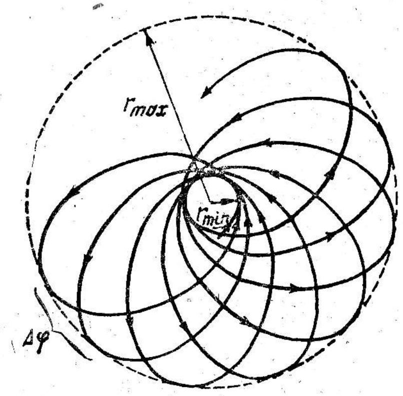
(12.6) ва (12.7) формулалар қўйилган масаланинг умумий кўринишдаги ечимларидир. Булардан кейингиси r ва φ ўртасидаги боғланишни, яъни траектория тенгламасини аниқлайди. (12.6) формуладан эса ҳаракатланаётган нуқта ва марказ орасидаги r масофани вақтнинг ошкормас функцияси сифатида топилади. Вақт ўтиши билан φ бурчак монотон ҳолда ўзгаради—(12.2) га кўра $\dot{\varphi}$ ҳеч қачон ишорасини ўзгартирмайди.

(12.4) ифоданинг кўрсатишича, ҳаракатнинг радиал қисмини

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (12.8)$$

---

[1] Марказий майдонда ҳаракатланувчи зарра учун моментнинг сақланиш қонунини баъзида *юзалар интеграли* дейилади.



6-расм.

„эффектив“ потенциал энергияли майдондаги бир ўлчовли ҳаракат деб қараш мумкин. $\frac{M^2}{2mr^2}$ катталик *марказдан қочма энергия* дейилади.

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E \quad (12.9)$$

ни қаноатлантирадиган r нинг қийматлари марказдан ҳисобланган масофа бўйича ҳаракат соҳасининг чегарасини аниқлайдилар. (12.9) тенглик бажарилганда, $\dot{r}$ радиал тезлик нолга айланади. Бу зарра тўхтади (ҳақиқий бир ўлчовли ҳаракатдагидек) деган сўз эмас, чунки $\dot{\varphi}$ бурчак тезлик нолга айланмайди. $\dot{r}=0$ тенглик траекториянинг *бурилиш нуқтасини* англатади. Бу нуқтада $r(t)$ функция ортишдан камайишга ўтади ёки аксинча.

Агар r нинг мумкин бўлган ўзгариш соҳаси фақатгина $r \geqslant r_{\min}$ шарт билан чегараланган бўлса, у ҳолда зарра ҳаракати инфинитдир—унинг траекторияси чексизликдан келади ва чексизликка кетади. Агар r нинг ўзгариш соҳаси иккита $r_{\min}$ ва $r_{\max}$ чегарага эга бўлса, у ҳолда ҳаракат финит бўлиб, зарра траекторияси бутунлай $r=r_{\max}$ ва $r=r_{\min}$ айланалар билан чегараланган ҳалқа ичида ётади. Лекин бу ҳол траектория албатта ёпиқ эгри чизиқ бўлишлигини англатмайди. r нинг қиймати $r_{\max}$ дан $r_{\min}$ гача ва яна $r_{\max}$ гача ўзгариши вақтида радиус-вектор (12.7) га кўра

$$\Delta\varphi=2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}} \quad (12.10)$$

бурчакка бурилади.

Траекториянинг ёпиқ бўлиш шарти шундан иборатки бу бурчак 2π нинг рационал қисмига тенг бўлиши, яъни $\Delta\varphi=2\pi\frac{n_1}{n_2}$ (бу ерда n_1 ва n_2—бутун сонлар) кўринишда бўлиши лозим. Шунинг учун вақт даврининг n_2 та такрорланишида нуқтанинг радиус-вектори n_1 та тўла айланиб, ўзининг дастлабки қийматига қайтади, яъни траектория ёпилади.

Лекин бундай ҳоллар камдан-кам учрайди ва $U(r)$ нинг ихтиёрий кўринишида $\Delta\varphi$ бурчак 2π нинг рационал қисми бўлмайди. Шу сабабли умумий ҳолда финит ҳаракат траекторияси ёпиқ бўлмай, чексиз марта минимал ва максимал масофадан ўтади (масалан, 6-расмдагидек) ва чексиз вақт давомида икки чегаравий айланалар ўртасидаги ҳалқанинг ҳаммасини тўлдиради.

Финит ҳаракат траекториясининг ҳаммаси ёпиқ бўлган марказий майдоннинг фақат иккита хили бор. Бу зарранинг потенциал энергияси $\frac{1}{r}$ ёки r^2 га пропорционал бўлган майдонлардир. Шулардан бири кейинги параграфда кўрилган, иккинчиси эса фазовий осцилляторга тегишли (19-§ даги 3-масалага қаранг).

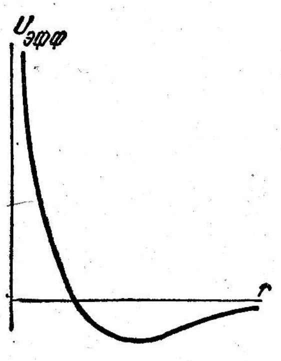
13-§. Кеплер масаласи

Потенциал энергияси r га, кучлар эса r^2 га тескари пропорционал бўлган майдон марказий майдонлар ичида энг муҳими ҳисобланади. Ньютоннинг тортишиш майдонлари ва кулон электростатик майдонлари шулар жумласидандир; булардан биринчиси, маълумки, тортишиш характерига эга, иккинчиси эса тортишиш майдони ёки итарилиш майдони бўлиши мумкин.

Аввало тортишиш майдонини кўриб чиқайлик. Бунда

$$U=-\frac{\alpha}{r} \quad (13.1)$$

бўлсин (α — мусбат доимий). „Эффектив“ потенциал энергия



7-расм.

$$U_{эфф}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2} \qquad (13.2)$$

нинг графиги 7-расмда келтирилган тасвирга эга $r\to 0$ да $y+\infty$ га айланади, $r\to\infty$ да эса манфий қиймат томонидан нолга интилади; $r=\frac{M^2}{\alpha m}$ бўлганда у минимумга эга:

$$(U_{эфф})_{\min}=-\frac{\alpha^2 m}{2M^2}\,. \qquad (13.3)$$

Шу графикдан кўриниб турибдики, $E\geqslant 0$ бўлганда, зарра ҳаракати инфинит, $E<0$ да финит бўлади.

Траектория шакли умумий формула (12.7) ёрдамида аниқланади. (12.7) га $U=-\alpha/r$ ни қўйиб ва элементар интеграллаш ўтказиб қуйидагини топамиз:

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{M}{r}-\frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}+\text{const.}$$

φ бурчак учун $\text{const}=0$ шартга мос саноқ бошини танлаб ва

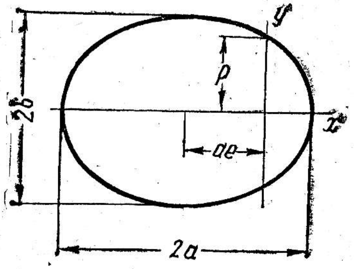
$$p=\frac{M^2}{m\alpha},\quad e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \qquad (13.4)$$

белгилаш ўтказиб, траектория формуласини

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi \qquad (13.5)$$

кўринишда қайта ёзамиз. Бу фокуси координата бошида бўлган конус кесими тенгламасидир; p ва e — мос ҳолда орбитанинг *параметри* ва *эксцентриситети*. (15.5) дан маълум бўлишича, биз φ нинг саноқ бошини шундай танлабмизки, $\varphi=0$ бўлган нуқта траекториянинг марказга энг яқин нуқтаси экан.

(13.1) қонун бўйича ўзаро таъсирлашувчи икки жисмнинг эквивалент масаласида ҳар бир зарра орбитаси ҳам фокуси умумий инерция марказида жойлашган конус кесимдан иборатдир.



8-расм.

(13.4) дан кўринишича, $E<0$ бўлганда $e<1$ экан, яъни орбита эллипс бўлиб (8-расм), ҳаракат параграф бошида айтилганга кўра финитдир. Аналитик геометриянинг маълум формулаларига кўра эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари қуйидагича:

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|},\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}\,. \qquad (13.6)$$

Энергиянинг мумкин бўлган энг кичик қиймати (13.3) га мос келади, бунда $e=0$, яъни эллипс айлана кўринишини олади. Эллипснинг катта ярим ўқи фақат зарранинг энергиясига боғлиқ (моментга эмас). Майдон марказигача (эллипс фокусигача) бўлган энг кичик ва энг катта масофа

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e),\quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e) \qquad (13.7)$$

дан иборат. Бу ифодаларни [(13.6) ва (13.4) даги a ва e билан бевосита $U_{эфф}(r)=E$ тенгламанинг илдизи сифатида топиш мумкин эди, албатта.

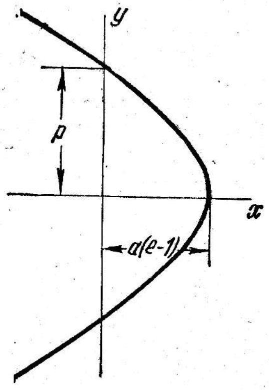
Эллиптик орбита бўйлаб айланиш вақти, яъни ҳаракат даври T ни „юзалар интеграли“ (12.3) шаклидаги момент сақланиш қонуни ёрдамида аниқлаш қулай. (12.3) ни вақт бўйича нолдан T гача интеграллаб

$$2mf=TM$$

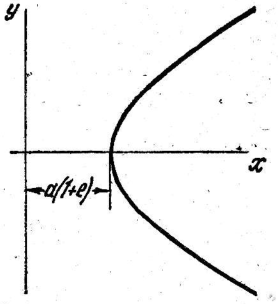
ни топамиз, бу ерда f — орбита юзаси. Эллипс учун $f=\pi ab$ ва (13.6) формула ёрдамида

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=$$
$$=\pi a\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \qquad (13.8)$$

ни аниқлаймиз. Давр фақат зарранинг энергиясига боғлиқ. Бунда даврнинг квадрати орбитанинг чизиқли ўлчамлари кубига пропорционал (*Кеплернинг учинчи қонуни*).



9-расм.



10 расм.

$E \geqslant 0$ да ҳаракат инфинит. Агар $E < 0$ бўлса, у ҳолда e эксцентриситет 1 дан катта, яъни траектория майдон маркази (фокус)ни айланиб ўтувчи гиперболадан иборат бўлади (9 расм). Марказгача бўлган энг яқин масофа

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \quad (13.9)$$

бу ерда

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

— гиперболанинг „ярим ўқи“.

$E = 0$ бўлган ҳолда эса $e=1$, яъни зарра минимал масофаси $r_{\min} = -\frac{p}{2}$ бўлган парабола бўйлаб ҳаракатланади. Бу ҳол зарра ўз ҳаракатини чексизликдаги тинч ҳолатидан бошлаганида юзага келади.

Энергияси

$$U = \frac{\alpha}{r} \qquad (13.10)$$

бўлган итарилиш майдонидаги ҳаракатга мурожаат этайлик ($\alpha > 0$). Бу ҳолда r нолдан ∞ гача ўзгарганда эффектив потенциал энергия

$$U_{\text{эфф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$+\infty$ дан нолгача монотон камаяди. Зарра энергияси фақат мусбат бўлиши мумкин ва ҳаракат ҳар доим инфинитдир. Бу ҳол учун барча ҳисоблашлар юқоридагиларга жуда ўхшаш. Траектория гипербола (ёки $E = 0$ да парабола) дан иборат:

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \qquad (13.11)$$

(p ва e (13.4) орқали аниқланади). У, 10-расмда кўрсатилганидек, майдон маркази ёнидан ўтади. Марказгача бўлган энг кичик масофа

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \qquad (13.12)$$

IV боб

ЗАРРАЛАР ТЎҚНАШУВИ

14-§. Зарраларнинг эластик тўқнашуви

Кўпгина ҳолларда импульс ва энергиянинг сақланиш қонунлари турли механикавий процесслар хоссалари ҳақида қатор муҳим хулосалар чиқаришга имкон беради лар. Бу хоссалар процессда қатнашувчи зарралар ўртасидаги ўзаро таъсирнинг конкрет турига мутлақо боғлиқ эмаслиги айниқса муҳимдир.

Икки зарранинг *эластик* тўқнашувини, яъни зарраларнинг ички ҳолатини ўзгартирмайдиган тўқнашувни кўрайлик. Шу хусусиятга кўра, энергия сақланиш қонунини эластик тўқнашишга қўллаганда, зарранинг ички энергиясини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Зарралардан бири (m_2 зарра бўла қолсин) тўқнашишгача тинч турган, иккинчиси (m_1) эса $\mathbf{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган саноқ системасини *лаборатория* саноқ системаси дейилади. Тўқнашиш иккала зарранинг *инерция маркази* (*инерция маркази системаси*) тинч турган бошқа саноқ системасида анча содда кўринишга эга: бу системадаги катталиклар қийматини „0“ индекс билан берамиз. Инерция маркази системасидаги зарралар тезлиги лаборатория системасидаги $\mathbf{v}$ тезлик билан

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$$

муносабат орқали боғланган [(11.2) билан солиштиринг].

Импульс сақланиш қонунига кўра иккала зарра импульслари тўқнашувдан сўнг катталик жиҳатдан тенг ва йўналишлари қарама-қарши қолади, энергия сақланиш қонунига кўра эса уларнинг абсолют катталиклари ҳам ўзгармай қолади. Шундай қилиб, инерция маркази системасида тўқнашиш натижаси шундан иборатки, иккала зарра тезликлари йўналиш жиҳатдан қарама-қарши ва катталиги ўзгармаган ҳолда буриладилар. Агар m_1 зарра тезлигининг тўқнашишдан кейинги йўналиш бирлик векторини $\mathbf{n}_0$ орқали белгиланса, у ҳолда тўқнашишдан кейинги иккала зарра тезликлари (штрихли ҳарф) қуйидагича бўлади:

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0. \qquad (14.1)$$

Лаборатория саноқ системасига қайтиш учун бу ифодаларга инерция марказининг **V** тезлигини қўшиш лозим. Шундай қилиб, зарраларнинг тўқнашишдан кейинги лаборатория системасидаги тезликлари қуйидагича:

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{V},$$

$$\mathbf{v}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{V}. \qquad (14.2)$$

Фақат сақланиш қонунларига асосланиб, тўқнашиш ҳақида олиниши мумкин бўлган маълумотлар шулардан иборат. $\mathbf{n}_0$ векторнинг йўналиши эса зарраларнинг ўзаро таъсир қонунига ва уларнинг тўқнашишдаги ўзаро ўрнига боғлиқ.

(14.2) формулаларга геометрик маъно бериш учун тезликлардан импульсларга ўтиш қулайроқ. (14.2) тенгликларни мос ҳолда m_1 ва m_2 га кўпайтириб қуйидагиларни топамиз:

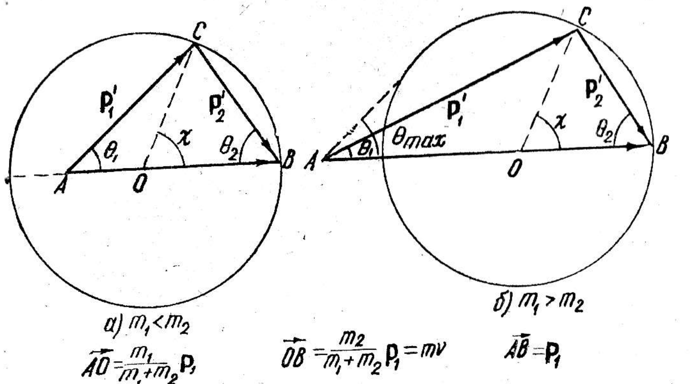
$$\mathbf{p}_1' = mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1, \qquad (14.3)$$

$$\mathbf{p}_2' = mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1$$

(бу ерда $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ — келтирилган масса). mv радиусли айлана чизамиз ва 11-расмдагидек шакл ясаймиз. Агар $\mathbf{n}_0$ бирлик вектор $\overrightarrow{OC}$ бўйича йўналган бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ векторлар мос ҳолда $\mathbf{p}_1'$ ва $\mathbf{p}_2'$ импульсларни беради. Берилган $\mathbf{p}_1$ да айлана радиуси ва A нуқтанинг ўрни ўзгармайди, C нуқта эса айлананинг исталган ерида бўлиши мумкин. $m_1 < m_2$ да A нуқта айлана ичида бўлади (11-расм, а), $m_1 > m_2$ да эса айланадан ташқарида (11-расм, б) жойлашади.

Расмларда келтирилган θ_1 ва θ_2 бурчаклар зарраларнинг урилиш йўналишига ($\mathbf{p}_1$ йўналишига) нисбатан тўқнашишдан кейинги оғиш бурчакларидир. Марказий χ бурчак ($\mathbf{n}_0$ йўналишни берувчи) биринчи зарранинг инерция маркази системасидаги бурилиш бурчагини ифодалайди. Расмга кўра θ_1, θ_2 бурчаклар χ орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \qquad (14.4)$$



а) $m_1 < m_2$ б) $m_1 > m_2$

$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1$ $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1 = mv$ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}_1$

11-расм.

Иккала зарра тезликларининг тўқнашишдан кейинги абсолют қийматларини ҳам шу χ бурчак орқали белгилайлик:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1+m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2}. \qquad (14.5)$$

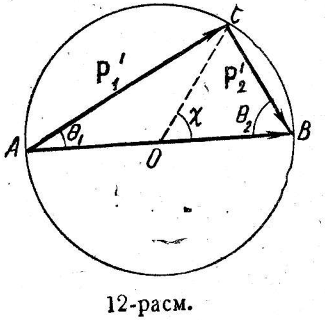
$\theta_1 + \theta_2$ йиғинди зарраларнинг тўқнашишдан кейинги сочилиш бурчагидир. $m_1 < m_2$ бўлганда $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ ва $m_1 > m_2$ ҳолда $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ бўлишини кўриш қийин эмас.

Иккала зарра тўқнашгандан сўнг бир тўғри чизиқда ҳаракатланса („пеш зарба“), $\chi = \pi$, яъни C нуқта диаметр устида A нуқтадан чапда (11-расм, *а*; бунда p_1' ва p_2' ўзаро қарама-қарши) ёки A ва O ўртасида (11-расм, *б*; бунда $\mathbf{p}_1'$ ва $\mathbf{p}_2'$ лар бир томонга йўналган) бўлади. Бундай ҳолда зарраларнинг тўқнашгандан сўнги тезликлари

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v},$$

$$\mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} \qquad (14.6)$$

бўлади. Бунда v_2' мумкин бўлган энг катта қийматга эга; демак, дастлаб тинч ҳолда турган зарра тўқнашиш натижасида



12-расм.

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} E_1, \qquad (14.7)$$

максимал энергияни олиши мумкин (бу ерда $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ учиб келувчи зарранинг дастлабки энергияси).

$m_1 < m_2$ бўлган ҳолда биринчи зарранинг тўқнашгандан кейинги тезлиги исталган йўналишда бўлиши мумкин. $m_1 > m_2$ ҳолда эса тушувчи зарранинг оғиш бурчаги маълум максимал қийматдан катта бўла олмайди. Бу бурчакда C нуқта (11-расм, б) ёйнинг шундай нуқтасида бўладики, AC тўғри чизиқ айланага уринади. Равшанки,

$$\sin\theta_{1\max} = OC/OA \text{ ёки } \sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (14.8)$$

Бири дастлаб тинч турган иккита тенг массали зарра тўқнашуви айниқса содда ифодаланади. Бу ҳолда B нуқтагина эмас, балки A нуқта ҳам айланада ётади (12-расм) ва

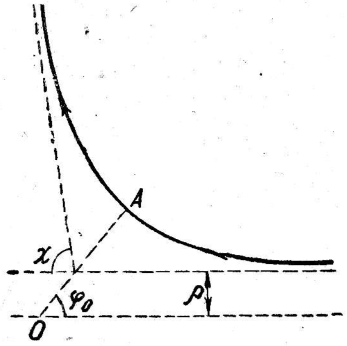
$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (14.9)$$

$$v'_1 = v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v'_2 = v\sin\frac{\chi}{2} \qquad (14.10)$$

бўлади. Зарралар тўқнашишдан сўнг бир-биридан тўғри бурчак остида узоқлашадилар.

15-§. Зарраларнинг сочилиши

Олдинги параграфда таъкидланганидек, икки зарра тўқнашуви натижасини тўла аниқлаш (χ бурчакни топиш) зарралар ўзаро таъсирининг конкрет қонунини ҳисобга олган ҳолда ҳаракат тенгламаларини ечишни талаб этади. Умумий қоидага кўра, аввало m массали зарранинг қўзғалмас (зарраларнинг инерция маркази жойлашган) куч маркази $U(r)$ майдонида оғиши ҳақидаги эквивалент масалани кўриб чиқайлик.



13-расм.

Марказий майдондаги зарра траекторияси орбитанинг марказга яқин бўлган нуқтасига ўтказилган тўғри чизиққа (13-расмдаги OA га) нисбатан симметрикдир. Шунинг учун орбитанинг иккала асимптотаси кўрсатилган тўғри чизиқни бир хил бурчак остида кесиб ўтадилар. Агар бу бурчакларни φ_0 орқали белгиласак, у ҳолда, расмда кўринишича, зарранинг марказ яқинидан ўтишидаги бурилиш бурчаги

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \qquad (15.1)$$

φ_0 бурчак эса (12.7) га кўра қуйидагича аниқланади:

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \qquad (15.2)$$

бу ерда интеграл зарранинг марказга энг яқин ва чексиз узоқлашган ҳолатлари орасида олинади, $r_{\min}$ эса радикал белгиси остидаги ифоданинг илдизидир.

Биз кўраётган инфинит ҳаракатда E ва M лар ўрнига бошқа доимийлар — зарранинг чексизликдаги v_∞ тезлиги ва *мўлжал масофаси* (ρ) деб аталувчи катталик киритиш қулай. ρ катталик жиҳатдан марказдан $\mathbf{v}_\infty$ йўналишига туширилган перпендикулярнинг узунлигига тенг. Бу перпендикуляр узунлиги зарранинг куч майдони бўлмаганда (13-расм) марказдан қандай масофа наридан ўтишини кўрсатади. Энергия ва момент бу катталиклар билан

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad M = m\rho v_\infty \qquad (15.3)$$

ҳолда боғланган, (15.2) формула эса

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}} \qquad (15.4)$$

кўринишни олади ва (15.1) билан биргаликда χ нинг ρ га боғлиқлигини кўрсатади.

Физикавий қўлланишларда, одатда, якка зарранинг оғиш масаласи эмас, балки сочувчи марказга тушаётган $\mathbf{v}_\infty$ тезликдаги бир хил зарралар дастасининг сочилиш ҳодисаси кўрилади. Дастадаги ҳар хил зарралар ҳар хил мўлжал масофаларига эга бўладилар ва шунга кўра турли χ бурчаклар остида сочиладилар. Вақт бирлиги ичида χ ва $\chi + d\chi$ бурчак оралиғида сочиладиган зарралар сонини dN билан белгилайлик. Бу сон ўз ҳолича сочилиш процессини характерлаш учун ноқулай, чунки у тушаётган дастанинг зичлигига боғлиқ (унга пропорционал). Шунинг учун

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{15.5}$$

нисбат киритамиз, бу ерда n—даста кўндаланг кесимининг бирлик юзасидан вақт бирлиги ичида ўтадиган зарралар сони (бунда даста ўзининг барча кесими бўйича бир жинсли деб, фараз қиламиз). Келтирилган нисбат юза ўлчамига эга ва у *эффектив сочилиш кесими* дейилади. Бу кесим сочувчи майдоннинг кўринишига боғлиқ бўлиб, сочилиш процессининг муҳим характеристикасидир.

χ ва ρ ўртасидаги боғланиш ўзаро бир қийматли деб ҳисоблайлик; бунинг учун сочилиш бурчаги мўлжал масофасининг монотон камаювчи функцияси бўлиши керак. Шундай бўлганда мўлжал масофалари $\rho(\chi)$ ва $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ интервалга тушган зарраларгина χ ва $\chi + d\chi$ орасидаги берилган бурчаклар интервалига сочиладилар. Уларнинг сони n нинг ρ ва $\rho + d\rho$ радиусли айланалар орасидаги ҳалқа юзасига кўпайтмасига тенг, яъни $dN = 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot n$. Шунинг учун эффектив кесим

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \tag{15.6}$$

Эффектив кесим ва сочилиш бурчаги ўртасидаги боғланишни топиш учун (15.6) ни

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \tag{15.7}$$

кўринишда қайтадан ёзиш кифоя. $d\rho/d\chi$ ҳосила манфий бўлиши мумкин (одатда, шундай бўлади ҳам), шунинг учун биз унинг абсолют қийматини ёздик. Кўпинча $d\sigma$ ни ясси $d\chi$ бурчак элементига эмас, балки фазовий do бурчак элементига боғлайдилар. Очилиш бурчаклари χ ва $\chi + d\chi$ бўлган конуслар орасидаги фазовий бурчак $do = 2\pi \sin\chi d\chi$ бўлади. Шунинг учун (15.7) дан

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin(\chi)} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do \tag{15.8}$$

экани топилади.

Зарралар дастасининг қўзғалмас куч марказидан эмас, балки бошқа дастлаб тинч турган зарралардан сочилиши тўғрисидаги ҳақиқий масалага қайтар эканмиз, (15.7) формула эффектив кесимни инерция маркази системасидаги сочилиш бурчагига боғлиқ ҳолда аниқлайди дейишимиз мумкин. Эффектив кесимнинг лаборатория системасидаги сочилиш бурчаги θ га боғлиқлигини топиш учун (15.7) даги χ ни (14.4) формулалар бўйича θ орқали ифодалаш лозим. Натижада тушаётган зарралар дастасининг сочилиш кесими учун ҳам (χ бурчак θ_1 орқали ифодаланган), дастлаб тинч ҳолда турган зарралар учун ҳам (χ бурчак θ_2 орқали ифодаланган) ифодалар олинади.

Масалалар

1. Зарраларнинг a радиусли абсолют қаттиқ шарчадан сочилишининг эффектив кесимини топинг (яъни ўзаро таъсир қонуни: $r < a$ да $U = \infty$ ва $r > a$ да $U = 0$).

Ечилиши. Зарра шарча ичига умуман кира олмайди, ташқарисида эса эркин ҳаракатланганидан, траектория икки тўғри чизиқдан иборат; бу чизиқлар ўзлари билан шарча кесишган нуқтага ўтказилган радиусга нисбатан симметрикдир (14-расм). Расмдагига мувофиқ

$$\rho = a \sin\varphi_0 = a \sin\frac{\pi - \chi}{2} = a \cos\frac{\chi}{2}.$$

Демак, (15.7) ёки (15.8) га кўра,

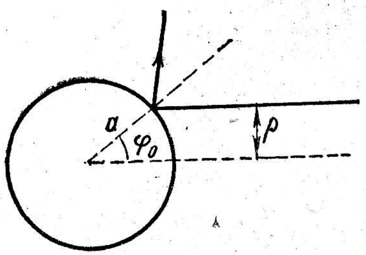
$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin\chi \, d\chi = \frac{a^2}{4} do, \tag{1}$$

яъни сочилиш инерция маркази системасида изотропдир. $d\sigma$ ни ҳамма бурчаклар бўйича интеграллаб, тўла кесим $\sigma = \pi a^2$ эканини топамиз. Бу қиймат сочиладиган зарра тушиши керак бўлган мўлжал юзаси шарчанинг кесим юзаси демакдир.

2. Шу ҳолнинг ўзи учун эффектив кесимни сочилувчи зарралар йўқотадиган ε энергиянинг функцияси сифатида ифодаланг.

Ечилиши. m_1 зарра йўқотадиган энергия m_2 зарра оладиган энергияга тенг. (14.5) ва (14.7) га кўра

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{\max} \sin^2\frac{\chi}{2},$$



14-расм.

бундан

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\max}\sin\chi\,d\chi.$$

1-масаланинг (1) формуласига қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$d\sigma = \pi a^2\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}.$$

Сочилган зарраларнинг нолдан $\varepsilon_{\max}$ гача барча интервалда ε нинг катталиги бўйича тақсимоти бир текис экан.

3, Массаси m_2, радиуси R бўлган сферик жисмга Ньютон қонунига кўра тортилаётган m_1 массали зарраларнинг жисм сиртига тушиш эффектив кесими топилсин.

Ечилиши. $r_{\min} < R$ тенгсизлик ($r_{\min}$ — зарра траекториясининг сфера марказига энг яқин нуқтаси) тушиш шарти бўлганидан ρ нинг мумкин бўлган энг катта қиймати $r_{\min} = R$ шартдан топилади Бунинг учун $U_{эфф}(R) = E$ тенгламани ёки

$$\frac{m_1 v_\infty^2\,\rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$$

ни ечилади. Бунда $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (гравитация доимийси) ва $m_2 \gg m_1$ деб ҳисоблаб, $m \approx m_1$ ни қабул қилдик. Бу ердан $\rho_{\max}^2$ ни аниқлаб, қуйидагини топамиз:

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

$v_\infty \to \infty$ да эффектив кесим, албатта, сфера кесимининг геометрик юзасига яқинлашади.

16- §. Резерфорд формуласи

Юқорида келтирилган формулаларнинг муҳим татбиқларидан бири — зарядланган зарраларнинг кулон майдонида сочилишидир.

(15.4) га $U = \alpha/r$ ни қўйиб ва элементар интеграллаш ўтказиб,

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\dfrac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

ни оламиз. Бу ердан

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0$$

ёки (15.1) га кўра $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ ни киритсак,

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\,\mathrm{ctg}^2\,\frac{\chi}{2}. \qquad (16.1)$$

Бу ифодани χ бўйича дифференциаллаб ва (15.7) ёки (15.8) га қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\dfrac{\chi}{2}}{\sin^3\dfrac{\chi}{2}}\,d\chi \qquad (16.2)$$

ёки

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2 m v_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}}. \qquad (16.3)$$

Бу ифода *Резерфорд формуласи* дейилади. Эффектив кесим α нинг ишорасига боғлиқ эмас, шунинг учун олинган натижа кулон майдонининг ҳам, итарилиш, ҳам тортишиш ҳолларига тегишлидир. (16.3) формула тўқнашадиган зарралар инерция маркази тинч турган саноқ системасидаги эффектив кесимни беради. Кесимни лаборатория системасига ўтказиш (14.4) формула ёрдамида амалга оширилади. (16.2) га $\chi = \pi - \frac{\theta_2}{2}$ ўзгартиш киритиб, дастлаб тинчликда бўлган зарралар учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}\,d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2}. \qquad (16.4)$$

Келиб тушувчи зарралар учун эса ўтказиладиган алмаштириш умумий ҳолда мураккаб формулаларга олиб келади. Иккита хусусий ҳолни кўриб ўтайлик.

Агар сочувчи зарра массаси (m_2) сочилувчи зарра массаси (m_1) дан анча катта бўлса, у ҳолда $\chi \approx Q_1$, $m \approx m_1$, шунинг учун

$$a\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4\theta_1/2}, \qquad (16.5)$$

бу ерда $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ — тушувчи зарра энергияси.

Агар иккала зарра тенг массали бўлса ($m_1 = m_2$, $m = m_1/2$), у ҳолда (14.9) га биноан $\chi = 2\theta_1$ бўлиб, уни (16.2) га қўйсак,

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}\, d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}\, do_1 \qquad (16.6)$$

келиб чиқади. Агар иккала зарранинг массалари тенг, ўзлари айнан ўхшаш зарралар бўлса, у ҳолда сочилишдан сўнг дастлаб ҳаракатда бўлган заррани дастлаб тинч ҳолда турган з916раддан ажратишнинг кераги йўқ $d\sigma_1$ ва $d\sigma_2$ ни қўшиб ва θ_1 ҳамда θ_2 ларни θ нинг умумий қийматига алмаштириб, барча зарраларнинг тўла эффектив кесимини топамиз:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta\, do. \qquad (16.7)$$

Энди умумий формула (16.2) ёрдамида сочилган зарраларнинг тўқнашиш натижасида йўқотган энергияларига кўра тақсимотини аниқлаймиз. Сочилувчи ва сочувчи зарралар массаси (m_1 ва m_2) ихтиёрий бўлганида сочувчи зарра олган тезликнинг инерция маркази системасидаги сочилиш бурчагига боғлиқлиги қуйидагича [(14.5) га каранг]:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_\infty \sin\frac{\chi}{2}.$$

Бунга мос ҳолда шу зарра олган ва, демак, m_1 зарра йўқотадиган энергия

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2}\, v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}.$$

Бу ердан $\sin\frac{\chi}{2}$ ни ε орқали ифодалаб ва (16.2) га қўйиб,

$$d\sigma = 2\pi\,\frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \qquad (16.8)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу формула эффектив кесимни йўқотилган энергия ε нинг функцияси кўринишида аниқлайди ва қўйилган саволга жавоб беради. Бунда ε нинг қиймати нолдан то $\varepsilon_{\max} = 2\, m^2 v^2{}_\infty / m_2$ гача боради.

V боб

КИЧИК ТЕБРАНИШЛАР

17-§. Бир ўлчовли эркин тебранишлар

Механикавий системаларнинг кенг тарқалган ҳаракат тури *кичик тебранишлар* деб аталувчи тебранишлардир; система ўзининг барқарор мувозанат ҳолати яқинида шундай тебранади. Бундай ҳаракатларни биз система эркинлик даражаси бирга тенг бўлган энг содда ҳолни кўришдан бошлаймиз.

Системанинг барқарор мувозанат ҳолатида унинг $U(q)$ потенциал энергияси минимумга эга бўлади; бу ҳолатдан четланиш системани яна шу ҳолатга қайтаришга интилувчи $\frac{dU}{dq}$ кучнинг пайдо бўлишига олиб келади. Умумлашган координатанинг тегишли (потенциал энергияга минимум берадиган) қийматини q_0 билан белгилаймиз. Мувозанат ҳолатидан кичик четланишлар учун $U(q) - U(q_0)$ айирманинг $q - q_0$ даражалари бўйича ёйилмасида биринчи йўқолмайдиган ҳадни сақлаш кифоя. Умумий ҳолда шундай ҳад иккинчи тартибга эга:

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

бу ерда $k = U''(q_0)$ — мусбат коэффициент. Потенциал энергияни бундан кейин унинг минимал қийматидан бошлаб ҳисоблаймиз (яъни $U(q_0) = 0$ деймиз) ва координатанинг мувозанат қийматидан четланиш масофасини

$$x = q - q_0 \qquad (17.1)$$

орқали белгилашни қабул этамиз. У ҳолда

$$U(x) = kx^2/2. \qquad (17.2)$$

Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг кинетик энергияси умумий ҳолда

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$$

кўринишга эга Ўша яқинлашишда $a(q)$ функцияни унинг $q = q_0$ даги қиймати билан алмаштириш кифоя. Қулайлик учун

$$a(q_0) = m$$

белгилаш киритамиз[1]) ва тебраниши кичик бўлган бир ўлчовли система[2]) Лагранж функцияси учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \qquad (17.3)$$

Бу функцияга тегишли ҳаракат тенгламаси

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (17.4)$$

ёки

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (17.5)$$

дан иборат. Бунда

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (17.6)$$

(17.5) чизиқли дифференциал тенгламанинг иккита мустақил ечими $\cos\omega t$ ва $\sin\omega t$ бўлганлигидан умумий ечим

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t. \qquad (17.7)$$

Бу ифода

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) \qquad (17.8)$$

кўринишда ҳам ёзилиши мумкин. $\cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$ бўлганидан (17.8) ва (17.7) ларни солиштириб, a ва α ихтиёрий доимийлар билан c_1 ва c_2 доимийлар ўртасидаги қуйидаги муносабатни оламиз:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \qquad (17.9)$$

Демак, система барқарор мувозанат ҳолати яқинида гармоник тебранма ҳаракат қилади. (17.8) даги даврий кўпайтувчи олдидаги a коэффициент тебранишлар *амплитудаси* дейилади, косинус аргументи эса уларнинг *фазасидир*; α фазанинг бошланғич қиймати бўлиб, у вақт саноғи бошининг танланишига боғлиқ. ω катталик тебранишларнинг *циклик частотаси* дейилади; лекин назарий физикада, одатда, оддий қилиб *частота* деб аташади, биз ҳам бундан кейин шундай атаймиз.

---

[1]) Лекин шуни эслатиб ўтиш керакки, x зарранинг декарт координатаси бўлгандагина m катталик массага мос келади.

[2]) Бундай системани кўпинча бир ўлчовли *осциллятор* деб аталади.

Частота тебранишнинг асосий характеристикаси бўлиб, у ҳаракатнинг бошланғич шартларига боғлиқ эмас. (17.6) формулага биноан, у механикавий система хоссалари орқали тўла аниқланади. Лекин частотанинг бу хусусияти қабул этилган кичик тебранишлар учунгина ўринли бўлиб, юқори даражали яқинлашишларга ўтилганда йўқолади. Математика нуқтаи назаридан у потенциал энергия билан координата ўртасидаги квадратик боғланишнинг натижасидир.

Тебраниши кичик бўлган система энергияси

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

ёки бунга (17.8) ни қўйсак,

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \qquad (17.10)$$

бўлади. У тебраниш амплитудасининг квадратига пропорционал.

Тебранувчи система координатасининг вақтга боғланишини кўпинча

$$x = \operatorname{Re}\{Ae^{-i\omega t}\} \qquad (17.11)$$

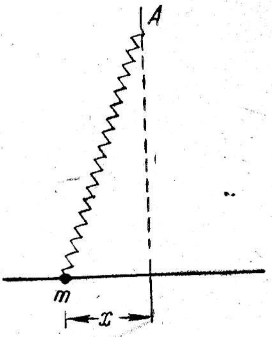
комплекс ифоданинг ҳақиқий қисми сифатида олиш қулай экан. Бу ерда A — комплекс доимий: уни

$$A = ae^{-i\alpha} \qquad (17.12)$$

кўринишида ёзсак, (17.8) ифодага қайтамиз. A катталикни *комплекс амплитуда* дейилади; унинг модули одатдаги амплитудага мос келади, аргументи эса бошланғич фазани кўрсатади.

Экспоненциал кўпайтувчилар устида амал бажариш математикавий маънода тригонометрик катталиклар устида амал бажаришдан соддароқдир, чунки биринчи ҳолда дифференциаллаш экспоненциал катталик кўринишини ўзгартирмайди. Чизиқли операциялар (қўшиш, ўзгармас коэффициентларга кўпайтириш, дифференциаллаш, интеграллаш) ўтказилаётганда ҳақиқий қисмни олиш белгисини умуман ташлаб юбориш ва бу ишни ҳисоблаш охирида бажариш мумкин.

Масалалар



15-расм.

1. Тебраниш амплитудаси ва бошланғич фазани координата ва тезликнинг бошланғич қийматлари x ва v_0 орқали ифодаланг.

Жавоб:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Турли изотоп атомларидан таркиб топган иккита икки атомли молекула тебраниш частоталари ω ва ω' нинг нисбатини топинг; атомлар массаси мос равишда m_1, m_2 ва m_1', m_2' га тенг.

Ечилиши. Изотоп атомларининг ўзаро таъсирлари бир хил бўлганлигидан $k = k'$. Молекулаларнинг келтирилган массалари эса кинетик энергиялардаги m коэффициент вазифасини бажаради. Шунинг учун (17.6) га биноан

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

3. Тўғри чизиқ бўйича ҳаракатлана олувчи ва бир учи A нуқтада бўлган пружинанинг иккинчи учига бириктирилган m массали нуқтанинг (15-расм) тебраниш частотаси аниқлансин. Пружинанинг узунлиги l га тенг бўлиб, F куч таъсирида тортилади.

Ечилиши. Пружинанинг потенциал энергияси (юқори тартибли кичик катталиккача аниқликда) F куч билан пружинанинг δl узайиши кўпайтмасига тенг. $xl \ll l$ бўлган ҳолда

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$$

Демак, $U = Fx^2/2l$. Кинетик энергия $m\dot{x}^2/2$ га тенглигидан

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

18- §. Мажбурий тебранишлар

Бирор ўзгарувчан ташқи майдон таъсир этаётган системадаги тебранишларни кўриб ўтайлик, бундай тебранишларни ўтган параграфдаги эркин тебранишлардан фарқ қилган ҳолда *мажбурий* тебранишлар дейилади.

Тебранишлар, илгари қабул этганимиздек, кичик бўлганлиги сабабли ташқи майдон кучсиз деб фараз қилинади: акс ҳолда бу майдон жуда катта x силжишга олиб келиши мумкин эди.

Бу ҳолда система хусусий потенциал энергия $\frac{1}{2}\ kx^2$ билан бир қаторда ташқи майдон таъсирига боғлиқ бўлган потенциал энергия $U_e(x,t)$ га ҳам эга. Шу қўшимча ҳадни кичик x катталик даражалари бўйича қаторга ёйсак,

$$U_e(x,t) \approx U_e(0,t) + x \frac{\partial U_e}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

экани аниқланади. Биринчи ҳад фақат вақтнинг функцияси. Шунинг учун у Лагранж функциясида (қандайдир вақт функциясидан t бўйича олинган тўла ҳосила сифатида) тушириб қолдирилиши мумкин. Иккинчи ҳаддаги $\frac{\partial U_e}{\partial x}$ мувозанат ҳолатида системага таъсир этувчи ва берилган вақт функцияси ҳисобланувчи ташқи „куч“ дир; уни $F(t)$ деб белгилаймиз. Шундай қилиб, потенциал энергияда $xF(t)$ ҳад пайдо бўлади ва системанинг Лагранж функцияси

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t) \qquad (18.1)$$

кўринишни олади. Бунга тегишли ҳаракат тенгламаси қуйидагича:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

ёки

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \qquad (18.2)$$

бу ерда яна эркин тебраниш частотаси ω ни киритдик.

Маълумки, ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими икки ифода йиғиндисидан иборат $x = x_0 + x_1$, бу ерда x_0—бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, x_1—бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий интеграли. Ушбу ҳолда x_0 олдинги параграфда кўрилган эркин тебранишларни кўрсатади.

Мажбур этувчи куч ҳам вақтнинг оддий даврий функцияси бўлган диққатга сазовор бир ҳолни кўрайлик. Бу куч

$$F(t) = f \cdot \cos(\gamma t + \beta), \qquad (18.3)$$

бу ерда γ—маълум частота. (18.2) нинг хусусий интегралини худди шундай даврий кўпайтувчили $x_1 = b\cos(\gamma t+\beta)$ ҳолида қидирамиз. (18.2) га қўйсак, $b = f/m\,(\omega^2-\gamma^2)$ чиқади; бир жинсли тенглама ечимини қўшиб,

$$x = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta) \qquad (18.4)$$

кўринишдаги умумий интегрални топамиз. Ихтиёрий a ва α ўзгармас сонларни бошланғич шартлардан аниқланади.

Шундай қилиб, мажбур этувчи даврий куч таъсирида система ҳаракати икки хил частотали (системанинг хусусий ω частотаси ва мажбур этувчи кучнинг γ частотаси) тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади.

Мажбур этувчи куч частотаси ва системанинг хусусий частотаси ўзаро тенг бўлган резонанс ҳолати учун (18.4) ечимни қўллаш мумкин эмас. Бу ҳол учун ҳаракат тенгламасининг умумий ечимини топишда доимий сонларни қайтадан белгилаб, (18.4) ифодани

$$x = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta) - \cos(\omega t+\beta)]$$

кўринишга келтирамиз. $\gamma\to\omega$ да иккинчи ҳад $\frac{0}{0}$ ҳолидаги ноаниқликни беради. Уни Лопитал қоидасига биноан очиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$x = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta). \qquad (18.5)$$

Шундай қилиб, резонанс ҳолида тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан (албатта, тебраниш кичик бўлмай қолиб, баён этилган назария ўз кучини йўқотмагунча) чизиқли ортади.

Бундан ташқари резонанс яқинида, яъни $\gamma = \omega + \varepsilon$ (бу ерда ε—кичик сон) бўлган ҳолда, кичик тебранишлар қандай бўлишлигини аниқлайлик. Умумий ечимни комплекс кўринишда ифодалаймиз:

$$x = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i(\omega+\varepsilon)t} = (A+Be^{-i\varepsilon t})e^{-i\omega t}. \qquad (18.6)$$

$A+Be^{-i\omega t}$ катталик $e^{-i\omega t}$ кўпайтувчининг $2\ \pi/\omega$ даври давомида кам ўзгарганидан резонанс яқинидаги ҳаракатни ўзгарувчан амплитудали кичик тебранишлар

деб қараш мумкин. Ўзгарувчан амплитудани c билан белгиласак, у ҳолда

$$c = |A + B\cdot e^{-i\varepsilon t}|.$$

A ва B ларни, мос равишда, $a\cdot e^{-i\alpha}$ ва $b\cdot c^{-i\beta}$ кўринишда белгилаб, қуйидагини оламиз:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t+\beta-\alpha). \qquad (18.7)$$

Шундай қилиб, амплитуда икки қиймат орасида

$$|a-b| \leqslant c \leqslant a+b$$

ε частота билан даврий ўзгаради. Бу ҳодисани *тепкили тебранишлар* дейилади.

(18.2) ҳаракат тенгламаси умумий кўринишда ва мажбур этувчи ихтиёрий $F(t)$ куч мавжудлигида интегралланиши мумкин. Бунинг учун уни дастлаб

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - i\omega x) + i\omega(\dot{x} - i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

ёки

$$\frac{d\xi}{dt} + i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t) \qquad (18.8)$$

кўринишда қайта ёзиш лозим. Бу ерда

$$\xi = \dot{x} - i\omega x \qquad (18.9)$$

комплекс катталик киритилган. (18.8) тенглама энди иккинчи тартибли эмас, балки биринчи тартиблидир. Унинг ўнг қисми бўлмаганда, $\xi = A\cdot e^{-i\omega t}$ (A—ўзгармас сон) ечимни олган бўлур эдик. Умумий қоидага амал қилиб, бир жинсли тенглама ечимини $\xi = A(t)\times\times e^{-i\omega t}$ кўринишда излаймиз ва $A(t)$ функция учун

$$A(t) = \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}$$

тенгламани оламиз. Уни интеграллаб, (18.8) тенгламанинг қуйидаги ечимини топамиз:

$$\xi = e^{-i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{i\omega t}\,dt + \xi_0\right\}, \qquad (18.10)$$

бу ерда ξ_0 интеграллаш доимийси ξ нинг $t=0$ вақт моментидаги қийматини кўрсатадиган қилиб танланган.

(18.10) биз излаган умумий ечимдир: $x(t)$ функция (18.10) ифоданинг—ω га бўлинган мавҳум қисми орқали берилади1).

Мажбурий тебранаётган система энергияси ўз-ўзидан маълумки ўзгаради; система ташқи куч манбаидан энергия олиб туради. Бошланғич энергиясини нолга тенг деб ҳисоблаб, куч таъсири давомида ($-\infty$ дан $+\infty$ гача) системага бериладиган тўла энергияни аниқлаймиз. (18.10) формулага мувофиқ (интеграллашнинг қуйи чегараси нол ўрнига $-\infty$ ва $\xi(-\infty)=0$) $t \to \infty$ ҳолда қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t}\,dt\right|^2.$$

Иккинчи томондан, система энергияси

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x} + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \qquad (18.11)$$

Бунга $|\xi(\infty)|^2$ ни қўйиб, системага берилган энергияни

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t}dt\right|^2; \qquad (18.12)$$

ифода ҳолида топамиз; у частотаси системанинг хусусий частотасига тенг бўлган $F(t)$ куч Фурье компонентаси модулининг квадрати билан аниқланади.

Жумладан, агар ташқи куч фақат қисқа ($1/\omega$ га нисбатан кичик) вақт давомида таъсир этса, $e^{i\omega t} \approx 1$ дейиш мумкин. У ҳолда

$$E = \frac{1}{2\,m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt\right)^2.$$

Бу натижанинг маъноси равшан. Унинг кўрсатишича, қисқа вақтли куч системани сезиларли силжитмасдан туриб, унга $\int F dt$ импульс беради.

---

1) Бунда $F(t)$ куч ҳақиқий кўринишда ёзилиши лозим, албатта.

Масалалар

1. Бошланғич $t=0$ моментда система мувозанат ҳолатида ($x=0$, $\dot{x}=0$) тинч турган деб олиб, қуйидаги ҳоллар учун $F(t)$ куч таъсирида системанинг мажбурий тебраниши аниқлансин:

а) $F = \text{const} = F_0$.

Жавоб: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$, ўзгармас куч тебранишнинг мувозанат ҳолатини силжитади.

б) $F = at$.

Жавоб: $x = \frac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$.

в) $F = F_0 \cdot e^{-\alpha t}$.

Жавоб: $x = \frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

г) $F = F_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos\beta t$.

Жавоб: $x = \frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t +$

$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t + e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}$

(ечишда кучни $F = F_0 \cdot e^{(-\alpha - i\beta)t}$ комплекс кўринишда ёзиш қулай).

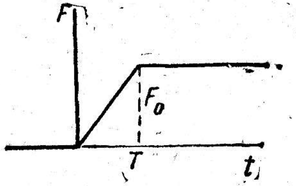
2. Система тебранишининг ташқи F куч таъсиридан кейинги амплитудаси топилсин. $t=0$ моментгача система мувсзанат ҳолатида тинч бўлган, F куч эса қуйидаги қонун бўйича ўзгаради: $t<0$ да $F=0$, $0<t<T$ да $F = F_0 t/T$. $t>T$ да $F=F_0$ (16- расм).

Ечилиши. Бошланғич шартни қаноатлантирувчи тебранишлар $0<t<T$ вақт интервалида

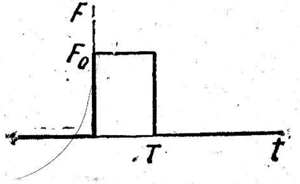
$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$$

кўринишга эга. $t>T$ бўлганда, ечимни

$$x = c_1\cos\omega(t-T) + c_2\sin\omega(t-T) + \frac{F_0}{m\omega^2}$$



16- расм.



17- расм.

ҳолда излаймиз. x ва $\dot{x}$ ларнинг $t=T$ да узлуксизлик шартларидан

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T, \quad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T)$$

эканини топамиз. Бунда тебраниш амплитудаси

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

F_0 куч қанчалик секин „уланса“ (яъни T қанчалик катта бўлса, амплитуда шунчалик кичик бўлади.

3 Чегараланган T вақт давомида таъсир этувчи ўзгармас F_0 куч учун (17- расм) олдинги масалада сўралган катталик топилсин.

Ечилиши. Ечимни 2- масаладаги каби йўл билан топиш мумкин. (18 10) формуладан фойдаланилса, иш янада осонлашади. $t > T$ ҳолда $x = 0$ ҳолат атрофида эркин тебранишлар бўлади; бунда

$$\xi = \frac{F_0}{m}e^{-i\omega t}\int_0^T e^{i\omega t}\,dt = \frac{iF_0}{\omega m}(1-e^{i\omega t})e^{-i\omega t};$$

ξ модулининг квадрати эса $|\xi|^2 = a^2\omega^2$ формулага кўра амплитудани кўрсатади. Натижада

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}$$

эканини топамиз.

19-§. Эркинлик даражаси кўп бўлган система тебраниши

Эркинлик даражаси бир нечта (s та) бўлган системанинг эркин тебранишлар назарияси бир ўлчовли тебранишларни кўрилганидаги (17-§) каби ишлаб чиқилади.

Система потенциал энергияси U умумлашган $q_i(i = 1, 2, \ldots, s)$ координаталарнинг функцияси сифатида $q_i = q_{i0}$ да минимумга эга бўлсин. Кичик

$$x_i = q_i - q_{i0} \qquad (19.1)$$

силжишлар киритиб ва Uни шу силжиш бўйича иккинчи тартибли ҳадларгача аниқликда ёйиб, потенциал

энергияни қуйидаги мусбат аниқланган квадратик шаклда топамиз:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k} k_{ik}x_i x_k. \qquad (19.2)$$

бу ерда потенциал энергияни яна унинг минимал қийматидан бошлаб ҳисоблаймиз. k_{ik} ва k_{ki} коэффициентлар (19.2) га ягона $x_i x_k$ катталикка кўпайтирилган ҳолда киргани сабабли, уларни ҳамма вақт ўз индекслари бўйича симметрик деб ҳисоблаш мумкин:

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

Умумий ҳолда

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,k} a_{ki}(q)\cdot\dot{q}_i\dot{q}_k$$

кўринишга эга бўлган кинетик энергиядаги ((5.5) га қаранг) коэффициентларда $q_i = q_{i0}$ деб олиб ва $a_{ik}(q_0)$ доимийларни m_{ik} лар орқали белгилаб, кинетик энергияни мусбат аниқланган квадратик шаклдаги

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,k} m_{ki}\dot{x}_i\dot{x}_k \qquad (19.3)$$

кўринишида топамиз m_{ik} коэффициентларни ҳам ўз индекслари бўйича симметрик деб ҳисоблаш мумкин:

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Шундай қилиб, кичик эркин тебранаётган системанинг Лагранж функцияси

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k).$$

Энди ҳаракат тенгламаларини тузайлик. Улардаги ҳосилаларни аниқлаш учун Лагранж функциясининг тўла дифференциалини ёзамиз:

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}x_i dx_k + m_{ik}x_k dx_i - k_{ik}x_i dx_k - k_{ik}x_k d_k x_i).$$

Йиғиндининг катталиги йиғиш индексларининг белгиланишига боғлиқ эмас, албатта. Шунинг учун қавсдаги биринчи ва учинчи ҳадларда i ни k га, k ни эса i га ўзгартириб ва m_{ik}, k_{ik} коэффициентлар симметриклигини назарда тутиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$dL=\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i-k_{ik}x_k dx_i).$$

Бундан

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\sum_k m_{ik}\dot{x}_k,\ \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\sum_k k_{ik}x_k.$$

Шунинг учун Лагранж тенгламалари қуйидагича;

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=0. \qquad (19.5)$$

Улар ўзгармас коэффициентли s та чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар системасидан иборат.

Бундай тенгламаларни ечишнинг умумий қоидасига биноан s та $x_k(t)$ номаълум функцияларни

$$x_k=A_k\cdot e^{-i\omega t} \qquad (19.6)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда A_k—ҳозирча ноаниқ қандайдир доимийлар. (19.6) ни (19.5) системага қўйиб, $e^{-i\omega t}$ га қисқартирилса, A_k доимийлар учун чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\sum_k(-\omega^2 m_{ik}+k_{ik})A_k=0. \qquad (19.7)$$

Бу система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун унинг аниқловчиси нолга тенгланиши керак:

$$|k_{ik}-\omega^2 m_{ik}|=0. \qquad (19.8)$$

Бу тенглама *характеристик* тенглама деб аталиб, у ω^2 га нисбатан s даражалидир. Умумий ҳолда у s та турли ҳақиқий мусбат илдиз ω_α^2 $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ га эга. Шу йўсинда аниқланган ω_α катталиклар системанинг *хусусий частоталари* дейилади. Айрим ҳолларда характеристик тенглама илдизларидан баъзилари бир хил бўлиши мумкин; бундай каррали хусусий частоталар *айниган* деб аталади.

(19.8) тенглама илдизларининг ҳақиқийлиги ва мусбатлиги физикавий мулоҳазаларга кўра олдиндан аён. Дарҳақиқат, ω нинг мавҳум қисми борлиги x_k координата билан вақт орасидаги (19.6) боғланишда экспоненциал камаювчи ёки экспоненциал ортувчи кўпайтувчининг бўлишлигини билдиради. Лекин бу ҳолда шундай кўпайтувчининг бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда системанинг тўла энергияси $E=U+T$ вақт ўтиши билан ўзгарар ва энергия сақланиш қонунига зид келган бўлур эди.

Топилган ω_α частоталарни (19.7) тенгламага қўйиб, A_k коэффициентларнинг тегишли қийматларини аниқлаш мумкин. Аммо бу қийматлар алгебраик тенгламалар (19.7) системасининг бир жинслилигидан фақат маълум аниқликда чиқади. Шундай ҳолни таъкидлаш учун A_k коэффициентларни (ҳар бир берилган ω_α частота учун) ҳақиқий ўзгармас. $\Delta_{k\alpha}$ сонлар ва k индексга боғлиқ бўлмаган ихтиёрий (комплекс) доимий C_α ларнинг маълум тўплами $A_k=\Delta_{k\alpha}C_\alpha$ кўринишда ифодалаймиз.

Демак, дифференциал (19.5) тенгламалар системасининг хусусий ечими қуйидагича:

$$x_k=\Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}.$$

Умумий ечим эса барча хусусий ечимлар йиғиндисига тенг. Ҳақиқий қисмга ўтиб, уни

$$x_k=\sum_\alpha \Delta_{k\alpha}Q_\alpha \qquad (19.9)$$

кўринишда ёзамиз. Бунда

$$Q_\alpha=\mathrm{Re}\left\{C_\alpha\cdot e^{-i\omega_\alpha Q_t}\right\} \qquad (19.10)$$

белгилаш киритилди.

Шундай қилиб, система координаталаридан ҳар бирининг вақт бўйича ўзгариши ихтиёрий амплитуда ва фазали, лекин аниқ частотали s та Q_1, Q_2, . . . , Q_s оддий даврий тебранишларнинг қўшилишидан иборат.

Ҳар бири фақат биргина оддий тебранишда бўла олувчи умумлашган координаталар танлаш мумкин эмасмикан?—деган саволнинг туғилиши табиий. Умумий интеграл (19.9) нинг тузилиши шу масалани ечиш йўлини кўрсатади.

Ҳақиқатан ҳам, s та (19.9) муносабатни Q_α учун s та номаълумли тенгламалар системаси деб қараб, шу системадаги $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ ларни $x_1, x_2, \ldots, x_s$ координаталар орқали ифодалаш мумкин. Демак, Q_α катталиклар янги умумлашган координаталар бўла олади. Уларни *нормал координаталар* дейилади, оддий даврий тебранишлари эса системанинг нормал тебранишлари ҳисобланади

Q_α нормал координаталар ўзларининг таърифларига кўра

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0 \tag{19.11}$$

тенгламани қаноатлантирадилар. Шунга кўра ҳаракат тенгламалари нормал координаталарда s та ўзаро мустақил тенгламаларга ажралади. Ҳар бир нормал координата тезланиши фақат шу координата қийматига боғлиқ. Координатанинг вақтга боғлиқлигини тўла аниқлаш учун фақат унинг ўзининг ва унга тегишли тезликнинг бошланғич қийматларини билиш лозим. Бошқача қилиб айтганда, системанинг нормал тебранишлари тўла мустақилдир.

Баён этилганлардан кўриниб турибдики, нормал координаталар билан ифодаланган Лагранж функцияси ҳар бири ω_α частотали, бир ўлчовли тебранишга мос келувчи ифодалар йиғиндисига ажралади, яъни

$$\frac{m_\alpha}{2}\left(Q_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right)$$

кўринишга эга, бу ерда m_α — мусбат доимий сон. (19.9) даги танланган $\Delta_{k\alpha}$ коэффициентлар тўпламининг умумий кўпайтувчисига ўзгартиш йўли билан m_α га исталган қийматни бериш мумкин. Одатда нормал координаталарни $m_\alpha = 1$ бўладиган қилиб танланади. У ҳолда системанинг тўла Лагранж функцияси қуйидаги кўринишни олади:[1]

---

[1] Частоталар айниган ҳол учун шундан кейин ҳам нормал координаталарни батамом бир қийматли танлаб бўлмайди. Нормал координаталар кинетик ва потенциал энергия ифодасига бир хил алмашинувчи $\sum Q_\alpha^2$ ва $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ йиғиндилар шаклида кирганлигидан, улар устида квадратлар йиғиндисини инвариант қолдирувчи ихтиёрий чизиқли алмаштириш ўтказиш мумкин.

$$L = \frac{1}{2} \sum \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right). \tag{19.12}$$

Агар биз ўзаро таъсирлашувчи, лекин ташқи майдонда бўлмаган зарралар системасини кўраётган бўлсак, у ҳолда бу система эркинлик даражаларининг ҳаммаси ҳам тебранма характерда бўлавермайди. Бундай системаларга мисол қилиб молекулаларни кўрсатиш мумкин. Молекула атомларнинг ички мувозанат ҳолати яқинидаги тебранма ҳаракатидан ташқари, бир бутунлигича илгариланма ва айланма ҳаракат қилиши мумкин.

Илгариланма кўчишга учта эркинлик даражаси тўғри келади. Умумий ҳолда худди шунча айланма эркинлик даражаси бор, шунга кўра n атомли молекуланинг $3n$ та, эркинлик даражасидан ҳаммаси бўлиб $3n-6$ таси тебранма ҳаракатга тегишлидир. Барча атомлари битта тўғри чизиқда жойлашган молекулалар бундан мустасно. Шу тўғри чизиқ атрофида айланиш ҳақида гапириш ўринли бўлмаганлигидан бу ҳолда айланма эркинлик даражаси фақат иккита бўлиб, тебранма ҳаракатга тегишлиси $3n-5$ тадир.

Молекуладаги атомларнинг мувозанат ҳолатида жойлашиш симметриясига алоқадор мулоҳазаларга асосланиб, молекуланинг нормал тебранишлари ички атомлар ҳаракатининг характери бўйича классификацияланиши мумкин. Шу мақсадда группалар назариясидан фойдаланишга асосланган умумий усул қўлланилади. Бу ерда биз фақат баъзи бир элементар мисолларни кўриб ўтамиз.

Агар молекуланинг барча атомлари (n та)бир текисликда бўлсалар, у ҳолда атомларни шу текисликда қолдирувчи ва текисликдан чиқариб юборувчи нормал тебранишларни бир-биридан фарқ қилиш мумкин. Ҳар иккала тебранишлар сонини аниқлаш осон. Ясси ҳаракат учун ҳаммаси бўлиб $2n$ та (улардан иккитаси илгариланма ва бири айланма) эркинлик даражаси мавжудлигидан атомларни текисликдан чиқариб юбормайдиган нормал тебранишлар сони $2n-3$ га тенг. Қолган $(3n-6)-(2n-3)=n-3$ та тебранма эркинлик даражаси атомларни текисликдан чиқарувчи тебранишларга тегишлидир.

Чизиқли молекула учун унинг тўғри чизиқли шаклини сақловчи бўйлама тебранишлар ва атомларни тўғри чизиқдан чиқарувчи тебранишларни бир-биридан ажратиш мумкин. Чизиқ бўйлаб жойлашган n та зарралар ҳаракатига ҳаммаси бўлиб n та эркинлик даражаси тўғри келгани ва улардан бири илгариланма бўлганлигидан атомларни чизиқдан чиқармайдиган тебранишлар сони $(n-1)$ га тенг. Атомларни чизиқдан чиқариб юборувчи тебранишлар эса $(2n-4)$ та, чунки чизиқли молекуланинг тебранма эркинлик даражасининг тўла сони $(3n-5)$ га тенг. Лекин бундай тебранишларнинг ҳар бири икки мустақил йўл билан — молекула ўқидан ўтувчи икки ўзаро перпендикуляр текисликда рўй бериши мумкин, шу сабабли бу тебранишларга $(n-2)$ та турли частота тўғри келади; чунки симметрия нуқтаи назаридан нормал тебранишларнинг ҳар бир шундай жуфти бир хил частотага эга.

Масалалар

1. Лагранж функцияси

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)+\alpha xy$$

бўлган, эркинлик даражаси иккига тенг система тебранишини аниқланг (хусусий частотаси ω_0 бўлган ва αxy ўзаро таъсир билан боғланган иккита бир хил бир ўлчовли системалар).

Ечилиши. Ҳаракат тенгламаси қуйидагича:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\alpha y,\quad \ddot{y}+\omega_0^2y=\alpha x.$$

(19.6) га кўра,

$$A_x(\omega_0^2-\omega^2)=\alpha A_y,\ A_y(\omega_0^2-\omega^2)=\alpha A_x \tag{1}$$

бўлади. Характеристик тенглама $(\omega_0^2-\omega^2)^2=\alpha^2$ дан

$$\omega_1^2=\omega_0^2-\alpha,\quad \omega_2^2=\omega_0^2+\alpha.$$

$\omega=\omega_1$ ҳолда, (1) тенгламаларга кўра $A_x=A_y$, $\omega=\omega_2$ ҳолда эса $A_x=-A_y$. Шунинг учун

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1+Q_2),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1-Q_2)$$

($1/\sqrt{2}$ коэффициентлар текстда келтирилган нормал координаталарни нормалашга мос келади).

$\alpha\ll\omega_0^2$ ҳолда (кучсиз боғланиш)

$$\omega_1\approx\omega_0-\frac{\alpha}{2},\quad \omega_2\approx\omega_0+\frac{\alpha}{2}.$$

x ва y ларнинг ўзгариши яқин частотали икки тебранишнинг қўшилишини билдиради, яъни $\omega_2-\omega_1=\alpha$ частотали урилиш характерига эга (18-§ га қаранг). Бунда x координата амплитудаси максимумдан ўтаётган пайтда y амплитудаси минимумдан ўтади ва аксинча.

2. Қўш ясси маятникнинг (1-расм) кичик тебранишларини аниқланг.

Ечилиши. 5-§, 1-масалада топилган Лагранж функцияси кичик тебранишлар ($\varphi_1\ll 1$, $\varphi_2\ll 1$) учун қуйидаги кўринишни олади:

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-\frac{m_1+m_2}{2}gl_1\varphi_1^2-\frac{m_2}{2}gl_2\varphi_2^2.$$

ҳаракат тенгламалари

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,$$
$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0.$$

га кўра,

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2m_2l_2=0,$$
$$-A_1l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0$$

бўлади. Характеристик тенглама илдизлари қуйидагича:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm$$
$$\pm\sqrt{(m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2\right]}\}.$$

$m_1\to\infty$ да частоталар икки маятникнинг мустақил тебранишларига мос келувчи $\sqrt{g/l_1}$ ва $\sqrt{g/l_2}$ чегараларга интиладилар.

3. Марказий $U=kr^2/2$ майдон (*фазовий осциллятор*) даги зарра ҳаракат траекторияси топилсин.

Ечилиши. Ҳар қандай марказий майдондаги каби бу ерда ҳам ҳаракат бир текисликда бўлади. Шу текисликни xy текислиги ўрнига оламиз x, y координаталар ҳар бирининг ўзгариши бир хил $\omega=\sqrt{k/m}$ частотали оддий тебранишдир:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\qquad y=b\cos(\omega t+\beta)$$

ёки

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi,$$

бу ерда $\varphi=\omega t+\alpha$, $\delta=\beta-\alpha$ белгилаш киритилди.

Юқоридаги ифодалардан $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ ларни топиб ва улар квадратининг йиғиндисини олиб, траектория тенгламасини топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta.$$

Бу — маркази координаталар бошида ётган эллипсдир. $\delta=0$ ёки $\delta=\pi$ бўлса, траектория бузилиб, тўғри чизиқ кесмаларига ажралади.

20-§. Сўнувчи тебранишлар

Шу вақтга қадар биз жисмлар ҳаракати бўшлиқда рўй беради ёки муҳитнинг ҳаракатга таъсирини ҳисобга олмаслик мумкин, деб фараз қилдик. Ҳақиқатда эса жисмнинг ҳаракатини секинлаштиришга интилувчи муҳит таъсири мавжуд. Бунда ҳаракатланувчи жисм энергияси охирида иссиқликка айланади ёки диссипацияланади.

Бундай шароитдаги ҳаракат процесси энди соф механикавий процесс бўлмайди, уни ўрганишда муҳитнинг ҳаракатини ва муҳит ҳамда жисмнинг ички иссиқлик ҳолатларини ҳисобга олиш лозим. Жумладан, энди умумий ҳолда ҳаракатланаётган жисм тезланишини фақат унинг берилган вақт моментидаги координатаси ва тезлигининг функциясидир деб бўлмайди, яъни Лагранж функцияси ёрдамида (механикада қилинганидек) ифодаланиши мумкин бўлган ҳаракат тенгламалари мавжуд эмас. Шундай қилиб, муҳитдаги ҳаракат масаласи энди фақат механика масаласигина эмасдир.

Лекин муҳитдаги ҳаракатни қўшимча ҳадлар киритилган механикавий ҳаракат тенгламалари ёрдамида тақрибан ифодалаш мумкин бўлган маълум ҳоллар учрайди. Мисол тариқасида муҳитдаги ички диссипатив процессларга хос частоталарга нисбатан кичик бўлган частотали тебранишларни кўрсатиш мумкин. Шундай шарт бажарилганда, жисмга (шу муҳитда) фақат унинг тезлигига боғлиқ бўлган ишқаланиш кучи таъсир этади, деб ҳисоблаш мумкин.

Ундан ташқари, агар бу тезлик етарлича кичик бўлса, у ҳолда ишқаланиш кучини тезлик даражалари бўйича қаторга ёйиш мумкин. Қаторнинг нолинчи ҳади нолга тенг, чунки қўзғалмас жисмга ҳеч қандай ишқаланиш кучи таъсир этмайди ва биринчи мавжуд ҳади тезликка пропорционал. Шундай қилиб, умумлашган координатаси x бўлган бир ўлчовли кичик тебранишда системага таъсир этувчи умумлашган $f_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучини

$$f_{\text{ишқ}} = -\alpha\dot{x}$$

кўринишда ёзиш мумкин (бу ерда α—мусбат коэффициент, манфий ишора кучнинг тезлик йўналишига қарама қарши йўналганини кўрсатади). Бу кучни ҳаракат тенгламасининг ўнг томонига киритиб,

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{20.1}$$

ифодани оламиз. Уни m га бўламиз ва

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda \tag{20.2}$$

белгилаш киритамиз. ω_0—системанинг ишқаланиш йўқлигидаги эркин тебраниш частотаси. λ катталик *сўниш коэффициенти* дейилади[1])

Шундай қилиб,

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{20.3}$$

келиб чиқади. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли тенгламаларни ечишнинг умумий қоидаларига кўра, ечимни $x = e^{rt}$ деб оламиз ва r учун характеристик тенглама топамиз:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

(20.3) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \; r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Бу ерда икки ҳолни кўриб ўтиш лозим.

Агар $\lambda < \omega_0$ бўлса, у ҳолда r нинг иккита комплекс қўшма қиймати бор. Бу ҳолда ҳаракат тенгламасининг умумий ечими

$$x = \operatorname{Re}\{A\exp(-\lambda t - it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\}$$

кўринишда олинади. Бу ерда A—ихтиёрий комплекс доимий.Бошқачасига қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{20.4}$$

бунда a ва α—ҳақиқий ўзгармас сонлар. Шу формулалар орқали ифодаланадиган ҳаракат сўнувчи тебранишлар бўлади. Уни амплитудаси экспоненциал камаювчи гармоник тебранишлар деб қараш ҳам мумкин. Амплитуданинг камайиш тезлиги λ кўрсатгич билан аниқланади, тебраниш „частотаси“ ω эса ишқаланиш бўлмагандаги эркин тебраниш частотасидан кичикдир; $\lambda \ll \omega_0$ да

---

[1]) Ўлчамсиз кўпайтма λT (бундаги $T{=}2\pi/\omega$—давр) сўнишнинг *логарифмик декременти* дейилади.

ω ва ω_0 орасидаги фарқ—иккинчи тартибли кичик сон. Частотанинг ишқаланишда камайиши олдиндан маълум, чунки ишқаланиш умуман ҳаракатни секинлатади.

Агар $\lambda \ll \omega_0$ бўлса, бир $2\pi/\omega$ давр давомида сўнар тебраниш амплитудаси деярли ўзгармайди. Бу ҳолда координата ва тезлик квадратларининг ўртача қийматларини (бир давр давомидаги) аниқлаган маъқул. Ўртача қиймат топишда $e^{-\lambda t}$ кўпайтувчининг ўзгариши натижасида ҳисобга олинмайди. Шу сабабли аниқланган ўртача квадратлар $e^{-2\lambda t}$ га пропорционал бўлиб чиқади. Демак, система энергияси ҳам ўрта ҳисобда

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t} \tag{20.5}$$

қонун бўйича камаяди, бу ерда E_0—энергиянинг бошланғич қиймати.

Энди $\lambda > \omega_0$ бўлган ҳолни кўрайлик. Бунда r нинг иккала қиймати ҳам ҳақиқий, ишораси эса манфий бўлганидан ечимнинг умумий кўриниши

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}_0)t}. \tag{20.6}$$

Етарлича катта ишқаланишда содир бўладиган бу хил ҳаракат $|x|$ нинг камайишидан, яъни мувозанат ҳолатига асимптотик яқинлашишдан ($t \to \infty$ да) иборатдир. Ҳаракатнинг мазкур тури *апериодик* (нодаврий) *сўниш* дейилади.

Ниҳоят, $\lambda = \omega_0$ бўлган махсус ҳолда характеристик тенглама фақат битта (қўш) $r = -\lambda$ илдизга эга. Маълумки, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\lambda t} \tag{20.7}$$

кўринишда бўлади. Бу—нодаврий сўнишнинг махсус ҳоли бўлиб, у ҳам тебраниш характерига эга эмас.

Кўп эркинлик даражасига эга бўлган система учун x_i координаталарга мос умумлашган ишқаланиш кучлари тезликларнинг

$$f_{i\text{ишқ}} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k \tag{20.8}$$

кўринишдаги чизиқли функцияларидир. Соф механикавий мулоҳазаларга кўра α_{ik} коэффициентларнинг i ва k индекслари бўйича симметрия хоссалари ҳақида ҳеч қандай хулоса чиқариш мумкин эмас. Статистик физика усуллари ёрдамида эса доимо

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{20.9}$$

эканини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун (20.8) ифодалар *диссипатив функция* деб аталувчи

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \tag{20.10}$$

квадратик функциялардан олинган

$$f_{i\text{ишқ}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{20.11}$$

ҳосилалар кўринишида ёзилиши мумкин.

(20.11) кучлар Лагранж тенгламаларининг ўнг томонига киритилиши керак:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{20.12}$$

Диссипатив функция ўз ҳолича муҳим физикавий маънога эга: у орқали энергиянинг системадаги диссипация интенсивлиги аниқланади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун система механикавий энергиясининг вақт бўйича ҳосиласини ҳисоблаш керак:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

F тезликларнинг квадратик функцияси бўлганидан бир жинсли функциялар ҳақидаги Эйлер теоремасига кўра, юқоридаги тенгликнинг ўнг тарафидаги йиғинди $2F$ ни беради. Шундай қилиб,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \tag{20.13}$$

яъни система энергиясининг ўзгариш тезлиги иккиланган диссипатив функция орқали аниқланади. Диссипатив процесслар энергиянинг камайишига олиб келганидан ҳар доим $F > 0$, яъни (20.10) квадратик шакл мусбат бўлиши керак.

21- §. Ишқаланиш бўлгандаги мажбурий тебранишлар

Ишқаланиш бўлгандаги мажбурий тебранишларни текшириш 18- § да кўриб ўтилган ишқаланишсиз тебранишларни ўрганишга жуда ўхшайди. Қуйида биз муҳим аҳамиятга эга бўлган даврий мажбур этувчи куч таъсиридаги ҳолни батафсил баён этамиз.

(20.1) тенгламанинг ўнг тарафига ташқи $f\cdot\cos\gamma t$ кучни киритиб ва m га бўлиб, ушбу ҳаракат тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t. \qquad (21.1)$$

Бу тенглама ечимини комплекс шаклда қидириш қулай. Бунинг учун ўнг қисмида $\cos\gamma t$ ўрнига $e^{-i\gamma t}$ ни ёзамиз:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}e^{-i\gamma t}.$$

Хусусий интегрални $x=B\cdot e^{-i\gamma t}$ кўринишда излаймиз, у ҳолда

$$B=\frac{f}{m(\omega_0^2-\gamma^2-2i\lambda\gamma)}. \qquad (21.2)$$

B ни $b\cdot e^{-i\delta}$ орқали ифодаласак,

$$b=\frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega_0^2}. \qquad (21.3)$$

Ниҳоят, $Be^{-i\gamma t}=be^{-i(\gamma t+\delta)}$ ифоданинг ҳақиқий қисмини ажратиб, (21.1) тенгламанинг хусусий интегралини топамиз, унга эса ўнг қисми нолга тенг бўлган тенгламанинг (аниқ бўлиши учун $\omega_0>\lambda$ ҳол) умумий ечимини қўшиб, қуйидаги натижани оламиз:

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta). \qquad (21.4)$$

Биринчи қўшилувчи вақт ўтиши билан экспоненциал камайганидан етарлича катта вақт ўтгандан сўнг фақат иккинчи ҳад қолади, яъни

$$x=b\cos(\gamma t+\delta). \qquad (21.5)$$

γ частота ω_0 га яқинлашганда (21.3) ифодадаги мажбурий тебраниш амплитудаси b нинг қиймати ошса ҳам, лекин ишқаланиш йўқлигидаги резонансда бўлганидек, чексизга айланмайди.

f кучнинг берилган амплитудасида тебраниш амплитудаси максимумга эришиши учун частота $\gamma=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$ бўлиши керак; $\lambda\ll\omega_0$ да бу қиймат ω_0 дан фақат иккинчи тартибли кичик сонга фарқ қилади.

Резонанс яқинидаги соҳани кўрайлик. $\gamma=\omega_0+\varepsilon$ бўлсин (ε—кичик сон), унинг устига $\lambda\ll\omega_0$ деб ҳам ҳисоблаймиз. У ҳолда (21.2) да тақрибан

$$\gamma^2-\omega_0^2=(\gamma+\omega_0)(\gamma-\omega_0)\approx2\omega_0\varepsilon,\quad 2i\lambda\gamma\approx2i\lambda\omega_0$$

дейиш мумкин. Шунга кўра

$$B=-\frac{f}{2m(\varepsilon+i\lambda)\omega_0} \qquad (21.6)$$

ёки

$$b=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{\lambda}{\varepsilon}. \qquad (21.7)$$

Мажбур этувчи куч частотаси ўзгарганида шу куч ва тебраниш орасидаги δ фазалар фарқи ўзгаришининг характерли хусусиятини кўрайлик. Бу фарқ ҳар доим манфий, яъни тебраниш ташқи кучга нисбатан „кечикади“. Резонансдан узоқда, $\gamma<\omega_0$ бўлган томонда δ нолга интилади, $\gamma>\omega_0$ тарафда эса у $-\pi$ га яқинлашади. δ нинг нолдан $-\pi$ гача ўзгариши ω_0 га яқин бўлган $\sim\lambda$ кенгликдаги тор частоталар соҳасида рўй беради; $\gamma=\omega_0$ бўлганда фазалар фарқи $-\pi/2$ дан ўтади. Шунга кўра ишқаланиш бўлмагандаги мажбурий тебраниш фазасининг π га ўзгариши $\gamma=\omega_0$ да сакраб юз беради. ((18.4) даги иккинчи ҳад ишорасини ўзгартиради); ишқаланиш эса бу сакрашни „текислаб“ юборади.

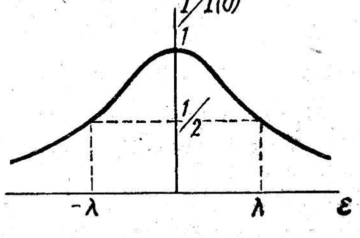
Система мажбурий тебраниб (21.5), ҳаракати барқарорлашганида унинг энергияси ўзгармай қолади. Шу вақтнинг ўзида система ташқи куч манбаидан узлуксиз ҳолда энергия ютиб туради. Бу энергия ўз навбатида ишқаланиш туфайли диссипацияланади. Вақт бирлиги ичида ютилувчи ўртача энергия миқдорини ташқи куч частотасининг функцияси $I(\gamma)$ сифатида оламиз. (20.13) га кўра

$$I(\gamma)=2\overline{F},$$

бу ерда $\overline{F}$—диссипатив функциянинг тебраниш даври бўйича ўртача қиймати. Диссипатив функциянинг (20.11) ифодаси бир ўлчовли ҳаракат учун $F=\alpha\frac{\dot{x}^2}{2}=$ $=\lambda m\dot{x}^2$ кўринишни олади. Бунга (21.5) ни қўйсак,

$$F=\lambda mb^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta)$$

бўлади. Синус квадратининг вақт бўйича ўртача қиймати 1/2 га тенг, шунинг учун



18-расм.

$$I(\gamma)=\lambda m b^2\gamma^2. \tag{21.8}$$

Резонанс яқинида эса

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}. \tag{21.9}$$

(21.9) ифода (21.7) даги тебраниш амплитудасини (21.8) га қўйишдан келиб чиқади.

Ютилишнинг частотага бундай боғланиши *дисперсион* боғланиш дейилади.

Резонанс эгри чизиғининг ярим кенглиги деб ε нинг шундай абсолют қиймати $|\varepsilon|$ га айтиладики, бу қийматда $I(\varepsilon)$ ўзининг $\varepsilon=0$ даги максимал қийматидан икки марта камаяди. (21.9) га кўра бу ҳолда мазкур кенглик сўниш кўрсаткичи λ га тенг экан. Максимум баландлиги

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$

эса λ га тескари пропорционал. Шундай қилиб, сўниш кўрсаткичи камайганда резонанс эгри чизиғи тораяди ва кўтарилади, яъни унинг максимуми анча ўткирлашади. Резонанс эгри чизиғи остидаги юза эса ўзгармай қолади:

$$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma=\int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon.$$

$|\varepsilon|$ катталашганда $I(\varepsilon)$ жуда тез камайганидан унинг катта $|\varepsilon|$ лар соҳаси бари-бир ҳисобга олинмайдиган даражада камдир ва шу сабабли, интеграллашда $I(\varepsilon)$ ни (21.9) ҳолида ёзиш, қуйи чегарани эса $-\infty$ га алмаштириш мумкин. Яъни

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m}. \tag{21.10}$$

22- §. Параметрик резонанс

Шундай берк бўлмаган тебраниш системалари борки, ташқи таъсир бундай система параметрларининг вақт ўтиши билан ўзгаришига сабаб бўлади[1]).

---

[1]) Шундай системалардан бири осма нуқтаси вертикал йўналишда даврий ҳаракат қилаётган маятникдир (масалага қаранг).

Бир ўлчовли система параметрлари (17.3) Лагранж функциясидаги m ва k коэффициентлардир; агар улар вақтга боғлиқ бўлсалар, у ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})+kx=0. \tag{22.1}$$

t ўрнига $d\tau=dt/m(t)$ га мувофиқ янги мустақил τ ўзгарувчини киритиш йўли билан (22.1) тенглама қуйидагича ўзгартирилади:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+mkx=0.$$

Шунинг учун, умумийликка ҳеч бир чегара қўймасдан, (22.1) дан $m=\text{const}$ деб олинганда чиқиши мумкин бўлган

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(t)x=0 \tag{22.2}$$

кўринишдаги ҳаракат тенгламасини кўриб ўтиш кифоя.

$\omega(t)$ функциянинг кўриниши масаланинг шартидан олинади; бу функцияни бирор γ частотали даврий (даври $T=\frac{2\pi}{\gamma}$ бўлсин) функция деб, фараз қилайлик. Шунга кўра

$$\omega(t+T)=\omega t.$$

Демак, (22.2) тенглама ҳам $t\to t+T$ алмаштиришга нисбатан инвариант, яъни агар $x(t)$ функция тенглама ечими бўлса, у ҳолда $x(t+T)$ ҳам ечимдир. Бошқача қилиб айтганда, агар $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ лар (22.2) нинг иккита мустақил интеграллари бўлса, $t\to t+T$ алмашинишда улар бири иккинчиси орқали чизиқли ифодаланади. Бунда x_1 ва x_2 ни шундай танлаш мумкинки, уларнинг $t\to t+T$ алмаштиришдаги ўзгариши фақат доимий сонга кўпайтиришдан иборат бўлсин:

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t), \qquad x_2=(t+T)=\mu_2x_2(t).$$

Шундай хусусиятга эга бўлган функцияларнинг энг умумий кўриниши

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\,\Pi_1(t), \quad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\,\Pi_2(t) \tag{22.3}$$

дан иборат, бу ерда $\Pi_1(t)$ ва $\Pi_2(t)$ — вақтнинг соф даврий (T даврли) функциялари.

μ_1 ва μ_2 доимийлар ўзаро маълум муносабат орқали боғланишлари лозим. Ҳақиқатан ҳам,

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

тенгламаларни мос равишда x_2 ва x_1 га кўпайтириб ва уларнинг бирини иккинчисидан ҳадлаб айириб қуйидагини оламиз:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

ёки

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const}. \tag{22.4}$$

Лекин (22.3) кўринишдаги исталган $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ функциялар учун (22.4) тенгликнинг чап тарафидаги ифода t аргумент T га ўзгарганда $\mu_1 \mu_2$ га кўпайтирилади. Шунинг учун (22.4) тенгликнинг бажарилиши ҳар қалай

$$\mu_1 \mu_2 = 1 \tag{22.5}$$

бўлишини талаб этади.

$\mu_1 \mu_2$ доимийлар ҳақидаги бундан кейинги хулосалар (22.2) тенглама коэффициентларининг ҳақиқийлигидан келиб чиқади. Агар $x(t)$ шундай тенгламанинг бирор интеграли бўлса, у ҳолда комплекс қўшма $x^*(t)$ функция ҳам ўша тенгламани қаноатлантириши керак. Демак, μ_1, μ_2 доимийлар жуфти μ_1^*, μ_2^* жуфтга мос келиши керак, яъни ёки $\mu_1 = \mu_2^*$ бўлиши ёки μ_1 ва μ_2 ҳақиқий сонлар бўлиши лозим. Биринчи ҳолда (22.5) ни назарда тутиб, $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ эканини аниқлаймиз, яъни $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; μ_1 ва μ_2 доимийлар модули бирга тенг.

Иккинчи ҳолда эса (22.2) нинг иккита мустақил интеграли

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\,\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T}\,\Pi_2(t) \tag{22.6}$$

кўринишга эга (μ — бирга тенг бўлмаган мусбат ёки манфий ҳақиқий сон). Бу функциялардан бири (биринчиси ёки иккинчиси $|\mu| > 1$ ёки $|\mu| < 1$ бўлганда) вақт ўтиши билан экспоненциал ортади. Демак, системанинг тинчликдаги ҳолати ($x = 0$ даги мувозанат ҳолати) турғун бўлмайди: бу ҳолатдан жуда кучсиз оғишнинг ўзи x силжишнинг вақт ўтиши билан тезда ортиши учун кифоядир. Бу ҳодиса *параметрик резонанс* дейилади.

x ва $\dot{x}$ нинг бошланғич қийматлари аниқ нолга тенг бўлганида, улар кейинчалик ҳам нолга тенг бўлиб қолса эди, бу хусусият одатдаги резонанс (18-§) дагидан фарқ қилган бўлар эди (одатдаги резонансда вақт ўтиши билан силжишнинг ортиб бориши бошланғич қийматлар нолга тенг бўлганда ҳам рўй беради).

$\omega(t)$ функция қандайдир ўзгармас ω_0 катталикдан кам фарқ қилган ва оддий

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t) \tag{22.7}$$

даврий функция бўлган муҳим бир ҳол учун параметрик резонанснинг пайдо бўлиш шартини аниқлаймиз. (22.7) даги $h \ll 1$ ва у доимий мусбат сон (координата бошини мос ҳолда танлаб бунга эришиш мумкин). Агар $\omega(t)$ функциянинг частотаси иккиланган ω_0 частотага яқин бўлса, параметрик резонанс вужудга келади. Шунинг учун

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда $\varepsilon \ll \omega_0$.

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,[1 + h\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]\,x = 0 \tag{22.8}$$

ҳаракат тенгламасининг ечимини

$$x = a(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \tag{22.9}$$

кўринишда излаш лозим, бу ерда $a(t)$ ва $b(t)$ лар cos ва sin кўпайтувчиларга қараганда секин ўзгарувчи вақт функцияларидир. Ечимнинг бундай кўриниши аниқ бўлолмайди, албатта. $x(t)$ функция аслида $\omega_0 + \varepsilon/2$ дан $(2\omega_0 + \varepsilon)$ нинг бутун каррали қийматларига фарқ қилувчи частотали ҳадларни ҳам ўз ичига олади; лекин бу ҳадлар h бўйича юқори тартибли кичик сон бўлиб, биринчи яқинлашишда уларни ҳисобга олмаслик мумкин. γ частоталарнинг тебранишлар турғун бўлган соҳани у беқарор бўлган соҳадан ажратувчи қийматларига (22.6) да $\mu = 1$, (22.9) да эса вақтга боғлиқ бўлмаган a ва b доимий коэффициентлар мос келади. Шунга кўра, резонанс соҳаси чегарасини аниқлаш учун a ва b коэффициентли (22.9) ифода γ нинг (ёки, мос ҳолда, ε нинг) қандай қийматларида ҳаракат тенгламасининг ечими бўлишини топиш керак.

(22.9) ни (22.8) га қўйиб, тригонометрик кўпайтмани

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

йиғиндиларга ажратиш лозим ва ҳ. к. ҳамда юқорида айтиб ўтилганга кўра, $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ частотали ҳадларни ташлаб юбориш керак. Оқибатда қуйидаги ифодани оламиз:

$$b\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+a\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

Бу тенгликнинг бажарилиши учун sin ва cos кўпайтувчилар олдидаги коэффициентлар бир вақтнинг ўзида нолга тенг бўлиши керак: бундан $\varepsilon=-\frac{h\omega_0}{2}$ ва $a=0$ ёки $\varepsilon=\frac{h\omega_0}{2}$ ва $b=0$ лар ҳосил бўлади. ε нинг шу қийматлари параметрик резонанс пайдо бўлиш соҳасининг чегарасини беради. Шундай қилиб, резонанс $2\omega_0$ частота атрофидаги

$$-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2} \qquad (22.10)$$

оралиқда юз беради. Параметрик резонанс $2\omega_0/n$ (n — ихтиёрий бутун сон) кўринишдаги қийматларга яқин γ частоталарда ҳам юз беради. Аммо резонанс соҳалар кенглиги n оргиши билан h^n каби тезда камаяди.

Масала

Осма нуқтаси вертикал йўналишда тебранувчи ясси маятникнинг кичик тебранишлари учун параметрик резонанс шартлари топилсин.

Ечилиши 5-§ нинг 2-масаласида топилган Лагранж функциясига кўра кичик ($\varphi\ll 1$) тебранишлар учун қуйидаги ҳаракат тенгламасини оламиз.

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left[1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]\varphi=0,$$

бу ерда $\omega_0^2=g/l$. Бундан кўринишича, текстда киритилган h параметр вазифасини $4\frac{a}{l}$ нисбат бажаради. (22.10) шарт бу ҳолда

$$|\varepsilon|<\frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$$

кўринишни олади.

23-§. Ангармоник тебранишлар

Юқорида баён этилган кичик тебранишлар назарияси системанинг потенциал ва кинетик энергиясини координаталар ва тезликлар бўйича фақат иккинчи тартибли ҳадларни қолдирган ҳолда қаторга ёйишга асосланади; бунда ҳаракат тенгламалари чизиқли бўлганлигидан мазкур яқинлашишда тебраниш ҳам *чизиқли тебранишлар* дейилади. Тебранишлар амплитудалари етарлича кичик бўлган ҳолда бундай ёйиш ўринлидир, лекин тебранишнинг навбатдаги яқинлашишини (ангармоник ёки чизиқлимас деб аталган) ҳисобга олиш ҳаракатнинг баъзи бир кучсиз бўлса-да, ҳар ҳолда сифат жиҳатдан янги хусусиятларини очиб беради.

Лагранж функциясини учинчи тартибли ҳадларгача ёйилик. У ҳолда потенциал энергияда x_i координаталар бўйича учинчи даражали ҳадлар, кинетик энергияда эса тезликлар ва координаталарнинг $x_i\ x_k\ x_l$ кўринишдаги ҳадлари пайдо бўлади; илгариги (19.3) ифодага нисбатан юзага келган бу фарқ $a_{ik}(q)$ функциялар ёйилмасидаги x бўйича биринчи тартибли ҳадларнинг сақлаб қолинишига алоқадордир. Шундай қилиб, Лагранж функцияси

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}x_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l \qquad (23.1)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда n_{ikl}, l_{ikl} янги ўзгармас коэффициентлар.

Агар ихтиёрий x_i координаталардан нормал координаталар Q_α га ўтсак, у ҳолда бу яқинлашишнинг чизиқлилигига кўра (23.1) даги учинчи ва тўртинчи йиғиндилар x_i координаталар ва $\dot{x}_i$ тезликлар ўрнида Q_α ва $\dot{Q}_\alpha$ лар турган ўхшаш йиғиндиларга ўтадилар. Бу йиғиндилардаги коэффициентларни $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ ва $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ билан белгилаб,

$$L = \frac{1}{2}\sum(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \qquad (23.2)$$

кўринишидаги Лагранж функциясини оламиз. Бу Лагранж функциясига

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_a(Q,\ \dot{Q},\ \ddot{Q}) \qquad (23.3)$$

(бу ерда f_α функция Q координаталар ва уларнинг вақт бўйича ҳосилаларининг иккинчи тартибли бир жинсли функциялари) кўринишдаги ҳаракат тенгламалари тўғри келади.

Кетма-кет яқинлашиш усулини қўлланиб, бу тенгламалар ечимини

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)} \qquad (23.4)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ ва $Q_\alpha^{(1)}$ функция „ғалаёнланмаган“

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0$$

тенгламаларни қаноатлантиради, яъни улар одатдаги

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha) \qquad (23.5)$$

гармоник тебранишларни ифодалайдилар.

Навбатдаги яқинлашишда (23.3) тенгламаларнинг ўнг томонида фақат иккинчи тартибли кичик ҳадларни қолдириб, $Q_\alpha^{(2)}$ катталиклар учун

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)},\ \dot{Q}^{(1)},\ \ddot{Q}^{(1)}) \qquad (23.6)$$

тенгламаларни оламиз. (23.6) нинг ўнг томонига (23.5) қийматлар қўйилиши керак. Натижада биз ўнг томони оддий даврий функциялар йиғиндисига алмаштирилиши

мумкин бўлган чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларни топамиз. Жумладан,

$$Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\beta t + \alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] +$$

$$+ \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

Шундай қилиб, (23.6) нинг ўнг томонида частоталари системанинг хусусий частоталари йиғиндиси ва айирмасига тенг тебранишларга тегишли ҳадлар ёзилди. Тенгламалар ечимини худди шундай даврий кўпайтувчилари бўлган ифода кўринишида излаш лозим. Хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, иккинчи яқинлашишда системанинг ω_α частотали нормал тебранишларига

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \qquad (23.7)$$

частотали (шу жумладан, иккиланган $2\omega_\alpha$ частоталар ва узгармас силжишга мос келувчи 0 частота) тебранишлар қўшилади. Бу частоталар *комбинацион частоталар* дейилади. Комбинацион тебранишлар амплитудасига мос келадиган нормал тебранишларнинг $a_\alpha a_\beta$ кўпайтмасига (ёки a_α^2 квадратларга), пропорционалдир.

Навбатдаги яқинлашишларда янада юқори тартибли ҳадларни ҳисобга олинса, Лагранж функциялари ёйилмасида частоталари кўп сонли ω_α частоталар йиғиндиси ва айирмасига тенг бўлган комбинацион тебранишлар вужудга келади. Бундан ташқари яна янги ҳодиса ҳам рўй беради.

Учинчи яқинлашишнинг ўзидаёқ комбинацион частоталар орасида дастлабки (бошланғич) ω_α (комбинация кўриниши $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$) ларга тенг частоталар пайдо бўлади. Демак, юқорида баён этилган усул қўлланилса, ҳаракат тенгламаларининг ўнг томонига резонанс ҳадлар ҳам кириб қолади. Бу ҳадлар ечимда амплитудаси вақт ўтиши билан ортиб борадиган ҳадларни вужудга келтиради. Лекин маълумки, ташқи энергия манбаи бўлмаган ҳолда ёпиқ системада тебраниш интенсивлигининг ўз-ўзидан ортиб бориши мумкин эмас.

Аслида, юқори яқинлашишларда асосий ω_α частоталар потенциал энергиянинг квадратик ифодасида қатнашувчи „ғалаёнланмаган“ $\omega_\alpha^{(0)}$ қийматларга нисбатан ўзгаради. Ечимда ортиб борувчи ҳадларнинг пайдо бўлиши эса етарлича катта t ларда ўринсиз бўлган

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

кўринишдаги ёйилмага алоқадордир.

VI боб

ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТИ

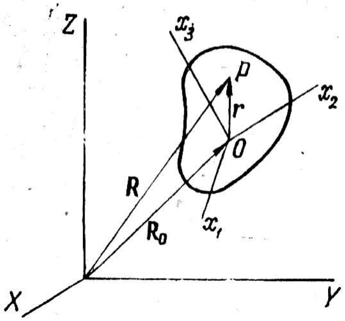
24-§. Бурчак тезлик

Оралари даги масофалари ўзгармас бўлган моддий нуқталар системасини механикада *қаттиқ жисм* деб таърифлаш мумкин. Табиатда реал мавжуд бўлган системалар бу шартга фақатгина тақрибан бўйсунади. Лекин одатдаги шароитларда қаттиқ жисмларнинг кўпчилиги ўз шакли ва ўлчамларини шунчалик кам ўзгартирадиларки, у ҳолда биз бирор яхлит нарса деб кўрилаётган қаттиқ жисм ҳаракатининг қонунларини ўрганаётганимизда бундай ўзгаришларни назарга олмасак-ҳам бўлади.

Кейинги баёнимизда биз қаттиқ жисмни моддий нуқталарнинг дискрет мажмуаси (тўплами) сифатида кўрамиз. Шу йўл билан хулосалар анча соддалаштирилади. Бироқ бу ҳол механикада қаттиқ жисмларни, уларнинг ички тузилишларидан қатъи назар, ҳақиқатан ҳам туташ деб қаралишига зид келмайди. Дискрет нуқталар бўйича йиғиндини ўз ичига олган формулалардан яхлит жисмга тегишли формулаларга ўтиш учун зарралар массаси ўрнига dV ҳажм элементидаги ρdV (ρ — масса зичлиги) масса олинади ва жисмнинг бутун ҳажми бўйича интегралланади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини баён этиш учун иккита координаталар системаси киритамиз: „қўзғалмас“, яъни xyz инерциал система ва ҳаракатланувчи $x_1=x_2$, $x_2=y$, $x_3=z$ координаталар системаси. Кейинги система қаттиқ жисмга мустаҳкам боғланган ва унинг барча ҳаракатида қатнашади деб фараз қилинади. Бу система бошини жисмнинг инерция марказига жойлаштириш қулайдир.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан вазияти ҳаракатланувчи система ҳолати орқали тўла аниқланади.



19-расм.

Айтайлик, $\mathbf{R}_0$ радиус-вектор ҳаракатланаётган система боши 0 нинг ҳолатини кўрсатсин (19-расм). Бу система ўқларининг қўзғалмас системага нисбатан ориентацияси эса учта мустақил бурчаклар орқали берилади. Шундай қилиб, биз $\mathbf{R}_0$ векторнинг учта компоненти билан бирга ҳаммаси бўлиб олтита координатага эга бўламиз. Демак, ҳар бир қаттиқ жисм олтита эркинлик даражасига эга бўлган механикавий системадир.

Қаттиқ жисмнинг чексиз кичик ихтиёрий силжишини кўриб ўтайлик. Силжишни икки қисм йиғиндиси ҳолида тасвирлаш мумкин. Улардан бири — жисмнинг чексиз кичик параллел кўчиши бўлиб, натижада инерция маркази бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга қўзғалувчи координаталар системаси ўқларининг ориентацияси ўзгармагани ҳолда ўтади. Иккинчиси — инерция маркази атрофида чексиз кичик бурилишдан сўнг қаттиқ жисм охирги ҳолатга келади.

Қаттиқ жисм ихтиёрий нуқтасининг қўзғалувчи координата системасидаги радиус-векторини $\mathbf{r}$ билан, қўзғалмас системадаги радиус-векторини эса $\mathbf{R}$ билан белгилаймиз. У ҳолда P нуқтанинг чексиз кичик $d\mathbf{R}$ силжиши инерция маркази билан биргаликдаги $d\mathbf{R}_0$ кўчиш билан инерция марказига нисбатан чексиз кичик $d\varphi$ бурчакка бурилишдаги $[d\varphi\cdot\mathbf{r}]$ кўчишлар [(9.1) га қаралсин] йиғиндисига тенг бўлади:

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_0 + [d\varphi\cdot\mathbf{r}].$$

Бу тенгликни мазкур кўчиш юз берган dt вақтга бўлиб ва

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{\Omega} \qquad (24.1)$$

тезликлар киритиб, улар орасидаги

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega r}]. \qquad (24.2)$$

муносабатни топамиз.

V вектор қаттиқ жисм инерция марказининг тезлигидир: уни инерция марказининг *илгариланма* ҳаракат тезлиги деб ҳам атайдилар. **Ω** вектор қаттиқ жисм айланишининг *бурчак тезлиги* дейилади; унинг йўналиши ($d\varphi$ йўналиши каби) айланиш ўқи йўналишига мос тушади. Шундай қилиб, жисм исталган нуқтасининг қўзғалмас координата системасига нисбатан **v** тезлигини жисмнинг илгариланма ҳаракат тезлиги ва айланишдаги бурчак тезлик орқали ифодалаш мумкин.

Шуни таъкидлаш лозимки, (24.2) формулани чиқаришда координата бошининг жисм инерция маркази сифатида ўзига хос хусусиятларидан бутунлай фойдаланилмади. Бу танлашнинг афзалликлари, кейинроқ, ҳаракатланаётган жисм энергиясини ҳисоблашда ойдинлашади.

Энди қаттиқ жисм билан мустаҳкам боғланган координата системасининг координата боши инерция маркази O да эмас, балки O дан **a** масофадаги қандайдир O' нуқтада дейлик. Бу система боши O' нинг кўчиш тезлигини **V′** орқали, унинг айланиш бурчак тезлигини эса **Ω′** орқали белгилаймиз.

Яна қаттиқ жисмнинг бирор P нуқтасини олайлик ва унинг O' га нисбатан радиус-векторини **r′** билан белгилайлик. У ҳолда $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ва (24.2) га қўйиб,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega a}] + [\mathbf{\Omega r}']$$

муносабатни оламиз. Иккинчи томондан, **V′** ва **Ω′** нинг таърифига кўра, $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{r}']$ бўлиши лозим. Демак,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega a}], \quad \mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}. \qquad (24.3)$$

Кейинги тенглик жуда муҳимдир. Ундан кўринишича, жисмга боғланган координата системасининг ҳар бир берилган вақт моментидаги бурчак тезлиги мазкур системанинг танланишига боғлиқ эмас экан. Барча шундай системалар берилган вақт моментида бир-бирига параллел ўқлар атрофида абсолют қиймати бўйича бир хил **Ω** тезликда айланадилар. Шу сабабли **Ω** ни қаттиқ жисм айланиши (худди таърифлаганимиз каби) нинг бурчак тезлиги дейишга ҳақлимиз. Илгариланма ҳаракат тезлиги эса бундай „абсолют" характерга эга эмас.

(24.3) нинг биринчи формуласига кўра, агар **V** ва **Ω** координата боши O нинг қандайдир танланишида (берилган вақт моментида) ўзаро перпендикуляр бўлсалар, у ҳолда улар (**V′** ва **Ω′**) исталган бошқа O' нуқтага нисбатан аниқланганда ҳам ўзаро перпендикуляр бўладилар. (24.2) га биноан, бу ҳолда жисмнинг барча нуқталарининг **v** тезликлари **Ω** га перпендикуляр бўлган текисликда ётадилар. Бунда ҳар доим шундай O' нуқта[1] танлаш мумкинки, унинг **V′** тезлиги нолга тенг бўлади. Шунга кўра, қаттиқ жисм ҳаракати (берилган моментда) O' нуқтадан ўтган ўқ атрофидаги соф айланишдан иборат бўлади. Бу ўқ жисмнинг *оний айланиш* ўқи дейилади[2].

Кейинчалик ҳар доим биз ҳаракатланаётган координаталар системасининг боши жисмнинг инерция марказида олинган, шунга кўра жисмнинг айланиш ўқи ҳам шу нуқтадан ўтади деб фараз қиламиз. Жисм ҳаракатланаётганда умуман, **Ω** нинг абсолют қиймати ҳам, айланиш ўқининг йўналиши ҳам ўзгаради.

25-§. Инерция тензори

Қаттиқ жисм кинетик энергиясини ҳисоблаш учун жисмни моддий нуқталардан иборат дискрет система деб кўрамиз ва қуйидагини ёзамиз:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

бу ерда йиғинди жисмнинг барча нуқталари бўйича олинади. Мазкур ҳолда ва қуйида биз формулалар ёзишни соддалаштириш мақсадида бу нуқталарни белгиловчи индексларни тушириб қолдирамиз.

Бу тенгликка (24.2) ни қўйиб,

$$T = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + [\mathbf{\Omega r}])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m\mathbf{V}[\mathbf{\Omega r}] + \sum \frac{m}{2} [\mathbf{\Omega r}]^2$$

ни оламиз. **V** ва Ω тезликлар қаттиқ жисмнинг барча

---

[1] У жисмнинг ташқарисида ётиши ҳам мумкин.

[2] **V** ва Ω лар ўзаро перпендикуляр бўлмаган умумий ҳолда эса координата бошини **V** ва Ω лар параллел бўладиган қилиб танлаш мумкин, яъни берилган вақт моментида ҳаракат бирор ўқ атрофида айланиш ва шу ўқ бўйича илгариланма кўчиш мажмуасидан иборат бўлади.

нуқталари учун бир хил бўлганидан биринчи ҳаддаги $V^2/2$ йиғинди $\sum$ белгисидан ташқарига чиқарилади, жисм массаси $\sum m$ ни эса биз μ орқали белгилаймиз. Иккинчи ҳадни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m\mathbf{V}[\mathbf{\Omega r}] = \sum m[\mathbf{V\Omega}]\mathbf{r} = [\mathbf{V\Omega}] \sum m\mathbf{r}.$$

Агар ҳаракатдаги координата системасининг боши шартга кўра, инерция марказида олинган бўлса, бу ҳад нолга айланади, чунки у ҳолда $\sum m\mathbf{r} = 0$. Ниҳоят, учинчи ҳадда вектор кўпайтма квадратини очиб чиқамиз ва натижада қуйидагини топамиз:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m\{\Omega^2 r^2 - (\mathbf{\Omega r})^2\}. \qquad (25.1)$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси икки қисмдан иборат ҳолда кўрсатилиши мумкин. (25.1) нинг биринчи ҳади илгариланма ҳаракатнинг кинетик энергиясидир, унинг кўриниши шундайки, гўё жисмнинг тўла массаси инерция марказига тўпланган деб фараз қилиш мумкин. Иккинчи ҳади айланма ҳаракат кинетик энергиясини ифодалайди. Бу айланиш инерция марказидан ўтувчи ўқ атрофида бўлиб, у $\mathbf{\Omega}$ бурчак тезликка эга. Кинетик энергияни бундай икки бўлакка ажратиш мумкинлиги жисмга бириктирилган координаталар системаси бошини фақат инерция марказида қилиб танлашга боғлиқдир

Айланиш кинетик энергиясини тензор белгиларда, яъни **r**, $\mathbf{\Omega}$ векторларнинг x_i, Ω_i¹) компонентлари орқали қайта ёзамиз:

$$T_{\text{айл}} = \frac{1}{2} \sum m\{\Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum m\{\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\} =$$
$$= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k).$$

---

¹) i, k, l ҳарфлари билан 1, 2, 3 қийматларни кетма-кет қабул қиладиган тензор индекслари белгиланади. Бунда йиғинди белгисининг ишораси тушириб қолдирилади, икки марта такрорланувчи барча („соқов“ деб аталувчи) индекслар орқали эса 1, 2, 3 қийматлар бўйича йиғиш тушунилади: мас., $A_l B_l = \mathbf{AB}$, $A_l^2 = A_l A_l = \mathbf{A}^2$ ва ҳ. к. Соқов индексларни исталганча ўзгартириш мумкин (фақат шу ифода ичидаги бошқа тензор белгиларига ўхшамаса, бас),

Бу ерда $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ айният қўлланилди (δ_{ik} — бирлик тензор: унинг компонентлари $i = k$ да бирга, $i \neq k$ да эса нолга тенг).

$$I_{ik} = \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \qquad (25.2)$$

тензор киритиб, қаттиқ жисм кинетик энергияси учун сўнгги

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \qquad (25.3)$$

ифодани оламиз.

(25.3) ва потенциал энергия айирмаси қаттиқ жисмнинг Лагранж функциясини беради:

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \qquad (25.4)$$

Умумий ҳолда, потенциал энергия қаттиқ жисм вазиятини белгиловчи олтита ўзгарувчининг функциясидир: булар инерция марказининг учта X, Y, Z координатаси ва ҳаракатланувчи координата ўқларининг қўзғалмас координаталарга нисбатан ориентациясини кўрсатувчи учта бурчак.

I_{ik} тензор *инерция моментларининг тензори* ёки оддийгина қилиб, жисм *инерциясининг тензори* дейилади. (25.2) га биноан, у симметрикдир, яъни

$$I_{ik} = I_{ki}. \qquad (25.5)$$

Унинг компонентларини ошкор кўринишда қуйидаги жадвалда келтирамиз:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \qquad (25.6)$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} компонентларни баъзида тегишли ўқларга нисбатан инерция моментлари дейилади.

Инерция тензори аддитивдир — жисмнинг инерция моментлари унинг қисмлари инерция моментларининг йиғиндисига тенг.

Агар қаттиқ жисмга яхлит деб (ρ зичликда) қараш мумкин бўлса, у ҳолда (25.2) таърифда йиғинди ўрнига жисм ҳажми бўйича интеграл олиш лозим:

$$I_{ik} = \int \rho\, (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k)\, dV. \qquad (25.7)$$

Ҳар қандай симметрик иккинчи ранг тензор каби инерция тензорини ҳам x_1, x_2, x_3 ўқлар йўналишини ўзига хос танлаш йўли билан диагональ кўринишига келтириш мумкин. Бу йўналишларни *бош инерция ўқлари*, тензор компонентларининг тегишли қийматларини эса *бош инерция моментлари* дейилади; кейингиларини I_1, I_2, I_3 деб белгилаймиз. x_1, x_2, x_3 ўқларнинг бундай олинишида айланма кинетик энергия жуда содда ифодаланади:

$$T_{\text{айл}} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{25.8}$$

Бош инерция моментларининг ҳар бири қолган иккитасининг йиғиндисидан катта бўлиши мумкин эмас. Шунга кўра

$$I_1+I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geqslant \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \tag{25.9}$$

Бош инерция моментларининг учаласи ҳам турлича бўлган жисмни *асимметрик пилдироқ* деб аталади.

Агар бош инерция моментларининг иккитаси бир-бирига тенг бўлса ($I_1 = I_2 \neq I_3$), у ҳолда қаттиқ жисм *симметрик пилдироқ* дейилади. Бу ҳолда x_1, x_2 текисликда бош ўқлар йўналиши ихтиёрий танланади.

Агар бош инерция моментларининг ҳаммаси бир хил бўлса, ундай жисм *шарсимон (сферик) пилдироқ* дейилади. Бу ҳолда бош инерция ўқларининг учаласи ҳам ихтиёрий танланади: бундай ўқлар сифатида ўзаро перпендикуляр исталган учта ўқ олиниши мумкин.

Қаттиқ жисм бирор симметрияга эга бўлган ҳолда бош инерция ўқларини топиш соддалашади; инерция марказининг ўрни ва бош инерция ўқларининг йўналишлари ҳам мазкур симметрияга эга бўлиши лозим, албатта.

Жумладан, агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, у ҳолда инерция маркази шу текисликда ётиши керак. Бош инерция ўқларининг иккитаси ана шу текисликда ётади, учинчиси эса—унга перпендикулярдир. Бу турдаги ҳолларга яққол мисол қилиб, бир текисликда ётган зарралар системасини кўрсатиш мумкин. Бундай ҳол учун учта бош инерция моменти ўртасида оддий муносабат мавжуд. Агар система текислиги x_1x_2 текислик ўрнига олинса, у ҳолда барча зарралар учун $x_3 = 0$ эканлигидан

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2),$$

демак,

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{25.10}$$

Агар жисм бирор тартибли симметрия ўқига эга бўлса, у ҳолда инерция маркази шу ўқда жойлашади. Ана шу ўққа бош инерция ўқларидан бири мос тушади, қолган иккитаси эса унга перпендикуляр бўлади. Бунда, агар симметрия ўқи тартиби иккинчидан юқори бўлса, у ҳолда жисм симметрик пилдироққа ўхшайди. Ҳақиқатан, ҳар бир бош ўқни у ҳолда 180° дан фарқли бўлган бурчакка буриш мумкин, яъни бу ўқларни танлаб олиш бир қийматли бўлмайди — бу эса фақат симметрик пилдироқ учун ўринлидир.

Бир тўғри чизиқ бўйлаб жойлашган зарралар системаси алоҳида аҳамиятга эга. Агар бу тўғри чизиқни x_3 ўқи сифатида танланса, у ҳолда барча зарралар учун $x_1 = x_2 = 0$, шунинг учун бош инерция моментларидан иккитаси бир хил, учинчиси эса нолга тенг бўлади:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \tag{25.11}$$

Бундай системани *ротатор* деб аташади. Умумий ҳолдаги ихтиёрий жисмдан фарқли ўлароқ, ротаторнинг характерли хусусияти шундаки, у x_1 ва x_2 ўқлар атрофида айланишни ҳисобга олувчи фақат иккита (учта эмас) айланма эркинлик даражасига эга; тўғри чизиқнинг ўз атрофида айланишини гапиришнинг маъноси йўқ, албатта.

Ниҳоят, инерция тензорини ҳисоблаш ҳақида яна бир мулоҳаза бор. Биз бу тензорни боши инерция марказида ётган (фақат шу ҳолдагина (25.3) формула ўринли) координаталар системасига нисбатан аниқладик. Бироқ уни ҳисоблаш учун ўша тензорнинг аввал бошқа O' координата бошига нисбатан аниқланган

$$I'_{ik} = \sum m(x_i'^2\delta_{ik} - x_i'x_k')$$

қиймати қулай бўлиши мумкин. Агар OO' масофа **a** вектор орқали берилса, у ҳолда $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$, $x_i = x_i' + a_i'$; шу билан бирга $\sum m\mathbf{r} = 0$ эканини ҳисобга олиб, O нуқта таърифига кўра

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\,(a^2\delta_{ik} - a_i a_k) \qquad (25.12)$$

ифодани топамиз.

Шу формулага биноан (I'_{ik} ни билган ҳолда) изланаётган I_{ik} тензорни осонгина ҳисоблаш мумкин.

Масалалар

1. Молекулаларни бир-биридан ўзгармас масофада жойлашган зарралар системаси деб қабул қилиб, қуйидаги ҳолларда бош инерция моментлари аниқлансин.

а) Бир тўғри чизиқда ётган учта атомдан иборат молекула.

Жавоб:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu}\,(m_1m_2l_{12}^2 + m_1m_3l_{13}^2 + m_2m_3l_{23}^2), \quad I_3 = 0,$$

бу ерда m_a — атомлар массаси, l_{ab} — атомлар (a ва b) орасидаги масофа.

Икки атомли молекула учун эса олдиндан равшан бўлган натижа — иккала атомлар келтирилган массасининг улар орасидаги масофа квадратига кўпайтмаси

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\,l^2$$

чиққан бўлар эди.

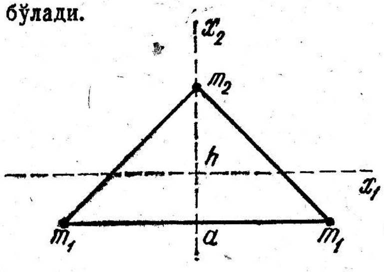
б) Тенг ёнли учбурчак кўринишида жойлашган уч атомли молекула (20- расм).

Жавоб: Инерция маркази учбурчак баландлигида унинг асосидан m_2h/μ масофада ётганидан инерция моментлари

$$I_1 = \frac{2m_1m_2}{\mu}\,h^2,$$

$$I_2 = \frac{m_1}{2}\,a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2$$

бўлади.



20- расм.

2. Бир жинсли яхлит жисмларнинг бош инерция моментлари аниқлансин

а) l узунликдаги ингичка стержень.

Жавоб: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\,\mu l^2$, $I_3 = 0$ (стержень йўғонлигини ҳисобга олмаймиз).

б) R радиусли шар.

Жавоб:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\,\mu R^2$$

($I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho\int r^2dV$ йиғиндини ҳисоблаш лозим).

в) Радиуси R ва баландлиги h бўлган доиравий цилиндр.

Жавоб:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2}\,R^2$$

(x_3 – цилиндр ўқи).

г) Қирраларининг узунлиги a, b, c бўлган тўғри бурчакли параллелепипед.

Жавоб:

$$I_1 = \frac{\mu}{12}\,(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{12}\,(c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{12}\,(a^2 + b^2)$$

(x_1, x_2, x_3 ўқлар a, b, c қирраларга параллел).

д) a, b, c ярим ўқларга эга бўлган уч ўқли эллипсоид.

Ечилиши. Инерция маркази эллипсоид марказига, бош инерция ўқлари эса эллипсоид ўқларига мос тушади. Эллипсоид ҳажми бўйича интеграллаш сфера ҳажми бўйича интеграллашга келтирилиши мумкин. Бунинг учун

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипсоид сиртининг тенгламасини

$$\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 = 1$$

бирлик сфера сирт тенгламасига ўтказувчи $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\varsigma$ координаталар алмаштиришини бажарамиз. Шу йўл билан x ўқига нисбатан инерция моменти топилади:

$$I_1 = \rho\iiint(y^2 + z^2)\,dxdydz = \rho\,abc\iiint(b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$
$$= abc\,\frac{1}{2}\,I'(b^2 + c^2),$$

бу ерда I' — бирлик радиусли шарнинг инерция моменти. Эллипс ҳажми $4\pi\frac{abc}{3}$ га тенглигини назарда тутиб, охирги натижани топамиз:

$$I_1 = \frac{\mu}{5}\,(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5}\,(a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{\mu}{5}\,(a^2 + b^2).$$

3. Физикавий маятник (қўзғалмас горизонтал ўқ яқинида тебранувчи қаттиқ жисм) нинг кичик гебранишлар частотаси аниқлансин.

Ечилиши. l — маятникнинг инерция марказидан айланиш ўқигача масофа α, β, γ — бош инерция ўқлари ва айланиш ўқи йўналиши орасидаги бурчаклар бўлсин. Ўзгарувчан координата сифатида вертикал ва инерция марказидан айланиш ўқига туширилган перпендикуляр орасидаги φ бурчакни киритамиз. Инерция марказининг тезлиги $V = l\dot{\varphi}$, бурчак тезликнинг бош инерция ўқларига проекциялари эса $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. φ бурчакни кичик деб ҳисоблаб, потенциал энергияни

$$U = \mu gl\,(1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu\,gl\,\varphi^2$$

кўринишда ёзамиз. Шунинг учун Лагранж функцияси

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\,\dot{\varphi}_2 - \frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2.$$

Бундан тебраниш частотаси учун қуйидаги натижани оламиз:

$$\omega^2 = \frac{\mu gl}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}.$$

4. 21-расмда тасвирланган системанинг кинетик энергияси топилсин; OA ва AB – юпқа бир жинсли стерженлар бўлиб, уларнинг узунликлари l га тенг ва A нуқтага шарнир ёрдамида бириктирилган. OA стержень O нуқта атрофида айланади (расм текислигида), AB стерженнинг B учи эса Ox ўқи бўйлаб сирпанади.

Ечилиши. OA стержень инерция маркази (унинг ўртасида жойлашган) нинг тезлиги $l\dot{\varphi}/2$ га тенг, бунда φ – АОВ бурчак. Шунинг учун OA стержень кинетик энергияси

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ — битта стержень массаси).

AB стержень инерция марказининг декарт координаталари $\dot{X} = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $Y = \frac{l}{2}\sin\varphi$ ва бу стержень айланишининг бурчак тезлиги ҳам $\dot{\varphi}$ га тенглигидан кинетик энергия

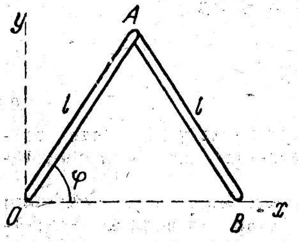
$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{l\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Системанинг тўла кинетик энергияси эса

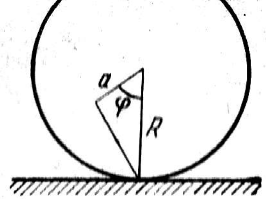
$$T = \frac{\mu l^2}{3}(1 + 3\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}_2$$

(2-a масалага кўра $I = \mu l^2/12$ қиймат қўйилди).

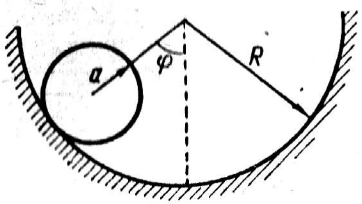
5. Текисликда думалаётган цилиндр (радиуси R) нинг кинетик энергияси топилсин. Цилиндр массаси унинг ҳажми бўйича шундай тақсимланганки, бунда бош инерция ўқларидан бири цилиндр ўқига параллел бўлиб, ундан a масофада ётади. Шу бош ўққа нисбатан инерция моменти I га тенг.



21-расм.



22-расм.



23-расм.

Ечилиши. Вертикал ва оғирлик марказидан цилиндр ўқига ўтказилган перпендикуляр орасидаги бурчакни φ деймиз(22-расм). Ҳар бир вақт моментида цилиндр ҳаракатини цилиндрнинг қўзғалмас текисликка уриниш чизиғи (оний ўқ) атрофидаги соф айланиш деб қараш мумкин: шу айланишнинг бурчак тезлиги $\dot{\varphi}$ бўлиб, барча параллел ўқлар атрофидан айланишларнинг бурчак тезликлари бир хилдир. Инерция маркази оний ўқдан $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ масофада ётади ва шунинг учун унинг тезлиги $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ бўлиб, тўла кинетик энергияси

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

6. R радиусли цилиндрик сиртнинг ички томонида думалаётган a радиусли бир жинсли цилиндрнинг (23-расм) кинетик энергияси топилсин.

Ечилиши. Иккала цилиндр марказини бирлаштирувчи чизиқ ва вертикал ташкил этган φ бурчак киритамиз. Думалаётган цилиндрнинг инерция маркази ўқ устида жойлашган ва унинг тезлиги $V = \dot{\varphi}(R - a)$. Бурчак тезликни цилиндрларнинг бир-бирига тегиш чизиғига мос тушадиган оний ўқ атрофидаги соф айланиш тезлиги сифатида ҳисоблаймиз; у

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\,\frac{R - a}{a}$$

бўлади.

Агар I_3 цилиндр ўқига нисбатан инерция моменти бўлса, у ҳолда тўла кинетик энергия

$$T = \frac{\mu}{2}(R - a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\,\frac{(R - a)^2}{a^2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\mu\,(R - a)^2\dot{\varphi}^2$$

(I_3 — 2-в масаладан).

26-§. Қаттиқ жисмнинг импульс моменти

Система импульс моментининг катталиги, маълумки, унинг қайси нуқтага нисбатан аниқланганига боғлиқ. Қаттиқ жисм механикасида шу нуқта сифатида ҳаракатчан координаталар системасининг бошини, яъни жисмнинг инерция марказини олиш энг маъқул йўл ҳисобланади. Худди шундай йўл билан аниқланган моментни **M** деб белгилаймиз.

(9.6) формулага мувофиқ, агар координаталар боши инерция марказига жойлаштирилса, **M** момент жисм нуқталарининг инерция марказига нисбатан ҳаракатига боғлиқ бўлган „хусусий момент“ни кўрсатади. Бошқача қилиб айтганда, $\mathbf{M} = \sum m(\mathbf{rv})$ таърифда $\mathbf{v}$ ни $[\mathbf{\Omega r}]$ га алмаштириш лозим:

$$\mathbf{M} = \sum m\,[\mathbf{r}\,[\mathbf{\Omega r}]] = \sum m\,\{r^2\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}\,(\mathbf{r\Omega})\}$$

ёки тензор белгилари ёрдамида

$$M_i = \sum m\,\{x_i^2\Omega_i - x_i x_k\Omega_k\} = \Omega_k \sum m\,\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Ниҳоят, инерция тензорининг (25.2) таърифини назарда тутиб,

$$M_i = I_{ik}\,\Omega_k \tag{26.1}$$

ифодани оламиз.

x_1, x_2, x_3 ўқлар жисмнинг бош инерция ўқлари бўйлаб йўналган ҳолда бу формула қуйидагиларни беради:

$$M_1 = I_1\Omega_1,\ M_2 = I_2\Omega_2,\ M_3 = I_3\Omega_3. \tag{26.2}$$

Хусусан, шар пилдироқ учун (учала бош инерция моменти ўзаро мос тушган):

$$\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}, \tag{26.3}$$

яъни момент вектори бурчак тезлиги векторига пропорционал ва у билан бир хил йўналишда бўлади.

Умумий ҳолда (ихтиёрий жисм) эса **M** вектор, умуман айтганда, ўз йўналиши бўйича **Ω** векторга мос келмайди ва фақат у ўзининг бош инерция ўқларидан бирортаси атрофида айлангандагина **M** ва **Ω** лар бир хил йўналади.

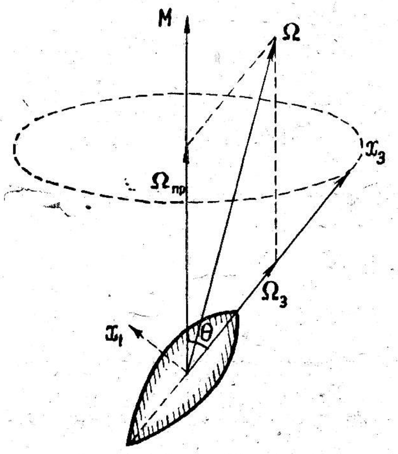
Ҳеч қандай ташқи кучлар таъсирида бўлмаган қаттиқ жисмнинг эркин ҳаракатини кўрамиз. Жисм фақат эркин айланма ҳаракат қилади деб фараз қиламиз.

Ҳар қандай ёпиқ система учун бўлгани каби эркин айланаётган жисмнинг импульс моменти ҳам ўзгармас бўлади. $\mathbf{M} = \mathrm{const}$ шарт шар пилдироқ учун оддий $\mathbf{\Omega} = \mathrm{const}$ ифодани беради, яъни шар пилдироқ эркин айланишининг умумий ҳоли қўзғалмас ўқ атрофида текис айланишдир.

Ротатор ҳаракати ҳам шу каби содда ҳол ($\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$) бўлиб, **Ω** вектор ротатор ўқига перпендикулярдир. Шунинг учун ротаторнинг эркин айланиши бир текисликдаги текис айланишдир: айланиш шу текисликка перпендикуляр йўналиш (ўқ) атрофида бўлади.

Моментнинг сақланиш қонуни симметрик пилдироқнинг анча мураккаб эркин айланишини ҳам аниқлаб беради.

Пилдироқнинг x_3 симметрия ўқига перпендикуляр бўлган x_1, x_2 бош инерция ўқлари йўналишининг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, x_2 ўқни ўзгармас **M** вектор ва x_3 ўқнинг оний вазияти билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр қилиб танлаймиз. У ҳолда $M_2 = 0$, (25.2) формулага мувофиқ эса Ω_2 ҳам нолга тенг бўлади, яъни **M**, **Ω** ва пилдироқ ўқи ҳар бир вақт моментида бир текисликда ётади (24- расм). Лекин бундан ўз навбатида, пилдироқ ўқидаги барча нуқталар $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$ тезликларининг ҳар бир вақт моментида кўрсатилган текисликка перпендикуляр эканлиги келиб чиқади; яъни пилдироқ ўқи **M** йўналиши атрофида текис айланади ва доиравий конус чизади (бу — пилдироқнинг *мунтазам прецессияси* деб аталади). Прецессия билан бир вақтда пилдироқнинг ўзи ҳам хусусий ўқи атрофида текис айланади.



24- расм.

Бу икки айланиш бурчак тезликларини **M** момент катталиги ва пилдироқ ўқининг **M** йўналишига оғиш бурчаги θ орқали осонгина ифодалаш мумкин. Пилдироқнинг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги $\mathbf{\Omega}$ векторнинг шу ўқдаги проекцияси Ω_3 дан иборат,

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta. \qquad (26.4)$$

Прецессия тезлиги $\Omega_{пр}$ ни аниқлаш учун эса $\mathbf{\Omega}$ векторни параллелограмм қоидасига кўра x_3 ва $\mathbf{M}$ бўйлаб ташкил этувчиларга ажратиш керак. Ташкил этувчиларнинг биринчиси пилдироқ ўқини кўчирмайди, шунга кўра иккинчи ташкил этувчи прецессиянинг биз излаётган бурчак тезлигини беради. 24-расмдаги шаклдан $\Omega_{пр} \cdot \sin\theta = \Omega_1$, бу ерда $\Omega_1 = M_1/I_1 = M\sin\theta/I_1$ эканлигидан:

$$\Omega_{пр} = \frac{M}{I_1}, \qquad (26.5)$$

27- §. Қаттиқ жисм ҳаракат тенгламалари

Қаттиқ жисм, умуман, олтита эркинлик даражасига эга бўлгани учун ҳаракатнинг умумий тенгламалар системаси олтита мустақил тенгламадан иборат бўлиши керак. Уларни икки вектор — импульс ва жисм моментидан вақт бўйича олинган ҳосилалар кўринишида олиш мумкин.

Бу тенгламалардан биринчиси жисм таркибидаги ҳар бир зарранинг $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ тенгламаларини (бу ерда $\mathbf{p}$ — зарра импульси, $\mathbf{f}$ — заррага таъсир этувчи куч) йиғиш йўли билан олинади. Жисмнинг тўла импульсга

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

ва жисмга таъсир этувчи тўла куч $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}_2$ ларни киритиб,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (27.1)$$

ифодани ёзамиз.

$\mathbf{F}$ ни ҳар бир заррага таъсир қилувчи барча $\mathbf{f}$ кучларнинг (шу жумладан, жисмнинг бошқа зарралари томонидан таъсир этувчи кучларнинг) йиғиндиси деб таърифлаган бўлсак-да, аслида, $\mathbf{F}$ таркибига фақат ташқи манбаларнинг таъсир этувчи кучлари киради. Жисм зарралари ўртасидаги барча ўзаро таъсир кучлари бир-бирларини йўқотадилар; ҳақиқатан, ташқи кучлар бўлмаган вақтда жисм (умуман бирор ёпиқ система) импульси сақланиши керак, яъни $\mathbf{F} = 0$ бўлиши лозим.

Агар U — қаттиқ жисмнинг ташқи майдондаги потенциал энергияси бўлса, у ҳолда уни жисмнинг инерция маркази координаталари бўйича дифференциаллаб, $\mathbf{F}$ кучни топиш мумкин:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial R_0}. \qquad (27.2)$$

Ҳақиқатан, жисм илгариланма ҳаракат қилиб $\delta\mathbf{R}_0$ га кўчса, унинг ҳар бир нуқтасининг $\mathbf{R}$ радиус-вектори ҳам шунчага ўзгаради, шунинг учун потенциал энергиянинг ўзгариши

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}\delta\mathbf{R} = \delta\mathbf{R}_0 \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = -\delta\mathbf{R}_0 \sum f = -\mathbf{F}\delta\mathbf{R}_0.$$

$\mathbf{M}$ импульс моментидан вақт бўйича олинган ҳосилани аниқловчи иккинчи ҳаракат тенгламасини чиқариш учун „қўзғалмас“ (инерциал) саноқ системасини унга нисбатан жисм инерция маркази берилган вақт моментида тинч турадиган қилиб танлаш қулайдир. Шу йўл билан олинган ҳаракат тенгламаси Галилейнинг нисбийлик принципига кўра исталган бошқа инерциал саноқ системасида ҳам ўринли бўлади.

Демак,

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\sum [\mathbf{rp}] = \sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

Танлаб олинган ($\mathbf{V} = 0$ бўлган) саноқ системасида $\dot{\mathbf{r}}$ нинг қиймати муайян вақт моментида тезлик $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ га тенгдир. $\mathbf{v}$ ва $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ векторлар бир хил йўналганлигидан $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = 0$ бўлади. Шунингдек, $\dot{\mathbf{p}}$ ни $\mathbf{f}$ га алмаштириб, узил-кесил

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} \qquad (27.3)$$

ифодани оламиз, бу ерда

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}]. \qquad (27.4)$$

$[\mathbf{rf}]$ вектор $\mathbf{f}$ *кучнинг моменти* дейилади, шунга кўра $\mathbf{K}$ жисмга таъсир этувчи барча кучлар моментларининг йиғиндисидир. Тўла $\mathbf{F}$ кучдагидек, (27.4) йиғиндида ҳам аслида фақат ташқи кучлар ҳисобга олиниши керак; импульс моментининг сақланиш қонунига мувофиқ ёпиқ система ичида таъсир этаётган барча ички кучлар моментларининг йиғиндиси нольга тенг бўлиши керак. Куч моменти ҳам, импульс моменти каби, умуман айтганда, координаталар бошини танлашга (моментнинг қайси нуқтага нисбатан аниқланишига) боғлиқ (27.3 — 4) ларда моментлар жисмнинг инерция марказига нисбатан аниқланади.

Координата бошини **a** масофага кўчирилса, жисм нуқталарининг янги $\mathbf{r}'$ радиус-векторлари эски $\mathbf{r}$ радиус-векторлари билан $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ҳолда боғланади. Шунинг учун

$$\mathbf{K} = \sum [\,\mathbf{rf}\,] = \sum [\,\mathbf{r}'\mathbf{f}\,] + \sum [\,\mathbf{af}\,]$$

ёки

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{aF}]. \tag{27.5}$$

Бундан, хусусий ҳолда, агар тўла куч $\mathbf{F} = 0$ бўлса, куч моментининг катталиги координаталар бошини танлашга боғлиқ эмас деган хулоса чиқади (бундай ҳолларда жисмга *жуфт куч* қўйилган дейилади).

Жисм чексиз кичик $\delta\varphi$ бурчакка айланганида U потенциал энергиянинг ўзгариши

$$\delta U = -\sum \mathbf{f}\delta\mathbf{R} = -\sum \mathbf{f}\,[\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}] = -\delta\boldsymbol{\varphi} \sum [\mathbf{rf}] = -\mathbf{K}\,\delta\boldsymbol{\varphi}$$

бўлади, бу ердан

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}. \tag{27.6}$$

Тўла куч моменти учун чиқарилган бу формула тўла куч формуласи (27.2) га ўхшайди.

$\mathbf{F}$ ва $\mathbf{K}$ векторларни ўзаро перпендикуляр деб фараз қиламиз. Бу ҳолда ҳар доим шундай **a** вектор топиш мумкинки, (27.5) формулада $\mathbf{K}'$ нолга айлансин, шунга кўра

$$\mathbf{K} = [\mathbf{aF}]. \tag{27.7}$$

Бунда **a** бир қийматли эмас: яъни $\mathbf{F}$ га параллел ҳар қандай векторни a га қўшиш билан (27.7) тенглик ўзгармайди, демак, $\mathbf{K}' = 0$ шарт ҳаракатланувчи координата системасида маълум нуқтани эмас, балки фақат тўғри чизиқни беради. Шундай қилиб, $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$ бўлганда, барча

кучларнинг жисмга таъсирини маълум тўғри чизиқ бўйлаб таъсир этувчи битта $\mathbf{F}$ кучга келтириш мумкин.

Хусусан, бир жинсли куч майдони худди шундайдир: бунда моддий нуқтага таъсир этувчи куч $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ кўринишга эга, $\mathbf{E}$ — майдонни характерловчи доимий вектор, e эса зарранинг мазкур майдонга нисбатан хоссаларини белгилайди[1]). Бу ҳолда

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \sum e, \quad \mathbf{K} = [\sum e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}].$$

$\sum e \neq 0$ деб олиб, қуйидагича аниқланган $\mathbf{r}_0$ радиус-вектор киритамиз:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e}. \tag{27.8}$$

У ҳолда тўла куч моменти учун содда ифода оламиз:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0\mathbf{F}]. \tag{27.9}$$

Шундай қилиб, бир жинсли майдондаги қаттиқ жисмга майдон таъсири (27.8) радиус-векторли нуқтага қўйилган биргина $\mathbf{F}$ куч таъсирига келтирилади. Бу нуқтанинг ҳолати жисмнинг хоссалари билан тўла аниқланади; масалан, оғирлик майдонида у жисмнинг инерция марказига мос тушади.

28-§. Қаттиқ жисмларнинг ёндашиши (бир-бирига тегиб туриши)

Қаттиқ жисм *мувозанат шартларини* (27.1) ва (27.3) ҳаракат тенгламаларига мувофиқ жисмга таъсир этувчи тўла куч ва тўла куч моментларининг нолга тенглиги

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0,$$

$$\mathbf{K} = \sum [\,\mathbf{rf}\,] = 0 \tag{28.1}$$

кўринишида ифодалаш мумкин. Бу ерда йиғинди жисмга қўйилган барча ташқи кучлар бўйича олинади, $\mathbf{r}$ — кучлар „қўйилган нуқталар“нинг радиус-векторлари; бун-

---

[1] Масалан, бир жинсли электр майдонида $\mathbf{E}$ — майдон кучланганлигини, e — зарра зарядини билдиради. Бир жинсли оғирлик майдонида $\mathbf{E}$ оғирлик кучи тезланиши $\mathbf{g}$ ни, e эса зарра массаси m ни ифодалайди.

да қайси нуқта (координаталар боши) га нисбатан моментлар аниқланаётган бўлса, ўша нуқта ихтиёрий танланиши мумкин: чунки $\mathbf{F} = 0$ бўлганидан $\mathbf{K}$ нинг қиймати бу танлашга боғлиқ эмас.

Агар биз бир-бирига тегиб турувчи қаттиқ жисмлар системасини кўраётган бўлсак, у ҳолда мувозанат шартлари (28.1) ҳар бир жисм учун алоҳида бажарилиши лозим. Бунда мазкур жисмга у билан ёндашган бошқа жисмларнинг таъсири ҳам ҳисобга олиниши керак. Бу кучлар тегиб туриш нуқталарига қўйилган бўлиб, уларни *реакция кучлари* дейилади. Равшанки, ҳар бир икки жисм учун уларнинг ўзаро реакция кучлари қиймат жиҳатдан тенг ва қарама-қарши йўналгандир.

Умумий ҳолда реакциянинг катталиги ҳам, йўналиши ҳам (28.1) мувозанат тенгламалари системасини барча жисмлар учун биргаликда ечиш натижасида аниқланади. Лекин баъзи бир ҳолларда реакция кучларининг йўналиши масала шартлари орқали берилади. Жумладан, агар икки жисм бир-бирининг сиртида эркин сирпаниши мумкин бўлса, у ҳолда улар орасидаги реакция кучлари сиртга туширилган нормал бўйича йўналади.

Агар ёндашган жисмлар бир-бирига нисбатан ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда реакция кучларидан ташқари диссипатив характердаги кучлар – *ишқалиш кучлари* ҳам пайдо бўлади.

Ёндашган жисмлар ҳаракатининг икки тури бор. Булар *сирпаниш* ва *думалашдир*. Сирпанишда реакциялар ёндашиш сиртларига перпендикуляр, ишқалиш кучлари эса уларга уринма бўйлаб йўналган бўлади.

Соф думалаш жисмларнинг бир-бирига тегиб туриш нуқталарида нисбий ҳаракатнинг йўқлиги билан характерланади; бошқача сўз билан айтганда, думалаётган жисм вақтнинг ҳар бир моментида ёндашиш нуқтасига бириктирилгандек бўлади. Бунда реакция кучларининг йўналиши ихтиёрий, яъни у ёндашиш сиртларига нормал бўлиши шарт эмас. Думалаш пайтидаги ишқалиш думалашга тўсқинлик қилувчи қўшимча куч моменти кўринишида сезилади.

Агар сирпанишдаги ишқалиш уни ҳисобга олмаслик мумкин бўлган даражада кичик бўлса, у ҳолда жисмлар сирги *абсолют силлиқ* дейилади. Аксинча, агар

сиртнинг хусусиятлари фақат сирпанишсиз соф думалашнинг бўлишини тақозо этса, думалашдаги ишқалишни эса ҳисобга олмаслик ҳам мумкин бўлса, у ҳолда сиртларни *абсолют ғадир-будур* дейилади.

Иккала ҳолда ҳам ишқалиш кучлари жисм ҳаракати ҳақидаги масалага ошкор кирмайди ва шунинг учун масала соф механикавий ҳисобланади. Агар ишқалишнинг муайян хоссалари ҳаракат учун муҳим бўлса, у ҳолда ҳаракат энди механикавий процесс бўлмайди (20-§ га таққосланг).

Жисмларнинг ёндошиши уларнинг эркинлик даража сонини эркин ҳаракат вақтидаги сонга қараганда камайтиради. Шу вақтга қадар бундай турдаги масалаларни кўраётганда, биз мазкур вазиятни эркинлик даража сонига бевосита мос келувчи координаталар киритиш йўли билан ҳисобга олган эдик. Лекин жисмларнинг думалаш ҳодисасида координаталарни бундай танлашнинг иложи бўлмаслиги мумкин. Думалашда жисм ҳаракатига қўйиладиган шарт тегиб турувчи нуқталар тезликлари тенглигидан иборатдир (жумладан, жисмнинг қўзғалмас сиртда думалашида ёндашиш нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлиши керак). Умумий ҳолда, бундай шарт

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{28.2}$$

кўринишдаги *боғланиш тенгламалари* билан ифодаланади, бу ерда $c_{\alpha i}$ — фақат координата функциялари (α индекс боғланишлар тенгламаларининг саноқ тартибидир). Агар тенгликларнинг чап томонлари координаталарнинг бирор функцияларидан вақт бўйича тўла ҳосилалар бўлмаса, у ҳолда бу тенгламалар интегралланиши мумкин эмас. Бошқача қилиб айтганда, улар фақат координаталар орасидаги боғланишга келмайди. Шундай бўлганда эди, биз бу боғланишлардан фойдаланиб, жисм вазиятини унинг реал эркинлик даражалари сонига тенг бўлган кам сонли координаталар билан ифодалай олган бўлур эдик. Бундай боғланишлар *ноголоном* (системанинг фақат координаталарини боғловчи *голоном* боғланишларга қарама-қарши) боғланишлар дейилади.

Масалан, шарнинг ясси сирт юзасида думалашини кўриб ўтайлик. Одатдагидек **V** орқали илгариланма ҳаракат тезлигини (шар маркази тезлиги) Ω билан эса — шар айланишининг бурчак тезлигини белгилаймиз. Шарнинг сиртга тегищ нуқтасининг тезлигини аниқлаш учун умумий $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{r}]$ формулада $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$ ифодани киритилади. (a—шар радиуси, $\mathbf{n}$—ёндашиш нуқтасида думалаш сиртига ўтказилган нормалнинг бирлик вектори.) Изланаётган боғланиш тегиш нуқтасида сирпанишнинг бўлмаслик шартидир, яъни

$$\mathbf{V} - a[\Omega \mathbf{n}] = 0 \tag{28.3}$$

тенглама орқали берилади, (28.3) интегралланиши мумкин эмас: $\mathbf{V}$ тезлик шар марказининг радиус-векторидан вақт бўйича олинган тўла ҳосила бўлса-да, бурчак тезлиги умумий ҳолда, бирор координатанинг вақт бўйича тўла ҳосиласи эмас. Шундай қилиб, (28.3) боғланиш ноголономдир[1].

Ёндашувчи жисмлар ҳаракат тенгламаларини тузишда реакция кучларини ошкор киритишга асосланган усул мавжуд. Бу усулнинг (*у д'Аламбер принципининг* мазмунидир) моҳияти ёндашувчи ҳар бир жисм учун

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{r},\ \mathbf{f}] \tag{28.4}$$

тенгламаларнинг ёзилишидан иборат, бунда жисмга таъсир этувчи $\mathbf{f}$ кучлар қаторига реакция кучлари ҳам киритилади, бу кучлар олдиндан номаълум бўлиб, тенгламаларни ечиш натижасида жисм ҳаракати билан биргаликда аниқланади. Бу усулни голоном боғланишларда ҳам, ноголоном боғланишларда ҳам қўлланиш мумкин.

Масалалар

1. д'Аламбер принципидан фойдаланиб, $\mathbf{F}$ ташқи куч ва $\mathbf{K}$ куч моментлари таъсирида текисликда думалаётган бир жинсли шарнинг ҳаракат тенгламалари топилсин.

---

[1] Цилиндрнинг думалашида худди шундай боғланиш голоном эканлигини таъкидлаймиз. Думалашда цилиндрнинг айланиш ўқи фазодаги доимий йўналишини сақлайди ва шунга кўра, $\Omega = d\varphi/dt$ катталик цилиндрнинг ўз ўқи атрофида бурилиш бурчаги φ нинг тўла ҳосиласидир. Демак, (28.3) ифода интегралланади ва биз инерция маркази координатаси билан φ бурчак орасидаги боғланишни топишимиз мумкин.

Ечилиши. (28.3) боғланиш тенгламаси текстда ёзилган Шар ва текислик ёндашган нуқтада қўйилган реакция кучини (уни $\mathbf{R}$ деб белгилаймиз) киритиб, (28.4) тенгламаларни ёзамиз:

$$\mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{K} - a[\mathbf{n}\mathbf{R}] \tag{2}$$

(бу ерда $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$ ва шар пилдироқ учун $M = I\Omega$ ҳисобга олинган (28.3) боғланиш тенгламасини вақт бўйича дифференциаллаб,

$$\dot{\mathbf{V}} = a[\dot{\Omega}\mathbf{n}]$$

тенгликни оламиз. $\dot{\mathbf{V}}$ ни (1) тенгламага қўйиб ва (2) ёрдамида $\dot{\Omega}$ ни йўқотиб, реакция кучини $\mathbf{F}$ ва $\mathbf{K}$ билан боғловчи

$$\frac{I}{a\mu}(\mathbf{F} + \mathbf{R}) = [\mathbf{K}\mathbf{n}] - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{R})$$

тенгламани топамиз. Бу тенгламани компонентлари бўйича қайта ёзиб ва $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (25-§, 2-б масалага қ.) ни ўрнига қўйиб қуйидагиларни оламиз:

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x,$$

$$R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = -F_z$$

(xy текислик думалаш текислигида олинган). Ниҳоят, бу ифодаларни (1) га қўйиб, фақат муайян ташқи куч ва моментни ўз ичига олган ҳаракат тенгламаларини топамиз:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right),$$

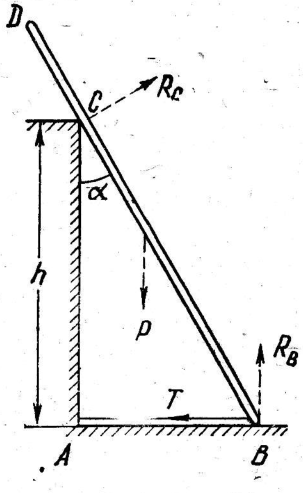
$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

Бурчак тезликнинг Ω_x, Ω_y компонентлари боғланиш тенгламалари (28.3) ёрдамида V_x ва V_y орқали ифодаланади, Ω_z учун эса

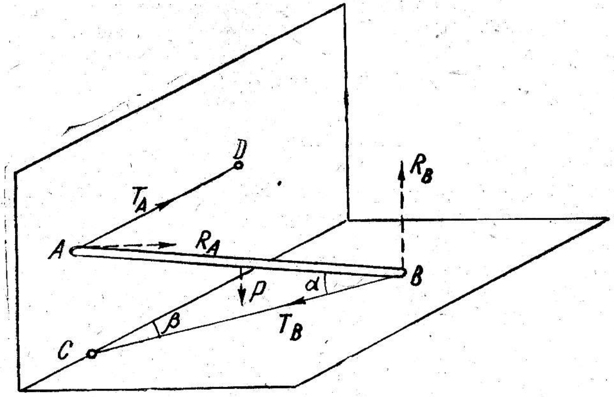
$$\frac{2}{5}\mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

тенглама ((2) тенгламанинг z-компонентаси) га эга бўламиз.

2. P оғирлик ва l узунликдаги бир жинсли BD стержень деворга



25- расм.



26-расм.

тираб қўйилган (25-расм); унинг B пастки учи AB ип билан тортиб қўйилган. Таянч реакцияси ва ипнинг таранглиги аниқлансин.

Ечилиши. Стерженнинг оғирлигини унинг ўртасидан пастга вертикал йўналган P куч кўринишида тасвирлаш мумкин. Реакция кучлари R_B ва R_C мос равишда стержендан тик юқорига ва унга перпендикуляр йўналган; ипнинг T таранглиги B дан A га йўналган. Бу ҳолда мувозанат тенгламаларининг ечимидан

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha,$$

$$R_B = P - R_C \sin\alpha, \; T = R_C \cos\alpha$$

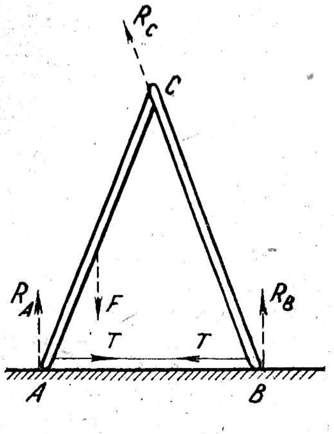
келиб чиқади

3. P оғирликдаги AB стержень учлари билан горизонтал ва вертикал текисликларга тиралади (26-расм) ва у шу вазиятда иккита горизонтал AD ва BC иплар билан ушлаб турилади; BC ип AB стержень билан бир вертикал текисликда ётади. Таянч реакциялари ва ипларнинг таранглиги аниқлансин.

Ечилиши. Ипларнинг таранглиги T_A ва T_B A дан D га ва B дан C га йўналган. R_A ва R_B реакциялар тегишли текисликларга перпендикулярдир. Мувозанат тенгламаларини ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$R_B = P, \; T_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg}\alpha, \; R_A = T_B \sin\beta, \; T_A = T_B \cos\beta.$$

4. l узунликдаги иккита стержень юқоридан шарнир воситасида бириктирилган, пастдан эса, AB ип билан бир-бирига тортиб қўйилган (27-расм). Стерженлардан бирининг ўртасига F куч таъсир эттирилади (стержень оғирлиги ҳисобга олинмайди). Реакция кучлари топилсин



27-расм.

Ечилиши. Ипнинг T таранглиги A нуқтада A дан B томон, B нуқтада эса B дан A нуқта томон йўналади. A ва B нуқтадаги R_A ва R_B реакциялар таянч текислигига перпендикуляр. Шарнирда AC стерженга таъсир этувчи реакция кучини $\mathbf{R}_C$ деб белгилаймиз; у ҳолда BC стерженга $-\mathbf{R}_C$ реакция таъсир этади. BC стерженга таъсир этувчи $\mathbf{R}_B$, T ва $-\mathbf{R}_C$ куч моментлари йиғиндисининг нолга тенглик шарти $\mathbf{R}_C$ векторнинг BC бўйлаб йўналишига сабаб бўлади. Ҳар иккала стержень учун қолган мувозанат шартлари қуйидаги қийматларни беради:

$$R_A = \frac{3}{4}F, \; R_B = \frac{F}{4},$$

$$R_C = \frac{F}{4\sin\alpha}, \quad T = \frac{1}{4} F \operatorname{ctg}\alpha,$$

(бу ерда α—бурчак CAB).

29-§. Ноинерциал саноқ системасидаги ҳаракат

Шу вақтга қадар қўрилган барча механикавий системалар ҳаракатини инерциал саноқ системасига мансуб деб ҳисобладик. Масалан, бир зарранинг ташқи майдондаги Лагранж функцияси фақат инерциал саноқ системасидагина

$$L_0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U \tag{29.1}$$

кўринишга эга ва мос ҳолда

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

ҳаракат тенгламасини беради (мазкур параграфда биз 0 индекси билан инерциал саноқ системасига тегишли катталикларни белгилаймиз). Энди зарранинг ноинерциал саноқ системасидаги ҳаракат тенгламалари қандай бўлишлигини кўриб ўтайлик. Бу масалани ечишда ишни яна саноқ системасининг қандайлигига боғлиқ бўлмаган энг кичик таъсир принципидан бошлаймиз; у билан бирга Лагранж тенгламалари ҳам ўз кучини сақлаб қолади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \tag{29.2}$$

Аммо Лагранж функцияси энди (29.1) кўринишга эга эмас ва уни топиш учун L_0 функциясини мос ҳолда алмаштириш лозим.

Алмаштиришни икки этапда ўтказамиз. Дастлаб K_0 инерциал системага нисбатан $\mathbf{V}(t)$ тезликда илгариланма ҳаракатланаётган K' саноқ системасини оламиз. Зарранинг K_0 ва K' системаларга нисбатан $\mathbf{v}_0$ ва $\mathbf{v}_1$ тезликлари ўзаро

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}'+\mathbf{V}(t). \tag{29.3}$$

муносабатда боғланган. Бу ифодани (29.1) га қўйиб, K' системадаги

$$L'=\frac{m\mathbf{v}'^2}{2}+m\mathbf{v}'\mathbf{V}+\frac{m}{2}\mathbf{V}^2-U$$

Лагранж функциясини оламиз. Аммо $V^2(t)$ вақтнинг маълум функцияси; у бирорта бошқа функциянинг t бўйича тўла ҳосиласи сифатида олиниши мумкин, шунга кўра мазкур ифоданинг учинчи ҳади тушириб қолдирилиши мумкин. $\mathbf{v}'=d\mathbf{r}'/dt$ эканлигидан ($\mathbf{r}'$ — зарранинг K' координата системасидаги радиус-вектори):

$$m\mathbf{V}(t\mathbf{v})'=m\mathbf{V}\frac{d\mathbf{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}')-m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Буни Лагранж функциясига қўйиб ва яна вақт бўйича тўла ҳосилани тушириб қолдиргандан сўнг

$$L'=\frac{mv'^2}{2}-m\mathbf{W}(t)\mathbf{r}'-U \tag{29.4}$$

ифодани оламиз, бу ерда $\mathbf{W}=d\mathbf{V}/dt$ катталик K' саноқ системаси илгариланма ҳаракатининг тезланиши.

(29.4) ёрдамида Лагранж тенгламасини тузамиз:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}-m\mathbf{W}(t). \tag{29.5}$$

Шундай қилиб, ўзининг зарра ҳаракат тенгламасига таъсири маъносида саноқ системасининг тезланувчан илгариланма ҳаракати бир жинсли куч майдонининг пайдо бўлишига эквивалентдир: бу майдонда таъсир этувчи куч зарра массасининг $\mathbf{W}$ тезланишга кўпайтмасига тенг ва шу тезланишга тескари йўналган.

Яна бир саноқ системаси— K ни киритамиз. У K' система билан умумий координата бошига эга, лекин унга нисбатан $\mathbf{\Omega}(t)$ бурчак тезликда айланади; K_0 система K_0 инерциал системага нисбатан ҳам илгариланма, ҳам айланма ҳаракат қилади.

Зарранинг K' системага нисбатан $\mathbf{v}'$ тезлиги унинг K системага нисбатан $\mathbf{v}$ тезлиги ва K система билан биргаликдаги айланиш тезлиги $[\mathbf{\Omega r}]$ нинг йиғиндисидан иборат:

$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}+[\mathbf{\Omega r}]$$

(зарранинг K ва K' системалардаги $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{r}'$ радиус-векторлари устма-уст тушади).

Бу ифодани (29.4) Лагранж функциясига қўйсак,

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}]+\frac{m}{2}[\mathbf{\Omega r}]^2-m\mathbf{W}\mathbf{r}-U \tag{29.6}$$

ҳосил бўлади.

Бу ифода зарранинг ихтиёрий ноинерциал саноқ системасидаги Лагранж функцияси учун умумий ифодадир. Саноқ системасининг айланиши Лагранж функциясида ўзига хос бўлган зарра тезлиги бўйича чизиқли ҳад ҳосил қилади.

Лагранж тенгламаларига кирувчи ҳосилаларни ҳисоблаш учун

$$\begin{aligned}dL=m\mathbf{v}d\mathbf{v}+md\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}]+m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega}d\mathbf{r}]+m[\mathbf{\Omega r}][\mathbf{\Omega}d\mathbf{r}]-\\-m\mathbf{W}d\mathbf{r}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}=m\mathbf{v}d\mathbf{v}+md\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}]+md\mathbf{r}[\mathbf{v\Omega}]+\\+m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}]d\mathbf{r}-m\mathbf{W}d\mathbf{r}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

тўла дифференциални ёзамиз.

$d\mathbf{v}$ ва $d\mathbf{r}$ ли ҳадларни йиғиб, қуйидагини топамиз;

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=m\mathbf{v}+m[\mathbf{\Omega r}],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=m[\mathbf{v\Omega}]+m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}]-m\mathbf{W}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Бу ифодаларни (29.2) га қўйиб, изланаётган ҳаракат тенгламасини тузамиз:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}-m\mathbf{W}+m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}]+2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]+m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}]]. \qquad (29.7)$$

Демак, саноқ системасининг айланишига боғлиқ бўлган „инерция кучлари“ уч қисмдан ташкил топади. $m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}]$ куч айланишнинг нотекислигига алоқадор, қолган иккитаси эса текис айланишда ҳам қатнашади. $2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]$ кучи *Кориолис кучи* дейилади; у зарранинг тезлигига боғлиқлиги билан илгари кўриб ўтилган барча нодиссипатив кучлардан фарқ қилади. $m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}]]$ куч *марказдан қочма* куч дейилади У айланиш ўқига (яъни $\mathbf{\Omega}$ йўналишга) перпендикуляр ҳолда $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{\Omega}$ орқали ўтган текисликда ётади ва ўқдан ташқарига қараб йўналган; марказдан қочма куч катталик жиҳатдан $m\rho\Omega^2$ га тенг (ρ—айланиш ўқидан заррагача бўлган масофа).

Илгариланма тезланишсиз текис айланаётган координаталар системасини алоҳида кўриб ўтайлик. $\mathbf{\Omega}=\mathrm{const}$, $\mathbf{W}=0$ қийматларни (29.6) ва (29.7) ларга қўйиб,

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]+\frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2-U \qquad (29.8)$$

Лагранж функциясини ва

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}+2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]+m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}]] \qquad (29.9)$$

ҳаракат тенгламасини оламиз.

Шунингдек, зарранинг шу ҳолдаги энергиясини ҳисоблаймиз. $E=\mathbf{p}\mathbf{v}-L$ га

$$\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=m\mathbf{v}+m[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}] \qquad (29.10)$$

ни қўйиб, энергияни топамиз:

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2+U. \qquad (29.11)$$

Энергия ифодасида тезлик бўйича чизиқли бўлган ҳад йўқ. Саноқ системаси айланишининг таъсири энергия ифодасига фақат зарра координаталарига боғлиқ ва бурчак тезлик квадратига пропорционал бўлган ҳад киритади. Бу қўшимча потенциал энергия $\left(-\frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2\right)$ *марказдан қочма* энергия дейилади.

Зарранинг текис айланувчи саноқ системасига нисбатан $\mathbf{v}$ тезлиги унинг K_0 инерциал системага нисбатан тезлиги $\mathbf{v}_0$ билан

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}+[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}] \qquad (29.12)$$

орқали боғланган. Шунинг учун зарранинг K системадаги (29.10) $\mathbf{p}$ импульси унинг K_0 системадаги $\mathbf{p}_0=m\mathbf{v}_0$ импульсига мос тушади. Шунингдек, импульслар билан бирга $\mathbf{M}_0=[\mathbf{r}\mathbf{p}_0]$ ва $\mathbf{M}=[\mathbf{r}\mathbf{p}]$ импульс моментлари ҳам бир-бирига мос келади. Зарранинг K ва K_0 системалардаги энергиялари эса бир-биридан фарқ қилади. (29.12) даги $\mathbf{v}$ ни (29.11) га қўйиб,

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-m\mathbf{v}_0[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]+U=\frac{mv_0^2}{2}+U-m[\mathbf{r}\mathbf{v}_0]\mathbf{\Omega}$$

ифодани оламиз. Бундаги биринчи икки ҳад K_0 системадаги E_0 энергияни кўрсатади. Охирги ҳадга импульс моментини киритиб,

$$E=E_0-\mathbf{M}\mathbf{\Omega} \qquad (29.13)$$

муносабатни оламиз.

Текис айланадиган координаталар системасига ўтишда энергияни алмаштириш қонуни (29.13) формула орқали ифодаланади. Мазкур қонунни биз бир зарра учун келтириб чиқарган бўлсак-да, бу таъриф бевосита исталган зарралар системаси учун умумийлаштирилиши мумкин ва натижада барибир шу (29.13) формулага келамиз.

Масалалар

1 Эркин тушаётган жисмнинг Ер айланиши туфайли вертикалдан четга оғиши топилсин. (Айланиш бурчак тезлигини кичик деб ҳисоблансин.)

Ечилиши. Оғирлик майдони $U=-m\mathbf{g}\mathbf{r}$, бунда $\mathbf{g}$ – оғирлик кучининг тезланиш вектори; (29.9) да Ω га пропорционал бўлган марказдан қочма кучни ҳисобга олмай, ҳаракат тенгламасини

$$\dot{\mathbf{v}}=2[\mathbf{v}\Omega]+\mathbf{g} \qquad (1)$$

кўринишда ёзамиз.

Бу тенгламани кетма-кет яқинлашишлар ўтказиб ечамиз. Бунинг учун $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ деб оламиз, бу ерда $\mathbf{v}_1$ вектор $\dot{\mathbf{v}}_1=\mathbf{g}$ тенгламанинг ечими, яъни $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$ (бунда $\mathbf{v}_0$ — бошланғич тезлик). $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ни (1) га қўйиб ва ўнг томонда фақат $\mathbf{v}_1$ ни қолдириб, $\mathbf{v}_2$ учун

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2[\mathbf{v}_1\Omega] = 2t[\mathbf{g}\Omega] + 2[\mathbf{v}_0\Omega]$$

тенгламани оламиз. Уни интеграллаcак,

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\Omega] + t^2[\mathbf{v}_0\Omega] \tag{2}$$

ҳосил бўлади ($\mathbf{h}$—зарранинг бошланғич ҳолат вектори). z ўқини вертикал бўйича юқорига, x ўқини эса меридиан бўйлаб қутбга йўналтирамиз у ҳолда

$$g_x = g_y = 0,\ g_z = -g;\ \Omega_x = \Omega\cos\lambda,\ \Omega_y = 0,\ \Omega_z = \Omega\sin\lambda,$$

бунда λ — кенглик (уни аниқ бўлсин учун, шимолий кенглик деб фараз қиламиз). (2) да $\mathbf{v}_0 = 0$ деб

$$x = 0,\ y = -\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda$$

бўлишини топамиз. Бу ерга $t \approx \sqrt{2h/\mathbf{g}}$ тушиш вақтини қўйсак, узил-кесил

$$x = 0,\ y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

ҳосил бўлади (y нинг манфий қиймати шарққа оғишга тўғри келади).

2. Ер сиртидан $\mathbf{v}_0$ бошланғич тезликда отиб юборилган жисмнинг текисликдан оғиши аниқлансин.

Ечилиши. xz текисликни $\mathbf{v}_0$ вектор унинг устида ётадиган қилиб танлаймиз. Бошланғич баландлик $h=0$. Ён томонга оғиш учун (2) дан (1- масала)

$$y = -\frac{t^3}{3}g\Omega_x + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x})$$

қийматни ёки $t \approx 2v_{0z}/g$ ҳаракат вақтини қўйиб,

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\Omega\left(\frac{1}{3}v_{0z}\cos\lambda - v_{0x}\sin\lambda\right)$$

қийматни топамиз.

3. Ер айланишининг маятник (*Фуко маятниги*) нинг кичик тебранишларига таъсири аниқлансин.

Ечилиши. Маятникнинг вертикал силжишини иккинчи тартибли кичик катталик деб, уни ҳисобга олмай жисм ҳаракати xy горизонтал текисликда бўлаяпти деб фараз қилиш мумкин. Ифодасида Ω^2 бўлган ҳадларни тушириб қолдириб ҳаракат тенгламасини

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z\dot{y},\ \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z\dot{x}$$

кўринишда ёзамиз. бу ерда ω — маятникнинг Ер айланишини ҳисобга олмагандаги тебраниш частотаси Иккинчи тенгламани i га кўпайтириб ва биринчисига қўшиб, $\xi = x + iy$ комплекс катталик учун бир тенглама оламиз

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0.$$

$\Omega_z \ll \omega$ бўлганда, бу тенглама ечими

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

ёки

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0)$$

кўринишга эга бўлади, бунда $x_0(t)$, $y_0(t)$ функциялар маятникнинг Ер айланиши бўлмагандаги траекториясини беради. Бинобарин Ер айланишининг таъсири натижасида маятник траекторияси вертикал атрофида Ω_z бурчак тезлик билан бурилади.

VII боб

КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАР

30- §. Гамильтон тенгламалари

Лагранж функцияси (ва ундан келтириб чиқариладиган Лагранж тенгламалари) ёрдамида механика қонунларини ифодалаш системанинг механикавий ҳолатини унинг умумлашган координаталари ва тезликларини бериш йўли билан баён этишни кўзда тутади. Аммо бу мумкин бўлган ягона йўл эмас. Айниқса механиканинг турли умумий масалаларини системанинг умумлашган координаталари ва импульслари ёрдамида баён қилиш қатор афзалликларга эга. Шунга кўра, механиканинг бундай ифодасига жавоб берувчи ҳаракат тенгламаларини топиш масаласи туғилади.

Мустақил ўзгарувчилар тўпламининг биридан иккинчисига ўтишни математикада Лежандр алмаштириши номи билан таниш бўлган алмаштириш воситасида амалга ошириш мумкин. Мазкур ҳолда бу иш қуйидагича бажарилади.

Координаталар ва тезликлар функцияси сифатида Лагранж функциясининг тўла дифференциали

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial qi}dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i.$$

Бу ифодани

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \tag{30.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин, чунки Лагранж тенгламаларига асосан $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ ва таърифга кўра $\partial L/\partial \dot{q}_i$ ҳосилалар умумлашган импульслардир.

(30.1) даги иккинчи ҳадни

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i$$

кўринишда қайта ёзиб, тўла дифференциални тенгликнинг чап томонига ўтказиб ва барча ишораларни ўзгартириб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i a q_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Дифференциал белгиси остидаги катталик система энергиясини кўрсатади (6-§ га қ.); координаталар ва импульслар орқали ифодаланган бу катталик *Гамильтон функцияси* дейилади:

$$H(p,\ q,\ t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \qquad (30.2)$$

Дифференциал тенглик

$$aH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i d_i p \qquad (30.3)$$

дан қуйидаги тенгламалар келиб чиқади:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \qquad (30.4)$$

Бу—*Гамильтон тенгламалари* деб аталувчи, p ва q ўзгарувчанлар билан ифодаланган ҳаракат тенгламаларидир. Улар Лагранж усулидаги s та иккинчи тартибли тенгламалар ўрнига $2s$ та номаълум $p(t)$ ва $q(t)$ функциялар учун $2s$ та биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилади. Уларнинг юзаки (формал) соддалигига ва симметриясига қараб бу тенгламаларни *каноник* тенгламалар деб ҳам аталади.

Гамильтон функциясининг вақт бўйича тўла ҳосиласи

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Бунга (30.4) тенгламалардан $\dot{q}_i$ ва $\dot{p}_i$ ларни қўйганда охирги икки ҳад ўзаро қисқаради, яъни

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (30.5)$$

қолади. Хусусан, агар Гамильтон функцияси вақтга ошкор боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $dH/dt = 0$ бўлади, яъни яна энергиянинг сақланиш қонунига келамиз.

Лагранж ва Гамильтон функциялари таркибига динамикавий ўзгарувчилар q, $\dot{q}$ ёки q, p билан бир қаторда турли параметрлар — механикавий системанинг ёки унга таъсир этувчи ташқи майдоннинг хоссаларини характерловчи катталиклар ҳам киради. Айтайлик, λ шундай параметр бўлсин, уни ўзгарувчан катталик сифатида олсак, (30.1) ўрнига

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

ифодани оламиз, шундан сўнг (30.3) қуйидагича ўзгаради:

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Бу ердан Лагранж ва Гамильтон функцияларининг λ параметр бўйича хусусий ҳосилаларини боғловчи

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,\ q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},\ q} \qquad (30.6)$$

муносабат ҳосил бўлади; ҳосилалар ёнидаги индекслар дифференциаллашни биринчи ҳолда p ва q лар доимий деб, иккинчи ҳолда эса q ва $\dot{q}$ ларни доимий деб ўтказиш кераклигини кўрсатади.

Бу натижа бошқача нуқтаи назардан берилиши ҳам мумкин. Айтайлик, Лагранж функцияси $L = L_0 + L'$ кўринишда бўлсин, бу ерда L' асосий L_0 функцияга кичик қўшимчадир. У ҳолда $H = H_0 + H'$ Гамильтон функциясидаги мос H' қўшимча L' билан

$$(H')_{p,\ q} = -(L')_{q,\ \dot{q}} \qquad (30.7)$$

орқали боғланган.

Масалалар

1. Бир моддий нуқта учун декарт, цилиндрик ва сферик координаталардаги Гамильтон функцияси топилсин.

Жавоб: x, y, z декарт координаталарида:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,\ y,\ z).$$

r, φ, z цилиндрик координаталарда:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+U(r, \varphi, z).$$

r, θ, φ сферик координаталарда:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r, \theta, \varphi).$$

2. Зарранинг текис айланаётган саноқ системасидаги Гамильтон функцияси топилсин.

Ечилиши. (29.11) ва (29.10) дан қуйидагини топамиз:

$$H=\frac{p^2}{2m}-\Omega[\mathbf{rp}]+U.$$

31-§. Гамильтон—Якоби тенгламаси

Энг кичик таъсир принципини баён этишда биз

$$S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt \tag{31.1}$$

интегрални (у системанинг t_1 ва t_2 вақт моментларидаги муайян $q^{(1)}$ ва $q^{(2)}$ вазиятлари орасидаги траектория бўйича олинган) кўриб ўтган эдик. Таъсирни вариациялашда эса шу интегралнинг бир хил $q(t_1)$ ва $q(t_2)$ ларга эга бўлган бир-бирига яқин траекториялар учун олинган қийматлари таққосланди. Шу траекториялардан фақат бири (S интегралга минимал қиймат берадигани) ҳақиқий ҳаракатга тегишлидир.

Таъсир тушунчасини бошқа нуқтаи назардан кўриб ўтайлик. Жумладан, S ни ҳақиқий траектория бўйича ҳаракатни характерловчи катталик деб оламиз ва унинг $q(t_1)=q^{(1)}$ умумий бошга эга бўлган, лекин t_2 моментда турлича ҳолатлардан ўтувчи траекториялардаги қийматларини таққослаймиз. Бошқача қилиб айтганда, ҳақиқий траектория учун олинган таъсир интегралини интегралнинг юқори чегарасидаги координата қийматларининг функцияси деб қараймиз.

Бир траекториядан унга яқин бўлган иккинчи траекторияга ўтишда таъсирнинг ўзгариши (эркинлик даражаси бирга тенг) (2.5) ифода

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{}}\right)\delta q\, dt$$

орқали берилади. Ҳақиқий ҳаракат траекториялари Лагранж тенгламаларини қаноатлантирганликларидан бундаги интеграл нолга айланади. Биринчи ҳадда эса қуйи чегарада $\delta q(t_1)=0$ деймиз ва $\delta q(t_2)$ қийматни соддагина δq деб белгилаймиз. Шунингдек, $\partial L/\partial\dot{q}$ ни p га ўзгартириб, узил-кесил $\delta s=p\delta q$ натижани оламиз ёки умумий ҳолда (эркинлик даражаси сони ихтиёрий)

$$\delta S=\sum_i p_i\delta q_i$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, таъсирнинг координаталар бўйича хусусий ҳосилалари мос импульсларга тенг бўлади:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i. \tag{31.3}$$

Шу тарзда таъсирни вақтнинг ошкор функцияси деб тушуниш мумкин: бунда муайян t_1 вақт моментида маълум $q^{(1)}$ ҳолатда бошланадиган, лекин турли $t_2=t$ вақт моментларида маълум $q^{(2)}$ ҳолатда тугайдиган траекториялар олинади. Мазкур маънода тушуниладиган $\partial S/\partial t$ хусусий ҳосила интегрални тегишли вариациялаш йўли билан ҳам топилиши мумкин. Лекин (31.3) формуладан қуйидагича фойдаланилса, бу ҳосила осонроқ топилади.

Таъсирнинг таърифига кўра, унинг вақт бўйича траектория бўйлаб тўла ҳосиласи

$$\frac{dS}{dt}=L. \tag{31.4}$$

Иккинчи томондан, S ни юқорида баён этилган маънода координата ва вақт функцияси деб қараб ва (31.3) формуладан фойдаланиб,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i p_i\dot{q}_i$$

ифодани оламиз. Бу икки ифодани таққослаб

$$\frac{\partial S}{\partial t}=L-\sum_i p_i\dot{q}_i$$

ёки узил-кесил

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H(p, q, t) \tag{31.5}$$

натижага келамиз. (31.3) ва (31.5) формулаларни биргаликда

$$dS=\sum_i p_i dq_i - Hdt \tag{31.6}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (31.6) ифода (31.1) даги интегралнинг юқори чегарасида координата ва вақтнинг функцияси деб ҳисобланган шароитда, таъсир учун тўла дифференциалдир. Таъсирнинг ўзи эса мос равишда

$$S=\int\left(\sum_i p_i dq_i - H\,dt\right) \tag{31.7}$$

интеграл кўринишда ёзилади. Хусусан, агар $H(p, q)$ функция ошкор ҳолда вақтга боғлиқ бўлмаса (энергия сақланса), $H(p, q)$ ни E ўзгармасга алмаштириш мумкин. У ҳолда S ва вақт орасидаги боғланиш $-Et$ қўшилувчи орқали ифодаланади:

$$S(q, t) = S_0(q) - Et, \tag{31.8}$$

бу ердаги

$$S_0(q)=\sum\int p_i\,dq_i \tag{31.9}$$

функцияни баъзида *қисқартирилган таъсир* дейилади.

$S(q, t)$ функция маълум дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Бу тенглама (31.5) муносабатда p импульсларни $\partial S/\partial q$ ҳосилаларга алмаштириб ҳосил қилинади:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; q_1, \ldots, q_s; t\right)=0. \tag{31.10}$$

Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни ўз ичига олган бу тенглама *Гамильтон—Якоби* тенгламаси дейилади. Жумладан, у ташқи $U(x, y, z, t)$ майдондаги бир зарра учун

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(x, y, z, t) = 0 \tag{31.11}$$

кўринишга эга.

Агар $H(p, q)$ функция вақтга ошкор боғлиқ бўлмаса, Гамильтон—Якоби тенгламаси бир оз содда шаклни олади. $S(q, t)$ нинг қийматини (31.8) дан олсак, қисқартирилган таъсир учун

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}; q_1, \ldots, q_s\right) = E \tag{31.12}$$

тенглама ҳосил бўлади.

32-§. Адиабатик инвариантлар

Бир ўлчовли финит ҳаракатланаётган ва системанинг ёки у жойлашган ташқи майдоннинг хоссаларини аниқловчи бирор λ параметр билан характерланадиган механикавий системани текширайлик.

λ параметр бирор ташқи куч таъсирида вақт ўтиши билан секин, яъни (адиабатик) ўзгаради деб фараз қиламиз; „секин“ дейиш билан шундай ўзгариш назарда тутилади-ки, бунда λ система ҳаракатининг T даври давомида оз ўзгаради:

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \tag{32.1}$$

Бундай система ёпиқ система эмас ва унинг E энергияси сақланмайди. Лекин λ секин ўзгарганлиги сабабли $\dot{E}$ энергия ўзгариш тезлиги λ параметрнинг ўзгариш тезлиги $\dot{\lambda}$ га пропорционал дейиш мумкин, яъни система энергияси λ ўзгарганда ўзини бирор λ функция каби тутади. Бошқача қилиб айтганда, E ва λ нинг шундай комбинацияси мавжудки, у система ҳаракатланганда ўзгармайди; бу катталикни *адиабатик инвариант* дейилади.

Айтайлик, $H(p, q, \lambda)$ функция системанинг λ параметрга боғлиқ бўлган Гамильтон функцияси бўлсин. (30.5) формулага кўра система энергиясининг вақт бўйича тўла ҳосиласи

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}.$$

Бу тенгликдан ҳаракат даври бўйича ўртача қиймат оламиз; λ нинг (у билан бирга $\dot{\lambda}$ нинг ҳам) секин ўзгаришини назарда тутиб, $\dot{\lambda}$ ни ўртача қиймат белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}},$$

ўртача қиймати олинаётган $\partial H/\partial\lambda$ функцияда эса λ ни эмас, балки фақат p ва q ларни ўзгарадиган катталиклар деб қаралади. Бошқача қилиб айтганда, ўртача қиймат олиш λ нинг муайян доимий қийматида рўй берган система ҳаракати бўйича амалга оширилади.

Ўртача қийматни ошкор кўринишда ёзамиз:

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}dt.$$

Гамильтон тенгламаси ($\dot q=\partial H/\partial p$) га биноан

$$dt=\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}.$$

Бу тенглама ёрдамида вақт бўйича интеграллашни координата бўйича интеграллашга алмаштирамиз, T даврни эса

$$T=\int\limits_0^T dt=\oint\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

кўринишда ёзамиз; бу ерда $\oint$ белги орқали координатанинг давр мобайнида тўла ўзгариши („олдинга“ ва „орқага“) бўйича интеграллаш кўрсатилади. Шундай қилиб,

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{dH/d\lambda}{dH/dp}dq}{\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \tag{32.2}$$

Илгари таъкидланганидек, бу формуладаги интеграллар λ нинг ўзгармас қийматида ҳаракат траекторияси бўйича олинади. Бундай траектория бўйлаб Гамильтон функцияси ўзининг ўзгармас қиймати E ни сақлайди, импульс эса ўзгарувчан q координата ва ўзгармас мустақил E ва λ параметрларнинг маълум функциясидир. Импульсни худди шундай $p(q;\ E,\lambda)$ функция деб олиб ва $H(p,q;\lambda)=E$ тенгликни параметр бўйича дифференциаллаб, қуйидагини оламиз:

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0$$

ёки

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

Бу қийматни (32.2) нинг юқоридаги интегралига қўйиб ва пастки интеграл ости функциясини $\partial p/\partial E$ кўринишда ёзиб,

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{\partial p}{\partial\lambda}dq}{\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq} \tag{32.3}$$

тенгликлар ёки

$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{at}}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0$$

ифодани оламиз.

Бу тенгликни узил-кесил

$$\overline{\frac{dI}{dt}}=0 \tag{32.4}$$

кўринишда қайта ёзиш мумкин, бу ерда

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \tag{32.5}$$

бўлиб, интеграл берилган E ва λ лар учун ҳаракат траекторияси бўйича олинади. Келтирилган натижага кўра мазкур яқинлашишда I катталик λ параметр ўзгарганда доимий қолади, яъни у адиабатик инвариантдир.

Системанинг *фазавий траекторияси* (p нинг q га боғланишини кўрсатувчи эгри чизиқ) ҳақида тушунча киритиб, (32.5) интегралга геометрик маъно бериш мумкин. Даврий ҳаракатланувчи системанинг фазавий траекторияси ёпиқ эгри чизиқ бўлади. Шу эгри чизиқ бўйлаб олинган (32.5) интеграл эгри чизиқ билан ўралган майдонни кўрсатади.

Мисол тариқасида бир ўлчовли осциллятор учун адиабатик инвариантни аниқлаймиз. Унинг Гамильтон функцияси

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2},$$

бунда ω—осцилляторнинг хусусий частотаси. Фазавий траектория тенгламаси энергиянинг сақланиш қонуни орқали берилади: $H(p, q) = E$. Бу ярим ўқлари $\sqrt{2mE}$ ва $\sqrt{2E/m\omega^2}$ бўлган эллипсдир: унинг майдони (2π га бўлинган)

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{32.6}$$

Бу катталикнинг адиабатик инвариантлиги параметрлари секин ўзгарувчи осциллятор энергиясининг частотага пропорционал эканини билдиради.

VIII боб

НИСБИЙЛИК ПРИНЦИПИ

33-§. Ўзаро таъсирнинг тарқалиш тезлиги

Классик механикада моддий зарраларнинг ўзаро таъсири шу зарралар координаталарининг функциялари бўлган потенциал энергия орқали берилади. Равшанки, тавсифнинг бу усулида ўзаро таъсир бир онда тарқалади деб фараз қилинади. Ҳақиқатан, бундай тавсифда зарраларнинг ҳар бирига қолганлари томонидан таъсир этувчи кучлар зарраларнинг фақат шу вақт моментидаги вазиятига боғлиқ. Ўзаро таъсирлашувчи зарралардан бирортаси ҳолатининг ўзгариши қолган зарраларда шу онда акс этади. Лекин тажрибанинг кўрсатишича, ўзаро оний таъсирлар табиатда учрамайди. Шунинг учун ўзаро таъсир тарқалишининг онийлиги ҳақидаги тасаввурга асосланган механика ҳам, сўзсиз, баъзи ноаниқликка йўл қўяди. Ҳақиқатда, агар ўзаро таъсирлашувчи жисмлардан бирида қандайдир ўзгариш содир бўлса, бу ўзгариш бошқа жисмда акс этиши учун маълум вақт ўтиши лозим. Жисмлар орасидаги масофани шу вақт оралиғига бўлиб, *ўзаро таъсирларнинг тарқалиш тезлигини* топамиз.

Янада аниқроқ қилиб, бу тезликни ўзаро таъсирлар тарқалишининг максимал тезлиги деб аташ мумкин бўлур эди. У бирор жисмда юз берган ўзгаришни билдирувчи биринчи сигналнинг иккинчи жисмга бориб етиши учун кетган вақт оралиғинигина аниқлаб беради. Равшанки, ўзаро таъсир тарқалишида чегаравий тезликнинг мавжудлиги, айни вақтда, табиатда жисм ҳаракат тезлигининг шу чегаравий тезликдан катта бўла олмаслигини билдиради

Нисбийлик принципига биноан ўзаро таъсир тарқалиши тезлигининг катталиги табиат қонунларининг бири сифатида барча инерциал саноқ системалари учун бир хил бўлади, яъни у универсал доимийдир.

Бу доимий тезлик айни вақтда ёруғликнинг бўшлиқда тарқалиш тезлигидир (буни кейинроқ кўрсатиб ўтамиз); шунинг учун уни *ёруғлик тезлиги дейилади.* У одатда c ҳарфи билан белгиланади, сон қиймати эса

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}. \tag{33.1}$$

Амалда классик механиканинг кўпгина ҳолларда етарлича аниқ бўлишлиги шу c тезликнинг катталиги натижасидир. Биз иш кўрадиган тезликларнинг кўпчилиги ёруғлик тезлигига нисбатан шунчалик кичикки, c тезликни чексиз деб фараз қилиш натижаларнинг аниқлигига амалда таъсир этмайди.

Нисбийлик принципини ўзаро таъсир тарқалиш тезлигининг чеклилиги билан бирлаштириш *Эйнштейннинг нисбийлик принципи* дейилади. Бу принцип 1905 йилда А. Эйнштейн томонидан таклиф этилган бўлиб, у ўзаро таъсир тарқалиш тезлигини чексиз деб фараз қилувчи Галилей нисбийлик принципидан фарқ қилади.

Эйнштейннинг нисбийлик принципига (уни биз, одатда, оддийгина қилиб нисбийлик принципи деб атаймиз) асосланган механика *релятивистик механика* дейилади. Ҳаракатдаги жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигига нисбатан кичик бўлган чегаравий ҳолда, ўзаро таъсирнинг тарқалиш тезлиги чеклилигининг ҳаракатга таъсирини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда релятивистик механика ўзаро таъсир тарқалишининг онийлиги ҳақидаги фаразга асосланган классик механикага ўтади. Релятивистик механикадан классик механикага ўтиш релятивистик механика формулаларида шаклан $c \to \infty$ ўтиш йўли билан амалга оширилади.

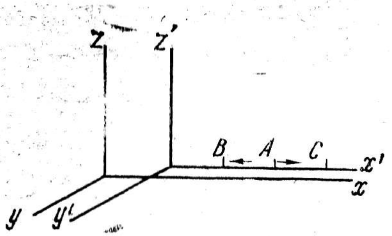
Классик механиканинг ўзидаёқ фазо нисбийдир, яъни турли ҳодисалар ўртасидаги фазовий муносабатлар ўзларининг қайси саноқ системасида кўрилаётганига боғлиқ. Турли вақтларда ўтувчи икки ҳодиса фазонинг бир ерида ёки, умуман, бир-биридан маълум масофада содир бўлади, деган фикр фақат у қайси саноқ системасига тегишли экани кўрсатилган ҳолдагина маънога эгадир.

Аксинча, вақт классик механикада абсолют бўлади; бошқача қилиб айтганда, вақтнинг хоссалари саноқ системасига боғлиқ эмас — вақт барча саноқ системалари учун бир хил. Демак, агар қандайдир икки ҳодиса бирор кузатувчи назарида бир вақтда ўтаётган бўлса, улар исталган бошқа кузатувчи учун ҳам бир вақтли ҳодисалардир. Умуман, икки ҳодиса ўртасидаги вақт оралиғи барча саноқ системаларида бир хил бўлиши керак.

Лекин абсолют вақт тушунчаси Эйнштейннинг нисбийлик принципига батамом зид эканини тушуниш қийин эмас. Бунинг учун ҳаммага маълум бўлган тезликларни қўшиш қонунининг (унга кўра мураккаб ҳаракат тезлиги ташкил этувчи ҳаракатлар тезликларининг оддий вектор йиғиндисига тенг) абсолют вақт тўғрисидаги тушунчага асосланган классик механикада ўринли эканини эслаш кифоя. У ҳолда классик механикада универсал деб ҳисобланган бу қонунни ўзаро таъсирнинг тарқалишига ҳам қўллаш табиийдир. Бундан нисбийлик принципига зид бўлган хулоса, яъни ўзаро таъсир тарқалиш тезлигининг турли инерциал саноқ системаларида турлича бўлиши келиб чиқади.

Лекин тажриба нисбийлик принципининг тўғрилигини батамом тасдиқлайди. Биринчи марта Майкельсон ўтказган тажрибаларда (1881 й.) ёруғлик тезлиги ўзининг тарқалиш йўналишига бутунлай боғлиқ эмаслиги аниқланди; классик механикада эса ёруғликнинг Ер ҳаракати йўналишидаги тезлиги қарама-қарши йўналишдаги тезликдан фарқ қилиши лозим.

Шундай қилиб, нисбийлик принципи вақт абсолют эмас, деган хулосага олиб келади. Вақт турли саноқ системаларида турлича ўтади. Бинобарин, муайян икки ҳодиса орасида маълум вақт ўтди дейиш, шу фикрнинг қайси саноқ системасига оид экани кўрсатилган ҳолдагина ўринлидир. Хусусан, бирор саноқ системасида бир вақтда юз берган ҳодисалар бошқа системада бир вақтда юз бермайди.



28-расм.

Буни ойдинлаштириш учун қуйидаги оддий мисолни кўриб ўтиш фойдалидир. Координата ўқлари xyz ва $x'y'z'$ бўлган K ва K' инерциал саноқ системаларини оламиз: K' система x ва x' ўқлари бўйлаб K га нисбатан ўнг томонга ҳаракатланади (28-расм).

X' ўқ устидаги бирор A нуқтадан икки ўзаро қарама-қарши йўналишда икки сигнал тарқалаётган бўлсин. Сигналнинг K' системадаги тарқалиш тезлиги ҳар қандай инерциал системадагидек иккала йўналишда ҳам c га тенг бўлганидан, сигналлар A нуқтадан тенг узоқликдаги B ва C нуқталарга бир вақтда (K' системада) етиб келадилар. Лекин ўша икки ҳодиса (сигналнинг B ва C га етиб бориши) K системадаги кузатувчи учун бир вақтда содир бўладиган ҳодиса эмас. Ҳақиқатан, сигналларнинг K системага нисбатан тезликлари ҳам нисбийлик принципига мувофиқ c га тенг ва B нуқта A дан унга келаётган сигналга яқинлашиши (K системага нисбатан), C нуқта эса A дан C га келаётган сигнал йўналишида узоқлашиши сабабли K системада сигнал B нуқтага C дан илгари етиб келади.

Шундай қилиб, Эйнштейннинг нисбийлик принципи асосий физикавий тушунчаларга фундаментал ўзгаришлар киритади. Кундалик тажрибадан олинган фазо ва вақт тўғрисидаги тасаввурлар фақат тахминийдир. Улар бизнинг кундалик ҳаётда ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик бўлган тезликлар билангина иш кўришимиз натижасидир.

34- §. Интервал

Бундан буён биз кўпинча *ҳодиса* тушунчасидан фойдаланамиз. Ҳодиса ўзи содир бўлган ўрин (жой) ва вақт орқали аниқланади. Шундай қилиб, бирор моддий заррада юз берадиган ҳодиса шу зарранинг учта координатаси ва ҳодиса рўй берган вақт моменти орқали аниқланади.

Кўргазмали бўлсин учун кўпинча ўқлари учта фазовий координата ва вақтни кўрсатадиган хаёлий тўрт ўлчовли фазодан фойдаланиш ўринлидир. Бу фазода ҳодиса *дунёвий нуқталар* деб аталадиган нуқта кўринишида тасвирланади. Ҳар қандай заррага тўрт ўлчовли фазода бирор чизиқ (*дунёвий чизиқ*) тўғри келади. Бу чизиқ нуқталари зарранинг барча вақт моментидаги координаталарини кўрсатади. Равшанки, текис ва илгарилама ҳаракатдаги моддий заррага дунёвий тўғри чизиқ мос келади.

Энди ёруғлик тезлигининг инвариантлик принципи учун математикавий ифодани топамиз. Бунинг учун бир-бирига нисбатан ўзгармас тезликда ҳаракатланаётган K ва K' саноқ системаларини кўриб ўтамиз. Координата ўқларини x ва x' ўқлар устма-уст тушадиган ҳолда, y' ва z' ўқларини эса y ва z ўқларга параллел бўлган ҳолда танлаб оламиз; K ва K' системаларидаги вақтни t ва t' деб белгилаймиз.

Фараз қилайлик, биринчи ҳодиса K системада x_1, y_1, z_1 координаталарга эга бўлган нуқтадан t_1 (K системада) вақт моментида ёруғлик тезлигида тарқалувчи сигналнинг чиқишидан иборат бўлсин. K системада туриб, шу сигналнинг тарқалишини кузатамиз. Иккинчи ҳодиса эса сигналнинг t_2 вақт моментида x_2, y_2, z_2 нуқтага келишидир. Сигнал тарқалиш тезлиги c га тенг; у $c(t_2-t_1)$ масофани босиб ўтади. Иккинчи томондан, шу масофанинг ўзи $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$ га тенг. Шундай қилиб, биз K системадаги икки ҳодиса координаталари орасидаги муносабатни қуйидагича ёзамиз:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \quad (34.1)$$

Ўша икки ҳодиса, яъни сигналнинг тарқалишини K' системадан кузатиш мумкин. Биринчи ҳодисанинг K' системадаги координаталари x'_1, y'_1, z'_1, t'_1, иккинчи ҳодисаники эса x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 бўлсин. Ёруғлик тезлиги K ва K' системаларда бир хил бўлганидан, (34.1) даги каби

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0 \quad (34.2)$$

тенгликни оламиз

Агар x_1, y_1, z_1, t_1 ва x_2, y_2, z_2, t_2 лар қандайдир икки ҳодиса координаталари бўлса, у ҳолда

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \quad (34.3)$$

катталик шу икки ҳодиса орасидаги *интервал* дейилади.

Шундай қилиб, ёруғлик тезлигининг инвариантлигига кўра, агар икки ҳодиса орасидаги интервал бир саноқ системасида нолга тенг бўлса, у интервал исталган бошқа системада ҳам нолга тенг бўлади.

Агар икки ҳодиса бир-бирига чексиз яқин бўлса, улар орасидаги ds интервал учун

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \quad (34.4)$$

муносабат ўринлидир.

(34.3) ёки (34.4) ифодаларнинг шакли формал математикавий нуқтаи назардан интервални хаёлий тўрт ўлчовли фазода (ўқлари x, y, z ва ct кўпайтма кўринишида танланган) икки нуқта орасидаги масофа деб қарашга имкон беради. Лекин бу катталикни тузиш қоидаси билан одатдаги геометрия қоидалари ўртасида катта фарқ бор: интервал квадратини топишда турли ўқлар бўйича координаталар фарқининг квадратлари ҳар хил ишоралар билан қўшилади.[1])

Юқорида кўрсатилганидек, агар бирор инерциал саноқ системасида $ds=0$ бўлса, у ҳолда бошқа системада ҳам $ds'=0$. Иккинчи томондан, ds ва ds' катталиклар бир хил тартибли чексиз кичик катталиклардир. Шу икки сабабга кўра ds^2 ва ds'^2 лар бир-бирларига пропорционал бўлишлари керак:

$$ds^2=ads'^2,$$

бунда a коэффициент фақат ҳар икки инерциал система нисбий тезликларнинг абсолют катталикларига боғлиқ бўлиши мумкин. a координата ва вақтга боғлиқ бўла олмайди, чунки акс ҳолда фазонинг турли нуқталари ва вақт моментлари тенг кучли бўлмас эди, бу эса фазо ва вақтнинг бир жинсли бўлиш шартига зиддир. У, шунингдек, нисбий тезлик йўналишига ҳам боғлиқ бўла олмайди, чунки акс ҳолда фазонинг изотроплиги бузилади.

---

[1]) (34.4) квадратик шакл билан аниқланадиган тўрт ўлчовли геометрия одатдаги Евклид геометриясидан фарқли равишда *псевдоевклид* геометрия дейилади. Бу геометрия нисбийлик назариясига мос ҳолда *Г. Минковский* томонидан киритилган эди.

Учта K, K_1, K_2 саноқ системаларини олиб кўрайлик, бунда V_1 ва V_2 тезликлар K_1 ва K_2 системаларнинг K га нисбатан тезлиги бўлсин. У ҳолда

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2, \qquad ds^2 = a(V_2)ds_2^2$$

бўлади. Ўша асосда

$$ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда V_{12} катталик K_2 нинг K_1 га нисбатан ҳаракат тезлигининг абсолют қиймати. Бу муносабатларни бир-бири билан таққослаб

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \qquad (34.5)$$

бўлиши кераклигини топамиз. Лекин V_{12} тезлик фақат $\mathbf{V}_1$ ва $\mathbf{V}_2$ векторларнинг абсолют катталигига боғлиқ бўлмай, балки улар орасидаги бурчакка ҳам боғлиқ. Лекин ўз навбатида бу бурчак (34.5) муносабатнинг чап қисмида умуман қатнашмайди. Демак, (34.5) муносабат ўринли бўлиши учун $a(V)$ функция доимий катталикка келтирилиши, у эса ўша муносабатга асосан бирга тенг бўлиши керак.

Шундай қилиб,

$$ds^2 = ds'^2,$$

чексиз кичик интерваллар тенгликдан эса, чекли интерваллар тенглиги $s = s'$ келиб чиқади.

Бинобарин, биз муҳим хулосага келамиз: ҳодисалар орасидаги интервал барча инерциал саноқ системаларида бир хил бўлади, яъни у бир инерционал саноқ системасини исталган бошқасига алмаштиришга нисбатан инвариант бўлади. Бу инвариантлик ёруғлик тезлиги ўзгармаслигининг математикавий ифодасидир.

Фараз қилайлик яна x_1, y_1, z_1, t_1 ва x_2, y_2 z_2, t_2 лар икки ҳодисанинг бирор K саноқ системасидаги координаталари бўлсин. Бу ҳар икки ҳодиса фазонинг бир нуқтасида содир бўладиган бирор K' саноқ системаси борми?— деб сўралади.

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$$

белгилашлар киритамиз. У ҳолда ҳодисалар орасидаги интервал квадрати K системада

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2,$$

K' системада эса

$$s'^2_{12} = c^2t'^2_{12} - l'^2_{12}$$

бўлади. Интервалнинг инвариантлигига асосан

$$c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12} - l'^2_{12}$$

ни оламиз. K' системада ҳар икки ҳодиса бир нуқтада рўй бериши учун $l'_{12} = 0$ бўлиши керак. У ҳолда

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12} > 0.$$

Демак, агар $s_{12}^2 = 0$, яъни ҳодисалар орасидаги интервал ҳақиқий сон бўлса, қўйилган шартни қаноатлантирадиган система мавжуд бўлади. Ҳақиқий қийматли интервалларни *вақтсимон* интерваллар дейилади.

Шундай қилиб, агар икки ҳодиса орасидаги интервал вақтсимон бўлса, у ҳолда шундай саноқ системаси борки, унда ҳар икки ҳодиса бир ерда содир бўлган. Бу системада шу ҳодисалар орасида ўтган вақт

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \qquad (34.6)$$

Бир жисм устида рўй берган қандайдир икки ҳодиса орасидаги интервал доимо вақтсимондир. Ҳақиқатан, жисмнинг икки ҳодиса орасида босиб ўтган йўли ct_{12} дан катта бўлиши мумкин эмас, чунки жисм тезлиги c дан катта бўла олмайди. Шунинг учун доимо

$$l_{12} < ct_{12}$$

Икки ҳодиса бир вақтнинг ўзида рўй берадиган бирор системани топиш мумкинми деган савол туғилади. Илгаригидек, K ва K' системаларда $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12} - l'^2_{12}$. Саволимизга кўра $t'_{12} = 0$, бундан

$$s_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0$$

бўлиши лозим. Демак, икки ҳодиса орасидаги s_{12} интервал фақат мавҳум (қийматли) бўлганда, изланаётган саноқ системасини топиш мумкин. Мавҳум (қийматли) интервалларни *вақтсимон* интерваллар дейилади.

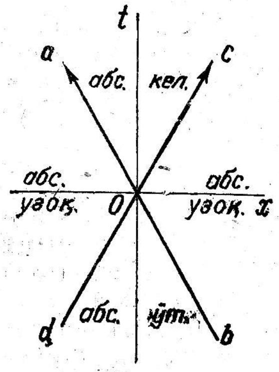
Шундай қилиб, агар икки ҳодиса орасидаги интервал вақтсимон бўлса, у ҳолда шундай саноқ системаси борки, унда ҳар икки ҳодиса бир вақтда содир бўлади. Бу ҳодисалар бўлиб ўтган нуқталар орасидаги масофа мазкур саноқ системасида қуйидагича бўлади:

$$l'_{12}=\sqrt{l_{12}^2-c^2t_{12}^2}=|s_{12}|. \qquad (34.7)$$

Интервалларнинг вақтсимон ва фазосимон интервалларга ажралиши уларнинг инвариантлигига кўра абсолют тушунчадир, яъни интервалнинг бундай ажралиш хусусияти саноқ системасига боғлиқ эмас.

Вақт саноғи ва фазовий координаталар боши сифатида бирор ҳодисани (уни O ҳодиса деб атаймиз) оламиз. Бошқача қилиб айтганда, ўқлари x, y, z, ва t бўлган тўрт ўлчовли координаталар системасида O ҳодисанинг дунёвий нуқтаси координаталар боши бўлади. Энди қолган барча ҳодисалар ушбу O ҳодисага нисбатан қандай муносабатда бўлишларини кўрамиз. Кўргазмали бўлсин учун биз фақат биргина фазовий координата ва вақтни олиб, уларни икки ўқ билан ифодалаймиз (29-расм). $t=0$ вақтда $x=0$ нуқтадан ўтадиган зарранинг тўғри чизиқли текис ҳаракати O дан ўтган ва t ўқ билан ташкил қилган бурчагининг тангенси зарра тезлигига тенг бўлган тўғри чизиқ кўринишида тасвирланади.

Энг катта тезликли (c тезликли) ҳаракатга мос келган бундай тўғри чизиқ t ўқи билан энг катта бурчак ташкил қилади. 29-расмда ёруғлик тезлиги билан O ҳодиса орқали (яъни $t=0$ да $x=0$ дан) ўтиб, қарама-қарши томон тарқалаётган икки сигнални тасвирловчи икки тўғри чизиқ келтирилган. Равшанки, зарралар ҳаракатини кўрсатувчи барча чизиқлар фақат aOc ва dOb соҳа ичида ётиши мумкин. ab ва cd тўғри чизиқлар ($x=\pm ct$) бўлади. Дунёвий нуқталари aOc соҳа ичида ётган ҳодисаларни кўриб ўтамиз. Шу соҳанинг барча нуқталарида $c^2t^2-x^2>0$ эканини аниқлаш қийин эмас. Бошқача сўз билан айтганда, шу соҳадаги бирор ҳодиса билан O ҳодиса орасидаги интерваллар вақтсимон интервааллардир. Бу



29-расм.

соҳала $t>0$ бўлади, яъни мазкур соҳанинг барча ҳодисалари O ҳодисадан „кейин" содир бўлади. Лекин вақтсимон интервал билан ажратилган икки ҳодиса ҳеч қандай саноқ системасида бир вақтда ўтмайди. Демак, aOc соҳа ҳодисаларидан бирортаси O ҳодисадан „аввал" ўтадиган, яъни $t<0$ бўладиган саноқ системасини танлаш мумкин эмас. Шундай қилиб, aOc соҳанинг барча ҳодисалари O га нисбатан барча саноқ системаларида келгуси ҳодисалардир. Шунинг учун бу соҳани O ҳодисага нисбатан „абсолют келгуси" деб аташ мумкин.

Худди шу каби bOd соҳанинг барча ҳодисалари O га нисбатан абсолют ўтган бўладилар, яъни бу соҳа ҳодисалари барча саноқ системаларида O ҳодисадан олдин рўй беради.

Ниҳоят, dOa ва cOb соҳаларни кўриб ўтайлик. Бу соҳанинг истаган ҳодисаси билан O ҳодиса орасидаги интервал фазосимондир. Бу ҳодисалар ҳар қандай саноқ системасида ҳам фазонинг турли ерида содир бўладилар. Шунинг учун бу соҳаларни O га нисбатан „абсолют узоқлашган" (мутлақо ажратилган) соҳалар деб аташ мумкин. Лекин бу ҳодисалар учун „бир вақтда", „аввал" ва „кейин" тушунчалари нисбийдир. Мазкур соҳанинг ҳар қандай ҳодисаси учун шундай саноқ системалари борки, унда бу ҳодиса O ҳодисадан кейин содир бўлади, шундай система мавжудки, унда бу ҳодиса O дан аввал содир бўлади ва ниҳоят, бир саноқ системаси борки, унда у O ҳодиса билан бир вақтда ўтади. Шуни таъкидлаш керакки, агар бир координата ўрнига учта фазовий координатани олсак, у ҳолда 29-расмдаги икки ўзаро кесишувчи тўғри чизиқ ўрнига тўрт ўлчовли x, y, z, t координаталар системасида ўқи t ўқ билан мос тушган $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ конусга эга бўлар эдик (бу конусни *ёруғлик конуси* дейилади). У ҳолда „абсолют келгуси" ва „абсолют ўтган" соҳалари шу конуснинг иккита ички бўшлиғи орқали тасвирланади.

Агар икки ҳодиса орасидаги интервал вақтсимон бўлсагина бу ҳодисалар бир-бири билан сабаб ва оқибат боғланишда бўла олади. Бу хулоса ҳеч қандай ўзаро таъсирнинг ёруғлик тезлигидан катта тезликда тарқала олмаслигидан бевосита келиб чиқади. Ҳозиргина кўриб ўтганимиздек, худди шундай ҳодисалар учунгина „аввал“ ва „кейин“ тушунчалари абсолют маънога эга. Бу эса сабаб ва оқибат тушунчалари маънога эга бўлиши учун зарурий шартдир.

35-§. Хусусий вақт

Бирор K инерциал саноқ системасида туриб, ихтиёрий равишда бизга нисбатан ҳаракатланаётган соатни кузатаяпмиз деб фараз қилайлик. Шунингдек, K' саноқ системасини киритамиз. Унинг K га нисбатан тезлиги соатнинг муайян вақт моментидаги ҳаракат тезлиги V га мос тушади.

Чексиз кичик dt вақт оралиғи давомида (қўзғалмас, яъни биз билан боғланган соат бўйича) ҳаракатдаги соат

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

масофани ўтади. Шу вақтда ҳаракатланаётган соат қандай dt' вақт оралиғини кўрсатади деган савол берилади. Ҳаракатдаги соат у билан боғланган K' системада муайян вақт моментида тинч туради, яъни

$$dx'=dy'=dz'=0.$$

интервал инвариант бўлганлиги сабабли

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2dt'^2,$$

бу ердан

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}}.$$

Лекин

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2$$

катталик ҳаракатдаги соат тезлигининг квадратидир; шунинг учун

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (35.1)$$

Агар қўзғалмас соат бўйича t_2-t_1 вақт ўтса, бу ифодани интеграллаб, ҳаракатдаги соат кўрсатадиган вақт оралиғини топиш мумкин:

$$t_2'-t_1'=\int_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (35.2)$$

Муайян (берилган) объект билан бирга ҳаракатланувчи соат кўрсатадиган вақт шу объектнинг *хусусий вақти* дейилади. (35.1) ва (35.2) формулалар хусусий вақтни объектга нисбатан „тинч“ турган саноқ системаси K система вақти орқали ифодалайди.

Бу формулалардан кўринадики, ҳаракатдаги объектнинг хусусий вақти қўзғалмас системасидаги мос келган вақтдан доимо кам бўлади. Бошқача сўз билан айтганда, ҳаракатдаги соатлар қўзғалмас соатлардан секинроқ юрадилар.

Айтайлик, бошқа соат K инерция саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланаётган бўлсин. Соатга боғланган K' саноқ системаси ҳам инерциал. У ҳолда K' системадаги соат K системадаги кузатувчи назарида унинг соатидан орқада қолади ва, аксинча, K' система нуқтаи назаридан K системадаги соат ортда қолади. Қандайдир зиддиятнинг мавжуд эмаслигига ишонч ҳосил қилиш учун қуйидаги ҳолатга диққатни жалб этамиз.

K' системадаги соат K дагига нисбатан орқада қолаётганини аниқлайлик.

Айтайлик, бирор вақт моментида K' соат K даги соат ёнидан ўтади ва шу моментда ҳар икки соат кўрсатиши ўзаро мос тушади. K ва K' соатлар юришини таққослаш учун ҳаракатдаги ўша K' соат кўрсатишини K даги соатники билан яна таққослаш лозим. Лекин, энди биз таққослашни бошқа вақт моментида ва K' соат K даги қайси соат ёнидан ўтаётган бўлса, ўша соат ёрдамида ўтказишимиз лозим. Бунда биз икки саноқ системасидаги соатлар юришини таққослаш учун бир системада бир нечта, иккинчисида эса биргина соат кераклигини кўрамиз. Шунинг учун бу процесс ҳар икки системага нисбатан симметрик эмас. Бошқа системадаги ҳар хил соатлар билан таққосланаётган соат доимо орқада қолаётган бўлади.

Агар мавжуд икки соатдан бири ўзининг дастлабки ўрнига (қўзғалмас соатга) қайтиб ёпиқ траектория ясаса, у ҳолда ўша ҳаракатланаётган соат қўзғалмас соатга нисбатан орқада қолган бўлиб чиқади. Бу ҳолда ҳаракатдаги соат қўзғалмас деб қараладиган тескари мулоҳаза бўлиши мумкин эмас, чунки ёпиқ траектория ҳосил қилган соат ҳаракати текис ва тўғри чизиқли бўлмайди ва шунинг учун у билан боғланган саноқ системаси инерциал эмас. Табиат қонунлари фақат инерциал саноқ системаларида бир хил бўладилар. Шунинг учун қўзғалмас соат билан боғланган (инерциал) ва ҳаракатланаётган соат билан боғланган (ноинерциал) системалар турлича хоссаларга эга бўладилар. Шу сабабдан тинч турган соат орқада қолади деган хулосага олиб келувчи мулоҳаза нотўғридир.

36-§. Лоренц алмаштириши

Энди мақсад бир инерциал саноқ системасидан иккинчисига ўтишдаги алмаштириш формулаларини, яъни бирор K саноқ системасидаги ҳодисанинг x, y, z, t координаталари маълум ҳолда шу ҳодисанинг бошқа K' инерциал системасидаги x', y', z', t' координataларини аниқловчи формулаларини топишдан иборат.

Классик механикада бу масала оддий Галилей алмаштириш формулалари билан ҳал этилди (3.1—2). Агар K' система K системага нисбатан x ва x' ўқларининг умумий йўналиши бўйлаб ҳаракатланса, бу формулалар

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \ z = z', \ t = t' \qquad (36.1)$$

кўринишда бўладилар. Бу алмаштириш нисбийлик назарияси талабларини қаноатлантирмайди—у ҳодисалар орасидаги интервалларни инвариант қолдирмайди.

Релятивистик алмаштириш формулаларини эса биз интервалларни инвариант қолдириш шарти асосида қидирамиз.

34-§ да кўрганимиздек, икки ҳодиса орасидаги интервални тўрт ўлчовли координаталар системасида икки дунёвий нуқта орасидаги масофа деб олиш мумкин. Бинобарин, изланаётган алмаштириш тўрт ўлчовли фазодаги барча x, y, z, ct узунликларни ўзгаришсиз қолдириши шарт деб айта оламиз. Лекин фақат параллел кўчириш ва координаталар системасини айлантириш шундай хоссага эга. Координаталар системасининг ўзига параллел ҳолда кўчириш муҳим эмас, чунки у фақат фазовий координаталар бошини кўчириш ва вақт ҳисобининг бошланиш моментини ўзгартиришгагина қодир. Шундай қилиб, изланаётган алмаштиришнинг математикавий ифодаси тўрт ўлчовли x, y, z, ct координаталар системасининг айланишидан иборатдир.

Тўрт ўлчовли фазодаги ҳар қандай айланишни олтита айланишга, жумладан, xy, zy, xz, tx, ty, tz текисликлардаги айланишга ажратиш мумкин (оддий фазодаги айланишни 3 та xy, zy ва xz текисликдаги айланишга ажратилганидек). Бу айланишларнинг биринчи учтаси фақат фазовий координаталарни алмаштиради; улар одатдаги фазовий бурилишга мос келадилар. tx текисликдаги бурилишни кўрайлик; бунда y ва z координаталар ўзгармайди. Бу алмаштириш, хусусан, $(ct^2) - x^2$ айирмани (ct, x нуқтадан координата бошигача бўлган „масофа“ квадратини) ўзгартирмаслиги керак. Мазкур алмаштиришда эски ва янги координаталар орасидаги боғланиш умумий кўринишда

$$x = x' \operatorname{ch}\psi + ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = x' \operatorname{sh}\psi + ct' \operatorname{ch}\psi \qquad (36.2)$$

формулалар орқали берилади, бу ерда ψ — „бурилиш бурчаги“; содда текшириш ёрдамида бу ҳолда ҳақиқатан $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ эканини аниқлаш осон. (36.2) формулалар координата ўқларини буришда одатдаги алмаштириш формулаларидан фарқ қилади: бунда тригонометрик функциялар гиперболик функцияларга алмаштирилган. Псевдоевклид геометриянинг евклид геометриясидан фарқи ана шунда намоён бўлади.

Биз инерционал K саноқ системасидан K' системага алмаштириш формулаларини излаймиз: K' система K га нисбатан V тезлик билан x ўқ бўйича ҳаракатланади. Бу ҳолда албатта фақат x координата ва t вақт алмаштирилади. Шунинг учун бу алмаштириш (36.2) кўринишда бўлиши лозим. Шундан сўнг фақат V нисбий тезликка[1] гина боғлиқ бўлган ψ бурчак аниқланади.

K' саноқ системаси координаталари бошининг K системадаги ҳаракатини кўриб чиқамиз. У ҳолда $x' = 0$ ва (36.2) формула

$$x = ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch}\psi,$$

ёки бирини иккинчисига бўлсак,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\psi$$

---

[1] Тушунмовчилик туғилмасин учун қуйидагиларни таъкидлаймиз: V орқали биз ҳамма ерда икки инерциал саноқ системасининг ўзгармас нисбий тезлигини белгилаймиз, v эса (у ўзгармас бўлиши шарт эмас) ҳаракатланаётган зарра тезлигини билдиради.

кўринишини олади Лекин x/t нисбат K' системанинг K га нисбатан V тезлигидир. Шундай қилиб,

$$\operatorname{th}\psi = \frac{V}{c}.$$

Бу ердан

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Буни (36.2) га қўйиб, қуйидагиларни топамиз:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}\, x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{36.3}$$

(36.3) формулалар—изланаётган алмаштириш формулаларидир. Улар *Лоренц алмаштириш* формулалари дейилади ва фундаментал аҳамиятга эга.

x', y', z', t' ларни x, y, z, t лар орқали ифодаловчи тескари формулалар V ни—V га ўзгартириш йўли билан (чунки K системаси K' га нисбатан—V тезликда ҳаракатланади) осон олинади. Бу формулаларни бевосита (36.3) ситеманинг x', y', z', t' ларга нисбатан ечимлари сифатида топиш ҳам мумкин.

(36.3) дан кўриниб турибдики, классик механикага чегаравий ўтишда $c \to \infty$ Лоренц алмаштириш формулалари ҳақиқатан ҳам Галилей алмаштиришларига ўтадилар.

$V > c$ бўлганда (36.3) формулалардаги x, t координаталар мавҳум бўлиб қолади; бу ёруғлик тезлигидан катта тезликда ҳаракат бўлиши мумкин эмаслик фактига мос келади. Ҳатто ёруғлик тезлигига тенг бўлган тезликдаги саноқ системасидан фойдаланиш ҳам мумкин эмас—у ҳолда (36.3) формулаларда каср махражлари нолга айланади.

Айтайлик, K системада x ўққа пераллел бўлган чизғич (стержень) тинч ҳолда турган бўлсин. Унинг шу системада ўлчанган узунлиги $\Delta x = x_2 - x_1$ (бу ерда x_1 ва x_2—чизғич икки учининг K системадаги координаталари) бўлсин. Шу стерженнинг K' системада ўлчанган узунлигини топайлик. Бунинг учун айни t' вақт

моментида стержень икки учининг шу системадаги координаталари (x'_2, x'_1) ни топиш керак. (36.3) га кўра

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Стерженнинг K' системадаги узунлиги $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, бўлади; x_2 дан x_1 ни айирсак,

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

ҳосил бўлади.

Стерженнинг *хусусий узунлиги* деб, унинг ўзи тинч ҳолатда ётган саноқ системасидаги узунлигига айтилади. Уни $l_0 = \Delta x$ деб белгилаймиз, ўша стерженнинг бирор K' саноқ системасидаги узунлигини эса l деймиз. У ҳолда

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{36.4}$$

Шундай қилиб, стерженнинг узунлиги у тинч турган саноқ системасида энг катта бўлади. V тезлик билан ҳаракат қилган системада унинг узунлиги $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ марта камаяди. Нисбийлик назариясининг бу хулосаси *Лоренц қисқартириши* дейилади.

Жисмнинг кўндаланг ўлчамлари ҳаракат вақтида ўзгармаганидан, унинг $\mathcal{V}$ ҳажми юқоридагига ўхшаш формула бўйича кичраяди:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{36.5}$$

бунда $\mathcal{V}_0$ катталик жисмнинг *хусусий ҳажми* дейилади.

Лоренц алмаштиришларидан хусусий вақтга тегишли (35-§) бизга маълум бўлган натижаларни топиш мумкин. Айтайлик, K' системада соат тинч турган бўлсин. Икки ҳодиса сифатида K' системадаги x', y', z' фазовий нуқтада содир бўлган икки ҳодисани оламиз. Шу ҳодисалар орасидаги вақт K' системада $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ га тенг. Энди шу икки ҳодиса орасида ўтган Δt вақтнинг K саноқ системасидаги қийматини топамиз. (36.3) га кўра

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

ёки бирини иккинчисидан айирсак,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

ҳосил бўлади. Бу тенглик (35.1) нинг ўзидир.

37- §. Тезликни алмаштириш

Олдинги параграфда биз бир саноқ системасидаги ҳодиса координаталари бўйича ўша ҳодисанинг бошқа саноқ системасидаги координаталарини топишга имкон берувчи формулаларни аниқладик. Қуйида биз бир саноқ системасида ҳаракатланаётган зарра тезлигини шу зарранинг бошқа системадаги тезлиги билан боғлайдиган формулаларни топамиз:

Айтайлик, илгаригидек, K' система K системага нисбатан x ўқ бўйича V тезлик билан ҳаракатлансин. $v_x = \frac{dx}{dt}$ катталик тезликнинг K системадаги, $v_x' = \frac{dx'}{dt}$ эса тезликнинг K' системадаги компоненти бўлсин. (36.3) дан қуйидагиларни топамиз:

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^4}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \; dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Биринчи учта тенгликни тўртинчисига бўлиб ва

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$

тезликлар киритиб,

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^4}}, \quad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^4}}, \quad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} \qquad (37.1)$$

эканини топамиз. Бу формулалар билан тезликлар алмаштирилади, улар нисбийлик назариясида тезликларни қўшиш қонунини ифодалайди. Чегаравий ($c \to \infty$) ҳолда улар классик механиканинг $v_x = v_x' + V$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$ формулаларига ўтадилар.

Хусусий ҳолда зарра ҳаракати x ўққа параллел бўлсин: $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. У ҳолда $v_y' = v_z' = 0$, лекин $v_x' = v'$, бунда

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \qquad (37.2)$$

Ёруғлик тезлигидан кам ёки унга тенг бўлган иккита тезлик йиғиндиси (релятивистик) ҳам ёруғлик тезлигидан катта бўла олмаслигига ишонч ҳосил қилиш осон.

Координата ўқларини зарра тезлиги айни моментда xy текислигида ётадиган қилиб танлаймиз. У ҳолда зарра тезлиги K системада $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, K' системада эса $v_x' = v'\cos\theta'$, $v_y' = v'\sin\theta'$ компонентларга эга бўлади (v, v' ва θ, θ'—тезликнинг абсолют қийматлари ва унинг мос равишда K ва K' системаларда x ва x' ўқлар билан ҳосил қилган бурчаклари). У ҳолда (37.1) формула ёрдамида

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V} \qquad (37.3)$$

тенгликни топамиз. Бу формула бир саноқ системасидан иккинчисига ўтганда тезлик йўналишининг ўзгаришини аниқлайди.

Шу формуланинг муҳим хусусий ҳолини, жумладан бошқа саноқ системасига ўтишда ёруғликнинг оғиши (ёруғлик *аберрацияси*) ни кўриб чиқамиз. Бу ҳолда $v = v' = c$ ва олдинги формула

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta' \qquad (37.4)$$

шаклни олади.

$V \ll c$ ҳолда (37.4) дан V/c тартибли ҳадгача аниқликда қуйидагини топамиз:

$$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\theta' \left(1 - \frac{V}{c\cos\theta'}\right).$$

Аберрация бурчаги $\Delta\theta = \theta' - \theta$ ни киритиб, ўша аниқликда

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta' \tag{37.5}$$

эканини, яъни ёруғлик аберрацияси учун таниш бўлган элементар формулани топамиз.

38-§. Тўрт ўлчовли векторлар

Ҳодиса координаталари тўплами $(ct,\ x,\ y,\ z)$ ни тўрт ўлчовли радиус-векторнинг (ёки қисқача қилиб айтганда, 4-радиус-векторнинг) тўрт ўлчовли фазодаги компонентлари сифатида олиш мумкин. Унинг компонентларини x^{μ} деб белгилаймиз; бунда μ индекс 0, 1, 2, 3 қийматларни қабул қилади, шу билан бирга

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\quad x^3 = z.$$

4-радиус-вектор „узунлиги“ нинг квадрати

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

ифода орқали берилади. У тўрт ўлчовли координаталар системасининг ҳар қандай бурилишда, хусусан, Лоренц алмаштиришларида ўзгармайди.

Умуман тўрт ўлчовли координаталар системасини алмаштиришда 4-радиус-вектор x^{μ} ¹) каби алмашадиган тўртта A^0, A^1, A^2, A^3 катталиклар тўплами *тўрт ўлчовли вектор* (4-вектор) A^{μ} дейилади. Лоренц алмаштиришларида

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}\ A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3 \tag{38.1}$$

бўлади.

Истаган 4-вектор катталигининг квадрати 4-радиус-вектор квадратига ўхшаш аниқланади:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Шу каби ифодаларни ёзиш қулай бўлсин учун 4-векторлар компонентларининг икки „хили“ киритилади ва улар индекс пастда ва юқорида турган A^{μ} ва A_{μ} ҳарфлар билан белгиланади. Бу ҳолда

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3 \tag{38.2}$$

бўлади. A^{μ} катталиклар 4-векторнинг *контравариант*, A_{μ} эса *ковариант* компонентлари дейилади. У ҳолда 4-вектор квадрати

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu}A_{\mu} = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3$$

кўринишга келади.

Бундай йиғиндиларни содда қилиб $A^{\mu}A_{\mu}$ ҳолда (йиғинди белгисини ташлаб) ёзиш қабул этилган. Умуман бир ифодада икки марта такрорланувчи ҳар қандай индексга қараб йиғинди олиш тушунилади, шу сабабли йиғинди белгиси тушириб қолдирилади. Бир хил индекслар жуфтининг ҳар бирида бир индекс юқорида, иккинчиси эса пастда туради. „*Соқов*“ индекслар бўйича йиғиндини белгилашнинг бундай усули жуда қулай ва формулалар ёзишни жуда соддалаштиради.

Иккита ҳар хил 4-векторларнинг скаляр кўпайтмаси ҳам худди 4-вектор квадратидек тузилади:

$$A^{\mu}B_{\mu} = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3.$$

Бу ҳолда уни $A^{\mu}B_{\mu}$ кўринишда ҳам, $A_{\mu}B^{\mu}$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин—бу билан натижа ўзгармайди. Умуман соқов индексларнинг ҳар қандай жуфтида юқориги ва пастки индекслар ўрнини алмаштириш мумкин¹). $A^{\mu}B_{\mu}$ кўпайтма 4-скалярдир; у тўрт ўлчовли координаталар системасининг бурилишига нисбатан инвариант

---

¹) Бу китобда биз 0, 1, 2, 3 қийматларни қабул қилувчи тўрт ўлчовли индексларни грек ҳарфлари λ, μ, ν,... орқали белгилаймиз.

¹) Замонавий адабиётда тўрт ўлчовли векторларнинг индекслари кўпинча ташлаб юборилади, уларнинг квадратлари ва скаляр кўпайтмалари эса A^2, AB кўринишда ёзилади. Лекин бу китобда биз бундай белгилаш усулидан фойдаланмаймиз.

бўлади. Бу ҳолатни бевосита текшириш қийин эмас. Лекин у олдиндан аниқ ($A^{\mu}A_{\mu}$ нинг квадрати каби). Чунки барча 4-векторлар бир хил қонун бўйича алмаштирилади.

4-векторнинг A° компонентини вақтий компонент дейилади. A^1, A^2, A^3 компонентлар эса — фазовий (4-радиус-векторга ўхшаш) бўлади. 4-вектор квадрати мусбат, манфий ёки нолга тенг бўлиши мумкин; бу уч ҳолда мос равишда *вақтсимон*, *фазосимон* ва *нолинчи* 4-векторлар ҳақида (яна интерваллар учун қабул этилган терминологияга мос) гап кетади.

4-вектор A^{μ} нинг уч фазовий компонентлари соф фазовий бурилишларга (яъни вақт ўқига алоқадор бўлмаган алмаштиришларга) нисбатан уч ўлчовли A вектор тузадилар. 4-векторнинг вақт компоненти (ўша алмаштиришларга нисбатан) уч ўлчовли скаляр миқдордир. 4-вектор компонентларини биз кўпинча

$$A^{\mu}=(A^{\circ},\mathbf{A})$$

кўринишда ёзамиз. Бунда ўша 4-векторнинг ковариант компонентлари $A_{\mu}=(A^{\circ},-\mathbf{A})$ бўлади, 4-вектор квадрати эса $A^{\mu}A_{\mu}=(A^{\circ})^2-\mathbf{A}^2$. Жумладан, 4-радиус-вектор учун

$$x^{\mu}=(ct,\mathbf{r}),\ x_{\mu}=(ct,-\mathbf{r}),\ x^{\mu}x_{\mu}=c^2t^2-\mathbf{r}^2.$$

Уч ўлчовли векторларда (x, y, z координаталарда) контрава ковариант компонентларни фарқ қилиш зарурияти йўқ, албатта. Уларнинг $A_i\,(i=x,y,z)$ компонентларини биз ҳамма ерда (тушунмовчиликка олиб келмайдиган жойда) пастга қўйилган индекслар (латин ҳарфлари) билан ёзамиз. Хусусан, икки марта такрорланган латинча индексларга қараб уч қиймат x,y,z бўйича йиғинди тушунилади (масалан, $\mathbf{AB}=A_iB_i$).

2- ранг тўрт ўлчовли тензор (4-тензор) деб шундай 16 та $A^{\mu\nu}$ катталик тўпламига айтиладики, координаталарни алмаштиришда бу катталиклар 4-вектор компонентларининг кўпайтмаси сингари алмашадилар. 4-тензорнинг юқори ранглари ҳам худди шу тарзда аниқланади.

2-ранг 4-тензор компонентлари уч хил кўринишда берилиши мумкин: $A^{\mu\nu}$ контравариант, $A_{\mu\nu}$ ковариант ва A^{μ}_{ν} аралаш ҳолда (охирги кўринишда, умуман айтганда. A^{μ}_{ν} ва A^{ν}_{μ} ларни фарқ қилиш керак). Компонентларнинг

хиллари орасидаги боғланиш умумий қоида бўйича аниқланади: вақт индекси (0) ни кўтариш ёки тушириш компонент ишорасини ўзгартирмайди, фазовий индекслар (1,2,3) ни кўтариш ёки тушириш эса ишорани ўзгартиради. Жумладан:

$$A_{00}=A^{00},\ A_{01}=-A^{01},\ A_{11}=A^{11},\ \ldots,$$
$$A_0{}^0=A^{00},\ A_0{}^1=A^{01},\quad A^0{}_1=-A^{01}, A_1{}^1=-A^{11},\ \ldots$$

Тўққизта A^{11}, A^{12}, ... компонент соф фазовий алмаштиришларга нисбатан уч ўлчовли тензор ташкил этадилар. A^{01}, A^{02}, A^{03} компонентлар ва A^{10}, A^{20}, A^{30} компонентлар уч ўлчовли векторлар тузадилар, A^{00} компонент эса уч ўлчовли скалярдир.

$A^{\mu\nu}$ тензор, агар $A^{\mu\nu}=A^{\nu\mu}$ бўлса, симметрик, агар $A^{\mu\nu}=-A^{\nu\mu}$ бўлса, антисимметрик дейилади. Антисимметрик тензорнинг барча диагонал компонентлари (яъни A^{00}, A^{11}, ... компонентлари) нолга тенг, чунки, масалан, $A^{00}=-A^{00}$ бўлиши керак. $A^{\mu\nu}$ симметрик тензорда A^{μ}_{ν} ва A^{μ}_{ν} аралаш компонентлар, равшанки, мос тушадилар; бундай ҳолларда A^{μ}_{ν} деб ёзамиз, яъни индексларнинг бирини иккинчисининг юқорисига жойлаштирамиз.

Ҳар қандай тензорли тенгликда унинг ҳар икки томонидаги ифодалар бир хил бўлган ва бир хил жойлашган (юқорида ёки пастда) эркин, яъни соқов эмас, индекслардан иборат бўлиши керак. Тензорли тенгликларда эркин индексларни аралаштириш мумкин (юқорига ёки пастга), лекин аралаштириш тенгликнинг барча ҳадларида албатта бир вақтда бўлиши керак. Ҳар хил тензорларнинг контра ва ковариант компонентларини тенглаштириш эса „қонуний эмас“, агар бундай тенглик бирор саноқ системасида тасодифан пайдо бўлганида ҳам у бошқа системага ўтишда бузилади.

Ушбу

$$A^{\mu}_{\mu}=A^0{}_0+A^1{}_1+A^2{}_2+A^3{}_3$$

йиғиндини тузиш йўли билан $A^{\mu\nu}$ тензор компонентидан скаляр ҳосил қилиш мумкин (бунда, албатта, $A^{\mu}_{\mu}=A^{\mu}_{\mu}$). Бундай йиғиндини тензорнинг *изи* дейилади, уни тузиш операцияси деганда, тензорни *йиғиш* ёки *соддалаштириш* тушунилади.

Юқорида кўриб ўтилган икки 4-векторнинг скаляр кўпайтмасини тузиш ҳам йиғиш операциясидир: бу $A^{\mu}B_{\nu}$ тензордан $A^{\mu}B_{\mu}$ скалярни тузишдир. Умуман, жуфт индекслар бўйича ҳар қандай йиғиш тензор рангини 2 га пасайтиради. Масалан, $A^{\mu}_{\nu\lambda\mu}$ 2-ранг тензор, $A^{\mu}_{\nu}B^{\nu}$—4-вектор, $A^{\mu\nu}_{\mu\nu}$ — скаляр ва ҳоказо.

Истаган A^{μ} 4-вектор учун

$$\delta^{\nu}_{\mu}A^{\mu}=A^{\nu} \tag{38.3}$$

тенгликни қаноатлантирувчи δ^{μ}_{ν} тензор бирлик 4-тензор дейилади. Бинобарин, бу тензор компонентлари қуйидагича:

$$\delta^{\nu}_{\mu}=\begin{cases}1, & \text{агар } \mu=\nu \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } \mu\neq\nu \text{ бўлса.}\end{cases} \tag{38.4}$$

Унинг изи $\delta^{\mu}_{\mu}=4$ бўлади.

Ниҳоят, тўрт ўлчовли тензор анализининг баъзи бир дифференциал ва интеграл операциялари устида тўхталиб ўтамиз

φ скалярнинг 4-градиенти 4-вектордир:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \nabla\varphi\right).$$

Бунда ёзилган ҳосилалар 4-векторнинг ковариант компонентлари деб қаралиши зарурлигини назарда тутиш лозим. Ҳақиқатан, скаляр дифференциали

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}\,dx^{\mu}$$

ҳам скаляр бўлади; унинг кўриниши (икки 4-векторнинг скаляр кўпайтмаси) берилган таърифни тасдиқлайди.

Умуман, x^{μ}, $\partial/\partial x^{\mu}$ координаталар бўйича дифференциаллаш операторлари операторли 4-векторнинг ковариант компонентлари деб қаралиши керак. Шунинг учун. масалан, $\partial A^{\mu}/\partial x^{\mu}$ ифода (бунда A^{μ} контравариант компонентлари дифференциалланади) — 4-вектор дивергенцияси скаляр бўлади.

Уч ўлчовли фазода интеграллаш ҳажм бўйича, сирт бўйича ва эгри чизиқ бўйича ўтказилиши мумкин. Тўрт ўлчовли фазода эса тўрт хил интеграллаш мумкин: 1) 4-фазода эгри чизиқ бўйича, 2) икки ўлчовли сирт бўйича, 3) гиперсирт бўйича, яъни уч ўлчовли мураккаб шакл бўйича, 4) тўрт ўлчовли ҳажм бўйича.

Уч ўлчовли вектор анализнинг Гаусс ва Стокс теоремаларига ўхшаш шундай теоремалар борки, улар тўрт ўлчовли интегралларнинг бирини иккинчисига алмаштириш имконини берадилар. Улар ичидан фақат 4-ҳажм бўйича интегрални гиперсирт бўйича интегралга алмаштириш ҳақидаги теорема бизга керак бўлади.

4-ҳажм бўйича интеграллаш элементи

$$d\Omega=dx^{0}\,dx^{1}\,dx^{2}dx^{3}=c\,dt\,dV \tag{38.5}$$

скаляр бўлади; бу вақт интерваллари (35.1) ва фазовий ҳажмлар (36.5) ни таққослашдан келиб чиқади. Гиперсирт бўйича интеграллаш элементи dS^{μ} эса 4-вектор бўлиб, унинг катталиги гиперсирт элементининг „юзаси“га тенг ва у шу элементга тик йўналган (масалан dS° ташкил этувчи $dx\,dy\,dz$ га тенг, яъни у уч ўлчовли dV ҳажм элементи—гиперсирт элементининг $x^{0}=\text{const}$ гипертекисликка проекциясидир).

Ёпиқ гиперсирт бўйича интегрални шу сирт ўраган 4-ҳажм бўйича интегралга алмаштириш мумкин. Ушбу алмаштириш dS_{μ} интеграллаш элементини операторга ўзгартириш йўли билан амалга оширилади:

$$dS_{\mu}\rightarrow d\Omega\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{38.6}$$

Масалан, A^{μ} вектордан олинган интеграл

$$\oint A^{\mu}\,dS_{\mu}=\int\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\,d\Omega. \tag{38.7}$$

Бу формула Гаусс теоремасининг умумийлаштирилишидир.

IX б о б

РЕЛЯТИВИСТИК МЕХАНИКА

39-§. Энергия ва импульс

Классик механикадагидек, зарра ҳаракатининг релятивистик тенгламаларини чиқариш учун биз энг кичик таъсир принципига асосланамиз. Ишни эркин зарра учун таъсир интегралини топишдан бошлаймиз.

Бу интеграл у ёки бу инерциал саноқ системасига боғлиқ бўлмаслиги керак, яъни у Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлиши лозим. Бинобарин, у скалярдан олинган интеграл бўлиши керак. Шу билан бирга интеграл остидаги дифференциаллар биринчи даражада бўлиши зарур. Эркин зарра учун бирдан-бир скаляр ds интервал элементидир, ёки const$\cdot ds$ (бу ерда const—зарра учун характерли доимий). Бу доимийни— mc деб белгилаймиз; бунинг маъноси қуйида ойдинлашади.

Шундай қилиб, эркин зарра учун таъсир

$$S=-mc\int_a^b ds \tag{39.1}$$

кўринишда бўлиши лозим, бунда $\int\limits_a^b$ интеграл берилган икки ҳодиса (зарранинг маълум t_1 ва t_2 вақт моментларида бошланғич ва охирги ўринларда туриши) орасидаги дунёвий чизиқ бўйича интегрални ифодалайди.

Бу ифодани (35.1) ёрдамида вақт бўйича

$$S=-mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

интегралга айлантириб қайта ёзиш мумкин. Буни умумий (2.1) таъриф

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$$

билан таққослаб, эркин зарранинг релятивистик Лагранж функцияси

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{39.2}$$

эканини кўрамиз.

Кичик тезликларда, норелятивистик чегарада L ни v/c нинг даражалари бўйича ёйиш мумкин. Юқори тартибли ҳадларни тушириб қолдирсак,

$$L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}$$

ҳосил бўлади. Лагранж функциясидаги ўзгармас ҳад ҳаракат тенгламаларида акс этмайди, шунинг учун уни ҳисобга олмаймиз. Шундан сўнг классик ифода $L=mv^2/2$ ҳосил бўлади. Шу вақтнинг ўзида (39.1) да киритилган m доимийнинг маъноси аниқланади: m зарра массасидир. Зарра импульси $\mathbf{p}=\partial L/\partial\mathbf{v}$ ҳосила деб таърифланади. (39.2) ифодани дифференциаллаб қуйидагини оламиз:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{39.3}$$

Кичик тезликларда ($v\ll c$) бу ифода классик $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ катталикка ўтади.

Импульснинг вақт бўйича ҳосиласи заррага таъсир этувчи кучдир. Зарра тезлиги фақат йўналиши бўйича ўзгаради дейлик, яъни куч тезликка перпендикуляр йўналсин. У ҳолда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{39.4}$$

Агар тезлик фақат қиймати жиҳатдан ўзгарса, яъни куч тезлик бўйича йўналган бўлса, у ҳолда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{39.5}$$

Демак, кучнинг тезланишга нисбати бу икки ҳолда икки хил экан.

Зарра энергияси умумий таъриф (6.1) га мувофиқ

$$E=\mathbf{pv}-L \tag{39.6}$$

бўлади. (39.2) ва (39.3) дан L ва $\mathbf{p}$ қийматларини (39.6) га қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{39.7}$$

Бу жуда муҳим формула бўлиб, у, хусусан, релятивистик механикада эркин зарра энергияси $v=0$ да нолга айланмай, чекли қолишини кўрсатади:

$$E=mc^2. \tag{39.8}$$

Бу энергияни зарранинг *тинч ҳолатдаги энергияси* дейилади.

Кичик тезликларда ($v \ll c$) (30.7) ни v/c нинг даражалари бўйича ёйиб,

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

ни, яъни зарра кинетик энергиясининг классик ифодасидан тинч ҳолат энергиясича фарқ қилувчи катталикни оламиз.

Бу ерда биз „зарра“ ҳақида гапирсак-да, унинг „элементарлиги“ ҳеч қаерда назарга олинмайди. Шунинг учун олинган формулаларни кўп сонли зарралардан иборат ҳар қандай мураккаб жисмга ҳам татбиқ этиш мумкин, бунда m ўрнида жисмнинг тўла массаси, v ўрнида эса жисмнинг яхлит ҳолда ҳаракат тезлиги тушунилади. Хусусан, (39.8) формула ҳар қандай яхлит жисм учун ҳам ўринлидир. Шуни айтиб ўтиш керакки, релятивистик механикада эркин жисм энергияси (яъни истаган ёпиқ система энергияси) жисм массасига бевосита боғланган мутлақо аниқ ва мусбат катталик бўлади. Шу муносабат билан жисм энергиясининг классик механикада фақат ихтиёрий аддитив ўзгармас сонгача аниқликда маълумлигини ва шу сабабдан мусбат ҳам, манфий ҳам бўла олишини эслатиб ўтамиз.

Тинч ҳолатдаги жисм энергияси ўз таркибига жисм зарраларининг тинч ҳолатдаги энергиясидан ташқари, уларнинг кинетик ва бир-бири билан ўзаро таъсир энергияларини ҳам олади. Бошқача қилиб айтганда mc^2 энергия $\sum m_a c^2$ йиғиндига (m_a зарралар массаси) тенг эмас, шунинг учун m масса ҳам $\sum m_a$ га тенг эмас. Шундай қилиб, релятивистик механикада масса сақланиш қонуни ўринли эмас; яъни мураккаб жисм массаси унинг бўлакчалари массаларининг йиғиндисига тенг эмас. Бунинг ўрнига зарранинг тинч ҳолатдаги энергиясини ҳам ўз ичига олган энергиянинг сақланиш қонуни ўринлидир.

(39.3) ва (39.7) ифодаларни квадратга ошириб ва уларни таққослаб, зарра энергияси ва импульси ўртасида қуйидаги муносабат борлигини топамиз:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{39.9}$$

Импульс орқали ифодаланган энергия, маълумки, Гамильтон функцияси дейилади:

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{39.10}$$

Кичик тезликларда $p \ll mc$ ва тақрибан

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

бўлади, яъни тинч ҳолатдаги энергияни ҳисобга олмасак – Гамильтон функциясининг классик ифодаси ҳосил бўлади.

(39.3) ва (39.7) ифодалардан эркин зарранинг энергияси, импульси ва тезлиги ўртасидаги

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2} \tag{39.11}$$

муносабат ҳам келиб чиқади.

$v = c$ бўлганда зарра импульси ва энергияси чексизга айланади. Демак, нолга тенг бўлмаган m массали зарра ёруғлик тезлигида ҳаракатлана олмайди. Лекин релятивистик механикада ёруғлик тезлиги билан ҳаракатланувчи, массаси нолга тенг бўлган зарралар мавжуд (масалан, ёруғлик квантлари—фотонлар ҳамда нейтрино). (39.11) га кўра бундай зарралар учун

$$p = \frac{E}{c}. \tag{39.12}$$

Худди шундай формулани зарра энергияси E унинг тинч ҳолатдаги энергияси mc^2 дан катта бўлган *ультрарелятивистик* ҳол учун массаси нолдан фарқли заррага қўллаcа бўлади.

40-§. Тўрт ўлчовли импульс

Ўтган параграфда қилинган хулосалар зарра энергияси ва импульсини бир саноқ системасидан иккинчисига алмаштириш қонуни ҳақидаги масалага жавоб бера олмайди. Бу саволга жавоб бериш учун мазкур катталикларнинг тўрт ўлчовли табиатини аниқлаш зарур.

Зарра тезлигининг одатдаги уч ўлчовли вектори **v** дан 4-вектор тузиш ҳам мумкин. Шундай *тўрт ўлчовли тезлик* (4-тезлик)

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \qquad (40.1)$$

кўринишда бўлади. ds элемент интервалини (35.1) га мувофиқ dt вақт дифференциали орқали ифодалаб қуйидагини ёзамиз:

$$u^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^{\mu}}{cdt}.$$

Бу ердан бу 4-векторнинг компонентлари

$$u^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad (40.2)$$

экани маълум бўлади.

4-тезлик компонентлари мустақил эмас. $dx_{\mu}\,dx^{\mu} = ds^2$ эканини эътиборга олсак,

$$u_{\mu}u^{\mu} = 1 \qquad (40.3)$$

тенглик ҳосил бўлади. Геометрик нуқтаи назардан u^{μ} зарра дунёвий чизиғига уринманинг бирлик 4-векторидир.

$$p^{\mu} = mcu^{\mu} \qquad (40.4)$$

4-вектор зарранинг тўрт ўлчовли импульси (4-импульси) дейилади. (40.2) дан 4-тезлик компонентларини олиб ва уларни (39.3) ва (39.7) ифодалар билан таққослаб, 4-импульс компонентлари

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \qquad (40.5)$$

эканини кўрамиз.

Шундай қилиб, релятивистик механикада импульс ва энергия бир 4-векторнинг компонентларидир. Бундан мазкур катталикларни алмаштириш формулалари келиб чиқади. (40.5) ифодани 4-вектор алмаштиришнинг умумий формулаларига қўйиб, қуйидагиларни топамиз:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ p_y = p'_y,\ p_z = p'_z,\ E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^4}}}, \qquad (40.6)$$

бу ерда p_x, p_y p_z,—уч ўлчовли **p** импульс компонентлари.

4-импульс таърифи (40.4) дан ва (40.3) айниятдан эркин зарранинг 4-импульс квадрати учун

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2 \qquad (40.7)$$

тенгликни оламиз. Бу формулага (40.5) дан p^{μ} нинг компонентларини қўйиб, қайтадан (39.9) муносабатга келамиз.

41-§. Заррраларнинг емирилиши

M массали жисмнинг ўз-ўзидан m_1 ва m_2 массали икки бўлакка емирилишини кўриб ўтамиз. Жисм тинч турган саноқ системасида унинг емирилишига энергия сақланиш қонунини қўлласак,1)

$$M = E_{10} + E_{20} \qquad (41.1)$$

ҳосил бўлади, бунда E_{10} ва E_{20} учиб чиқувчи бўлакчалар энергияси.

$E_{10} > m_1$ ва $E_{20} > m_2$ бўлганидан, (41.1) тенглик фақат $M > m_1 + m_2$ бўлсагина бажарилади, яъни жисм ўз-ўзидан емирилганда массалари йиғиндиси жисм массасидан кичик бўлган бўлакларгагина ажралиши мумкин. Аксинча, агар $M < m_1 + m_2$ бўлса, жисм мазкур емирилишга нисбатан турғун бўлиб, ўз-ўзидан емирилмайди. Бу ҳолда жисмни емириш учун унга ташқаридан ҳеч бўлмаганда жисмнинг *боғланиш энергияси* $(m_1 + m_2 - M)$ га тенг қўшимча энергия бериш керак.

Емирилишда энергия сақланиш қонуни билан бир қаторда импульс сақланиш қонуни ҳам бажарилиши лозим: учиб чиққан бўлаклар импульсларининг йиғин-

---

1) 41-, 42-§ ларда $c = 1$ деб оламиз. Бошқача қилиб айтганда, ёруғлик тезлиги тезликларни ўлчаш бирлиги сифатида танланади (бунда узунлик ва вақт ўлчамлиги бир хил бўлиб қолади). Бундай танлаш релятивистик механикада табиий ҳисобланади ва формулалар кўринишини соддалаштиради. Лекин ушбу китобда (унда норелятивистик механикага кўп эътибор берилган) биз, одатдагидек, бундай бирлик системасидан фойдаланмаймиз, ундан фойдалаганда эса бу ҳақда доимо эслатиб ўтамиз.

Агар формулада $c = 1$ қўйилган бўлса, у ҳолда одатдаги бирликларга қайтиш қийин эмас: ёруғлик тезлиги тўғри ўлчамликни таъминлайдиган қилиб формулага киритилади.

диси, жисмнинг бошланғич импульси каби, нолга тенг ($\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$) бўлиши шарт. Бу ердан $p_{10}^2 = p_{20}^2$ ёки

$$E_{10}^2 - m_1^2 = E_{20}^2 - m_2^2. \qquad (41.2)$$

(41.1) ва (41.2) тенгламалар учиб чиқувчи бўлаклар энергиясини бир қийматли аниқлайди:

$$E_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \qquad (41.3)$$

Тўқнашувчи икки зарра импульслари йиғиндиси нолга тенг бўлган саноқ системаси (инерция маркази системаси)да уларнинг тўла энергияси M ни ҳисоблаш масаласи маълум маънода тескари масаладир.

Бу катталикни ҳисоблаш натижасида, турли ноэластик тўқнашиш процесслари (бу процессларда тўқнашувчи зарралар ҳолати ўзгаради ёки янги зарралар „яратилади") нинг амалга ошиш имкониятини аниқловчи критерий топилади.

Ҳар бир шундай процесс фақат барча „реакция маҳсулотлари" массаларининг йиғиндиси M дан кичик бўлгандагина содир бўлади, m_1 массали ва E_1 энергияли зарра дастлабки (*лаборатория*) саноқ системасида m_2 массали тинч турган зарра билан тўқнашсин. Икки зарранинг йиғинди энергияси

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2,$$

йиғинди импульси эса $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ бўлади.

Зарраларни биргаликда бир мураккаб система деб олиб, (39.11) га биноан унинг яхлит ҳолдаги ҳаракат тезлигини топамиз:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1 + m_2}. \qquad (41.4)$$

Бу ифода инерция маркази системасининг лаборатория системасига нисбатан тезлигидир.

Лекин изланаётган M массани аниқлаш учун аслида бир саноқ системасидан иккинчисига ўтиш зарурияти йўқ. Бунинг ўрнига ҳам зарралар системасига, ҳам алоҳида ҳар бир заррага бир хил даражада қўлланиладиган (39.9) формуладан фойдаланиш мумкин. Шундай қилиб,

$$M^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2),$$

бундан

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1 \qquad (41.5)$$

келиб чиқади.

Масала

M массали қўзғалмас зарра учта m_1, m_2, m_3 заррага парчаланганда улардан бири олиб кетиши мумкин бўлган энг катта энергия миқдори аниқлансин.

Ечилиши. Агар m_2 ва m_3 зарралардан иборат система иложи борича кичик массага эга бўлса, у ҳолда m_1 зарра энг катта энергияли бўлади; m_2 ва m_3 зарралар системасининг энг кичик массаси $(m_2 + m_3)$ га тенг бўлади (бу қиймат шу зарраларнинг бир хил тезликдаги биргаликда қилган ҳаракатига тўғри келади). Шу тарзда масалани жисмнинг икки бўлакка ажралишига олиб келиб, (41.3) га мувофиқ

$$E_{1\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}$$

қийматни топамиз.

42- §. Зарраларнинг эластик тўқнашиши

Зарраларнинг эластик тўқнашишини релятивистик механика нуқтаи назаридан кўриб чиқамиз. m_1 ва m_2 массали икки тўқнашувчи зарраларнинг импульслари ва энергияларини $\mathbf{p}_1$, E_1 ва $\mathbf{p}_2$, E_2 деб белгилаймиз; катталикларнинг тўқнашишдан кейинги қийматларини штрих билан кўрсатамиз.

Тўқнашишда энергия ва импульс сақланиш қонунларини 4- импульснинг сақланиш тенгламалари кўринишида биргаликда ёзиш мумкин:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu. \qquad (42.1)$$

Кейинги ҳисоблашларда қулай бўлсин учун шу 4-вектор тенгламаларидан инвариант муносабатлар тузамиз. Бунинг учун (42.1) ни

$$p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu$$

кўринишда қайта ёзамиз ва тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга оширамиз (яъни ўзларининг ўзларига скаляр кўпайтмаларини ёзамиз). p_1^μ ва $p_1'^\mu$ 4- импульслар квадратлари m_1^2 га, p_2^μ ва $p_2'^\mu$ квадратлари эса m_2^2 га тенглигини назарда тутиб,

$$m_1^2 + p_{1\mu}p_2^\mu - p_{1\mu}p_1'^\mu - p_{2\mu}p_1'^\mu = 0 \qquad (42.2)$$

тенгликни оламиз. Худди шунингдек, $p_1^\mu + p_2^\mu - p_2'^\mu = p_1'^\mu$ тенгликни квадратга ошириб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$m_2^2 + p_{1\mu}p_2^\mu - p_2'^\mu - p_{1\mu}p_2'^\mu = 0. \qquad (42.3)$$

Зарралардан бири (m_2 зарра) лаборатория саноқ системасида тўқнашишгача тинч ҳолатда турган бўлсин. Шу системадаги тўқнашишни текширамиз. Бу ҳолда $p_2=0$, $E_2 = m_2$ ва (42.2) да қатнашувчи скаляр кўпайтмалар қуйидагича бўлади:

$$p_{1\mu}p_2^\mu = E_1 m_2, \quad p_{2\mu}p_1'^\mu = m_2 E_1', \qquad (42.4)$$

$$p_{1\mu}p_1'^\mu = E_1E_1' - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1' = E_1E_1' - p_1p_1'\cos\theta_1,$$

бу ерда, θ_1 — учиб келаётган m_1 зарранинг сочилиш бурчаги. (42.4) ифодаларни (42.2) га қўйсак,

$$\cos\theta_1 = \frac{E_1'(E_1+m_2) - E_1m_2 - m_1^2}{p_1p_1'} \qquad (42.5)$$

келиб чиқади. Шу тарзда (42.3) дан қуйидаги қиймат топилади:

$$\cos\theta_2 = \frac{(E_1+m_2)(E_2'-m_2)}{p_1p_2'}, \qquad (42.6)$$

бу ерда θ_2 бурчак $\mathbf{p}_2'$ тепки импульси билан учиб келаётган $\mathbf{p}_1$ зарра импульси орасидаги бурчак. Бу формулалар ҳар икки зарранинг лаборатория системасидаги сочилиш бурчагини зарралар энергиясининг ўзгариши билан боғлайди.

Агар $m_1 > m_2$, яъни учиб келаётган зарра тинч ҳолатдаги заррадан оғирроқ бўлса, у ҳолда θ_1 сочилиш бурчаги бирор максимал қийматдан катта бўла олмайди. Элементар ҳисоблаш ўтказиб, бу қийматнинг классик натижа (14.8) га мос келадиган

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (42.7)$$

тенглик билан аниқланишини топиш осон.

Учиб келаётган зарра массаси нолга тенг бўлган ҳолда ($m_1=0$ ва шунга мувофиқ $p_1=E_1, p_1'=E_1'$) (42.5—6) формулалар соддалашади. Бу ҳол учун учиб келаётган

зарранинг тўқнашишдан кейинги энергия формуласини ёзамиз:

$$E_1' = \frac{m_2}{1-\cos\theta_1 + \frac{m_2}{F_1}}. \qquad (42.8)$$

Ихтиёрий массали зарралар тўқнашишининг умумий ҳолига яна қайтамиз. Тўқнашиш инерция маркази системасида энг содда кўринишга эга бўлади. Катталикларнинг бу системадаги қийматларини қўшимча индекс 0 билан белгилаймиз: $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. Ҳар икки зарра импульслари тўқнашиш натижасида катталиклари тенг ва қарама-қарши йўналган ҳолда қолиб, фақат буриладилар. Бундай ўзгариш импульс сақланишига кўра содир бўлади. Энергия сақланиши асосида эса ҳар бир импульснинг абсолют қиймати ўзгармай қолади.

Инерция маркази системасидаги сочилиш бурчагини ($\mathbf{p}_{10}$ ва $\mathbf{p}_{20}$ импульслар тўқнашиш натижасида шу бурчакка буриладилар) χ деб белгилаймиз. Инерция маркази системасидаги сочилиш процесси шу катталик орқали тўла аниқланади; шу сабабли бу гап бошқа ҳар қандай саноқ системасига ҳам тааллуқлидир. Шунингдек, лаборатория системасидаги тўқнашишни тавсифлашда сочилиш бурчагини энергия ва импульс сақланиш қонунларини ҳисобга олгандан сўнг ноаниқ қоладиган ягона параметр сифатида олиш қулайдир.

Лаборатория системасидаги ҳар икки зарранинг охирги энергияларини шу параметр орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (42.2) дан фойдаланамиз, лекин бу гал $p_{1\mu}p_1'^\mu$ кўпайтмани инерция маркази системасида ёямиз:

$$p_{1\mu}p_1'^\mu = E_{10}E_{10}' - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{10}' = E_{10}^2 - p_0^2\cos\chi = p_0^2(1-\cos\chi) + m_1^2$$

(инерция маркази системасида ҳар бир зарра энергияси тўқнашиш натижасида ўзгармайди: $E_{10}' = E_{10}$). Қолган икки купайтмани эса илгаригидек лаборатория системасида очиб чиқамиз, яъни (42.4) дан оламиз. Натижада

$$E_1 - E_1' = \frac{p_0^2}{m_2}(1-\cos\chi)$$

ҳосил бўлади. p_0^2 ни ҳам лаборатория системасидаги катталиклар орқали ифодалаймиз. Бу иш $p_{1\mu}p_2^\mu$ инвариантнинг ҳар икки системадаги қийматларини тенглаштириш йўли билан осон бажарилади:

$$E_{10}E_{20} - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} = E_1 m_2$$

ёки

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = E_1 m_2 - p_0^2.$$

Бу тенгламани p_0^2 га нисбатан ечиб,

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1} \tag{42.9}$$

катталикни оламиз. $E_1 + m_2 = E_1' + E_2'$ сақланиш қонунини ҳам назарда тутиб, узил-кесил қуйидагини ёзамиз:

$$E_1 - E_1' = E_2' - m_2 = \frac{m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}(1 - \cos\chi). \tag{42.10}$$

Бу ифода биринчи зарра йўқотадиган ва шунга кўра иккинчи зарра оладиган энергияни кўрсатади. Энг катта энергия узатиш $\chi = \pi$ бўлганда рўй беради. Унинг қиймати

$$E'_{2\max} - m_2 = E_1 - E'_{1\min} = \frac{2m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1} \tag{42.11}$$

бўлади.

Учиб келувчи зарранинг тўқнашишдан кейинги минимал кинетик энергиясининг дастлабки кинетик энергияга нисбати қуйидагича аниқланади.

$$\frac{E'_{1\min} - m_1}{E_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}.$$

Бу нисбат кичик тезликларнинг чегаравий ҳолида ($E \approx m + mv^2/2$ бўлганда ўзгармас чегарага интилади: бу чегара қиймати

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

га тенг. Тескари, катта E_1 энергиялар, чегарада (42.12) нисбат нолга интилади; $E_{1\min}$ катталик ўзгармас чегарага интилади. Бу чегара

$$E'_{1\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}$$

$m_2 \gg m_1$ деб, яъни учиб келаётган зарра массаси тинч ҳолатда турган зарра массасидан кичик деб фараз қиламиз. Бунда классик механикага мувофиқ енгил зарра оғир заррага ўз энергиясининг фақат озгина қисмини бериши мумкин (14-§ га қ.). Лекин бундай ҳолат релятивистик назарияга тўғри келмайди. (42.12) формуладан кўринишича, етарлича катта энергияларда берилган энергия ҳиссаси 1 та яқинлашиши мумкин. Бироқ бунинг учун m_1 зарра тезлиги 1 тартибида бўлиши етарли эмас; бунинг учун

$$E_1 \sim m_2$$

бўлган энергия зарур, яъни енгил зарра энергияси оғир зарранинг тинч ҳолатдаги энергиясига яқин бўлиши керак. $m_2 \ll m_1$ бўлганда, яъни оғир зарра енгилига урилганда шунга ўхшаш ҳолат юзага келади. Бу ерда ҳам классик механикага мувофиқ фақат арзимаган энергия узатиш содир бўлган бўлур эди. Фақатгина

$$E_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}$$

энергиядан бошлаб бериладиган энергия ҳиссаси катта бўла бошлайди. Бу ерда ҳам шуни таъкидлаш лозимки, гап ёруғлик тезлиги тартибидаги тезликлар ҳақидагина эмас, балки m_1 га нисбатан катта энергиялар ҳақида, яъни ультрарелятивистик ҳол тўғрисида боради.

Масалалар

. Бир хил массали икки зарра тўқнашиши натижасида уларнинг лаборатория саноқ системасида сочилиш бурчаги аниқлансин.

Ечилиши. (42.1) тенгликнинг икки томонини квадратга ошириб,

$$p_{1\mu}p_2^{\mu} = p'_{1\mu}p_2'^{\mu}$$

тенгликни оламиз, 4-импульслар кўпайтмаларини лаборатория системасида очиб чиқиш натижасида эса

$$E_1 m_2 = E_1'E_2' - p_1'p_2'\cos\Theta$$

келиб чиқади, бу ерда Θ — сочилиш бурчаги ($\mathbf{p}_1'$ ва $\mathbf{p}_2'$ импульслар орасидаги бурчак). Бир хил массали ($m_1 = m_2 \equiv m$) зарралар учун

$$p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m^2}, \quad p_2' = \sqrt{E_2'^2 - m^2}$$

катталикларни ўз ўринларига қўйиб ва энергия сақланишини) $E_1 + m = E_1' + E_2'$) назарда тутиб, қуйидаги қийматни оламиз:

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{(E_1' - m)(E_2' - m)}{(E_1' + m)(E_2' + m)}}.$$

Θ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан ($E_1' \to m$ ёки $E_2' \to m$ бўлганда) $E_1' = E_2'$ да эришиладиган $\Theta_{\min}$ минимал қийматгача бўлган оралиқда ўзгаради;

$$\cos\Theta_{\min} = \frac{E_1 - m}{E_1 + 3m}$$

2. Бир хил m массали икки зарра тўқнашишига тегишли $E_1'E_2'$ ва χ катталиклар лаборатория системасида сочилиш бурчаги Θ_1 орқали ифодалансин.

Ечилиши. (42,5) га $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$, $p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m^2}$ қийматларни қўйиб, тенгламадан E_2' ни ва сўнгра E_2' ни топамиз:

$$E_1' = \frac{E_1 + m + (E_1 - m)\cos^2\theta_1}{E_1 + m - (E_1 - m)\cos^2\theta_1},$$

$$E_2' = E_1 + m - E_1' = m + \frac{(E_1^2 - m^2)\sin^2\theta_1}{2m + (E_1 - m)\sin^2\theta_1}.$$

E_1' нинг χ орқали ифодаси билан таққослаб,

$$E_1' = E_1 - \frac{1}{2}(E_1 - m)(1 - \cos\chi),$$

[(42.10) дан], инерция маркази системасида

$$\cos\chi = \frac{2m - (E_1 + 3m)\sin^2\theta_1}{2m + (E_1 + m)\sin^2\theta_1}$$

сочилиш бурчагини топамиз.

II ҚИСМ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Х боб

ЭЛЕКТРОМАГНИТ МАЙДОНДАГИ ЗАРЯД

43-§. Тўрт ўлчовли майдон потенциали

Зарраларнинг бир-бири билан ўзаро таъсирини куч *майдон* тушунчаси ёрдамида тавсифлаш мумкин. Бир зарра бошқасига таъсир қилади дейиш ўрнига, зарра ўз атрофида майдон ҳосил қилади, деб айтиш мумкин; шу майдонда жойлашган ихтиёрий бошқа заррага бирорта куч таъсир қилади. Классик механикада майдон физикавий ҳодиса—зарралар ўзаро таъсирини тавсифлашнинг бир усулидир, холос. Нисбийлик назариясида эса ўзаро таъсирлар тарқалиши тезлигининг чеклилиги туфайли аҳвол сезиларли даражада ўзгаради. Мазкур моментда заррага таъсир қилувчи кучлар зарраларнинг шу моментдаги жойлашиши билан аниқланмайди. Зарралардан бирининг вазияти ўзгариши бирор вақт ўтгандан кейингина бошқа зарралар вазиятига таъсир кўрсатади. Бу эса майдоннинг ўзи физикавий воқелик бўлиб қолади демакдир. Биз бир-биридан маълум масофада жойлашган зарралар бевосита ўзаро таъсирлашади деб айта олмаймиз. Ўзаро таъсир ҳар бир моментда фазонинг қўшни нуқталари орасидагина бўлиши мумкин (яқин таъсир). Шунинг учун биз бир зарранинг майдон билан ўзаро таъсири ҳақида ва майдоннинг бошқа зарра билан навбатдаги ўзаро таъсири ҳақида гапиришимиз лозим.

Бу китобнинг иккинчи қисми электромагнит майдонлар назариясига бағишланган. Бу назарияни зарранинг берилган майдон билан ўзаро таъсирини ўрганишдан бошлаймиз.

Берилган электромагнит майдонда ҳаракатланаётган зарра учун таъсир икки қисмдан иборат: эркин зарранинг таъсиридан (39.1) ва зарранинг майдон билан ўзаро таъсирини тавсифловчи ҳаддан иборат. Кейинги қисм таркибида заррани характерловчи катталиклардан ва майдонни характерловчи катталиклардан иборат бўлиши керак.

Маълум бўлишича[1]), зарранинг электромагнит майдон ўзаро таъсирига нисбатан хоссалари биргина параметр e зарранинг *заряди* деб аталувчи параметр билан аниқланади. Бу заряд мусбат бўлганидек, манфий (ёки нолга тенг) бўлиши мумкин. Майдоннинг хоссалари эса 4-*потенциал* деб аталувчи 4-вектор A_μ билан характерланади. 4-потенциал компонентлари вақт ва координаталарнинг функцияларидир.

Бу катталиклар таъсир таркибига

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu d x^\mu$$

ҳад кўринишида киради, бундаги A_μ функциялар зарранинг дунёвий чизиғи нуқталарида олинади. $1/c$ кўпайтувчи бу ерда қулайлик учун киритилган. Шуни айтиш кераки, шу пайтгача бизда заряд ёки потенциалларни олдиндан маълум катталиклар билан боғловчи бирорта ҳам формула бўлмаганлигидан, уларнинг ўлчов бирликлари ихтиёрий равишда танлаб олиниши мумкин (53-§ га қаранг).

Шундай қилиб, электромагнит майдондаги зарра учун таъсир қуйидаги кўринишга эга:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_\mu dx^\mu\right). \qquad (43.1)$$

4-вектор $\mathbf{A}^\mu$ нинг учта фазовий компонентлари майдоннинг *вектор потенциали* деб аталувчи уч ўлчовли **A** векторни ташкил қилади. Вақтга боғлиқ тўртинчи компонент эса *скаляр потенциал* дейилади; уни $\overset{0}{A}=\varphi$ деб белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$A^\mu=(\varphi,\ \mathbf{A}). \qquad (43.2)$$

Шунинг учун таъсир интегралини

$$S=\int_a^b\left(-mcds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\varphi\,\mathbf{d}t\right)$$

кўринишда ёзиш мумкин ёки зарранинг тезлиги $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ ни киритиб, вақт бўйича интеграллашга ўтсак, у ҳолда

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt. \qquad (43.3)$$

Интеграл остидаги ифода электромагнит майдондаги заряд учун Лагранж функциясидир:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \qquad (43.4)$$

Бу ифода эркин зарра учун Лагранж функциясидан заряднинг майдон билан ўзаро таъсирини тавсифловчи $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi$ ҳадлар билан фарқ қилади.

$\partial L/\partial\mathbf{v}$ ҳосила зарранинг умумлашган импульсидир; уни **P** орқали белгилаймиз:

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \qquad (43.5)$$

Бу ерда биз **p** орқали тўғридан-тўғри импульс деб атайдиган зарранинг оддий импульсини белгиладик.

Майдондаги зарранинг Гамильтон функциясини Лагранж функциясидан

$$\mathcal{H}=\mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}-L$$

---

[1] Қуйидаги хулосаларни, асосан, тажрибавий маълумотлар натижаси деб қараш керак. Электромагнит майдондаги зарра учун таъсирнинг кўринишини фақат релятивистик инвариантлик талаби каби умумий мулоҳазалар асосидагина аниқлаш мумкин бўлмайди (айтиб ўтилган талаб, масалан, (43.1) формулада $\int A ds$ кўринишдаги ҳаднинг бўлишини ҳам тақозо қилади, бундаги A — скаляр функция).

Тушунмовчиликлар вужудга келмаслиги учун, ҳамма жойда классик назария (квант назария эмас), тўғрисида гап бораётганини ва шунинг учун ҳам зарралар спинига алоқадор бўлган эффектлар ҳеч қаерда ҳисобга олинмаётганини эслатиб ўтамиз.

умумий формула бўйича топамиз[1]. Бу ерга (43.4) ни қўйиб топамиз.

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \qquad (43.6)$$

Аммо Гамильтон функцияси тезлик орқали эмас, балки зарранинг умумлашган импульси орқали ифодаланиши керак (43.5 — 6) формулалардан кўриниб туришича, $\mathscr{H} - e\varphi$ ва $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ орасидаги муносабат майдон йўқлигидаги $\mathscr{H}$ ва **p** орасидаги муносабат каби бўлади, яъни

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2. \qquad (43.7)$$

Кичик тезликлар учун, яъни классик механикада (43.4) Лагранж функцияси

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \qquad (43.8)$$

кўринишни олади. Бу яқинлашишда

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

Гамильтон функцияси эса:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \qquad (43.9)$$

44- §. Майдондаги заряднинг ҳаракат тенгламаси

Майдондаги заряд фақат майдон томонидан таъсирланибгина қолмасдан, балки унинг ўзи ҳам майдонга таъсир қилади, уни ўзгартиради. Аммо, агар e заряд катта бўлмаса[2], унинг майдонга таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади. Бу ҳолда, берилган майдонда ҳаракатни текширганда, майдоннинг ўзини заряднинг на вазиятига, на тезлигига боғлиқ эмас деб ҳисоблаш мумкин.

Берилган электромагнит майдонда заряднинг ҳаракат тенгламалари қуйидаги

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \qquad (44.1)$$

Лагранж тенгламалари орқали берилади, бундаги L ни (43.4) формуладан аниқланади.

$\partial L/\partial \mathbf{v}$ ҳосила зарранинг (43.5) умумлашган импульсидир. Энди қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Лекин, вектор анализнинг маълум формуласига асосан

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b})\,\mathbf{a} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

бунда **a** ва **b** — ихтиёрий иккита вектор. Бу формулани **Av** га татбиқ қилсак ва **r** бўйича дифференциаллаш **v** ни ўзгармас ҳисоблаган ҳолда бажарилишини эсда тутсак:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}\,(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Бинобарин, Лагранж тенгламалари

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}\,(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi$$

кўринишда бўлади. Лекин $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ тўла дифференциал икки қисмдан, яъни вектор потенциалнинг фазонинг берилган нуқтасида вақт бўйича ўзгариши $\frac{\partial A}{\partial t}dt$ билан фазонинг бир нуқтасидан $d\mathbf{r}$ масофадаги иккинчи нуқтага ўтишдаги ўзгариши $(d\mathbf{r}\,\nabla)\,\mathbf{A}$ дан иборат бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Бу ифодани олдинги тенгламага қўйсак,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\operatorname{grad}\varphi + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]. \qquad (44.2)$$

---

[1] Китобнинг бу қисмида энергияни ва Гамильтон функциясини майдон кучланганликларининг $\mathscr{E}$ ва $\mathscr{H}$ белгиларидан фарқ қилиш учун E ва H ҳарфлар орқали белгиланган.

[2] Бу маънода заряднинг кичиклик шарти у ҳаракатланаётганида пайдо бўладиган ва нурланишнинг тормозлаш кучи деб аталадиган кучнинг кичик бўлишидан иборат (бу кучни 82- § да қаралади).

Бу электромагнит майдонда зарранинг ҳаракати тенгламасидир. Чапда зарра импульсидан вақт бўйича олинган ҳосила турибди. Демак, (44.2) нинг ўнг томонидаги ифода электромагнит майдондаги зарядга таъсир қилаётган кучдир. Бу куч икки қисмдан иборат эканини кўриб турибмиз. Биринчи қисми — (44.2) нинг ўнг томонидаги биринчи ва иккинчи ҳадлар зарранинг тезлигига боғлиқ эмас, иккинчи қисми эса (учинчи ҳад) зарранинг тезлигига боғлиқ: тезликнинг катталигига пропорционал ва унга перпендикулярдир.

Бирлик зарядга таъсир қилувчи биринчи хил кучни *электр майдон кучланганлиги* дейилади, уни **E** орқали белгилаймиз. Демак, таърифга кўра

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \qquad (44.3)$$

Бирлик зарядга таъсир қилувчи иккинчи хил куч ифодасида $\mathbf{v}/c$ олдида турган кўпайтувчини *магнит майдон кучланганлиги* дейилади, уни **H** орқали белгилаймиз. Демак, таърифга кўра,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (44.4)$$

Электромагнит майдонда заряд ҳаракати тенгламаларини энди

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] \qquad (44.5)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ўнгда турган ифодани *Лоренц кучи* деб аталади. Унинг биринчи қисми — зарядга электр майдони томонидан таъсир этадиган куч—заряднинг тезлигига боғлиқ эмас ва **E** майдон йўналиши бўйича йўналган, иккинчи қисми—магнит майдоннинг таъсир кучи — заряднинг тезлигига пропорционал ва тезликка ҳам, **H** магнит майдон йўналишига ҳам перпендикуляр йўналган.

Ёруғлик тезлигига нисбатан кичик бўлган тезликлар учун **p** импульс тақрибан ўзининг классик ифодаси $m\mathbf{v}$ га генг бўлади ва (44.5) ҳаракат тенгламалари қуйидаги кўринишни олади:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \qquad (44.6)$$

Зарра кинетик энергиясининг[1] вақт бўйича ўзгариши тезлигини ҳам, яъни

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ҳосилани ҳисоблаб чиқамиз. Бунда

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

бўлишлигига ишонч ҳосил қилиш осон; энди (44.5)дан $d\mathbf{p}/dt$ ни қўйсак ва $[\mathbf{vH}]\,\mathbf{v} = 0$ бўлишлигини эътиборга олсак,

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{Ev}. \qquad (44.7)$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги ифода майдоннинг зарра устида вақт бирлигида бажарган ишидир. Ишни фақт электр майдони бажаради. Магнит майдони эса унда ҳаракатланаётган заряд устида иш бажармайди, чунки унинг таъсир кучи зарра тезлигига перпендикуляр бўлади.

5- § да классик механика тенгламаларининг вақт ишораси ўзгаришига нисбатан инвариант бўлишлиги таъкидланган эди. Нисбийлик назариясида электромагнит майдонда худди шундай инвариантлик ўринли бўлишини кўриш осон. Аммо бунда t ни $-t$ га алмаштирганда магнит майдон ишорасини ҳам ўзгартириш керак. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$t \to -t,\ \mathbf{E} \to \mathbf{E},\ \mathbf{H} \to -\mathbf{H} \qquad (44.8)$$

алмаштиришлар қилинса, (44.5) ҳаракат тенгламалари ўзгармай қолишини осон кўриш мумкин. Бунда, (44.3—4) га асосан, скаляр потенциал ўзгармайди вектор потенциал эса ишорасини ўзгартиради:

$$\varphi \to \varphi,\ \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \qquad (44.9)$$

Шундай қилиб, агар электромагнит майдонда қандайдир ҳаракат мумкин бўлса, у ҳолда **H** нинг тескари йўналишли майдонда тескари ҳаракат бўлиши ҳам мумкин.

---

[1] Бунда „кинетик" энергия деганда биз ҳаракатсизликдаги энергияни ўз ичига олган (39.7) энергияни тушунамиз.

Масала

Зарранинг тезланишини унинг тезлиги ҳамда электр ва магнит майдон кучланганликлари орқали ифодаланг.

Ечилиши. (44.5) ҳаракат тенгламасига $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathscr{E}_{\text{кин}}/c^2$ ни қўямиз, $d\mathscr{E}_{\text{кин}}/dt$ ни (44.7) бўйича ифодалаймиз. Натижада қуйидагини топамиз:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE})\right\}.$$

45- §. Калибровка (даражалаш) инвариантлиги

Энди майдон потенциаллари қанчалик бир қийматли равишда таърифланганликларини текширамиз. Майдон унда жойлашган зарядлар ҳаракатига кўрсатаётган таъсири орқали характерланади. Лекин, ҳаракат тенгламаларига потенциаллар эмас, балки майдон кучланганликлари **E** ва **H** киради. Шунинг учун, агар икки майдон бир хил **E** ва **H** векторлар билан характерланса, улар бир-бири билан физикавий жиҳатдан айнан бўлади.

(44.3 - 4) га мувофиқ, **A** ва φ потенциаллар берилган бўлса, у ҳолда **E** ва **H** катталиклар бир қийматли аниқланади. Аммо, майдоннинг биргина қийматига потенциалларнинг турли қийматлари мос келиши мумкин. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун 4- потенциал A_μ нинг ҳар бир ташкил этувчисига $-\partial f/\partial x^\mu$ катталикни қўшамиз (бу ерда f вақт ва координаталарнинг ихтиёрий функцияси). У ҳолда A_μ

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{45.1}$$

га ўтади. Бундай алмаштиришда (43.1) таъсир интеграли ифодасига тўла дифференциалдан иборат қўшимча

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu = d\left(\frac{e}{c}f\right) \tag{45.2}$$

ҳад пайдо бўлади, у ҳаракат тенгламаларига таъсир кўрсатмайди (2- § ни қаранг).

Агар тўрт ўлчовли потенциал ўрнига вектор потенциал ва скаляр потенциал, x^μ ўрнига эса ct, x, y, z координаталар киритилса, у ҳолда тўртта (45.1) тенгликларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{45.3}$$

(44.3—4) ифодаларга **A** ва φ ўрнига янги **A′** ва φ' потенциаллар қўйилганда электр ва магнит майдонларининг ҳақиқатан ҳам ўзгармай қолишига ишониш осон. Шундай қилиб, (45.3) алмаштириш майдонни ўзгартирмайди. Потенциаллар шунинг учун ҳам бир қийматли аниқланган эмас — вектор-потенциал ихтиёрий функция градиентича аниқликда, скаляр потенциал ўша функциянинг вақт бўйича ҳосиласича аниқликда аниқлангандир.

Хусусан, вектор потенциалга ихтиёрий ўзгармас векторни, скаляр потенциалга эса ихтиёрий ўзгармас катталикни қўшиб қўйиш мумкин. Бу қуйидагидан кўриниб турибди: **E** ва **H** ларнинг таърифига фақат **A** ва φ ларнинг ҳосилалари киради ва шунинг учун **A** ва φ ларга ўзгармас катталикларни қўшиш майдон кучланганликларини ўзгартирмайди.

Фақат потенциалларнинг (45.3) алмаштирилишларига нисбатан инвариант бўлган катталиклargина физикавий маънога эгадир; шунинг учун ҳам барча тенгламалар бу алмаштиришларга нисбатан инвариант бўлишлари керак. Бу инвариантликни *калибровка* (даражалаш) ёки *градиент*[1] *инвариантлиги* дейилади.

Потенциалларнинг айтиб ўтилган бир қийматсизлиги уларни ҳар доим бир ихтиёрий қўшимча шартга бўйсуналиган қилиб танлаб олиш имконини беради, чунки (45.3) да биттагина φ функцияни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. Хусусан, ҳар доим майдон потенциалларни $\phi=0$ бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин. Аммо вектор потенциални нолга айлантириш, умуман, мумкин эмас, чунки $A=0$ шарт учта (A нинг учта ташкил этувчиси учун) қўшимча шартдан иборат бўлар эди.

---

[1] Бу натижанинг (45.2) ифодада назарда тутилган e нинг ўзгармаслиги билан боғлиқлигини таъкидлаймиз. Шундай қилиб, электродинамика тенгламаларининг калибровка инвариантлиги ва заряд сақланиши қонуни бир-бири билан жипс боғланган.

46-§. Ўзгармас электромагнит майдон

Вақтга боғлиқ бўлмаган электромагнит майдонни ўзгармас электромагнит майдон дейилади. Равшанки, ўзгармас майдон потенциалларини вақтга боғлиқ бўлмай, балки фақат координаталар функциялари ҳолида танлаб олиш мумкин. Ўзгармас магнит майдон, олдингидек, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ бўлади. Ўзгармас электр майдон эса

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \qquad (46.1)$$

Шундай қилиб, ўзгармас электр майдон фақат скаляр потенциал билан, магнит майдон эса вектор потенциал билан аниқланади.

Майдон потенциаллари бир қийматсиз аниқланганлигини олдинги параграфда кўрдик. Лекин, агар ўзгармас электромагнит майдонни вақтга боғлиқмас потенциаллар ёрдамида тавсифлашга келишилса, у ҳолда, майдонни ўзгартирмаган ҳолда, скаляр потенциалга ихтиёрий (на координаталарга, на вақтга боғлиқ) ўзгармас катталикни қўшиб қўйиш мумкин. Одатда φ потенциалга яна қўшимча шарт ҳам қўйилади: унинг чексизликда нолга тенг бўлишлиги талаб қилинади. У ҳолда айтиб ўтилган ихтиёрий ўзгармас катталик аниқланган бўлиб қолади ва ўзгармас майдоннинг скаляр потенциали тамомила бир қийматли бўлиб қолади. Аксинча, вектор потенциал бир қийматсизлигича қолади: унга координаталарга боғлиқ исталган функциянинг градиентини қўшиб қўйиш мумкин.

Ўзгармас электромагнит майдонда заряднинг энергияси нимага тенглигини аниқлаймиз. Агар майдон ўзгармас бўлса, у ҳолда заряд учун Лагранж функцияси вақтга ошкор боғлиқ бўлмайди. Бу ҳолда энергия сақланади ва Гамильтон функциясига мос тушади. (43.6) га мувофиқ

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \qquad (46.2)$$

Шундай қилиб,зарранинг энергиясига $e\varphi$ ҳад—заряднинг майдондаги потенциал энергияси қўшилади. Муҳим ҳолатни таъкидлаймиз; энергия фақат скаляр потенциалга боғлиқ, аммо вектор потенциалга боғлиқ эмас. Бошқача қилиб айтганда, магнит майдон зарядлар энергиясига таъсир этмайди; зарра энергиясини фақат электр майдон ўзгартиради. Бу магнит майдоннинг олдин эслаб ўтилган хоссасига алоқадор: магнит майдон, электр майдондан фарқли ўлароқ, заряд устида иш бажармайди.

Агар майдон кучланганлик фазонинг барча нуқталарида бир хил бўлса, у ҳолда майдонни бир жинсли майдон дейилади. Бир жинсли майдоннинг φ скаляр потенциалини майдон кучланганлик орқали ифодалаш мумкин:

$$\varphi = -\mathbf{Er}. \qquad (46.3)$$

Ҳақиқатан, $\mathbf{E} = \mathrm{const}$ бўлганида:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{Er}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}.$$

Бир жинсли магнит майдоннинг вектор потенциалини эса шу майдон кучланганлиги $\mathbf{H}$ орқали

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Hr}] \qquad (46.4)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, $\mathbf{H} = \mathrm{const}$ бўлганида, вектор анализнинг маълум формулалари ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(эслатамиз: $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$).

47-§. Ўзгармас бир жинсли электр майдондаги ҳаракат

e заряднинг бир жинсли ўзгармас $\mathbf{E}$ электр майдондаги ҳаракатини қараб чиқайлик. Майдон йўналишини x ўқи деб қабул қиламиз. Ҳаракат, равшанки, бир текисликда бўлади. уни xy текислиги деб олайлик. У ҳолда (44.5) ҳаракат тенгламалари ушбу кўринишни олади:

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

бундан

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \qquad (47.1)$$

Вақт саноғи боши қилиб $v_x=0$ бўлган моментни олдик; p_0 — зарранинг шу моментдаги импульси.

Зарранинг кинетик (майдондаги потенциал энергия қўшилмаган) энергияси $\mathscr{E}_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$ бўлади. Бунга (47.1) ни қўйсак, бизнинг ҳолда

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(ceEt)^2} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}, \qquad (47.2)$$

бундаги $\mathscr{E}_0$ катталик $t=0$ даги энергия.

(39.11) га биноан, зарранинг тезлиги $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathscr{E}_{\text{кин}}$. Бинобарин, $v_x = \dot{x}$ тезлик учун

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_xc^2}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}}$$

ифодани оламиз. Уни интегралласак,

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2} \qquad (47.3)$$

(интеграллаш доимийсини нолга тенг деб ҳисоблаймиз, бўлади. Ушбу

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_yc^2}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

ифодани интеграллаб, y ни топамиз:

$$y = \frac{p_0c}{eE}\operatorname{Arsh}\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \qquad (47.4)$$

(47.4) дан t ни y орқали ифодалаб ва уни (47.3) га қўйиб, траектория тенгламасини топамиз:

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0c}. \qquad (47.5)$$

Шундай қилиб, заряд бир жинсли электр майдонда занжир чизиқ бўйлаб ҳаракатланади.

Агар зарранинг тезлиги $v \ll c$ бўлса, у ҳолда $p_0 = mv_0$ $\mathscr{E}_0 = mc^2$; деб олиш мумкин. (47.5) ни $1/c$ даражалари бўйича қаторга ёйиб, юқори тартибли ҳадларгача аниқликда олсак,

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2}y^2 + \text{const}$$

қолади, яъни заряд парабола бўйлаб ҳаракатланади. Бу эса классик механиканинг илгаридан маълум натижасидир.

48-§. Ўзгармас бир жинсли магнит майдондаги ҳаракат

Энди e заряднинг бир жинсли магнит майдондаги ҳаракатини текширамиз. Майдон йўналишини z ўқи бўйича деб қабул қиламиз.

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

ҳаракат тенгламаларини бошқа кўринишда ёзиш учун унда импульс ўрнига

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

ифодани қўямиз, бундаги $\mathscr{E}$ зарранинг магнит майдонда ўзгармас сақланадиган энергияси. У ҳолда ҳаракат тенгламалари

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] \qquad (48.1)$$

кўринишни олади ёки векторлар ташкил этувчилари орқали ифодаланганда

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \qquad \dot{v}_z = 0, \qquad (48.2)$$

бунда биз

$$\omega = \frac{ecH}{\mathscr{E}} \qquad (48.3)$$

белгилаш киритдик.

(48.2) тенгламалардан иккинчисини i га кўпайтирамиз ва биринчисига қўшамиз, у ҳолда

$$\frac{d}{dt}(v_x+iv_y) = -i\omega(v_x+iv_y),$$

бундан

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

бу ерда a — комплекс ўзгармас катталикдир, уни $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ердаги v_{0t} ва α ҳақиқий катталиклардир. У ҳолда

$$v_x = iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)}.$$

Бу ифоданинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратиб, қуйидагиларни топамиз:

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t+\alpha,) \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t+\alpha). \qquad (48.4)$$

v_{0t} ва α ўзгармас катталикларни бошланғич шартлардан аниқланади: α—бошланғич фаза, v_{0t} эса, (48.4) дан кўринишича,

$$v_{0t}=\sqrt{v_x^2+v_y^2},$$

яъни v_{0t} зарранинг xy текисликдаги тезлиги бўлиб, у ҳаракат вақтида ўзгармай қолади.

(48.4) ни интегралласак, у ҳолда

$$x=x_0+r\sin(\omega t+\alpha),\quad y=y_0+r\cos(\omega t+\alpha) \qquad (48.5)$$

бўлади, бунда

$$r=\frac{v_{0t}}{\omega}=\frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH}=\frac{cpt}{e\,H} \qquad (48.6)$$

(p_t — импульснинг xy текисликка проекцияси). (48.2) нинг учинчи тенгламасидан $v_z=v_{0z}$ ва

$$z=z_0+v_{0z}t \qquad (48.7)$$

қийматларни топамиз.

(48.5) ва (48.7) лардан кўринишича, заряд бир жинсли магнит майдонда винт чизиқ бўйлаб ҳаракатланади унинг ўқи магнит майдон бўйлаб йўналган, r радиуси (48.6) дан аниқланади. $v_{0z}=0$ бўлган, яъни заряднинг майдон бўйлаб тезлиги ноль бўлган хусусий ҳолда, заряд майдонга перпендикуляр текисликдаги айлана бўйлаб ҳаракат қилади.

ω катталик, формулалардан кўриниб турганидек, зарранинг майдонга перпендикуляр текисликда циклик айланиш частотасидир. Агар зарранинг тезлиги кичик бўлса, у ҳолда тақрибан $\mathscr{E}=mc^2$ деб олишимиз мумкин. У ҳолда

$$\omega=\frac{eH}{mc}. \qquad (48.8)$$

Масалалар

1. Заряднинг бир жинсли магнит майдондаги қиймати ва йўналиши вақт ўтиши билан секин ўзгарадиган ҳаракати учун адиабатик инвариант топилсин.

Ечилиши. Бир жинсли магнит майдонда майдонга перпендикуляр текисликдаги ҳаракат даврий бўлганлиги сабабли адиабатик инвариант

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{l}$$

интегралдан иборат бўлади. У ҳаракатнинг тўла даври бўйича мазкур ҳолда айлана бўйича олинади (P_t — импульснинг юқорида айтилган текисликка проекцияси).

$\mathbf{P}_t=\mathbf{p}_t+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ ни қўйсак

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}_t\,dl+\frac{e}{2\pi c}\oint A\,dl.$$

Биринчи ҳадлаги $\mathbf{p}_t$ вектор катталик жиҳатдан ўзгармас бўлиб dl бўйича йўналган; иккинчи ҳадга нисбатан Стокс теоремасини қўллаймиз ва $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$ алмаштириш қиламиз:

$$I=rp_t+\frac{e}{2c}Hr^2,$$

бунда r—орбита радиуси. (48.6) дан r ни келтириб қўйсак,

$$I=\frac{3c\mathbf{p}_t^2}{2eH}.$$

Бундан кўринишича, H секин ўзгарганида p_t кўндаланг импульс $\sqrt{H}$ га пропорционал ўзгаради.

2. Ўзгармас бир жинсли магнит майдонда жойлашган зарядланган фазовий осцилляторнинг тебраниш частоталари аниқлансин. Осциллятор тебранишларининг хусусий частотаси майдон йўқлигида ω_0 га тенг.

Ечилиши. Осцилляторнинг z ўқи бўйлаб йўналган магнит майдондаги мажбурий тебраниш тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{eH}{mc}\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega_0^2y=-\frac{eH}{mc}\dot{x},\quad \ddot{z}+\omega_0^2z=0.$$

Иккинчи тенгламани i га кўпайтирсак ва уни биринчи тенгламага қўшсак,

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi=-i\frac{eH}{mc}\dot{\xi}$$

бўлади, бундаги $\xi=x+iy$. Бундан осцилляторнинг майдонга перпендикуляр текисликда тебраниш частоталарини топамиз:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Агар H майдон кичик бўлса, у ҳолда бу формула

$$\omega=\omega_0\pm\frac{eH}{mc}.$$

кўринишни олади. Майдон йўналишидаги тебранишлар ўзгармай қолади.

49-§. Кесишган майдонлардаги заряд ҳаракати

Ниҳоят, бир вақтнинг ўзида бир жинсли ўзгармас электр ва магнит майдонларнинг иккови ҳам мавжуд бўлган ҳолда заряд ҳаракатини текширамиз. Биз бу ерда норелятивистик, яъни заряднинг тезлиги $v \ll c$ бўлган ҳол билан, ва, бинобарин, унинг импульси $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ бўлган ҳол билан чекланамиз; бунинг учун электр майдоннинг магнит майдонга нисбатан кичик бўлиши зарурлигини қуйироқда кўрамиз.

H йўналишини z ўқи бўйлаб, **H** ва **E** векторлар орқали ўтган текисликни yz текислик деб танлаймиз. У ҳолда

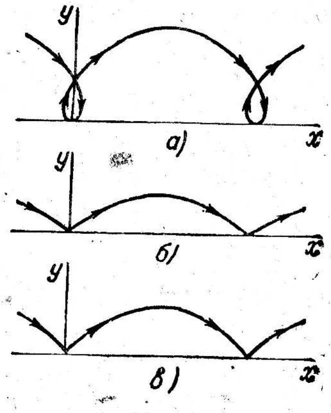
$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

ҳаракат тенгламалари

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}H, \quad m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \quad m\ddot{z} = eE_z, \qquad (49.1)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламаларнинг учинчисидан заряднинг z ўқи бўйлаб текис тезланувчан ҳаракат қилишлиги кўринади:

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \qquad (49.2)$$



30 расм.

(49.1) тенгламалардан иккинчисини i га кўпайтирсак ва биринчисига қўшсак:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\,\frac{e}{m}E_y,$$

бунда ($\omega = eH/mc$). Бу тенгламанинг интеграли ўнг томонсиз шу тенгламанинг интеграли ва ўнг томонли шу тенгламанинг хусусий интеграли йиғиндисига тенг. Улардан биринчиси $ae^{-i\omega t}$, иккинчиси эса $e\,E_y/m\omega = c\,E_y/H$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}$$

a ўзгармас катталик, умуман айтганда, комплекс бўлади. Уни $a = be^{i\alpha}$ кўринишда ($в$ ва α — ҳақиқий катталиклар) ёзиб олсак, a билан $e^{-i\omega t}$ кўпайтувчилар бўлганлигидан вақт саноғи бошланишини мос равишда танлаб, α фазага исталган қиймат беришимиз мумкин эканлигини кўрамиз. Уни a ҳақиқий катталик бўладиган қилиб танлаб олайлик. У ҳолда, $\dot{x} + i\dot{y}$ ифоданинг мавҳум ва ҳақиқий қисмларини ажратиб олсак,

$$\dot{x} = a\cos\omega t + c\frac{E_y}{H} \qquad (49.3)$$

$$\dot{y} = -a\sin\omega t.$$

Бунда $t = 0$ вақт моментида тезлик x бўйлаб йўналган. Зарра тезлигининг ташкил этувчилари вақтнинг даврий функциялари бўлишлигини кўриб турибмиз; уларнинг ўртача қийматлари

$$\bar{v}_x = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{v}_y = 0. \qquad (49.4)$$

Кесишган электр ва магнит майдонларда заряд ҳаракатининг бу ўртача тезлигини кўпинча *электр дрейф* тезлиги дейилади. Унинг йўналиши иккала майдонга ҳам перпендикуляр ва заряднинг ишорасига боғлиқ эмас.

Бу параграфдаги барча формулаларни зарранинг тезлиги ёруғлик тезлигидан кичик бўлгандагина қўллаш мумкин; бунинг учун, хусусан, электр ва магнит майдонлар

$$\frac{E_y}{H} \ll 1 \qquad (49.5)$$

шартни қаноатлантириши талаб қилинади. E_y ва H ларнинг абсолют қийматлари эса ихтиёрий бўлишлари мумкин.

(49.3) тенгламаларни яна бир марта интеграллаймиз ва интеграллаш доимийларини $t=0$ да $x=y=0$ бўладиган қилиб танлаймиз. У ҳолда:

$$x = \frac{a}{\omega}\sin\omega t + \frac{cE_y}{H}t, \quad y = \frac{a}{\omega}(\cos\omega t - 1). \qquad (49.6)$$

Эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари сифатида кўрилувчи бу тенгламалар трохоида деб аталувчи эгри чизиқни беради. a нинг абсолют миқдори cE_y/H нинг абсолют миқдоридан катта ёки кичик бўлишига боғлиқ равишда зарра траекториясининг xy текисликка проекцияси мос равишда 30- *а* расмдаги ва 30- *б* расмдаги кўринишга эга бўлади.

Агар $a = -cE_y/H$ бўлса, у ҳолда (49.6) тенгламалар

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin\omega t), \quad y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos\omega t). \tag{49.7}$$

кўринишни олади, яъни траекториянинг xy текисликка проекцияси циклоида бўлади (30- *в* расм).

50-§. Электромагнит майдон тензори

Майдон кучланганликларни майдон потенциаллари орқали ифодаловчи (44.3 — 4) формулалар уч ўлчовли белгилашларда тасвирланган ва шу сабабли улар саноқ система ўзгарганда бу катталикларнинг алмаштириш қонунини аниқлаш учун ноқулайдир.

Уч ўлчовли иккала **E** ва **H** векторларнинг барча ташкил этувчилари тўпламини

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{50.1}$$

антисимметрик 4-тензорнинг (уни электромагнит майдон тензори дейилади) ташкил этувчилари тўплами сифатида тасвирлаш мумкин. $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$ қийматларини (50.1) таърифга қўйиб, бу тензорнинг айрим ташкил этувчилари маъносини аниқлаш осон.

Натижани жадвал кўринишида ёзиш мумкин, унда $\mu = 0,1,2,3$ индекс—қаторларни, ν индекс эса устунларни номерлайди:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{50.2}$$

Шу тензорнинг контравариант компонентлари битта фазовий индексни кўтарганда ўз ишорасини ўзгартириши билан фарқланади:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{50.3}$$

Майдонда заряд ҳаракати тенгламалари $F_{\mu\nu}$ тензор ёрдамида

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \tag{50.4}$$

кўринишда ёзилади. Тенгликнинг ҳар икки томонидаги ифодаларни (40.2), (40.5), (50.3) ёрдамида очиб чиқиб (ва $ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ алмаштириш бажариб), $\mu = 1,2,3$ бўлганида (44.6) вектор тengламанинг уч ташкил этувчисини, $\mu = 0$ бўлганида эса (44.7) иш тенгламасини олишимизга ишонч ҳосил қилиш осон.

E ва **H** майдонларнинг алмаштириш формулаларини энди 4-тензорларни алмаштириш умумий қоидаларига биноан топишимиз мумкин. Иккинчи ранг $F^{\mu\nu}$ тензорнинг ташкил этувчилари координаталарнинг $x^\mu x^\nu$ кўпайтмаси сингари алмаштирилади. (36.3) Лоренц алмаштиришларида $x^2 = y$ ва $x^3 = z$ координаталар ўзгармайди; шунинг учун $F^{\mu\nu}$ ташкил этувчи ҳам ўзгармайди: $F^{23} = F'^{23}$. Сўнгра ўша сабабга кўра, F^{02}, F^{03} ва F^{12}, F^{13} ташкил этувчилар, мос равишда, $x^0 = ct$ ва $x' = x^1$ координаталар каби алмаштирилади:

$$F^{02} = \frac{F'^{01} + \frac{V}{c}F'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F^{12} = \frac{F'^{12} + \frac{V}{c}F'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(F^{03}, F^{13} учун ҳам шунга ўхшаш) Ниҳоят, F^{01} ташкил этувчи $x^0 x^1$ кўпайтма сингари алмаштирилиши керак, у ҳолда

$$F^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\left\{F'^{01} + \frac{V^2}{c^2}F'^{10} + \frac{V}{c}\left(F'^{01} + F'^{10}\right)\right\}.$$

Аммо, мазкур ҳолда $F^{\mu\nu}$ тензор антисимметрик бўлганлиги сабабли $F'^{01} = -F'^{10}$ ва шунинг учун

$$F^{01} = F'^{01}.$$

Энди $F^{\mu\nu}$ тензорнинг ташкил этувчиларини (50.3) га мувофиқ **E** ва **H** майдоннинг ташкил этувчилари орқали ифодалаб, электр майдон учун қуйидаги алмаштириш формулаларини оламиз:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (50.5)$$

магнит майдон учун эса:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (50.6)$$

Шундай қилиб, электр ва магнит майдонлар кўпчилик физикавий катталиклар сингари нисбийдир, яъни уларнинг хоссалари турли саноқ системаларида турличадир. Хусусан, электр ёки магнит майдон бир саноқ системасида нолга тенг бўлиши ва шу вақтнинг ўзида бошқа системада мавжуд бўлиши мумкин.

Агар K' системада магнит майдон $\mathbf{H}' = 0$ бўлса, у ҳолда, (50.6 — 6) га мувофиқ, K системада электр ва магнит майдонлар ўртасида

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{VE}] \qquad (50.7)$$

муносабат мавжуддир. Агар K' системада майдон $\mathbf{E}' = 0$ бўлса, у ҳолда K системада

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{VH}]. \qquad (50.8)$$

Бинобарин, иккала ҳолда ҳам K системада магнит ва электр майдонлари ўзаро перпендикуляр. Бу формулалар тескари маънога ҳам эга, албатта: агар бирор K саноқ системасида **E** ва **H** майдонлар ўзаро перпендикуляр (лекин катталиги бўйича тенг эмас) бўлса, у ҳолда майдон тоза электр ёки тоза магнит майдондан иборат бўладиган қандайдир K' система мавжуд бўлади.

51-§. Майдон инвариантлари

Электр ва магнит майдонлар кучланганлик векторларидан бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтишда ўзгармас қоладиган инвариант катталиклар тузиш мумкин.

Тўрт ўлчовли $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ скаляр тузсак, худди шундай катталикни ҳосил қиламиз. Уни уч ўлчовли белгилашларда очиб чиқсак, $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2)$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб,

$$H^2 - E^2 = \text{inv} \qquad (51.1)$$

катталик изланаётган инвариантлардан бири бўлади.

(50.5 — 6) формулалар бўйича бевосита текшириб кўриб, Лоренц алмаштиришларида

$$E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$$

йиғинди ҳам ўзгармасдан қолишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\mathbf{EH} = 0. \qquad (51.2)$$

Аммо фазовий координаталар системасининг аксланиши (*инверсияси*) да—бир вақтда x, y, z координаталар ишорасининг ўзгаришида бу икки инвариант турлича ўзгаради. Шундай алмаштиришда чин (ёки *қутбий* деб аталадиган) вектор компонентлари ҳам ишораларини ўзгартирадилар. Икки қутбий векторнинг вектор кўпайтмаси бўлган векторнинг компонентлари эса инверсия ҳолида ўзгармас қолади. Бундай векторларни *аксиаль* векторлар дейилади. Иккита қутбий ёки иккита аксиаль векторларнинг скаляр кўпайтмаси чин скаляр бўлади—у инверсия таъсирида ўзгармайди. Аксиаль ва қутбий векторлар кўпайтмаси эса *псевдоскаляр* бўлади —инверсиядан сўнг у ўз ишорасини ўзгартиради.

Лекин (44.3—4) таърифга мувофиқ, **E** қутбий вектор, **H** эса аксиаль вектор (∇ ва **A** қутбий векторларнинг вектор кўпайтмаси). Бундан равшанки, $H^2 - E^2$ чин скалярдир, **EH** эса псевдоскаляр, $((\mathbf{EH})^2$ эса ҳақиқий скаляр бўлади).

(51.1 — 2) ифодалар инвариантлигининг баъзи бир натижаларини таъкидлаб ўтамиз. Агар қандайдир саноқ системасида **E** ва **H** майдонлар катталик бўйича бир хил ($E^2 = H^2$) бўлса, у ҳолда улар бошқа ҳар қандай инерциал саноқ системасида ҳам катталик бўйича бир хил бўлади. Агар қандайдир саноқ системасида **E** ва **H** майдонлар ўзаро перпендикуляр (**EH**=0) бўлса, у ҳолда улар ҳар қандай бошқа системада ҳам ўзаро перпендикуляр бўлади.

Агар **EH**=0 бўлса, у ҳолда **E**=0 ёки **H**=0 бўладиган, яъни майдон соф магнит ёки соф электр майдон бўладиган ($E^2 - H^2 < 0$ ёки >0 бўлишига қараб) саноқ системасини топиш мумкин. Аксинча, агар қандайдир системада **E** = 0 ёки **H** = 0 бўлса, у ҳолда бошқа ҳар қандай системада улар (олдинги параграф охирида айтилганга мувофиқ) ўзаро перпендикуляр бўлади.

Фақат **EH**=0 гина эмас, балки яна $E^2 - H^2 = 0$ бўладиган, яъни иккала инвариант ҳам ноль бўладиган ҳол мустасно ҳолдир. Бу ҳолда **E** ва **H** ҳар қандай саноқ системасида катталик жиҳатдан тенг ва йўналиш жиҳатдан ўзаро перпендикуляр бўлади.

XI боб

ЭЛЕКТРОМАГНИТ МАЙДОН ТЕНГЛАМАЛАРИ

52-§. Максвелл тенгламаларининг биринчи жуфти

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$$

ифодалардан фақат **E** ва **H** ларни ўз ичига олган тенгламалар ҳосил қилиш осон. Бунинг учун **rot E** ни аниқлаймиз:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi.$$

Лекин ҳар қандай градиентнинг ротори нолга тенг, бинобарин,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \qquad (52.1)$$

rot **A** = **H** тенгламанинг ҳар икки томонидан дивергенция олсак ва ҳар қандай роторнинг дивергенцияси нолга тенг бўлишлигини эсда тутсак, у ҳолда

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \qquad (52.2)$$

(52.1—2) тенгламалар *Максвелл тенгламаларининг*[1]) биринчи жуфтидир. Бу икки тенглама ҳали майдон хоссаларини тамомила аниқлаб бера олмайди, чунки улар магнит майдоннинг вақт бўйича ўзгаришини ($\partial\,\mathbf{H}/dt$ ҳосилани) аниқлайди, лекин $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ҳосилани аниқламайди.

(52.1 — 2) тенгламаларни интеграл шаклда ёзиш мумкин. Гаусс теоремасига мувофиқ

$$\int \operatorname{div}\mathbf{H}\,dV = \oint \mathbf{H}d\mathbf{f},$$

бунда ўнгдаги интеграл чапдаги интеграл олинадиган ҳажмни чегараловчи бутун ёпиқ сирт бўйича олинади. (52.2) га асосан

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{f} = 0. \qquad (52.3)$$

Вектордан бирор сирт бўйича олинган интегрални шу сирт орқали *вектор оқими* дейилади. Шундай қилиб, ёпиқ сирт орқали магнит майдон оқими нолга тенг бўлади.

Стокс теоремасига мувофиқ

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}\,d\mathbf{f}. \qquad (52.4)$$

Вектордан ёпиқ контур бўйича олинган интегрални шу векторнинг контур бўйича *циркуляцияси* дейилади. Электр майдон циркуляциясини, шунингдек, мазкур контурдаги *электр юритувчи куч* ҳам дейилади. Демак, бирор контурдаги электр юритувчи куч шу контур чегаралаган сирт орқали магнит майдон оқимидан вақт бўйича ҳосиланинг тескари ишора билан олинган катталигига тенгдир.

53-§. Электромагнит майдон учун таъсир

Электромагнит майдон билан бирга унда жойлашган зарралардан ташкил топган бутун система учун S таъсир уч қисмдан иборат бўлади:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \qquad (53.1)$$

---

[1]) Максвелл тенгламалари — электродинамиканинг асосий тенгламалари—биринчи марта Максвелл томонидан 1860 йилларда таърифланган.

S_m—таъсирнинг фақат зарралар хоссаларига боғлиқ қисмидир, яъни эркин зарралар учун таъсирдир. Битта эркин зарра учун у (39.1) формула билан аниқланади. Агар бир нечта зарралар бўлса, у ҳолда уларнинг умумий таъсири ҳар бир зарра учун айрим таъсирлар йиғиндисига тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$S_m = -\sum mc\int ds. \qquad (53.2)$$

S_{mf} — таъсирнинг зарралар ва майдон орасидаги ўзаро таъсир билан аниқланадиган қисми, 43- § га мувофиқ, зарралар системаси учун

$$S_{mf} = -\sum\frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu. \qquad (53.3)$$

Бу йиғиндининг ҳар бир ҳадидаги A_μ фазо ва вақтнинг мазкур зарра жойлашган нуқтасидаги майдон потенциалидир. $S_m + S_{mf}$ йиғинди майдондаги зарралар учун бизга маълум (43.1) таъсирдир.

Ниҳоят, S_f ҳад таъсирнинг фақат майдоннинг ўз хоссаларига боғлиқ бўлган қисмидир, яъни зарядлар бўлмаган ҳолдаги майдон учун таъсирдир. Биз фақат зарядларнинг берилган электромагнит майдондаги ҳаракатини ўрганаётганимизда, бизни S_f (зарраларга боғлиқ бўлмайдиган таъсир сифатида) қизиқтирмаган эди, чунки бу ҳад зарра ҳаракати тенгламаларига таъсир кўрсата олмас эди. Аммо майдоннинг ўзини аниқловчи тенгламаларни топмоқчи бўлганимизда, S_f зарур бўлиб қолади. Бунга қуйидаги аҳвол мос келади: таъсирнинг $S_m + S_{mf}$ қисмидан майдонни тўла аниқлаш учун етарли бўлмаган фақат иккита (52.1—2) тенгламани топдик.

Майдон таъсири S_f нинг кўринишини аниқлашда электромагнит майдонларнинг қуйидаги жуда муҳим хоссасига асосланамиз. Тажриба кўрсатишича электромагнит майдон суперпозиция принципи деб аталувчи принципга бўйсунади. Бу принцип зарядлар системаси вужудга келтирган майдон ҳар бир заряд айрим ҳолда вужудга келтирган майдонларнинг оддий қўшилиши натижаси эканини тасдиқлайди. Бу—ҳар бир нуқтадаги натижавий майдон кучланганлиги алоҳида зарядларнинг шу нуқтадаги майдон кучланганликларининг вектор йиғиндисига тенг демакдир.

Майдон тенгламаларининг ҳар қандай ечими табиатда мавжуд бўла оладиган майдондир. Суперпозиция принципига мувофиқ, шундай майдонларнинг йиғиндиси ҳам табиатда мавжуд бўла оладиган майдон бўлиши керак, яъни майдон тенгламаларини қаноатлантириши керак.

Маълумки, чизиқли дифференциал тенгламаларнинг исталган ечимлари йиғиндиси ҳам ечим бўлади. Бинобарин, майдоннинг дифференциал тенгламалари чизиқли тенгламалар бўлиши керак.

Айтилганларга кўра, S_f таъсир ифодасидаги интеграл белгиси остида майдон бўйича квадратик ифода туриши керак. Фақат бу ҳолда майдон тенгламалари чизиқли тенгламалар бўлади, майдон тенгламалари таъсирни вариациялаш йўли билан олинади, вариациялашда эса интеграл остидаги ифоданинг даражаси 1 га пасаяди.

S_f таъсир ифодасига майдон потенциаллари кира олмайди, чунки улар бир қийматли аниқланган эмас (S_{mf} ифодасида бу бир қийматсизлик муҳим эмас эди). Шунинг учун S_f таъсир электромагнит майдон тензори $F_{\mu\nu}$ нинг қандайдир функциясидан олинган интеграл бўлиши керак. Лекин таъсир скаляр катталик бўлиши керак ва шунинг учун у бирор чин скалярдан олинган интеграл бўлиши керак. Фақат $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ кўпайтмагина ана шундай хоссали бўлади[1].

Шундай қилиб, S_f қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$S_f = a\iint F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}dV\,dt,\quad dV = dx\,dy\,dz,$$

бундаги интеграл координаталар бўйича бутун фазода, вақт бўйича эса берилган икки момент орасида олинади; a — бирорта ўзгармас катталик. Интеграл остида $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2)$ ифода турибди. **E** майдон таркиби-

---

[1] S_f ифодасида интеграл остидаги функция таркибида $F_{\mu\nu}$нинг ҳосилалари бўлмаслиги керак. чунки Лагранж функциясига системанинг координаталаридан ташқари, фақат уларнинг вақт бўйича биринчи ҳосилалари кириши мумкин, „координаталар" (яъни энг кичик таъсир принципида вариацияланувчи ўзгарувчилар) ролини эса бу ҳолда майдоннинг A_μ потенциаллари бажаради. Бу—механикада механикавий система учун Лагранж функцияси таркибига фақат зарралар координатлари ва уларнинг вақт бўйича биринчи ҳосилалари киришига ўхшашдир.

га $\partial \mathbf{A}/\partial t$ ҳосила киради. Лекин таъсир таркибига $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ нинг мусбат ишора билан (шунинг учун E^2 ҳам мусбат ишора билан) кириши кераклигини кўриш осон. Ҳақиқатан, агар S_f таркибига $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ манфий ишора билан кирганда эди, у ҳолда потенциални (қаралаётган вақт интервалида) вақт ўзгариши билан етарлича тез ўзгартириб, S_f ни доимо хоҳланганча катта абсолют қийматли манфий катталик қилиб олиш мумкин бўлар эди; S_f таъсир, бинобарин, энг кичик таъсир принципига зид равишда, минимумга эга бўлмас эди. Шундай қилиб, a манфий бўлиши керак.

a нинг сон қиймати майдонни ўлчаш бирликларининг танланишига боғлиқ. Дарвоқе, a нинг маълум қиймати танлаб олингандан кейин майдонни ўлчаш бирликлари билан бирга барча бошқа электромагнит катталикларни ўлчаш бирликлари ҳам аниқланади. Биз келгусида фақат *гаусс бирликлар системаси* деб аталувчи системадан фойдаланамиз: бу системада $a = -1/16\pi$ ўлчамсиз катталикдир.

Шундай қилиб, майдон учун таъсир қуйидаги кўринишга эга:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz. \tag{53.4}$$

Уч ўлчовли кўринишда

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{53.5}$$

Бошқача айтганда, майдон учун Лагранж функцияси

$$L_f = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2)\,dV. \tag{53.6}$$

Майдон билан унда жойлашган зарядлардан иборат система учун таъсир қуйидаги кўринишга эга:

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d\Omega. \tag{53.7}$$

Энди зарядлар, берилган майдонда заряд ҳаракати тенгламаларини чиқаришдагидек кичик деб ҳисобланмаслиги кераклигини қайд қилиб ўтамиз. Шунинг учун A_μ ва $F_{\mu\nu}$ лар чин майдонга (яъни зарядларнинг ўзи вужудга келтирган майдон билан ташқи майдон йиғиндисидан иборат майдонга) тегишли бўлади; A_μ ва $F_{\mu\nu}$ лар энди зарядларнинг вазияти ва тезликларига боғлиқ бўлади.

54- §. Токнинг тўрт ўлчовли вектори

Математика жиҳатдан қулай бўлишлиги мақсадида зарядларни нуқтавий деб текшириш ўрнига кўпинча зарядларни фазода узлуксиз тақсимланган деб кўрилади. У ҳолда ρ *заряд зичлиги* тушунчаси киритилади, бунда dV ҳажмда жойлашган заряд ρdV бўлади; умуман айтганда, ρ координаталар ва вақт функциясидир. ρ дан бирор ҳажм бўйича олинган интеграл шу ҳажмда жойлашган заряддир.

Шуни эсда тутиш керакки, ҳақиқатда, зарядлар нуқтавий бўладилар, шунинг учун ρ зичлик зарядлар жойлашган нуқталардан бошқа ҳамма жойда нолга тенг, $\int \rho dV$ интеграл эса мазкур ҳажмда жойлашган зарядлар йиғиндисига тенг бўлади. Шу сабабли ρ ни δ — функция¹⁾ ёрдамида қуйидаги кўринишда ёзса ҳам

---

[1] δ- функция $\delta(x)$ қуйидагича аниқланади: x нинг нолга тенг бўлмаган барча қийматлари учун $\delta(x) = 0$, лекин $x = 0$ бўлганда $\delta(0) = \infty$, аммо бунда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = 1. \tag{I}$$

Бу таърифга биноан. агар $f(x)$ ихтиёрий узлуксиз функция бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a); \tag{II}$$

хусусан,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) \tag{III}$$

(интеграллаш чегаралари албатта $\pm\infty$ бўлиши шарт эмас; δ—функция нолга тенг бўлмаган нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай соҳа интеграллаш соҳаси бўла олади).

$$\delta(-x) = \delta(x), \; \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{IV}$$

тенгликлар ҳам тўғридир; уларнинг маъноси шундаки, агар бу тенгликларнинг ўнг ва чап томонларини интеграл остидаги кўпайтувчилар сифатида қўлланилса, у ҳолда натижалар бир хил чиқади.

Бир ўзгарувчи x учун $\delta(x)$ таърифланганига ўхшаш, уч ўлчовли δ - функция $\delta(\mathbf{r})$ ни киритиш ҳам мумкин: $\delta(\mathbf{r})$ функция уч ўлчовли координаталар системаси бошидан бошқа ҳамма жойда нолга тенг ва ундан бутун фазо бўйича олинган интеграл 1 га тенг. Бундай функцияни $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ кўпайтма сифатида тасвирлаш мумкин.

бўлади:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a).$$

Зарранинг заряди ўз таърифига биноан инвариант, яъни у саноқ система танланишига боғлиқ эмас. Аксинча, ρ инвариант эмас, фақат ρdV кўпайтма инвариант бўла олади. $de = \rho dV$ тенгликнинг ҳар икки томонини dx^μ га кўпайтирамиз, у ҳолда

$$de\, dx^\mu = \rho\, dV\, dx^\mu = \rho\, dV\, dt \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Чап томонда 4- вектор турибди (чунки de — скаляр, dx^μ эса 4- вектор). Демак, ўнг томонда ҳам 4- вектор туриши керак. Лекин $dVdt$ скаляр, шунинг учун $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$ кўпайтма 4- вектор бўлади. Бу векторни (уни j^μ орқали белгилаймиз) *токнинг* тўрт ўлчовли вектори дейилади:

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \qquad (54.2)$$

Бу 4- векторнинг учта фазовий компонентлари *ток зичлигининг* уч ўлчовли векторини ҳосил қилади:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \qquad (54\ 3)$$

$\mathbf{V}$ — заряднинг мазкур нуқтадаги тезлиги. Ток 4- векторининг вақтни ўз ичига олган ташкил этувчиси $c\rho$ бўлади. Шундай қилиб,

$$j^\mu = (c\rho,\ \mathbf{j}). \qquad (54.4)$$

Ток 4- векторини таъсирнинг (53.7) ифодасига киритамиз ва бу ифодадаги иккинчи ҳад кўринишини ўзгартирамиз. Нуқтавий e зарядлар ўрнига ρ зичликли узлуксиз тақсимланган заряд тушунчасини киритиб, зарядлар бўйича йиғиндини бутун ҳажм бўйича интеграл билан алмаштириб, у ҳадни

$$-\frac{1}{c}\int \rho A_\mu dx^\mu dV$$

кўринищда ёзишимиз керак. Уни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$-\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu dV dt = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu d\Omega.$$

Шундай қилиб, тўла таъсир

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega. \qquad (54.5)$$

55- §. Узлуксизлик тенгламаси

Бирор ҳажмда жойлашган заряднинг вақт ўтиши билан ўзгариши

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV$$

ҳосила орқали ифодаланади. Бошқа томондан, бирлик вақтда заряд миқдорининг ўзгаришини шу вақтда мазкур ҳажмдан ташқарига чиқаётган ёки аксинча шу ҳажмга кираётган заряд миқдори орқали аниқланади. Ҳажмни чегаралаган сиртнинг $d\mathbf{f}$ элементи орқали бирлик вақтда ўтаётган заряд миқдори $\rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ (бунда $\mathbf{v}$ — фазонинг $d\mathbf{f}$ элемент жойлашган нуқтасидаги заряд тезлиги) га тенг. $d\mathbf{f}$ вектор, ҳамма вақт қабул қилинадиганидек, сиртга нисбатан ташқи нормал, яъни текширилаётган ҳажмдан ташқарига йўналтирилган нормал бўйлаб йўналган. Шунинг учун, агар заряд ҳажмдан чиқаётган бўлса, $\rho \mathbf{v} d\mathbf{f} \equiv \mathbf{j}\, d\mathbf{f}$ оқим мусбат, агар заряд ҳажмга кираётган бўлса, бу оқим манфий бўлади. Бирлик вақтда мазкур ҳажмдан чиқаётган заряд миқдори, бинобарин, $\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f}$ бўлади ва интеграл шу ҳажмни чегаралаган бутун ёпиқ сирт бўйича олинади.

Ҳосил қилинган иккала ифодани тенглаймиз:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \qquad (55.1)$$

Ўнгда минус ишора қўйилди, чунки, агар мазкур ҳажмдаги заряд орта борса, чап томон мусбат бўлади. Заряд сақланиш қонунини ифодаловчи бу тенглама интеграл кўринишда ёзилган *узлуксизлик тенгламаси* деб аталади.

Худди шу тенгламани дифференциал кўринишда ёзайлик. (55.1) нинг ўнг томонига Гаусс теоремасини қўллаб:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \mathrm{div}\, \mathbf{j}\, dV,$$

қуйидагини оламиз:

$$\int\left(\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV=0.$$

Ҳар қандай ҳажм бўйича интеграл олинганда ҳам бу тенглик бажарилиши шартлигидан интеграл остидаги ифода нолга тенг бўлиши керак:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \qquad (55.2)$$

Бу — дифференциал кўринишдаги узлуксизлик тенгламаси ρ учун δ-функциялар кўринишидаги (54.1) ифода узлуксизлик тенгламасини автоматик равишда қаноатлантиришга ишонч ҳосил қилиш осон. Соддалик учун, фақат битта заряд бор деб, фараз қиламиз, у ҳолда

$$\rho=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

ва

$$\mathbf{j}=e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

бўлади, бу ерда $\mathbf{v}$ — заряд тезлиги. $\partial\rho/\partial t$ ҳосилани топайлик. Заряд ҳаракатланганда, унинг координаталари, яъни $\mathbf{r}_0$ ўзгаради. Шунинг учун

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0}\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Лекин $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$ ҳосила заряд тезлиги $\mathbf{v}$ нинг худди ўзидир. Сўнгра, ρ катталик $r-r_0$ нинг функцияси бўлгани учун

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0}=-\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}.$$

Бинобарин,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathbf{v}\operatorname{grad}\rho=-\operatorname{div}\rho\mathbf{v}$$

(заряд тезлиги $\mathbf{v}$, албатта, $\mathbf{r}$ га боғлиқ эмас). Шундай қилиб, биз (55.2) тенгламага келдик.

Тўрт ўлчовли шаклда (55 2) узлуксизлик тенгламаси токнинг 4- вектори 4- дивергенциясининг нолга тенглиги кўринишида ифодаланади:

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0. \qquad (55.3)$$

56- §. Максвелл тенгламаларининг иккинчи жуфти

Энг кичик таъсир принципига кўра майдон тенгламаларини топишда, биз зарядлар ҳаракати берилган деб ҳисоблашимиз ва систéманинг „умумлашган координаталари“ ролини ўйновчи майдон потенциалларини вариациялашимиз керак (зарра ҳаракати тенгламаларини топишда эса биз, аксинча, майдонни берилган деб ҳисоблаган ва зарра траекториясини вариациялаган эдик). Бу ишни тўрт ўлчовли кўринишда қилиш қулай.

Айтилганига кўра (54.5) даги биринчи ҳаднинг вариацияси нолга тенг, иккинчи ҳадда эса j^{μ} ток вариацияланмаслиги керак. Шундай қилиб,

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^{\mu}\delta A_{\mu}+\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right]d\Omega=0$$

(иккинчи ҳадни вариациялашда $F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}$ эканлиги ҳисобга олинган), $\delta F_{\mu\nu}$ кўпайтувчида

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

ифодани қўйсак,

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^{\mu}\delta A_{\mu}+\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta A_{\nu}-F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta A_{\mu}\right\}d\Omega.$$

Иккинчи ҳадда μ ва ν индекс ўринларини ҳамда $F^{\nu\mu}$ ни $F^{\mu\nu}$ га алмаштирамиз. Шундан кейин иккинчи ва учинчи ҳадлар бир хил бўлиб қолади, бинобарин,

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^{\mu}\delta A_{\mu}-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta A_{\mu}\right\}d\Omega.$$

Сўнгра,

$$-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta A_{\mu}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(F^{\mu\nu}\delta A_{\mu})+\frac{1}{4\pi}\delta A_{\mu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}$$

тенгликни ёзиб олсак ва биринчи ҳаддан олинадиган интегралга нисбатан тўрт ўлчовли (38.7) Гаусс теоремасини қўлласак:

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^{\mu}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\right\}\delta A_{\mu}d\Omega-$$

$$-\frac{1}{4\pi c}\int F^{\mu\nu}\delta A_{\mu}dS_{\nu}. \qquad (56.1)$$

Охирги ҳадда унинг интеграллаш чегараларидаги қиймати назарда тутилади. Майдон йўқ бўлиб кетадиган фазовий чексизлик координаталар бўйича интеграллаш чегаралари бўлади. Вақт бўйича интеграллаш чегараларида, яъни вақтнинг бошланғич ва охирги моментларида, потенциаллар вариацияси нолга тенг бўлади, чунки энг кичик таъсир принципига кўра бу моментларда потенциаллар маълум деб ҳисобланади. Шундай қилиб, (56.1) даги биринчи ҳад нолга тенг ва биз минимумлик шартини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$\int \left(\frac{1}{c} j^{\mu} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) \delta A_{\mu} \, d\Omega = 0.$$

δA_{μ} вариацияларнинг ихтиёрийлиги туфайли қавс ичидаги интеграл ости ифоданинг нолга тенглиги келиб чиқади, шунга кўра

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \qquad (56.2)$$

Бу тўртта ($\mu = 0, 1, 2, 3$) тенгламани уч ўлчовли шаклда қайта ёзиб оламиз. $\mu = 1$ бўлганда

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^{1)}.$$

$F^{\mu\nu}$ тензорнинг ташкил этувчиларини ўрнига қўйсак,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Бу тенгламалар кейинги ($\mu = 2, 3$) икки тенглама билан биргаликда битта вектор тенглама кўринишида ёзилиши мумкин:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \qquad (56.3)$$

Ниҳоят, $\mu = 0$ бўлганда, қуйидаги тенглама келиб чиқади:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (56.4)$$

(56.3) ва (56.4) тенгламалар Максвелл тенгламаларининг1) изланаётган иккинчи жуфтини ташкил қиладилар. Иккала жуфт тенгламалар электромагнит майдонни тўла аниқлайди ва улар шундай майдонлар назарияси—*электродинамиканинг* асосий тенгламаларидир.

Иккинчи жуфт тенгламаларни интеграл ҳолида ёзайлик. (56.4) ни бирор ҳажм бўйича интеграллсак ва Гаусс теоремаси

$$\int \mathrm{div}\,\mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E} d\mathbf{f}$$

ни қўлласак, у ҳолда

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV \qquad (56.5)$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, ёпиқ сирт орқали электр майдон оқими шу сирт билан чегараланган ҳажмдаги тўла заряд миқдорини 4π га кўпайтмасига тенгдир.

(56.3) ни бирор ёпиқ бўлмаган сирт бўйича интеграллсак ва Стокс теоремаси

$$\int \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l}$$

ни қўлласак, у ҳолда

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}\, d\mathbf{f} \qquad (56.6)$$

чиқади. Ушбу

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (56.7)$$

катталикни *силжиш токи* дейилади.

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f}$$

ҳолда ўзгартириб ёзилган (56.6) тенгламадан кўринишича, магнит майдоннинг бирор контур бўйича циркуляцияси шу контур билан чегараланган сирт орқали оқаётган ҳақиқий ва силжиш токлари йиғиндисининг $\frac{4\pi}{c}$ га кўпайтмасига тенгдир.

Бизга маълум бўлган узлуксизлик тенгламасини Максвелл тенгламаларидан келтириб чиқариш мумкин. (56.3) нинг ҳар икки томонидан дивергенция олсак, у ҳолда

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathrm{div}\,\mathbf{j}$$

---

1) Нуқтавий зарядлар жойлашган бўшлиқдаги электромагнит майдон учун ўринли бўлган Максвелл тенгламаларини Лоренц тузган.

ҳосил бўлади. Лекин, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \equiv 0$ ни ва $\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ ўрнига (56.4) қийматни ҳисобга олсак, (55.2) тенглама ҳосил бўлади.

57- §. Энергия зичлиги ва оқими

(56.3) тенгламанинг ҳар икки томонини **E** га, (52.1) тенгламанинг ҳар икки томонини **H** га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - (\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}).$$

Вектор анализнинг

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$$

формуласидан фойдаланиб, юқоридаги муносабатни қуйидаги кўринишда қайта ёзамиз:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \mathrm{div}\,[\mathbf{EH}]$$

ёки

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \mathrm{div}\mathbf{S}. \qquad (57.1)$$

Бундаги

$$\mathbf{S} = \frac{4}{4\pi}[\mathbf{EH}] \qquad (57.2)$$

векторни *Пойнтинг вектори* дейилади.

(57.1) ни бирор ҳажм бўйича интеграллаймиз ва ўнгдаги иккинчи ҳадга Гаусс теоремасини қўллаймиз. У ҳолда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,dV = -\int \mathbf{jE}\,dV - \oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \qquad (57.3)$$

Агар интеграллашни бутун фазо бўйича олинса, у ҳолда сирт бўйича интеграл йўқолади (чексизликда майдон нолга тенг). Сўнгра, $\int \mathbf{jE}dV$ интегрални майдондаги бутун зарядлар бўйича олинадиган $\sum e\mathbf{vE}$ йиғинди кўринишида ёзамиз ва (44.7) га мувофиқ

$$e\mathbf{vE} = \frac{d}{dt}\mathscr{E}_{\text{кин}}$$

ифодани ўрнига қўямиз. У ҳолда (57.3) қуйидаги ҳолга келади:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\frac{E^2 + H^2}{8\pi}dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = 0. \qquad (57.4)$$

Шундай қилиб, электромагнит майдон ва унда жойлашган зарядлардан иборат ёпиқ система учун ёзилган тенгламадаги қавс ичида турган катталик ўзгармайди. Бу ифоданинг иккинчи ҳади кинетик энергиядир (барча зарраларнинг тинч ҳолдаги энергияси билан бирга; 166- бетдаги изоҳни қаранг); бинобарин, биринчи ҳад эса электромагнит майдон энергиясидир.

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \qquad (57.5)$$

катталикни электромагнит майдон *энергиясининг зичлиги* дейилади; у майдоннинг бирлик ҳажми энергиясидир.

(57.3) даги сиртий интеграл бирор чекли ҳажм бўйича интеграллашда, умуман айтганда, йўқолмайди, шунинг учун бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\frac{E^2 + H^2}{8\pi}dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}, \qquad (57.6)$$

бунда энди қавсдаги иккинчи ҳадда йиғинди фақат кўрилаётган ҳажмдаги зарралар бўйича олинади. Чапда майдон билан зарралар тўла энергиясининг вақт бирлигида ўзгариши турибди. Шунинг учун $\oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}$ интегрални мазкур ҳажмни чегаралаган сирт орқали майдон энергияси оқими деб қаралиши керак, бинобарин, **S** Пойнтинг вектори шу оқимнинг зичлиги, яъни бирлик сирт орқали бирлик вақтда оқиб ўтувчи энергия миқдоридир.

58- §. Импульс зичлиги ва оқими

Электромагнит майдон энергия билан бир қаторда, шунингдек, фазода маълум зичликда тақсимланган импульсга ҳам эга бўлади. Импульс зичлиги ифодасини олдинги параграфдагига ўхшаш ҳолда келтириб чиқариш мумкин.

$$\int\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]dV$$

интегралдан вақт бўйича олинган ҳосилани ҳисоблайлик. Интеграл остида дифференциаллаш ўтказиб ва $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ва $\partial\mathbf{H}/\partial t$ ҳосилаларни Максвелл тенгламаларига биноан алмаштириб, қуйидагини оламиз:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}\,dV=\frac{1}{4\pi c}\int\left[\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]dV+\frac{1}{4\pi c}\int\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,\mathbf{H}\right]dV=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int\{[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]+[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]\}\,dV-\frac{1}{c}\int[\mathbf{jH}]\,dV.$$

Биринчи интеграл остидаги ифодани вектор анализнинг

$$\nabla(\mathbf{ab})=[\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}]+[\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}]+(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}+(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$$

формуласи ёрдамида алмаштирамиз. Унга мувофиқ

$$[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]=\frac{1}{2}\nabla E^2-(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}.$$

Бундан ташқари,

$$(\mathbf{E}\nabla)\,\mathbf{E}=(\nabla\mathbf{E})\,\mathbf{E}-\mathbf{E}(\nabla\mathbf{E})$$

алмаштириш ўтказамиз, бундаги $(\nabla\mathbf{E})\,\mathbf{E}$ ҳадда ∇ оператор ўзидан кейинги ҳар икки кўпайтувчига таъсир этади деб ҳисобланади. Ниҳоят, (56.4) Максвелл тенгламасига мувофиқ $\nabla\mathbf{E}\equiv\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]=\frac{1}{2}\nabla E^2-(\nabla\mathbf{E})\,\mathbf{E}+4\pi\rho\,\mathbf{E}.$$

Худди шунга ўхшаш ҳолда $[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]$ кўпайтма алмаштирилади, лекин $\operatorname{div}\mathbf{H}-0$ бўлганлигидан

$$[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]=\frac{1}{2}\nabla H^2-(\nabla\mathbf{H})\mathbf{H}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}\,dV=$$
$$=-\int\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\nabla(E^2+H^2)-(\nabla\mathbf{E}(\mathbf{E}-(\nabla\mathbf{H})\,\mathbf{H}\right\}dV-$$
$$-\int\left\{\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,[\mathbf{jH}]\right\}dV. \qquad (58.1)$$

Биринчи интеграл остидаги ифодада ∇ операторлар ўзидан кейинда турган барча кўпайтувчиларга таъсир қилади Вектор анализ қоидаларига (Гаусс теоремасининг умумий таърифланишига) мувофиқ, бу интегрални $dV\cdot\nabla$ операторни сирт элементи $d\mathbf{f}$ га ўзгартириш йўли билан сирт бўйича интегралга алмаштирилади. Зичлик ва зарядлар токини ўз ичига олган иккинчи интегралда эса мазкур ҳажм ичидаги нуқтавий зарядлар бўйича йиғинди шаклидаги ёзувга ўтамиз. Натижада (58.1) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}\,dV=$$
$$=-\oint\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{E^2+H^2}{2}\,d\mathbf{f}-\mathbf{E}(\mathbf{E}\,d\mathbf{f})-\mathbf{H}(\mathbf{H}\,d\mathbf{f})\right\}-$$
$$-\sum e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right). \qquad (58.2)$$

Агар интеграллаш бутун фазо бўйича бажарилса, у ҳолда чексиз узоқлашган сирт бўйича интеграл нолга айланади. (58.2) даги йиғинди белгиси остидаги ифода эса зарядга таъсир қилувчи кучдир. Уни (44 5) ҳаракат тенгламасига мувофиқ зарра импульсидан олинган $d\mathbf{p}/dt$ ҳосила билан алмаштириш мумкин. У ҳолда (58 2) тенглик

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}\,dV+\sum\mathbf{p}\right\}=0 \qquad (58.3$$

кўринишда тасвирланади. Бу, равшанки, (зарралар+майдон) системаси тўла импульсининг сақланиш қонунини ифодалайди. Катта қавсдаги биринчи ҳад, бинобарин, электромагнит майдон импульсидир, ундаги интеграл ости ифодасини эса импульс зичлиги деб қараш мумкин; уни $\mathbf{P}^{(\text{эм})}$ деб белгилаймиз:

$$\mathbf{P}^{(\text{эм})}=\frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}=\frac{\mathbf{S}}{c^2}. \qquad (58\,4)$$

Демак, импульс зичлиги $1/c^2$ ўзгармас кўпайтувчигача аниқликда майдон энергияси оқимининг зичлигига мос тушар экан.

Агар (58.2) нинг чап томонида интеграллашни майдоннинг бирор чекли ҳажми бўйича олинса, у ҳолда сирт бўйича интеграл нолга тенг бўлмайди. Уни

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{E^2+H^2}{2}\,\delta_{ik}-E_iE_k-H_iH_k\right\} \qquad (58.5)$$

уч ўлчовли тензор киритиб ихчамроқ кўринишда ёзамиз. Ейиқ кўринишда бу тензор компонентлари

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_x E_y + H_x H_y)$$

ва ҳ. к.

(58.2) даги сиртий интеграл остидаги ифода вектордир; (58.5) тензор ёрдамида унинг i-компоненти $\sigma_{ik} df_k$ кўринишда ёзилади. Шундай қилиб, компонентлар орқали тасвирланган импульс сақланишининг вектор тенгламаси — (58.2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \int P_i^{(\text{эм})} dV + \sum p_i \right\} = -\oint \sigma_{ik}\, df_k. \qquad (58.6)$$

Демак, тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл текширилаётган ҳажмдан чиқаётган майдон импульсининг оқимини тасвирлайди. $\sigma_{ik} df_k$ кўпайтма эса сиртнинг $d\mathbf{f}$ элементи орқали импульс оқимидир. Таърифга кўра, $d\mathbf{f}$ вектор сиртга ташқи нормал бўйлаб йўналган. Агар бирлик нормал векторни **N** орқали белгиласак, бунда $d\mathbf{f} = \mathbf{N} df$. У ҳолда

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} N_k df$$

ва биз $\sigma_{ik} N_k$ компонентларга эга бўлган векторнинг **N** йўналишдаги импульс зичлиги, яъни **N** га перпендикуляр бўлган бирлик юза орқали оқим эканлигини кўрамиз. (58.5)дан σ_{ik} ни келтириб қўйиб,

$$\frac{1}{4\pi}\left\{ \frac{E^2 + H^2}{2}\mathbf{N} - \mathbf{E}(\mathbf{NE}) - \mathbf{H}(\mathbf{NH}) \right\} \qquad (58.7)$$

векторни топамиз: σ_{ik} тензорни *кучланишларнинг максвелл тензори* дейилади. Юқорида айтилганларга мувофиқ, i — компонент x^k йўналишида импульснинг i— компоненти оқим зичлигидир. Кучланишлар тензори (58.5) да кўринганидек, симметрик ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$) тензор эканлигини қайд қиламиз.

XII боб

ЎЗГАРМАС ЭЛЕКТРОМАГНИТ МАЙДОН

59-§. Кулон қонуни

Ўзгармас электр *(электростатик)* майдон учун Максвелл тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad (59.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \qquad (59.2)$$

E электр майдон фақат скаляр потенциал орқали ифодаланади:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (59.3)$$

(59.3) ни (59.1) га қўйиб, ўзгармас электр майдон потенциали қаноатлантирадиган тенгламани топамиз:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \qquad (59,4)$$

Бу тенглама *Пуассон тенгламаси* дейилади. Бўшлиқда, яъни $\rho = 0$ бўлганида, потенциал *Лаплас тенгламасини* қаноатлантиради:

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (59.5)$$

Кейинги тенгламага кўра, хусусан, электр майдон потенциали ҳеч қаерда на максимумга, на минимумга эга бўла олади Ҳақиқатан, φ экстремал қийматга эга бўлиши учун, φ дан координаталар бўйича олинган барча ҳосилалар нолга тенг бўлиши, $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ иккинчи ҳосилалар эса бир хил ишорали бўлиши зарур. Аммо кейинги шарт бажарилмайди, чунки акс ҳолда (59.5) тенглама қаноатлантирилмайди.

Энди нуқтавий заряд майдонини аниқлаймиз. Симметрия мулоҳазаларига кўра бу майдон ҳар бир нуқтада, e заряд жойлашган нуқтадан ўтказилган радиус-вектор бўйича йўналган бўлади. Ўша мулоҳазалардан E майдоннинг абсолют катталиги фақат зарядгача бўлган R масофага боғлиқ бўлишлиги келиб чиқади. Шу абсолют катталикни топиш учун (59.1) тенгламанинг (56.5) интеграл шаклидан фойдаланамиз. e заряд атрофидаги R радиусли сферик сирт орқали электр майдон оқими $4\pi R^2 E$ га тенг; бу оқим $4\pi e$ га тенг бўлиши ҳам керак. Шунга кўра

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

Вектор кўринишда

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \qquad (59.6)$$

Шундай қилиб, нуқтавий заряд вужудга келтирган майдон заряд ўрнидан бошлаб ҳисобланган масофанинг квадратига тескари пропорционал *(Кулон қонуни).* Бу майдоннинг потенциали

$$\varphi=\frac{e}{R}. \qquad (59.6)$$

Агар биз зарядлар системасига эга бўлсак, у ҳолда вужудга келган майдон, суперпозиция принципига мувофиқ, ҳар бир заряд алоҳида вужудга келтирган майдонлар йиғиндисига тенг бўлади. Бундай майдоннинг потенциали

$$\varphi=\sum_a \frac{e_a}{R_a}. \qquad (59.8)$$

Бундаги R_a масофа e_a заряд жойлашган нуқтадан потенциал қидирилаётган нуқтагача бўлган масофа. Агар заряд зичлиги ρ киритилса, у ҳолда бу формула

$$\varphi=\int\frac{\rho}{R}dV \qquad (59.9)$$

кўринишни олади, бундаги R—ҳажм элементи dV дан майдоннинг мазкур нуқтасигача („кузатиш нуқтасигача“) бўлган масофа.

ρ ва φ ларнинг нуқтавий зарядга тегишли қийматларини, яъни $\rho=e\delta(\mathbf{R})$ ва $\varphi=e/R$ ларни (59.4) га қўйсак, қуйидаги

$$\nabla\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\mathbf{R}) \qquad (59.10)$$

математикавий муносабат ҳосил бўлади.

60-§. Зарядларнинг электростатик энергияси

Зарядлар системасининг потенциал энергиясини аниқлайлик. Бунда биз майдон энергияси тасаввурига, яъни энергия зичлигининг (57.5) ифодасига асосланамиз. Зарядлар системанинг энергияси

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2 dV$$

бўлиши керак, бундаги $\mathbf{E}$ шу зарядлар вужудга келтирган майдон, интеграл эса бутун фазо бўйича олинади. Бу ифодага $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ ни қўйиб, U нинг кўринишини ўзгартириш мумкин:

$$U=-\frac{1}{8\pi}\int\mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi\, dV=-\frac{1}{8\pi}\int\operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)dV+\frac{2}{8\pi}\int\varphi\operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Ўнг томондаги интегралларнинг биринчиси, Гаусс теоремасига мувофиқ, интеграллаш ҳажмини чегаралаган сирт бўйича $\mathbf{E}\varphi$ дан олинган интегралга тенг; аммо интеграллаш бутун фазо бўйича бажарилаётганлиги ва чексизликда майдон нолга тенг бўлганлиги сабабли, бу интеграл йўқолади. Иккинчи интегралга $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ ни қўйиб, зарядлар системасининг энергияси учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\, dV. \qquad (60.1)$$

Нуқтавий e_a зарядлар системаси учун интеграл ўрнига зарядлар бўйича

$$U=\frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a \qquad (60.2)$$

йиғиндини ёзиш мумкин, бундаги φ_a— барча зарядлар майдонининг e_a заряд турган нуқтадаги потенциали.

(59.8) га мувофиқ

$$\varphi_a=\sum_b\frac{e_b}{R_{ab}},$$

бундаги R_{ab} масофа e_a ва e_b зарядлар орасидаги масофадир. Нуқтавий зарядлар системаси учун бу ифода таркибида чексиз ҳад бор, у e_a заряднинг хусусий майдони потенциалидан келиб чиққан (йиғиндининг $b=a$ ва $R_{aa}=0$ бўлган ҳади). Шунга мувофиқ энергиянинг (60.2) ифодасида зарядларнинг ўзаро жойлашишига боғлиқ бўлмаган, ўзгармас чексиз катталик пайдо бўлади. Энергиянинг бу қисми—зарядларнинг „хусусий“ потенциал энергияси—физикавий маънога эга эмас (қуйига қ.) ва у ўчирилиши керак. Шундан сўнг фақат зарядларнинг жойлашишига боғлиқ бўлган ўзаро таъсир энергияси

$$U'=\frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a' \qquad (60.3)$$

қолади, бундаги

$$\varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}}. \qquad (60.4)$$

e_a заряддан бошқа барча зарядлар ва жойлашган нуқтада вужудга келтирган потенциал. Бошқача қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \qquad (60.5)$$

Хусусан, икки заряднинг ўзаро таъсир энергияси:

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \qquad (60.6)$$

Юқорида эслаб ўтилган элементар зарядли зарранинг чексиз шахсий энергияси масаласига қайтайлик. У, заррани нуқтавий деб қараш оқибатида пайдо бўлди. Лекин бундай қараш—классик (квантавий эмас) релятивистик назарияда нисбийлик назариясининг асосий принципларига биноан муқаррардир.

Ҳақиқатан ҳам, классик назарияда элементар зарра ҳақида гапирилганда механикавий ҳолати координаталар ва ҳаракат тезлиги орқали аниқланадиган бир бутун зарра тушунилади. Агар шундай зарра чўзиқ ўлчамли бўлганда эди, уни, ҳар ҳолда, абсолют қаттиқ жисм (яъни деформацияланмайдиган жисм) сифатида қараш керак бўлар эди, чунки деформация тушунчасининг ўзи жисмнинг айрим қисмларининг мустақил кўчиш имкониятига боғлиқдир. Лекин релятивистик механикада абсолют қаттиқ жисмларнинг мавжуд бўлиши мумкин эмас. Бу хулоса қуйидаги мулоҳазалардан кўринади.

Қаттиқ жисм унинг қандайдир бир нуқтасида ташқи таъсир бўлишидан ҳаракатга келади, дейлик. Агар жисм абсолют қаттиқ бўлганида эди, у ҳолда унинг барча нуқталари таъсир қилинган нуқта билан бир вақтда ҳаракат қила бошлаши керак бўлар эди; акс ҳолда жисм деформацияланарди. Лекин, ўзаро таъсирлар тарқалиши тезлиги чекли бўлганлиги туфайли, таъсир дастлабки нуқтадан бошқа нуқталарга чекли тезлик билан узатилади ва шунинг учун жисмнинг барча нуқталари бир вақтда ҳаракатлана олмайди.

Шундай қилиб, электродинамикага мувофиқ электрон чексиз „хусусий“ энергияга, бинобарин, чексиз массага эга бўлишлиги керак бўлар эди. Бу натижанинг физика нуқтаи назаридан маъносизлиги, етарлича кичик масофаларга ўтганда, электродинамиканинг (мантиқан ёпиқ физикавий назария сифатида) ички зиддий бўлиб қолишлигини кўрсатади. Бундай масофаларнинг миқдорий тартиби қандай, деган савол қўйилиши мумкин. Бу саволга қуйидагича жавоб берилиши мумкин. Электроннинг хусусий электромагнит энергияси учун тинчликдаги энергиясининг катталиги mc^2 тартибидаги қиймат олиниши кераклигини таъкидлаймиз. Агар иккинчи томондан, электронни бирон-бир r_e ўлчамли зарра деб ҳисобланса, у ҳолда унинг хусусий потенциал энергияси e^2/r_e тартибда бўлар эди. Шу икки катталикнинг бир хил тартибда, яъни $e^2/r_e \sim mc^2$ бўлишлиги талабидан

$$r_e \sim \frac{e^2}{mc^2} \qquad (60.7)$$

муносабат олинади. Бу ўлчам электроннинг „радиуси“ дейилади ва у электродинамиканинг (унинг асосий принципларидан келиб чиқувчи) электронга татбиқининг чегарасини аниқлайди. Аммо, бу ерда баён қилинаётган классик электродинамиканинг қўлланиш чегаралари, ҳақиқатда, квантавий ҳодисалар туфайли[1] анча юқорида ётишлигини назарда тутиш керак.

61- §. Текис ҳаракатланаётган заряд майдони

V тезлик билан текис ҳаракатланаётган e заряднинг майдонини аниқлайлик. Қўзғалмас саноқ системасини K система деймиз; заряд билан бирга ҳаракатланувчи системани K' система деймиз. Заряд K' системанинг координаталар бошида жойлашган бўлсин; K' система K га нисбатан x ўқига параллел ҳаракат қилади; y ва z ўқлар y' ва z' ўқларга параллел $t=0$ вақт моментида иккала системанинг боши устма-уст тушади. Бино-

---

[1] Квантавий эффектлар $\hbar/mc$ (бу ерда $\hbar$—Планк доимийси) тартибдаги масофаларда сезиларли даражада бўлади.

барин, заряднинг K системадаги координаталари $x = Vt$, $y = z = 0$ бўлади. Биз K' системада ўзгармас

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3} \tag{61.1}$$

электр майдонга эгамиз, магнит майдони эса йўқ.

K системага ўтиш (50.5) формулалар бўйича амалга оширилади, уларга кўра

$$E_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{61.2}$$

Энди R', x', y', z' ларни K системадаги x, y, z координаталар орқали ифодалашимиз керак. Лоренц алмаштириш формулаларига мувофиқ

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

ва бундан

$$\mathbf{R}'^2 = \frac{R^{*2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{61.3}$$

бу ерда

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \tag{61.4}$$

Бу ифодаларни (61.2) га қўйсак:

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{61.5}$$

бу ердаги $\mathbf{R} - e$ заряддан кузатиш нуқтаси (x, y, z) га ўтказилган радиус-вектор (унинг компонентлари $x - \mathbf{V}t$, y, z га тенг).

$\mathbf{E}$ учун бу ифодани бошқа кўринишда ёзиш учун ҳаракат йўналиши ва $\mathbf{R}$ радиус-вектор орасидаги θ бурчакни киритамиз. Равшанки, $y^2 + z^2 = R^2\sin^2\theta$, шунинг учун

$$R^{*2} = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right).$$

У ҳолда $\mathbf{E}$ учун қуйидагини оламиз:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\,\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{61.6}$$

Зарядгача бўлган R масофа учун θ нолдан $\pi/2$ гача ўсганида (ёки π дан $\pi/2$ гача камайганида) E майдон катталашади. Ҳаракат йўналишига параллел йўналишда ($\theta = 0,\pi$) майдоннинг қиймати энг кичик бўлади:

$$E_\parallel = \frac{e}{R^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Тезликка перпендикуляр йўналишда ($\theta = \pi/2$) эса майдон энг катта бўлади:

$$E_\perp = \frac{e}{R^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тезлик ортганида $E_\parallel$ камаяди, $E_\perp$ эса ортади. Ҳаракатланаётган заряднинг электр майдони ҳаракат йўналишида гўё „қисилади“ дейиш мумкин. Ёруғлик тезлигига яқин V тезликларда θ нинг $\theta = \pi/2$ яқинидаги қийматларининг тор интервалида (61.6) формуланинг махражи нолга яқин бўлади. Бу интервалнинг „кенглиги“

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

катталик тартибида бўлади. Шундай қилиб, тез ҳаракатланаётган заряднинг ундан маълум масофадаги электр майдони экваториал текислик яқинидаги тор интервалдагина нолдан сезиларли фарқ қилади,бунда интервал кенглиги V ортиши билан $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ каби камаяди. K системада магнит майдони

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{VE}] \tag{61.7}$$

[(50.7) га қ.]. Хусусан, $V \ll c$ бўлганида электр майдони, тақрибан, Кулон қонунининг оддий формуласи $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$ билан ифодаланади ва бу ҳолда

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c}\,\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3} \tag{61.8}$$

бўлади.

Масала

Бир хил **V** тезлик билан ҳаракатланаётган икки заряд орасидаги ўзаро таъсир кучи (K системада) аниқлансин.

Ечилиши. Изланаётган **F** кучни биринчи зарядга (e_1) иккинчи заряд (e_2) ҳосил қилган майдонда таъсир қилаётган куч сифатида ҳисоблаймиз. (61.7) ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{F}=e_1\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{H}_2]=e_1\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c^2}\mathbf{V}\,(\mathbf{V}\mathbf{E}_2).$$

Бунга (61.6) дан $\mathbf{E}_2$ ни келтириб қўйиб, кучнинг ҳаракат йўналишидаги (F_x) ва унга перпендикуляр бўлган (F_y) ташкил этувчиларини топамиз:

$$F_x=\frac{e_1e_2}{R^2}\,\frac{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},\qquad F_y=\frac{e_1e_2}{R^2}\,\frac{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^2\sin\theta}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},$$

бу ерда **R** вектор — e_2 дан e_1 га йўналган радиус-вектор, θ эса — **R** ва **V** орасидаги бурчак.

62- §. Диполь моменти

Зарядлар системасининг унинг ўлчамларига нисбатан катта бўлган масофаларда вужудга келтирган майдонини текширайлик.

Координаталар боши зарядлар системаси ичидаги бирор нуқтада бўлган система киритамиз. Алоҳида зарядларнинг радиус-векторлари r_a бўлсин. Барча зарядларнинг $\mathbf{R}_0$ радиус-векторли нуқтадаги майдонининг потенциали:

$$\varphi=\sum\frac{e_a}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a|}\tag{62.1}$$

(йиғинди барча зарядлар бўйича олинади), бунда ($\mathbf{R}_0-r_0$) векторлар e_a зарядлардан потенциали аниқланаётган нуқтага ўтказилган радиус-векторлар.

Биз бу ифодани катта $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0\gg\mathbf{r}_a$) лар учун текширишимиз керак. Бунинг учун

$$f(\mathbf{R}_0-\mathbf{r})\approx f(R_0)-f\,\mathrm{grad}\,f(\mathbf{R}_0)$$

формуладан фойдаланиб (grad да дифференциаллаш $\mathbf{R}_0$ вектор учининг координаталари бўйича бажарилади), (62.1) ни $\mathbf{r}_a/R_0$ даражалари бўйича қаторга ёямиз. Биринчи тартибли ҳадларгача аниқликда

$$\varphi=\frac{\Sigma e_a}{R_0}-\mathrm{grad}\,\frac{1}{R_0}\cdot\sum e_a\mathbf{r}_a.\tag{62.2}$$

$$\mathbf{d}=\sum e_a\mathbf{r}_a\tag{62.3}$$

йиғинди зарядлар системасининг *диполь моменти* дейилади

Муҳими шуки, агар барча зарядлар йиғиндиси $\sum e_a$ нолга тенг бўлса, у ҳолда диполь моменти координаталар бошини танлашга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан, бир заряднинг турли икки системадаги радиус-векторлари $\mathbf{r}_a$ ва $\mathbf{r}'_a$ бир-бири билан

$$\mathbf{r}'_a=\mathbf{r}_a+\mathbf{a}$$

муносабат ёрдамида боғланган, бу ерда **a** — бирор ўзгармас вектор. Шунинг учун, агар $\sum e_a=0$ бўлса, у ҳолда ҳар икки системадаги диполь моменти бир хил бўлади:

$$\mathbf{d}'=\sum e_a\mathbf{r}'_a=\sum e_a\mathbf{r}_a+\mathbf{a}\sum e_a=\mathbf{d}.$$

Хусусан, қарама-қарши ишорали икки заряд ($\pm e$) системаси учун диполь момент $\mathbf{d}=e\mathbf{r}$ бўлади, бундаги **r** вектор $-e$ заряддан $+e$ зарядга ўтказилган радиус-вектор.

Агар системанинг тўла заряди нолга тенг бўлса, у ҳолда унинг майдон потенциали катта масофаларда қуйидагича бўлади:

$$\varphi=-\mathbf{d}\nabla\frac{1}{R_0^3}=\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3}.\tag{62.4}$$

Майдон кучланганлиги

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3}=-\frac{1}{R_0^3}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)-(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R_0^3}$$

ёки, узил-кесил,

$$\mathbf{E}=\frac{3\,(\mathbf{n}\mathbf{d})\,\mathbf{n}-\mathbf{d}}{R_0^3},\tag{62.5}$$

бундаги **n** — бирлик вектор $\mathbf{R}_0$ йўналишда олинган.

Шундай қилиб, тўла заряди нолга тенг бўлган система майдонининг катта масофалардаги потенциали масофанинг квадратига, майдон кучланганлик эса масофанинг кубига тескари пропорционалдир. Бу майдон **d** йўналиш атрофида аксиал симметрияга эга. Бу йўналиш (уни z ўқи сифатида танлаймиз) орқали ўтган текисликда **E** векторнинг компонентлари:

$$E_z = d\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3},\quad E_x = d\,\frac{3\sin\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{62.6}$$

Шу текисликдаги радиал ва тангенциал ташкил этувчилар:

$$E_R = d\,\frac{2\cos\theta}{R_0^3},\quad E_\theta = -d\,\frac{\sin\theta}{R_0^3}.$$

63- §. Квадруполь момент

Потенциалнинг $1/R_0$ даражалари бўйича

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots \tag{63.1}$$

ёйилмасида $\varphi^{(n)}$ ҳад $1/R_0^{n+1}$ га пропорционал. $\varphi^{(0)}$ биринчи ҳад барча зарядлар йиғиндиси билан аниқланишини кўрган эдик; $\varphi^{(1)}$ — системанинг диполь моменти деб аталадиган иккинчи ҳад системанинг диполь моменти билан аниқланади.

Ёйилманинг учинчи ҳади

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{1}{R_0} \tag{63.2}$$

бўлиб, бунда йиғинди барча зарядлар бўйича олинади; заряд номерини кўрсатувчи индексни бу ерда тушириб қолдирдик; x_i — вектор **r** нинг, X_i эса $\mathbf{R}_0$ векторнинг компонентлари. Потенциалнинг бу қисмини квадруполь потенциал дейилади. Агар зарядлар йиғиндиси ва системанинг диполь моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда ёйилма $\varphi^{(2)}$ ҳаддан бошланади.

(63.2) ифодага олтита $\sum e x_i x_k$ катталиклар киради. Аммо, ҳақиқатда, майдон олтита эмас, балки фақат бешта мустақил катталикларга боғлиқлигини кўриш осон. Бу хулоса $1/R_0$ функциянинг Лаплас тенгламасини қаноатлантиришидан келиб чиқади:

$$\Delta\frac{1}{R_0} \equiv \delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{1}{R_0} = 0.$$

Шунинг учун $\varphi^{(2)}$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e\left(x_i x_k - \frac{1}{3}r^2\delta_{ik}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{1}{R_0}.$$

Ушбу

$$D_{ik} = \sum e\,(3x_i x_k - r^2\delta_{ik})$$

тензорни система *квадруполь моментининг тензори* дейилади. D_{ik} нинг таърифидан унинг диагонал ташкил этувчилари йиғиндиси нолга тенглиги келиб чиқади:

$$D_{ii} = 0. \tag{63.4}$$

Шунинг учун симметрик D_{ik} тензор ҳаммаси бўлиб бешта мустақил ташкил этувчига эгадир. Унинг ёрдамида

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{1}{R_0} \tag{63.5}$$

деб ёзиш мумкин ёки дифференциаллаш амалини бажарсак:

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{1}{R_0} = \frac{3X_i X_k}{R_0^5} - \frac{\delta_{ik}}{R_0^3}$$

ва $\delta_{ik}D_{ik} = D_{ii} = 0$ эканлигидан

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik}n_i n_k}{2R_0^3}. \tag{63.6}$$

Ҳар қандай симметрик уч ўлчовли тензор каби D_{ik} тензор ҳам бош ўқларга келтирилиши мумкин. Бунда (63.4) шарт туфайли умумий ҳолда учта бош қийматлардан фақат иккитасигина мустақил бўлади.

Агар зарядлар системаси бирор ўққа (z ўққа)1) нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда шу ўқ D_{ik} тензорнинг бош ўқларидан бири бўлади, бошқа икки ўқнинг xy текисликдаги вазияти ихтиёрий ҳамда учала бош қиймат ўзаро боғланган:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}. \tag{63.7}$$

D_{zz} компонентни D деб белгилаб (бу ҳолда уни, одат-

---

1) Иккинчи тартибдан юқори бўлган ихтиёрий симметрия ўқи назарда тутилади.

да, содда қилиб, квадруполь момент дейилади) қуйидаги потенциал ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^b}(3\cos^2\theta - 1), \tag{63.8}$$

бунда θ — R_0 ва r ўқ орасидаги бурчак.

Олдинги параграфда диполь момент учун исбот қилингани сингари қуйидаги натижани чиқариш осон: агар системанинг тўла заряди ҳамда унинг диполь моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда системанинг квадруполь моменти координаталар бошининг танланишига боғлиқ эмас.

(63.1) ёйилманинг кейинги ҳадларини шунга ўхшаш ҳолда ёзиб олиш мумкин. Ёйилманинг l- ҳади l рангли 2^l-поль момент тензори орқали аниқланади. Бу тензор барча индекслари бўйича симметрик бўлади ва индексларнинг ихтиёрий жуфти бўйича йиғишда нолга айланади; бундай тензор $2l + 1$ та мустақил компонентларга эга.

Масала

Бир жинсли зарядланган эллипсоиданинг ўз марказига нисбатан квадруполь моменти аниқлансин.

Ечилиши. (63.3) да йиғиндини эллипсоида ҳажми бўйича интеграллаш билан алмаштирамиз:

$$D_{xx} = \rho \iint (2x^2 - y^2 - z^2)\, dx\ dy\ dz \text{ ва ҳ. к,}$$

25-§ га оид 2-д масалада қилингани сингари, эллипсоида ҳажми бўйича интеграллашни сфера ҳажми бўйича интеграллаш билан алмаштириш мумкин. Натижада

$$D_{xx} = \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \qquad D_{yy} = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{e}{5}(2c^2 - a^2 - b^2)$$

ни топамиз, бундаги $e = \frac{4\pi}{3} abc\rho$ — эллипсоиданинг тўла заряди.

64-§. Ташқи майдондаги зарядлар системаси

Ташқи электр майдондаги зарядлар системасини текширайлик. Бу ташқи майдон потенциалини $\varphi(\mathbf{r})$ орқали белгилаймиз. Ҳар бир заряднинг потенциал энергияси

$e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$ га тенг, системанинг тўла потенциал энергияси эса

$$U = \sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}a) \tag{64.1}$$

бўлади Координаталар системасини яна боши зарядлар системаси ичидаги ихтиёрий нуқтада жойлашган ҳолда танлаймиз; $\mathbf{r}_a$ вектор e_a заряднинг шу координаталар системасидаги радиус-вектори.

Ташқи майдон зарядлар системаси соҳасида оз ўзгаради, яъни у бу системага нисбатан *квази бир жинсли* деб фараз қилайлик. У ҳолда U энергияни $\mathbf{r}_a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиш мумкин. Ушбу

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \tag{64.2}$$

ёйилмадаги биринчи ҳад

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a \tag{64.3}$$

бўлади, бундаги φ_0 — потенциалнинг координаталар бошидаги қиймати. Бу яқинлашишда система энергиясининг ифодаси худди барча зарядлар бир нуқтада жойлашгандагидек бўлади.

Ёйилманинг иккинчи ҳади

$$U^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi)_0 \cdot \sum e_a\mathbf{r}_a.$$

Координаталар бошидаги кучланганликни $\mathbf{E}_0$ ва диполь моментни d орқали белгиласак, у ҳолда

$$U^{(1)} = -\mathbf{d}\mathbf{E}_0 \tag{64.4}$$

Ташқи квази бир жинсли майдонда системага таъсир қилувчи тўла куч (қараб чиқилган ҳадларгача аниқлик билан)

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + (\operatorname{grad}\mathbf{d}\mathbf{E})_0.$$

Агар тўла заряд нолга тенг бўлса, биринчи ҳад йўқолади ва у ҳолда

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla)\,\mathbf{E}, \tag{64.5}$$

яъни куч майдон кучланганлигининг (координаталар бошида олинган) ҳосилалари билан аниқланади. Системага таъсир қилувчи кучларнинг тўла моменти

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a\mathbf{E}_0] = [\mathbf{d}\mathbf{E}_0] \tag{64.6}$$

бўлади, яъни майдон кучланганлигининг ўзи билан аниқланади.

Ҳар бирида зарядлар йиғиндиси нолга тенг ва диполь моментлари $\mathbf{d}_1$ ва $\mathbf{d}_2$ бўлган икки системани текширайлик; системалар орасидаги R масофа уларнинг ўз ўлчамларидан анча катта. Бу системаларнинг U ўзаро таъсири потенциал энергиясини аниқлайлик. Бунинг учун улардан бирини иккинчисининг майдонида жойлашган деб қараш мумкин. У ҳолда $U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1$, бу ерда $\mathbf{E}_1$ — биринчи система майдони. $\mathbf{E}_1$ ўрнига (62.5) ифодани қўямиз:

$$U = \frac{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\mathbf{n})}{R^3}, \tag{64.7}$$

бу ерда $\mathbf{n}$ — бир системадан иккинчисига томон йўналишдаги бирлик вектор.

Системалардан бирининг зарядлар йиғиндиси нолга тенг бўлмаган (ва e га тенг бўлган) ҳол учун юқоридагига ўхшаш йўл билан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$U = e\frac{\mathbf{dn}}{R^2} \tag{64.8}$$

($\mathbf{n}$ — диполдан зарядга томон йўналишдаги бирлик вектор). (64.1) ёйилманинг навбатдаги ҳади

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_i x_k \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_i \partial x_k}$$

бўлади. Бу ерда биз худди 63-§ дагидек, заряд номерини кўрсатадиган индексларни тушириб қолдирдик; потенциалнинг иккинчи ҳосилалари қийматлари координаталар бошида олинади. Аммо φ потенциал Лаплас тенгламасини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \delta_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Шунинг учун

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_i \partial x_k}\sum e\left(x_i x_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}r^2\right),$$

ёки, узил-кесил

$$U^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{64.9}$$

65-§. Ўзгармас магнит майдон

Финит ҳаракат қилаётган (бунда зарралар ҳамма вақт фазонинг чекли соҳасида бўлади, уларнинг импульслари ҳам ҳамма вақт чекли қолади) зарядларнинг магнит майдонини текширайлик. Бундай ҳаракат стационар характерли бўлади ва зарядлар вужудга келтирган ўртача (вақт бўйича) магнит майдонни текшириш қизиқиш уйғотади; бу майдон энди вақтнинг эмас, балки фақат координаталар функциясидир, яъни у ўзгармас бўлади.

Ўртача магнит майдонни аниқлайдиган тенгламаларни топиш мақсадида

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Максвелл тенгламаларини вақт бўйича ўртачалаштирамиз.

Биринчи тенгламадан

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{65.1}$$

Иккинчи тенгламада $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ҳосиланинг ўртача қиймати (умуман, чекли оралиқда ўзгарувчи ҳар қандай катталик ҳосиласининг ўртача қиймати сингари) нолга тенг бўлади1). Шунинг учун Максвеллнинг иккинчи тенгламаси

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}} \tag{65.2}$$

кўринишни олади. Бу икки тенглама ўзгармас $\overline{\mathbf{H}}$ майдонни аниқлайди.

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}$$

тенгламага мувофиқ ўртача $\overline{\mathbf{A}}$ вектор потенциал киритамиз ва уни (65.2) га қўямиз:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}} - \Delta\overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

---

1) f ана шундай катталик бўлсин. У ҳолда бирор T вақт интервалида df/dt ҳосиланинг ўртача қиймати.

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^7 \frac{df}{dt}dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

$f(t)$ фақат чекли интервалда ўзгарадиган бўлгани учун 7 чексиз ортганида бу ўртача қиймат ҳақиқатан ҳам нолга интилади.

Лекин, майдоннинг вектор потенциали бир қийматли аниқланмаганлиги учун унга нисбатан қўшимча шарт қўйиш мумкинлигини биламиз. Шу асосда $\overline{\mathbf{A}}$ потенциални

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} = 0 \qquad (65.3)$$

бўладиган қилиб танлаб оламиз У ҳолда, ўзгармас магнит майдоннинг вектор потенциалини аниқлайдиган тенглама

$$\Delta \overline{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \overline{\mathbf{j}} \qquad (65.4)$$

кўринишни олади.

Бу тенглама ечимини топиш осон. (65.4) тенглама ўзгармас электр майдоннинг скаляр потенциали учун (59.4) Пуассон тенгламасига деярли ўхшаш (ρ заряд зичлиги ўрнида $\overline{\mathbf{j}}/c$ ток зичлиги турибди). Пуассон тенгламасининг (59.9) ечимига ўхшаш қилиб,

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} dV$$

деб ёзишимиз мумкин (R — майдоннинг кузатиш нуқтасидан dV ҳажм элементигача бўлган масофа).

(65.5) формулада $\mathbf{j}$ ўрнига $\rho\mathbf{v}$ кўпайтмани қўйиб ва барча зарядлар нуқтавий эканлигини эсда тутиб, интегрални зарядлар бўйича йиғиндига алмаштириш мумкин. Бу ҳолда қуйидагини назарда тутиш зарур: (65.5) интегралда R интеграллаш ўзгарувчиси холос ва шунинг учун у ўртачалаштирилмайди. Агар $\int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$ интеграл ўрнига $\sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}$ йиғинди ёзилса, у ҳолда $\mathbf{R}_a$ лар айрим зарраларнинг зарядлар ҳаракати вақтида ўзгариб турувчи радиус-векторлари бўлади. Шунинг учун

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}}$$

деб ёзиш керак, бунда чизиқ остидаги бутун ифода ўртачалаштирилади. $\overline{\mathbf{A}}$ ни билгач майдон кучланганлигини топиш мумкин

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} dV.$$

rot операцияси кузатиш нуқтаси координаталари бўйича бажарилади. Шунинг учун rot ни интеграл белгиси остига киритиш ва дифференциаллашда $\mathbf{j}$ ни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин. Маълум

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}]$$

формулани (бунда f ва $\mathbf{a}$ ихтиёрий скаляр ва вектор) $\mathbf{j} \cdot \frac{1}{R}$ кўпайтмага қўлласак,

$$\operatorname{rot} \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R} \cdot \overline{\mathbf{j}}\right] = \frac{\overline{[\mathbf{j}\,\mathbf{R}]}}{R^3},$$

ва бинобарин

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3} dV$$

($\mathbf{R}$ радиус-вектор dV дан майдон кузатиш нуқтасига йўналган). Бу ифода — *Био ва Савар* қонунидир.

66-§. Магнит момент

Стационар ҳаракатланаётган зарядлар системасининг ўртача магнит майдонини системадан катта масофаларда текширамиз. 62-§ дагига ўхшаш, координаталар системаси бошини зарядлар системаси ичида, ихтиёрий ерда танлаб оламиз. Алоҳида зарядлар радиус-векторларини яна $\mathbf{r}_a$ деб, майдон текширилаётган нуқта радиус-векторини $\mathbf{R}_0$ деб белгилаймиз. У ҳолда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ айирма e_a заряддан кузатиш нуқтасига ўтказилган радиус-вектордир. (65.6) га мувофиқ, вектор потенциал учун ушбу ифодани ёза оламиз:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}}. \qquad (66.1)$$

Худди 62-§ дагидек, бу ифодани $\mathbf{r}_a$ даражалари бўйича қаторга ёямиз. Биринчи тартибли ҳадларгача аниқликда (қисқалик учун a индексни тушириб қолдирамиз):

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e\overline{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla \frac{1}{R_0}\right)}.$$

Биринчи ҳадда

$$\sum e\overline{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \overline{\sum e\mathbf{r}}$$

деб ёзиш мумкин.

Чекли оралиқда ўзгарувчи $\sum e\mathbf{r}$ катталикдан олинган ҳосиланинг ўртача қиймати нолга тенг. Шундай қилиб,

$$\overline{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)} = \frac{1}{cR_0^3}\sum \overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

ифода қолади. Уни қуйидагича ўзгартирамиз $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ бўлгани учун ($\mathbf{R}_0$ ўзгармас вектор эканини эсда тутган ҳолда):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum e\,[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

Бу ифодани $\mathbf{A}$ нинг ифодасига қўйганда вақт бўйича ҳосилали биринчи ҳаднинг ўртача қиймати яна нолга айланади ва

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum \overline{e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)]}$$

қолади. Системанинг *магнит моменти* деб аталувчи

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}] \qquad (66.2)$$

вектор киритамиз. У ҳолда

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\mathbf{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla\frac{1}{R_0}\cdot\overline{\mathbf{m}}\right]. \qquad (66.3)$$

Вектор потенциални билган ҳолда, магнит майдон кучланганлигини топиш осон.

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

формула ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\left[\overline{\mathbf{m}}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right] = \overline{\mathbf{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathbf{m}}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Сўнгра

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

ва

$$(\overline{\mathbf{m}}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}(\overline{\mathbf{m}}\nabla)\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\overline{\mathbf{m}}\nabla\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\overline{\mathbf{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\mathbf{m}}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}$$

Шундай қилиб,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathbf{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathbf{m}}}{R_0^3}, \qquad (66.4)$$

бу ерда $\mathbf{n}$ — яна $\mathbf{R}_0$ йўналишидаги бирлик вектор. Электр майдон диполь момент орқали ((62.5) га қ.) ифодалангани каби, магнит майдон ҳам магнит момент орқали худди ўшандай формула билан ифодаланади.

Агар системанинг барча зарралари учун заряднинг массага нисбати бир хил бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \frac{e}{2mc}\sum m[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

Агар барча зарядлар тезлиги $v \ll c$ бўлса, у ҳолда $m\mathbf{v}$ кўпайтма заряднинг $\mathbf{p}$ импульсидир. Бинобарин,

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{r}\mathbf{p}] = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \qquad (66.5)$$

бу ерда $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{r}\mathbf{p}]$ система импульсининг механикавий моментидир. Шундай қилиб, бу ҳолда магнит моментнинг механикавий моментга нисбати ўзгармас ва у $e/2mc$ га тенгдир.

Масала

Икки заряддан ташкил топган система учун (тезликлар $v \ll c$) магнит ва механикавий моментлар нисбати аниқлансин.

Ечилиши. Координаталар бошини иккала зарранинг инерция марказида жойлаштирсак, $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ ва $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ бўлади, бунда $\mathbf{p}$ — нисбий ҳаракат импульси. Бу муносабатлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{M},$$

67-§. Лармор прецессияси

Ташқи ўзгармас бир жинсли магнит майдондаги зарядлар системасини текширайлик.

Системага таъсир этувчи вақт бўйича ўртача куч

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum\frac{e}{c}\overline{[\mathbf{v}\mathbf{H}]} = \frac{d}{dt}\overline{\sum\frac{e}{c}[\mathbf{r}\mathbf{H}]}$$

чекли интервалда ўзгарадиган ҳар қандай катталикдан вақт бўйича олинган ҳосиланинг ўртача қиймати сифатида нолга айланади. Куч моментининг ўртача қиймати

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum\frac{e}{c}\overline{[\mathbf{r}[\mathbf{v}\mathbf{H}]]}$$

эса нолдан фарқ қилади. Уни система магнит моменти орқали ифодалаш мумкин, бунинг учун қўш вектор кўпайтмани очиб ёзамиз:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c}\,\{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}(\mathbf{vr})\} = \sum \frac{e}{c}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \frac{1}{2}\mathbf{H}\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2\right\}.$$

Ўртачалаштиришда иккинчи ҳад нолга айланади, шунинг учун ҳам

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} = \frac{1}{2c}\sum e\,\overline{\{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \mathbf{r}(\mathbf{vH})\}}$$

(кейинги алмаштириш (66.3) ни чиқаришдагига ўхшашдир), ёки, ниҳоят,

$$\overline{\mathbf{K}} = [\overline{\mathbf{m}}\mathbf{H}]. \qquad (67.1)$$

Электр майдон ҳоли учун чиқарилган (64.6) формула билан (67.1) формуланинг ўхшашлигига эътибор берайлик.

Бирор қўзғалмас зарранинг марказий симметрик майдонида $v \ll c$ тезлик билан финит ҳаракат қилаётган зарядли зарралар системасини масалан, атом ичида ядро майдонида ҳаракатланаётган электронлар системаси) текширайлик. Бу система кучсиз бир жинсли магнит майдонда жойлашган деб фараз қилайлик.

Ташқи майдон бўлмаганида системанинг **M** механикавий тўла моменти ўзгармай қолади. Кучсиз магнит майдоннинг борлиги **M** нинг вақт ўтиши билан секин ўзгаришига олиб келади. Бу ўзгаришнинг характерини кўриб чиқайлик. Бунда зарраларнинг тез ўзгарувчи асосий ҳаракатининг системадаги таъсирини бартараф қилиш мақсадида **M** ни шу ҳаракат даврлари бўйича ўртачалаштирамиз.

Механиканинг маълум бўлган тенгламасига кўра [(27.3) га қ.]

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = \overline{\mathbf{K}},$$

бунда $\overline{\mathbf{K}}$ — системага таъсир қилаётган ташқи кучлар моменти бўлиб, уни ҳам **M** ўртачалаштирилган вақт интервали бўйича ўртачалаштирилган. (67.1) ва (66.5) ларга мувофиқ

$$\mathbf{K} = [\overline{\mathbf{m}}\mathbf{H}] = \frac{e}{2mc}\,[\overline{\mathbf{M}}\mathbf{H}].$$

Шунинг учун

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = -[\mathbf{\Omega}\overline{\mathbf{M}}], \qquad (67.2)$$

бунда

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc}\mathbf{H}. \qquad (67.3)$$

(67.2) кўринишидаги тенглама $\overline{\mathbf{M}}$ векторнинг (у билан бирга $\overline{\mathbf{m}}$ магнит моментнинг ҳам) майдон йўналиши атрофида Ω бурчак тезлик билан айланишини билдиради, бунда **M** векторнинг абсолют катталиги ва унинг шу йўналиш билан тузган бурчаги сақланади. Бу ҳодисани *Лармор прецессияси*, (67.3) бурчак тезликни эса *Лармор частотаси* дейилади.

Энди биз юқорида, майдон етарлича кучсиз бўлиши керак деганда, нимани назарда тутганимизни аниқлаймиз: бунинг учун Ω Лармор частотаси системадаги зарядларнинг шахсий финит ҳаракат частоталарига нисбатан кичик бўлиши талаб қилинади. Равшанки, фақат шундай шароитдагина юқорида кўрсатилган тарзда ўртачалаштирилган моментнинг вақт ўтиши билан ўзгаришини текшириш маънога эга бўлади.

XIII боб

ЭЛЕКТРОМАГНИТ ТЎЛҚИНЛАР

68-§. Тўлқин тенглама

$\rho = 0$ ва $\mathbf{j} = 0$ деб олинган Максвелл тенгламалари бўшлиқдаги электромагнит майдонни аниқлайди. Уларни яна бир марта эслайлик:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad (68.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \qquad (68.2)$$

Бу тенгламалар нолдан фарқли ечимларга эга бўла олади. Бу эса электромагнит майдон ҳатто ҳар қандай зарядлар йўқ бўлганда ҳам мавжуд бўла олади демакдир.

Зарядлар йўқ ҳолда бўшлиқда мавжуд бўладиган электромагнит майдонларни *электромагнит тўлқинлар* дейилади. Энди биз шундай майдонлар хоссаларини текширамиз.

Даставвал, бу майдонлар, албатта, ўзгарувчан бўлиши кераклигини таъкидлаймиз. Ҳақиқатан, акс ҳолда $\partial\mathbf{H}/\partial t=\partial\mathbf{E}/\partial t=0$ ва (68.1 — 2) тенгламалар ўзгармас майдоннинг (59.1 — 2) тенгламаларига айланади, бироқ энди уларда $\rho=0$ ва $\mathbf{j}=0$. Аммо бу тенгламаларнинг (59.9) ва (65.5) формулалар билан аниқланган ечимлари $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$ бўлганида нолга айланади.

Электромагнит тўлқинлар потенциалларини аниқловчи тенгламаларни чиқарамиз.

Маълумки, потенциалларнинг бир қийматсизлиги туфайли уларга нисбатан ҳамма вақт бирорта қўшимча шарт қўйиш мумкин. Шу асосда электромагнит тўлқинлар потенциалларини скаляр потенциал

$$\varphi=0 \tag{68.3}$$

бўладиган қилиб танлаймиз. У ҳолда

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{68.4}$$

Бу иккала ифодани (68.2) тенгламаларнинг биринчисига қўйсак:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\Delta\mathbf{A}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{68.5}$$

Потенциалларга нисбатан битта қўшимча шарт қўйганимизга қарамай, **A** потенциал ҳали тамомила бир қийматли эмас. Унга вақтга боғлиқ бўлмаган ихтиёрий функциянинг градиентини қўшиш мумкин (бунда φ ўзгармаслиги керак). Хусусан, электромагнит тўлқинлар потенциалини

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0 \tag{68.6}$$

бўладиган қилиб танлаш мумкин. Ҳақиқатан, (68.4) даги **E** ни $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$ га қўйсак,

$$\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=0,$$

яъни $\operatorname{div}\mathbf{A}$ фақат координаталар функцияси экан. Бу

функцияни ҳамма вақт вақтга боғлиқ бўлмаган тегишли функция градиентини **A** га қўшиш йўли билан нолга айлантириш мумкин.

(68.5) тенглама энди қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0. \tag{68.7}$$

Бу тенглама электромагнит тўлқинлар потенциалини аниқловчи тенглама бўлиб, уни *д' Аламбер тенгламаси* ёки *тўлқин тенглама* дейилади.

(68.7) га rot ва $\partial/\partial t$ операцияларини қўллаб **E** ва **H** кучланганликлар худди шундай тўлқин тенгламаларни қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз.

69-§. Ясси тўлқинлар

Майдони фақат битта координата, айтайлик, (x) га ва вақтга боғлиқ бўлган электромагнит тўлқинларнинг хусусий ҳолини текширайлик. Бундай тўлқинларни *ясси тўлқинлар* дейилади. Бу ҳолда майдон тенгламалари

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \tag{69.1}$$

кўринишни олади, бунда f ҳарфи **E** ва **H** векторларнинг ихтиёрий ташкил этувчисини билдиради.

(69.1) ни ечиш учун уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0.$$

Янги ўзгарувчилар

$$\xi=t-\frac{x}{c},\quad \eta=t+\frac{x}{c}$$

ни киритамиз, бундан

$$t=\frac{1}{2}(\eta+\xi),\quad x=\frac{c}{2}(\eta-\xi).$$

У ҳолда

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ва f учун тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

Равшанки, унинг ечими

$$f=f_1(\xi)+f_2(\eta)$$

кўринишда бўлиб, бундаги f_1 ва f_2 лар ихтиёрий функциялардир. Шундай қилиб,

$$f=f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{c}\right). \qquad (69.2)$$

Масалан, $f_2=0$ бўлса. У ҳолда $f=f_1(t-x/c)$. Бу ечимнинг маъносини аниқлайлик. Ҳар бир $x=\text{const}$ текисликда майдон вақт ўтиши билан ўзгариб туради; ҳар бир вақт моментида майдон турли x лар учун турлича. Равшанки, $t-x/c=\text{const}$, яъни

$$x=\text{const}+ct$$

муносабатни қаноатлантирувчи x координаталар ва t вақт моментлари учун майдон бир хил қийматга эга бўлади. Бу агар бирор $t=0$ моментда фазонинг бирор x нуқтасида майдон маълум қийматга эга бўлган бўлса, у ҳолда t вақт оралиғидан кейин майдон дастлабки жойдан x ўқи бўйича ct масофада узоқликда майдон худди ўша қийматга эга бўлади, демакдир. Электромагнит майдоннинг барча қийматлари фазода x ўқи бўйлаб c ёруғлик тезлигига тенг тезлик билан тарқалади дейишимиз мумкин. Шундай қилиб, $f_1(t-x/c)$ функция x ўқининг мусбат йўналишида $f_2(t+x/c)$ функция эса x ўқининг қарама-қарши (манфий) йўналишида тарқалувчи тўлқинни тасвирлайди.

Электромагнит тўлқин потенциалини $\varphi=0$ ва $\text{div}\,\mathbf{A}=0$ бўладиган қилиб, танлаб олиш мумкинлиги олдинги параграфда кўрсатилган эди.

Текширилаётган ясси тўлқин потенциалларини худди ўшандай тарзда танлаймиз. Бу ҳолда $\text{div}\,\mathbf{A}=0$ шарт

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0$$

ни беради, чунки барча катталиклар y ва z га боғлиқмас. У ҳолда (69.1) га мувофиқ $\partial^2 A_x/\partial t^2=0$, яъни $\partial A_x/\partial t=\text{const}$ бўлади. Лекин, $\partial\mathbf{A}/\partial t$ ҳосила электр майдонни аниқлайди, ва демак, нолдан фарқли A_x ташкил этувчининг мавжудлиги ўзгармас бўйлама электр майдон борлигини билдирган бўлур эди. Бундай майдон электромагнит майдонга алоқадор бўлмаганлиги учун $A_x=0$ деб ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, ясси тўлқин вектор-потенциали x ўқига, яъни шу тўлқиннинг тарқалиш йўналишига, перпендикуляр қилиб танланиши мумкин.

x ўқининг мусбат йўналиши бўйлаб тарқалувчи ясси тўлқинни текширайлик; бундай тўлқинда барча катталиклар, хусусан $\mathbf{A}$ ҳам, фақат $t-x/c$ нинг функциялари бўлади. Шунинг учун

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H}=\text{rot}\,\mathbf{A}$$

формулалардан

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\mathbf{A}',\ \mathbf{H}=[\nabla\mathbf{A}]=\left[\nabla\left(t-\frac{x}{c}\right)\cdot\mathbf{A}'\right]=$$

$$=-\frac{1}{c}[\mathbf{n}\mathbf{A}'], \qquad (69.3)$$

бундаги штрих $t-x/c$ бўйича дифференциаллашни билдиради, m эса тўлқин тарқалиши йўналишидаги бирлик вектор. Биринчи тенгликни иккинчисига қўйсак,

$$\mathbf{H}=[\mathbf{n}\mathbf{E}]. \qquad (69.4)$$

Ясси тўлқиннинг $\mathbf{E}$ ва $\mathbf{H}$ электр ва магнит майдонлари тўлқин тарқалиши йўналишига перпендикуляр экан. Шу асосда электромагнит тўлқинларни *кўндаланг тўлқинлар* дейилади. (69.4) дан ясси тўлқиннинг электр ва магнит майдонлари бир-бирига перпендикуляр ва абсолют қиймати жиҳатидан бир хил бўлишлиги ҳам кўринади.

Ясси тўлқинда энергия оқими:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]=\frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

Шундай қилиб, энергия оқими ва тўлқин тарқалишининг йўналишлари бир хил. $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=\frac{E^2}{4\pi}$ ифода тўлқин энергиясининг зичлиги бўлганлигидан ва майдон c ёруғлик тезлиги билан тарқалишидан

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}. \tag{69.5}$$

Электромагнит майдон бирлик ҳажмининг импульси $\mathbf{S}/c^2$ га тенг. Ясси тўлқин учун бу $(W/c)\mathbf{n}$ ни беради. Электромагнит майдон энергияси W ва импульси W/c орасидаги муносабат худди ёруғлик тезлигига тенг тезлик билан ҳаракатланаётган зарралар учун олинган муносабатдек ((39.12) ни қаранг) бўлади.

Майдон импульси оқимини Максвеллнинг кучланишлар тензори σ_{ik} (58.5) билан ифодаланади. Илгаригидек, тўлқин тарқалишининг йўналиши сифатида x ўқини танласак, ёлғизгина σ_{xx} ташкил этувчи нолдан фарқли бўлади:

$$\sigma_{xx} = W. \tag{69.6}$$

Кутилганидек, импульс оқими тўлқин тарқалишига мос йўналган ва катталик жиҳатдан энергия зичлигига тенгдир.

Масала

Ясси электромагнит тўлқин деворга тушиб қайтади (қайтариш коэффициенти R га тенг). Шу деворга таъсир этаётган куч аниқлансин.

Ечилиши. Деворнинг бирлик юзасига таъсир қилувчи $\mathbf{f}$ куч шу юз орқали ўтувчи импульс оқими билан аниқланади, яъни f куч ташкил этувчилари

$$f_i = \sigma_{ik} N_k + \sigma'_{ik} N_k$$

бўлган вектордир, бундаги $\mathbf{N}$ — девор сиртига нормал бўлган вектор, σ_{ik} ва σ'_{ik} лар тушаётган ва қайтаётган тўлқинлар кучланишлари тензорларининг ташкил этувчилари. (69.6) ни ҳисобга олсак,

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{N}\mathbf{n}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{N}\mathbf{n}').$$

бўлади. Қайтариш коэффициентининг таърифига кўра $W' = RW$. Тушиш бурчаги θ ни (ва унга тенг қайтиш бурчагини) киритиб ва ташкил этувчиларга ўтиб, нормал (*ёруғлик босими*) ҳамда тангенциал кучларни топамиз:

$$f_N = W(1 + R)\cos^2\theta,$$

$$f_t = (1 - R)\sin\theta\cos\theta.$$

70-§. Монохроматик ясси тўлқин

Майдони вақтнинг содда даврий функцияси бўлган тўлқин электромагнит тўлқинларнинг муҳим хусусий ҳолидир. Бундай тўлқинни *монохроматик тўлқин* дейилади. Монохроматик тўлқинни ифодаловчи барча катталиклар (потенциаллар, майдонларнинг компонентлари) вақтга $\cos(\omega t + \alpha)$ кўринишидаги кўпайтувчи воситасида боғланган бўлади, бу ерда ω — тўлқиннинг *циклик частотаси* (ёки, соддароқ, *частотаси*).

x ўқи бўйлаб тарқалаётган ясси тўлқин майдони фақат $t - x/c$ га боғлиқ бўлади. Шунинг учун, агар ясси тўлқин монохроматик бўлса, у ҳолда унинг майдони $t - x/c$ нинг содда даврий функцияси бўлади. Бундай тўлқиннинг вектор потенциалини

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t - x/c)}\} \tag{70.1}$$

комплекс ифоданинг ҳақиқий қисми кўринишида ёзиш жуда қулайдир. Бу ерда $\mathbf{A}_0$ — қандайдир ўзгармас комплекс вектор. Равшанки, бундай тўлқинда $\mathbf{E}$ ва $\mathbf{H}$ кучланганликлар ҳам ω частотали (70.1) га ўхшаш кўринишда бўлади.

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{70.2}$$

катталикни *тўлқин узунлик* дейилади; у x координатали майдоннинг t вақт моментидаги ўзгариш давридир.

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} \tag{70.3}$$

векторни (бунда $\mathbf{n}$ — тўлқин тарқалиши йўналишидаги бирлик вектор) *тўлқин вектор* дейилади. Унинг ёрдамида (70.1) ни координата ўқларининг танланишига боғлиқ бўлмайдиган

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\} \tag{70.4}$$

кўринишда тасвирлаш мумкин. Кўрсаткичда i кўпайтувчи билан турган катталик тўлқин *фазаси* дейилади.

Биз катталиклар устида фақат чизиқли операциялар бажарар эканмиз, ҳақиқий қисмни олиш белгисини тушириб қолдириш ва комплекс катталиклар билан иш кўриш мумкин[1]). Шунга кўра

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

катталикни (69.3) га қўйсак, ясси монохроматик тўлқиннинг кучланганликлари ва вектор потенциали орасидаги муносабатлар ҳосил бўлади:

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A},\quad \mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]. \qquad (70.5)$$

Монохроматик тўлқин майдонининг йўналиши тўғрисидаги масалани батафсилроқ текширайлик. Аниқлик учун

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}$$

электр майдон тўғрисида сўз юритамиз (қуйидаги гапларнинг ҳаммаси, ўз-ўзидан маълумки, бир хил даражада магнит майдонига ҳам тегишли). $\mathbf{E}_0$ – комплекс вектор. Унинг квадрати $\mathbf{E}_0^2$ ҳам, умуман айтганда, бирор комплекс сондир. Агар бу соннинг аргументи—2α (яъни $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2|\, e^{-2i\alpha}$) бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha} \qquad (70.6)$$

ифодага мувофиқ аниқланадиган $\mathbf{b}$ векторнинг квадрати $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}|_0^2$ ҳақиқий бўлади. Шу таърифга асосан

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{b} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\alpha)}\} \qquad (70.7)$$

$\mathbf{b}$ ни

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$$

кўринишда тасвирлаймиз, бундаги $\mathbf{b}_1$ ва $\mathbf{b}_2$ икки ҳақиқий вектор. $\mathbf{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ квадрат ҳақиқий катталик бўлганлиги учун $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, яъни $\mathbf{b}_1$ ва $\mathbf{b}_2$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади. $\mathbf{b}_1$ вектор йўналишини y ўқи сифатида танлаймиз (x ўқ тўлқин тарқалиши йўналишида). У ҳолда (70.7) дан

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), E_z = \pm\, b_2 \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) \qquad (70.8)$$

ифодаларни оламиз, бунда плюс ёки минус ишоранинг бўлиши $\mathbf{b}_2$ вектор йўналиши z ўқининг мусбат ёки манфий йўналишига мос келишига боғлиқ. (70.8) га кўра

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \qquad (70.9)$$

Шундай қилиб, электр майдон вектори фазонинг ҳар бир нуқтасида тўлқин тарқалиши йўналишига перпендикуляр текисликда айланади, унинг учи (70.9) эллипс чизади. Бундай тўлқинни *эллиптик қутбланган* тўлқин дейилади. $\mathbf{E}$ векторнинг айланиши, (70.8) ифода ишорасининг плюс ёки минус бўлишлигига мос равишда, x ўқи бўйлаб ҳаракатланувчи винтнинг буралиш йўналиши бўйича ёки унга қарама-қарши йўналишда бўлади.

Агар $b_1 = b_2$ бўлса, у ҳолда (70.9) эллипс ўрнига доира ҳосил бўлади, яъни $\mathbf{E}$ (катталик жиҳатдан ўзгармасдан) айланади. Бу ҳолда *тўлқин доиравий қутбланган* дейилади. Бунда y ва z ўқларни ихтиёрий танлаб олинади. Бундай тўлқинда $\mathbf{E}_0$ комплекс амплитуданинг y- ва z- ташкил этувчилари нисбати винт айланиши бўйича ва унга қарама-қарши бўлган йўналишга (*ўнг* ва *чап* қутбланишга) мос равишда

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \qquad (70.10)$$

бўлади[1].

---

[1] Агар қандайдир иккита $\mathbf{A}(t)$ ва $\mathbf{B}(t)$ катталик

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t},\quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$$

комплекс кўринишда ёзилса у ҳолда уларнинг кўпайтмасини тузишда даставвал ҳақиқий қисмни ажратиш керак, албатта. Лекин. агар бизни бу кўпайтманинг фақат вақт бўйича ўртача қиймати қизиқтирса, у ҳолда уни

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\mathbf{AB}^*\}$$

кўринишда ҳисоблаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{A}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{B} = \frac{1}{4}\,(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t})(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t})$$

кўпайтмани ўртачалаштиришда $e^{\pm 2i\omega t}$ кўпайтувчили ҳадлар нолга айланади, натижада

$$\overline{\mathrm{Re}\mathbf{A}\mathrm{Re}\mathbf{B}} = \frac{1}{4}\,(\mathbf{AB}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{AB}^*).$$

қолади.

[1] x, y, z ўқлар, ҳар вақтдагидек, ўнг винт система тузадилар, деб фараз қилинади.

Ниҳоят агар b_1 ва b_2 лар нолга тенг бўлса, у ҳолда тўлқин майдони ҳамма жойда ва ҳамма вақт айни бир йўналишга параллел (ёки антипараллел) бўлади. Бу ҳолда тўлқинни *чизиқли қутбланган* ёки текисликда қутбланган тўлқин дейилади. Эллиптик қутбланган тўлқинни иккита чизиқли қутбланган тўлқин деб қараш мумкин.

71-§. Допплер эффекти

Тўлқин вектор таърифига қайтамиз ва ташкил этувчилари бўлган тўрт ўлчовли тўлқин вектор тушунчаси

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c},\ \mathbf{k}\right) \qquad (71.1)$$

киритамиз. Бу катталикларнинг ҳақиқатан ҳам 4-вектор ташкил этиши, масалан, уни x^{μ} 4-векторга кўпайтирганда, скаляр (тўлқин фазаси) ҳосил бўлишида аниқ кўринади:

$$k_{\mu} x^{\mu} = \omega t - \mathbf{kr}. \qquad (71.2)$$

(70.3) ва (71.1) таърифларга кўра тўлқин 4-векторнинг квадрати нолга тенг:

$$k_{\mu} k^{\mu} = 0. \qquad (71.3)$$

4-тўлқин векторни алмаштириш қонунидан фойдаланиб *Допплер эффекти* деб аталувчи эффектни кузатувчига нисбатан ҳаракатланаётган манба чиқараётган ω тўлқин частотаси шу манбанинг ўзи тинч турган саноқ система (k_0) даги ω_0 „хусусий“ частотасига нисбатан ўзгаришини осонгина текшириш мумкин.

V—манбанинг тезлиги, яъни k_0 саноқ системанинг k га нисбатан тезлиги бўлсин. 4-векторларни алмаштириш умумий формулаларига мувофиқ

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c}\,k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(K системанинг K_0 системага нисбатан тезлиги V бўлади). Бу ерга $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k\cos\alpha = \omega/c\cdot\cos\alpha$ ни қўйсак (бунда α—тўлқин чиқарилиши ва манба ҳаракати йўналиши орасидаги бурчак—K системада), ва ω ни ω_0 орқали ифодаласак; изланаётган

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha} \qquad (71.4)$$

ифодани оламиз. $V \ll c$ бўлганда, агар α бурчак $\pi/2$ га унча яқин бўлмаса

$$\omega \approx \omega_0\left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha\right). \qquad (71.5)$$

$\alpha = \pi/2$ бўлганда эса

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \qquad (71.6)$$

бўлади: бу ҳолда частотанинг нисбий ўзгариши V/c нисбатнинг квадратига пропорционал бўлади.

72-§. Спектрал ажратиш

Ҳар қандай тўлқинни *спектрал ажратиш* мумкин, яъни турли частотали монохроматик тўлқинлар тўплами кўринишида тасвирлаш мумкин. Бу ажратишлар майдоннинг вақтга боғланиш характерига қараб, ҳар хил бўлади.

Ажратилган спектр таркибига дискрет қатор ҳосил қилувчи частоталар кирган ҳоллар бир категорияга мансубдир. Бундай турдаги энг содда ҳол соф даврий (аммо монохроматик бўлмаган) майдонни ажратишда содир бўлади. Бу оддий Фурье қаторига ёйишдир; у қатор „асосий“ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (бунда T—майдон даври) частотага бутун каррали бўлган частоталарга эга. Уни

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \qquad (72.1)$$

кўринишида ёзамиз (f—майдонни тавсифловчи катталиклардан бири). f_n катталикларни f функциянинг ўзи орқали қуйидаги интеграллардан аниқланади:

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t}\, dt. \qquad (72.2)$$

Равшанки, $f\ (t)$ функция қийматининг ҳақиқийлиги туфайли

$$f_{-n} = f^{*}_{n}. \qquad (72.3)$$

Бундан мураккаброқ ҳолларда спектрда бир неча (турли, бир-бири билан ўлчовдош бўлмаган) асосий частотага бутун каррали (ва уларнинг йиғиндисидан иборат) бўлган частоталар бўлади.

(72.1) йиғиндини квадратга ошириб, вақт бўйича ўртачалаштирилганда турли частотали ҳадлар кўпайтмалари уларда осцилланувчи кўпайтувчилар бўлганлиги туфайли нолга айланади ва фақат $f_n f_{-n} = (f_n)^2$ кўринишдаги ҳадлар қолади. Шундай қилиб, майдоннинг ўртача квадрати (тўлқиннинг ўрта интенсивлиги) монохроматик компонентларининг йиғиндиси кўринишида тасвирланади:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \qquad (72.4)$$

($f\ (t)$ функциянинг давр бўйича ўртача қийматининг нолга тенглиги назарда тутилади, бинобарин, $f_0 = \overline{f} = 0$ бўлади).

Таркибида турли частоталарнинг узлуксиз қатори бўлган Фурье интеграли кўринишида ёйилувчи майдонлар бошқа бир категорияга мансубдир. Бунинг учун $f\ (t)$ функциялар муайян шартларни қаноатлантириши керак; одатда $t = \pm\infty$ бўлганда нолга айланадиган функциялар тўғрисида гап боради. Бундай ёйилма

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \qquad (72.5)$$

кўринишда бўлади; Фурье компонентлари $f\ (t)$ функциянинг ўзи орқали

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f\ (t) e^{i\omega t}\ dt \qquad (72.6)$$

интеграллардан аниқланади. Бу ҳолда (72.3) га мос равишда

$$f_{-\omega} = f^{*}_{\omega} \qquad (72.7)$$

бўлади,

f^2 дан бутун вақт бўйича интеграл оламиз. (72.5—6) лар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}\, e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi}$$

ёки (72.7) ни ҳисобга олсак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_{0}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (72.8)$$

Шундай қилиб, интеграл интенсивлик тўлқиннинг Фурье компонентлари интенсивликлари орқали ифодаланади.

73-§. Қисман қутбланган ёруғлик

Ҳар қандай монохроматик тўлқин, ўз таърифига кўра, албатта, қутбланган бўлади. Лекин, одатда, таркибида бирор кичик $\Delta\omega$ интервалдаги частоталар бўлган деярли монохроматик тўлқинларни текширишга тўғри келади. Шундай тўлқиннинг бирор ўртача частотаси ω га тенг бўлсин. У ҳолда унинг майдонини (аниқлик учун, электр майдони тўғрисида гапирамиз) фазонинг берилган нуқтасида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega t}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $E_0(t)$ комплекс амплитуда вақтнинг секин ўзгарувчи бирор функциясидир (қатъий монохроматик тўлқин учун $E_0 = \text{const}$ бўлган бўлар эди). E_0 вектор тўлқиннинг қутбланишини аниқлаганлиги сабабли, тўлқиннинг ҳар бир нуқтасида унинг қутбланиши вақт ўтиши билан ўзгаради; бундай тўлқинни *қисман қутбланган тўлқин* дейилади.

Электромагнит тўлқинларнинг, хусусан ёруғликнинг, қутбланиш хоссалари тажрибада текширилаётган ёруғликни турли жисмлар (масалан, Николь призмалари) орқали ўтказиш ва жисм орқали ўтган ёруғлик интенсивлигини ўлчаш йўли билан кузатилади. Бу математика нуқтаи назаридан ёруғлик майдонининг баъзи бир квадратик функцияларининг қийматларига асосланиб, унинг қутбланиш хоссалари тўғрисида хулоса чиқарилишини билдиради. Бунда, албатта, бу функцияларнинг вақт бўйича ўртача қийматлари тўғрисида гап боради.

Майдоннинг квадратик функцияси $E_i E_k$, $E_i^* E_k^*$ ёки $E_i E_k^*$ кўпайтмаларга пропорционал бўлган ҳадлардан иборат. Тез осцилланувчи $e^{\pm 2i\omega t}$ кўпайтувчиларга эга бўлган

$$E_i E_k = E_{0i} E_{0k} e^{-2i\omega t}, \qquad E_i^* E_k^* = E_{0i}^* E_{0k}^* e^{2i\omega t}$$

кўринишдаги кўпайтмалар вақт бўйича ўртачалаштирилганда нолга тенг бўлади. $E_i E_k^* = E_{0i} E_{0k}^*$ кўпайтмаларда эса бундай кўпайтувчилар йўқ ва шунинг учун уларнинг ўртача қийматлари нолдан фарқ қилади. Шундай қилиб, қисман қутбланган ёруғликнинг хоссалари етарли даражада

$$J_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*} \tag{73.1}$$

тензор билан характерланади.

$\mathbf{E}_0$ вектор ҳамма вақт тўлқин йўналишига перпендикуляр бўлган текисликда ётганлиги учун J_{ik} тензор ҳаммаси бўлиб тўртта компонентга эга бўлади (бу параграфда i, k индекслар y ва z ўқларга мос келувчи иккигагина қийматни қабул қила олади: $i, k = 1, 2$; x ўқи тўлқин тарқалишининг йўналиши бўйлаб олинган деб ҳисобланади).

J_{ik} тензорнинг диагонал компонентлари йиғиндиси (уни J орқали белгилаймиз) ҳақиқий катталик — $\mathbf{E}_0$ вектор модули квадратининг ўртача қийматидир:

$$J \equiv J_{ii} = \overline{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*}. \tag{73.2}$$

Бу катталик тўлқин интенсивлиги (тўлқиндаги энергия оқими зичлиги) ни аниқлайди.

Қутбланиш хоссаларига бевосита алоқадор бўлмаган бу катталикни чиқариб ташлаш учун J_{ik} ўрнига

$$\rho_{ik} = \frac{J_{ik}}{J} \tag{73.3}$$

тензор киритамиз, унинг учун $\rho_{ii} = 1$; уни *қутблаш тензори* деб атаймиз.

(73.1) ифодадан кўринишича, J_{ik} тензорнинг, бинобарин, ρ_{ik} нинг ҳам компонентлари

$$\rho_{ik} = \rho_{ki}^* \tag{73.4}$$

муносабатлар орқали боғланган (бундай тензорни *эрмит* тензори дейилади). Шу муносабатларга асосан ρ_{11} ва ρ_{22} диагонал компонентлар ҳақиқий (бунда $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), аммо $\rho_{21} = \rho_{12}^*$. Бинобарин, қутбланиш тензори ҳаммаси бўлиб учта ҳақиқий параметр билан характерланади.

Тамомила қутбланган ёруғлик учун ρ_{ik} тензор қаноатлантириши керак бўлган шароитни аниқлаймиз. Бу ҳолда $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$ шунинг учун тўғридан-тўғри

$$J_{ik} = J\rho_{ik} = E_{0i} E_{0k}^* \tag{73.5}$$

(ўртачалаштиришсиз) бўлади, яъни тензор компонентлари бирор ўзгармас вектор компонентларининг кўпайтмалари кўринишида тасвирланиши мумкин. Бунинг зарурий ва етарли бўлган шарти детерминантнинг нолга тенглиги билан ифодаланади:

$$|\rho_{ik}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \tag{73.6}$$

Қарама-қарши ҳол—қутбланмаган ёки *табиий* ёруғликдир.

Қутбланиш бутунлай йўқ дейиш барча (yz текислигидаги) йўналишлар тамомила эквивалент демакдир. Бошқача қилиб айтганда, қутбланиш тензори

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik} \tag{73.7}$$

кўринишда бўлиши керак. Бунда детерминант $|\rho_{ik}| = 1/4$.

Ихтиёрий ρ_{ik} тензор икки қисмга—симметрик (i, k индекслар бўйича) ва антисимметрик қисмларга ажратилиши мумкин. Кейинги қисм йўқ бўлган ҳолни қараб чиқайлик. (73.4) га асосан ρ_{ik} симметрик тензор айни вақтда ҳақиқий ҳам бўлади ($\rho_{ik} = \rho_{ik}^*$). Ҳар қандай симметрик тензор сингари ρ_{ik}-ни ҳам иккита бош қиймати бўлган (уларни λ_1 ва λ_2 орқали белгилаймиз) бош ўқларга келтириш мумкин. Бош ўқларнинг ўзаро перпендикуляр йўналишларининг ортларини (бирлик векторларини) $\mathbf{n}^{(1)}$ ва $\mathbf{n}^{(2)}$ орқали белгилаб, ρ_{ik} ни

$$\rho_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{73.8}$$

кўринишда тасвирлаш мумкин. λ_1 ва λ_2 катталиклар мусбат ва 0 дан 1 гача бўлган қийматларни қабул қила олади.

(73.8) ифодадаги икки ҳаднинг ҳар бири ўзгармас ҳақиқий векторнинг икки ташкил этувчисининг кўпайтмаси $\sqrt{\lambda_1}\,\mathbf{n}^{(1)}$ ёки $\sqrt{\lambda_2}\,\mathbf{n}^{(2)}$ кўринишига эга. Бошқача қилиб айтганда, бу ҳадларнинг ҳар бири чизиқли қутбланган ёруғликка мос келади. (73.8) да шу икки тўлқин компонентларининг кўпайтмасидан иборат ҳад йўқ (буни кейинроқ кўриб ўтамиз). Демак, иккала қисмни физикавий жиҳатдан бир-биридан мустақил ёки *нокогерент* деб кўриш мумкин. Ҳақиқатан, агар икки тўлқин бир-бирига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $E_i^{(1)} E_k^{(2)}$ кўпайтманинг ўртача қиймати ҳар бир кўпайтувчининг ўргача қийматлари кўпайгмасига тенг ва ҳар бир кўпайтувчи нолга тенглигидан

$$\overline{E_i^{(1)} E_k^{(2)}} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, мазкур ҳолда қисман қутбланган тўлқинни қўшилган иккита нокогерент (интенсивлиги λ_1 ва λ_2 ларга пропорционал ва ўзаро перпендикуляр йўналишларда қутбланган) тўлқинлар каби тасвирлаш мумкин.

ρ_{ik} комплекс тензорнинг умумий ҳолида эса ёруғлик иккита нокогерент эллиптик қутбланган (қутбланиш эллипслари бир-бирига ўхшаш ва ўзаро перпендикуляр) тўлқинларнинг қўшилиши сифатида тасвирланиши мумкин.

74-§. Геометрик оптика

Тарқалиш йўналишининг ва амплитудасининг ҳамма ерда бир хил бўлиши ясси тўлқиннинг ўзига хос хусусиятидир. Ихтиёрий электромагнит тўлқинлар бундай хоссага эга эмас.

Аммо, кўпинча, ясси бўлмаган электромагнит тўлқинларни фазонинг ҳар бир кичик бўлагида ясси тўлқин деб қараш мумкин. Бунинг учун тўлқиннинг амплитудаси ва йўналиши тўлқин узунлигига яқин масофаларда деярли ўзгармаслиги зарур.

Агар бу шарт бажарилса, у ҳолда *тўлқин сиртлар* деб аталувчи тушунча киритиш мумкин; тўлқин фазаси сиртнинг ҳар бир нуқтасида берилган вақт моментида бир хил бўлади (ясси тўлқин учун бу сиртлар унинг тарқалиш йўналишига перпендикуляр бўлган текисликлардир). Фазонинг ҳар бир кичик бўлагида тўлқин сиртга нормал бўлган тўлқин тарқалиш йўналиши ҳақида гапириш мумкин. Бу ҳолда *нурлар* (ҳар бир нуқтасидан ўтказилган уринма тўлқин тарқалиши билан мос тушадиган чизиқлар) тушунчасини киритиш мумкин.

Тўлқинлар тарқалиши қонунларини бу ҳолда *геометрик оптика* предмети ўрганади. Бинобарин, геометрик оптика электромагнит тўлқинларнинг, хусусан ёруғликнинг тарқалишини (тўлқин табиатини мутлақо эътиборга олмай) нурларнинг тарқалиши деб қарайди. Бошқача қилиб айтганда, геометрик оптика кичик тўлқин узунликлар ($\lambda \rightarrow 0$) нинг чегаравий ҳолига мос келади.

Энди геометрик оптиканинг асосий тенгламаси—нурлар йўналишини аниқловчи тенгламани келтириб чиқарамиз. Ихтиёрий f катталик тўлқин майдонини тавсифласин (у $\mathbf{E}$ ёки $\mathbf{H}$ ларнинг компонентларидан бири). Ясси монохроматик тўлқинда f катталик

$$f = ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)} \tag{74.1}$$

кўринишга эга (Re белгини тушириб қолдирдик; ҳамма ерда ҳақиқий қисм назарда тутилади).

Майдон учун ифодани

$$f = ae^{i\psi} \tag{74.2}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Тўлқин яссимас, лекин геометрик оптикани қўлласа бўладиган ҳолда a амплитуда, умуман айтганда, координаталар ва вақт функцияси бўлади, ψ фаза (уни *эйконал* деб ҳам атайди) эса (74.1) дагидек, содда кўринишда бўлмайди. Аммо муҳими, ψ эйконалнинг катталигидадир. Бу қуйидагидан кўриниб турибди: ψ тўлқин узунлик давомида 2π га ўзгаради, геометрик оптика эса $\lambda \rightarrow 0$ чегарага мос келади.

Фазонинг кичик қисмларида ва кичик вақт интервалларида ψ эйконални қаторга ёйиш мумкин; биринчи тартиб ҳадларигача аниқликда

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ифода ҳосил бўлади (координаталар боши ва вақт саноғи боши текширилаётган соҳада ва вақт интервалида танланган: ҳосилалар қиймати координаталар бошида олинади). Бу ифодани (74.1) билан таққослаб, тўлқинни фазонинг ҳар бир кичик бўлагида (ва кичик вақт интервалларида) ясси тўлқин деб қараш мумкинлигига мувофиқ қуйидагини ёза оламиз:

$$\mathbf{k}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\equiv\operatorname{grad}\psi,\quad \omega=-\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{74.3}$$

Тўлқин векторнинг таърифига кўра $\mathbf{k}^2=\omega^2/c^2$. Бу ерга (74. 3) дан $\mathbf{k}$ ва ω ни келтириб қўйсак,

$$(\Delta\psi)^2=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \tag{74. 4}$$

бўлади. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали бу дифференциал тенглама *эйконал тенгламаси* дейилади ва геометрик оптиканинг асосий тенгламаси ҳисобланади.

(74. 4) тенгламани тўлқин тенгламада бевосита $\lambda\to 0$ лимитга ўтиш орқали келтириб чиқариш ҳам мумкин. f майдон

$$\Delta f=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{74. 5}$$

тўлқин тенгламани қаноатлантиради. (74. 2) кўринишдаги функция учун

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}e^{i\psi}+2i\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}e^{i\psi}+if\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 f.$$

Лекин геометрик оптикада ψ эйконал катта қийматга эга. Шунинг учун бу ерда тўртинчи ҳадга нисбатан олдинги уч ҳадни ташлаб юбориш мумкин, у ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\approx-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 f.$$

Шунга ўхшаш

$$\Delta f\approx-(\nabla\psi)^2 f$$

ни топамиз ва уни (74. 5) га қўйиб, (74. 4) тенгламани ҳосил қиламиз.

Эйконал тенгламасининг кўринишидан геометрик оптика ва моддий зарралар механикаси орасидаги ажойиб ўхшашлик келиб чиқади. Механикада зарра ҳаракати тенгламасини S таъсир учун Гамильтон — Якоби тенгламаси кўринишида тасвирлаш мумкин (31- §). Бу тенглама худди эйконал тенгламаси сингари, биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламадир. Бунда S таъсир $\mathbf{p}$ импульс ва зарранинг $\mathscr{H}$ Гамильтон функцияси билан қуйидагича боғланган:

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}},\quad \mathscr{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Бу формулаларни (74. 3) формулалар билан таққослаб кўрамизки, геометрик оптикада тўлқиннинг тўлқин вектори механикадаги зарра импульси ролини, частота эса Гамильтон функцияси, яъни зарра энергияси ролини ўйнайди. Тўлқин векторнинг абсолют катталиги частота билан $k=\omega/c$ формула воситасида боғланган. Бу муносабат ноль массага ва ёруғлик тезлигига тенг тезликка эга бўлган зарранинг импульси ва энергияси орасидаги $p=\mathscr{E}/c$ муносабатга ўхшашдир.

Зарралар учун Гамильтон тенгламалари ўринлидир:

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{r}},\quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}.$$

Юқорида кўрсатилган ўхшашлик туфайли, нурлар учун шуларга ўхшаш тенгламаларни бевосита ёза оламиз:

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}},\quad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{74. 6}$$

Бўшлиқда $\omega=ck$, бинобарин, $\mathbf{k}=0$, $\mathbf{v}=c\mathbf{n}$ (ундаги $\mathbf{n}$ — тарқалиш йўналишидаги бирлик вектор) яъни кутилганидек, бўшлиқда нурлар тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, ёруғлик c тезлик билан шу тўғри чизиқлар бўйлаб тарқалади.

75- §. Геометрик оптика чегаралари

Ясси монохроматик тўлқиннинг таърифига кўра, унинг амплитудаси ҳамма жойда ва ҳамма вақт бир хил бўлади. Бундай тўлқин фазодаги барча йўналишлар бўйича чексиз ва $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган вақт давомида мавжуд бўлади. Амплитудаси баъзи жойларда ўзгармас бўлган ҳар қандай тўлқин оз ёки кўп даражадагина монохроматик бўлиши мумкин. Энди биз тўлқинларнинг номонохроматиклик даражаси ҳақидаги масала билан шуғулланамиз.

Амплитудаси фазонинг ҳар бир нуқтасида вақт функцияси бўлган электромагнит тўлқинни текширайлик. ω_0 — тўлқиннинг бирор ўртача частотаси бўлсин. У ҳолда мазкур нуқтада тўлқин майдони (масалан, электр майдони) $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$ кўринишда бўлади. Аммо ўзи монохроматик бўлмаган бу майдонни монохроматик компонентларга, яъни Фурье интегралига ёйиш мумкин. Бу ёйилманинг ω частотали компонентининг амплитудаси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt$$

интегралга пропорционалдир. $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ кўпайтувчи даврий функция бўлиб, унинг ўртача қиймати нолга тенг. Агар $\mathbf{E}_0$ умуман ўзгармас бўлса эди, у ҳолда интеграл барча $\omega \neq \omega_0$ частоталарда нолга тенг бўлар эди. Агар $\mathbf{E}_0(t)$ ўзгарувчан бўлса, лекин $1/|\omega-\omega_0|$ тартибдаги вақт оралиқларида деярли ўзгармаса, у ҳолда интеграл деярли нолга тенг ($\mathbf{E}_0$ қанчалик секин ўзгарса, интеграл шунчалик аниқроқ нолга тенг) бўлади. Интегралнинг нолдан сезиларли фарқ қилиши учун $\mathbf{E}_0(t)$ катталик $1/|\omega-\omega_0|$ тартибдаги вақт оралиғида сезиларли ўзгариши зарур.

Фазонинг мазкур нуқтасида тўлқин амплитудаси сезиларли ўзгарадиган вақт оралиғини Δt орқали белгилаймиз. Келтирилган мулоҳазалардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: бу тўлқиннинг спектрал ажралишига сезиларли интенсивлик билан кирувчи ва ω_0 дан энг кўп фарқ қилувчи частоталарни $1/|\omega-\omega_0| \sim \Delta t$ шартдан аниқланади. Агар спектрал ажратишдаги (ўртача ω_0 частота атрофидаги) частоталар интервалини $\Delta\omega$ орқали белгиласак, у ҳолда қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1. \tag{75.1}$$

Ҳақиқатан ҳам, Δt қанчалик каттароқ бўлса, яъни тўлқин амплитудаси фазонинг ҳар бир нуқтасида қанчалик секин ўзгарса, тўлқин шунчалик монохроматик (яъни $\Delta\omega$ шунчалик кичик) бўлади.

(75.1) га ўхшаш муносабатларни тўлқин вектор учун ҳам чиқариш осон. x, y, z ўқлар бўйлаб Δx, Δy, Δz тартибдаги масофаларда тўлқин амплитудаси сезиларли ўзгарадиган бўлсин. Мазкур вақт моментида тўлқин майдон координаталар функцияси сифатида

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$$

кўринишда бўлади, бундаги $\mathbf{k}_0$ — тўлқин векторнинг бирор ўртача қиймати. (75.1) ни чиқариш йўлига мутлақо ўхшаш ҳолда, текширилаётган тўлқиннинг Фурье фазовий интегралига ёйилмасидаги қийматларнинг $\Delta\mathbf{k}$ интервалини топиш мумкин:

$$\Delta k_x\Delta x \sim 1,\ \Delta k_y\Delta y \sim 1,\ \Delta k_z\Delta z \sim 1. \tag{75.2}$$

Хусусан, бирор чекли вақт интервали давомида нурланган тўлқинни қараб чиқайлик. Бу интервал катталиги тартибини Δt орқали белгилаймиз. Амплитуда фазонинг олинган нуқтасида Δt вақт давомида ҳар ҳолда сезиларли ўзгаради, шу вақт ичида тўлқин мазкур нуқтадан бутунлай ўтиб кетишга улгуради. (75.1) муносабат асосида шуни айтиш мумкинки, бундай тўлқиннинг „монохроматикмаслик даражаси“ $\Delta\omega$ ҳар ҳолда $1/\Delta t$ дан кичик бўлмайди (лекин ундан катта бўлиши мумкин, албатта):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{75.3}$$

Шу сингари, агар Δx, Δy, Δz — фазода тўлқин ўлчамлари катталикларининг тартиби бўлса, у ҳолда тўлқин ёйилмасига кирган тўлқин вектор компонентлари қийматларининг интервали қуйидагича бўлади:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x},\quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y},\quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z} \tag{75.4}$$

Бу формулаларга биноан, агар чекли кенгликка эга бўлган ёруғлик дастаси бўлса, у ҳолда бундай дастада ёруғлик тарқалиши йўналиши қатъий ўзгармас бўла олмайди. x ўқини дастадаги ёруғликнинг ўртача йўналиши бўйича йўналтирсак, у ҳолда

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{75.5}$$

бундаги θ_y — дастанинг xy текисликдаги ўртача йўналишдан оғиш катталиги тартиби, λ эса тўлқин узунлик

Иккинчи томондан,(75.5) формула оптикавий тасвирларнинг чегаравий кескинлиги ҳақидаги саволга жавоб беради. Барча нурлари геометрик оптикага мувофиқ, бир нуқтада кесишиши лозим бўлган ёруғлик дастаси ҳақиқатда нуқта кўринишида эмас, балки бирор доғ кўринишида тасвир беради. (75. 5) га кўра, бу доғнинг Δ кенглиги

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta} \qquad (75.6)$$

тартибда бўлади, бу ерда θ — дастанинг ёйилиш бурчаги. Бу формулани фақат тасвирга эмас, балки буюмга ҳам татбиқ этиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, нурланувчи нуқтадан чиқаётган ёруғлик дастасини кузатганда, бу нуқтани λ/θ ўлчамли жисмдан фарқ қилиб бўлмайди дейиш мумкин. Шунга мувофиқ, (75.6) формула микроскопнинг *ажрата олиш кучи* чегарасини аниқлайди. Δ нинг $\theta \sim 1$ бўлганда эришиладиган минимал қиймати λ га тенг, бу натижа геометрик оптика чегаралари ёруғлик тўлқини узунлиги билан аниқланади деган фикрга тўла мувофиқдир.

Масала

Ёруғликнинг параллел дастасидан диафрагмага нисбатан l масофада ҳосил бўладиган ёруғлик дастасининг энг кичик кенглик катталигининг тартиби топилсин.

Ечилиши. Диафрагма тешиги ўлчамини d орқали белгилаб, (75.5) дан нурлар оғиш бурчаги („дифракция бурчаги“) учун$\sim\lambda/d$ қийматни оламиз, бундан даста кенглиги $d+\frac{\lambda}{d}l$ тартибда бўлиши чиқади. Бу катталикнинг энг кичик қиймати $\sim\sqrt{\lambda l}$.

76-§. Майдоннинг хусусий тебранишлари

Фазонинг бирор чекли ҳажмида жойлашган эркин (зарядсиз) электромагнит майдонни текширайлик. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида бу ҳажм томонлари мос равишда A, B, C ларга тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклига эга деб, фараз қиламиз. У ҳолда биз бу параллелепипеддаги майдонни характерловчи барча катталикларни Фурье учлама қаторига (учта координаталар бўйича) ёямиз. Бу ёйилмани (масалан, вектор потенциал учун) **A** нинг ҳақиқийлигини ошкор ифодаловчи

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*} e^{-i\mathbf{kr}}) \qquad (76.1)$$

кўринишда ёзамиз. Йиғинди **k** векторнинг барча мумкин бўлган қийматлари бўйича олинади; маълумки, **k** нинг компонентлари

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C} \qquad (76.2)$$

қийматларни қабул қилади, бундаги n_x, n_y, n_z—мусбат ва манфий бутун сонлар. Ҳар бир **k** учун $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$ тенгламадан

$$\mathbf{k}\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0 \qquad (76.3)$$

бўлиши келиб чиқади, яъни $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ комплекс векторлар мос тўлқин векторларга ортогонал бўлади. $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ векторлар вақт функциялари бўлиб, улар

$$\ddot{\mathbf{a}}_k + c^2k^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0 \qquad (76.4)$$

тенгламаларни қаноатлантиради.

Агар танланган ҳажмнинг A, B, C ўлчамлари етарлича катта бўлса, k_x, k_y, k_z ларнинг қўшни қийматлари (уларда n_x, n_y, n_z лар 1 га фарқ қилади) бир-бирига жуда яқин бўлади. У ҳолда k_x, k_y, k_z ларнинг кичик Δk_x, Δk_y, Δk_z интервалллардаги мумкин бўлган қийматларининг сони тўғрисида гапиришимиз мумкин.

Масалан, k_x нинг қўшни қийматлари n_x нинг 1 га фарқ қилувчи қийматларига мос келганлигидан k_x нинг Δk_x интервалдаги мумкин бўлган қийматлари сони Δn_x тўғридан-тўғри n_x қийматларининг мос интервалига тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \; \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \;\; \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

тенгликларни топамиз. Компонентлари Δk_x, Δk_y, Δk_z интервалларда бўлган **k** векторнинг мумкин бўлган қийматларининг Δn тўла сони $\Delta n_x \cdot \Delta n_y \cdot \Delta n_z$ кўпайтмага тенг, яъни

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \qquad (76.5)$$

бундаги $V = ABC$ майдон ҳажми.

Бундан абсолют қиймати Δk интервалда ва йўналиши Δo фазовий бурчак элементида бўлган тўлқин векторнинг барча қийматлари сонини аниқлаш осон. Бунинг учун фақат „k- фазодаги“ сферик координаталарга ўтиш ва $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ ўрнига шу координаталарда ифодаланган ҳажм элементини ёзиш керак. Шундай қилиб,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta_o. \tag{76.6}$$

Ниҳоят, Δk интервалдаги k абсолют қийматларга ва ҳар қандай йўналишларга эга бўлган тўлқин вектор қийматларининг тўла сони (Δ_o ўрнига 4π ни ёзамиз) қуйидагига тенг:

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \tag{76.7}$$

Вақт функциялари кўринишидаги $\mathbf{a}_k$ векторлар $\omega_k = ck$ частотали содда даврий функцияларга келтирилади [(76. 4) ни қ.]. Майдон ёйилмасини югурувчи ясси тўлқинлар бўйича ёйилма кўринишида тасвирлаймиз. Бунинг учун $\mathbf{a}_k$ ларнинг ҳар бири $e^{-i\omega_k t}$ кўпайтувчи орқали вақтга боғланган деб ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{a}_k \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{76.8}$$

У ҳолда (76.1) йиғиндидаги ҳар бир ҳад фақат $\mathbf{kr} - \omega_k t$ айирманинг функцияси бўлиб, у $\mathbf{k}$ вектор йўналишида тарқалаётган тўлқинга мос келади.

V ҳажмдаги текширилаётган майдоннинг

$$\mathscr{E} = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,dV$$

тўла энергиясини ($\mathbf{a}_k$ катталиклар орқали ифодалаб) ҳисоблаймиз. Электр майдон учун

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{a}}_k e^{i\mathbf{kr}} + \dot{\mathbf{a}}_k^* e^{-i\mathbf{kr}})$$

ёки (76, 8) ни эътиборга олсак,

$$\mathbf{E} = i\sum_{\mathbf{k}} k(\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{kr}} - \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{kr}}) \tag{76.9}$$

бўлади.

$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ магнит майдон учун

$$\mathbf{H} = i\sum_{\mathbf{k}} ([\mathbf{ka}_k] e^{i\mathbf{kr}} - [\mathbf{ka}_k^*] e^{-i\mathbf{kr}}). \tag{76.10}$$

Бу йиғиндининг квадратларини ҳисоблашда $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ тўлқин векторли ҳадлар барча кўпайтмаларининг бутун ҳажм бўйича интеграллари нолга тенг бўлишини назарда тутиш керак. Ҳақиқатан ҳам, бундай ҳадлар $e^{\pm i\mathbf{qr}}$ кўринишдаги кўпайтувчиларга эга ($\mathbf{q} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}'$), нолдан фарқли бутун n_x ли интеграл эса, масалан,

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

нолга тенг бўлади. Экспоненциал кўпайтувчилари тушиб қоладиган ҳадларни dV бўйича интеграллаш V ҳажмни беради.

Натижада қуйидагини топамиз:

$$\mathscr{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}} \{k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* + [\mathbf{ka}_k][\mathbf{ka}_k^*]\}.$$

Лекин, $\mathbf{a}_k \mathbf{k} = 0$ бўлғанлигидан

$$[\mathbf{ka}_k][\mathbf{ka}_k^*] = k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^*$$

ва биз узил-кесил

$$\mathscr{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{E}_k, \quad \mathscr{E}_k = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* \tag{76.11}$$

ифодаларни оламиз. Демак, майдоннинг тўла энергияси ҳар бир ясси тўлқин билан алоҳида боғланган $\mathscr{E}_k$ энергиялар йиғиндиси кўринишида ифодаланади.

Шунга ўхшаш равишда майдоннинг

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{EH}]\,dV$$

тўла импульсини ҳисоблаш мумкин, бунда

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathscr{E}_k}{c} \tag{76.12}$$

ҳосил бўлади. Бу натижани ясси тўлқинлар энергияси ва импульси орасидаги маълум муносабат (69-§ га қ.) га кўра олдиндан кутиш мумкин эди.

Майдонни фазонинг барча нуқталарида қиймати бериладиган $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ потенциал билан, яъни ўзгарувчиларнинг узлуксиз қатори билан тавсифлаш ўрнига, уни (76.1) ёрдамида ўзгарувчиларнинг дискрет қатори ($\mathbf{a}_k$ векторлар) орқали тавсифланади.

$\mathbf{a}_k$ ўзгарувчиларни алмаштириб, майдон тенгламаларига механиканинг каноник тенгламаларига (Гамильтон тенгламаларига) ўхшаш кўриниш бериш мумкин. Ҳақиқий „каноник ўзгарувчилар“ киритамиз ва уларни $\mathbf{Q}_k$ ва $\mathbf{P}_k$ деб белгилаймиз:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k \end{aligned} \qquad (76.\ 13)$$

Бу ифодаларни (76. 11) энергия ифодасига қўйсак, майдоннинг Гамильтон функцияси ҳосил бўлади:

$$\mathscr{H} = \sum_k \mathscr{H}_k = \sum_k \frac{1}{2}(\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2). \qquad (76.\ 14)$$

Бунда $\partial \mathscr{H} / \partial \mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$ Гамильтон тенгламалари $\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$ тенгликларга мос тушади, демак, улар ҳақиқатан ҳам ҳаракат тенгламалари натижаси экан (бунга (76.13) алмаштиришларда коэффициентни тегишли танлаш йўли билан эришилди). $\partial \mathscr{H} / \partial \mathbf{Q}_k = -\dot{\mathbf{P}}_k$ тенгламалар эса

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = 0 \qquad (76.\ 15)$$

тенгламаларга олиб келади, яъни улар майдон тенгламалари билан айнандир.

$\mathbf{Q}_k$ ва $\mathbf{P}_k$ векторларнинг ҳар бири $\mathbf{k}$ тўлқин векторга перпендикуляр бўлади, яъни иккитадан мустақил компонентларга эга бўлади. Бу векторлар йўналиши тегишли югурувчи тўлқиннинг қутбланиш йўналишини аниқлайди. $\mathbf{Q}_k$ векторнинг икки компонентини ($\mathbf{k}$ га перпендикуляр бўлган текисликдаги) Q_{kj} орқали ($j=1,2$) белгиласак, $\mathbf{Q}_k^2 = \sum_j Q_{kj}^2$ бўлади; $\mathbf{P}_k$ учун ҳам шунга ўхшаш ифода олинади. У ҳолда

$$\mathscr{H} = \sum_{kj} \mathscr{H}_{kj},\ \mathscr{H}_{kj} = \frac{1}{2}(P_{kj}^2 + \omega_k^2 Q_{kj}^2) \qquad (76.\ 16)$$

бўлади. Демак, Гамильтон функцияси мустақил ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирида фақат бир жуфт Q_{kj}, P_{kj} катталиклар бўлади. Ҳар бир шундай ҳад маълум тўлқин векторли ва маълум қутбланишли югурувчи тўлқинга мос келади. Бунда $\mathscr{H}_{kj}$ содда гармоник тебранаётган бир ўлчовчи „осциллятор“ нинг Гамильтон функцияси кўринишига эга бўлади. Шунинг учун юқорида ҳосил қилинган ёйилмани баъзан майдоннинг *осцилляторларга* ёйилмаси ҳам дейилади.

XIV боб

ЭЛЕКТРОМАГНИТ ТЎЛҚИНЛАР НУРЛАНИШИ

77-§. Кечикувчи потенциаллар

Ҳаракатланаётган зарядлар вужудга келтирган майдон потенциалларини аниқловчи тенгламаларни келтириб чиқарамиз. Бунинг учун 68-§ да қилинган ҳисобни такрорлаймиз, аммо бу ерда зарядлар зичлиги ва токни нолга тенг деб фараз қилмаймиз.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad (77.1)$$

таърифларни

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

тенгламага қўйсак,

$$\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\,\frac{d\varphi}{\partial t} \qquad (77.2)$$

ифода келиб чиқади (ўнгдаги охирги ҳадда grad ва $\partial/\partial t$ операциялар ўрни алмаштирилган).

Потенциалларга қўйиладиган қўшимча шарт сифатида

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (77.3)$$

тенгликни танлаймиз, бу шартни Лоренц шарти дейилади, уни қаноатлантирадиган потенциалларни *Лоренц* *калибровкасидаги* потенциаллар дейилади[1]. У ҳолда (77.2) тенгламанинг ҳар икки томонидаги охирги ҳадлар ўзаро қисқаради ва биз

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad (77.4)$$

тенгламага келамиз. Шунга ўхшаш йўл билан, (77.1) ни $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ тенгламага қўйсак,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\varphi = 4\pi\rho$$

ифода ёки $\operatorname{div}\mathbf{A}$ ни (77.3) шартдан аниқлаб қўйсак,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \qquad (77.5)$$

ифода ҳосил бўлади.

(77.4—5) тенгламалар изланган тенгламалардир. Ўзгармас майдон учун олинса, улар бизга маълум бўлган (59.4) ва (65.4) тенгламаларга айланади, зарядсиз ўзгарувчан майдон учун эса бир жинсли тўлқин тенгламаларга айланади.

Бир жинсли бўлмаган (77.4—5) чизиқли тенгламаларнинг ечими, маълумки, ўнг томонсиз шу тенгламаларнинг ечими ва ўнг томонли тенгламаларнинг хусусий интеграли йиғиндиси кўринишида тасвирланиши мумкин. Бу хусусий интегрални топиш учун бутун фазони чексиз кичик бўлакларга бўламиз ва шундай ҳажм элементларидан бирида жойлашган заряд майдонини аниқлаймиз. Тенгламаларнинг чизиқлилиги туфайли ҳақиқий майдон барча шундай элементлар вужудга келтирган майдонлар йиғиндисига тенг бўлади.

Мазкур ҳажм элементидаги de заряд, умуман айтганда, вақтнинг функцияси бўлади. Агар координаталар бошини кўрилаётган ҳажм элементида олсак, у ҳолда заряд зичлиги $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, бундаги $\mathbf{R}$—координаталар бошидан ҳисобланган масофа. Шундай қилиб,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = -4\pi de(t)\,\delta(R) \qquad (77.6)$$

тенгламани ечишимиз керак.

Координаталар бошидан бошқа ҳамма ерда $\delta(\mathbf{R}) = 0$ ва биз

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (77.7)$$

тенгламага эга бўламиз. Равшанки, текширилаётган ҳолда φ марказий симметрияга эга, яъни у фақат R нинг функциясидир. Шунинг учун, агар Лаплас операторини сферик координаталарда ёзилса, у ҳолда (77.7)

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

кўринишни олади.

Бу тенгламани ечиш учун $\varphi = \chi(R,\ t)/R$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда χ учун

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Лекин бу ясси тўлқинлар тенгламаси бўлиб, унинг ечими

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

кўринишга эга.

Биз тенгламанинг фақат хусусий интегралини қидираётганимиз учун f_1 ва f_2 функциялардан фақат бирини олиш кифоядир. Одатда $f_2 = 0$ деб олиш қулайдир (бу ҳақда қуйига қ.). У ҳолда φ потенциал координаталар бошидан бошқа ҳамма ерда

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \qquad (77.8)$$

кўринишга эга бўлади. χ функция бу тенгликда ҳозир-

---

[1] (77.3) шарт 68-§ да фойдаланилган $\varphi = 0$, $\operatorname{div}A = 0$ шартларга нисбатан умумийроқ шартдир; кейинги шартларни қаноатлантирувчи потенциаллар (77.3) шартни ҳам қаноатлантиради. Аммо Лоренц шарти бу шартлардан фарқ қилади ва у инвариант характерга эга: Лоренц шартини бир саноқ системада қаноатлантирувчи потенциаллар уни ҳар қандай бошқа системада ҳам қаноатлантиради, Бу ҳол (77.3) шарт

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

тўрт ўлчовли-инвариант кўринишда ёзилиши мумкинлигидан кўриниб турибди.

ча ихтиёрийдир; уни потенциал учун координаталар бошида ҳам тўғри қиймат олинадиган қилиб танлаб оламиз. Бошқача қилиб айтганда, χ ни (77.6) тенглама координаталар бошида ҳам қаноатланадиган қилиб танлаб олинади. Бунинг учун $R\to 0$ бўлганда потенциалнинг чексизга интилиши, шунинг учун унинг координаталар бўйича ҳосилалари вақт бўйича ҳосилаларига қараганда тезроқ ўсишини эътиборга оламиз. Бинобарин, $R\to 0$ да (77.6) тенгламада $\Delta\varphi$ га нисбатан $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ ҳадни ҳисобга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда (77.6) тенглама бизга маълум бўлган ва Кулон қонунига олиб келадиган (59.10) тенгламага айланади. Шундай қилиб, координаталар боши яқинида (77.8) формула Кулон қонунига айланиши керак, шунга кўра $\chi(t)=de(t)$, яъни

$$\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Бу ифодадан заряднинг ихтиёрий $\rho(x, y, z, t)$ тақсимоти учун (77.5) тенглама ечимига ўтиш осон. Бунинг учун $de=\rho dV$ (бунда dV—ҳажм элементи) деб ёзиш ва бутун фазо бўйича интеграллаш кифоядир. Бир жинсли бўлмаган (77.5) тенгламанинг шу тариқа олинган ечимига ўнг томонсиз ўша тенгламанинг φ_0 ечимини ҳам қўшамиз. Шундай қилиб, умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\varphi(\mathbf{r}, t)=\int\frac{1}{R}\,\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{R}{c}\right)dV'+\varphi_0, \qquad (77.9)$$
$$\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ dV'=dx'dy'dz',$$

бунда $\mathbf{r}=(x, y, z)$, $\mathbf{r}'=(x', y', z')$; R — ҳажмнинг dV элементидан потенциалнинг қиймати қидирилаётган „кузатиш нуқтасигача" бўлган масофа. Бу ифодани қисқача

$$\varphi=\int\frac{\rho_{t}-R/c}{R}\,dV+\varphi_0 \qquad (77.10)$$

кўринишда ёзамиз, бу ердаги индекс ρ нинг қийматини $t-R/c$ вақт моментида олиш кераклигини кўрсатади (dV устидаги штрих эса тушириб қолдирилди).

Шунга ўхшаш тарзда вектор потенциал учун

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t}-R/c}{R}dV+\mathbf{A}_0 \qquad (77.11)$$

ифодани оламиз, бундаги $\mathbf{A}_0$—ўнг томонсиз (77.4) тенгламанинг ечими.

(77.10—11) ифодалар (φ_0 ва A_0 ларсиз) *кечикувчи потенциаллар* дейилади.

Ҳаракатсиз зарядлар (яъни ρ зичлик вақтга боғлиқ эмас) бўлган ҳолда (77.10) формула электростатик майдон потенциали учун олинган (59.9) формулага айланади; (77.11) формула эса зарядлар стационар ҳаракатланаётган ҳолда (ўртачалашдан сўнг) ўзгармас магнит майдоннинг вектор потенциали учун топилган (65.5) формулага ўтади.

(77.10—11) ифодалардаги φ_0 ва $\mathbf{A}_0$ катталиклар масала шартларини қаноатлантирадиган қилиб аниқланади. Бунинг учун бошланғич шартларни, яъни бошланғич вақт моментидаги майдонни бериш кифоядир. Аммо бундай бошланғич шартлардан, одатда фойдаланилмайди. Унинг ўрнига бутун вақт давомида зарядлар системасидан узоқ масофалардаги шартлар берилади. Масалан, системага тушаётган ташқи нурланиш берилади. Шунга мувофиқ бу нурланиш билан системанинг ўзаро таъсирлашуви оқибатида вужудга келган майдон ташқи майдондан фақат системадан чиқаётган нурланиш билангина фарқ қилиши мумкин. Системадан чиқувчи бундай нурланиш катта масофаларда системадан ташқарига йўналишда, (яъни ўсувчи R лар йўналишида) тарқалаётган тўлқин кўринишида бўлиши керак. Лекин бу шартни фақат кечикувчи потенциаллargina қаноатлантиради. Шундай қилиб, кечикувчи потенциаллар системадан чиқаётган майдонни тасвирлайди, φ_0 ва $\mathbf{A}_0$ ларни эса системага таъсир қилувчи ташқи майдонга айнан дейиш лозим.

78-§. Лиенар—Вихерт потенциаллари

$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)$ траектория бўйлаб муайян ҳаракат қилаётган бир нуқтавий заряд майдонининг потенциалларини аниқлаймиз.

Кечикувчи потенциаллар формулаларига мувофиқ $P(x, y, z)$ кузатиш нуқтасида t вақт моментидаги майдонни олдинги t' вақт моментидаги заряд ҳаракати ҳолати аниқлайди, ёруғлик сигналини заряд жойлашган $\mathbf{r}_0(t')$ нуқтадан P кузатиш нуқтасигача тарқалиш вақти $t-t'$ айирмага тенг бўлади. $R(t)=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$ вектор e заряддан P нуқтага ўтказилган радиус-вектор бўлсин; $\mathbf{r}_0(t)$ билан биргаликда у вақтнинг муайян функцияси ҳисобланади. У ҳолда t' момент

$$t' = -\frac{R(t')}{c} + t \qquad (78.1)$$

тенгламадан аниқланади. t' вақт моментида зарра тинч турадиган саноқ системасида кузатиш нуқтасидаги майдон t моментда Кулон потенциали орқали ифодаланади, яъни

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \qquad (78.2)$$

Тезлик $\mathbf{v}=0$ бўлганда φ ва $\mathbf{A}$ учун (78.2) қийматларни берадиган 4-векторни ёзиб, потенциалларнинг ихтиёрий саноқ системадаги ифодаларини ҳосил қиламиз. (78.1) га мувофиқ (78.2) даги φ ни

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкинлигини эътиборга олиб,

$$A^{\mu} = e\,\frac{u^{\mu}}{(R_{\nu}u^{\nu})} \qquad (78.3)$$

4-векторни топамиз. Бу ерда u^{μ}—заряднинг 4-тезлиги, R^{ν} эса компонентлари

$$R^{\nu} = (c(t-t'),\ r-r')$$

бўлган 4-вектор бу ердаги t', x', y', z' лар (78.1) муносабат орқали бир-бирига боғланган. (78.1) инвариант характерга эга, чунки у

$$R_{\nu}R^{\nu} = 0 \qquad (78.4)$$

инвариант кўринишда ёзилиши мумкин.

Ихтиёрий саноқ системада (78.3) 4-вектор компонентларининг маъносини уч ўлчовли белгилашларда очиб чиқиб, ихтиёрий ҳаракатланаётган нуқтавий заряд майдонининг потенциаллари учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad (78.5)$$

бу ердаги $\mathbf{R}$—заряд жойлашган нуқтадан P кузатиш нуқтасига ўтказилган радиус-вектор; тengликларнинг ўнг томонларидаги барча катталиклар қиймати (78.1) дан аниқланадиган t' вақт моментида олинган бўлиши керак. (78.5) кўринишдаги майдон потенциалларини *Лиенар—Вихерт потенциаллари* дейилади.

Электр ва магнит майдон кучланганликларини

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

формулалар бўйича ҳисоблаш учун φ ва $\mathbf{A}$ ни кузатиш нуқтасининг x, y, z координаталари бўйича ва кузатиш вақти t бўйича дифференциаллаш керак. Ваҳоланки, (78.5) формулалар потенциалларни t' нинг функциялари сифатида ва фақат (78.1) муносабат орқали x, y, z, t ларнинг ошкормас функциялари сифатида ифодалайди. Шунинг учун изланаётган ҳосилаларни ҳисоблашдан олдин t' бўйича ҳосилаларни топиш керак.

$R(t')=c(t-t')$ тенгликни t ва r бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right),$$

$$\mathrm{grad}\,R \equiv \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial R}{\partial t'}\,\mathrm{grad}\,t' + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = -c\,\mathrm{grad}\,t'. \qquad (78.6)$$

$R^2 = \boldsymbol{R}^2$ айниятни дифференциаллаб ва $\partial\mathbf{R}/\partial t' = -\mathbf{v}(t')$ ни (минус ишора $\mathbf{R}$ нинг e заряддан P нуқтагача ўтказилган радиус-вектор эканлиги, тезлик эса заряд координаталаридан вақт бўйича олинган ҳосила бўлганлигига алоқадор) ўрнига қўйиб, $\partial R/\partial t'$ ҳосилани топамиз; бундан

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}.$$

Иккинчи томондан

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Бу қийматларни (78.6) тенгликларга қўйсак,

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{vR}}{cR}}, \quad \text{grad}\, t'=-\frac{\mathbf{R}}{c\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)} \tag{78.7}$$

келиб чиқади. Шу формулалар ёрдамида **E** ва **H** майдонларни ҳисоблаш қийин эмас. Оралиқ ҳисобларни келтирмай, ҳосил бўлган натижани ёзамиз:

$$\mathbf{E}=e\,\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right] \tag{78.8}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{78.9}$$

Бу ерда $\dot{\mathbf{v}}=\partial\mathbf{v}/\partial t'$; тенгликларнинг ўнг томонидаги барча катталиклар t' моментда олинади. Магнит майдоннинг ҳамма жойда электр майдонга перпендикуляр бўлишлигини таъкидлаб ўтиш муҳим.

(78.8) электр майдон турли характерли икки қисмдан иборат. Биринчи ҳад фақат зарра тезлигига (унинг тезланишига эмас) боғлиқ ва катта масофаларда $1/R^2$ каби ўзгаради. Иккинчи ҳад тезланишга боғлиқ бўлиб, катта R масофаларда $1/R$ каби ўзгаради. Худди шу охирги ҳад зарра томонидан нурлантириладиган электромагнит тўлқинга алоқадор (бу ҳақда қуйида тўхталиб ўтамиз).

Тезланишга боғлиқ бўлмаган биринчи ҳад текис ҳаракатланаётган заряд майдонига мос келиши керак. Ҳақиқатан, бу ҳад аниқлаган майдоннинг (61.5) майдон билан айнанлигини кўрсатиш мумкин.

79-§. Зарядлар системасининг узоқ масофалардаги майдони

Ҳаракатланаётган зарядлар системаси майдонини система ўлчамига нисбатан катта бўлган масофаларда текширайлик.

Координаталар боши O ни зарядлар системасининг бирор ерида танлаб оламиз. O нуқтадан майдонни кузатиш нуқтаси P гача ўтказилган радиус-векторни $\mathbf{R}_0$ билан, шу йўналишдаги бирлик векторни $\mathbf{n}$ деб белгилаймиз.

Заряд элементи $de=\rho dV$ нинг радиус-вектори $\mathbf{r}$ бўлсин. de дан P гача ўтказилган радиус-векторни эса $\mathbf{R}$ орқали белгилаймиз; шунга кўра $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$.

Системадан узоқдаги $R_0 \gg r$ масофаларда тақрибан

$$R=|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|\approx R_0-\mathbf{nr}$$

деймиз. Буни кечикувчи потенциалларнинг (77.10—11) формулаларига қўямиз. Интеграл ости ифодалар махражида R_0 га нисбатан $\mathbf{rn}$ ни назарга олмаслик мумкин. $t-R/c$ аргументда эса умуман айтганда, бундай қилиш мумкин эмас; бундай назарга олмаслик имкониятини R_0/c ва $\mathbf{rn}/c$ ларнинг нисбий катталиги эмас, балки ρ ва $\mathbf{j}$ ларнинг ўзи $\mathbf{rn}/c$ вақтда қанча ўзгариши белгилайди. Интеграллашда R_0 ўзгармас бўлишлигини ва шунинг учун уни интеграл остидан чиқариш мумкинлигини эътиборга олиб, зарядлар системасидан катта масофаларда майдон потенциалларининг ифодаларини топамиз:

$$\varphi=\frac{1}{R_0}\int\rho_{\,t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV, \tag{79.1}$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int\mathbf{j}_{\,t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV. \tag{79.2}$$

Системадан етарлича узоқ масофаларда фазонинг кичик бўлакларидаги майдонни ясси тўлқин каби олиш мумкин. Бунинг учун масофа, фақат система ўлчамларига нисбатангина эмас, балки система нурлантираётган электромагнит тўлқинлар узунлигига нисбатан ҳам катта бўлиши керак. Майдоннинг бу соҳасини нурланишнинг *тўлқин зонаси* дейилади.

Ясси тўлқинда **E** ва **H** майдонлар бир-бири билан (69.4) муносабат ёрдамида боғланган: $\mathbf{E}=[\mathbf{Hn}]$. Аммо $\mathbf{H}=\text{rot}\,\mathbf{A}$ бўлганлигидан майдонни тўлқин зонада тўла аниқлаш учун фақат вектор потенциални ҳисоблаш кифоядир. Ясси тўлқинда $\mathbf{H}=[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ [(69.3) билан таққосланг], бунда ҳарф устидаги нуқта вақт бўйича дифференциаллашни билдиради. Шундай қилиб, **A** ни билган ҳолда

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}],\ \mathbf{E}=\frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] \qquad (79.3)$$

формулалар бўйича **H** ва **E** ни топамиз[1].

Узоқ масофаларда майдоннинг нурлантираётган системадан ҳисобланган $\mathbf{R}_0$ масофанинг биринчи даражасига тескари пропорционал эканини таъкидлаймиз. Шуни ҳам айтиш керакки t вақт (79.1—3) ифодаларга R_0 масофа билан $t-R_0/c$ комбинацияда киради.

Система нурлантираётган электромагнит тўлқинлар ўзи билан бирга муайян энергияни олиб кетади. Энергия оқимини ясси тўлқинда

$$\mathbf{S}=c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}$$

бўлган Пойнтинг вектори ифодалайди.

Фазовий бурчак элементи do даги нурланишнинг dI интенсивлиги деб, маркази координаталар бошида жойлашган R_0 радиусли сферик сиртнинг $dt=R_0^2 do$ элементи орқали бирлик вақт ичида оқиб ўтувчи энергия миқдорига айтилади. Бу миқдор энергия оқимининг зичлиги S нинг df га кўпайтмасига тенг, яъни

$$dI=c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do. \qquad (79.4)$$

H майдон R_0 га тескари пропорционал бўлганлиги учун, система бирлик вақтда do фазовий бурчак элементи ичига нурлантираётган энергия миқдори барча масофаларда (улар учун $t-R_0/c$ айирма бир хил қийматга эга бўлган ҳолда) бир хил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, система томонидан нурлантирилаётган энергия, ҳеч қаерда тўпланмасдан ва йўқ бўлмасдан, атрофга c тезлик билан тарқалади.

80-§. Диполь нурланиш

Агар $\mathbf{rn}/c$ вақт ичида зарядлар тақсимоти оз ўзгарса, у ҳолда (79.1—2) кечикувчи потенциалларнинг интеграл ости ифодаларида $\mathbf{rn}/c$ вақтни назарга олмаслик мумкин. Бу талабни амалга ошириш шартларини топиш осон. Системада зарядлар тақсимоти сезиларли даражада ўзгарадиган вақт интервалининг катталиги T бўлсин. Бу системанинг T нурланиши тартибдаги даврга (яъни $1/T$ тартибдаги частотага) эга бўлади. a орқали эса система ўлчамларининг катталик тартибини белгилаймиз. У ҳолда вақт $\mathbf{rn}/c \sim a/c$ бўлади. Шу вақт ичида системада зарядлар тақсимоти сезиларли ўзгармаслиги учун $a/c \ll T$ бўлиши зарур. Лекин c/T кўпайтма нурланишнинг λ тўлқин узунлигига тенг. Демак, $a \ll cT$ шартни

$$a \ll \lambda \qquad (80.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, яъни системанинг ўлчамлари нурлантирилувчи тўлқин узунлигидан кичик бўлиши керак.

Агар v зарядлар тезлигининг катталик тартиби бўлса, унда $T \sim a/v$ бинобарин, $\lambda \sim ca/v$ бўлишини назарда тутиб, юқоридаги шартни бошқача ёзиш ҳам мумкин. У ҳолда $a \ll \lambda$ шартдан:

$$v \ll c, \qquad (80.2)$$

яъни зарядлар тезлиги ёруғлик тезлигидан кичик бўлиши керак.

Бу шарт бажарилган деб фараз қиламиз ва нурлантирувчи системадан тўлқин узунлигига нисбатан (бинобарин, система ўлчамига нисбатан) узоқ масофаларда нурланишни ўрганамиз. 79-§ да кўрсатилганидек, бундай масофаларда майдонни ясси тўлқин деб қараш мумкин ва шу сабабли, майдонни аниқлаш учун фақат вектор потенциални ҳисоблаш кифоя.

(79.2) вектор потенциал энди

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV \qquad (80.3)$$

кўринишга эга, бундаги $t'=t-R_0/c$ вақт интеграллаш ўзгарувчиларига боғлиқ эмас. $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ ни ўрнига қўйиб, (80.3) ни

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда йиғиндини системанинг барча зарядлари бўйича олинади: соддалик учун t' индексни тушириб қолдирамиз—тенгликларнинг ўнг

---

[1] $\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{A}}/c$ формvла [(69.3) га қ.| бу ерда қўлланила олмайди, чунки φ, **A** потенциаллар уларга қўйилган қўшимча шартларни (69- §) қаноатлантирмайди.

томонларидаги барча катталиклар t' вақт моментида олинади. Лекин

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

бундаги d—системанинг диполь моменти. Шундай қилиб,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \tag{80.4}$$

(79.3) формулалар ёрдамида магнит майдон

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{80.5}$$

электр майдон эса

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] \tag{80.6}$$

бўлишлигини топамиз.

Қўрилаётган яқинлашишда нурланишни системанинг диполь моментидан олинган иккинчи ҳосила орқали аниқланади. Бундай нурланишни *диполь нурланиш* дейилади.

$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$ бўлганлигидан $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Шундай қилиб, зарядлар фақат улар тезланишли ҳаракат қилганларидагина нурланиш бўлиши мумкин. Текис ҳаракат қилувчи зарядлар нурланмайди. Бу хулоса бевосита нисбийлик назариясидан ҳам келиб чиқади: текис ҳаракат қилаётган зарядни у тинч турадиган инерциал системада қараш мумкин, тинч турган зарядлар нурланмайди

(80.5) ни (79.4) га қўйиб, диполь нурланиш интенсивлигини ҳосил қиламиз:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}|\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}|^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do, \tag{80.7}$$

бундаги θ бурчак $\ddot{\mathbf{d}}$ ва $\mathbf{n}$ векторлар орасидаги бурчакдир. Шу ифода системанинг do фазовий бурчак элементига вақт бирлигида нурлантирадиган энергия миқдоридир; нурланишнинг бурчак тақсимоти $\sin^2\theta$ кўпайтувчи орқали ифодаланади.

$do = 2\pi\sin\theta d\theta$ ни ўрнига қўйиб ва $d\theta$ бўйича 0 дан π гача интеграллаб, тўла нурланиш ифодасини оламиз:

$$I = \frac{1}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{80.8}$$

Агар ташқи майдонда биттагина заряд ҳаракат қилаётган бўлса, у ҳолда $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ ва $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ бўлади ($\mathbf{w}$—заряд тезланиши). Шундай қилиб, ҳаракатланаётган заряднинг тўла нурланиши

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}. \tag{80.9}$$

Система вужудга келтираётган нурланишни спектрал ажратиш мумкин. Равшанки, нурланишнинг маълум монохроматик компонентларини вужудга келтиришда системанинг диполь моменти $\mathbf{d}(t)$ нинг худди ўшандай компонентлари масъулдир. Бунда Фурье қаторига ёки интегралига ёйиш ҳолларини фарқ қилиш лозим.

Агар зарядлар ω_0 частотали даврий ҳаракат қилаётган бўлса, у ҳолда диполь моменти (у билан бирга нурланиш майдони ҳам) Фурье қаторига ёйилиши керак. Умумий (72.4) формулага мувофиқ монохроматик ($\omega = n\omega_0$ частотали) компонентининг интенсивлиги нурланишнинг ўртача интенсивлиги учун олинган

$$I = \frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2} \tag{80.10}$$

формуладан топилади, бунинг учун унда $\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}$ ўртача квадратни мос Фурье компоненти модули квадратининг иккиланганига алмаштирилади:

$$I_\omega = \frac{4}{3c^2}|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2.$$

$\ddot{\mathbf{d}}(t)$ векторнинг Фурье компонентини $\mathbf{d}(t)$ векторнинг Фурье компоненти орқали ифодалаш мумкин. Бунинг учун $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ ёйилманинг ҳар бир ҳади $\mathbf{d}(t)$ ёйилманинг мос ҳадини вақт бўйича дифференциаллаш йўли билан ҳосил қилиниши лозим, яъни

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

бундан

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2\mathbf{d}_\omega. \tag{80.11}$$

Шунинг учун

$$I_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_\omega|^2. \tag{80.12}$$

Зарядланган зарралар тўқнашишида содир бўладиган нурланишни (у *тормозланишдаги нурланиш* дейилади) текширишда эса Фурье интегралига ёйиш усули билан иш кўришга тўғри келади. Бунда бутун тўқнашиш вақтида нурлантирилган тўла энергияни аниқлаш муҳимдир. Айтайлик, $d\mathscr{E}_\omega$— частоталари ω ва $\omega + d\omega$ оралиғида бўлган тўлқинлар кўринишида нурлантирилган энергия бўлсин. (72.8) га мувофиқ уни нурланишнинг тўла энергияси учун ёзилган

$$\Delta\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2 dt \qquad (80.13)$$

формуладан интегрални $2|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 d\omega/2\pi$ катталикка алмаштириш йўли билан топамиз:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3}|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 d\omega. \qquad (80.14)$$

Зарядларининг массага нисбати бир хил бўлган зарралардан ташкил топган ёпиқ система диполь тарзида нурлана олмайди. Ҳақиқатан, бундай системанинг диполь моменти

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const} \sum m\mathbf{r}$$

бўлади (const$=e/m$ барча зарралар учун бир хил катталик). Лекин $\sum m\mathbf{r} = R\sum m$, бундаги R — система инерция моментининг радиус-вектори (барча тезликлар $v \ll c$ бинобарин, норелятивистик механика қонунлари ўринлидир). Шунинг учун $\ddot{\mathbf{d}}$ катталик инерция марказининг тезланишига пропорционал (инерция маркази текис ҳаракатланади), яъни нолга тенг бўлади.

Агар диполь нурланиш йўқ бўлса, у ҳолда система нурлантирадиган энергияни аниқлаш учун майдон потенциалининг кичик a/λ нисбат даражалари бўйича ёйилмасидаги юқорироқ ҳадларга мурожаат қилиш лозим. Навбатдаги (диполь яқинлашишдан кейинги) яқинлашишда системанинг электр квадруполь моменти ҳамда магнит моменти тебранишлари билан аниқланадиган нурланиш вужудга келади.

Масалалар[1].

1. Бир текисликда ўзгармас Ω бурчак тезлик билан айланаётган d диполнинг нурланиши аниқлансин.

Ечилиши. Айланиш текислигини xy текислик ўрнида танлаб, қуйидагини ёза оламиз:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Бу функциялар монохроматик бўлганлиги туфайли нурланиш ҳам монохроматик ва $\omega = \Omega$ частотали бўлади. (80.7) формулага кўра ўртача (айланиш даври бўйича) нурланишнинг бурчак тақсимоти учун

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2\Omega^4}{8\pi c^3}(1 + \cos^2\vartheta)do$$

ифодани топамиз, бундаги ϑ — нурланишнинг $\mathbf{n}$ йўналиши ва z ўқи орасидаги бурчак. Тўла интенсивлик

$$\overline{I} = \frac{2d_0^2\Omega^4}{3c^3}.$$

2. Икки итаришувчи зарранинг пеш тўқнашишида чиқариладиган тўла нурланиш аниқлансин.

Ечилиши. Координаталар бошини зарралар системасининг инерция марказида танлаб, системанинг диполь моменти учун ушбу

$$\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2 = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r}$$

ифодани ҳосил қиламиз, бундаги 1 ва 2 индекслар икки заррага тегишли, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — улар орасидаги радиус-вектор, $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — келтирилган масса. Зарраларнинг нисбий ҳаракат тенгламаси

$$\dot{\mathbf{p}} = \mu\dot{\mathbf{v}} = \frac{e_1e_2\mathbf{r}}{r^3}$$

$(e_1e_2 > 0)$ бўлади. (80.13) га мувофиқ тормозланиш нурланишининг тўла энергияси

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{2}{3c^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2(e_1e_2)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{r^4}. \qquad (1)$$

Пеш тўқнашишда зарраларнинг нисбий тезлиги (v)

$$\frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1e_2}{r} = \frac{\mu v_\infty^2}{2},$$

тенгламадан аниқланади (v_∞ — чексизликдаги тезлик). Интегралда $dt = dr/v$ ни ўрнига қўйиб, dt бўйича интеграллашни dr бўйича $-\infty$ дан $r_{\min} = 2e_1e_2/\mu v_\infty^2$ гача ва $r_{\min}$ дан ∞ гача интеграллашга алмаштирамиз:

---

[1] Барча масалаларда зарралар тезликлари $v \ll c$ деб олинади.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{r^4}=2\int\limits_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^4\sqrt{v_\infty^2-\frac{2e_1e_2}{\mu r}}}.$$

Интегрални ҳисоблаш натижасида

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{8\mu^3v_\infty^5}{45c^3e_1e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2$$

келиб чиқади

3. Бир заряднинг иккинчи заряд ёнидан ўтиб кетишида чиқариладиган тўла нурланиш аниқлансин. Нисбий тезлик ҳаракатнинг тўғри чизиқдан четга оғиши кичик бўладиган даражада катта (c га нисбатан эса кичик) деб ҳисоблансин.

Ечилиши. Агар $\mu v^2 \gg e_1e_2/\rho$ бўлса ($\mu v^2/2$ кинетик энергия e_1e_2/ρ катталик тартибида бўлган потенциал энергиядан катта бўлса), оғиш бурчаги кичик бўлади. v тезликли тўғри чизиқли ҳаракатда $r=\sqrt{\rho^2+v^2t^2}$, бундаги ρ — мўлжал масофа.

r нинг бу ифодасини олдинги масаланинг (1) формуласига қўямиз ва интегрални ҳисоблаймиз. у ҳолда

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\pi(e_1e_2)^2}{3vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2$$

чиқади.

4. Тормозланиш нурланишининг кичик частоталар соҳасидаги спектрал тақсимот формуласи топилсин1).

Ечилиши.

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ddot{\mathbf{d}}(t)\,e^{i\omega t}\,dt=\mu\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{v}}e^{i\omega t}\,dt$$

интегралда $\dot{\mathbf{v}}$ тезланиш фақат τ тартибидаги вақт интервалидагина нолдан сезиларли фарқ қилади. Шунга кўра $\omega \ll 1/\tau$ частоталар учун интеграл остида $\omega t \ll 1$ деб ҳисоблаш ва $e^{i\omega t}\approx 1$ деб олиш мумкин. У ҳолда

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega=\mu\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{v}}\,dt=\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\Delta\mathbf{p},$$

бундаги $\Delta\mathbf{p}$ — нисбий ҳаракат импульси $\mathbf{p}=\mu\mathbf{v}$ нинг тўқнашиш оқибатида ўзгариши. (80.14) га мувофиқ $d\omega$ частоталар интервалида нурлантирилган энергия

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{2}{3\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(\Delta\mathbf{p})^2\,d\omega.$$

---

1) Тормозланиш нурланишининг спектрал тақсимотида интенсивликнинг асосий ҳиссаси $\omega\sim 1/\tau$ частоталарга тўғри келади, бундаги τ тўқнашув давомийлигининг катталик тартибидир. Бунга мос равишда, кичик частоталар деб $\omega \ll 1/\tau$ частоталарни тушунамиз.

Демак, тақсимот частотага боғлиқ эмас экан, яъни $d\mathscr{E}_\omega/d\omega$ ҳосила $\omega\to 0$ бўлганда ўзгармас лимитга интилади.

5. Ўзгармас бир жинсли магнит майдонда доиравий траектория бўйлаб ҳаракатланаётган заряднинг нурланиш интенсивлиги аниқлансин.

Ечилиши. (48.8) ва (80.9) формулаларга мувофиқ

$$I=\frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5}.$$

81-§. Тез ҳаракатланаётган заряд нурланиши

Ёруғлик тезлигига яқин тезлик билан ташқи майдонда ҳаракатланаётган зарядланган зарранинг нурланиши ҳақидаги масалани ечишда майдон учун (78.8—9) Лиенар — Вихерт ифодаларидан фойдаланиш қулай. Заррадан узоқ масофаларда $1/R$ нинг энг паст даражаси кирган ҳадни [(78.8) даги иккинчи ҳадни] гина сақлаб қолишимиз керак. Нурланиш йўналишида $\mathbf{n}$ бирлик вектор ($\mathbf{R}=\mathbf{n}R$) киритиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)},\quad \mathbf{H}=[\mathbf{nE}], \tag{81.1}$$

бунда тенгликнинг ўнг томонидаги барча катталиклар кечикувчи $t'=t-R/c$ вақт моментида олинади.

$d o$ фазовий бурчакдаги нурланиш интенсивлиги E^2 га пропорционал бўлиб, ҳосил бўладиган бурчак тақсимот умумий ҳолда анча мураккаб. Лекин ультрарелятивистик ҳолда (v тезлик c га яқин; $1-v/c \ll 1$) бурчак тақсимот махражларда $1-\mathbf{vn}/c$ айирманинг юқори даражалари борлигига алоқадор бўлган характерли хусусиятга эга. Хусусан, бу айирма кичик бўлган бурчакларнинг тор интервалида интенсивлик катта бўлади $\mathbf{v}$ ва $\mathbf{n}$ орасидаги кичик бурчакни θ деб белгилаймиз, у ҳолда

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta\approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right). \tag{81.2}$$

Бу айирма

$$\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{81.3}$$

бўлганда кичик бўлади.

Шундай қилиб, ультрарелятивистик зарра ўз ҳаракати бўйлаб тезлик йўналиши атрофидаги (81.3) бурчаклар интервалида нур сочади.

dt вақт мобайнида do фазовий бурчак элементига нурлантирилган энергия

$$\left(\frac{c}{4\pi}E^2R^2do\right)dt \qquad (81.4)$$

га тенг. Аммо нурланиш интенсивлигини ҳисоблашда уни аниқлашнинг икки хил усулини бир-биридан фарқ қилиш зарур.

(81.4) да dt кузатиш нуқтасидаги вақт интервали деб олинди, бинобарин, қавс ичидаги ифода интенсивликни кўрсатади. У бирлик вақт давомида кузатувчи қайд этадиган нурланиш энергияси сифатида аниқланган. Лекин тўлқиннинг нурланаётган заррадан кузатиш нуқтасигача тарқалишида кечикиш эффекти содир бўлиши туфайли dt' вақт интервали (бу даврда зарра (81.4) энергияни нурлантирган) ва dt интервал бир-бирига тенг эмас. (78.7) га мувофиқ

$$dt=\frac{\partial t}{\partial t'}dt'=\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)dt' \qquad (81.5)$$

тенгликни оламиз.

Агар интенсивлик зарранинг бирлик вақтда нурлантирган энергияси сифатида аниқланса, у қуйидагича бўлади:

$$dI=\frac{c}{4\pi}E^2\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)R^2do. \qquad (81.6)$$

80- § да фараз қилинганидек, $v \ll c$ бўлганда $(1-\mathbf{nv}/c)$ кўпайтувчи 1 билан алмаштирилиши мумкин ва бунда интенсивликнинг иккала таърифи ҳам мос тушади.

Масала

Ўзгармас бир жинсли магнит майдонда доиравий траектория бўйлаб ҳаракатланаётган ультрарелятивистик зарранинг нурланиш интенсивлиги аниқлансин.

Ечилиши. Зарранинг тезланиши ва тезлиги ўзаро перпендикуляр бўлганида (81.1) ва (81.6) формулалар асосида ҳисоблаш қуйидаги натижани беради:

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^3}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\right\}do,$$

бундаги θ бурчак $\mathbf{n}$ ва $\mathbf{v}$ орасидаги бурчак, φ эса $\mathbf{n}$ вектор билан $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ орқали ўтувчи текисликнинг азимутал бурчаги. Ультрарелятивистик ҳолда кичик θ лар соҳаси асосий роль ўйнайди. Бу соҳада

$$dI=\frac{2e^2w^2}{\pi c^3}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)^3}-\frac{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\theta^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)^5}\cos^2\varphi\right\}do,$$

фазовий бурчак элементи эса $do=\sin\theta d\theta d\varphi \approx \theta d\theta d\varphi$. $d\theta$ бўйича интеграл тез яқинлашувчан бўлганлигидан тўла интенсивликни ҳисоблашда $d\theta$ бўйича интеграллашни 0 дан ∞ гача бўлган соҳада олиш мумкин. Натижада

$$I=\frac{2e^4H^2}{3m^2c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

келиб чиқади

Бу ерда H магнит майдондаги айланма ҳаракат тезланиши учун

$$w=\frac{evH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\frac{eH}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ифода ҳам ўз ўрнига қўйилган.

82- §. Нурланиш туфайли тормозланиш

Ҳаракатланаётган зарядлар электромагнит тўлқинларни нурлантириб, маълум энергия йўқотадилар. Бу энергия йўқотишнинг зарядлар ҳаракатига тескари таъсирини тавсифлаш учун ҳаракат тенгламаларига мос $\mathbf{f}$ „ишқаланиш кучлари“ киритилади.

Норелятивистик тезликда $(v \ll c)$ стационар ҳаракат қилаётган зарядлар системасининг бирлик вақтга нисбатан ўртача энергия йўқотиши нурланишнинг (80.10) ўртача интенсивлигига тенг. $\mathbf{f}$ кучларни энергия йўқотиш шу кучларнинг ўртача иши сифатида олинадиган қилиб танлаймиз. $\mathbf{f}$ кучнинг бирлик вақтдаги иши $\mathbf{fv}$ кўпайтмага тенг ($\mathbf{v}$ — зарра тезлиги). Шундай қилиб,

$$\sum_a \overline{\mathbf{f}_a\mathbf{v}_a}=-\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2} \qquad (82.1)$$

бўлиши керак (йиғиндини системадаги барча зарралар бўйича олинади).

Бу талабни

$$\mathbf{f}_a=\frac{2e_a}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \qquad (82.2)$$

кучлар қаноатлантиради. Ҳақиқатан,

$$\sum_a \mathbf{f}_a\mathbf{v}_a = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \sum_a e_a\mathbf{v}_a = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\ddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

Бу тенгликни ўрталаштирганда вақт бўйича тўла ҳосилали биринчи ҳад нолга айланади (65-§ даги изоҳни таққосланг) ва яна (82.1) ифоданинг ўзи ҳосил бўлади. (82.2) кучларни *нурланиш туфайли тормозланиш* ёки *Лоренц ишқаланиш кучлари* дейилади.

Нурланиш туфайли тормозланиш ташқи майдонда фақат бир зарра ҳаракат қилганида ҳам юз беради. Бу ҳолда $\dddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{v}}$ ва (82.2) кучни ҳисобга олган ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \qquad (82.3)$$

Аммо заряднинг „ўз-ўзига" таъсирини тормозланиш кучи ёрдамида тавсифлаш тамомила қаноатланарли эмаслигини ва бу тавсифнинг ўзида зиддият борлигини назарда тутиш керак. Ҳақиқатан, ташқи майдон бўлмаган ҳолда (82.3) тенглама

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

кўринишни олади. Бу тенглама тривиал ечим $\mathbf{v} = \text{const}$ дан ташқари бошқа ечимга ҳам эгадир. Кейинги ечимда $\dot{\mathbf{v}}$ тезланиш $\exp(3mc^2t/2e^2)$ га пропорционал, яъни вақт билан бирга чексиз ортиб боради. Демак, масалан, бирор майдон орқали ўтган заряд майдондан чиққач, тўхтовсиз „ўз-ўзини тезлантириши" керак бўлар экан. Бу натижанинг маъносизлиги (82.3) тенгламанинг маълум қўлланишгагина эга эканлигидан дарак беради.

Энергия сақланиши қонунини қаноатлантирувчи электродинамика қандай қилиб „эркин зарра ўз энергиясини чексиз ошира олади" деган маъносиз хулосага олиб келиши мумкин, деган савол туғилиши мумкин. Бу қийинчиликнинг илдизи, аслида, олдин эслаб ўтилган (60-§) элементар зарраларнинг чексиз электромагнит „хусусий массаси" дадир. Заряднинг чекли массасини ҳаракат тенгламаларида ёзганимизда, биз, аслида расман, заряднинг ноэлектромагнит табиатли чексиз манфий „хусусий массаси" бор ва у электромагнит масса билан бирга зарранинг чекли массасини беради деб, ҳисоблаймиз. Аммо бир чексиздан иккинчисини айириш

ўринли математик операция эмас: у қатор (жумладан, юқорида кўрсатилган) қийинчиликларга олиб келади.

Шундай қилиб, тормозланиш кучи ўз-ўзидан зид натижаларга олиб келганлигидан (82.2) ифодани бу куч зарядга ташқи майдон таъсир қилаётган кучга нисбатан кичик бўлгандагина қўлланиш мумкин.

83-§. Эркин зарядлардан сочилиш

Агар зарядлар системасига электромагнит тўлқин тушаётган бўлса, у ҳолда тўлқин таъсирида зарядлар ҳаракатлана бошлайди. Бу ҳаракат, ўз навбатида ҳамма томонга нурланиш вужудга келтиради; дастлабки тўлқиннинг *сочилиши* юз беради.

Сочилишни сочувчи система томонидан маълум йўналишда бирлик вақтда нурлантирилаётган энергия миқдорининг системага тушаётган нурланиш энергиясининг оқим зичлигига нисбати орқали характерлаш қулай. Бу нисбат юза ўлчамлигига эга ва у *сочилиш кесими* дейилади (15-§ га таққосланг).

Системага $\mathbf{S}$ Пойнтинг вектори билан характерланадиган тўлқин тушаётган бўлсин, dI эса система томонидан do фазовий бурчакка 1 *сек* да нурлантирилаётган энергия бўлсин. У ҳолда do фазовий бурчакка сочилиш кесими

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \qquad (83.1)$$

бўлади (ҳарф устидаги чизиқ вақт бўйича ўртача қийматни билдиради). $d\sigma$ дан барча йўналишлар бўйича олинган интеграл (σ) ни сочилишнинг тўла кесими дейилади.

Ҳаракатсиз эркин заряд томонидан сочилишни кўриб ўтайлик. Бу зарядга ясси монохроматик чизиқли қутбланган тўлқин тушаётган бўлсин. Унинг электр майдонини

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Тушаётган тўлқин майдони таъсирида заряднинг олган тезлиги ёруғлик тезлигидан кичик (бу шарт, амалда, ҳамма вақт бажарилади) деб фараз қиламиз. У ҳолда зарядга таъсир қилаётган кучни $e\mathbf{E}$ га тенг деб ҳисоблаш, магнит майдон томонидан таъсир қилаётган $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ кучни эса ҳисобга олмаслик мумкин. Шунингдек, майдон таъсирида заряднинг тебранишлари вақтидаги силжишининг таъсирини ҳам назарга олмаслик мумкин. Агар заряд координаталар боши атрофида тебранадиган бўлса, у ҳолда ҳамма вақт унга координаталар бошида мавжуд бўладиган майдон, яъни

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

таъсир қилади деб ҳисоблаш мумкин.

Заряднинг ҳаракат тенгламаси

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

унинг диполь моменти эса $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ бўлганлигидан

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{83.2}$$

Сочилган нурланишни ҳисоблашда диполь нурланиш учун чиқарилган (80.7) формуладан фойдаланамиз, чунки заряд оладиган тезлик кичик деб фараз қилинди. Заряд томонидан нурлантириладиган (яъни сочилган) тўлқиннинг частотаси тушаётган тўлқин частотасига тенг бўлади.

(83.2) ни (80.7) га қўйсак,

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{En}]^2 do$$

ҳосил бўлади. Иккинчи томондан, тушаётган тўлқиннинг Пойнтинг вектори

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2. \tag{83.3}$$

Бундан do фазовий бурчакка сочилиш кесимини топамиз:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do \tag{83.4}$$

(θ — сочилиш йўналиши ($\mathbf{n}$ вектор) ва тушаётган тўлқиннинг $\mathbf{E}$ электр майдон йўналиши орасидаги бурчак). Демак, эркин заряд томонидан сочилиш кесими частотага боғлиқ эмас экан.

Тўла кесим σ ни аниқлаш учун $\mathbf{E}$ нинг йўналишини қутб ўқи йўналиши деб оламиз, у ҳолда $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ бўлади.

Интегрални $d\theta$ бўйича 0 дан π гача, $d\varphi$ бўйича 0 дан 2π гача олсак,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \tag{83.5}$$

келиб чиқади. Бу *Томсон формуласи* дейилади.

Масалалар

1. Қутбланмаган тўлқин (табиий ёруғлик) нинг сочилиши учун $d\sigma$ сочилиш кесими топилсин.

Ечилиши. (83.4) ни $\mathbf{E}$ векторнинг тушаётган тўлқин тарқалиши йўналишига ($\mathbf{k}$ тўлқин вектор йўналишига) перпендикуляр текисликдаги барча йўналишлари бўйича ўртачалаш керак. z ўқи $\mathbf{k}$ бўйича, x ўқи $\mathbf{E}$ бўйича йўналган координаталар системаси танлаб оламиз. У ҳолда $\mathbf{n}$ ва $\mathbf{E}$ йўналишлари орасидаги бурчакнинг косинуси, яъни $\mathbf{n}$ бирлик векторнинг x ўқига проекцияси $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$ бўлади, бундаги θ ва φ — $\mathbf{n}$ йўналишнинг қутб бурчаги ва азимутидир. $\mathbf{k}$ га перпендикуляр текисликда $\mathbf{E}$ нинг барча йўналишлари бўйича ўртачалаш φ азимут бўйича ўртачалашга эквивалент. Демак,

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta)$$

ва буни (83.4) га қўйсак,

$$a\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc}\right)^2(1 + \cos^2\vartheta)do.$$

2. Ҳаракатланаётган заряд сочган ёруғликнинг (ω) частотаси аниқлансин.

Ечилиши. Зарра ҳаракатсиз бўлган саноқ системасида (зарра тинч ҳолдаги система) сочилишида ёруғлик частотаси ўзгармайди: $\omega' = \omega$. Бу муносабатни

$$k'_\mu u^\mu = k_\mu u^\mu ..$$

инвариант кўринишда ёзиш мумкин, бундаги k^μ ва $k^{1\mu}$ тушаётган ва сочилаётган ёруғликнинг тўлқин 4-векторлари, u^μ эса зарранинг 4-тезлиги (тинч ҳолдаги системасида фақат $u^0 = 1$ компонент нолдан фарқ қилади, холос). Бу тенгликни ихтиёрий (зарра $\mathbf{v}$ тезлик билан ҳаракат қиладиган) саноқ системада ёйиб ёзиш мумкин:

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

бундаги θ ва θ' — тушаётган ва сочилаётган тўлқинлар йўналиши билан $\mathbf{v}$ йўналиш орасидаги бурчаклар.

3. Чизиқли қутбланган тўлқиннинг фазовий осциллятор (бирор эластик куч таъсирида ω_0 частотали кичик тебранишлар қилаётган заряд) томонидан сочилиш кесими аниқлансин. Нурланиш туфайли тормозланиш кучи ҳисобга олинсин.

Ечилиши. Осцилляторнинг унга тушаётган тўлқиндаги ҳаракат тенгламаси

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}$$

кўринишда ёзилади. Тормозланиш кучида (ўнгда иккинчи ҳад) тақрибан $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$ дейиш мумкин; у ҳолда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2.$$

Бундан мажбурий тебранишлар учун қуйидаги ифодани **топамиз:**

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Кейинги ҳисоблашлар параграф текстидаги каби бажарилади (комплекс кўринишда тасвирланган катталиклар квадратларининг ўртача қийматларини ҳисоблашда 70- § даги изоҳда айтилганларни эътиборга олиш керак).

Натижада сочилиш кесими ифодасини оламиз:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

84-§. Зарядлар системасидан сочилиш

Электромагнит тўлқинларнинг зарядлар системасидан сочилиши якка (ҳаракатсиз) заряддан сочилишдан фарқ қилади; системада зарядларнинг хусусий ҳаракати мавжудлигидан сочилган нурланишнинг частотаси тушган тўлқин частотасидан фарқ қилиши мумкин. Хусусан, сочилган нурланишнинг спектрал ажралмаси таркибига тушаётган тўлқиннинг ω частотаси билан бир қаторда ω дан сочувчи система ҳаракатининг хусусий частоталаридан бири қадар фарқ қилувчи ω′ частоталар ҳам киради. Частота ўзгариши билан бўладиган сочилиш (частота ўзгаришсиз бўладиган *когерент* сочилишдан фарқли равишда) *нокогерент* (ёки *комбинацион*) сочилиш дейилади.

Тушаётган тўлқин майдонини кучсиз деб фараз қилиб, ток зичлигини $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$ кўринишда тасвирлаш мумкин, бундаги $\mathbf{j}_0$ — ташқи майдон бўлмагандаги ток зичлиги, $\mathbf{j}'$ эса тушаётган тўлқин таъсирида токнинг ўзгариши. Шунга мувофиқ система майдонининг вектор потенциали (ва бошқа катталиклар) ҳам $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$ кўринишда бўлади ($\mathbf{A}_0$ ва $\mathbf{A}'$ ларни $\mathbf{j}_0$ ва $\mathbf{j}'$ токлар вужудга келтиради). $\mathbf{A}'$ потенциал сочилган тўлқинни кўрсатади ва $\mathbf{j}'$ ток орқали (79.2) формуладан аниқланади:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{e}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV \tag{84.1}$$

Сочилаётган тўлқинларнинг ω частотаси системанинг асосий хусусий частоталаридан кичик ёки катта бўлган икки чегаравий ҳолни қарайлик. Хусусий частоталарнинг катталик тартиби $\omega_0 \sim v/a$, бунда v — системадаги зарядлар тезлиги, a эса унинг ўлчами. Шунингдек, $v \ll c$ деб ҳам фараз қиламиз.

Текширишни

$$\omega \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a} \tag{84.2}$$

ҳолдан бошлаймиз. Сочилишда ҳам когерент, ҳам нокогерент қисмлар бўлиши мумкин, лекин ҳозир фақат когерент сочилишни оламиз.

(84.2) шартга асосан (84.1) формуладан 80- § да қилинганига ўхшаш соддалаштиришлар қилиш мумкин. Бошқача қилиб айтганда, сочилган нурланиш диполь нурланиш бўлади. Агар шундай деб олсак, у ҳолда унинг ω частотали спектрал компонентининг интенсивлиги Фурье компонентининг $|\ddot{\mathbf{d}}'_\omega|^2 = \omega^4|\mathbf{d}'_\omega|^2$ квадратига пропорционал бўлади ($\mathbf{d}'$ — диполь моментнинг тушаётган тўлқин таъсирида ўзгариши).

Агар системанинг тўла заряди нолга тенг бўлса (нейтрал атом ёки молекула), у ҳолда $\omega \to 0$ да $\mathbf{d}'_\omega$ ўзгармас лимитга интилади (агар йиғинди заряд нолдан фарқ қилса, у ҳолда $\omega = 0$ бўлганда, яъни ўзгармас майдонда система яхлит ҳолда ҳаракат қила бошлаган бўлар эди). Шунинг учун ω лар кичик бўлганда $\mathbf{d}_\omega$ ни частотага боғлиқ эмас деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда сочилган тўлқиннинг интенсивлиги (у билан бирга сочилиш кесими ҳам) ω^4 га пропорционал бўлади:

$$\sigma_{\text{ког}} = \text{const}\cdot\omega^4 \tag{84.3}$$

Тескари ҳол — катта частоталар ҳолига ўтамиз:

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a} \tag{84.4}$$

Бу шартга кўра системадаги зарядлар ҳаракатининг даври тўлқин давридан катта. Шунинг учун тўлқин даври тартибидаги вақт интерваллари давомида зарядлар ҳаракатини текис деб ҳисоблаш мумкин, яъни қисқа тўлқинлар сочилишини текширганда системадаги зарядларнинг ўзаро таъсирини ҳисобга олмасдан уларни эркин деб ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, тушаётган тўлқин майдонида заряд олган $\mathbf{v}'$ тезликни ҳисоблашда системанинг ҳар бир зарядини алоҳида қарашимиз ва унинг учун ҳаракат тенгламасини

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин, бундаги $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ — тушаётган тўлқиннинг тўлқин вектори. Заряднинг радиус-вектори, албатта, вақтнинг функциясидир. Бу тенгламанинг ўнг томондаги экспоненциал кўпайтувчининг кўрсаткичидаги биринчи ҳаднинг вақт бўйича ўзгариш тезлиги иккинчи ҳаднинг ўзгариш тезлигидан катта (биринчиси ω га тенг, иккинчиси эса: $kv\sim v\omega/c\ll\omega$). Шунинг учун ҳаракат тенгламаларини интеграллашда уларнинг ўнг томонида $\mathbf{r}$ ни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин У ҳолда

$$\mathbf{v}'=-\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0e^{-i(t\omega-\mathbf{kr})}\qquad(84.5)$$

(84.1) да интегралдан йиғиндига ўтиб, сочилган тўлқиннинг вектор потенциали учун (системадан узоқ масофаларда) қуйидаги ифодани оламиз:

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\sum(e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}'}{c}},$$

бундаги $\mathbf{n}'$ сочилиш йўналишидаги бирлик вектор. Бу тенгликка (84.5) ни келтириб қўйсак,

$$\mathbf{A}'=-\frac{1}{icR_0\omega}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathbf{E}_0\sum\frac{e^2}{m}e^{-i\mathbf{qr}}\qquad(84.6)$$

чиқади, бундаги $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$ вектор — сочилган $\mathbf{k}'=\omega\mathbf{n}/c$ ва тушаётган $\mathbf{k}=\omega\mathbf{n}/c$ тўлқин векторларининг айирмаси[1]. (84.6) даги йиғиндининг қиймати $t'=t-R_0/c$ вақт моментида олиниши керак, чунки зарралар тезлиги кичик деб фараз қилингани туфайли $\mathbf{r}$ нинг $\mathbf{rn}'/c$ вақт ичида ўзгаришини назарга олмаслик мумкин (t' индексни, одатдагидек тушириб қолдирамиз). $\mathbf{q}$ векторнинг абсолют қиймати

$$q=2\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2},\qquad(84.7)$$

бунда ϑ — сочилиш бурчаги.

Атомдан (ёки молекуладан) сочилишда (84.6) даги йиғиндида ядроларга мос келадиган ҳадларни ташлаб юбориш мумкин, чунки ядроларнинг массалари электронлар массасидан анча катта. Кейинроқ биз худди шу ҳолни назарда тутамиз, шунга мувофиқ, e^2/m кўпайтувчини (e ва m — электроннинг заряди ва массаси) йиғинди белгисидан ташқарига чиқарамиз.

---

[1] Қатъий айтганда, тўлқин вектори $\mathbf{k}'=\omega'\mathbf{n}'/c$ бўлади, бундаги сочилган тўлқиннинг ω' частотаси ω дан фарқ қилиши мумкин. Аммо текширилаётган катта частоталар ҳолида $\omega'-\omega\sim\omega_0$ айирмани эътиборга олмаслик мумкин.

(79.3) га мувофиқ, сочилган тўлқиннинг $\mathbf{H}'$ майдони учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\mathbf{H}'=\frac{[\mathbf{E}_0\mathbf{n}']}{c^2R_0}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\frac{e^2}{m}\sum e^{-i\mathbf{qr}}\qquad(84.8)$$

Фазовий бурчак элементиға $\mathbf{n}'$ йўналишдаги энергия оқими

$$\frac{c|\mathbf{H}|^2}{8\pi}R_0^2do=\frac{e^4}{8\pi c^3m^2}[\mathbf{E}_0\mathbf{n}']^2\left|\sum e^{-i\mathbf{qr}}\right|^2do.$$

Буни тушаётган тўлқиннинг ўртача энергия оқимига бўламиз (70- § даги изоҳни қ.) ҳамда тушаётган тўлқиннинг $\mathbf{E}$ майдони йўналиши ва сочилиш йўналиши орасидаги ϑ бурчакни киритамиз ва узил-кесил сочилиш кесимини

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{q}_\mathbf{r}}\right|^2}\sin^2\theta do\qquad(84.9)$$

кўринишда топамиз. Қўйилган чизиқ вақт бўйича ўрталашни, яъни системадаги зарядлар ҳаракати бўйича ўрталашни билдиради; ўрталашнинг сабаби сочилиш кузатиладиган вақтнинг системадаги зарядлар ҳаракати даврига қараганда анча катта бўлишидир.

Тушаётган нурланишнинг тўлқин узунлиги учун (84.4) шартдан $\lambda\ll ac/v$ тенгсизлик келиб чиқади. λ ва a ларнинг нисбий катталиги иккала $\lambda\gg a$ ва $\lambda\ll a$ чегаравий ҳоллар ўринли бўлишини таъминлаши мумкин. Бу икки ҳолда (84.9) формула анча соддалашади.

$\lambda\gg a$ бўлганда (84.9) ифодада $\mathbf{qr}\ll1$, чунки $q\sim1/\lambda$, $r\sim a$. Шунга мувофиқ $e^{iq\bar{r}}$ ни 1 билан алмаштирсак, у ҳолда

$$d\sigma=Z^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta do,\qquad(84.10)$$

яъни сочилиш атомдаги электронлар сони Z нинг квадратига пропорционал бўлади.

$\lambda\ll a$ бўлган ҳолда (84.9) даги йиғинди квадратида ҳар бир ҳад модулининг 1 га тенг квадратлари билан бир қаторда $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ кўринишдаги кўпайтмалар ҳам бўлади. Зарядлар ҳаракати бўйича, яъни уларнинг системада ўзаро жойлашишлари бўйича ўрталашда, $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ айирмалар a тартибли интервалдаги қийматларни олади. $q\sim1/\lambda$, $\lambda\ll a$ бўлганлигидан $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ экспоненциал кўпайтувчи бу интервалда тез осцилланувчи функция бўлади ва унинг ўртача қиймати нолга айланади. Шундай қилиб, $\lambda\ll a$ бўлганда сочилиш кесими

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta do \qquad (84.11)$$

бўлади, яъни у атом номерининг биринчи даражасига пропорционал.

(84.9—11) кесимлар таркибида ҳам когерент, ҳам нокогерент қисмлар бор. Когерент сочилиш кесимини аниқлаш учун сочилган тўлқин майдонининг ω частотали қисмини ажратишимиз керак. Майдон учун (84.8) ифода вақтга $e^{-i\omega t}$ кўпайтувчи орқали боғланган, бундан ташқари, $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$ йиғинди ҳам вақтга боғлиқ. Кейинги боғланишга мувофиқ сочилган тўлқин майдони ифодасида ω частота билан бир қаторда ω га яқин бўлган бошқа частоталар ҳам иштирок қилади. Равшанки, агар вақт бўйича $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$ йиғинди ўртачаланса, у ҳолда майдоннинг ω частотали (яъни вақтга фақат $e^{-i\omega t}$ орқали боғланган) қисми ҳосил бўлади. Шунга кўра когерент сочилиш кесими $d\sigma_{\text{ког}}$ тўла кесим $d\sigma$ дан фарқ қилади: $d\sigma_{\text{ког}}$ ифодасида йиғинди модули квадратининг ўртача қиймати ўрнида йиғиндининг ўртача қиймат модулининг квадрати туради;

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |F(\mathbf{q})| \sin^2\theta do, \qquad (84.12)$$

бунда

$$F(\mathbf{q}) = \overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}}. \qquad (84.13)$$

$F(\mathbf{q})$ функцияни *атом форм-фактори* дейилади. $F(\mathbf{q})$ атомдаги заряд ўртача тақсимоти $\overline{\rho}(\mathbf{r})$ нинг Фурье фазовий компонентидир:

$$eF(\mathbf{q}) = \int \overline{\rho}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{qr}} dV. \qquad (84.14)$$

Дастлаб, $\rho(\mathbf{r})$ ўртачаланмаган зичликни δ-функциялар йиғиндиси кўринишида ёзиб олгач [(54.1) ни. қ], (84.14) ни тушуниш осон.

$\lambda \gg a$ бўлганда яна $e^{-i\mathbf{qr}}$ ни 1 билан алмаштирамиз, бинобарин,

$$d\sigma_{\text{ког}} = Z^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \qquad (84.15)$$

Буни тўла кесим (84.10) билан солиштирсак, $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$ яъни барча сочилиш когерент ҳолида бўлади.

Агар $\lambda \ll a$ бўлса, у ҳолда (84.13) да ўртачалашда йиғиндининг барча ҳадлари вақтнинг жуда тез осцилланувчи функцияларининг ўртача қийматлари сифатида йўқ бўлиб кетади, бинобарин, $d\sigma_{\text{ког}}=0$. Шундай қилиб, бу ҳолда сочилиш бутунлай нокогерентдир.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

Лев Давидович Ландау и
Евгений Михайлович Лифшиц

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Механика. Электродинамика

Пособие для студентов физических специальностей ВУЗов

Перевод с русского издания „Наука“ М., 1969

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент—1976

Таржимонлар: *Қ. Азимов, А. Тешабоев*
Редакторлар: *Р. Вокиль, Қ. Азимов*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Техредактор *С. Ахтамова*
Корректорлар: *В. Абдуллаева, М. Орифхўжаева*

Теришга берилди 28/I-1976 й. Босишга рухсат этилди 5/X-1976 й.
Қоғоз № 3. 84×108 $_{32}$ Физ. б. л. 8,5. Шартли л. 14,28. Нашр. л. 14,72. Тиражи 5000.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 131-75 й. Баҳоси 41 т.
Муқоваси 10 т.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Область бошқармасининг Морозов номли босмахонаси. Самарқанд ш., Кузнецкая кўчаси, 82. 1976 й.
Заказ № 970.

Типография имени Морозова областного управления по делам издательств полиграфии и книжной торговли. Самарканд, ул. Кузнецкая, 82.