О.С.Гаврилів

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Навчальний посібник

Товариство ім. Ст.Банаха
Львів-2010
Видавництво Тараса Сороки

УДК 517.2

Гаврилів Орест Степанович.

Границя функції. Навчальний посібник. – Львів, ПП Сорока Тарас Богданович, 2010. – 36 с.

Рецензент:
доцент, кандидат фізико-математичних наук
Іванел В.К.

Коротко подається основна математична педагогічна інформація, що стосується техніки віднайдення границі функції чи послідовності. Впроваджуються формальні аспекти знаходження границь функції та послідовності. Подається високозручний підхід до знаходження односторонніх границь. Теорія ілюструється зразками розв'язування. Для глибшого засвоєння матеріалу дано 148 завдань.

Товариство ім. Ст.Банаха

ISBN 978-966-8460-76-0

Розділ 1. Теоретичні аспекти
§ 1. Поняття про функцію і її границю

Розглядатимемо функції дійсної змінної x, $x \in R^1$ [1, 2].

Дійсна змінна y називається функцією $y = f(x)$ дійсної змінної x, якщо кожному x відповідає у і тільки одне.

Задання функції може бути аналітичне, графічне, табличне і програмне.

Кожна функція вважається цілком заданою, якщо відомими є область визначення функції, область значень функції і функціональна відповідність.

Для аналітично заданої функції функціональна відповідність записується формулою, для графічно заданої функції функціональна відповідність зображається графіком функцій, для таблично заданої функції функціональна відповідність окремо не фігурує, для програмно заданої функції функціональна відповідність задається програмою обчислювання значень функцій.

Функція номера називається послідовністю, $a_n = f(n)$, і записується виразом $\{a_n\}$, який прочитується як $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$ Тут $n = 1,2,3,\ldots..$ – значення аргументу функції – послідовно перебрані; $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ – члени послідовності або значення функції.

Границя функції розглядається і досліджується в математичному аналізі тільки для аналітично заданих функцій. Причому, границя функції може досліджуватися при прямуванні аргументу до межі області визначення функції, що входить в теорію односторонніх границь.

При закритій області $[a, b]$ визначення функції $f(x)$ границею функції $f(x)$ при $x \to x_0, x_0 \in]a, b[$ є $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ згідно класичного означення, тобто границею функції в точці області визначення є значення розгляданої функції в цій точці.

Це не стосується границі послідовності, бо границя послідовності розглядається тільки при $n \to +\infty$, а натурального числа $(+\infty)$ не існує – існує тільки поняття про більше від всіх натуральних чисел.

<u>Означення Коші.</u> *Число d називається границею функції $f(x)$* при $x \to x_0$ [4], якщо для всякого $E > 0$ існує таке $\delta > 0$, що коли $x \neq x_0$ і $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - d| < E$.

Модульний запис в цих нерівностях означає, що означенням Коші означено двосторонні границі – тобто $x \to x_0$ то зліва від x_0, то справа.

Означення Гейне. Число d називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до x_0 (тільки при $n \to +\infty$), причому $x_n \neq x_0$, – послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до d, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} d$.

На основі означень границі функції дійсної змінної Коші та Гейне можна записати означення односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (справа) та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ зліва згідно текстів:

а) Число d називається границею справа функції $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (справа від x_0), якщо для всякого $E > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з умови $0 < x - x_0 < \delta$ при $x_n \neq x_0$ виконується $|f(x) - d| < E$ (Коші). В цьому випадку збіжність з двох сторін є можливою тільки уздовж осі ординат Oy.

б) Число d називається границею справа функції $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (справа від x_0), якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, в якої $x_n - x_0 > 0$ при $n \to +\infty$ і $x_n \neq x_0$ та $\{x_n\} \to x_0$ виконується, що послідовність $\{f(x_n\}$ збігається до d, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = d$ (Гейне).

в) Число d називається границею зліва функції $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (зліва від x_0), якщо для всякого $E > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з умови $-\delta < x - x_0 < 0$ при $x \neq x_0$ виконується $|f(x) - d| < E$ (Коші).

г) Число d називається границею справа функції $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (зліва від x_0), якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, в якої $x_n - x_0 < 0$ при $n \to +\infty$ і $x \neq x_0$ та $\{x_n\} \to x_0$ виконується, що послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до d, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ (Гейне).

При $x \in]a,b[$ границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ може розглядатися тільки як границя справа, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \equiv \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; при $x \to b$ границя $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ може розглядатися тільки як границя зліва, $\lim\limits_{x\to b} f(x) \equiv \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Аналогічно, границею $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ послідовності $\{a_n\}$ є тільки границя зліва, $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim\limits_{n\to+\infty}\{a_n\}$.

Отже, число d називається границею функції дійсної змінної $f(x)$ при $x \to x_0$, тоді і тільки тоді коли

$$\lim_{x\leftarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = d \tag{1}$$

При $x\to\infty$ у зв'язку з невизначеністю $x\to+\infty$ чи $x\to-\infty$ на відміну від випадку $n\to\infty$ (де $n\to+\infty$ тільки) доводиться при дослідженні $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ розглядати два випадки, знаходити і $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

§ 2. Важливі границі

2.1. Перша важлива границя

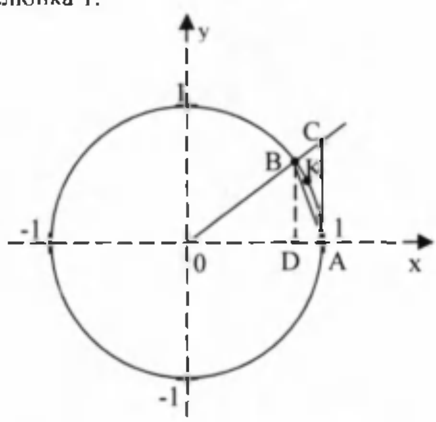
Першою важливою границею називають $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Змінна x в аргументі синуса розглядається в радіанах.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$ (2)

Доведення. В проміжку $0 < x < \frac{\pi}{2}$ має місце подвійна нерівність

$$\sin x < x < tgx, \tag{3}$$

що випливає з креслюнка 1.



Креслюнок 1.

Дійсно, $\sin x = BD$, $x = \cup AKB$ ($\cup AKB$ вимірюється в радіанах, тут мова йде про геометричну довжину $\cup AKB$), $tgx = AC$, що підтверджується нерівністю для площ $S_{\Delta AOB} < S_{сектораAKBO} < S_{\Delta ACO}$, звідки

$$\frac{1}{2}OA^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}OA^2 \cdot x < \frac{1}{2}OA^2 tgx.$$

Оскільки $\sin x > 0$, ділимо подвійну нерівність (3) на $\sin x$ (тут $\sin x > 0$). Звідси

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \tag{4}$$

або $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$, $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$.

Враховуємо, що $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} < 2\sin\dfrac{x}{2} < x$, бо $\sin\dfrac{x}{2} < 1$, $\sin\dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2}$ згідно креслюнка і означення синуса.

Звідси $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < x$ при $x > 0$, і при $-y < 0$ маємо $0 < 1 - \dfrac{\sin(-y)}{-y} < y$, тобто $0 < 1 - \dfrac{\sin y}{y} < y$ в силу непарності функції $f(y) = \sin y$.

Отже, можемо записати остаточно

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|, \tag{5}$$

що при $|x| \to 0$ робить результат теореми очевидним.

На основі нерівності (5) додатково перевіримо виконання означення Коші границі функції. Дійсно, задаємо $E > 0$. Тоді в якості δ можна взяти менше із чисел E і $\dfrac{\pi}{2}$, і при $|x| < \delta$ тут автоматично буде в силу 5 $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| < E$.

Теорема доведена.

Зміст першої важливої границі є $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

2.2. Друга важлива границя

Другою важливою границею називають $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Природньо, $(n\to\infty)\equiv(n\to+\infty)$.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e,$ (6)

де $e\approx 2{,}718281828459045...$, яке називають числом Непера, і яке є трансцендентним числом.

Доведення. Розглянемо вираз $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Згідно бінома Ньютона

$$(a+b)^n=a^n+n\cdot a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+...+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdot....\cdot(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+...+b^n, \qquad (7)$$

тобто вираз x_n можна записати як

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+...+\frac{n(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+...+$$
$$+\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо розглядати x_{n+1}, то починаючи з третього доданку всі доданки в попередньому виразі будуть більшими. та ще й додається один додатній доданок.

Звідси $x_{n+1}>x_n$, і послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою, але послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою зверху.

Дійсно, збільшимо x_n - кожен множник вигляду $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ замінивши на 1, бо $\left(1-\frac{k}{n}\right)<1$ при $k<n$. Отримаємо $x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$.

Позаяк $k!>2^{k-1}$ при $k>2$, то тим більше $x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...$

$+\dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$ в силу перебування суми $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ сумою спадної геометричної прогресії, $S_n = \dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{2}} < 1$.

Отже, вагою обмеженості зверху [1, 2] послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, має скінченну границю, яка і позначається e.

По суті, $e = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\ldots$ (8)

Теорема доведена.

Зміст другої важливої границі $\in \left((\sim 1)^{+\infty}\right)$

Варіанти другої важливої границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Зміст: $\left((\sim 1)^{+\infty}\right)$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Зміст: $\left((\sim 1)^{-\infty}\right)$

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Зміст: $\left((\sim 1)^{\infty}\right)$, де ∞ можна розглядати і як $(+\infty)$, і як $(-\infty)$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Зміст: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

д) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha} = \mu$

Зміст: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

е) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{x^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln x,\ x>0,\ x\neq 1$

Зміст: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

§ 3. Нескінченно малі і нескінченно великі

Функція $\alpha(x)$ при $x\to a$ називається нескінченно малою при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

В околі свого кореня x_0 кожна функція є нескінченно малою при $x\to x_0$.

Функція може бути нескінченно малою тільки при $x\to x_0+0$ (справа) чи $x\to x_0-0$ (зліва).

В результаті порівняння нескінченно малих $\alpha(x)$, $x\to a$, і $\beta(x)$, $x\to a$ (є нескінченно малими при одному і тому ж a) маємо таблицю порівняння нескінченно малих:

а) *При* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ *нескінченно мала* $\alpha(x)$, $x\to a$ *називається* нескінченною малого вищого порядку малості порівняно з нескінченно малою $\beta(x)$, $x\to a$.

б) При $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, $|c|<+\infty$ нескінченно малі $\alpha(x)$, $x\to a$ і $\beta(x)$, $x\to a$ називаються нескінченно малими одного порядку малості при $x\to a$.

в) *При* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ *нескінченно малі* $\alpha(x)$, $x\to a$ і $\beta(x)$, $x\to a$ називаються еквівалентними нескінченно малими, і при знаходженні границі складної функції при $x\to a$ їх можна міняти одна на другу.

г) При $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^{K}(x)}=c\neq 0$ $K>1$, $|c|<+\infty$ нескінченно мала $\alpha(x)$, $x\to a$ називається нескінченно малою к-того порядку малості порівняно з нескінченно малою $\beta(x)$, $x\to a$.

Функція $A(x)$, $x \to a$ називається нескінченно великою при $x \to a$, якщо існує нескінченно мала $\alpha(x)$, $x \to a$ таке, що $A(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$.

Пункти а), б), в), г) § 3 мають місце в протилежному розумінні для нескінченно великих, тобто для нескінченно великих $A(x)$, $x \to a$ і $B(x)$, $x \to a$ виконується:

д) При $\lim\limits_{x \to a} \frac{A(x)}{B(x)} = 0$ нескінченно велика $B(x)$, $x \to a$ називається нескінченно великою вищого порядку росту порівняно з нескінченно великою $A(x)$, $x \to a$.

е) При $\lim\limits_{x \to a} \frac{A(x)}{B(x)} = c \neq 0$, $|c| < +\infty$ нескінченно великі $A(x)$, $x \to a$ і $B(x)$, $x \to a$ називаються нескінченно великими одного порядку росту при $x \to a$.

є) При $\lim\limits_{x \to a} \frac{A(x)}{B(x)} = 1$ нескінченно великі $A(x)$, $x \to a$ і $B(x)$, $x \to a$ називаються еквівалентними нескінченно великими при $x \to a$, і їх можна взаємно міняти місцями при знаходженні границі при $x \to a$.

ж) При $\lim\limits_{x \to a} \frac{A(x)}{B^K(x)} = c \neq 0$, $K > 1$, $|c| < +\infty$ нескінченно велика $A(x)$, $x \to a$ називається нескінченно великою к-того порядку росту порівняно з нескінченно великою $B(x)$, $x \to a$.

Нескінченно великі $x^n (x \to \infty,\ n = const)$, $a^x (a > 1)$, $x! (x \in N)$ при $x \to +\infty$ мають саме профіксований порядком запису порядок росту.

§ 4. Основні правила віднайдення границь

а) Границя сталої є ця сама стала, $\lim\limits_{x \to a} c = c$, $c = const$.

Якщо існують $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)$ і $\lim\limits_{x \to a} \beta(x)$, то:

б) Границя суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) границь функцій, $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x) \pm \beta(x)) = \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \beta(x)$.

в) Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь функцій за відсутності невизначеності,

$$\lim_{x\to a}\bigl(\alpha(x)\cdot\beta(x)\bigr)=\lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot\lim_{x\to a}\beta(x).$$

г) Границя частки двох функцій за відсутності невизначеності дорівнює частці границь цих функцій, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to a}\beta(x)}$.

д) Границя степеню за відсутності невизначеності дорівнює частці степеню границь, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x))^{\beta(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}\beta(x)}$.

е) Границя нерівності, яка виконується для всіх x, дорівнює нерівності границь (причому строгий знак нерівності може бути замінений на нестрогий, $\left(\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)<\beta(x))\right)\Rightarrow\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\le\lim\limits_{x\to a}\beta(x)\right)$.

є) Границя добутку обмеженої функції на нескінченно велику є нескінченно велика, границя частки обмеженої функції і нескінченно великої є нескінченно малою.

ж) Границя добутку обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала.

§ 5. Невизначеності

Вирази в границях типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, (∞^0), (0^0), $(\sim 1^\infty)$ і деякі інші подібного плану називаються невизначеностями.

Деякі з них розкриваються за допомогою так званих важливих границь, наприклад $(\sim 1^\infty)$.

Вирази типу $\left(\frac{1}{0}\right)$, $\left(\frac{1}{\infty}\right)$, $(\infty+\infty)$, $(\infty\cdot\infty)$, (∞^∞) невизначеностями не є, і для них одразу записуємо результати $\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$, $\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$, $(\infty+\infty)=\infty$, $(\infty\cdot\infty)=\infty$, $(\infty^{+\infty})=\infty$, $(\infty^{-\infty})=0$.

Невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можна розкривати за допомогою правила Лопіталя-Бернулі, інші ж невизначеності шляхом класичних алгебричних перетворень для розкриття їх зводимо до важливих границь або до невизначеностей типів $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, щоб застосувати правило Лопіталя-Бернулі.

Правило Лопіталя-Бернулі:

а) Для функцій $\alpha(x)$, $\beta(x)$, визначених на проміжку $x \in \left]a,b\right[$ при $\lim\limits_{x\to d}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to d}\beta(x)=0$, $d\in\left]a,b\right[$ виконується $\lim\limits_{x\to d}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to d}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$, якщо похідні $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ існують при $x=d\in\left]a,b\right[$.

б) Для функцій $A(x)$, $B(x)$, визначених на проміжку $x \in \left]a,b\right[$ при $\lim\limits_{x\to d}A(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to d}B(x)=\infty$, $d\in\left]a,b\right[$ виконується $\lim\limits_{x\to d}\frac{A(x)}{B(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to d}\frac{A'(x)}{B'(x)}$, якщо похідні $A'(x)$, $B'(x)$ існують при $x=d\in\left]a,b\right[$.

Застосування правила Лопіталя-Бернулі при $x\to a$ чи $x\to b$ спряжене з труднощами, оскільки існування похідних $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $A(x)$, $B(x)$ при $x=a$ чи $x=b$ може зводитись до існування тільки односторонніх похідних $\alpha'(a+0)$, $\beta'(a+0)$, $A'(a+0)$, $B'(a+0)$ чи $\alpha'(b-0)$, $\beta'(b-0)$, $A'(b-0)$, $B'(b-0)$

Розділ 2. Взірці
§ 6. Границя послідовності

Границя послідовності завжди віднаходиться при $n\to+\infty$, і розрізняється з границею функції при $x\to\infty$ тим, що завдання знайти границю при $x\to\infty$ наперед означає знайти два варіанти границі – варіант при $x\to+\infty$ і варіант при $x\to-\infty$.

На основі означення границі функції Коші використовується наступне означення границі послідовності $\{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=d$, якщо для всякого $E>0$ існує такий номер N, починаючи з якого $(n \geq N)$ всі члени послідовності є розміщеними від d на відстані, меншій за $E: |x_n - d| < E$.

Зразок 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2-1}{3n^2+2n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2-1}{3n^2+2n+5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

До границі частки переходити не можемо, бо результат ділення нескінченностей не визначено. Тому до миті переходу до границі частки ділимо чисельник і знаменник на старшу одночленну степінь чисельника і знаменника, тобто порівнюємо степені n^2, n, n^0, які є в даних чисельнику і знаменнику.

Старшою степінню є n^2. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-1}{3n^2+2n+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{7n^2-1}{n^2}}{\dfrac{3n^2+2n+5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^2}} = \frac{7-0}{3+0+0} = \frac{7}{3}.$$

Зразок 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n+3}{4n^3+2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n+3}{4n^3+2n^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Ділимо чисельник і знаменник на одну і ту ж старшу степінь з степенів чисельника і знаменника n, n^3, n^2 - тобто, на n^3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n+3}{4n^3+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8n+3}{n^3}}{\dfrac{4n^3+2n^2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8n}{n^3}+\dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{4n^3}{n^3}+\dfrac{2n^2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}} = \frac{0+0}{4+0} = \frac{0}{4} = 0.$$

Зразок 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-5n+4}{3n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n^2-5n+4}{3n+3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{7n^2-5n+4}{n^2}}{\dfrac{3n+3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(7-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\left(\frac{7-0+0}{0+0}\right)=$$

$$=\left(\frac{7}{0}\right)=+\infty.$$

Зразок 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(8n+5)}{n\ +2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\gamma(n)}{n^3+2}=0$, оскільки $\gamma(n)=\sin(8n+5)$ є обмеженою функцією при $n\to\infty$, $|\sin(8n+5)|\le 1$.

Зразок 5.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{\dfrac{3}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}}=\frac{1}{\dfrac{3}{2}}=\frac{2}{3},$$ оскільки вираз $\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$ є сумою членів спадної геометричної прогресії зі знаменником $q=-\dfrac{1}{2}$.

§ 7. Формальні аспекти знаходження границі функції.

Пропонується всі дії по знаходженню границі функції поділяти на формальні (легко засвоювані старанними студентами) і фактичні.

Аксіоми: 1. Формальна дія служить підставою фактичної дії. 2. Семантика формальної дії співпадає з семантикою програмування, як дисципліни, широко вивчаної. 3. Семантика програмування надає потрібних можливостей як в математиці, так в програмуванні – відокремлювати зміст від форми.

Позначення $(\cdot)$ – означає зміст ситуації записаної в дужках, і не вимагає присутності формального змісту в межах записаного в дужках; позначення (~ 1) означає ситуацію зі змістом перехідності до одиниці в границі.

Означення: Носієм нуля при $x \to a$ вважається найпростіший вираз, що перетворюється в нуль при $x \to a$ (насправді вираз $(x-a)$, $a < \infty$). Носій нуля $(x-a)$ при $x \to a$ є найпростішою нескінченно малою при $x \to a$.

Вимагається: при знаходженні границі функції при $x \to a$ *неформально підставляти* $x = a$ *у вираз поза залежністю від того, що* вийде з виразу (без виконання недозволених математикою дій), з наступним формальним виконанням всіх дій, доки одержаться вирази типу $\left(\frac{b}{0}\right)$, $\left(\frac{b}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left((\sim 1)^{\infty}\right)$, (0^0), (0^{∞}), (∞^0).

Після одержання згаданих виразів пропонується на базі формального висновку або одержувати відповідь, очевидно випливну і однозначну, або *висновки фактичні – з виділенням носія нуля і* наступним скороченням носіїв нуля в чисельнику та знаменнику, застосуванням першої та другої важливих границь і перетворень, що призводять до першої чи другої важливих границь. Змістом другої важливої границі пропонується вважати $\left((\sim 1)^{\infty}\right)$

Зразок 6.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - x)}{\sqrt{x} - 1} = \left(\frac{1-1}{1-1}\right) = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Одержали зміст невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Оскільки і чисельник і знаменник перетворюються в нуль при $x \to 1$, то існує і функціонує носій нуля і в чисельнику і в знаменнику, одержаний з виразу $x \to 1$ перенесенням числа 1 вліво, тобто з $x \to 1$ одержуємо $x - 1 \to 0$, тобто носієм нуля є $\alpha = x - 1$ при $x \to 1$. Звідси

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - x)}{\sqrt{x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{\sqrt{x} - 1}.$$

Носій нуля $(x-1)$ в чисельнику виділено. Черга за знаменником, де носій нуля одержуємо шляхом ліквідування ірраціональності в знаменнику, тобто – в даному випадку – шляхом домноження чисельника і знаменника на множник, нейтральний щодо носія нуля (при $x \to 1$), тобто на спряжене до знаменника. Отже,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)x(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)x(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x\left(\sqrt{x}+1\right)=2.$$

Зразок 7.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x}{\sin 2\pi x}=\left(\frac{4-8}{\sin 4\pi}\right)=\left(\frac{-4}{0}\right)=\infty.$$

Носій нуля $x\to 2$, $(x-2\to 0)$ був присутнім тільки в знаменнику, але цікавим був знак чисельника. Тут ∞ є позначенням чогось дуже великого, що не вкладається в свідомості, тобто – поняття (теорію понять вивчає математична логіка).

Зразок 8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}=\left(\frac{\sin(-\pi)}{\sin(-3\pi)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Виділяємо носій нуля $(x+1)$ в чисельнику і знаменнику із переформуванням виразів, що містять x

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi(x+1-1)}{\sin 3\pi(x+1-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi\left((x+1)-1\right)}{\sin 3\pi\left((x+1)-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sin\left(\pi(x+1)-\pi\right)}{\sin\left(3\pi(x+1)-3\pi\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi(x+1)\cdot\cos\pi-\cos\pi(x+1)\cdot\sin\pi}{\sin 3\pi(x+1)\cdot\cos 3\pi-\cos 3\pi(x+1)\cdot\sin 3\pi}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-\sin \pi(x+1)}{-\sin 3\pi(x+1)}.$$

Після виділення носія нуля знову підставляємо $x=-1$ з причин:

1. Подивитися, чи не відбулося зайвого скорочення;

2. Перевірити, як зберігся зміст невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, тобто чи немає помилки.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi(x+1)}{\sin 3\pi(x+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi(x+1)\cdot 3\pi(x+1)}{\sin 3\pi(x+1)\cdot 3\pi(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3\cdot 1}=\frac{1}{3}, \text{ оскільки } \lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi(x+1)}{\pi(x+1)}=1,\ \lim_{x\to -1}\frac{3\pi(x+1)}{\sin 3\pi(x+1)}=1.$$

Зразок 9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+4}}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right)^{\infty}.$$

Значок ∞ означає, традиційно, і $(+\infty)$, *і* $(-\infty)$.

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ є невизначеністю (тобто поняттям математичної логіки) належно незрозумілою, бо може обернутися як в вираз вигляду $\left(\frac{\infty}{b}\right)$, $\left(\frac{b}{\infty}\right)$, так і в вираз $\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$; $b<\infty$, $b_1<\infty$, $b_2<\infty$. Тому вираз $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)$ підлягає окремому дослідженню. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^2+2x}{x^2}}{\frac{x^2+x+4}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=\left(\frac{1}{1}\right)=1.$$

Отже, для виразу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}}$ маємо невизначеність типу $\left((\sim 1)^{\infty}\right)$, яка має зміст другої важливої границі. Залишається з виразу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)$, $x\to\infty$ сформувати вираз вигляду $1+\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$.

Дiємо згідно шаблону.

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^2+2x & x^2+x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^2+x+4} & 1 \\ x-4 & \end{array}$$

Підставляємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}}=\left((\sim 1)^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}},$$

$\alpha = \dfrac{x-4}{x^2+x+4}$ при $x \to \infty$.

Оскільки другу важливу границю зафіксовано у вигляді $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, відтворюємо формально такий вигляд при $\alpha = \dfrac{x-4}{x^2+x+4}$, $x \to \infty$ Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}} = \left((\sim 1)^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4}{x^2+x+4}\right)^{\frac{x^2+x+4}{x-4}\cdot\frac{x-4}{x^2+x+4}\cdot\frac{3x^2-x}{x+1}}.$$

Залишилося знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-4)(3x^2-x)}{(x^2+x+4)(x+1)}\right)$, бо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4}{x^2+x+4}\right)^{\frac{x^2+x+4}{x-4}} = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-4)(3x^2-x)}{(x^2+x+4)(x+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(3x^2-x)-4(3x^2-x)}{x^2(x+1)+x(x+1)+4(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2-12x^2+4x}{x^3+x^2+x^2+x+4x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{12x^2}{x^3}+\frac{4x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{4}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = \frac{3}{1} = 3$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+4}\right)^{\frac{3x^2-x}{x+1}} = e^3.$

Як показано, формалізування знаходження границі надає можливостей більш раціональних алгоритмів знаходження границі, особливо зручних для слабших студентів.

§ 8. Використання заміни змінної при знаходженні границі функції

Використання заміни незалежної змінної (аргументу) будемо використовувати для спрощення розгляданого виразу і зручного використання правил алгебри.

Зразок 10.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x=y^2,\\(x\to4)\Rightarrow(y\to2)\end{array}\right|=\lim_{y\to2}\frac{\sqrt{y^2}-2}{y^4-16}=\lim_{y\to2}\frac{y-2}{y^4-16}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to2}\frac{(y-2)}{(y-2)(y+2)(y^2+4)}=\lim_{y\to2}\frac{1}{(y+2)(y^2+4)}=\frac{1}{32}.$$

Зразок 11.

$$\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\deg x=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\},\\ \text{н.с.к.}\{2,3\}=6,\ x=y^6,\\(x\to64)\Rightarrow(y\to2)\end{array}\right|=\lim_{y\to2}\frac{\sqrt{y^6}-8}{\sqrt[3]{y^6}-4}=\lim_{y\to2}\frac{y^3-8}{y^2-4}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}=\lim_{y\to2}\frac{y^2+2y+4}{y+2}=3.$$

§ 9. Знаходження границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих

Нескінченно малі в R^1 розуміємо класично.

Звичайно, нескінченно малою можна означити:

1. Функцію $f(x)$ при $x\to\infty$, $x\in N$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

2. Функцію $f(x)$ при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Перше означення стосується нескінченно малої послідовності.
В другому означенні можливим є $a\equiv\infty$.

Зразок 12. З'ясувати, чи функції $\alpha_1(x)=x^2-2x$, $\alpha_2(x)=e^{x^2-4}$, $\alpha_3(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ є нескінченно малими.

Розв'язання. Прирівнюємо $\alpha_1(x)=0$. Одержуємо, що $x_1=0$, $x_2=2$. Прирівнюємо $e^{x^2-4}=0$. Одержуємо, що $e^{x^2-4}\to 0$ при $x\in\varnothing$. Прирівнюємо $e^{-\frac{x^2}{2}}=0$. Одержуємо, що $e^{-\frac{x^2}{2}}\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Відповідь: $\alpha_1(x)=x^2-2x$ є нескінченно малою при $x\to 0$; $\alpha_1(x)=x^2-2x$ є нескінченно малою при $x\to 2$, $\alpha_2(x)=e^{x^2-4}$ нескінченно малою бути не може, $\alpha_3(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ є нескінченно малою при $x\to+\infty$, $\alpha_3(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ є нескінченно малою при $x\to-\infty$.

Еквівалентні нескінченно малі під знаком границі можна заміняти одну на другу. Проте не зайвим буде нагадати, що нескінченно малі $\alpha_4(x)=x^3-1$ при $x\to 1$ і $\alpha_5(x)=x^2-9$ при $x\to 3$ не є еквівалентними нескінченно малими, хоча у них є однаковим порядок малості.

Оскільки майже кожна функція ТФДЗ може перетворюватися в нуль – кожного разу за конкретних відповідних умов – пропонується у $\alpha(x)$ уточнити термінологію і говорити: не нескінченно мала $\alpha(x)$ - а <u>нескінченно мала</u> <u>$\alpha(x)$</u> <u>при</u> <u>$x\to a$</u> завжди і тільки.

Побудову нескінченно малої потрібного порядку малості здійснюємо наступним чином:

Розглянемо нескінченно малу $\alpha_6(x)=(5x+2)\sin(x-1)^3$ при $x\to 1$.

Природно, $\alpha_6(x)$ є нескінченно малою третього порядку малості порівняно з $\alpha_7(x)=(x-1)$ при $x\to 1$, цебто $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+2)\sin(x-1)^3}{(x-1)^3}=\underline{7\neq 0}$.

Тоді під знаком границі при $x\to 1$ нескінченно малу $\alpha_6(x)$ при $x\to 1$ можна безостережно замінити на <u>побудовану</u> нескінченно малу $\alpha_8(x)=7(x-1)^3$ при $x\to 1$.

Звичайно, нескінченно малі $\alpha_4(x)$ при $x\to 1$ і $\alpha_5(x)$ при $x\to 3$ є не порівнюваними (без заміни незалежної змінної зсувом), оскільки водночас не є нескінченно малими.

Зразок 13. Знайти

$$\lim_{x\to -2}\frac{tg^3(x+2)\ln^7(3+x)^{\frac{3}{7}}(3x^2+5x+1)\sin(x+2)^6 e^{x^2+3x}}{\arcsin^2(x+2)^{\frac{5}{2}}\cdot arctg^4\sqrt{x+2}\cdot(5x^3-7)(3x+6)^5}= \tag{1}$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\varphi(x).$$

Розв'язання. Спершу підставляємо $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\varphi(x)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

З'ясовуємо, які множники в чисельнику і знаменнику є нескінченно малими функціями при $x\to -2$. Це $\alpha_9(x)=tg^3(x+2)$ при $x\to -2$; $\alpha_{10}(x)=\ln^7(3+x)^{\frac{3}{7}}$ при $x\to -2$; $\alpha_{11}(x)=\sin(x+2)^6$ при $x\to -2$; $\alpha_{12}(x)=\arcsin^2(x+2)^{\frac{5}{2}}$ при $x\to -2$; $\alpha_{13}(x)=arctg^4\sqrt{x+2}$ при $x\to -2$; $\alpha_{14}(x)=(3x+6)^7$ при $x\to -2$.

Оскільки $tgx\sim x$ при $x\to 0$, $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$, $arctgx\sim x$ при $x\to 0$, то $\alpha_9(x)=tg^3(x+2)\sim(x+2)^3$ при $x\to -2$; $\alpha_{10}(x)=\ln^7(3+x)^{\frac{3}{7}}=\ln^7(1+(x+2))^{\frac{3}{7}}\sim\left((x+2)^{\frac{3}{7}}\right)^7=(x+2)^3$ при $x\to -2$; $\alpha_{11}(x)=\sin(x+2)^6\sim(x+2)^6$ при $x\to -2$; $\alpha_{12}(x)=$ $=\arcsin^2(x+2)^{\frac{5}{2}}\sim\left((x+2)^{\frac{5}{2}}\right)^2=(x+2)^5$ при $x\to -2$, $\alpha_{13}(x)=arctg^4\sqrt{x+2}\sim$ $\sim\left(\sqrt{x+2}\right)^4=(x+2)^2$ при $x\to -2$; $\alpha_{14}(x)=(3x+6)^5\sim 3^5(x+2)^5$.

На підставі останніх викладок здійснюємо заміну складних виглядом і виразом нескінченно малих $\alpha_9(x)$, $\alpha_{10}(x)$, $\alpha_{11}(x)$, $\alpha_{12}(x)$, $\alpha_{13}(x)$, $\alpha_{14}(x)$ при $x\to -2$ на відповідні еквівалентні нескінченно малі многочленного вигляду при $x\to -2$ в виразі (1). Отримаємо

$$\lim_{x\to -2}\varphi(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^3(x+2)^3(3x^2+5x+1)(x+2)^6\cdot e^{x^2+3x}}{(x+2)^5(x+2)^2(5x^3-7)\cdot 3^5(x+2)^5}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^{12}(3x^2+5x+1)\cdot e^{x^2+3x}}{(x+2)^{12}(5x^3-7)\cdot 3^5} = \lim_{x\to-2}\frac{(3x^2+5x+1)\cdot e^{x^2+3x}}{(5x^3-7)\cdot 3^5} =$$

$$= -\frac{3\cdot e^{-2}}{47\cdot 3^5} = -\frac{e^{-2}}{47\cdot 81}.$$

Таким чином можна шукати різні типи щонайскладніших границь.

§ 10. Використання правила Лопіталя-Бернулі для розкриття невизначеностей.

Розглядаємо дробоподібні невизначеності. Недробоподібні невизначеності зводитимем до дробоподібних типу $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Зразок 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{2x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-2x+3\right)'}{\left(2x+4\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-2}{2} = \infty.$

Зразок 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^{x-1}}{2x^3+3x^2-7}$ - мусимо розглянути два варіанти.

Варіант I. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{2x^3+3x^2-7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3e^{x-1}\right)'}{\left(2x^3+3x^2-7\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{6x^2+6x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$

Оскільки знову маємо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, знову застосовуємо правило Лопіталя-Бернулі, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{2x^3+3x^2-7} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{6x^2+6x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3e^{x-1}\right)'}{\left(6x^2+6x\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{12x+6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3e^{x-1}\right)'}{\left(12x+6\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-1}}{12} = +\infty.$

Варіант 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{x-1}}{2x^3+3x^2-7} = 0.$

Зразок 16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{n^2+4n}$ – згідно правила Лопіталя-Бернулі границю шукати не маємо права, бо n є дискретною змінною, а похідну можна брати по неперервній змінній. Але, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{n^2+4n}$ веде себе на нескінченності так, як $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-7}{x^2+4x}$, то записуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{n^2+4n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-7}{x^2+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x-7)'}{(x^2+4x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x+4} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0.$$

Зразок 17.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2)'}{(x^2-4x+4)'} = \lim_{x\to2} \frac{2x-1}{2x-4} = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty.$$

§ 11. Односторонні границі.

Розглянемо функцію дійсної змінної $[1-3]$ $y=f(x),\ x\in R^1$.

Нехай $y=f(x)$ – кусково неперервна з розривами в точках a_i, $i=\overline{1,n}$. Під односторонніми границями будемо розуміти $\lim\limits_{x\to a_i+0} y$, $\lim\limits_{x\to a_i-0} y$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

Враховуємо, що в розширеній комплексній площині Z побутує одна нескінченно віддалена точка $z=\infty$, а в ТФДЗ нескінченність $(x=\infty)$ є тільки поняттям про щось дуже велике – більше за все відоме.

Враховуємо також те, що формалізація математичного запису стала цілковито необхідною за комп'ютеризації, оскільки наразі ми не передбачаємо навіть століття – коли комп'ютери почнуть розуміти зміст, не належно реалізований формою подання інформації, – і продемонструємо пропонований формальний запис знаходження односторонніх границь, який нескладно алгоритмізувати на якійсь конкретній мові програмування високого рівню.

Звичайно, ми не виходимо з того, що ще декілька століть тому формульний запис в математиці не використовувався зовсім – і вже тепер тільки в небагатьох випадках класичного аналізу об'єм формалізації записів є благеньким – тобто доводиться серйозно надолужувати уявою, що є нестерпно складним для порівняно слабких студентів технічних вузів.

Оформлення процедури пошуку односторонньої границі пропонується наступне:

1. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x);\quad \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x);$

2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ (x-a)>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x-a\to 0\\ (x-a)>0}} \varphi(x-a),$

де $f(x) = \varphi(x-a)$, від виразу $f(x)$ переходимо до виразу $\varphi(x-a)$ за рахунок виокремлення носія нуля $(x-a)$.

Зразок 18. Знайти $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{(x-2)^2 \sin(2-x)}{(x^3-8)(x^2+3x-10)^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{(x-2)^2 \sin(2-x)}{(x^3-8)(x^2+3x-10)^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x-2)^2 \sin(2-x)}{(x^3-8)(x^2+3x-10)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{(x-2)\to 0\\ (x-2)<0}} \frac{(x-2)^2(-\sin(x-2))}{(x-2)(x^2+2x+4)(x-2)^2(x+5)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{(x-2)\to 0\\ (x-2)<0}} \frac{-(x-2)^3 \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}}{(x-2)^3(x^2+2x+4)(x+5)^2} = -\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{(x^2+2x+4)(x+5)^2} = -\frac{1}{12\cdot 49}.$$

Зразок 19. $y = \begin{cases} x^2-3x, & x<-1\\ x+4, & -1\le x<5.\\ 6, & x\ge 5 \end{cases}$

Знайти $\lim\limits_{x\to -1+0} y = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} y = \Bigg|$ вибираємо ту гілку y при $x>-1$, що безпосередньо зближується з $x=-1\Bigg| = \lim\limits_{x\to -1}(x+4) = 3.$

Зразок 20. Знайти $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\lim_{\substack{x\to-3\\ x<-3}}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\lim_{\substack{x\to-3\\ x+3<0}}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\frac{5}{2+\lim\limits_{\substack{x+3\to0\\ x+3<0}}4^{\frac{7}{x+3}}}=$$

$$=\left(\frac{5}{2+4^{-\infty}}\right)=\frac{5}{2}.$$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\lim_{\substack{x\to-3\\ x>-3}}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\lim_{\substack{x+3\to0\\ x+3>0}}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}=\frac{5}{2+\lim\limits_{\substack{x+3\to0\\ x+3>0}}4^{\frac{7}{x+3}}}=\left(\frac{5}{2+4^{+\infty}}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{2+\infty}\right)=0.$$

Оскільки $\frac{5}{2}\neq0$, тобто

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}\neq\lim_{x\to-3+0}\frac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}},$$

то єдиної границі функції $y=\dfrac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}$ при $x\to-3$ не існує, - й, згідно означення, границі функції $y=\dfrac{5}{2+4^{\frac{7}{x+3}}}$ при $x\to-3$ не існує взагалі.

При пошуку односторонніх границь при $x\to+\infty$ керуємось означенням нескінченно великої величини як оберненої до величини нескінченно малої. Застосовуємо процедуру пошуку ТФКЗ пошуку лишку в нескінченно віддаленій точці до нескінченно великих величин $\alpha(x)=x,\ x\to+\infty;\ \alpha(x)=x,\ x\to-\infty.$

Таким чином,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{y\to+0}f\left(\frac{1}{y}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{y\to-0}f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Зразок 21. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{y\to-0}\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}}=\lim_{\substack{y\to0\\y<0}}\frac{1}{y\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}}=\lim_{\substack{y\to0\\y<0}}\frac{1}{-|y|\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}=-1.$$

Тут ми скористалися тим, що під корінь парного показника можна вносити тільки відповідну до показника кореня степінь модуля вносимої величини.

Розділ 3. Завдання.

§ 12. Границя послідовності.

Визначити границі.

2.12.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+4}{2n^2+4n+3}$;

2.12.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+7}{n^2-4n+1}$;

2.12.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+5}{3n-1}$;

2.12.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-7n+4}{6n^3+4}$;

2.12.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-7n-4}{7n^3-4n^2+2}$;

2.12.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-4}{3n+2}$;

2.12.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{2n^2+5n-1}$;

2.12.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{3n+5}}$;

2.12.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+n+2}}$;

2.12.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-7n}}{\sqrt{2n^2+n+5}}$;

2.12.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}$;

2.12.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{2^n}$;

2.12.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-2}}{2n^3+4n}$;

2.12.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{2n+3}$;

2.12.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+5)}{\sqrt{n+2}}$;

2.12.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n-4}}$;

2.12.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{2n-1}$;

2.12.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$;

2.12.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+3}}{\sqrt{4n^2-n}}$;

2.12.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}}{n-3}$.

§ 13. Границя функції при $x\to\infty$.

2.13.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{2x-4}$;

2.13.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+4}{3x-7}$;

2.13.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x}{4x^2+2x+1}$;

2.13.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}}$;

2.13.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+7}}$;

2.13.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$;

2.13.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$;

2.13.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt{2x+3}}$;

2.13.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{3x+1}}{x^2+2x+1}$;

2.13.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2^{x-1}+x}$;

2.13.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{3x-5}}$;

2.13.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[2]{x^2+5}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

2.13.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}}$;

2.13.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2}{5x^2+x}$;

2.13.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x+2}{3x^3-x^2+1}$;

2.13.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2}{-7x^3+x+2}$;

2.13.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{2x^3+x^2+x+3}$;

2.13.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3^{x^2}-7}$;

2.13.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+2}{-3x+2^{-x^2}}$;

2.13.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

2.13.22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin\pi x}{2x}$;

2.13.23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$.

2.13.12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{x^4+2x-2}}$;

§ 14. Границі алгебричних виразів при $x \to a$, $a < \infty$.

2.14.1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

2.14.2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x+1}$;

2.14.3. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+2}{x^3+1}$;

2.14.4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+3}{x^2-9}$;

2.14.5. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$;

2.14.6. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$;

2.14.7. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right)$;

2.14.8. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x^3-8}\right)$;

2.14.9. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^5+1}$;

2.14.10. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$;

2.14.11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

2.14.12. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}$;

2.14.13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

2.14.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

2.14.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x+1}+x-1}{\sqrt{x+1}-x-1}$;

2.14.16. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt[3]{2+x}-1}$;

2.14.17. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$;

2.14.18. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{9-x^2}{\sqrt{4+x}-1}$;

2.14.19. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;

2.14.20. $\lim\limits_{x\to -5} \frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{6+x}-1}$;

2.14.21. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$;

2.14.22. $\lim\limits_{x\to -7} \frac{\sqrt[3]{x-1}+2}{\sqrt[3]{x+6}+1}$;

2.14.23. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$;

2.14.24. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3+x}}{x^2-4x+3}$;

2.14.25. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}-2}\right)$;

2.14.26. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x^2+5x-1}-7}{\sqrt{4+x}-\sqrt{11+x}}$.

§ 15. Важливі границі.

2.15.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;

2.15.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

2.15.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x+2}$;

2.15.4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x}$;

2.15.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin \pi n}{n}$;

2.15.6. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\sin\frac{\pi}{n}$;

2.15.7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin x}{x}$;

2.15.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;

2.15.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2+x}$;

2.15.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin x}$;

2.15.11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{x^2-x}$;

2.15.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg3x}$;

2.15.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{tg2\pi x}$;

2.15.26. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{arctg(x-1)^2}{arctg(2x-2)}$;

2.15.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$;

2.15.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$;

2.15.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-2}\right)^x$;

2.15.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}$;

2.15.31. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)^{x+3}$;

2.15.32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$;

2.15.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$;

2.15.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x}\right)^{-x}$;

2.15.35. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x}{x+2}\right)^x$;

2.15.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x$;

2.15.37. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{3x}}$;

2.15.38. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{\sin x}}$;

2.15.14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x^2-\pi^2}$;

2.15.15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{x^2-4}$;

2.15.16. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\cos x-\cos 7}{x-7}$;

2.15.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

2.15.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tgx-tg3}{x-3}$;

2.15.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\pi x}{x-2}$;

2.15.20. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

2.15.21. $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$;

2.15.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{3x}$;

2.15.23. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{arc\sin(x-\pi)}{x^2-\pi^2}$;

2.15.24. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{arctgx}{3\pi-x}$;

2.15.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{\arcsin 2x}$;

2.15.39. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$;

2.15.40. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$;

2.15.41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2x}$;

2.15.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(3x+1)-\ln(x+3)\right)$;

2.15.43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+7x)}{x}$;

2.15.44. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+2)-\ln(x+1)\right)$;

2.15.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x}$;

2.15.46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$;

2.15.47. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

2.15.48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$;

2.15.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$;

2.15.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}$.

§ 16. Знаходження границь за допомогою порівняння нескінченно малих.

2.16.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\sin n^2 x}\cdot\ln^3(1+2x)}{x^{\frac{2}{3}}tg^3 5x}$;

2.16.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2 tg(x-3)^2}{\arcsin^4(2x-6)}$;

2.16.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin tg^2 x}{\ln(1+3x^2)}$;

2.16.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}arctg^{\frac{1}{3}}x}{\sin x}$;

2.16.3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+1}\,arctg^2(x+1)}{\arcsin^2(x+1)}$;

2.16.4. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sin^3(x+5)\ln^2(x+6)}{arctg^6(x+5)}$;

2.16.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln^2(1+\sin 2x)}{arctg^2 x}$;

2.16.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln^3(1+2x)}{tg^3\arcsin x}$;

2.16.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln^4\left(1+tg\frac{x}{2}\right)}{x^2 arctg^2 x}$;

2.16.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\arcsin x}}{arctgx}$.

§ 17. Односторонні границі.

2.17.1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3}{x-2}$;

2.17.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$;

2.17.3. $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}$;

2.17.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{2\sqrt[4]{x^2+1}}$;

2.17.5. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin|x|}{x}$;

2.17.6. $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin|x|}{x}$;

2.17.7. $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}$;

2.17.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$;

2.17.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$;

2.17.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x}$;

2.17.11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2+e^x}{3+e^x}$;

2.17.12. $\lim\limits_{x\to3-0}\frac{x}{x-3}$;

2.17.13. $\lim\limits_{x\to3+0}\frac{x}{x-3}$;

2.17.14. При гіперболічних функціях $shx=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$, $chx=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ знайти

2.17.14.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} shx$;

2.17.14.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} shx$;

2.17.14.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} chx$;

2.17.14.4. $\lim\limits_{x\to-\infty} chx$;

2.17.14.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} thx$;

2.17.14.6. $\lim\limits_{x\to-\infty} thx$.

§ 18. Відповіді

2.12.1. $\frac{3}{2}$; *2.12.2.* 0; *2.12.3.* ∞; *2.12.4.* 0; *2.12.5.* $\frac{5}{7}$; *2.12.6.* ∞; *2.12.7.* 2; *2.12.8.* ∞; *2.12.9.* 0; *2.12.10.* $\frac{1}{2}$; *2.12.11.* $\frac{5}{2}$; *2.12.12.* $\sqrt{\frac{5}{2}}$; *2.12.13.* 0; *2.12.14.* 0; *2.12.15.* ∞; *2.12.16.* 0; *2.12.17.* 0; *2.12.18.* 0; *2.12.19.* ∞; *2.12.20.* 0.

2.13.1. $\frac{3}{2}$; *2.13.2.* $\frac{5}{3}$; *2.13.3.* $\frac{1}{2}$; *2.13.4.* 2; *2.13.5.* -3; *2.13.6.* 2; *2.13.7.* 3; *2.13.8.* $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \to +\infty;\ \varnothing,\ x \to -\infty\right\}$ *2.13.9.* $\{+\infty;\ x \to +\infty;\ 0,\ x \to -\infty\}$; *2.13.10.* $\{0,\ x \to +\infty,\ 3,\ x \to -\infty\}$; *2.13.11.* $+\infty$; *2.13.12.* 0; *2.13.13.* -2; *2.13.14.* 2; *2.13.15.* $\frac{3}{5}$; *2.13.16.* $\frac{2}{3}$; *2.13.17.* $-\frac{3}{7}$; *2.13.18.* ∞; *2.13.19.* 0; *2.13.20.* $-\frac{7}{3}$; *2.13.21.* 0; *2.13.22.* 0; *2.13.23.* 0.

2.14.1. ∞; *2.14.2.* 0; *2.14.3.* $\frac{2}{3}$; *2.14.4.* ∞; *2.14.5.* 4; *2.14.6.* -12; *2.14.7.* ∞; *2.14.8.* ∞; *2.14.9.* $\frac{3}{5}$; *2.14.10.* $\frac{a-1}{2a}$; *2.14.11.* $\frac{1}{2}$; *2.14.12.* $\frac{3}{5}$; *2.14.13.* $\frac{9}{2}$; *2.14.14.* $\frac{3}{2}$; *2.14.15.* $-\frac{5}{3}$; *2.14.16.* $\frac{3}{2}$; *2.14.17.* $\frac{1}{16}$; *2.14.18.* 12; *2.14.19.* 44; *2.14.20.* $\frac{1}{2}$; *2.14.21.* $\frac{1}{84}$; *2.14.22.* $\frac{1}{4}$; *2.14.23.* $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{6}}$; *2.14.24.* $-\frac{1}{8}$; *2.14.25.* ∞; *2.14.26.* 0.

2.15.1. 3; *2.15.2.* $\frac{2}{5}$; *2.15.3.* 0; *2.15.4.* 0; *2.15.5.* 0; *2.15.6.* 1; *2.15.7.* $\frac{\sin 3}{3}$; *2.15.8.* 0; *2.15.9.* 2; *2.15.10.* 2; *2.15.11.* 1; *2.15.12.* $\frac{2}{3}$; *2.15.13.* $\frac{1}{2}$; *2.15.14.* $\frac{1}{2\pi}$; *2.15.15.* $\frac{\cos 2}{4}$; *2.15.16.* $-\sin 7$; *2.15.17.* 2; *2.15.18.* $\frac{1}{\cos^2 3}$; *2.15.19.* π; *2.15.20.* 0; *2.15.21.* $\frac{2}{\pi}$; *2.15.22.* $\frac{2}{3}$; *2.15.23.* $\frac{1}{2\pi}$; *2.15.24.*

$\frac{-1}{9\pi^2+1}$; *2.15.25.* 1; *2.15.26.* 0; *2.15.27.* e^5; *2.15.28.* e^{-3}; *2.15.29.* e^{-2}; *2.15.30.* $\frac{9}{4}$; *2.15.31.* $\frac{1}{4^3}$; *2.15.32.* $\{0,\ x \to 1+0;\ \infty,\ x \to 1-0\}$; *2.15.33.* 0; *2.15.34.* e^2; *2.15.35.* ∞; *2.15.36.* e^{-2}; *2.15.37.* $e^{\frac{2}{3}}$; *2.15.38.* e; *2.15.39.* 1; *2.15.40.* $e^{-\frac{9}{2}}$; *2.15.41.* $\frac{5}{2}$; *2.15.42.* 1; *2.15.43.* $\frac{7}{\ln 2}$; *2.15.44.* 1; *2.15.45.* 1; *2.15.46.* $\ln 2$; *2.15.47.* $\ln 3$; *2.15.48.* -1; *2.15.49.* 2; *2.15.50.* -1.

2.16.1. $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; *2.16.2.* $\frac{1}{16}$; *2.16.3.* 0; *2.16.4.* ∞; *2.16.5.* 4; *2.16.6.* $\frac{1}{3}$; *2.16.7.* 1; *2.16.8.* 8; *2.16.9.* $\frac{1}{16}$; *2.16.10.* ∞.

2.17.1. $\{+\infty,\ x \to 2+0;\ -\infty,\ x \to 2-0\}$; *2.17.2.* -1; *2.17.3.* -1; *2.17.4.* 2; *2.17.5.* 1; *2.17.6.* -1; *2.17.7.* $\{0,\ x \to 2+0;\ 1,\ x \to 2-0\}$; *2.17.8.* 0; *2.17.9.* 1; *2.17.10.* 0; *2.17.11.* $\left\{1,\ x \to +0;\ \frac{2}{3},\ x \to -0\right\}$; *2.17.12.* $-\infty$; *2.17.13.* $+\infty$; *2.17.14.1.* $+\infty$; *2.17.14.2.* $-\infty$; *2.17.14.3.* $+\infty$; *2.17.14.4.* $+\infty$; *2.17.14.5.* 1; *2.17.14.6.* -1.

Література

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х т. Т.1. – М.: Наука, 1969. - 608 с.
2. СМБ. Функциональный анализ. Под ред. С.Г.Крейна. – М.: Наука, 1972. - 544 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под ред. Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
5. Манкуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркін О.І., Федін М.С. Математика в поняттях, означеннях і термінах. В 2-х т. – К.: Радянська школа, 1986. – 743 с.

Зміст

3600 сум

ISBN 978-966-8460-76-0

Комп'ютерний набір
Вавринюк Світлани

Верстка
Войтович Оксани

Підписано до друку 13.05.10
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Цифровий друк
Гарнітура Times
Умов. друк. арк. 2,1 Фіз. др. арк. 2,25
Наклад 100 прим.

Видавець:
Приватний підприємець Сорока Тарас Богданович
79026, м. Львів, вул. Володимира Великого 2,
Свідоцтво Державного реєстру: серія ЛВ №17
soroka@soroka.lviv.ua

Надруковано
ДРУК НА ПОТРЕБУ
ФОП Сорока С. В.