M.Raisov
X.Q.Qarshiboyev

KVADRATIK FORMALAR

Uslubiy qo‘llanma

SAMARQAND - 2015

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

M.Raisov
X.Q.Qarshiboyev

KVADRATIK FORMALAR

Uslubiy qo‘llanma

Samarqand- 2015

Uslubiy qo‘llanma “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti, f-m. f. n., M.Raisov, “Oliy matematika” kafedrasi mudiri, f-m. f. n., X.Qarshiboyevlar tomonidan tayyorlangan.

Taqrizchilar: E.Ya.Jabborov – SamDU, “Algebra va geometriya” kafedrasi dotsenti, fizika- matematika fanlari nomzodi.
A.Begmatov- Sam ISI “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti, fizika-matiyematika fanlari nomzodi.

Uslubiy qo‘llanma “Oliy matematika” kafedrasi yig‘ilishida muhokama qilingan va institut o‘quv uslubiy kengashida muhokama etish uchun tavsiya etilgan (bayonnoma № 5. 13.04. 2015 yil)

Uslubiy qo‘llanma institut o‘quv-uslubiy kengashida tasdiqlangan va chop etish uchun tavsiya etilgan (bayonnoma № 2015 yil)

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti, 2015

Kirish

Ushbu uslubiy qo‘llanma “Oliy matematika” fanidan ishchi dasturga moslab tuzilgan bir ishlanmadir. Kvadratik formalar nazariyasi, ikkinchi tartibli egri chiziq va sirtlarni o‘rganishda qo‘llanilgan.

Keyinchalik esa differensial tenglamalar nazariyasini o‘rganishda ko‘p ko‘llanilgan. Samarqandlik olimlar I.S.Kuklis, Sh.R.Sharipovlarning ilmiy ishlarida kvadratik formalarni qo‘llanilishi yaqqol ko‘rinib turadi.

Kvadratik formalar to‘g‘risidagi ilmiy o‘zgarishlar fransuz matematigi Lagranj va nemis matematigi Gauss ishlarida chuqur o‘rganilgan.

Keyingi vaqtda bir jinsli tenglamalar sistemasini o‘rganishda kvadratik formalarni qo‘llab ko‘p iqtisodiy masalalarni yechishgan.

§1. Kvadratik formaning ta’rifi.

Kvadratik forma deb, har bir hadi birorta hadini kvadratidan yoki bo‘lmasa har xil hadlarini ko‘paytmasi yig‘indisiga aytiladi.

Kvadratik formalar berilishiga qarab ikki xil bo‘ladi. Agar kvadratik formaning koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lsa, bunday kvadratik formaga haqiqiy kvadratik forma deyiladi.

Agar kvadratik formaning koeffitsiyentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lsa, kompleks kvadratik forma deyiladi. Kvadratik formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{n1}x_nx_1 +$$
$$+ a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

bu yerda a_{ij} lar x_i^2 ni koeffitsiyenti, $a_i + a_j\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$ esa $x_{ij} = x_jx_i \ (i \neq j)$ larni koeffitsiyenti.

Kvadratik formaning koeffitsentlaridan esa quyidagi kvadratik matritsani tuzish mumkin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu kvadratik matritsaning rangi esa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formaning rangi deyiladi. Agar kvadratik formaning rangi $r = n$ bo‘lsa, u holda A matritsiaga aynimagan matritsa deyiladi, f kvadratik formaga esa aynimagan kvadratik forma deyiladi. Shuni ham aytish kerakki har qanday $n-$ tartibli matritsa uchun quyidagi ko‘rinishdagi kvadratik forma mos keladi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (1)$$

Endi $n-$noma’lumli X ustun matritsasini ko‘raylik

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bu matritsa bitta ustun va $n-$ta satrdan iborat. Agar bu matritsaga transponerlash amalini bajarsak, quyidagi bitta satrga ega bo‘lgan matritsa hosil bo‘ladi:

$$X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Shunday qilib (1) kvadratik formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = X'AX$$

§2. Kvadratik formalarni kanonik ko‘rinishga keltirish

Kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirish bilan quyidagi ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f\left(y_1, y_2, \ldots y_n\right) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2$$

bu yerda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yangi o‘zgaruvchilar, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ koeffitsiyentlarning ayrimlari $0-$ga teng bo‘lishi mumkin.

Bu kvadratik formaning $0-$dan farqli koeffitsiyentlar soni $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ kvadratik formaning rangiga teng bo‘lishini isbotlash mumkin.

Faraz qilaylik kvadratik formaning matritsasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

va talab qilaylikki bu matritsaning rangi r ga teng bo‘lib, bosh dioganalda $r = n$ ta $0-$dan farqli elementga ega bo‘lsin.

Teorema. Har qanday kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirishlar yordamida kanonik formaga keltirish mumkin. Agar haqiqiy kvadratik forma o‘rganiladigan bo‘lsa, u vaqtda qo‘llaniladigan chiziqli almashtirishlarning koeffitsenntlari ham haqiqiy hisoblanadi.

Isboti. Har qanday bir noma’lumli kvadratik forma ax^2 ko‘rinishda bo‘lganligi uchun kanonik ko‘rinishga ega. Endi $(n-1)$-no’malumli kvadratik forma uchun teorema isbot qilingan deb, n no’malumli kvadratik forma uchun isbot qilamiz.

Faraz qilaylik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no’malumli (1) kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Kvadratik formadan aynimagan chiziqli almashtirish natijasida birorta no’malumni kvadratini ajratish mumkin bo‘lsin. U holda f kvadratik formani birorta hadini kvadratini bilgan holda, qandaydir no’malumning kvadratik forma yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Bu maqsadga erishish bo‘ladi agarda kvadratik formaning matritsasidan bosh dioganalida birorta o‘zgaruvchini kvadrati noldan farqli koeffitsenti qatnashsa.

Faraz qilaylik $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin, u holda $a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2$ kvadratik forma bo‘ladi, shu bilan f ham kvadratik forma. Shuning uchun

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 = g\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$

ham kvadratik forma bo‘ladi.

Bu yerda

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Agar quyidagilarni belgilab olsak

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, y_i = x_i \ , \qquad i = 2, 3, \ldots, n \qquad (2)$$

bundan quyidagi kelib chiqadi.

$$f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g. \qquad (3)$$

Endi bu yerda g $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilarga nisbatan kvadratik forma bo‘ladi. (2) forma (1) ya’ni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uchun kerakli forma bo‘ladi, chunki u aynimagan chiziqli almashtirishlar natijasida hosil bo‘ladi yoki teskaricha chiziqli almashtirishlar natijasida (2) hosil bo‘ladi va uning aniqlovchisi a_{11} aynimagan bo‘ladi.

Agar $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$ bo‘lsa, u holda qaytadan chiziqli almashtirishlar kiritib no’malumlarga nisbatan f kvadratik formalarni keltirib chiqarish mumkin bo‘ladi.

(1) kvadratik formaning koeffitsentlari $a_{ij} \neq 0$ bo‘lgani uchun buni isbot qilish o‘rinsizdir, ya’ni $a_{12} \neq 0$ bo‘lgani uchun $2a_{12}x_1x_2$ f kvadratik forma yig‘indisiga kiradi. Bu yig‘indida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no’malumlarning birortasi albatta qatnashadi.

Endi bizga berilgan bo‘lsin

$$x_1 = z_1 - z_2, x_2 = z + z_2, \ x_i = z_i, i = 3, \ldots, n \qquad (4)$$

ko‘rinishidagi chiziqli almashtirish. Bu almashtirish aynimagan chiziqli almashtirish bo‘ladi, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 - 1 0 \ldots 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ldots 0 \\ 0 \ \ 0 \ 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ 0 \ 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Bu almashtirishning natijasida $2a_{12}x_1x_2$ forma quyidagi ko‘rinishga o‘tadi, $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$, ya’ni koeffitsiyentlar noldan farqli bo‘lgan f kvadratik forma hosil bo‘ladi.

Qaysiki ikkita hadi birdaniga kvadratik qatnashadi va boshqa hadlari bilan qisqarmaydi, chunki $z_1, z_2, \ldots z_n$ eng kamida bir marta qatnashadi.

(3) g kvadratik formada n dan kam no'malumlar qatnashadi. Ayrim aynimagan almashtirishlar natijasida $y_2, y_3, \ldots, y_n$ o'zgaruvchilar kanonik ko'rinishga keladi. Bu almashtirishlar n o'zgaruvchilar uchun bajarilib $y_2, y_3, \ldots, y_n$ larga ta'sir qilmaydi, shu bilan (3) kanonik ko'rinishga ham ta'sir qilmaydi. Shunday qilib ikki, uch almashtirishlar natijasida ularning ko'paytmalari o'zgaruvchilar almashtirishlar kvadratlarining yig'indisi bilan ayrim koeffitsiyentlari bilan qatnashadi.

Bu kvadratlarning soni kvadratik formaning rangi r ga teng.

Bu yerda shuni ham aytish kerakki $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma haqiqiy bo'lib uning koeffitsiyentlari kanonik formada ham chiziqli almashtirishlar kiritgandan keyin haqiqiy bo'ladi.

Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish uchun uning harakteristik sonini va chiziqli almashtirib maxsus vektorlarini topish zarur.

Faraz qilaylikki R n o'lchovli fazoda berilgan nolga teng bo'lmagan vektor $x \in R$ ga chiziqli almashtirilgan $Ax = \lambda x$ maxsus vektor deyiladi. $\lambda -$ songa esa x maxsus vektorga mos bo'lgan A chiziqli almashtirishning harakteristik soni deyiladi.

Agar $a_{12} = a_{21}$ bo'lganda

$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ -ga kvadratik forma deyiladi.

Agar chiziqli almashtirishlar $A\vec{\ell}_1\vec{\ell}_2$ bazisda A matritsa bilan berilgan bo'lsa: $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ u vaqtda A chiziqli almashtirishni harakteristik soni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning λ_1 va λ_2 haqiqiy ildizlariga aytiladi.

Bu yerda λ_1 va λ_2 bir xil ishoraga ega bo'lsa, kvadratik formaga elleptik tip deyiladi.

Agar λ_1 va λ_2 har xil ishoraga ega bo'lsa, kvadratik formaga giperbolik tip deyiladi. Agar λ_1 yoki λ_2 nolga teng bo'lsa, kvadratik formaga parabolik tip deyiladi. Maxsus vektorlarni tarkibiy qismlarini topish uchun ikkita sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0, \\ a_{12} + (a_{22} - \lambda_1)n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0, \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \lambda_2)m_2 = 0 \end{cases}$$

bu yerda $m_1, m_2, n_1, n_2 -$ maxsus vektorlarning koordinatalari.

Endi vektorlarni koordinatalarini yangi $\bar{\ell}_1$ va $\bar{\ell}_2$ bazisga nisbatan topamiz, buning uchun maxsus vektorlarni uzunligini quyidagi formulalar bilan topamiz.

$$\left|\bar{u}_1\right| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2}; \quad \left|\bar{u}_2\right| = \sqrt{m_2^2 + n_2^2},$$

bu yerda u_1, u_2 – maxsus vektorlar bo‘lib, $\bar{\ell}_1 = \left(\frac{m_1}{\left|\bar{u}_1\right|}; \frac{n_1}{\left|\bar{u}_1\right|}\right)$; $\bar{\ell}_2 = \left(\frac{m_1}{\left|\bar{u}_2\right|}; \frac{n_2}{\left|\bar{u}_2\right|}\right)$ ga teng.

Shunday qilib ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$\lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 = c, \ \rightarrow \frac{\lambda_1}{c^2} + \frac{\lambda_2}{c^2} = 1$$

Shuni uchun ham bu yerda muhim teoremalarni e’tiborga olish kerak.

1-teorema. Chiziqli almashtirishning harakteristik ko‘phadi bazisni tanlashga bog‘liq emas.

2-teorema. Agar chiziqli almashtirishni A matritsasi simmetrik bo‘lsa, u vaqtda harakteristik tenglamani $|A - \lambda E| = 0$ hamma ildizlari haqiqiy bo‘lib, E – esa aynan birga teng bo‘lgan operatordir.

§3. Inersiya qonuni

Faraz qilaylik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har qanday koeffitsentli kompleks sonlardan iborat bo‘lib aynimagan chiziqli almashtirishlarni qo‘llash mumkin bo‘lsin.

Har qanday n o‘zgaruvchili, rangi r bo‘lgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga:

$$f(x_1, x_{2,}, \ldots, x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2$$

keltirish mumkin, bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ larni hammasi noldan farqli. Shuni ham aytish kerakki har qanday kompleks sondan aynimagan chiziqli almashtirish kiritib kvadratik ildiz chiqarish mumkin: $z_i = \sqrt{c_i y_i} \quad i = \overline{1, r}$. Bu almashtirish kvadratik formani quyidagi ko‘rinishga keltiradi:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 \qquad (5)$$

Bu ko‘rinishga normal ko‘rinish deyiladi.

Demak, koeffitsentlari birga teng bo‘lgan $r-$ ta noma’lum kvadratlarining yig‘indisiga normal ko‘rinish deyiladi.

Agar chiziqli forma f va g bir xil r ranga ega bo‘lsa, f ni (5) normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Demak, g – ni ham (5) ko‘rinishga keltirish mumkin.

Teorema. Ikkita kompleks kvadratik formalarni kompleks hadli chiziqli almashtirishlar natijasida bir-biriga keltirish mumkin, agarda bu formaning rangi bir xil bo‘lsa.

Isboti: Teoremadan kelib chiqadiki har qanday r no’malum r kvadratlar yig‘indidan r noma’lumli noldan farqli bo‘lgan kompleks koeffitsiyentli yig‘indidan bo‘lsa uni kvadratik formaga keltirish mumkin.

Har qanday haqiqiy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani haqiqiy chiziqli almashtirishlar natijasida haqiqiy koeffitsiyentli normal ko‘rinishga keltirish mumkin.

Har qanday $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n no’malum rangi r ga teng bo‘lgan kvadratik formani quyidagi ko‘rinishdagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} c_{k+1}^2 - c_r y_r^2, \qquad 0 \le k \le r,$$

bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}, \ldots, c_r$ lar musbat va noldan farqli sonlar, u vaqtda haqiqiy koeffitsiyentli aynimagan chiziqli almashtirish natijasida quyidagi hosil bo‘ladi $z_i = \sqrt{c_i y_i}, i = 1,2,...,r, z_j = y_j, j = \overline{r+1, \ldots, n}$ dan keyin f normal ko‘rinishga keladi

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_r^2$$

Bu kvadratlarning umumiy soni kvadratik formaning rangiga teng. Haqiqiy kvadratik forma har xil almashtirishlar yordamida normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Lekin no’malumlarni nomerlari bo‘yicha faqat bitta normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Buni haqiqiy hadli kvadratik formaga keltirish mumkinligiga inersiya qonuni deyiladi.

Bu qonunni quyidagi teorema ifodalaydi.

Teorema. Normal ko‘rinishdagi musbat va manfiy kvadratlar soni, berilgan musbat hadli kvadratik formaga haqiqiy koeffitsentli haqiqiy aynimagan chiziqli almashtirishlarni tanlashga bog‘liq emas.

Isboti: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchili n no’malumli rangi r teng. Ikki xil usul bilan normal ko‘rinishga kelsin

$$f = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_i^2 + \ldots + z_i^2 - z_{i+1}^2 - \ldots - z_r^2. \qquad (6)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilardan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilarga aynimagan chiziqli almashtirishlar orqali o‘tdik, endi teskarisi ikkinchi o‘zgaruvchilar ham birinchi o‘zgaruvchilar chiziqli ifodalanadi aniqlovchisi esa nolda farqli bo‘ladi

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = \overline{1, n} \qquad (7)$$

Xuddi shunday

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (8)$$

bu yerda aniqlovchi yana noldan farqli bo‘ladi, (7) va (8) koeffitsentlar noldan farqli.

Bu yerda $k < i$ deb kuyidagi sistemani yozish mumkin.

$$y_i = 0,\dots,y_k = 0,\ \ z_{i+1} = 0,\dots,z_r = 0,\dots,z_n = 0 \qquad (9)$$

(7) va (8) sistemalarga o‘ng tomonlarini tenglashtirib olsak $n-i+k$ ta chiziqli $n-$no’malumli bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu sistemada tenglamalar soni no’malumlar sonidan kam, shuning uchun sistema nolga teng bo‘lmagan $a_1, a_2, \dots, a_n$ yechimlarga ega. Agar (6) tenglikdagi y va z larni o‘rniga o‘zlarini qiymatlari bilan almashtirsak va no’malumlarni o‘rniga $a_1, a_2, \dots, a_n$ qo‘ysak va $y_i(a)$ va $z_j(a)$ deb $y_i\ z_j$ belgilab olsak (6) tenglik quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$-y_{k+1}^2(a) - \cdots - y_r^2(a) = z_1^2(a) + \cdots + z_i^2(a) \qquad (10)$$

(7) va (8) tenglikni hamma hadlari haqiqiy sonlar bo‘lgani uchun (10) kvadratik forma hamma koeffitsentlari musbat. Bundan (6) dagi hamma kvadratlarni tengligi kelib chiqadi. Bu yerdan quyidagi tenlik kelib chiqadi:

$$z_1(a) = 0,\dots,z_i(a) = 0 \qquad (11)$$

Ikkinchi tamondan

$$z_{i+1}(a) = 0,\dots,z_r(a) = 0,\dots,z_n(a) = 0 \qquad (12)$$

Shunday qilib $x_1, x_2, \dots, x_n$ $n-$ no’malumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi $z_i = 0,\ i = \overline{1,n}$ (11) va (12) xususiyatga ega bo‘lib $a_1, a_2, \dots, a_n$ yechimlarga ega bo‘ladi va aniqlovchisi nolga teng bo‘lishi shart. Bu qarama-qarshilik, lekin (11) tenglikda aynimagan almashtirishni taklif qilingan edi. Xuddi shunday bo‘ladi, $i<k$ bo‘lganda ham. Bu yerdan $i=k$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Normal formadagi musbat kvadratlar soniga haqiqiy f kvadratik formani inersiyasini inersiya musbat indeksi deyiladi, manfiy kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi deyiladi.

Musbat va manfiy indekslar ayirmasiga f formaning signaturasi deyiladi.

Teorema. Ikkita n no’malumli kvadratik formaga bir-biriga keltiriladi aynimagan chiziqli almashtirishlar natijasida, agarda ular bir xil rang va bir xil signaturaga ega bo‘lsa.

Isboti. Faraz qilaylik haqiqiy aynimagan almashtirish natijasida $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma g kvadratik formaga keltirilgan bo‘lsin. Bizga ma’lumki chiziqli almashtirishlar rangni o‘zgartirmaydi. Bu almashtirishlar signaturani ham o‘zgartirmaydi. Aks holda f va g lar bir-biriga keltirilmas edi. Bu esa inersiya qonuniga ikkinchi normal ko‘rinishga zid bo‘lib chiqardi.

Aks holda f va g bir xil ranga ega, bir xil signaturaga ega, bu esa f va g bir xil normal ko‘rinishga ega va shuninig uchun ularni biriga keltirish mumkin.

Agar g kvadratik forma kanonik berilgan bo‘lsin.

$$g = b_1 y_1^2 + b_r y_2^2 + \cdots + b_r y_r^2 \qquad (13)$$

$b_k \neq 0,\ k = 1,r.$ g kvadratik formaning rangi r ga teng. U vaqtda inersiya musbat indeksi (13) ni o‘ng tomonidagi musbat koeffitsiyentlar soniga teng bo‘ladi. Bu esa yuqoridagini tasdiqlaydi.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma (13) ko‘rinishga ega bo‘ladi, agar f ni rangi r bo‘lib, inersiyani musbat indeksi (13) inersiyani musbat indeksiga teng bo‘lsa.

Har qanday kvadratik formani ikkita kvadratik formani ko‘paytma ko‘rinishiga yozish mumkin emas. Buning ma’lum shartlarni keltirib chiqarish kerakki kvadratik forma ajraladigan bo‘lsin.

Kompleks kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ajraladi shu vaqtdagi uni rangi ikkinchini rangidan kichik yoki ikkalasinikiga teng bo‘lsa.

Haqiqiy kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ikkita kvadratik forma ko‘rinishida bo‘lishi uchun shu vaqtdaki uni rangi birdan katta bo‘lmasa yoki nolga teng bo‘lsa, signaturasi esa nolga teng bo‘lsa.

Oldin chiziqli formalarni ko‘paytmasini ko‘rish kerak $f \cdot \varphi$

Agar bu formalardan birortasi nolga teng bo‘lsa, u holda ularning ko‘paytmasi koeffitsiyentlari nollardan iborat bo‘lgan kvadratik forma bo‘ladi va uni rangi nolga teng bo‘lsa.

Agar f va φ chiziqli formalar proporsional bo‘lsa, ya’ni $f = c\varphi, c \neq 0$, u holda φ nolga teng, faraz qilaylik $a_1 \neq 0$. U vaqtda aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib

$$y_1 = a_1, x_1 + \ldots + a_n x_n,\ \ y_i = x_i, i = \overline{2,\ldots n}$$

Kvadratik formani $f \cdot \varphi$ ni $f\varphi = c_1 y_1^2$ ko‘rinishga keltiramiz.

O‘ng tomonda kvadratik formaning rangi 1 ga teng bo‘ladi. Shuning uchun $f \cdot \varphi$ kvadtratik formaning rangi 1 ga teng. Agar chiziqli f va φ chiziqli formalar proporsional emas, shuning uchun faraz qilaylik, misol uchun

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, u vaqtda chiziqli almashtirishlar

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_1 x_n, \\ y_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \\ y_i &= x_i \ \ i = 3,4,\ldots,n \end{aligned}$$

lar aynimagan bo‘ladi va $f \cdot \varphi$ kvadratik forma quyidagi ko‘rinishga keladi

$$f \cdot \varphi = y_1 \cdot y_2$$

O‘ng tomondagi kvadratik forma, formaning rangi 2 ga teng, haqiqiy koeffitsentlar bo‘lganida signatura 0 ga teng.

Endi isbotni teskarisidan boshlaymiz kvadratik formaning rangi 0 ga teng chekli, ikkita kvadratik formaning ko‘paytmasini qaraylik, ulardan birini nol deylik. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rangi 1 ga teng aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cy_1^2,\ c \neq 0 \ \text{ ya'ni } \ f = (cy_1)y_1$$

y_1 ni chiziqni almashtirib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar orqali ifodalab, ikkita chiziqli ko‘paytma ko‘rinishiga keltiramiz. U vaqtda rangi 2 ga teng signaturasi 0 ga teng bo‘lgan haqiqiy kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirish natijasida kuyidagi ko‘rinishga keladi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 - y_2^2.$$

Bu holga rangi 2 ga teng bo‘lgan kompleks kvadratik formani ham keltirish mumkin. Lekin $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$,ifodaning o‘ng tomonida y_1 va y_2 ularni chiziqli ifodalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ almashtirsak ikkita chiziqli formalarni ko‘paytmasi hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

§4. Musbat aniqlangan formalar

Haqiqiy musbat koeffitsentli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda uni normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, ya’ni n ta musbat kvadratga ega bo‘lib uni rangi va musbat inersiya indeksi no’malumlar soniga teng bo‘lsa.

Teorema. Musbat koeffitsentli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-no’malumli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda no’malumlarning har qanday haqiqiy qiymatlarida eng kamida ulardan birortasi noldan farqli bo‘lib, bu forma musbat qiymat qabul qilsa.

Isbot: Faraz qilayliki f kvadratik formani normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsin, ya’ni

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \qquad (14)$$

bu yerda

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i,\ \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (15)$$

a_{ij} koeffitsentlarning aniqlovchisi noldan farqli bo‘lsin. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ istalgan haqiqiy qiymatlarini f ga qo‘ysak, ularni (14) va (15) ga y_i larni hammasini qo‘ysak (15) kelib chiqadi bundan kelib chiqqan hamma $y_1, y_2, ..., y_n$ nolga teng bo‘la olmaydi, chunki $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$ sistema noldan farqi yechimga ega bo‘lishi mumkin, aniqlovchi 0 noldan farqi bo‘lishiga qaramasdan $y_1, y_2, ..., y_n$ larni qiymatlarini (14) f formani qiymatini topish mumkin, qaysiki ayrimlari noldan farqli bo‘lib, aniq musbat qiymatga ega bo‘lsa.

Endi teoremani teskarisini isbot qilamiz.

Faraz qilaylikki f musbat aniqlanmagan, ya'ni rang va musbat inersiya indeksi n dan kichik. Bu shuni ko'rsatadiki chiziqli ayni almashtirishlar natijasida (14) normal ko'rinishga keladi, lekin kvadratlarning hech bo'lmasa birortasi nolga teng bo'ladi, bo'lmasa kvadratlar qatnashmaydi. Misol uchun y_n. Bu holda haqiqiy qiymatlarni tanlab olish mumkin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarni birortasi noldan farqli qaysikim f forma bu qiymatlarda nolga teng yoki bo'lmasa manfiy.

Faraz qilaylik matritsasi $A = (a_{ij})$ ga teng bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n o'zgaruvchili f kvadratik forma berilgan bo'lsin. Bu matritsani minorlarini tartibi $1, 2, \ldots, n$ teng bo'lsin va quyidagicha joylashgan bo'lsin

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{12} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2k} \\ ------ \\ a_{k1} a_{k2} \ldots a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Oxirgi menor kvadratik formani A matritsasiga to'g'ri keladi. Bu minorga kvadratik $f(x_1, \ldots, x_n)$ formani bosh minori deyiladi.

Teorema. Haqiqiy koeffitsentli n no'malumli f kvadratik forma faqat musbat aniqlangan deyiladi, agarda hamma bosh minorlari aniq musbat bo'lsa.

Isbot: Agar $n = 1$ teorema to'g'ri, chunki bu holda forma ax^2 ko'rinishga ega chunki $a > 0$ bu musbat aniqlangan. Shuning uchun teoremani n no'malumli uchun isbot qilish kerak. Buni $n-1$ no'malum uchun isbot qilingan deb n uchun ko'rsatamiz.

Ayrim almashtirishlardan keyin quyidagi matritsasi $Q^t AQ$ matritsaga ega bo'lgan kvadrat forma hosil bo'ladi.

Shunga qaramasdan

$|Q^1| = |Q|, |QAQ| = |Q^1| \cdot |A| \cdot |Q| = |A||Q|^2$, ni $|A|$ aniqlovchi musbat songa ko'paymoqda. Bizga berilgan quyidagi kvadratik forma

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{16}$$

Buni quyidagicha yozish mumkin

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2, \tag{17}$$

bu yerda φ $f(x_{11}, \ldots, x_n)$ kvadratik hadlaridan tuzilgan $n-1$ no'malumli kvadratik forma. Bu yerda φ kvadratik formaning hamma bosh minorlari f kvadratik formaga qatnashadi.

Faraz qilaylikki f forma musbat aniqlanmagan. U vaqtda φ forma ham musbat aniqlanmagan bo'ladi.

Faraz qilaylikki $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bosh minorlari musbat aniqlangan y vaqtdan, shartdan φ kvadratik formaning bosh minorlari musbat aniqlangan bo‘ladi (17) va asosan f kvadratik formani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2 \tag{18}$$

$b_{nn} -$ koeffitsiyentlarni aniq ko‘rinishi shart emas. Chunki

$y_i^2 + 2b_{1n} y_i y_n = (y_i + b_{in} y_n)^2 - b_{in} y_n^2,$ shuning uchun aynimagan almashtirishlar natijasida $z_i = y_i + b_{in}, i = 1,2,\dots, n-1,\ z_n = y_n$ f kvadratik formani quyidagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + Cz_n^2, \tag{19}$$

Bu yerda f formani musbat aniqlanganligini isbot qilish uchun C ni musbatlini ko‘rsatish kerak.

Bu yerda (19) ni o‘ng tomonidagi aniqlovchi C ga teng. Bu aniqlovchi musbat bo‘lishi kerak, chunki (19) ni o‘ng tamonidagi ifoda f kvadratik formadan ikki marta chiziqli almashtirish natijasida olingan aniqlovchi f formaning bosh minori bo‘lib, musbatdir

§5. Kvadratik formalarga ta’luqli misol va masalalar

1-masala. Kvadratik formaning matritsasini yozing

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$$

Yechish: $a_{11} = 2, a_{22} = -3, a_{33} = 8,\ a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -1 a_{23} = a_{32} = 3$

Bularni o‘rniga quyidagini yozish mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} 2 2 -1 \\ 2 -53 \\ -138 \end{pmatrix}$$

2-masala. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish

$$f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Yechish: $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$

Harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(27-\lambda)(3-\lambda)\cdot 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 36 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 28$$

3-masala. Ikkinchi tartibli kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$17x^2 + 12xy + 8y + 8y^2 - 20 = 0$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarini topamiz

$$a_{11} = 17;\ a_{12} = 6;\ a_{22} = 8$$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0,$$
$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$
$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20.$$

Natijada:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0;$$

$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$ ellipisning kanonik tenglamasi.

4-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqlini tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring: $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 20 = 0.$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz.

$$a_{11} = 2;\ \ a_{12} = 4,\ \ a_{22} = 8, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(8-\lambda)-16=0$$
$$\lambda^2-10\lambda=0$$
$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=10$$
Natija: $10(y')^2-20=0$

$\frac{y'^2}{2}=1,$ parabolaning kanonik tenglamasi.

5-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish:
$$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0$$
Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz
$$a_{11}=6,\ a_{12}=\sqrt{5}, a_{22}=2$$
$$A=\begin{pmatrix}6 & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 3\end{pmatrix}$$
Endi harakteristik tenglamani tuzamiz
$$\begin{vmatrix}6-\lambda & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(6-\lambda)(2-\lambda)-5=0$$
$$\lambda^2-8\lambda+7=0$$
$$\lambda_1=\frac{7}{6},\ \lambda_2=\frac{8}{6}$$
Natijada: $\frac{7}{6}(x')^2+\frac{1}{6}(y')^2-21=0$

$\frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{126}=1$ ellipsning kanonik tenglamasi.

6-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqning tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring:
$$22x^2+2\sqrt{69}xy+2y^2-4=0.$$
Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz
$$a_{11}=22,\ a_{12}=\sqrt{69},\ a_{22}=2,\ A=\begin{pmatrix}22 & \sqrt{69}\\ \sqrt{69} & 2\end{pmatrix}.$$
Endi harakteristik tenglamani tuzamiz
$$(22-\lambda)(2-\lambda)-69=0$$
$$\lambda^2-24\lambda-25=0$$
$$\lambda_1=\frac{49}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Natijada

$\frac{49}{8}x'^2 - \frac{y'^2}{8} = 1$ giperbolaning kanonik tenglamasi.

7-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik koʻrinishga keltiring:

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 5 = 0$$
$$a_{12} = a_{21} = 3$$
$$a_{22} = 2$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz.

$$a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{22} = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Koeffsiyentlarga asoslanib harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(2-\lambda) - 9 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$$
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

Natijada

$$-(x')^2 + 5(y')^2 + 5 = 0$$
$$\frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{1} = 1$$

giperbolaning kanonik tenglamasi.

8-masala. Kvadratik forma musbat aniqlanganmi?

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni aniqlaymiz.

$$a_{11} = 5, a_{22} = 1, \ a_{33} = 5, a_{12} = a_{21} = 2, a_{31} = a_{13} = -4,$$
$$a_{23} = a_{32} = -2$$

Endi bosh minorlarini hisoblab chizamiz.

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Bosh minorlarni hammasi musbat bo‘lgani uchun kvadratik forma musbat aniqlangan.

9-masala. Kvadratik forma qoidalaridan foydalanib ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring va grafigini sxematik izohlang

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$$

Yechish: Harakteristik tenglamani tuzamiz va koeffitsiyentlarini aniqlaymiz.

$$a_{11} = 5,\ a_{12} = \sqrt{3};\ a_{22} = 3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6$$

Endi maxsus vektorlarni koordinatlarini topamiz:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0, \\ a_{12}m_1 + (a_{22} - \lambda_1)m_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0, \\ \sqrt{3}m_1 + n_1 = 0. \end{cases} \to m_1 = 1, n_1 = -\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)m_2 - a_{12}n_2 = 0, \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \lambda_2)n_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0, \\ \sqrt{3}m_2 - 3n_2 = 0. \end{cases} \to m_2 = 1, n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

U vaqtda maxsus vektorlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\overline{U}_1\left(1; -\sqrt{3}\right), \qquad \left|\overline{U}_1\right| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\overline{U}_2\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad \left|\overline{U}_2\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Endi birlik vektorlarni tarkibiy qismlarini topamiz

$$\overline{\ell}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overline{\ell}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Yangi sistemada chiziqni tenglamasini tuzamiz

$$2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$$

y vaqtda kanonik ko‘rinish quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$$

Adabiyotlar

1. Высшая математика для экономистов. Учебник. 2-е изд. / Под. редакция Н.Ш. Крамера М.: ЮНИТИ 2003. – 471с.
2. Sharaxmetov Sh., Naimjonov B. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik.- T. 2007. -302 b.
3. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под обшей редакции В.И. Ермакова. : ИНФРА – М, 2007. – 656с.
4. Красс М.С., Чуринов В.П. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник. М.: Дело, 2005. – 576с.
5. А.Г.Курош. Олий алгебра курси. –Т., 1976.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. –М., 1986.

Mundarija