

М.М. БУРАКОВ

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
ПОДЗЕМНЫХ ВОД**

Алматы, 2012



551.491.7 - Поверхностная гидрогеология.
Рельефа
532.5.032:51 - Гидрогеология

УДК 556.33.04
ББК 26.35
Б 91

Б 91 Бураков М.М. Физико-математические модели нелинейной фильтрации подземных вод. Алматы: АО "НЦТИ", 2012. – 162 с.

ISBN 978-601-258-019-8

Одной из основополагающих проблем гидродинамики была и остается сейчас проблема обоснование выбора уравнения движения жидкости (закона фильтрации), задаваемого в фильтрационной феноменологической модели. К настоящему времени накоплено множество фактов нарушения линейного закона в области как малых, так и больших градиентов давления (или напора). Соответственно назрела необходимость построения нелинейной теории фильтрации подземных вод, задачами которой являются оценки применимости линейной теории, разработка методических приемов полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации, изучение закономерностей движения жидкости в проводящих средах применительно к некоторым вариантам нелинейной теории (например, релаксационной фильтрации подземных вод).

В настоящей работе рассматриваются проблемы нелинейной теории фильтрации – оценки сопротивления фильтрационному потоку, обусловленного инерционной составляющей итоговых, суммарных сопротивлений на несовершенство возмущающих скважин по характеру вскрытия водоносного пласта, теоретические и методические проблемы полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации при малых градиента давления (или напора), оригинальная теория релаксационной фильтрации подземных вод; они критически анализируются от исходных представлений, положенных в основу феноменологической фильтрационной модели. Разработанность указанных проблем доведена до алгоритмизированных процедур, обеспечивающих возможность экспериментального исследования нелинейности фильтрации подземных вод.

Для специалистов, интересующихся проблемами гидродинамики и использующих в своей работе математические методы.

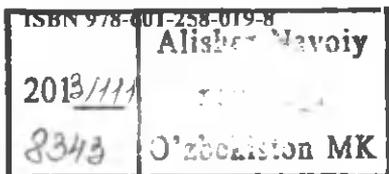
Табл. 6, ил. 30, прилож. 1, список лит. 267 назв.

Печатается на основании решения Ученого совета ТОО "Институт гидрогеологии и геоэкологии им. У.М. Ахмедсафина".

УДК 556.33.04
ББК 26.35

Рецензенты: В.И. Порядин, д-р геол.-минер. наук (ТОО "Институт гидрогеологии и геоэкологии им. У.М. Ахмедсафина"); Л.М. Павличенко, д-р геогр. наук, к-т техн. наук (ТОО "Ecotera")

© М.М. Бураков, 2012



V
257877₈₂

ВВЕДЕНИЕ

Подземные воды (ПВ), наряду с углеводородами (нефтью и газом), – важнейший компонент подземной гидросферы, как в познавательном, так и в хозяйственном смысле. Стоящие перед гидрогеологией прикладные задачи сводятся преимущественно к использованию ПВ в хозяйственных целях, борьбе с ними при строительстве промышленных и гражданских зданий и сооружений, выяснению роли воды в формировании и разрушении месторождений полезных ископаемых, управлению режимом подземной гидросферы. Теоретические проработки, главнейшее место среди которых занимает теория фильтрации ПВ (являющаяся предметом гидродинамики – самостоятельного раздела гидромеханики), призваны обеспечить решение перечисленных задач.

В гидродинамические построения все более глубоко проникает логический строй точных наук, однако уже и сейчас гидродинамика располагает научной методологией, в целом отвечающей современному научному уровню и требованиям практики. С помощью методов математической физики решаются прямые (прогнозные) и обратные (определение свойств объектов по результатам опытных исследований и натуральных наблюдений) задачи. Эти методы не только "обслуживают" гидрогеологию, но и привносят в нее то самое углубленное понимание проблемы, а подчас и принципиально новые физические идеи. Все явственнее встает и вполне самостоятельная проблема анализа существа процессов и физического смысла расчетных формул и используемых методов, достоверности результатов расчетов и прогнозов, базирующихся на них, тем более что степень разработанности разных приемов, методов, подходов (да и самих физико-математических моделей фильтрации жидкости, на которых эти приемы, методы, подходы основываются) широко варьирует: одни доведены до алгоритмизованных процедур, другие только намечены.

Одной из основополагающих проблем гидродинамики была и остается сейчас проблема обоснование выбора уравнения движения жидкости (закона фильтрации), задаваемого в фильтрационной феноменологической модели. Использование линейного закона (закона Дарси) приводит к наиболее простому варианту такой модели, – линейной теории фильтрации¹, – обеспечивающей решение самых разнообразных прикладных задач, исследование закономерностей фильтрации ПВ и других жидкостей. Экспериментальные исследования подтвердили применимость линейного закона фильтрации для большого диапазона гидравлических градиентов (градиентов давления или напора) и, соответственно, скоростей течения жидкостей через проводящие среды (пористые и трещинные). С другой стороны к настоящему времени накоплено множество фактов нарушения линейного закона в области как малых, так и боль-

¹ При определенных условиях модель может выступать в качестве теории и наоборот.

ших градиентов давления (или напора). Соответственно назрела необходимость построения нелинейной теории фильтрации ПВ, минимальными задачами которой являются оценки применимости линейной теории, разработка методических приемов полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации, изучение закономерностей движения жидкости в проводящих средах применительно к некоторым вариантам нелинейной теории (например, релаксационной фильтрации ПВ).

Несколько особняком стоит задача критического анализа уже существующих разработок в области нелинейной теории фильтрации. В этой связи необходимо отметить, что важнейшее значение в проблеме нелинейной теории (да и в целом проблемы изучения фильтрации ПВ) имеет преодоление субъективизма, присущего любой интеллектуальной деятельности человека. Так, в естествознании еще мало осознана роль принципа конструктивизма. В чем он состоит и какова его роль при изучении фильтрации ПВ?

Из теории доказательств известно, что в ходе научной дискуссии, при обсуждении какой-либо проблемы, теории, модели чрезвычайно легко делаются отрицательные высказывания: "нет", "не правильно", "это не так", "теория (или модель) не верна" и т.д. Эти высказывания, как правило, не сопровождаются какими-либо комментариями (особенно если "дискутируют" оппоненты разной "весовой категории").

Вместе с тем, с позиций все той же теории доказательств такие высказывания являются отрицательными утверждениями, а следовательно, должны обосновываться не менее тщательно, чем и положительные утверждения. Это означает, что для отрицания теории, модели не достаточно сказать, что эта теория, модель неверна, не годится и т.д. Необходимо еще обосновать (не менее, а пожалуй, даже более тщательно) почему она неверна или не годится. В качестве обоснования, базы сделанного отрицательного утверждения может (и должна) быть альтернативная отрицаемой теории, модель.

Таким образом, необходимость обоснования отрицательного утверждения (в строго научном, а не спекулятивном, как бывает в подавляющем большинстве случаев, смысле) является, по сути, движущей силой развития науки, принципиально несет в себе огромный потенциал добывания новых знаний. Соответственно осознание любым исследователем принципа конструктивизма может выступать мерилем состоятельности такого исследователя как ученого, и в конечном итоге, определять потенциал развития той или иной научной дисциплины.

По этой причине все рассматриваемые в настоящей работе проблемы в рамках нелинейной теории фильтрации – оценки сопротивления фильтрационному потоку, обусловленные инерционной составляющей, итоговых, суммарных сопротивлений на несовершенство возмущающих скважин по характеру вскрытия водоносного пласта, теория релаксационной фильтрации ПВ – критически анализировались от исходных представлений, положенных в основу феноменологической фильтрационной модели. Разработанность указанных проблем доведена до алгоритмизованных процедур, обеспечивающих возможность экспериментального исследования нелинейности фильтрации ПВ.

Предлагаемую работу, строго говоря, нельзя считать методическим руководством по таким оценкам. Однако приведенные примеры, как представляется автору, вполне конкретизируют изложение, и позволяют широкое практическое освоение и использование предлагаемых моделей и методов.

1. СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ, ИХ СООТНОШЕНИЯ

Главная цель изучения подземных вод (ПВ), как подчеркивалось во введении, — обеспечение хозяйственного использования запасов, как самих ПВ, так и сопутствующих им тепловой энергии, минерального сырья и т.п. [25, 61]. Это требует правильного обоснования и постановки специальных гидрогеологических исследований, обеспечивающих верную прогностическую оценку (качественную и количественную) результатов нарушения естественного состояния ПВ и их характеристик, а также характеристик вмещающей (проводящей) среды под влиянием эксплуатации.

В основу таких исследований кладется та или иная физико-математическая модель движения ПВ, свойства которой определяют методологические особенности исследований, при этом подмена без должного обоснования одной из модели другой способна внести принципиальные несоответствия полученных по результатам исследований выводов об анализируемых процессах реально протекающим в водоносных системах. В настоящее время в практике гидрогеологических исследований используется большое число подобных моделей течения ПВ, во многом физически несопоставимых между собой и имеющих различный уровень соответствия отображаемому природному процессу. Сам факт наличия таких моделей вызывает необходимость выбора, согласованного с возможностью практической реализации и определяющего качество конечных результатов. При этом любая модель, имеющая собственную понятийную базу, обуславливает не только возможность воспроизведения и исследования тех или иных особенностей изучаемого явления, но и требования к составу и качеству исходной информации.

1.1. Принципы феноменологического подхода к описанию движения жидкости в проводящих средах

Одним из общих методов исследования поведения материальных сред является развиваемый в физике статистический. В нем применяется вероятностный подход к описанию движения жидкости, и вводятся осредненные по большому числу молекул характеристики. Статистические модели всегда предполагают использование дополнительных гипотез о свойствах молекул, их взаимодействии и упрощение этих свойств и взаимодействий. Вместе с тем, во многих случаях не существует даже базы построения таких моделей. В тех же случаях, когда построить их удастся, они не могут быть эффективным средством решения поставленных задач в силу чрезмерной сложности соответствующих уравнений [75].

Например, в случае гамильтоновой системы [58], число частиц в которой порядка числа Авогадро, не существует физический эксперимент, позволяющий

определить одновременно координаты и скорости всех частиц. Еще меньше смысла в таком подходе, когда движение становится хаотическим (даже если это ламинарное течение по сети нерегулярно, хаотически, расположенных в пространстве пор или трещин). Здесь рассуждать об отдельных траекториях частиц вообще бессмысленно [58].

Другим общим подходом к описанию и исследованию движения жидкости является построение феноменологической макроскопической теории. Известно, что с увеличением числа отдельных микродвижений, составляющих макроскопическое, начинают проявляться суммарные статистические закономерности, соответствующие течению в целом и не справедливые для движения, например, одной или нескольких молекул. Такими свойствами обладают системы с большим числом элементов, слабо связанных между собой. Подобные системы могут быть описаны как некоторые сплошные среды.

В этом случае свойства проводящей среды и скорость течения осредняются по некоторому объему пространства, характерный размер которого используется в качестве масштаба осреднения. Каждому масштабу осреднения соответствует своя модель течения (одна или несколько), обладающая своей понятийной базой, своими гидродинамическими особенностями и требованиями к экспериментальному определению параметров. Такое соответствие определяется принципиальным подходом к осреднению, сформулированным в виде следующих известных из теоретической механики положений [5, 9, 10, 19, 42]:

- масштаб осреднения должен быть меньшим масштаба осредняемого течения;
- дискретная проводящая среда представляется идеализированной сплошной средой, последней отвечают экспериментально наблюдаемые осредненные свойства;
- осредненные свойства идеализированной сплошной среды измеряемы, непрерывны и дифференцируемы по координатам пространства и времени.

В макрообъеме статистически однородного геологического тела выделяется несколько характерных размеров; приближение процесса движения ПВ и его моделей осуществляется по одному из следующих масштабов осреднения [5, 19, 42]:

$$l_{\min} \ll l_n \ll l_V, \quad (1.1)$$

где l_{\min} – минимальный характерный размер объема вязкой слабо сжимаемой жидкости, для которого еще справедлив феноменологический подход к описанию ее течения; l_n – характерный размер проводящей среды, позволяющий схематизировать течение воды в системе сообщающихся пор или трещин моделью ее движения в идеализированной сплошной среде (насыщенной и ненасыщенной); l_V – характерный размер области фильтрации или ее части.

1.2. Физическая модель движения жидкости через проводящие среды

Феноменологический подход при осреднении течения по характерному размеру l_{\min} предполагает рассмотрение только таких объемов жидко-

сти, размеры которых велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями, так чтобы в любом объеме содержалось достаточно большое число молекул, и было бы возможно осреднение. При подобном подходе течение ПВ можно представить, например, движением жидкости в поре или трещине, описываемым системой уравнений Навье-Стокса [46, 47, 75]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) &= 0, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Здесь u – модуль вектора скорости движения жидкости; t – время; ρ – плотность жидкости; p – давление в жидкости; η – коэффициент вязкости жидкости; ∇ – оператор Гамильтона; Δ – оператор Лапласа. Последние составляют полную систему уравнений движения однородной вязкой слабо сжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил.

Существенно заметить, что использование модели течения вязкой жидкости предполагает необходимость задания на твердых неподвижных границах условия $\vec{u} = 0$. Это – так называемое условие прилипания, оно отражает тот факт, что между поверхностью поры или трещины и вязкой жидкостью существуют силы молекулярного сцепления. Движение жидкости в таком приближении носит вихревой характер, т.е. циркуляция вектора скорости течения по замкнутому контуру Γ отлична от нуля –

$$\oint_{\Gamma} \vec{u} \, dl \neq 0.$$

Экспериментальное исследование свойств этой модели, обеспечивающей точное физическое представление течения, возможно только с помощью специальных технических средств, характерный размер которых существенно меньше диаметра поры или величины раскрытости трещин, однако практическая реализация подобных экспериментов чрезвычайно сложна. Поэтому такая феноменологическая модель в практике гидрогеологических исследований используется очень мало.

Подчеркнем еще раз – масштаб осреднения (характерный размер элементарного объема жидкости в физической феноменологической модели движения) должен быть меньшим масштаба осредняемого течения. Иными словами, если l_{\min} , как это и предусматривается феноменологическим подходом при физическом описании течения жидкостей, многократно превышает межмолекулярные расстояния и при этом много меньше характерного размера поры или трещины (т.е. $l_{\min} \ll d$ или $l_{\min} \ll 2b$, где d и $2b$ – соответственно диаметр поры и раскрытость трещины), то только в этом случае можно говорить об изучении движения на основе системы уравнений (1.2). Соответственно только в таком прибли-

жении получается распределение скоростей движения жидкостей в поперечном сечении поры или трещины.

Несоблюдение этого основополагающего принципа, т.е. когда l_{\min} оказывается соизмеримым с d или $2b$, приводит к качественному изменению (огрублению) модели движения уже в рамках физического описания течения. В этом случае, не имея возможности изучения тонкой структуры потоков жидкостей, можно оперировать только итоговыми массовыми скоростями движения (представляемыми как отношение массы жидкости, прошедшей за некоторый промежуток времени через пору или трещину, к площади поперечного сечения поры или трещины). Следовательно, в таком приближении силы внутреннего трения движущейся жидкости и силы взаимодействия ее с твердой поверхностью поры или трещины заменяются объемными, иными словами, относятся ко всему объему жидкости [25].

Прекрасная иллюстрация сказанному содержится в книгах Н.Ф. Бондаренко [12], С.В. Нерпина и А.Ф. Чудновского [55]. В этих работах в качестве уравнений движения брались реологические уравнения состояния, связывающие касательные напряжения со скоростью сдвига. В основу таких представлений положена предложенная П.А. Ребиндером [72] концепция, в соответствии с которой все жидкости с водородными связями рассматриваются как тиксотропные системы с эффективной вязкостью $\eta(\tau) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$, где τ – напряжение сдвига, $\dot{\gamma}$ – скорость де-

формации. Эффективная вязкость представляет собой итоговую характеристику, описывающую равновесное состояние между процессами разрушения и восстановления структуры жидкости в установившемся потоке. При малых напряжениях сдвига она имеет наибольшую постоянную величину η_0 (рис. 1.1а), соответствующую практически не разрушенной структуре. При предельном разрушении структуры в области больших напряжений сдвига (в условиях ламинарного потока) эффективная вязкость переходит в наименьшую постоянную η_1 .

Использование понятия об эффективной переменной вязкости, отражающей все характерные особенности процесса течения жидкостей, исключительно плодотворно, однако встречает существенные математические трудности при решении прикладных задач [12]. Поэтому исследования течения жидкостей в трубах, капиллярах выполняются на более простых модельных системах; наиболее часто используются системы, которые в зависимости от соотношения скорости деформации и напряжения сдвига называют [12] ньютоновыми, псевдопластичными, дилатантными и вязкопластичными (телом Шведова-Бингама) жидкостями – рис. 1.1б. На рисунке и далее в тексте τ_1 – начальное напряжение сдвига в вязкопластичной жидкости, а τ_0 – максимальное из начальных значение напряжения – предельное напряжение сдвига.

Покажем здесь уравнение, связывающее расход потока жидкости с функцией напряжения сдвига. Вслед за У.Л. Уилкинсоном [82] и Н.Ф. Бондаренко [12] запишем реологическое уравнение состояния в самом общем виде [25]:

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \quad (1.3)$$

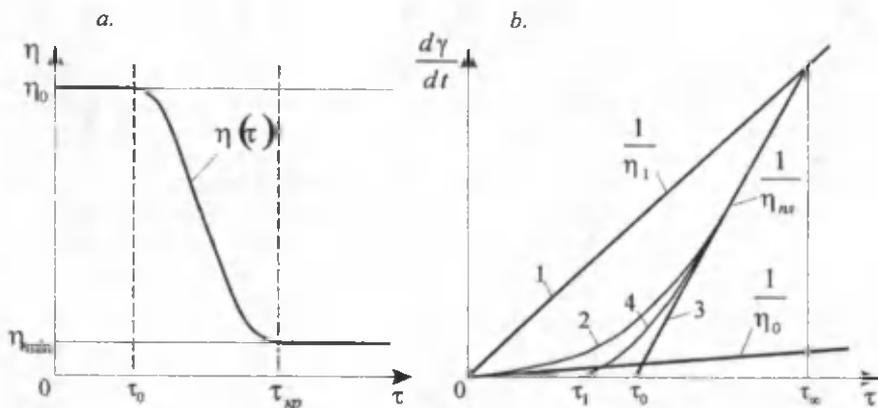


Рис. 1.1. Концепция эффективной вязкости (а) и реологические модели жидкости (b): 1 - ньютонова; 2 - неньютонова (дилатантная); 3-4 - вязкопластичная (3 - модель Бингама; 4 - модель Шведова)

Для плоского капилляра раскрытости $2b$ (1.3) приобретет вид

$$-\frac{du}{dz} = f(\tau). \quad (1.4)$$

Запишем равновесие сил, приложенных к выделенной в потоке жидкости элементарной призме высотой z и длиной l с разностью давлений на его передней и задней стенках Δp на единицу ширины потока – рис. 1.2:

$$l\tau = z\Delta p,$$

откуда

$$\tau = \frac{z\Delta p}{l} \quad (1.5)$$

Соответственно для τ на стенке капилляра имеем

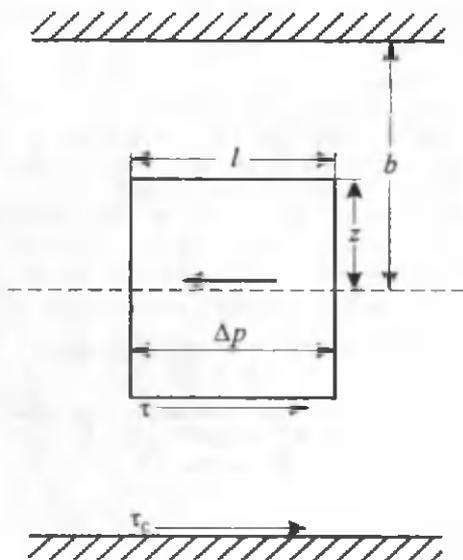


Рис. 1.2. Схема к выводу условия равновесия сил на поверхности выделенной в потоке жидкости элементарной призмы

$$\tau_c = \frac{b \Delta p}{l} \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.5) и (1.6) следует

$$\tau = \tau_c \frac{z}{b}, \quad (1.7)$$

так что вместо (1.4) получаем

$$-\frac{du}{dz} = f\left(\tau_c \frac{z}{b}\right).$$

Интегрирование его даст

$$u(z) = \int_z^b f\left(\tau_c \frac{z}{b}\right) dz.$$

Единичный (на единицу ширины потока жидкости) расход составляет

$$q = 2 \int_0^b u(z) dz. \quad (1.8)$$

Интегрирование (1.8) по частям с учетом того, что $u(b) = 0$, и подстановка z из (1.7) приводит окончательно к следующему соотношению:

$$q = \frac{2b^3 \tau_c}{\tau_c^2} \int_0^{\tau_c} \tau f(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Подставив в (1.9), например, реологическое уравнение состояния для ньютоновой жидкости, имеющее вид [12] – рис. 1.16 – $f(\tau) = \frac{\tau}{\eta}$, с учетом (1.6) имеем для потока жидкости единичной ширины

$$q = \frac{2b^3 \Delta p}{\eta l}.$$

Последнее выражение является полным аналогом уравнения Пуазейля применительно к плоскому капилляру. Обозначив в нем

$$\Delta p = \rho g H, \quad l = \frac{H}{I}, \quad (1.10)$$

где g – ускорение свободного падения; H – гидравлический напор; I – градиент напора, – получаем для средней скорости потока

$$\bar{u} = \frac{q}{2b} = \frac{b^2 \rho g}{3\eta} I. \quad (1.11)$$

Большой интерес представляет анализ движения вязкопластичных жидкостей (тело Шведова-Бингама), так как выводы из него часто используются при обосновании вида закона фильтрации при малых градиентах давления или напора в фильтрационной феноменологической модели. Реологическое уравнение со-

стояния наиболее простой модельной системы вязкопластичной жидкости – тела Бингама – имеет вид

$$f(\tau) = \dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_0}{\eta_m}, \quad \tau_0 < \tau < \tau_c, \quad (1.12)$$

$$f(\tau) = 0, \quad 0 < \tau < \tau_0.$$

После подстановки (1.12) в (1.9) и интегрирования с учетом (1.6) получаем

$$q = \frac{2b^3 \Delta p}{3\eta l} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\tau_0 l}{b \Delta p} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_0 l}{b \Delta p} \right)^3 \right]. \quad (1.13)$$

Обозначим в (1.13), как и в [12], $I_0 = \frac{\tau_0}{\rho g b}$. Тогда из (1.13) для средней скорости потока, как и в (1.11), с учетом (1.10) следует зависимость

$$\bar{u} = \frac{q}{2b} = \frac{b^2 \rho g}{3\eta} l \left[1 - \frac{3}{2} \frac{I_0}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{I_0}{l} \right)^3 \right],$$

известная как уравнение Воларовича-Гуткина.

Используя этот же подход и модель вязкопластичной жидкости (1.12), Н.Ф. Бондаренко [12] пришел к известному уравнению Букингема-Рейнера для цилиндрических труб или капилляров радиусом R :

$$q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{2\tau_0 l}{R \Delta p} + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_0 l}{R \Delta p} \right)^4 \right],$$

откуда с учетом первого соотношения в (1.10) средняя скорость потока жидкости в цилиндрическом капилляре составляет

$$\bar{u} = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \rho g}{8\eta} l \left[1 - \frac{4}{3} \frac{I_0}{l} + \frac{1}{3} \left(\frac{I_0}{l} \right)^4 \right], \quad I_0 = \frac{2\tau_0}{\rho g R}.$$

Здесь все обозначения прежние.

Как видно из (1.7), касательные напряжения в жидкости постепенно (по линейному закону) уменьшаются от стенки капилляра к его оси. В этом смысле рассмотренный подход полностью отвечает подходу, используемому в качестве модельного представления о структуре жидкости в капиллярах аналог двойного электрического слоя (рис. 1.3а) [66, 67], а уравнения Воларовича-Гуткина и Букингема-Рейнера ничем не отличаются (если отбросить терминологические различия) от одной из модификаций модели в процитированной Н.Ф. Бондаренко [12] работе Ковача (Kovacs, 1958), в которой как раз и постулируется постепенное изменение механических свойств жидкости от твердой поверхности внутрь объема жидкости.

В своей книге Н.Ф. Бондаренко [12] со ссылкой на результаты экспериментальных работ, а также на публикацию Дрост-Хансена (Drost-Hansen, 1969) с анализом обширных опытных и теоретических исследований наиболее обоснованной считает трехслойную модель жидкости вблизи поверхности раздела вода

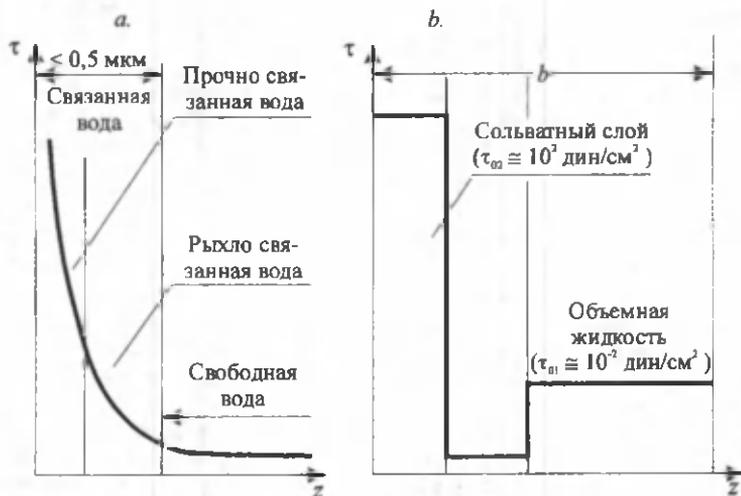


Рис. 1.3. Модельные представления структуры воды вблизи поверхности раздела вода - твердое тело: аналог двойного электрического слоя (а); трехслойная (б)

– твердое тело (рис. 1.3б). В соответствии с ней к стенке капилляра примыкает слой воды с упорядоченной структурой, характеризующийся наибольшим начальным напряжением сдвига τ_{02} , – по Б.В. Дерягину это граничная фаза; на некотором расстоянии от твердой поверхности находится структурированная объемная жидкость с начальным напряжением сдвига τ_{01} , меньшим напряжения сдвига в граничной фазе на четыре порядка. Между объемной жидкостью и граничной фазой существует так называемый подплавленный слой, структура жидкости в котором разрушена практически полностью, так что для него $\tau_0 < \tau_{01}$.

Граничная фаза, обладающая особыми свойствами, в сравнении с объемной жидкостью, имеет с ней (или с переходным слоем) достаточно резкую границу. Тем не менее, моделирование потоков трехслойной жидкости в плоских и цилиндрических капиллярах, выполненное в [12, 55], снова приводит к уравнениям Пуазейля (при $\tau_{01} = 0$), Воляровича-Гуткина и Букинггема-Рейнера (при $\tau_{01} > 0$). Иными словами, при осреднении потока по всей площади сечения капилляра полностью теряются все особенности распределения структуры жидкости в сечении капилляра и, соответственно, влияние этих особенностей на распределение локальных скоростей движения жидкости.

В более поздних (по отношению к монографии Н.Ф. Бондаренко [12]) работах А.Г. Арье [2, 3, 4] постепенное изменение механических свойств жидкости от стенки капилляра внутрь объема воды вновь обосновывается уже с позиций молекулярно-кинетической теории жидкости. Однако и в этом случае получена за-

висимость, связывающая среднюю скорость движения воды в цилиндрическом капилляре с градиентом напора, которую можно считать хорошим приближением уравнения Букингема-Рейнера.

Вообще же для объяснения наблюдаемых аномалий течения при малых градиентах напора или давления привлекается целый ряд соображений. В частности, в [12] указаны следующие: 1) жидкость, содержащая поверхностно-активные компоненты и коллоидные частицы, образуют устойчивые коллоидные растворы; последние разрушаются лишь при $I > I_0$; 2) механические свойства жидкости постепенно меняются от твердой поверхности внутрь объема жидкости; с увеличением градиента напора в общий поток постепенно вовлекаются слои воды, более прочно связанные с твердой поверхностью, и эффективная динамическая пористость системы (просветность капилляра) увеличивается; 3) под влиянием поверхности вся вода в порах (капиллярах) приобретает свойства неньютоновой жидкости; 4) возникают сопутствующие движению жидкости электрокинетические и осмотические эффекты.

Не обсуждая здесь преимуществ тех или иных из них, отметим только, что, оперируя средними массовыми расходами и скоростями потоков жидкости, вытекающими, например, из уравнений Букингема-Рейнера или Воларовича-Гуткина, принципиально невозможно обосновать привлечение какой-то из названных гипотез для аппроксимации экспериментальных данных (эмпирических зависимостей тех самых средних массовых расходов и скоростей от градиентов давления) [19, 25]. Любая из гипотез приведет в конечном итоге, как показано выше, к тем же уравнениям (или близким к ним – с точностью до постоянных коэффици-

циентов и показателей степени при отношениях $\frac{I_0}{I}$), для которых в силу соизмеримости l_{\min} и d (или $2b$) совершенно безразличны тонкая структура потоков, существование (и причины существования) начальных напряжений сдвига в жидкостях, распределение механических свойств воды в капиллярах.

Точно также уравнение Дарси-Вейсбаха, связывающее потери напора на трение H_f на участке цилиндрического капилляра длиной l (градиент напора) со средней скоростью потока жидкости, вида [44]

$$H_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (1.14)$$

(где λ – коэффициент Дарси, определяемый особенностями движения жидкости и шероховатостью смоченной поверхности) и эквивалентная ему формула Шези (широко используемые для описания течения жидкостей в трубах, каналах, капиллярах, трещинах и т.п. при больших градиентах давления или напора) никак не могут быть связаны с турбулизацией потока жидкости; они отражают лишь эмпирически установленный факт перехода линейной зависимости итоговой характеристики изменения обмена количеством движения – средней скорости течения – с возрастанием градиента напора сверх какой-то критической величины в нелинейную (квадратичную) [19, 25].

Заканчивая анализ моделей движения жидкостей, отвечающих масштабу осреднения l_{\min} , отметим следующее. Этот анализ выполнялся нами с позиций исследования особенностей описания такими моделями течения воды в порах и трещинах проницаемой среды, и, как отмечалось ранее, для этой цели они практически неприменимы, а поэтому сколько-нибудь существенного значения для приложений гидрогеологии не представляют. Вместе с тем, они являются основой теоретической и методической базы гидравлических и гидрометрических (в смысле [44]) исследований; соответственно и выводы из проделанного анализа в первую очередь относятся именно к этой базе.

Практически игнорирование указанных особенностей моделей движения жидкостей реализуется как источник систематических погрешностей оцениваемых характеристик потока жидкости, величины и знак которых не известны. В качестве примеров источников подобных погрешностей можно назвать следующие. Во-первых, всегда остается исключительно актуальным обоснование средней скорости потока жидкости. Особенно сказанное относится к так называемому методу "площадь – скорость" [30, 60] определения расхода потока в тех случаях, когда для оценок величин такой скорости используются единичные замеры локальных скоростей (например, поплавковым методом, гидрометрической вертушкой и т.д.).

Во-вторых, нередко средняя скорость потока воды устанавливается по значению гидравлического градиента в этом потоке; здесь на первый план выходит обоснование вида уравнения движения – (1.11) или (1.14). Как правило, на базе достаточно субъективных рассуждений в качестве такого уравнения выбирается формула Дарси-Вейсбаха, в которой расчетная величина коэффициента λ для гидрометрических исследований экстраполируется от опытных данных из трубной гидравлики (последний зависит от скорости потока, шероховатости внутренней поверхности труб, их "старения" и т.п. [44]).

Однако подобная экстраполяция представляется явно необоснованной, тем более что принципиальные подходы к оценкам средних скоростей потоков в трубах и естественных водотоках различны. Так, при расчетах трубопроводов основной целью ставится определение необходимой площади внутреннего сечения труб для гарантированного обеспечения заданного расхода потока при заданном перепаде напоров на входе и выходе расчетного участка трубопровода с максимально возможным гидравлическим сопротивлением. Этот максимум сопротивления достигается, в том числе использованием уравнения Дарси-Вейсбаха. При гидрометрических же исследованиях целью является максимально точная оценка расхода потока воды в руслах естественных водотоков (рек, ручьев). И если в трубной гидравлике при экспериментальном обосновании коэффициента λ всегда существует возможность точного (в пределах доверительного интервала, обусловленного инструментальными погрешностями) соотношения его со средней скоростью потока, которая устанавливается независимыми методами (например, по продолжительности наполнения мерной емкости), то для любого природного (уникального) водотока возможность экспериментальной "тарировки" его на предмет выбора уравнения движения и коэффициента гидравлического сопротивления отсутствуют напрочь.

1.3. Описание движения жидкости через проводящие среды фильтрационными моделями

В предыдущем подразделе мы рассмотрели модели движения жидкостей, отвечающие масштабу осреднения l_{min} [25]. Здесь мы, как и в [19, 26], намерены более или менее подробно рассмотреть фильтрационные модели.

Нерегулярность структуры порового пространства не позволяет изучать фильтрацию воды обычными методами гидромеханики, т.е. путем решения уравнения движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор [26, 58, 75]. Поэтому переход от физического описания течения к фильтрационному осуществляется осреднением по масштабу l_n , представляющему собой характерный размер некоторого объема статистически однородной проводящей среды – бесконечно малого элемента системы жидкость – пористая среда, физически, вместе с тем, намного превышающего размеры пор и зерен среды. Только для объема, охватывающего большое их число, достаточно представительны вводимые осредненные характеристики. Применительно к меньшим объемам выводы фильтрационной теории теряют силу.

Такое осреднение вызывает качественное изменение модели движения воды – фильтрационное течение становится потенциальным, т.е. безвихревым. При этом в соответствии с идеей Н.Е. Жуковского силы сопротивления каркаса проводящей среды и внутреннего трения движущейся жидкости заменяются объемными силами трения; для их количественного выражения в понятную базу модели вводятся понятия скорость и коэффициент фильтрации.

Основная характеристика течения ПВ – вектор скорости фильтрации \bar{v} – определяется с использованием представлений теоретической гидромеханики [26, 46]. Выбирается точка пористой среды A и проводится произвольная элементарная площадка S с нормалью \bar{n} . Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости Q . Тогда проекция вектора \bar{v} на нормаль \bar{n} равна пределу отношения $\frac{Q}{\rho S}$ (где ρ – плотность воды) при $S \rightarrow 0$ [9, 10, 66, 67]. При

этом масса жидкости делится на полную площадь S , а не на ее часть, занятую порами. Иными словами, такая теория является эквивалентом не природного процесса переноса, а фиктивного (модельного) процесса течения некоторой модельной сплошной среды, обладающей свойствами идеальной жидкости (идеальной в смысле возможности задания любого реологического уравнения состояния для такой жидкости) и текущей по всему объему проводящей области.

Самым простым и наиболее изученным случаем нестационарной фильтрации является изотермическое движение слабо сжимаемой жидкости в упруго деформируемой пористой среде (упругий режим фильтрации); модель его обосновывается исследователями самыми разными способами [9, 10, 17, 31, 51, 52, 53, 61, 86, 88, 90, 91, 103]. Однако в основу этой модели (как, впрочем, любой другой) тем не менее, во всех случаях кладется система уравнений неразрывности, закона фильтрации (например, закона Дарси) и состояния:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) &= 0, \\ \bar{v} &= \frac{k}{\eta} \text{grad } p, \\ \rho &= \rho(p), \quad n = n(p), \quad \frac{k}{\eta} = \frac{k}{\eta}(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.15.)$$

Здесь k и n – проницаемость и пористость вмещающих пород (водоносного пласта)¹. Остальные обозначения прежние.

Принимая воду и пласт слабо сжимаемыми, можно считать параметры ρ , n и $\frac{k}{\eta}$ зависящими от давления линейно [91]. Тогда вместо третьего в (1.15) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho_0}{E_p}, \quad \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{n_0}{E_n}, \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{k}{\eta} \right) = \frac{k_0}{\eta_0 E_k}, \quad (1.16)$$

где E_p , E_n и E_k – модули объемного сжатия жидкости и пористой среды; ρ_0 , η_0 , k_0 и n_0 – плотность и вязкость жидкости, проницаемость и пористость проводящей среды при давлении p_0 (невозмущенный пласт).

Подстановка (1.16) и второго из (1.15) в первое уравнение системы (1.15) и несложные преобразования получившегося уравнения дают

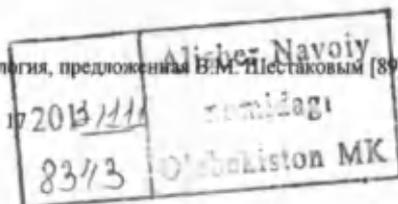
$$\frac{k_0}{\eta_0} \left(\frac{n_0}{E_p} + \frac{1}{E_n} \right)^{-1} \Delta p = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{или} \quad \chi \Delta H = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Здесь $\chi = \frac{K}{\beta}$ – пьезопроводность; $\beta = \frac{1}{E_n} + \frac{n_0}{E_p}$ – упругость водовмещающих пород; $K = \frac{k g p}{\eta}$ – коэффициент фильтрации; $H = \frac{p}{g \rho}$ – гидростатический напор. Остальные обозначения прежние.

Уравнение (1.17) выведено В.Н. Щелкачевым [91], с учетом только упругих свойств жидкости оно было впервые приведено и исследовано в работе Тейса (Theis) [103].

Обратим внимание на одну особенность описанной физико-математической модели фильтрации ПВ. Основополагающим представлением, использованным в ней, является представление об однородности свойств проводящей среды и постоянстве скорости фильтрации в пределах выделенного элементарного объема пространства; не равны внутри него и на его поверхности только величины давления в жидкости – иначе отсутствовало бы движение этой жидкости. Уже на этом уровне отчетливо прослеживается дуализм, изначально присущий феноме-

¹ В настоящей работе используется терминология, предложенная В.М. Шестаковым [89].



нологической фильтрационной модели. Дело в том, что, говоря об однородной проводящей среде, имеют в виду статистически однородную среду, а, говоря о постоянстве скорости фильтрации в пределах элементарного объема, также имеют в виду некоторую осредненную характеристику, причем и свойства среды и скорость фильтрации осредняются без учета части этого элементарного объема, занятой скелетом среды. Такой дуализм приводит к тому, что и скорость фильтрации, и коэффициент фильтрации являются эффективными (кажущимися) параметрами среды и процесса, а когда говорится о точке водоносного пласта, подразумевается "точка", отвечающая элементарному объему проводящей среды [26].

Произвольно группируясь, множество наименьших структурных элементов пористой среды образуют более крупные элементы фильтрационной неоднородности, также случайно распределенные в водоносных пластах. Никаких дополнительных гипотез о соотношении параметров таких элементов в модели не предусмотрено. Однако реально размеры рассматриваемой области фильтрации обычно намного превышают характерные размеры элементов неоднородности (не менее чем в 10 раз [15, 54]), и чтобы описать фильтрационные и емкостные свойства этой области одним набором параметров опять приходится вводить представление об их эффективных значениях, характеризующих среду в ее границах как некоторую фиктивную однородную среду; эффективные параметры зависят не только от параметров элементов неоднородности, но и от веса, доли участия последних, определяемых способом опытного опробования водоносного пласта. Формально при отыскании решения конкретной задачи это выражается исключением зависимости параметров от пространственных координат (в пределах либо области возмущения пласта откачкой, либо выделенного блока сеточной модели и т.д.).

Таким образом, детерминированно-статистический дуализм фильтрационной модели проявляется на всех уровнях ее реализации. Поэтому важной задачей становится учет этой особенности физико-математической модели, ее правильная теоретическая интерпретация.

Представленная модель относится к так называемым гидромеханическим [66, 67]; сохраним здесь термины из [66, 67] для обозначения фильтрационных моделей. В них сохраняются все составляющие вектора скорости фильтрации по координатам пространства. Последнее, однако, не является обязательным условием, так как в процессе, например, экспериментальных исследований закономерностей фильтрации можно с хорошим приближением добиться одномерности потока ПВ.

Заметим следующее. Представляется неправомерным выделение в работе [5] масштаба осреднения l_k , представляющего собой характерный размер насыщенного потока (соизмеримый с высотой капиллярной каймы над поверхностью грунтовых вод), и противопоставление тем самым моделей совместного движения воды в зонах полного и неполного насыщения, используемых для описания безнапорной фильтрации [5, 42, 63], гидромеханическим. По-видимому, авторами [5] этот масштаб введен с целью иллюстрации роли моделей совместного движения, анализу которых и посвящена их работа. Однако и для тех и для других моделей масштабом осреднения является характерный размер некоторого минимального (элементарного) объема статистически однородной проводящей среды, позволяющий реализовать феноменологический подход к описанию и ис-

следованию движения жидкости; применительно к меньшим объемам, как уже говорилось ранее, фильтрационная теория теряет силу. В этом смысле модели совместного движения воды в зонах полного и неполного насыщения ничем не отличаются от гидромеханических, являются их разновидностями [19, 26]. Некоторые различия в понятийной базе и терминологии этих моделей также вряд ли могут быть основанием для их противопоставления друг другу.

Ясно, что экспериментальное изучение закономерностей движения ПВ необходимо выполнять на базе технических средств, характерные размеры которых должны быть много меньшими характерных размеров опробуемых объемов пород. Применяемые для этого датчики пластового давления, тензиометры, измерители влажности и др. прекрасно соответствуют гидромеханическим моделям, однако сами упомянутые модели сравнительно редко используются при решении прикладных задач. Последнее объясняется, во-первых, трудностями реализации, во-вторых, неадекватностью во многих случаях трудностей реализации получаемой точности расчетов и прогнозов, и, в-третьих, исключительно высокими затратами на проведение экспериментальных исследований при слабой стыковке самой модели с уже накопленным огромным объемом результатов опытных работ, выполнявшихся на методических основах иных моделей.

Трудности реализации гидромеханической модели, а также то, что реально на практике скважинами (основным средством, инструментом экспериментальных гидрогеологических исследований), другими горными выработками фиксируются осредненные по вертикали напоры, заставляли исследователей искать и использовать определенные упрощающие преобразования модели. В основу этих преобразований обычно кладется предпосылка Дюпюи-Форхгеймера [66, 67, 104], согласно которой в каждом вертикальном сечении градиент напора равен уклону пьезометрической поверхности (для напорного водоносного пласта) и свободной поверхности (для грунтового потока).

Подобное преобразование приводит к гидравлическим моделям фильтрации, утрачивающим составляющую скорости фильтрации по пространственной координате. Так, принимая мощность изолированного напорного пласта равной m и имея в виду, что $\beta m = \mu^*$, уравнение (1.17) нетрудно преобразовать к виду

$$\chi \Delta H \equiv \chi \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \chi = \frac{T}{\mu^*}, \quad (1.18)$$

где $T = Km$ – водопроводимость, а μ^* – упругая емкость пласта.

Последнее соотношение представляет собой аналог классического уравнения теплопроводности [51, 91].

В некоторых случаях (плоские движения, движения с осевой и центральной симметрией) характеристики движения, в частности, напор, оказываются зависящими только от одной пространственной координаты. Такие движения называются одномерными. Уравнение (1.18) при этом принимает следующий вид (соответственно для движений плоских, с осевой и центральной симметрией) [26]:

$$\chi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \chi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Здесь во втором уравнении $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а в третьем $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ для случая, когда точечный источник-сток помещен на кровле пласта, а ось z направлена вертикально вниз [18]. Уравнения вида (1.19) широко применяются в приложениях гидродинамики: большинство потоков ПВ (региональных и локальных) за счет их фрагментирования приводятся к плоским, а при опытно-фильтрационном опробовании (ОФО) водоносных пластов эти потоки, как правило, приводят к потокам с осевой симметрией и иногда (при опробованиях водовмещающих отложений несовершенными по степени вскрытия пласта скважинами) к потокам с центральной симметрией.

В случае плановой фильтрации в безнапорном пласте, в отличие от напорного, при снижении свободной поверхности потока (принимаемой в качестве линии тока) меняется его мощность, и в расчетный элемент поступает дополнительное количество воды, обусловленное гравитационной емкостью.

Основой для большинства моделей течения грунтовых вод, используемых в гидрогеологии, является уравнение, отвечающее гидромеханической модели движения жидкости и описывающее трехмерную фильтрацию в области, заключенной между свободной поверхностью потока сверху и водоупором снизу [40, 63, 66, 67]. На нижней границе в общем случае может быть задано условие водообмена с ниже лежащими водоносными пластами. Свободная поверхность представляет собой условную границу между зоной насыщения и зоной аэрации и выбирается главным образом потому, что легко фиксируется скважинами.

С учетом сжимаемости воды и породы это уравнение имеет вид

$$\nabla K \nabla H = \beta \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.20)$$

где $H = h + z$ – напор в точке пласта с координатами x, y, z , регистрируемый в момент времени t ; z – превышение точки над плоскостью сравнения. Остальные обозначения прежние

Условие на свободной поверхности рассматривались во многих работах (в частности, в [11, 92]), в наиболее полном виде оно получено П.Я. Полубариновой-Кочиной [66] и, например, для однородного и изотропного водоносного пласта может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\mu}{K} \frac{\partial H}{\partial t} - (\nabla H)^2 + \left(1 + \frac{W}{K}\right) \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{W}{K} = 0.$$

Здесь W – интенсивность поступления воды на свободную поверхность (дифференциальная инфильтрация)² в случае питания или оттока от нее в случае разгрузки (дифференциальное испарение)³.

² Обозначим ее здесь как дифференциальную инфильтрацию, определяющую интенсивность питания ПВ. В противовес ей при анализе балансовых построений выделяется интегральная инфильтрация, обозначающая суммарное за год поступление воды в водоносный пласт или его участок, для которого оценивается баланс ПВ.

³ Дифференциальное испарение определяет интенсивность разгрузки ПВ с их свободной поверхности. При балансовых построениях используется также интегральное испарение, обозначающее суммарную за год разгрузку водоносного пласта.

В точной постановке исследование безнапорного течения встречает исключительные трудности математического характера (решения некоторых задач в такой постановке приведены в книгах П.Я. Полубариновой-Кочиной [66, 67]), кроме того, реально на практике скважинами регистрируются осредненные по вертикали напоры. Поэтому большое значение приобретает приближенная постановка задачи о безнапорной фильтрации, соответствующая так называемому пологому движению. При таком движении вертикальная компонента вектора скорости фильтрации \bar{v}_z мала в сравнении с горизонтальной (это та же предпосылка Дюпюи-Форхгеймера).

Рассмотрим элементарный объем V проводящей среды в однородном изотропном безнапорном пласте, ограниченный свободной поверхностью потока воды и некоторой цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими [26]. Обозначим через H напор, определяемый как расстояние от свободной поверхности до горизонтальной плоскости $z = 0$ (рис. 1.4). Изменение массы жидкости внутри элемента за счет упругого сжатия воды и породы за бесконечно малое время dt составляет

$$\left(\int_S \frac{\partial nph}{\partial t} \partial S \right) dt, \quad (1.21)$$

где S – как и прежде, площадку, представляющая собой проекцию элементарного объема на горизонтальную плоскость; h – мощность потока.

Это изменение равно притоку воды в объем V извне:

$$-dt \int_l w_n \rho dl. \quad (1.22)$$

Здесь l – замкнутый контур, ограничивающий площадку S , а w_n – нормальная компонента вектора потока \bar{q} , определяемого соотношением [9]

$$\bar{q} = \int_{H-h}^H \bar{v} dz. \quad (1.23)$$

Если скорость снижения свободной поверхности представить как $\frac{\partial h}{\partial t}$, то дополнительное количество воды, поступающей в расчетный элемент, и обусловленное гравитационной емкостью пласта составляет

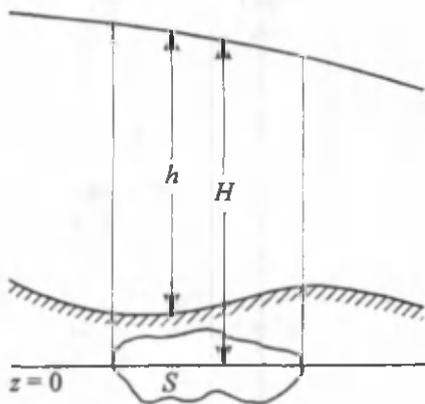


Рис. 1.4. Расчетная схема к выводу уравнения фильтрации грунтовых вод

$$-\left(\int_S \mu \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} dS \right) dt. \quad (1.24)$$

Кроме того, в безнапорный пласт сверху поступает вода за счет инфильтрации (или оттекает за счет испарения), определяемых скоростью повышения (или понижения) уровня грунтовых вод:

$$\pm \left(\int_S \rho_0 W dS \right) dt. \quad (1.25)$$

Просуммировав выражения (1.22), (1.24) и (1.25) и приравняв эту сумму выражению (1.21) с использованием формулы преобразования контурного интеграла в интеграл по площади [45], а также в силу произвольности площадки S , получаем

$$\frac{\partial n \rho h}{\partial t} + \mu \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{q}) \pm \rho_0 W = 0. \quad (1.26)$$

Скорость фильтрации, в пренебрежении ее вертикальной составляющей, в соотношении (1.23) можно вынести из-под знака интеграла, а подстановка в преобразованное таким образом выражение (1.23) закона фильтрации из (1.15) с учетом пояснений к уравнениям (1.17) дает

$$\bar{q} = -K h \operatorname{grad} H. \quad (1.27)$$

Тогда из (1.26) следует

$$\frac{\partial n \rho h}{\partial t} + \mu \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \rho_0 K \nabla(h \nabla H) \pm \rho_0 W$$

или, после несложных преобразований, —

$$\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} + \mu \frac{\partial h}{\partial t} = K \nabla(h \nabla H) \pm W. \quad (1.28)$$

Если водоупор представляет собой горизонтальную поверхность, то она принимается за плоскость отсчета и тогда $H = h$. Кроме того, обычно $\mu^* \ll \mu$ и, следовательно, первым слагаемым в левой части соотношения (1.28) можно пренебречь. В этом случае уравнение (1.28) приобретет вид

$$K \nabla(h \nabla h) \pm W = \mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Последнее в предположении $W = 0$ впервые было получено Буссинеском (*Boussinesq*) [95].

Уравнение (1.29) нелинейное; для него не существует общего аналитического метода решения. Поэтому предложены различные способы его линеаризации; обзор этих способов можно найти, например, в работах Г.И. Баренблатта [6], В.М. Шестакова [87, 90]. В результате линеаризации получается уравнение типа уравнения теплопроводности, для решения которого хорошо разработан математический аппарат. Эта модель наилучшим образом отвечает существующей в гидрогеологии методической базе.

Замена нелинейного уравнения линейным обуславливает также и изменение в подходе к построению решения задач фильтрации. Например, сумма частных решений представляет собой общее решение линейного уравнения, в то время как решением нелинейного уравнения она не является. Это свойство решений линейного (или линеаризованного) уравнения фильтрации дает возможность использовать принцип суперпозиции или наложения фильтрационных течений, позволяющий искать сложное решение задачи как сумму более простых, в которых соблюдаются по частям все принятые в общей постановке граничные условия.

Модель Буссинеска описывает жесткий режим безнапорной фильтрации, а модель В.Н. Щелкачева – упругий режим течения ПВ в напорном пласте. Несмотря на эти принципиальные различия обеих моделей, сопоставимость масштабов осреднения определяет общность их понятийной базы и терминологии. Для количественного выражения характеристик проводящего пласта вводятся понятия водопроницаемость, пьезо- и урвнепроходность, гравитационная и упругая емкость пласта.

Экспериментальное исследование фильтрации ПВ, выполняемое на основе гидравлических моделей, может осуществляться как с помощью совершенных по степени вскрытия водоносного пласта возмущающих и наблюдательных скважин (напор по вертикали в них осредняется автоматически), так и с помощью технических средств с характерным размером, меньшим мощности пласта. Методическая база, основанная на гидравлических моделях фильтрации, является в настоящее время преобладающей как в области опытных работ, так и при изучении и прогнозах процесса фильтрации. Последнее обусловлено с одной стороны соображениями экономического порядка. С другой – реализация гидравлической модели для большого числа типовых схем фильтрации существенно облегчена возможностью использования аналитических решений, точность которых в целом хорошо соответствует качеству исходной информации [19, 26].

Вместе с тем, введение в понятийную базу фильтрационных моделей упрощающих, формальных предпосылок типа предпосылки Дюпюи-Форхгеймера в ряде случаев вносит в гидравлические модели явные противоречия. Классическим примером такого противоречия может служить модель фильтрации грунтовых вод Болтона (*Boulton*) [93].

Известно, что уравнение (1.29) в начальные периоды возмущений безнапорных пластов (откачек из них) далеко не всегда соответствует реальным условиям фильтрации грунтовых вод. В частности, в работе [17] выполнено численное сопоставление гидромеханической и гидравлической моделей, показавшее, что гидравлическая модель удовлетворительно описывает процесс, т.е. хорошо согласуется с более общей гидромеханической, только для моментов времени от начала возмущения, удовлетворяющих условию

$$\frac{K_z t}{\mu h_0} \geq 5,$$

где K_z – значение вертикальной составляющей коэффициента фильтрации; h_0 – мощность безнапорного пласта (потока грунтовых вод) в ненарушенных возмущением условиях. Поэтому для учета аномального (с позиций гидравлической модели) характера индикаторных графиков откачек Болтон, оставаясь в рамках

гидравлической модели движения, ввел гипотетическое представление об изменчивости гравитационной емкости. Соответственно уравнение фильтрации (1.29) для одномерного потока при линеаризации его способом Буссинеска и в пренебрежении инфильтрацией или испарением преобразуется к виду [93]:

$$T \Delta H = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} + \beta \mu \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t} \exp[-\beta(t-\tau)] d\tau. \quad (1.30)$$

Здесь β – индекс запаздывания; H – осредненный по вертикали напор в элементе потока (в совершенной по степени вскрытия пласта наблюдательной скважине такое осреднение осуществляется автоматически). На основе этого уравнения методом эталонных кривых (они приведены в цитируемой статье) предложено оценивать параметры водоносного пласта, в том числе и при малых значениях времени от начала откачки.

В обзорах Уолтона (Walton) [105, 106] указаны работы, где в аналогичной постановке учитывается еще и емкость скважины, а также анализируются особенности течения ПВ к несовершенным по степени вскрытия пласта выработкам.

Второе слагаемое в правой части (1.30) с позиций гидравлической модели движения не имеет определенного физического смысла – параметры пласта, в принципе физически постоянные, в соответствии с этим слагаемым предполагаются переменными во времени – и введено исключительно в целях лучшего соответствия математической модели фильтрации реальным условиям.

Болтон не дал физического обоснования изменчивости гравитационной емкости безнапорного пласта, и это обусловило оживленную дискуссию в литературе относительно ее причин. Т.Д. Стрельцовой и В.М. Шестакову [80] удалось на основе гидромеханической модели дать такое обоснование соотношению (1.30). Они, перейдя к гидромеханической модели, связали решение Болтона [93] с решением, приведенным в его же ранних работах (см., например, [92]), в которых анализировалось влияние вертикальной составляющей скорости фильтрации на закономерности снижения уровня в скважинах при возмущениях безнапорных пластов. Тем самым было устранено противоречие, вносимое формальным подходом к построению модели фильтрации. В работах [97, 99, 100, 101] и др. эта проблема рассматривалась с аналогичных позиций.

Наличие вертикальной составляющей фильтрации обуславливает дифференциацию напоров по вертикали. В [80] эта составляющая представлена в конечно-разностной форме, связывающей средний напор H в каждом сечении с положением свободной поверхности грунтового потока в этом же сечении:

$$\frac{K_z}{m_z} (h - H) = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Здесь K_z – вертикальная составляющая (по оси z) коэффициента фильтрации водовмещающих отложений; m_z – расчетная мощность вертикального потока. Остальные обозначения прежние.

Уравнение неразрывности горизонтального потока ПВ с осевой симметрией в рассматриваемой постановке имеет вид [80]

$$T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{K_z}{m_z} (h - H) = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.31) и (1.32) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой приводит к (1.30) при $\beta = \frac{K_z}{m_z \mu}$.

В ходе развернувшейся в специальной литературе дискуссии о возможных факторах, обуславливающих изменчивость емкости пласта, одним из таких факторов назван водообмен между грунтовым потоком и капиллярной зоной. Так, в той же статье Т.Д. Стрельцовой и В.М. Шестакова [80] на основе упрощенного представления о фильтрации в капиллярной зоне, согласно которому суммарное сопротивление этой зоны за некоторый период времени можно считать неизменным, баланс вертикального потока предложено описывать уравнением

$$K_k \frac{h_k - m_k}{m_k} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (h - h_k), \quad (1.33)$$

где m_k – эффективная мощность капиллярной зоны, соответствующая мощности слоя, полностью насыщенного за счет влагозапасов капиллярной зоны; h_k – текущее значение эффективной мощности капиллярной зоны; K_k – приведенный коэффициент фильтрации капиллярной зоны.

Решение уравнений (1.32) и (1.33) снова приводит к соотношению (1.30) для H , но в выражении для параметра β добавляется фильтрационное сопротивление капиллярной зоны.

К одной из основных причин, обуславливающих сложный характер изменения понижения при откачке (см. рис. 1.5), некоторые исследователи относили уменьшение давления воздуха над уровнем грунтовых вод при осушении пласта. В качестве основного аргумента при этом приводились получаемые по начальному периоду откачек относительно большие значения емкости, превышающие теоретически обоснованную величину упругой емкости на порядок и более, и свидетельствующие, таким образом, о том, что реальные условия течения ПВ не отвечают модели (1.30).

Так, в соответствии с моделью Бауэра и Райса (*Bouwer, Rice*) [96] в начальный период возмущения режим его определяется не упругой, а гравитационной емкостью, эффективная величина которой оказывается малой за счет снижения давления воздуха над свободной поверхностью грунтовых вод. При достижении давления барботирования для слабо проницаемого слоя пород, находящегося выше уровня ПВ, происходит прорыв воздуха, и давление над уровнем становится равным атмосферному. Этот период, по мнению авторов модели, соответствует ложно стационарному режиму изменения давления (напора и уровня грунтовых вод) в пласте.

Вместе с тем, исследования, посвященные оценке влияния замедленного поступления воздуха в осушенную часть пласта (результаты их приведены в работах [49, 50, 65, 98]) показали, что замедленное поступление воздуха практически не сказывается на формировании потока ПВ. Относительно же большие зна-

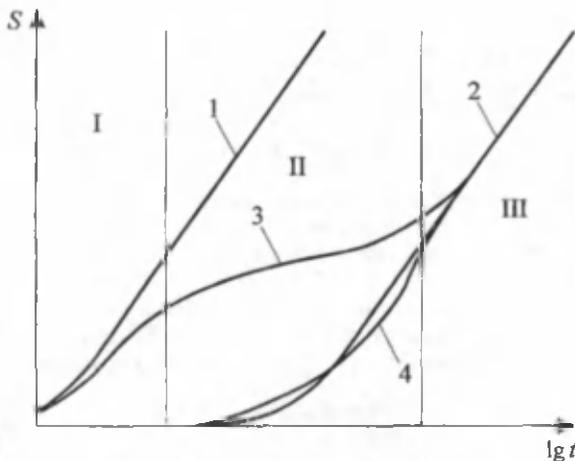


Рис. 1.5. Индикаторные кривые откачек из скважин в безнапорных пластах. Условные обозначения см. в тексте

чения емкости (в сравнении с упругой) на начальных этапах откачек по представлениям, например, И.С. Пашковского [63], могут быть связаны с растворенными в воде воздухом и другими газами; при снижении давления растворенный воздух частично переходит в свободный и остается в порах в виде мелких пузырьков.

Нами в [20, 23] выполнен анализ влияния выделяющихся из ПВ при снижении давления в них пузырьков воздуха на сжимаемость безнапорного пласта. Рассмотрим подробнее здесь эту проблему.

Как уже подчеркивалось ранее, особенности движения ПВ в безнапорных пластах связываются, главным образом, с проявлением вертикальной составляющей вектора скорости фильтрации [54, 80, 92]. При этом на типовых индикаторных кривых откачек выделяются три характерных этапа, отвечающих упругому (I), ложно стационарному (II) и гравитационному (III) режимам изменения давления (напора и уровня грунтовых вод) в пластах (рис. 1.5). На рис. 1.5 кривые 1 и 2 соответствуют решению Тейса для упругого и гравитационного режимов [103], кривая 3 — снижению S напора в пласте, а 4 — снижению свободной поверхности грунтового потока.

В работе [23] была рассмотрена модель безнапорного пласта, в котором учитывалась сжимаемость таких выделяющихся пузырьков воздуха. Полагалось, что пузырьки достаточно велики (порядка поперечных размеров пор) и заземлены в порах [9, 10], так что капиллярным давлением и изменением его на протяжении этапа упругого режима фильтрации в первом приближении можно пренебречь. Представление о заземлении свободного воздуха в порах имеет экспериментальное обоснование [59], однако оно не в полном объеме применимо к крупнозернистым водовмещающим отложениям, в которых поперечные размеры пор могут существенно превышать размеры пузырьков. Кроме того, при ясно выраженной неравномерности распределения заземленных пузырьков в порах не-

сколько искусственным выглядит положение о том, что при снижении давления в жидкости выделившийся свободный воздух поступает именно в эти пузырьки [20, 23].

Рассмотрим другую предельную задачу – исследуем движение воды, несущей с собой пузырьки газа (пузырьковой жидкости, смеси [57]), в безнапорных пластах на этапе упругого режима [20]; остановимся подробнее на обосновании подобной модели фильтрации [20].

Природные воды, не содержащие газы, представляют собой скорее исключение, причем концентрация свободного и молекулярно-растворенного газа в них находится в подвижном равновесии в зависимости от ряда факторов внешней среды. Пузырьки газа часто покрыты пленками поверхностно-активных веществ, что стабилизирует и сохраняет их от полного растворения [13]. Кроме микро- и макропузырьков газа природные воды содержат микрочастицы (органические и неорганические), различные биоорганизмы и т.п. Число микрочастиц и газовых пузырьков по разным оценкам варьирует в пределах 10^5 - 10^8 в см^3 [13]. Концентрация свободного газа по сравнению с молекулярно-растворенным в обычных

условиях мала: $\frac{C_1}{C_2} = 10^{-9}$, где C_1 – концентрация свободного, а C_2 – молекулярно-растворенного газа [36]. Размеры микропузырьков, присутствующих в природных водах, порядка 1-30 мкм.

Наличие таких пузырьков в грунтовых водах определяет принципиальную возможность выделения газа (т.е. переход его из молекулярно-растворенного в свободный) при обычно незначительных в безнапорных пластах изменениях давления на этапе упругого режима фильтрации, иначе для образования зародышевых пузырьков потребовались бы чрезвычайно высокие парциальные давления газов, возможные лишь при максимальном пересыщении ими воды, что в природных условиях практически не встречается. Таким образом, грунтовые воды, как и все природные воды, непрерывно поддерживающие контакт с атмосферой, должны рассматриваться как трехфазные гетерогенные системы, непрерывно обменивающиеся газом с атмосферой. В условиях же относительно кратковременного возмущения безнапорного пласта скважинами, когда изменение (снижение) давления вызывает выделение свободного газа, поглощаемого зародышевыми микропузырьками, а относительно небольшое изменение концентрации молекулярно-растворенного газа практически не сказывается на свойствах жидкости, грунтовые воды целесообразно представлять двухфазной системой. При этом количество пузырьков можно считать неизменным на протяжении возмущения [20].

Для анализа динамики газовых включений воспользуемся положениями теории Френкеля-Био-Николаевского. Будем считать, что несущая жидкость разбита на ячейки, содержащие по одному пузырьку газа. Размеры ячеек предполагаются одинаковыми, что соответствует равномерному распределению газа в воде, при этом минимальный размер пор превышает размер ячеек. Газ, выделившийся в ячейке при снижении давления, весь поглощается зародышевым пузырьком [20].

Система уравнений общей гидродинамики состоит из уравнений сохранения массы, импульса и энергии и уравнений состояния. Уравнения сохранения импульса при движении жидкостей и газов в пористой среде сводятся к формуле

закона фильтрации [9, 10]. Уравнение сохранения энергии существенно лишь в тех случаях, когда нельзя пренебрегать изменением температуры. При отсутствии внешнего подвода тепла, в частности, вследствие высокой теплоемкости пород, окружающих проницаемые пласты, среднемассовую температуру несущей жидкости с высокой точностью можно считать постоянной, что объясняется малыми скоростями движения и подавляющей массой и теплоемкостью воды по сравнению с массой и теплоемкостью газа; несущая жидкость может рассматриваться как термостат, поглощающий и отдающий тепло к стенкам пузырьков без изменения своей температуры [57].

Запишем уравнение сохранения массы для обеих фаз (жидкости и газа), которые выводятся совершенно аналогично тому, как выводится уравнение неразрывности для однородного течения:

$$\frac{\partial(n_1\rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\bar{u}_1) = 0, \quad \frac{\partial(n_2\rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\bar{u}_2) = 0, \quad n = n_1 + n_2, \quad (1.34)$$

где n_1 и n_2 — отношения объемов пор, занятых соответственно жидкостью и газом в выделенном элементе пористой среды, к объему этого элемента; n — общая пористость; ρ_1 и ρ_2 — плотность воды и газа; t — время; \bar{u}_1 и \bar{u}_2 — векторы скоростей фильтрации фаз.

Сложение первого и второго уравнений в (1.34) с учетом третьего дает

$$\frac{\partial[(n-n_2)\rho_1 + n_2\rho_2]}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2) = 0. \quad (1.35)$$

Как показано в работе Р.И. Нигматулина [57], даже в ударных волнах могут быть несущественными эффекты поступательного движения пузырьков относительно жидкости, иными словами, в уравнении (1.35) $u_1 = u_2$ (это соответствует и принятой ячеистой модели пузырьковой жидкости).

По условию $\rho_2 \ll \rho_1$ и $n_2 \ll n$. Тогда после несложных преобразований из (1.35) получаем уравнение [20]

$$n \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial n}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial n_2}{\partial t} + n_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\bar{u}_1) = 0. \quad (1.36)$$

Для того чтобы замкнуть систему, воспользуемся уравнением закона фильтрации (по Маскету и Леверетту [9, 10, 51]), аналогичным второму в (1.15), (1.27),

$$\bar{u}_1 = -\frac{k f_1(s)}{\eta_1} \operatorname{grad} p_1$$

(здесь k — как и прежде, проницаемость пористой среды; $f_1(s)$ — относительная фазовая проницаемость по воде, зависящая от насыщенности этой фазы; η_1 — вязкость несущей жидкости; p_1 — давление в жидкости), а также тем, что свойства жидкости и газа, так же как пористость и проницаемость проводящей среды, являются функциями давления. При этом изменение пористости однородного пласта зависит только от изменения среднего давления $\bar{p} = p_1 s + p_2 (1-s)$, где s —

насыщенность первой фазы (жидкости); p_2 – давление в газовых пузырьках; $p_2 = p_1 + p_c(s)$; $p_c(s)$ – капиллярное давление, зависящее от насыщенности [9, 10].

Для рассматриваемой модели гетерогенной жидкости $s \rightarrow 1$, а p_2 ненамного превышает p_1 , откуда с незначительной погрешностью можно считать $\bar{p} = p_1$ и, кроме того, $f_1(s) = 1$. Соответственно в уравнении (1.36)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}, & \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial n}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}, & \frac{\partial n_2}{\partial t} &= \frac{\partial n_2}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_2}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь в предположении слабой сжимаемости жидкости и пористой среды [9, 10]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} = \frac{\rho_0}{E_p}, \quad \frac{\partial n}{\partial p_1} = \frac{n_0}{E_n},$$

где ρ_0 и n_0 – плотность и пористость при давлении p_{10} (невозмущенный пласт); E_p и E_n – модули сжатия воды и пористой среды.

В качестве уравнения состояния газа можно использовать уравнение Клапейрона-Менделеева, характеризующее состояние идеального газа; при давлениях ниже 10 атм многие газы с хорошим приближением следуют поведению идеального [78]:

$$\rho_2 = \frac{M_g (p_1 + p_c)}{RT}. \quad (1.38)$$

Здесь M_g – молекулярный вес газа; R – универсальная газовая постоянная ($R = 8,3144$ Дж/моль·К); T – абсолютная температура. После подстановки (1.38) в (1.37) имеем

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial p_1} = \frac{M_g}{RT} \left(1 + \frac{\partial p_c}{\partial p_1} \right). \quad (1.39)$$

Рассмотрим вид уравнения состояния $\frac{\partial n_2}{\partial p_1}$.

Количество растворенного в воде вещества в соответствии с законом Генри составляет [78]

$$m_c = k_H f \quad (m_c \downarrow 0), \quad (1.40)$$

где $m_c = \frac{N}{M_1}$; $N = \frac{M_2}{M_g}$; f – фугитивность растворенного вещества; k_H – постоянная закона Генри; m_c – моляльная концентрация растворенного вещества;

N – количество молей газа, растворенного в массе воды M_1 ; M_2 – масса растворенного газа.

При малых давлениях фугитивность идеального газа равна его давлению. Тогда после относительно несложных преобразований уравнения (1.40) имеем

$$M = M_1 M_g k_H (p_{10} - p_1), \quad (1.41)$$

в котором M – масса газа, перешедшего из молекулярно-растворенного в свободный.

Выразив массы воздуха и воды через их объемы и плотности, вместо (1.41) получаем

$$n_2 \rho_2 = n_0 \rho_0 M_g k_H (p_{10} - p_1)$$

или при бесконечно малом изменении давления (с учетом того, что процесс фильтрации изотермический и можно перейти к полным дифференциалам)

$$d(n_2 \rho_2) = -n_0 \rho_0 M_g k_H dp_1. \quad (1.42)$$

Подстановка в (1.42) уравнений (1.38) и (1.39), дает искомое уравнение состояния [20]

$$\frac{dn_2}{dp_1} = \frac{n_0 \rho_0 k_H RT + n_2 \left(1 + \frac{dp_C}{dp_1}\right)}{p_1 + p_C}. \quad (1.43)$$

Представим p_C как функцию p_1 . Очевидно, что при снижении давления с p_{10} до p_1 масса газового пузырька в ячейке с учетом (1.41) станет равной

$$M_p = M_0 + \frac{M}{N_{sp}}, \quad (1.44)$$

где M_0 – масса зародышевого микропузырька газа при давлении p_{10} ; N_{sp} – количество пузырьков в массе M_1 несущей жидкости.

Объем пузырька (сферы), выраженный через его радиус, равен $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

С другой стороны, этот же объем можно записать через плотность газа и массу пузырька: $V = \frac{M_p}{\rho_2}$. Приравняв оба эти выражения, воспользовавшись уравнением состояния (1.38) и формулой Лапласа для капиллярного давления, получаем

$$p_1 = \frac{3}{4} \frac{M_p RT}{M_g 8 \pi \sigma^3} p_C^2 - p_C. \quad (1.45)$$

Здесь σ – поверхностное натяжение на границе раздела вода-газ. Из последнего уравнения нетрудно вычислить M_0 , задав радиус пузырька:

$$M_0 = \frac{32 \pi (p_{10} + p_{C0}) M_g \sigma^3}{3 RT p_{C0}}, \quad (1.46)$$

где p_{C0} – капиллярное давление в газовом пузырьке при давлении в жидкости p_{10} .

Таким образом, уравнения (1.41), (1.44), (1.45) и (1.46) обеспечивают оценку взаимосвязи p_1 и p_C с учетом газообмена между несущей жидкостью и свободным газом. Необходимые для такой оценки значения k_H вычислены нами [20] для различных температур применительно к растворенному воздуху:

T, K	278,15	283,15	288,15	293,15
$k_H, \text{м}^3 \cdot \text{моль} / \text{Н} \cdot \text{кг}$	$1,133 \cdot 10^{-8}$	$1,003 \cdot 10^{-8}$	$0,9023 \cdot 10^{-8}$	$0,8263 \cdot 10^{-8}$

Экспериментальные значения растворимости воздуха, полученные Кзем и Лэби, взяты из работы В.М. Фокеева [83].

Приняв, например, размеры всех зародышевых микропузырьков воздуха равными, а количество их $N_{gp} = 10^6$ в 10^{-6} м^3 (соответственно $M_1 = 10^{-3} \text{ кг}$), задав параметры возмущения $T = 283,15 \text{ К}$, $p_{10} = 2,0265 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_{20} = 2,1765 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ($p_{20} = p_{10} + p_{C0}$) и взяв $k_H = 1,003 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3 \cdot \text{моль} / \text{Н} \cdot \text{кг}$, $\sigma = 0,074 \text{ Н/м}$, $\rho_2^0 = 1,239 \text{ кг/м}^3$ (плотность воздуха при атмосферном давлении и температуре $T = 283,15 \text{ К}$), $M_g = 28,98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ [32, 81], из уравнения (1.46) имеем $M_0 = 1,0774 \cdot 10^{-14} \text{ кг}$. Результаты совместного решения (1.41), (1.44) и (1.45) приведены на рис. 1.6 в виде графика $p_C(p_1)$ – кривая 1; здесь же показан график

$\frac{dp_C}{dp_1}(p_1)$ – кривая 2,

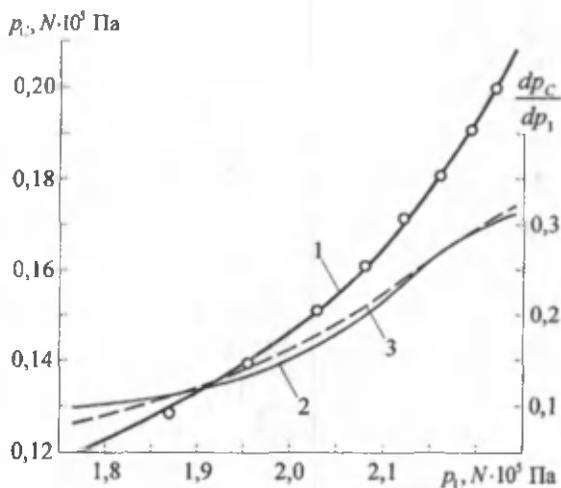
значения $\frac{dp_C}{dp_1}$ для ко-

торого вычислены как тангенсы угла наклона касательной в выбранных точках кривой 1.

В целом функция (1.45) достаточно сложна для анализа и учета

Рис. 1.6. Графики зависимостей $p_C(p_1)$ и $\frac{dp_C}{dp_1}(p_1)$.

Условные обозначения в тексте



изменения капиллярного давления в газовых пузырьках под влиянием снижения давления в жидкости и поступления газа в пузырьки. Поэтому упрощенно зависимость $p_C(p_1)$ можно аппроксимировать полиномом вида

$$p_C = \sum_{i=0}^q a_i p_1^i, \quad (1.47)$$

в котором постоянные a_i вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. На рис. 1.6 кружками вынесены некоторые значения подобранной функции [20]

$$p_C = 0,03032 \cdot 10^5 - 0,12689 p_1 + 0,36375 \cdot 10^{-5} p_1^2 - \\ - 0,25200 \cdot 10^{-10} p_1^3 + 0,05817 \cdot 10^{-15} p_1^4.$$

и показаны значения производной $\frac{dp_C}{dp_1}$ (кривая 3). Использование ячеистой модели позволяет в принципе (на основе имеющегося распределения пузырьков по размерам) оценить связь $p_C(p_1)$ по классам размеров пузырьков.

Таким образом, устанавливаются в явном виде зависимости $p_C(p_1)$ и $\frac{dp_C}{dp_1}(p_1)$. Отсюда уравнение состояния (1.43) с учетом (1.47) преобразуется так:

$$\frac{dn_2}{dp_1} = \frac{n_0 \rho_0 k_H RT + n_2 \left(1 + \sum_{i=0}^4 i a_i p_1^{i-1} \right)}{p_1 + \sum_{i=0}^4 a_i p_1^i}. \quad (1.48)$$

Однако оно не дает возможности разделить переменные, т.е. в явном виде определить связь $n_2(p_1)$. С другой стороны, для оценки сжимаемости водоносного пласта (причем, главным образом, применительно к результатам ОФО пластов, когда интерес представляет асимптотическое, максимальное выражение сжимаемости газовых пузырьков) членами p_C и $\frac{dp_C}{dp_1}$ в первом приближении можно пренебречь. Соответственно вместо (1.43) и (1.48) получаем [20]

$$\frac{dn_2}{dp_1} = \frac{n_0 \rho_0 k_H RT + n_2}{p_1},$$

интегрирование которого от n_{20} до n_2 и от p_{10} до p_1 дает

$$n_2 = n_{20} \frac{p_{10}}{p_1} + \rho_0 n_0 k_H RT \left(\frac{p_{10}}{p_1} - 1 \right) = n_{20} \frac{p_{10}}{p_1} + \rho_0 b \left(\frac{p_{10}}{p_1} - 1 \right).$$

Вернемся к уравнению (1.36). Подстановка в него представленных уравнений состояния и закона фильтрации и пренебрежение членами порядка $\frac{(\text{grad } p_1)^2}{E_p + E_n}$ [9, 10] приводят к соотношению [20]

$$n_0 \left[\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_n} + \frac{n_{20}}{n_0 p_1} \frac{p_{10}}{p_1} + \frac{b \rho_0}{n_0 p_1} \frac{p_{10}}{p_1} + \frac{n_{20}}{n_0 \rho_0} \frac{M_g}{RT} \frac{p_{10}}{p_1} + \frac{b}{n_0} \frac{M_g}{RT} \left(\frac{p_{10}}{p_1} - 1 \right) \right] \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{k_0}{\eta_{10}} \Delta p_1 = 0, \quad (1.49)$$

где k_0 и η_{10} – значения k и η при давлении p_{10} . Выражение в квадратных скобках здесь представляет собой сжимаемость пласта.

Оценим составляющие сжимаемости; в дополнение к уже принятым параметрам возмущения положим $n_0 = 0,1$, $p_1 = 2,0265 \cdot 10^5$ Па, $\frac{p_{10}}{p_1} = 1,1$, $b = 2,361 \cdot 10^{-6}$ м³/кг. Взяв модули сжатия воды и пористой среды $E_p = 2,03 \cdot 10^9$ и $E_n = 6,09 \cdot 10^8$ Па [9, 10], в уравнении (1.49) имеем $\frac{1}{E_p} = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Па⁻¹; $\frac{1}{E_n} =$

$$1,64 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}; \frac{b \rho_0}{n_0 p_1} \frac{p_{10}}{p_1} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}; \frac{b}{n_0} \frac{M_g}{RT} \left(\frac{p_{10}}{p_1} - 1 \right) = 3 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}.$$

Оценка третьего и пятого слагаемых в квадратных скобках предполагает задание величины n_{20} . Зная массу одного пузырька M_0 и количество пузырьков в назначенном объеме несущей жидкости $N_{\text{в}}$, получаем общую массу свободного воздуха в этом объеме воды: $M = 1,0774 \cdot 10^{-8}$ кг. Плотность воздуха при исходном давлении в жидкости $p_{10} = 2,229 \cdot 10^5$ Па и капиллярном давлении $p_{C0} = 2,1 \cdot 10^4$ Па (см. рис. 1.6) составляет $\rho_{20} = 3,03$ кг/м³. Отсюда объем воздуха в выделенном объеме водовмещающих отложений, занятых жидкостью, равен 10^{-5} м³, откуда $n_{20} = 3,5 \cdot 10^{-4}$. Тогда в уравнении (1.49) $\frac{n_{20}}{n_0 p_1} \frac{p_{10}}{p_1} = 1,9 \cdot 10^{-8}$ Па⁻¹,

$$\frac{n_{20}}{n_0 \rho_0} \frac{M_g}{RT} \frac{p_{10}}{p_1} = 5,0 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1} \text{ и соответственно } n_2 = 6,2 \cdot 10^{-4}.$$

В случае мало концентрированных смесей, $\alpha_2^{\frac{4}{3}} \ll 1$ (здесь α_2 – доля объема смеси, занимаемая газом), $\frac{\rho_2}{\rho_0} < 1$ и при отсутствии относительного поступательного, относительного вращательного и радиального движений около дис-

персных частиц и пузырьков газа (радиальные движения отсутствуют в смеси несжимаемых фаз без фазовых переходов), т.е. соответственно $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{w}$, $w = 0$, смесь может рассматриваться как несжимаемая ньютонова жидкость с вязкостью η [56].

Последнее условие в пузырьковой жидкости на этапе упругой фильтрации не выполняется; радиус пузырьков (сфер) меняется, во-первых, вследствие снижения давления в жидкости и, во-вторых, в результате притока газа к пузырьку из жидкости. Вместе с тем, по истечении некоторого времени упругий режим фильтрации в безнапорном пласте сменяется жестким (гравитационным). На этом этапе возмущения распределение давления по глубине грунтового потока остается неизменным, выделение свободного газа и рост пузырьков прекращается и условие $w = 0$ выполняется достаточно точно. Соответственно концентрация газовых пузырьков α_2 при завершении этапа упругой фильтрации достигает максимума и в дальнейшем стабилизируется. Тогда, как следует из обобщенной формулы Эйнштейна для эффективной вязкости смеси, рассмотренной в работе [56], при

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} \rightarrow 0 \quad (\text{пузырьки газа в вязкой жидкости})$$

$$\eta = \eta_1 (1 + \alpha_2), \quad (1.50)$$

где η_2 – вязкость газа. Концентрацию легко вычислить, имея значения пористости по газу n_2 и общей пористости n . Используя данные приведенного выше примера, получаем: $\alpha_2 = 6,2 \cdot 10^{-3}$. Отсюда вязкость смеси в (1.50) $\eta = \eta_1$ с максимальной погрешностью менее 0,7 %, иными словами, допущение неизменности вязкости смеси на протяжении возмущения и равенства ее вязкости несущей жидкости вполне правомерно.

Таким образом, концентрация в воде воздуха, как свободного в невозмущенном пласте, так и молекулярно-растворенного, переходящего в свободный при снижении давления в пласте, достаточно велика, чтобы полностью определять сжимаемость безнапорного пласта [20, 57] на этапе упругой фильтрации и соответственно его упругую емкость μ^* ; сжимаемость пузырьков воздуха на 1-2 порядка превышает сжимаемость воды и породы. При этом нет критериев, на основе которых можно было бы утверждать, защемлены пузырьки газа в порах или движутся вместе с несущей жидкостью. В то же время насыщенность пористой среды свободным воздухом невелика, так что среднее давление в пласте с высокой точностью можно считать равным давлению в жидкости, которое и фиксируется наблюдательными скважинами, а свойства жидкости на протяжении возмущения – неизменными (в тестовом примере, результаты которого вполне представительны, пористость по воздуху изменяется в пределах от $n_{20} = 3,5 \cdot 10^{-4}$ до $n_2 = 6,2 \cdot 10^{-4}$, что составляет десятые доли процента от общей пористости).

Важно отметить еще и то, что значительное число составляющих сжимаемости пласта при довольно большом разбросе ее значений определяет практическую невозможность получения индикаторных кривых откачек с постоянными

значениями упругой емкости, не отвечающей сжимаемости воздуха. Нечелесообразно также отнесение полученной по результатам возмущения безнапорных пластов μ^* на другие составляющие сжимаемости, если последние (равные или превышающие сжимаемость пузырьков газа) не оценены независимыми методами [20].

Приведенный пример (несколько громоздкий, содержащий анализ нескольких самостоятельных проблем) наглядно иллюстрирует взаимоотношения гидромеханической и гидравлической моделей фильтрации и сложившихся представлений о путях использования физико-математических моделей движения ПВ [19, 26, 77, 78]. В соответствии с этими представлениями наиболее распространенный путь – формальное применение уравнений, отвечающих гидравлической модели. Решение их в соответствии с методом обратных задач позволяет рассчитывать параметры проводящей среды и жидкости или процесса, которые в общем случае не отражают придаваемой им физической сущности. Эти параметры могут быть эффективно использованы как расчетные величины для получения прогнозируемых значений искомым функций, однако они применимы только в пределах режима проведения опытов, если не доказана возможность их экстраполяции.

Второй путь – описание фильтрации уравнениями, параметры которых, как предполагается, отражают действительные свойства проводящей среды и жидкости. В этом случае обязательно определение физической сущности процессов (например, доказательство закона фильтрации, схемы движения, зависимостей, отражающих состояние) и представительности экспериментальных данных. Считается [76], что значения таких параметров не связаны с режимом опытов, поэтому появляется возможность оценки допущений и расшифровки погрешностей использования при прогнозировании разных методов решения, обоснования вида уравнений, пригодных при первом, формальном пути их решения и т.п.

Такое представление – в определенной степени следствие недооценки роли детерминированно-статистического дуализма. Во-первых, принципиально не может быть и речи о независимости параметров водоносного пласта от особенностей его опытного опробования. Во-вторых, в приведенном высказывании речь идет на самом деле об оценках критериев применимости той или иной разновидности фильтрационной модели для интерпретации опытных данных; в эти модели, как мы пытались показать выше, конечно же, заложены естественные ограничения на область их существования (а, следовательно, и применения). Эти ограничения определяются исходными предпосылками, использованными при построении физико-математических моделей фильтрации. Соответственно одни модели (в частности, гидромеханическая) имеют меньшие ограничения, другие (гидравлическая) – большие. В области же режимов фильтрации, где применимы обе эти модели, для одной и той же пространственной области фильтрации параметры, установленные с использованием, как той, так и другой моделей, полностью равноценны, т.е. в одинаковой степени кажущиеся [19, 26].

В заключение анализа фильтрационных феноменологических моделей необходимо хотя бы кратко обсудить еще одну исключительно важную проблему. Дело в том, что изменение условий осадконакопления, последующие процессы уплотнения пород и их цементация, переотложение солей и многие другие явления способствовали образованию пластов пород с неоднородными физическими

свойствами. Следствием неоднородности этих свойств, ее проявлением является хаотическая изменчивость важнейших гидрогеологических параметров – водопродовимости (или коэффициента фильтрации) и емкости. Причем экспериментально установлено, что степень изменчивости, например, водопродовимости, даже в пределах одних и тех же водоносных пластов, может быть весьма существенной, достигая нескольких порядков; она обычно растет с уменьшением абсолютных значений водопродовимости.

Изменчивость емкости заметно различается для напорных и безнапорных систем. Гравитационная емкость характеризуется относительно большим разбросом значений, имеющих, однако, чаще всего одинаковый порядок величин. Упругая емкость изменяется незначительно даже в пределах разных литологических комплексов, залегающих на одинаковых глубинах, что объясняется сравнительно ограниченным диапазоном значений коэффициентов сжимаемости пород и воды при равных "бытовых" давлениях.

В гидрогеологической практике любой анализируемый параметр принимается за случайную величину с определенной функцией распределения, а имеющиеся результаты его измерений принимаются за выборку из генеральной совокупности данных, характеризующих пласт в целом. Учет изменчивости параметров, как уже отмечалось ранее, осуществляется путем приведения реальной неоднородной проводящей среды к однородной с наиболее вероятными значениями параметров. Последние отыскиваются при обобщении экспериментальной совокупности (выборки) частных значений и используются затем в качестве расчетных параметров. Сведения о порядке и особенностях статистической обработки экспериментальных данных можно найти, например, в [64, 74, 79, 85] и др.

Применительно к интерпретации локальных экспериментов, на основе данных которых формируется выборка частных значений, и продолжительных (опытных и эксплуатационных) возмущений, анализ влияния неоднородности выполнен в работах [15, 54]. Вслед за М.В. Рацем [69, 70] авторы [15, 54] по отношению размеров элементов фильтрационной неоднородности пород (R_H) и области воздействия опытных работ (R_3) предлагают различать неоднородность высшего порядка, эффективную и низшего порядка.

Фильтрационная неоднородность высшего порядка характеризуется соотношением $\frac{R_3}{R_H} > 100$. В этом случае априорно предполагается, что она не про-

является в результатах ОФО, и опробуемый пласт ведет себя как квазиоднородный. Эффективная фильтрационная неоднородность обусловлена неравномерным чередованием элементов с линейными размерами в 100-10 и менее раз меньшими размерами зоны опробования. При принятых для данного объекта методах и продолжительности опытных и эксплуатационных возмущений в их результатах она может проявиться двояко: в одних случаях влияет, а в других – практически не сказывается на них. Наконец, неоднородность низшего порядка имеет место при размерах элементов неоднородности, больших размеров зоны течения ПВ. Проявление неоднородности такого вида в формировании фильтрационного потока аналогично действию закономерной неоднородности свойств пласта и учитывается так же, т.е. заданием граничных условий.

По характеру деформации опытных закономерностей изменения уровня ПВ в возмущающих и наблюдательных скважинах целесообразно принимать во внимание и различать неоднородности эффективную и низшего порядка. Вместе с тем, анализ экспериментальных данных, выполненный в работе [15], показал, что в условиях как той, так и другой неоднородности закономерности изменения уровня сохраняются функциональными (т.е. соответствующими выбранной теоретической модели фильтрации ПВ) и в некоторых случаях переходят в корреляционные.

Таким образом, при интерпретации результатов ОФО, прогнозировании водоотбора и дренажа часть пласта, охваченная единичным, локальным опытом, или весь пласт практически всегда могут быть представлены эквивалентной по реакции на возмущение однородной проводящей средой с постоянными свойствами, выражаемыми эффективными параметрами. Неоднородность же проявляется некоторым разбросом числовых значений исследуемого показателя какого-либо свойства проводящей среды. Если разброс значений показателя случаен и меньше установленного предела, то по этому свойству среда принимается однородной. Соответственно понятие однородности в этом случае становится относительным.

Параметры, выражающие свойства пород, строго говоря, не являются чисто случайными величинами. Последние, как известно, могут принимать те или иные, но единственные для выбранной точки пласта значения. Кроме того, при случайном характере изменения каких-либо величин предполагается равная вероятность появления их одинаковых значений в различных точках пласта, и, следовательно, статистическая однородность их свойств. На самом деле свойства пласта могут изменяться в некоторых направлениях по вполне определенным законам. Поэтому в последние годы для учета неоднородности свойств пород все чаще прибегают к методам теории случайных функций [79].

В простейших случаях водоносный пласт, обладающий закономерной изменчивостью фильтрационных свойств, может быть сведен к однородному на основе физико-математических представлений о движении ПВ. Так, для условий неустановившейся фильтрации с плановой анизотропией, выражающейся различными значениями коэффициента фильтрации по координатным осям, проводящая среда приводится к изотропной трансформацией одной или обеих координатных осей. Такие решения приведены в работах [33, 35, 73, 88] и в более общем виде, с учетом произвольного выбора системы координат для наблюдательных скважин – в статье Ноймана и др. (*Newman et al.*) [102]. Влияние закономерной неоднородности здесь принципиально учитывается так же, как и для изотропного пласта.

Аналогичная трансформация координатных осей применяется для порфибно-анизотропных пластов [54] применительно к потокам с центральной симметрией.

Несколько слов необходимо сказать и об учете хаотической неоднородности свойств проводящей среды в разрезе водоносного пласта. Такая неоднородность характерна, главным образом, для трещиноватых и закарстованных пород. Оценка и учет ее в значительной степени определяют достоверность инженерных расчетов и прогнозов.

Изучение неоднородности фильтрационных свойств водоносных пластов в разрезе осуществляется обычно на основе геофизических исследований в сква-

жинах (термометрии, расходомерии); теоретические и методические основы таких исследований изложены, например, в работах [37, 38] и др. Геофизическими методами устанавливаются проницаемые интервалы пород и доля притока (или, наоборот, поглощения) воды из этого интервала при откачках или нагнетаниях (наливах) в скважины. Полученное распределение дебитов притока или поглощения позволяет распределить обобщенную величину коэффициента фильтрации, полученную по результатам прослеживания уровня в процессе опытной откачки, по разрезу.

В.А. Мироненко и В.М. Шестаков [54], наряду с понятием "неоднородность", предлагают ввести еще одно – "гетерогенность" (и противоположное последнему – "гомогенность") – применительно к водоносным комплексам, в макроструктуре которых четко выделяются две или более групп однотипных элементов с резко различающимися (между группами) фильтрационными и емкостными параметрами (см. рис. 1.7). Примером могут быть трещинно-пористые водоносные пласты (одна группа – трещины, вторая – пористые блоки).

Следует, однако, заметить, что использование понятия о гетерогенности проводящей среды целесообразно только для групп однотипных элементов, совпадающих пространственно и не выделенных геологическими границами. В противном случае дублируется дифференциация закономерной неоднородности, например, когда пласт разделен в плане прямолинейной или круговой границей на два элемента неоднородности эффективной или низшего порядка, которые, в свою очередь, могут состоять из элементов неоднородности высшего порядка (такая схема строения водоносного пласта формально отвечает неоднородно-гетерогенной среде) и т.п. Кстати, индикаторный график прослеживания для наблюдательной скважины внутри напорного пласта, окруженного породами с безнапорными водами, формально полностью аналогичен индикаторному графику откачки в гетерогенной среде [27].

Остановимся кратко на модели фильтрации в трещиноватых и закарстованных породах как классическом представителе гетерогенной проводящей среды,

для которых, собственно, представление о гетерогенности и вводилось. Такие породы широко распространены территориально и играют большую роль в организации водоснабжения. К ним приурочено огромное количество месторождений

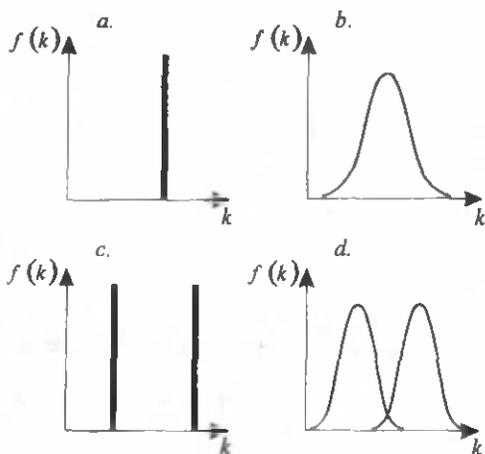


Рис. 1.7. Кривые распределения проницаемости для различных сред по типам гетерогенности и неоднородности: а - однородная гомогенная; б - неоднородная гомогенная; в - однородно-гетерогенная; д - неоднородно-гетерогенная

полезных ископаемых, разработка которых требует предварительного или сопутствующего разработке осушения. Эти обстоятельства определяют заинтересованность исследователей как в обосновании общих теоретических представлений о течении жидкостей в трещиноватых и закарстованных породах, так и в решении прикладных задач фильтрации в таких породах (см., например, [1, 7, 8, 14, 34, 35, 39, 41, 48, 62, 68, 69, 70, 71, 73, 84] и др.).

Различные типы пустот в горных породах играют разную роль в формировании их фильтрационных и емкостных свойств. Согласно современным представлениям трещиноватая (трещинно-карстовая) порода состоит из многочисленных пористых и проницаемых (либо непроницаемых) блоков, разделенных трещинами. С характером и типом пустот в трещиноватых породах связаны основные классификации трещинных пластов-коллекторов. Обычно выделяются три основных типа [34]:

- чисто трещинные пласты, в которых блоки практически непроницаемы, пористость их пренебрежимо мала, а основные запасы жидкости содержатся в трещинах;
- трещинно-пористые пласты, в которых проницаемость блоков пренебрежимо мала по сравнению с проницаемостью трещин, а пористость их намного превышает пустотность трещин;
- пласты с двойной пористостью, в которых пористость, пустотность и проницаемость трещин и блоков сопоставимы.

Два последних типа коллекторов рассматриваются как гетерогенные и часто объединяются в один – смешанные коллекторы – и для их обозначения употребляются термины как "трещинно-пористые пласты", так и "пласты с двойной пористостью".

В работе [14] предлагается выделить дополнительно еще один тип коллектора, условно называемого трещинно-трещинным или неравномерно трещинным. Для него характерна густая сеть микротрещин различного генезиса, на которую наложена относительно редкая сеть более крупных тектонических трещин. Такие пласты можно рассматривать как трещинно-пористые, причем первая система трещин играет роль пор, а вторая – собственно трещин.

Вместе с тем, выделение этого типа коллектора представляется нецелесообразным. Как можно без труда заметить, он достаточно жестко привязан к вполне определенному типу трещин – к тектоническим. Приведенные же выше три типа пластов такой привязки не имеют, а, следовательно, имеют более широкую смысловую трактовку и представляют таксономический уровень классификации трещинно-карстовых пластов-коллекторов более высокого уровня, чем предложенный в [14] четвертый тип.

Наиболее общий подход к анализу фильтрации жидкости в трещинно-пористых пластах сформулирован в работах Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова и И.Н. Кочиной [7, 8]; этот подход позволяет аппроксимировать движение жидкости с позиций механики сплошной среды. Для учета влияния на процесс фильтрации различных типов пустот вводится понятие о гетерогенности проводящей среды – породу с сильно развитой трещиноватостью предложено рассматривать в виде двух сред, вложенных одна в другую, с порами разных масштабов. Характерная особенность такой трещинно-пористой среды состоит в том, что движение

жидкости происходит в основном по трещинам (среда 1), в то время как объем трещин мал, и основные запасы жидкости заключены в пористых слабопроницаемых блоках (среда 2).

При принятых предположениях фильтрация жидкости в проводящих средах с двойной пористостью описывается следующей системой уравнений, учитывающей водообмен между средами:

$$\left. \begin{aligned} K_1 \Delta H_1 &= (\beta_1 + n_1 \beta_0) \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{K_2}{l^2} (H_2 - H_1), \\ K_2 \Delta H_2 &= (\beta_2 + n_2 \beta_0) \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{K_2}{l^2} (H_2 - H_1), \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

где H_1 и H_2 , K_1 и K_2 , n_1 и n_2 — напоры, коэффициенты фильтрации и пористость соответственно сред 1 и 2; $\beta_1 = \frac{1}{E_{n1}}$, $\beta_2 = \frac{1}{E_{n2}}$ и $\beta_0 = \frac{1}{E_p}$ — сжимаемость (упругоэlasticность) соответственно среды 1, среды 2 и жидкости; l — характерный размер пористого блока. Остальные обозначения прежние.

Так как в большинстве случаев $n_1 \ll n_2$ и $K_1 \gg K_2$ [7], некоторые члены в уравнениях системы (1.51) оказываются пренебрежимо малыми, соответственно система упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} - \vartheta \frac{\partial}{\partial t} (\Delta H_1) = \chi \Delta H_1, \quad \chi = \frac{K_1}{\beta_2 + n_2 \beta_0}, \quad \vartheta = \frac{K_1}{K_2} l^2. \quad (1.52)$$

Здесь все обозначения прежние.

В пределе при $\vartheta \rightarrow 0$, что отвечает беспрепятственному обмену жидкостью между блоками и трещинами, первое уравнение в (1.52) переходит в обычное уравнение упругого режима с пьезопроводностью, соответствующей проводимости системы трещин, но емкости (т.е. пористости и сжимаемости) блоков. При этом время переходных процессов τ , обусловленных перераспределением жидкости между порами и трещинами, оценивается соотношением $\tau = \frac{\vartheta}{\chi}$.

Таким образом, для расчетных значений времени t , в несколько раз превышающих τ , для аппроксимации движения жидкостей в трещинно-пористых пластах применимы те же уравнения фильтрации (1.18) или (1.20), что используются для описания течения жидкостей в гомогенных пластах. В формальном отношении уравнения из (1.52) полностью идентичны уравнениям фильтрации в безнапорных пластах; совершенно аналогичны и особенности индикаторных кривых откачек из гомогенных безнапорных и трещинно-пористых пластов [19].

Обычно на индикаторных кривых откачек из трещинно-пористых пластов $S(\lg t)$ (где S — понижение уровня в возмущающей или наблюдательной скважине) выделяются три характерных участка, обусловленных особенностями фильтрации ПВ в таких пластах (см. рис. 1.8). Первый участок представляет период фильтрации при емкости, отвечающей емкости трещин; по этому участку индикаторной кривой могут быть определены проводимость и пьезо- или уровнепровод-

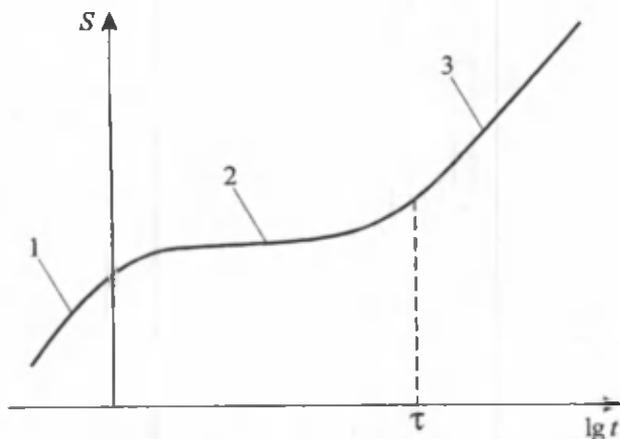


Рис. 1.8. Типовой индикаторный график откачки из пласта с двойной пористостью (1, 2 и 3 - характерные участки графика)

ность среды 1. На практике он наблюдается редко – его вырождение отражается резким скачком уровня в наблюдательных скважинах при пуске откачки.

Второй участок – ложно стационарный (участок 2 на рис. 1.8) – отражает этап фильтрации, при котором начинается подток воды в трещины из пористых блоков, т.е. постепенно возрастает роль емкости пористых блоков в общем балансе откачиваемой воды. Чем меньше разница в величинах пористости двух сред, тем хуже выражен этот участок индикаторной кривой. Продолжительность ложно стационарного участка может составлять от нескольких минут до сотен часов.

Постепенно, по мере того, как закономерности снижения уровня ПВ начинают определяться емкостью основной массы микротрещин, пор и пустот, этап ложно стационарной фильтрации заканчивается, крутизна индикаторного графика возрастает, и он более или менее быстро приобретает прямолинейную форму (участок 3 на рис. 1.8). Этот участок соответствует асимптоте, отвечающей, как уже отмечалось ранее, обычному уравнению упругого режима с пьезопроводностью, соответствующей проводимости системы трещин, но емкости (т.е. пористости и сжимаемости) блоков.

Особенности интерпретации результатов ОФО трещинно-пористых пластов достаточно подробно рассмотрены в методических работах [15, 16, 17, 54].

Наиболее общий подход к анализу фильтрации жидкости в деформируемых трещиноватых породах с чисто трещинной пористостью с позиций механики сплошной среды сформулирован в работе Ю.П. Желтова [39].

Гетерогенность характерна не только для трещинно-пористых пластов, она свойственна также и пористым средам, представляемым, как правило, гомогенными. Так, Коллинз [43] приводит найденное Бердайнсом, Горнеем и Рейхертцем методом нагнетания ртути распределение пор по размерам. На кривой распреде-

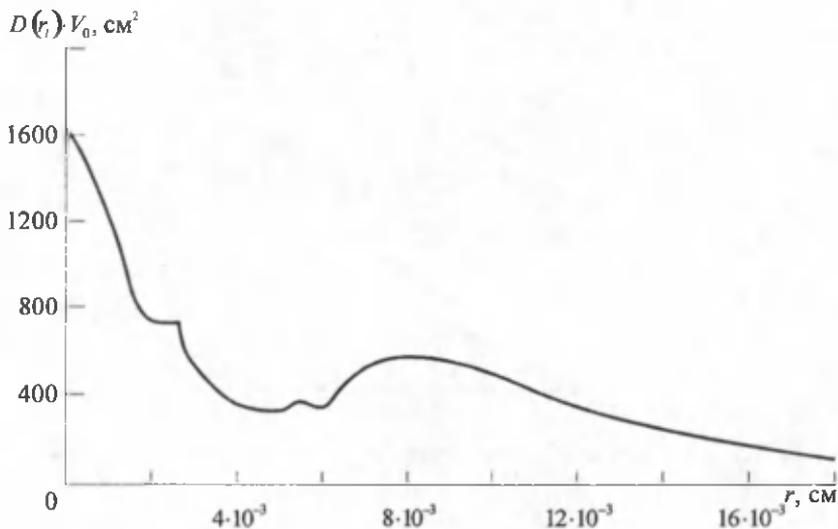


Рис. 1.9. Типичное распределение пор по размерам для песчаника. Здесь r - эквивалентный радиус поры; $D(r_i)$ - функция распределения; V_0 - общий объем образца. Опыт проводился в образце, имеющем проницаемость $k = 0,445 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ и пористость $n = 0,237$

ления отчетливо выделяются две вершины (см. рис. 1.9), соответствующие двум совпадающим пространственно системам пор.

Наличие двух систем пор обусловлено, по-видимому, слабой отсортированностью обломочного материала, слагающего проводящую среду и неравномерным его распределением в пространстве. Макропоры в зонах, образованных крупнозернистыми фракциями, в таком случае имеют то же значение, что трещины в трещинно-пористых пластах. Роль блоков играют зоны среды, в которых повышено содержание глинистой фракции; эти зоны обладают значительно меньшей проницаемостью в сравнении с зонами, занятыми крупнозернистыми фракциями, и преобладающей емкостью. При бурении такие зоны (особенно если они невелики) практически не выделяются. Таким образом, и при расчетах фильтрации в однородных изотропных пористых пластах необходимо учитывать вероятную гетерогенность их строения; пример интерпретации ОФО на основе предпосылки о гетерогенности проводящей среды – аллювиальных четвертичных песчано-гравийно-галечниковых отложений в долине р. Жаксысарысу – приводится в [19, 28]. Одновременный учет упругой емкости безнапорного пласта (отвечающей сжимаемости газовых пузырьков) и гетерогенного его строения Болтоном и Понтином (*Boulton, Pontin*) [94] предложен на основе четырехпараметрической модели, по своей идеологии полностью соответствующей (1.30).

Введение дифференциации неоднородности свойств проводящей среды и понятия о ее гетерогенности отражает необходимость схематизации гидрогеологических условий на двух, или даже трех уровнях. Так, учет гетерогенности на

первом уровне необходим для обеспечения сопоставимости опытных данных (с тем, чтобы они одинаково характеризовали среду). Анализ хаотической неоднородности на следующем уровне схематизации даст возможность выбора наиболее вероятных расчетных значений параметров проводящей среды в пределах опробуемой части пласта. Проведение геофизических исследований в скважинах и обобщение их данных обеспечивает распределение этих параметров по разрезу водоносной системы. Наконец, на последнем, третьем, уровне схематизации закономерная неоднородность учитывается заданием расчетных параметров для каждого элемента неоднородности и граничными условиями.

1.4. Водобалансовая модель

Осреднение течения по объему всей области фильтрации (характерным размером которой выступает l_v) приводит к алгебраическому уравнению водного баланса, вытекающему из уравнения неразрывности и формально выражающему закон сохранения массы [5]:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho n S}{\partial t} + \nabla(\rho V) \right] dV \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} + \int_F \bar{q} d\bar{n} \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N Q_i = 0.$$

Здесь V – объем геологического тела (массива); S – изменение объема воды в исследуемом объеме геологического тела; M – масса воды в геологическом массиве; F – поверхность исследуемого объема геологического тела; \bar{n} – нормаль к поверхности геологического тела; \bar{q} – вектор потока, проходящего через поверхность F геологического тела; Q_i – элемент водного баланса; N – число элементов водного баланса.

Водобалансовая модель утрачивает важнейшие характеристики движения воды, определяемые уравнениями движения и состояния (система определяющих уравнений не замкнута), вследствие чего описать фильтрацию такой моделью уже не удастся. Главной причиной невозможности составить уравнения движения и состояния является несоблюдение основного принципа осреднения, согласно которому масштаб осреднения должен быть много меньшим характерного размера области течения, а не равным ему; для водобалансовой модели осреднение по элементарному объему, равному объему всей области фильтрации, параметров жидкости и проводящей среды неверно в принципе.

Незамкнутость системы определяющих уравнений обуславливает необходимость определения каждого элемента водного баланса независимыми методами, при этом расчеты элементов выполняются на основе упрощенных моделей (последние, не исключено, могут не иметь ничего общего с действительно протекающими процессами) и процедуры численного дифференцирования⁴. Такой под-

⁴ Это означает однозначный и категорический отказ от использования уравнения водного баланса как алгебраического уравнения – составляющие баланса не могут определяться на основе решения такого уравнения, т.е. как разность или сумма других составляющих. Предельно допустимые погрешности (абсолютные и относительные) составляющих водного баланса в водобалансовом уравнении, значительные по величине, в этом случае суммируются.

ход к интерпретации фактического материала способен внести исключительно большие погрешности в результаты расчетов. Вскрыть и оценить их позволяет только повторная интерпретация на качественно иной методической основе. При этом (повторим еще раз основное требование к воднобалансовым исследованиям) все, без исключения, элементы водного баланса должны определяться независимыми методами и независимо друг от друга, а баланс может и должен использоваться только для контрольных расчетов с целью увязки его составляющих.

Именно с таких позиций в [21, 22, 24, 29] и других работах анализировались результаты водобалансовых исследований для оценок инфильтрации атмосферных осадков как меры величины питания ПВ в условиях Казахстана. Этот анализ позволил утверждать, что при оценках естественных ресурсов ПВ следует избегать применения так называемого балансово-гидрометрического метода, в основу которого как раз и положены водобалансовые исследования. Однако сам анализ — предмет самостоятельного изложения, и здесь подробно рассматриваться не будет.

Список литературы к разделу 1

1. *Абрамов С.К., Газизов М.С., Костенко В.И.* Защита карьеров от воды. М.: Недра, 1970. 230 с.
2. *Арье А.Г.* Исследование процесса фильтрации жидкости в пористой среде // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1982. 60 с.
3. *Арье А.Г.* Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 101 с.
4. *Арье А.Г.* Влияние физического взаимодействия воды и породы на процесс геофильтрации. Автореферат диссертации... доктор геол.-минер. наук. М., 1987. 44 с.
5. *Бадов В.В., Киселев А.А.* Модели геофильтрации // Обзор. Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1984. 51 с.
6. *Баренблатт Г.И.* О возможности линеаризации в некоторых задачах нестационарной фильтрации газа // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1956. № 11. С. 111-113.
7. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П.* Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Доклады АН СССР. 1960. 132. № 3. С. 545-548.
8. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. 24. Вып. 5. С. 852-864.
9. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 289 с.

Поэтому высока вероятность того, что абсолютная погрешность любой вычисляемой составляющей баланса превысит саму эту составляющую, а относительная погрешность будет превышать 100 %. Очевидно — вычисленная с такой погрешностью величина не может иметь какую-либо физическую, предметную интерпретацию.

10. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
11. *Белякова В.К.* Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам // Прикладная математика и механика. 1956. 20. Вып. 1. С. 109-115.
12. *Бондаренко Н.Ф.* Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 216 с.
13. *Бондаренко Н.Ф., Гак Е.З.* Электромагнитные явления в природных водах. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 152 с.
14. *Боревский Б.В., Хордикайнен М.А., Язвин Л.С.* Разведка и оценка эксплуатационных запасов месторождений подземных вод в трещинно-карстовых пластах. М.: Недра, 1976. 247 с.
15. *Боревский Б.В., Самсонов Б.Г., Язвин Л.С.* Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. М.: Недра, 1979. 326 с.
16. *Боцевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М.* Основы гидрогеологических расчетов. М.: Недра, 1965. 368 с.
17. *Боцевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М.* Основы гидрогеологических расчетов. М.: Недра, 1969. 368 с.
18. *Бураков М.М.* К методике определения геофильтрационных параметров водоносного пласта для прогноза загрязнения подземных вод // Труды КазНИИ Госкомгидромета. 1983. Вып. 80. С. 40-53.
19. *Бураков М.М.* Исследование водоотбора в неоднородных по фильтрационным и емкостным свойствам водоносных пластах (на примере месторождений Центрального Казахстана). Автореферат диссертации... кандидат геол.-минер. наук. Алма-Ата, 1987. 25 с.
20. *Бураков М.М.* Движение пузырьковой жидкости в безнапорном водоносном пласте // Вестник АН КазССР. 1991. № 9. С. 50-57.
21. *Бураков М.М.* О достоверности оценок питания подземных вод в Центральном Казахстане балансово-гидрометрическим методом // Гидрометеорология и экология. 1995. № 4. С. 18-30.
22. *Бураков М.М.* О случайных погрешностях оценок питания подземных вод балансово-гидрометрическим методом // Гидрометеорология и экология. 1996. № 2. С. 147-160.
23. *Бураков М.М.* О сжимаемости безнапорного пласта // Геология Казахстана. 1997. № 1. С. 82-89.
24. *Бураков М.М.* О погрешностях оценок естественных ресурсов подземных вод в Центральном Казахстане // Вода: экология и технология. Тезисы докладов Третьего Международного конгресса. М.: СИБИКО Интернэшнл, 1998. С. 166-167.
25. *Бураков М.М.* Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. I // Геология Казахстана. 1999. № 3. С. 85-95.
26. *Бураков М.М.* Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. II // Геология Казахстана. 2002. № 4. С. 72-86.
27. *Бураков М.М., Жапарханов С.Ж.* О фильтрации в круговом напорном пласте, окруженном породами другой проницаемости с безнапорными водами // Вестник АН КазССР. 1986. № 9. С. 56-63.

28. **Бураков М.М., Махмутов Т.Т.** О закономерных ошибках оценок естественных ресурсов на месторождениях подземных вод в Центральном Казахстане // Отечественная геология. 1995. № 5. С. 36-42.

29. **Бураков М.М., Веселов В.В., Махмутов Т.Т.** О некоторых систематических погрешностях оценок естественных ресурсов подземных вод в Центральном Казахстане // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1999. № 3. С. 96-105.

30. **Быков В.Д., Васильев А.В.** Гидрометрия. Л.: Гидрометеиздат, 1972. 448 с.

31. **Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С.** Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.

32. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

33. **Веселов В.В., Федин Н.Ф., Шапиро С.М.** Решение задач направленной фильтрации подземных вод с помощью электрического моделирования на сплошных изотропных средах // Применение математических методов в геологии. Материалы научной конференции. Алма-Ата: Наука КазССР, 1968. С. 280-286.

34. **Влияние** свойств горных пород на движение в них жидкости / А. Бан, А.Ф. Богомолов, В.А. Максимов, В.Н. Николаевский, В.Г. Оганджянц, В.М. Рыжик. М.: Гостоптехиздат, 1962. 275 с.

35. **Гаевич И.К.** Определение параметров анизотропного пласта по данным опытных работ и моделирования в условиях неустановившегося движения // Труды координационных совещаний по гидротехнике. 1970. Вып. 48. С. 102-116.

36. **Гаврилов Л.Р.** Содержание свободного газа в жидкостях и методы его измерения // Физические основы ультразвуковой технологии. М.: Наука, 1970. Т. 3. С. 395-426.

37. **Гершанович И.М.** Гидрогеологические исследования в скважинах методом расходомерии. М.: Недра, 1981. 295 с.

38. **Гринбаум И.И.** Расходомерия гидрогеологических и инженерно-геологических скважин. М.: Недра, 1975. 271 с.

39. **Желтов Ю.П.** О движении однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах с чисто трещинной проницаемостью // Журнал прикладной механики и технической физики. 1961. № 6. С. 187-189.

40. **Каменский Г.Н.** Основы динамики подземных вод. М.: Госгеолиздат, 1943. 248 с.

41. **Керкис Е.Е.** Методы изучения фильтрационных свойств горных пород. Л.: Недра, 1975. 231 с.

42. **Киселев А.А.** Исследование и прогноз фильтрации на основе модели совместного движения грунтовых вод и влаги зоны аэрации. Автореферат диссертации... кандидат техн. наук. М., 1983. 19 с.

43. **Коллиз Р.** Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 352 с.

44. **Константинов Н.М., Петров Н.А., Высоцкий Л.И.** Гидравлика, гидрология, гидрометрия. Ч. 1. Общие законы. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.

45. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.

46. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 583 с.

47. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 408 с.
48. *Ломизе Г.М.* Фильтрация в трещиноватых породах. М.: Л.: Госэнергоиздат, 1951. 127 с.
49. *Мамонтов В.К.* Прогноз водопритоков в горные выработки в условиях напорно-безнапорной нестационарной фильтрации. Автореферат диссертации... кандидат геол.-минер. наук. М., 1983. 18 с.
50. *Мамонтов В.К.* Влияние замедленного поступления воздуха в пласт на формирование потока подземных вод к горным выработкам и дренам // Рациональное использование водных ресурсов. Научные исследования и изыскания. М.: Наука, 1986. Вып. 1. С. 96-104.
51. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Л.: Гостехиздат, 1949. 628 с.
52. *Мироненко В.А.* Динамика подземных вод. М.: Недра, 1983. 357 с.
53. *Мироненко В.А., Шестаков В.М.* Основы гидрогеомеханики. М.: Недра, 1974. 296 с.
54. *Мироненко В.А., Шестаков В.М.* Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М.: Недра, 1978. 325 с.
55. *Нерпин С.В., Чудновский А.Ф.* Энерго- и массообмен в системе расте-нис-почва-воздух. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 359 с.
56. *Низматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
57. *Низматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
58. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение. М.: Мир, 1990. 344 с.
59. *Носова О.Н.* Расчет водоотдачи песчаных грунтов. М.: Л.: Госэнергоиздат, 1962. 116 с.
60. *Орлова В.В.* Гидрометрия. Л.: Гидрометеиздат, 1966. 460 с.
61. *Основы гидрогеологии.* Гидрогеодинамика / И.К. Гавич, В.С. Ковалевский, Л.С. Язвин и др. Новосибирск: Наука, 1983. 241 с.
62. *Осушение* выработок в неоднородных водоносных системах / В.Д. Бабушкин, А.Д. Бунтман, Л.И. Малышев, М.Ф. Хасин. М.: Недра, 1977. 208 с.
63. *Пашковский И.С.* Закономерности процессов насыщения и осушения водоносных горизонтов // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1983. 58 с.
64. *Перцовский В.В., Чаповский А.Е.* О методике осреднения параметров фильтрации неоднородного в плане пласта // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1974. № 2. С. 108-111.
65. *Поздняков С.П., Шестаков В.М.* Замедленный доступ воздуха и водоотдача безнапорного пласта // Материалы 9 конференции аспирантов и молодых ученых геологического факультета МГУ. Гидрогеология. М, 1982. С. 29-37. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2333-82 Деп.
66. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гос-техиздат, 1952. 676 с.
67. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Нау-ка, 1977. 664 с.

68. *Прогноз водоприитоков в горные выработки и водозаборы подземных вод в трещиноватых и захарстованных породах* / В.Д. Бабушкин, З.П. Лебедянская, Л.З. Леви, Г.Н. Кашковский, Б.В. Боревский, И.И. Плотников. М.: Недра, 1972. 196 с.
69. *Рац М.В.* Неоднородность горных пород и их физических свойств. М.: Наука, 1968. 107 с.
70. *Рац М.В.* Структурные модели в инженерной геологии. М.: Недра, 1973. 214 с.
71. *Рац М.В., Чернышев С.Н.* Трещиноватость и свойства трещиноватых горных пород. М.: Недра, 1970. 160 с.
72. *Ребиндер П.А.* Физико-химическая механика – новая область науки. М., 1958. 78 с.
73. *Ромм Е.С.* Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М.: Недра, 1966. 283 с.
74. *Самсонов Б.Г.* Об определении расчетных гидрогеологических параметров на основе совокупности частных значений // Разведка и охрана недр. 1969, № 2. С. 48-53.
75. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
76. *Ситников А.Б.* Современные методы изучения зоны аэрации на опорных режимных станциях. Киев: Изд. ИГН АН УССР, 1978. 60 с.
77. *Ситников А.Б.* Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации. Киев: Наукова думка, 1986. 152 с.
78. *Спозито Г.* Термодинамика почвенных растворов. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 240 с.
79. *Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки* / Под ред. Ш.К. Гиматудинова. М.: Недра, 1983. 464 с.
80. *Стрельцова Т.Д., Шестаков В.М.* Определение гидрогеологических параметров безнапорных пластов по данным опытных откачек из совершенных скважин // Труды ВСЕГИНГЕО. 1967. Вып. 1. С. 4-24.
81. *Термодинамические свойства газов* / М.П. Вукалович, В.А. Кириллин, С.А. Ремизов и др. М.: Машгиз, 1953. 376 с.
82. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. М.: Мир, 1964. 216 с.
83. *Фокеев В.М.* О растворимости нефти и газов в воде // Труды МГРИ. 1956. Т. 29. С. 203-213.
84. *Шаймуратов Р.В.* Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980. 223 с.
85. *Шаидлер М.И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
86. *Шейдеггер А.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостехиздат, 1960. 250 с.
87. *Шестаков В.М.* Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М.: Изд. МГУ, 1965. 234 с.
88. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
89. *Шестаков В.М.* Вопросы терминологии в геогидродинамике // Водные ресурсы. 1984. Т. 8. № 5. С. 156-159.

90. *Шестаков В.М.* Гидрогеодинамика. М.: Изд-во МГУ. 1995. 368 с.
91. *Щелкачев В.Н.* Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Доклады АН СССР. 1946. 52. № 2. С. 103-106.
92. *Boulton N.S.* The drawdown of the water-table under non-steady conditions near a pumped well in an unconfined formation // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. 1954. 3. P. 564-579.
93. *Boulton N.S.* Analysis of data from non-equilibrium pumping tests allowing for delayed yield from storage // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. 1963. 26. P. 469-481.
94. *Boulton N.S., Pontin J.M.A.* An extended theory of delayed yield from storage applied to pumping test in unconfined anisotropic aquifers // Journal of Hydrology. 1971. 14. P. 53-65.
95. *Boussinesq J.* Recherches theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1904. 10. P. 5-78.
96. *Bouwer H., Rice R.C.* Delayed aquifer yield as a phenomenon of delayed air entry // Water Resources Research. 1978. 14. P. 1068-1074.
97. *Herrera I., Minzoni A., Flores E.Z.* Theory of flow in unconfined aquifers by integrodifferential equations // Water Resources Research. 1978. 14. P. 291-297.
98. *Johnson M.L., Brutsaert W.F.* The transition problem in pumped aquifer // Water Resources Research. 1979. 15. P. 1266-1272.
99. *Neuman S.P.* Theory of flow in unconfined aquifers considering delayed response of the water table // Water Resources Research. 1972. 8. P. 1031-1045.
100. *Neuman S.P.* Analysis of pumping test data from anisotropic unconfined aquifers considering delayed gravity response // Water Resources Research. 1975. 11. P. 329-342.
101. *Neuman S.P.* Perspective on 'delayed yield' // Water Resources Research. 1979. 15. P. 899-908.
102. *Neuman S.P., Walter G.R., Bentley H.W., Ward J.J., Gonzalez D.D.* Determination of horizontal aquifer anisotropy with three wells // Ground Water. 1984. 22. № 1. P. 66-72.
103. *Theis C.V.* The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage // Transactions. American Geophysical Union. 1935. 16. P. 519-524.
104. *De Wiest R.J.M.* History of the Dupuit-Forchheimer assumptions on groundwater hydraulics // Transactions of the ASAE. 1965. 8. P. 508-509.
105. *Walton W.C.* Comprehensive analysis of water-table aquifer test data // Ground Water. 1978. 16. P. 311-317.
106. *Walton W.C.* Progress in analytical groundwater modeling // Journal of Hydrology. 1979. 43. P. 149-159.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что линейный закон фильтрации (закон Дарси) справедлив для движения воды, нефти и других жидкостей в большинстве пористых, трещиноватых и закарстованных пород при большом диапазоне гидравлических градиентов (градиентов давления или напора) и скоростей фильтрации. На его основе в настоящее время базируется большинство теоретических исследований фильтрации, и интерпретируются опытные работы.

Вместе с тем, на практике в ряде случаев нелинейность течения жидкости становится существенной, а иногда и определяющей. Это обуславливает необходимость экспериментального и теоретического изучения нелинейной фильтрации, главной целью которого является установление границ применимости закона Дарси и, соответственно, выводов теоретических построений и практических исследований, базирующихся на нем, а также разработка методических приемов, обеспечивающих опытную регистрацию параметров нелинейности фильтрации.

2.1. Об уравнении движения подземных вод в фильтрационной модели

Одной из самых спорных и мало исследованных с точки зрения соответствия масштабу осреднения течения проблем фильтрационной модели является обоснование уравнения движения подземных вод (ПВ).

В 1856 г. французский инженер-гидротехник А. Дарси опубликовал результаты своих экспериментальных исследований фильтрации воды через пористую среду (в экспериментах использовался песок). Варьируя перепадом давлений Δp на концах горизонтальной трубки поперечным сечением ω , заполненной песком, при постоянной длине образца пористой среды ΔL , и длиной этого образца при постоянном Δp , он установил, что "... объем воды, который протекает через слой песка с данными свойствами, пропорционален давлению и обратно пропорционален толщине слоя песка" (цитируется по [14]), иными словами

$$q = \omega K \frac{\Delta p}{\Delta L}, \quad (2.1)$$

где q – объемный расход потока воды; K – коэффициент пропорциональности для зависимости $\frac{q}{\omega} \equiv v = f\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)$; v – скорость фильтрации. Коэффициент пропорциональности в выражении (2.1) есть уже характеристика проводящей среды –

коэффициент фильтрации. Так, эмпирическим путем А. Дарси вывел линейный закон фильтрации, получивший впоследствии его имя.

Использованный в этих экспериментальных исследованиях методический подход и способ интерпретации их результатов, строго говоря, не были оригинальными. Как верно отмечает А.Е. Гуревич [39], Дарси шел по уже проторенной дорожке – к 1856 г. были открыты основные законы переноса: в 1822 г. – закон Фурье для потока тепла; в 1827 г. – закон Ома для потока электричества; в 1855 г. – по аналогии с законом Фурье был постулирован закон Фика для диффузионного потока. Тем более что у Дарси была прямая аналогия в виде вытекающего из указанных законов выражения для течения жидкости в тонких трубах, установлено в 1839-1841 гг. Пуазейлем и Гагеном.

Эти и подобные им законы, выявленные на основе эмпирически установленных связей между наблюдаемыми величинами (в нашем случае между потоком воды и движущей силой), называются феноменологическими [8, 10, 11, 61, 73, 82]. Важнейшей особенностью таких законов является та, что построение их формально совершенно безразлично к природе описываемого процесса, оно вообще не использует какие-либо представления о внутренней сущности явления: для фильтрационного потока, например, было установлено только – для любого образца проводящей среды q пропорционален Δp . Изучение процессов переноса подобным образом является предметом феноменологической термодинамики неравновесных процессов [39, 61, 82].

Вместе с тем, к настоящему времени экспериментально установлено, что во многих случаях прогнозы фильтрации с использованием моделей, базирующихся на линейном уравнении движения жидкости, не оправдываются (в частности, при малых, близких к естественным, градиентах давления и скоростях течения, и, наоборот, при больших, существенно превышающих естественные, градиентах и скоростях). Значительно раньше эта проблема встала при проектировании разработки нефтяных месторождений – нелинейность закона фильтрации при малых градиентах давления является одной из основных причин формирования застойных зон в краевых частях областей влияния нефтяных скважин, а, следовательно, снижения нефтеотдачи продуктивных пластов. С другой стороны, в эксплуатационных скважинах снижение давления, необходимого для достижения заданного отбора нефти, оказывалось существенно большим, чем это следовало из теории; этот эффект связывается обычно с проявлением инерционных сил, также определяющих нелинейность закона фильтрации, только при больших градиентах и скоростях течения. Очевидно, что и основные результаты теории нелинейной фильтрации получены применительно к добыче нефти.

В расчетах отбора ПВ и дренажа территорий обычно оценивается либо максимальное снижение давления (уровня ПВ) в наиболее нагруженной части (точке) водоносного пласта при заявленном водоотборе, либо минимальное снижение уровня на заданном расстоянии от дрены. Основное отличие таких расчетов – построение применительно к системам, запасы воды в которых в силу ее круговорота постоянно возобновляются. Питание ПВ берется как стохастическая величина, имеющая некоторую произвольно определенную вероятность и существенно огрубляющая расчеты, так что вроде бы отпадает необходимость учета еще и нелинейности закона фильтрации при малых градиентах давления (правда в лю-

бом случае обязательным остается учет нелинейности закона фильтрации при больших градиентах и скоростях). Однако уже в рамках такого подхода многие исследователи считают его обязательным для уточнения расхода потоков ПВ, перетока их через слабо проницаемые отложения.

Сложившееся положение нельзя признать удовлетворительным, так как расчеты фильтрации ПВ при подобном подходе строятся на базе моделей, содержащих систематические погрешности, величина и знак которых неизвестны. Соответственно большое значение приобретает практическая реализация теоретических построений о течении ПВ при критических градиентах давления в направлении обоснования критериев применимости закона Дарси, построения методических приемов оценки фильтрационных параметров. А необходимость учета нелинейности закона фильтрации связывается и с другими "традиционными" задачами: анализом закономерностей водоотбора и дренажа; уточнением условий взаимодействия выработок и т.п. [3, 5, 7, 14].

Анализ уравнений в (1.15) показывает, что закон фильтрации не следует из самой фильтрационной модели, он должен быть в ней задан. Весьма показателен в этом плане пример попытки термодинамического обоснования закона фильтрации, предпринятой А.В. Костериным [43]. Им диссипация энергии в единице объема пористой среды представлена в виде

$$\Phi = p_i \bar{v}_i, \quad (2.2)$$

где $p_i = (-\nabla P)_i$; P – среднее давление жидкости на единицу площади пористой среды; ∇ – как и прежде, оператор Гамильтона.

Билинейная форма (2.2) с точностью до постоянного множителя, равного абсолютной температуре, совпадает с производством энтропии. При этом p_i и \bar{v}_i предлагается считать термодинамическими силами и потоками соответственно.

Автор [43] сам обращает внимание на то, что различные варианты термодинамической теории приводят к различным формам закона фильтрации, иными словами, выбор вида уравнения движения ПВ целиком определяется произволом исследователя. Для объективизации выбора необходима критериальная оценка, в качестве которой по нашему мнению безальтернативно может быть использовано экспериментальное установление вида закона фильтрации. А если оно проделано, т.е. закон фильтрации установлен, есть ли необходимость его еще и термодинамического обоснования? С этой точки зрения выражение (2.2) представляет собой лишь наиболее обобщенную запись уравнения движения жидкости в пористой среде, и именно как обобщение его и следует рассматривать, не пытаясь с его помощью обосновывать вид этого уравнения.

Такой подход к обоснованию закона фильтрации, строго говоря, не может считаться оригинальным. Например, ранее в [1, 39] рассматривались очень простые интерпретации линейного закона фильтрации.

Вообще же некоторые сведения о законе фильтрации можно получить, исходя из самых общих представлений [10, 11].

Выделим, как и в [10], вокруг точки пористой среды некоторый элементарный объем; поле скоростей фильтрации в этом объеме, как уже указывалось ранее, можно считать непрерывным, а все параметры среды и жидкости – постоянными.

ными. Нельзя пренебречь только изменением давления (определяемым его градиентом), как бы мало оно не было, поскольку при постоянном по пространству давлении (термодинамическая сила из (2.2) равна нулю) движение жидкости полностью отсутствовало бы. Отсюда следует основное предположение при установлении вида закона фильтрации. Оно состоит в том, что вектор скорости фильтрации в выбранной точке определяется свойствами жидкости, пористой среды и градиентом давления [10]:

$$\vec{v} = -c \operatorname{grad} p, \quad (2.3)$$

где c – некоторая скалярная величина, зависящая от модуля вектора скорости v и учитывающая свойства жидкости и проводящей среды. Остальные обозначения прежние.

Пористая среда может быть охарактеризована геометрическими параметрами – характерным размером l_n , активной пористостью n , безразмерными показателями кривой распределения пор по размерам $f(n)$ и др. В систему определяющих величин включаются также такие параметры жидкости, как плотность ρ и вязкость η , входящие в уравнения количества движения (следствием этих уравнений и должен быть закон фильтрации). Вместе с тем, параметр ρ , характеризующий состояние жидкости и представляющий инерционную составляющую движения, можно исключить из числа определяющих вследствие исключительно малых скоростей движения ПВ.

Анализ размерностей этих величин, выполненный в работах [10, 11], позволил установить, что

$$c = \frac{l_n^2}{\eta f(n)}. \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \operatorname{grad} p, \quad k = \frac{l_n^2}{f(n)}, \quad \vec{v} = -K \operatorname{grad} H. \quad (2.5)$$

Здесь k – как и прежде, проницаемость среды, имеющая размерность площади; она не зависит от свойств жидкости и представляет собой геометрическую характеристику пористой среды. Остальные обозначения прежние.

Тот факт, что масштабы осреднения течения и их соотношение вида (1.1) не являются классификационными признаками (т.е. то, что одна модель движения ПВ не следует из другой), позволяет сделать заключение о нецелесообразности многочисленных попыток получить закон фильтрации путем осреднения уравнений Навье-Стокса; такая попытка предпринята, например, в [92]. Любой такой вывод сводится в итоге к попытке вычислить проницаемость по известной геометрической структуре пористой среды [10]. А в этом случае возникает то самое противоречие, заставляющее переходить от физического описания движения ПВ к фильтрационной феноменологической модели. Реально на практике это противоречие реализуется принципиальной невозможностью оценить геометрическую структуру проводящей среды.

Кроме того, в систему уравнений Навье-Стокса, как и в фильтрационную модель, входит свое уравнение движения; его также необходимо в эту систему за-

давать. Поэтому даже если удалось бы каким-то образом реализовать оценки геометрической структуры среды, то полученное выражение "закона фильтрации" целиком определялось бы видом этого уравнения движения, т.е. проблема обоснования закона фильтрации не исчезла бы, а возникла на другом уровне описания фильтрации. Некоторые модели и обзоры моделей, в которых анализируется связь проницаемости с геометрией пористой среды, представлены в работах [36, 50, 51, 52, 63, 65, 66, 85, 87, 92] и др.

Ранее уже подчеркивалось, что линейный закон фильтрации имеет широкую область приложений; на его основе получены основные результаты теории фильтрации. Существуют и ограничения его применения; к настоящему времени экспериментально твердо установлено – линейный закон нарушается в областях больших и малых скоростей движения жидкостей через пористые среды. Кроме того, при весьма кратковременном возбуждении водоносного пласта начинают проявляться релаксационные процессы, также обуславливающие отклонения реальной фильтрации от закона Дарси [23]. Несоблюдение принципов осреднения течения и в этих случаях вносит противоречия в понятийную базу гидромеханической и гидравлической фильтрационных моделей.

Уравнение движения ПВ при больших скоростях представляется в виде

$$\text{grad } H = -\frac{1}{K} \bar{v} - \frac{v}{C^2} \bar{v} \quad (2.6)$$

(здесь C – константа, остальные обозначения прежние), где второе слагаемое обуславливает потери напора от действия сил инерции. Выражение (2.6), носящее название двучленного закона фильтрации, впервые предложено Форхгеймером (*Forchheimer*) [81]. Справедливость его и хорошая согласованность с данными экспериментальных и натурных наблюдений установлены многочисленными исследованиями [2, 10, 36, 44, 45, 46, 58, 65, 66, 76, 77, 79, 83, 85, 92, 97, 100] и др.

Большое число публикаций посвящено выяснению физического смысла соотношения (2.6), из которых необходимо упомянуть статьи В.М. Насберга [58], Е.М. Минского [45, 46], С.А. Христиановича [83] и др. [10, 11, 36, 76, 83, 92]. Однако наиболее простым и корректным представляется обоснование двучленного закона фильтрации, данное в [10], – формула (2.6) совпадает с первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора функциональной зависимости между параметрами фильтрационного потока и проводящей среды вида (2.5), построенной при помощи π -теоремы теории размерности.

Второе слагаемое в правой части выражения (2.6) формально совпадает с законом Шеши-Краснопольского движения жидкости в порах или трещинах. С опорой на это формальное совпадение появление квадратичного члена в уравнении закона фильтрации часто связывают с инерционной составляющей сопротивления движению жидкости, а точнее – с турбулизацией течения. И если обозначение второго слагаемого в правой части (2.6) как инерционная составляющая сопротивления движению возражений не вызывает, то феноменологическая фильтрационная модель течения жидкостей в проводящих средах исключает представление о турбулизации течения; в отдельных порах или трещинах при больших градиентах давления движение может быть турбулентным, однако для элементарного объема проводящей среды течение остается потенциальным [27, 31] (т.е. безвихревым), но с иным, в сравнении с законом Дарси, механизмом обмена

количеством движения. В подтверждение этому Г.И. Баренблатт [10] показал, что уже порядок чисел Рейнольдса, рассчитанных по диаметру зерен или пор проводящей среды, при которых сказываются отклонения от линейной зависимости $\bar{v} = f(\text{grad } p)$, указывает на неправомерность рассмотрения течения при больших градиентах давления как турбулентного. Отсутствие турбулентности, т.е. флуктуаций скорости фильтрации во времени, доказано также прямыми опытами [97].

Первые опытные исследования фильтрации воды в пористых средах при малых градиентах давления (напора), по-видимому, принадлежат Кингу (King) [94]. Его выводы о нарушении линейного закона с уменьшением градиентов позже подтвердились многочисленными экспериментами; результаты и обзоры их приведены в работах [3, 5, 7, 10, 38, 59, 96] и др., — причем Скавинский (Skawinski) [96] экспериментально показал нарастание отклонения от линейного закона с увеличением размеров зерен фильтрующей среды. Надо отметить, что часть исследователей вообще отрицает возможность отклонения фильтрации от закона Дарси, пытаясь объяснить зарегистрированные в опытах фильтрационные аномалии либо погрешностями измерений и вычислений, либо проявлениями каких-то (сопутствующих фильтрации) физических процессов [17, 64].

Существенно подчеркнуть следующее. Фильтрационные аномалии при малых градиентах напора исследовались до сих пор, главным образом, в глинистых грунтах, в рыхлых же крупнозернистых отложениях (в песке и т.п.) практически не рассматривались. Из литературы известны, пожалуй, лишь опыты Скавинского [96] по исследованию закономерностей фильтрации различных растворов через искусственные проводящие среды (кварцевые зерна), близкие к однородным мелко-, средне-, крупнозернистым пескам и грануло, и опыты И.Б. Муратова и М.А. Саттарова [56] в образцах неоднородного песка с большим содержанием глинистых частиц.

В результате этих экспериментов возникли дополнительные проблемы с их интерпретацией. Так, вынос глинистых частиц, по мнению А.Г. Арье [5], является причиной погрешности экспериментов, результаты которых приведены во второй названной статье, выражающейся неоднородностью фильтрационных свойств пористой среды в области сравнительно больших градиентов. Однако аналогичная интерпретация похожего графика зависимости экспериментально определенного коэффициента фильтрации K от градиента напора I для опытов Скавинского принципиально не применима, так как им использовались искусственные фильтрующие среды (стеклянные и кварцевые зерна) и параметры этих сред в процессе исследований не менялись.

Поэтому автором совместно с И.И. Гринбаумом для проверки гипотезы о нарушении линейного закона фильтрации в песке были осуществлены эксперименты, в ходе которых проводились наблюдения за скоростью фильтрации при малых градиентах напора [34]. Опыты выполнялись в фильтрационном приборе (рис. 2.1), представляющем собой вертикальную цилиндрическую трубу (1) с внутренним сечением $\omega = 0,312 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, длиной 0,620 м и базой пьезометров $l = 0,510 \text{ м}$. Постоянство фильтрационного потока и показаний пьезометров (2) достигалось поддержанием стабильности уровней воды в верхней (3) и нижней

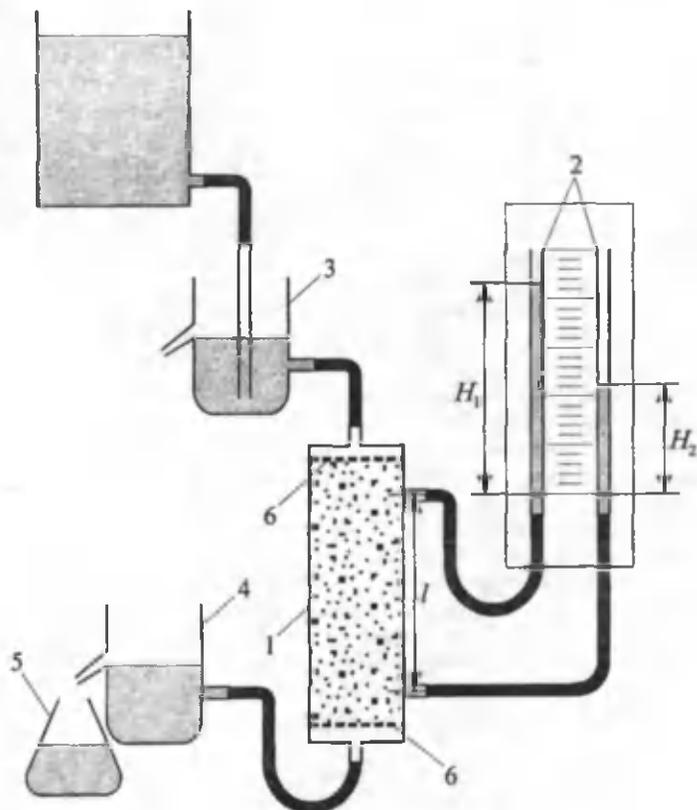


Рис. 2.1. Схема лабораторной установки для исследования течения воды в песке при малых градиентах давления. Обозначения см. в тексте

(4) напорных колонках. Расход воды, проходящей через песок, на протяжении каждого опыта определялся объемным способом – по времени наполнения мерной емкости (5). Опыты выполнялись в изотермических условиях при температуре воды в $20 \pm 0,5^\circ\text{C}$.

В ходе экспериментов модуль вектора скорости фильтрации v в диапазоне изменения градиента напоров $0,009-1,700$ с предельно допустимой относительной погрешностью $\delta_v \leq 1\%$ вычислялся по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega},$$

где Q – расход потока воды, проходящей через прибор.

На протяжении каждого опыта значение расхода считалось представительным, если после стабилизации уровней воды в пьезометрах совпадали величины не менее трех замеров подряд. При этом использовались мерные емкости ($92 \pm 0,5$ и $260 \pm 0,5$ см³), предельная относительная погрешность замера объема воды V по которым δ_V не превышала 0,6 %. Эти емкости обеспечивали продолжительность их наполнения (при предельно допустимой погрешности отсчета времени по одному и тому же секундомеру в 0,2 с): первая в интервале градиентов напора 0,009-0,030 соответственно ~ 66-18 мин; вторая в интервале градиентов напора 0,030-1,700 соответственно ~ 50-0,9 мин.

Модули градиентов напора оценивались как разность показаний пьезометров (отсчет осуществлялся с точностью до 0,2 мм), отнесенная к их базе:

$$I = \frac{H_1 - H_2}{l}$$

Предельно допустимая относительная погрешность δ_I оценок градиентов не превышала 10 %.

Эффективные (текущие) значения коэффициента фильтрации K рассчитывались на основе установленных опытным путем величин v и I :

$$K = \frac{v}{I}$$

Песок, загруженный в фильтрационный прибор, для устранения возможно выноса потоком воды частиц был тщательно отмыт от мелкозернистых (преимущественно глинистых) фракций; на рис. 2.2 показан его гранулометрический состав. В фильтрационном приборе он надежно фиксировался с помощью пробок (б), изготовленных из металлической сетки. Через песок фильтровалась предварительно прокипяченная природная вода с минерализацией ~ 0,3 г/дм³, чем достигалось более полное соответствие экспериментов реальным условиям течения

жидкости в пористой среде, а также исключалось возможное влияние на результаты опытов растворенных в воде газов.

В процессе экспериментальных исследований было осуществлено 40 серий опытов (2-4 опыта в каждой), причем последовательность серий строилась как в порядке возрастания, так и в порядке убывания градиен-

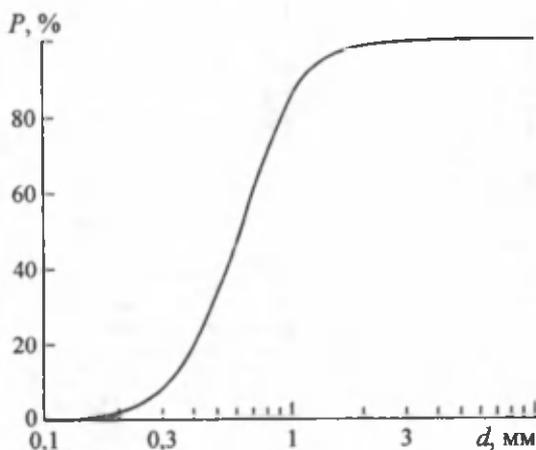


Рис. 2.2. Интегральная кривая гранулометрического состава песка

тов напора. Такое количество опытов в серии и относительно большое время проведения каждого из них обеспечивало существенное превышение продолжительности эксперимента над временем релаксации вязкости. Последнее контролировалось совпадением опытных величин скоростей фильтрации в серии. При этом повторение в разных сериях одинаковых условий проведения опытов при совпадении расчетных значений коэффициента фильтрации важно в том смысле, что свидетельствует о стабильности свойств проводящей среды в процессе экспериментальных исследований.

В работе Скавинского проанализировано также влияние размеров проводящей среды на результаты опытов. Для этого выполнены замеры коэффициентов фильтрации в пробах длиной 9,4; 17,5 и 45,9 см (при одинаковом диаметре кварцевых зерен). Эти замеры показали, что длина пробы не сказывается на закономерности фильтрации, поэтому в дальнейшем Скавинским использовался фильтрационный прибор с внутренней площадью поперечного сечения в 10 см^2 и длиной пробы проводящей среды в 10 см.

Таким образом, размеры фильтрационного прибора в опытах авторов обеспечивали вполне представительные экспериментальные данные в смысле стабильности свойств проводящей среды (последнее еще и контролировалось до ходу опытов), тем более что оценка их представительности, компетентности [74, 75] применительно к натурному объекту не входило в задачу исследований, так как экспериментально выполнялась лишь качественная оценка общих закономерностей фильтрации при малых градиентах напора, т.е. пористая среда моделировала саму себя.

В этой связи необходимо заметить следующее. Неоднородность фильтрационных свойств пористой среды при возрастании градиентов напора в опытах Скавинского [96] нарастает с увеличением размеров зерен (рис. 2.3). Как уже говорилось ранее, выносом глинистых частиц этот эффект объяснить нельзя. По мнению автора [34] он обусловлен несоответствием масштаба осреднения течения размерам осредняемого течения, т.е. размерам (поперечным) пробы проводящей среды. Так, с

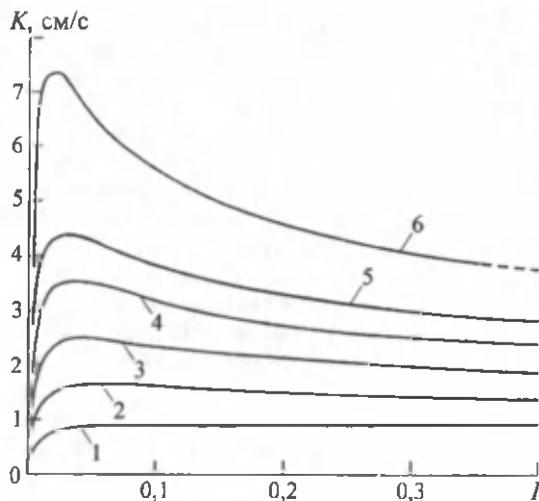


Рис. 2.3. Экспериментальные зависимости текущего значения коэффициента фильтрации от градиента напора при различных размерах зерен проводящей среды (по [96]), мм: 1,0-1, 2 (1); 1,2-1,6 (2); 1,6-2,0 (3); 2,0-3,0 (4); 3,0-4,0 (5); 4,0-5,0 (6)

увеличением диаметра зерен растет площадь поперечного сечения каждой поры при уменьшении их числа и общем снижении пористости. С достижением площади пор определенной величины, так что она становится соизмеримой с площадью поперечного сечения потока воды, феноменологическая фильтрационная модель для описания течения уже неприменима: течение перестает быть потенциальным (т.е. безвихревым) [27, 31]. Соответственно с увеличением градиента напора начинается существенно проявляться инерционная составляющая сопротивляющая движению жидкости, обуславливающая аномалию графика $K(I)$, аналогичную полученным в работе Сквиньского.

Результаты исследований приведены на рис. 2.4. Из экспериментального графика видно, что коэффициент фильтрации имеет максимальную величину и остается постоянным (в пределах погрешности определения) лишь при достаточно больших градиентах напора ($I > 0,04$). Для этого участка графика он имеет смысл коэффициента фильтрации K_0 , отвечающего течению при линейном законе. При снижении градиента ниже величины $I = 0,04$ коэффициент фильтрации закономерно уменьшается.

Следует подчеркнуть, что зарегистрированное отклонение от линейного закона фильтрации не может быть отнесено на счет погрешностей опытов; максимальная величина погрешности экспериментально определенного K не превыша-

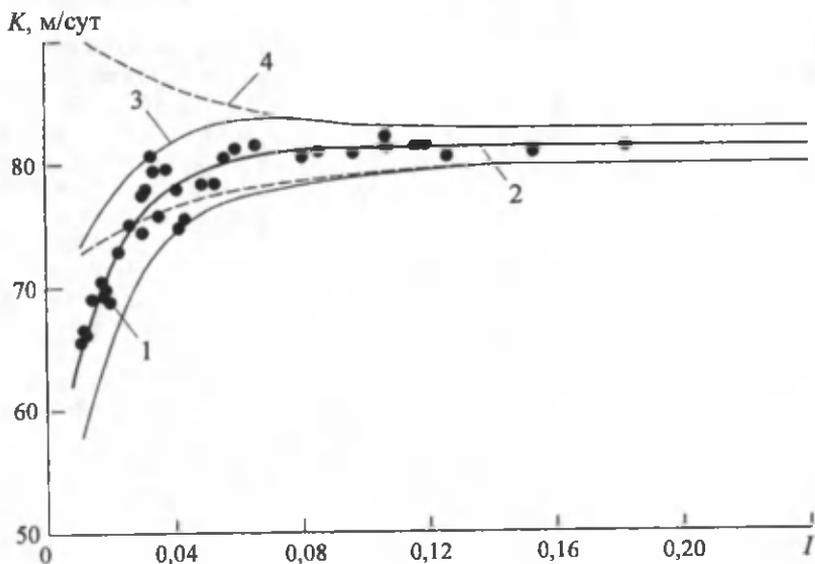


Рис. 2.4. Экспериментальный график зависимости текущего значения коэффициента фильтрации от градиента напора: 1 - экспериментальные данные; 2 - осредняющая кривая; 3 - граница доверительного интервала экспериментальных данных; 4 - граница доверительного интервала при $K = K_0$

ет 11 %, в то время как максимальное измеренное отклонение осредняющей кривой от значения K_0 составляет более 22 % (по отношению к K_0).

Таким образом, выполненные нами экспериментальные исследования течения воды через пористые среды при малых скоростях подтверждают отклонение от линейного закона фильтрации в области малых градиентов не только в глинистых породах, в которых оно экспериментально установлено и анализируется сравнительно давно, но и в значительно более крупнозернистых рыхлых породах – песке, гравии [34].

Для физической интерпретации наблюдаемой аномалии привлекаются обычно самые разнообразные соображения [1, 3, 5, 7, 14, 17, 53, 59, 71, 72] и мн. др. Однако излишне будет подчеркнуть еще раз, что с позиций макроскопической феноменологической теории фильтрации не имеет решающего значения тонкая физическая природа процесса движения реальной жидкости в реальных порах или трещинах. Не следует забывать – фильтрационная модель является эквивалентом не природного процесса переноса, а фиктивного (модельного) процесса течения некоторой модельной сплошной среды, обладающей свойствами идеальной жидкости и текущей по всему объему проводящей области. Поэтому для фильтрационной модели важны интегральные характеристики процесса, применимые к некоторому макрообъему проводящей среды. При этом необходимо только, чтобы параметры идеальной жидкости и проводящей среды обеспечивали хорошее согласование натуральных и модельных экспериментов.

Отсюда, в частности, следует такой вывод: результаты исследований фильтрации воды в проводящей среде или отдельных капиллярах не могут привлекаться для обоснования (или подтверждения) той или иной физической гипотезы относительно, например, аномалий течения жидкости. В таких экспериментах характерный размер используемых технических средств равен масштабу осреднения течения или превышает его [19, 25, 27, 31], и, следовательно, подобные исследования не позволяют вообще судить о физическом состоянии воды в проводящей среде, ее взаимодействии с твердой поверхностью пор или трещин. Соответственно результаты одних и тех же экспериментов можно трактовать совершенно с разных позиций, что и встречается на практике. Этот вывод отражает фундаментальное положение, лежащее в основе феноменологической фильтрационной модели – уравнение движения, входящее в определяющую систему уравнений такой модели (наряду с уравнениями неразрывности и состояния), в эту модель задается, а не следует из нее.

Аналогично, при обобщении уравнения движения на случай нелинейного течения используется несколько подходов [59]. В соответствии с одним из них выполняется формальная аппроксимация экспериментальной зависимости между скоростью фильтрации и градиентом давления. Другой предполагает применение для приближения процесса фильтрации воды уравнений, полученных для простейших моделей проводящих сред; обычно используются зависимости Букингема-Рейнера или Воларовича-Гуткина [14, 59] и др., описывающие течение вязкопластичной жидкости в цилиндрических и плоских капиллярах как феноменологический процесс (см. раздел I) и основанные на реологическом уравнении со-

стояния Шведова-Бингама. Проводящая среда представляется в этом случае набором (пучком) таких капилляров.

Первый подход полнее отвечает феноменологической модели фильтрации, т.е. позволяет описывать осредненные для всего элементарного объема проводящей среды характеристики, обозначать действие объемных сил. Однако введенные в уравнения фильтрации параметры не имеют физического обоснования, что ограничивает область приложений полученных зависимостей выборками экспериментальных данных и не дает основания для экстраполяции их за пределы этих выборок.

Второй на первый взгляд позволяет подвести серьезную физическую основу под уравнение закона фильтрации. Вместе с тем, нерегулярность структуры порового пространства с одной стороны исключает возможность представления проводящей среды пучком капилляров, а с другой, не позволяет изучать фильтрацию воды обычными методами гидромеханики, т.е. решением уравнения течения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор или трещин [10, 11, 61, 73]. Именно поэтому и осуществляется переход от физического описания течения к феноменологическому фильтрационному осреднением по масштабу, равному характерному размеру некоторого объема статистически однородной проводящей среды – бесконечно малого элемента системы жидкость – проводящая среда, физически вместе с тем намного превышающего размеры пор и зерен среды [19, 27, 31].

В качестве третьего подхода можно условно назвать попытку А.Г. Арье [3, 5, 7] обосновать нелинейный закон фильтрации в области малых градиентов давления с позиций молекулярно-кинетической теории жидкостей и газов. При оценке закономерностей взаимодействия фильтрующейся жидкости (воды) с твердым скелетом пористой среды (внутренней поверхностью отдельно взятой поры или трещины) использовался масштаб осреднения течения l_{min} , много меньший характерного размера поры или трещины (радиуса поры или раскрытости трещины). Однако в итоге, в процессе осреднения течения воды по характерному размеру поры или трещины, для вычисления средней скорости движения жидкости (или расхода потока) в поре или трещине А.Г. Арье получены уравнения, практически полностью совпадающие с уравнениями Букингема-Рейнера и Воляровича-Гуткина. Далее, при обобщении полученных уравнений для фильтрационной модели А.Г. Арье использовалось простейшее представление о структуре пористой среды – последняя представлялась набором (пучком) капилляров. Таким образом, и в этом случае, неопределенным остается переход от физического описания движения жидкости к фильтрационной модели, соответственно, не ясной становится применимость полученных А.Г. Арье уравнений для описания процесса фильтрации жидкости в пористой (или трещинной) проводящей среде.

Целесообразно поэтому сформулировать подход к обобщению закона фильтрации при малых градиентах давления, оставаясь в рамках понятийной базы и терминологии феноменологической фильтрационной модели.

Ранее со ссылкой на работы [10, 11] уже было показано – основное предположение при установлении вида закона состоит том, что вектор скорости фильтрации в выбранной точке определяется свойствами жидкости, проводящей среды и градиентом давления (см. (2.4) и (2.5)). Единственным параметром системы во-

да – проводящая среда, "ответственным" за вероятное нарушение линейного закона фильтрации, может быть только вязкость жидкости; экспериментально и теоретически установлены аномалии вязкости воды, т.е. отличия ее от модельной ньютоновой, наиболее существенно проявляющиеся в области малых градиентов давления (малых напряжений сдвига) [25]. Кроме того, прямыми экспериментами установлено, что с ростом температуры фильтрующейся воды отклонения от линейного закона фильтрации уменьшаются и при температуре 60-70°C исчезают вовсе [14, 38].

Воспользовавшись принципом пропорциональности, предложенным в [37], совершенно аналогично концепции П.А. Ребиндера [69] об эффективной вязкости жидкости для аппроксимации течения в отдельной поре или трещине (см. подраздел 1.2), введем такое же представление в феноменологическую фильтрационную модель [25]. В соответствии с этой концепцией, вода, как и все жидкости с водородными связями, рассматривается как тиксотропная система с эффективной вязкостью

$$\eta(\text{grad } p) = \frac{k |\text{grad } p|}{v} \text{ или, если перейти от давления к гидростатическому напору } - \eta(\text{grad } H) = \frac{k |\text{grad } H|}{g \rho v}$$

(здесь g – ускорение свободного падения; ρ – плотность фильтрующейся жидкости; остальные обозначения прежние).

При этом под эффективной вязкостью в фильтрационной модели, как и в физическом представлении движения жидкости, следует понимать итоговую характеристику, описывающую равновесие для всего макрообъема проводящей среды между процессами разрушения и восстановления структуры жидкости.

Структурированные жидкости имеют две области градиентов давления (или напора) с постоянными значениями вязкости (см. рис. 2.5). В одной из них, где структура практически не разрушена, вязкость имеет наибольшее значение η_0 , в другой, где структура фильтрующейся жидкости разрушена полностью, наименьшее – η_1 . Кривая $v = f(\text{grad } H)$ аппроксимируется несколькими прямыми, угловые коэффициенты которых соответствуют минимальной η_1 , максимальной η_0 и пластической вязкости η_m ; последняя, как и ньютонова, не зависит от скорости фильтрации.

Как уже отмечалось в подразделе 1.2, такая аппроксимация

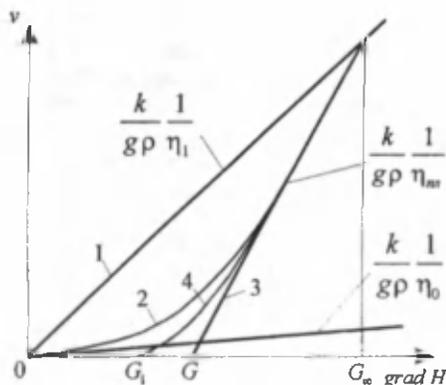


Рис. 2.5. Реологические модели жидкости: 1 - ньютонова; 2 - неньютонова (дилатантная); 3-4 - вязкопластичная (3 - модель Бингама; 4 - модель Шведова)

является вынужденной, так как использование понятия, обозначенного термином "эффективная вязкость", при решении прикладных задач встречает серьезные математические трудности и заставляет ограничиваться рассмотрением более простых моделей (рис. 2.5), например, модели Бингамовского пластика, которую в терминах фильтрационной феноменологической теории можно представить следующим образом:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\eta_{na}} \left(\text{grad } p - G \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right), \quad |\text{grad } p| \geq G. \quad (2.7)$$

Здесь G – предельное значение начального градиента давления (или напора).

Напомним, что термин "начальный градиент" введен Н.П. Пузыревским и обозначает градиент давления, при котором фильтрация (в механическом смысле) начинается.

В [12, 47, 48, 49, 54, 55, 62, 72] предложены гиперболическая, степенная и полигональная аппроксимации реологической кривой. В целом эти модели правильнее приближают реальный процесс в области малых градиентов давления (или напора), однако выражение (2.7) имеет асимптотический смысл, описывая движение при относительно больших скоростях фильтрации; в области градиентов, меньших G , фильтрационный перенос трансформируется в бародиффузионный [25, 67]. В такой интерпретации закон фильтрации (2.7) описывает широкий класс нелинейных течений [10].

Нетрудно заметить, что уравнение движения (2.7) совпадает с эмпирической моделью Т.Н. Пузыревой [68]:

$$v = K_0 (I - G), \quad (2.8)$$

где $K_0 = \frac{k g \rho}{\eta}$ – коэффициент фильтрации, отвечающий закону Дарси; I – как и прежде, модуль текущего значения градиента гидростатического напора H ($H = \frac{p}{g \rho}$).

Соотношение (2.8) целесообразно преобразовать к виду

$$K = K_0 \left(1 - \frac{G}{I} \right) \quad \text{или} \quad \frac{K}{K_0} = 1 - \frac{G}{I} \quad (2.9)$$

(здесь K – эффективное текущее значение коэффициента фильтрации), на основе которого удобно обрабатывать экспериментальные данные.

На рис. 2.6 показаны результаты исследований фильтрации воды в песках при малых градиентах напора, выполненных при участии автора [34]. Как видно из рис. 2.6а, опытные точки хорошо ложатся на прямую с угловым коэффициентом $G \cong 0,0022$.

Иное обобщение закона предлагает А.Г. Арьс [3, 5, 7]:

$$v = K_0 I \left(1 - \frac{G_1}{I} \right)^2. \quad (2.10)$$

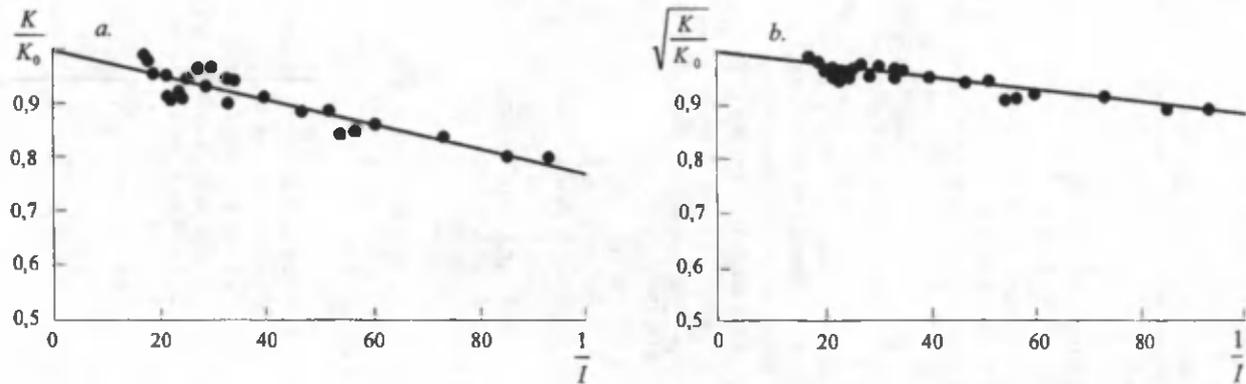


Рис. 2.6. Зависимость относительной величины коэффициента фильтрации от градиента давления при законе фильтрации с предельным градиентом (а) и отвечающем аппроксимации А.Г. Арье (б) по экспериментальным данным автора ($K_0 = 82,0$ м/сут)

Это уравнение можно, по-видимому, считать хорошим приближением модели Шведова (см. рис. 2.5). Преобразованное к виду

$$\sqrt{\frac{K}{K_0}} = 1 - \frac{G_1}{I}, \quad (2.11)$$

уравнение (2.10) позволяет наглядно интерпретировать экспериментальные данные; график зависимости (2.11) представляет собой прямую с угловым коэффициентом G_1 (см. рис. 2.6б). При этом следует различать значения G_1 в (2.10) и G в (2.8). Как показано на рис. 2.5 и 1.1, величина G соответствует напряжению сдвига τ_0 в модели Бингама, а G_1 — напряжению τ_1 в модели Шведова, поэтому $G_1 < G$. Например, для экспериментальной прямой на рис. 2.6б угловой коэффициент $G_1 \cong 0,0010$, что в 2,2 раза меньше углового коэффициента G прямой на рис. 2.6а.

Смешивание понятий о начальном градиенте G_1 и предельном G (как это допускается в [5]) приводит к неверному представлению о физике процесса. В соответствии с выводами из этих работ получается, что закон (2.10) обуславливает большие отклонения от фильтрации по Дарси, чем закон с предельным градиентом (2.8), а это противоречит используемым понятиям и экспериментальным данным, из которых следует — процессы фильтрации при законе Дарси и при законе с предельным градиентом являются предельными, крайними вариантами течения жидкости через проводящие среды (см. рис. 2.5). Все остальные известные аппроксимации течения в области малых градиентов напора (или давления) располагаются между ними. Кроме того, по Арье законы фильтрации (2.8) и (2.10) не совпадают в области относительно больших градиентов. Вместе с тем, уже запись выражений (2.9) и (2.11), а также возможность построения графиков на рис. 2.6 по одним и тем же экспериментальным данным свидетельствуют о таком совпадении [25].

Необходимо подчеркнуть, что наличие начального (или предельного) градиента в формулах вовсе не означает отсутствия переноса при меньших (в сравнении с предельным или начальным) градиентах давления; в этой области градиентов перенос выражается уже диффузионным, вернее, бародиффузионным переносом (при этом пока нет данных о том, что и для бародиффузионного переноса также существует свой начальный градиент давления). Соответственно под начальным (или предельным) градиентом следует понимать угловой коэффициент аппроксимирующих прямых [4, 25] (см. рис. 2.5), не вкладывая в это понятие более существенный физический смысл¹. В пользу такого представления о предельном (или начальном) градиенте говорит и то, что прямое экспериментальное

¹ Понятно, что величина расхода потока при бародиффузионном переносе, по крайней мере, на порядок меньше расхода фильтрационного потока. В этом смысле с позиций анализа фильтрационного потока бародиффузионным переносом можно пренебречь (при описании некоторых явлений это вполне допустимо и целесообразно — например, при описании релаксационной фильтрации ПВ), а тогда появляется формальное основание для придания начальному (или предельному) градиенту того физического смысла, что при градиентах, меньших начального, перенос вовсе отсутствует.

его определение не удастся [4, 64]. Повышение точности измерительной аппаратуры, используемой в опытах, позволяет при уменьшении градиента давления регистрировать бародиффузионный перенос [25, 67].

Для учета такого переноса в области $|\text{grad } p| < G$ (или $|\text{grad } p| < G_1$), например, аппроксимацию (2.7) целесообразно дополнить соотношением

$$\bar{v} = -\frac{k}{\eta_0} \text{grad } p,$$

где выражение $\frac{k}{\eta_0}$ эквивалентно коэффициенту фаялюкации [3, 5, 7], представляющему собой обобщенный параметр бародиффузии.

Таким образом, привлечение представлений о структурированности фильтрующейся жидкости позволяет обобщить нелинейный закон фильтрации в области малых градиентов давления (или напора). Этот подход обеспечивает достаточно полное и точное макроскопическое описание движения жидкости, соответствующее феноменологической модели фильтрации, за рамки которой, как известно, выходит установление вида уравнения движения. Такое представление может быть расширено, в том числе, и на обобщение линейного закона фильтрации – за счет использования реологической модели ньютоновой жидкости (см. рис. 2.5).

Весьма продуктивным представляется введение принципа пропорциональности, обеспечивающего качественное соотнесение теоретических и экспериментальных представлений, используемых для физического описания движения жидкости в порах или трещинах, с теоретическими и экспериментальными представлениями, используемыми в фильтрационной модели. Как известно, ценность физических моделей движения ПВ и выполняемых обоснований их (в том числе и с позиций молекулярно-кинетической теории жидкостей) заключается в том, что подобные модели дают самый общий вид уравнений движения жидкости, качественно применимых и в фильтрационных моделях. Однако параметры, входящие в эти уравнения, должны определяться в рамках фильтрационной модели, т.е. с помощью экспериментальных средств с характерным размером, соизмеримым с l_n .

Вообще необходимо обратить внимание на чисто субъективный фактор, во многом способствовавший широкому распространению теоретических и опытных исследований, основывающихся на линейной теории фильтрации, при том, что к настоящему времени накоплено множество фактов, свидетельствующих, по меньшей мере, о конкурентоспособности различных вариантов нелинейной теории. Этот фактор – несравненно большая простота и соответственно, разнообразие теоретических построений, базирующихся на законе Дарси. При этом решающим соображением, определяющим преимущественный выбор линейной теории, является то, что погрешности фильтрационной схематизации в большинстве случаев существенно превышают систематические погрешности на нелинейность фильтрации при использовании в фильтрационных расчетах линейной теории.

2.2. Об оценке инерционной составляющей сопротивления движению жидкости

Как видно из самого обоснования линейного закона фильтрации (закона Дарси), данного в работах [10, 11] (см. также подраздел 2.1), линейный закон должен нарушаться в области достаточно больших скоростей течения жидкости. Фильтрация при таких скоростях описывается зависимостью вида (2.6), в которой первое слагаемое учитывает потери напора, обусловленные фильтрационным сопротивлением от совокупного действия сил сопротивления каркаса проводящей среды и внутреннего трения движущейся жидкости, а второе – потери напора от действия сил инерции (при обосновании линейного закона фильтрации этими силами вследствие малых скоростей движения жидкости предлагалось пренебречь).

Подчеркнем здесь еще раз, что инерционная составляющая сопротивления движению жидкости проявляется только при достаточно больших скоростях движения. Такие скорости в водоносных (а также нефтяных и газовых) пластах возможны лишь в искусственно сформированных депрессиях вблизи центров возмущения (возмущающих скважин). Многочисленными экспериментами установлено, что вблизи возмущающих скважин практически всегда возникают дополнительные потери напора (по отношению к потерям, определяемым линейным законом фильтрации), чаще всего отождествляемые именно с инерционной составляющей и выражающиеся несоответствием измеренных величин понижения уровня рассчитанному из линейной теории фильтрации положению депрессионной поверхности. Такие экспериментально зарегистрированные дополнительные потери напора составляют от 20 до 87 % общего понижения уровня в возмущающих скважинах [41, 57, 99].

Рассмотрим в рамках гидравлической модели движения задачу о нестационарной фильтрации жидкости с учетом инерционной составляющей сопротивления при постоянном дебите возмущения напорного пласта, имеющую наибольшее практическое значение; решение этой задачи получено нами в [21].

Воспользовавшись принципом суперпозиций, перепишем уравнение движения (2.6) в виде следующей системы [21]:

$$\vec{v} = -K \operatorname{grad} H_1, \quad (2.12)$$

$$\vec{v} = -C \left| \operatorname{grad} H_2 \right|^\alpha \operatorname{grad} H_2, \quad (2.13)$$

где C – так же, как и K , скалярная величина, зависящая от модуля скорости v и учитывающая свойства жидкости и проводящей среды; $\alpha = -0,5$.

В работах [10, 11] показано, что при степенном законе фильтрации вида (2.13) решение основной для приложений задачи о движении жидкости с осевой симметрией при постоянном дебите возмущения автоматически. При этом распределение понижения напора в пласте S_2 в общем случае описывается уравнением

$$\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial S_2}{\partial r} \right)^{\alpha+1} \right] = \frac{\partial S_2}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{mC}{\mu^*}, \quad (2.14)$$

которое должно удовлетворять условиям

$$S_2(r, 0) = 0, \quad - \left[r \left(\frac{\partial S_2}{\partial r} \right)^{\alpha+1} \right]_{r=0} = \frac{Q}{C}, \quad S_2(\infty, t) = 0. \quad (2.15)$$

В уравнениях (2.14) и (2.15) S_2 – понижение уровня ПВ в точке водоносного пласта на расстоянии r от оси возмущающей скважины в момент времени t от начала возмущения, определяемое инерционной составляющей сопротивления движению жидкости; m – мощность водоносного пласта; κ – аналог пьезопроводности² пласта, определяющий скорость перераспределения напоров в пласте при фильтрации, подчиняющейся степенному закону вида (2.13); Q – постоянный дебит возмущения; μ^* – упругая емкость пласта; $\bar{C} = \frac{Q}{2\pi C m}$.

Решение задачи в общем виде сформулировано Г.И. Баренблаттом в [10] и имеет следующий вид:

$$S_2(r, t) = A t^{\frac{\alpha}{3\alpha+2}} f(\xi), \quad \xi = r \left(\frac{Q}{C} \right)^{\frac{\alpha}{3\alpha+2}} (\kappa t)^{-\frac{\alpha+1}{3\alpha+2}}, \quad (2.16)$$

$$A = (3\alpha + 2)^{-1} \alpha \left(\frac{Q}{C} \right)^{\frac{\alpha+2}{3\alpha+2}} \kappa^{-\frac{\alpha}{3\alpha+2}}.$$

Подстановка (2.16) в (2.14) дает уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \xi [f'(\xi)]^{\alpha+1} \right\} + \xi [(\alpha+1)\xi f'(\xi) - \alpha f(\xi)] = 0. \quad (2.17)$$

Оно, в свою очередь, должно быть решено при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi [f'(\xi)]^{\alpha+1} = \text{const} = (3\alpha + 2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}, \quad f'(\xi) \cong -B \xi^{-\frac{1}{\alpha+1}} \quad (2.18)$$

(здесь B – некоторая постоянная).

Далее, при $\xi \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$ или, что то же самое, $t \rightarrow 0$) функция $f(\xi)$ должна стремиться к нулю вместе со своими производными, причем таким образом, чтобы интеграл

$$M = \int_0^{\infty} \xi f(\xi) d\xi \quad (2.19)$$

оставался конечным [10].

Вид функции $f(\xi)$ исключительно сложен и до сих пор еще не установлен. Поэтому при отыскании его введем здесь некоторые допущения, позволяющие найти приближенное решение задачи [21]. Во-первых, в силу того, что инер-

² В настоящем разделе, как и в предыдущем, используется терминология, предложенная В.М. Шестаковым [88].

ционная составляющая сопротивления движению жидкости реально проявляется только при достаточно больших скоростях фильтрации, т.е. непосредственно вблизи возмущающей скважины, будем рассматривать только случай конечного r , причем $r \sim r_0$ (здесь r_0 — радиус возмущающей скважины). Во-вторых, вблизи возмущающей скважины после ее пуска быстро (на протяжении первых десятков минут) устанавливается квазистационарный режим фильтрации, при котором уровень ПВ снижается параллельно самому себе, и, следовательно, гидравлические градиенты и скорости в выбранных точках зоны квазистационарности остаются постоянными на всем протяжении возмущения. Соответственно величина потеря напора, обусловленная инерционной составляющей течения, не зависит от времени. Таким образом, второе допущение сводится к тому, что при отыскании решения рассматриваются моменты времени, превышающие контрольное время t_0 наступления квазистационарного режима.

Тогда интеграл (2.19), ограничивающий область существования решений уравнения (2.17), представим в виде [21]

$$M = \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi, \quad (2.20)$$

где ξ_0 — некоторое постоянное значение безразмерной комбинации параметров ξ , отвечающее конечному r и контрольному времени t_0 . На рис. 2.7 схематично показано соотношение слагаемых в (2.20).

В соответствии с принятыми здесь допущениями вторым слагаемым в правой части (2.20) можно пренебречь. В этом случае условия (2.18) позволяют установить, что

$$f(\xi) = -4\xi^{-1}. \quad (2.21)$$

Последнее выражение является решением дифференциального уравнения (2.17), причем и сама функция $f(\xi)$ и все ее производные с возрастанием ξ стремятся к нулю, а интеграл в (2.20) (без второго слагаемого) остается конечным в силу конечности ξ_0 .

Окончательно из (2.16) получаем следующее выражение для понижения уровня при степенном законе фильтрации ПВ вида (2.13), справедливое, естественно, для зоны квазистационарного режима движения жидкости [21]:

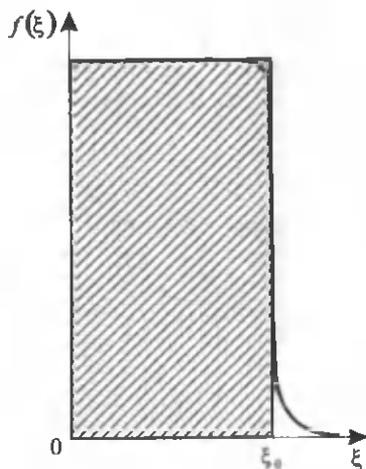


Рис. 2.7. Соотношение слагаемых в правой части уравнения (2.20); заштрихована площадь, соответствующая первому из них

$$S_2(r, t) = \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{1}{r}.$$

Здесь все обозначения прежние.

Полное понижение уровня вблизи возмущающей скважины, с учетом логарифмической аппроксимации уравнения Тейса [98] для линейной составляющей сопротивления движению жидкости (при законе фильтрации (2.12)), справедливой в условиях квазистационарного режима движения, представим уравнением

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25 \chi t}{r^2} + \frac{Q^2}{(2\pi C m)^2} \frac{1}{r}. \quad (2.22)$$

В уравнении (2.22) $T = Km$ – водопроницаемость, а $\chi = \frac{T}{\mu^*}$ – пьезопроводность водоносного пласта. Остальные обозначения прежние.

Последнее на фиксированный момент времени, при котором $r_k \gg r$ (r_k – радиус зоны квазистационарности), полностью совпадает с решением для стационарного режима фильтрации, приведенным в работах [45, 46, 58, 84] и др.:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_k}{r} + \frac{\eta Q^2}{(2\pi m)^2 K} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_k} \right), \quad (2.23)$$

где $r_k = 1,5 \sqrt{\chi t}$; $K = \eta C^2$; η – численный коэффициент.

Индикаторная диаграмма $S(Q)$ для уравнений (2.22) на фиксированный момент времени и (2.23) представляет собой кривую

$$S = aQ + bQ^2, \quad (2.24)$$

проходящую через начало координат $S = 0$, $Q = 0$ и имеющую выпуклость к оси расходов при $S > 0$, $Q > 0$. Касательная к этой кривой в точке, совпадающей с началом координат, отвечает линейному закону фильтрации –

$$S_1 = aQ,$$

откуда несложно найти коэффициенты a и b при Q и Q^2 и, следовательно, параметры пласта; очевидно, что из сопоставления (2.24) и, например, (2.22) следует

$$a = \frac{1}{4\pi T} \ln \frac{2,25 \chi t^0}{r^0} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{(2\pi C m)^2} \frac{1}{r^0}, \quad (2.25)$$

где t^0 – фиксированный момент времени, а r^0 – фиксированное расстояние от оси возмущающей скважины.

Индикаторная диаграмма $\frac{S}{Q}(Q)$ для уравнений (2.22) или (2.23) будет прямой линией –

$$\frac{S}{Q} = a + bQ. \quad (2.26)$$

По тангенсу угла наклона прямой и отрезку, отсекаемому на оси $\frac{S}{Q}$, легко определяются коэффициенты a и b и, соответственно, параметры пласта.

Итак, приведенное здесь решение, полученное автором, имеет асимптотический смысл и обеспечивает оценку инерционной составляющей сопротивления движению жидкости применительно к широкому кругу практически важных задач нестационарной фильтрации жидкости с осевой симметрией.

Вид формулы (2.22) однозначно свидетельствует – инерционная составляющая сопротивления движению жидкости через проводящую среду (второе слагаемое в правой части формулы) может иметь существенное значение только вблизи центра возмущения, где относительно велики скорости фильтрации, причем абсолютная величина инерционной составляющей быстро растет по направлению к этому центру. Соответственно при опытно-фильтрационном опробовании (ОФО) водоносных пластов кустовыми откачками высока вероятность того, что практически во всех наблюдательных скважинах куста такая составляющая сопротивления движению жидкости неощутимо мала. Иными словами, учитывать ее при интерпретации индикаторных кривых прослеживания уровня в наблюдательных скважинах нет необходимости.

Как уже отмечалось ранее, в возмущающих скважинах дополнительные потери напора (по отношению к потерям, обусловленным линейным законом фильтрации) составляют от 20 до 87 % общего понижения (см. [41, 57, 99] и др.). Это на современном этапе развития гидродинамики практически полностью исключает возможность использования индикаторных кривых прослеживания уровня в таких скважинах, так как для оценок пьезо- или уровнепроводности (и, соответственно, упругой или гравитационной емкости) применяются абсолютные значения понижений уровня. При этом очевидно, что использование одиночных откачек имеет существенный экономический эффект, напрочь снимающийся весьма низкой достоверностью оценок фильтрационных и емкостных параметров водовмещающих отложений.

Весьма плодотворна, на первый взгляд, идея использования в расчетах указанных параметров по результатам одиночных откачек относительного понижения уровня, как это делается при оценках фильтрационных параметров (коэффициента фильтрации и водопроводности) графоаналитическим методом или методом эталонной кривой. Реализовать эту идею, опираясь на способ Н.Н. Биндемана [13], в котором емкость водоносного пласта рассчитывается по разности понижений в двух наблюдательных скважинах, попытались В.М. Нехорошев и Ю.Ф. Филиппов [60]. Вместе с тем, анализ физико-математических моделей движения ПВ показывает принципиальную невозможность избавиться от абсолютной величины понижения уровня при расчетах упругой или гравитационной емкости (и, соответственно, пьезо- или уровнепроводности водоносного пласта). Присутствует она и в расчетной зависимости, предложенной в процитированной работе.

Таким образом, определение емкости пласта (и, соответственно, его пьезо- или уровнепроводности) по результатам его ОФО одиночной скважиной также сводится к оценке понижения уровня воды в ней, соответствующего линейному

закону фильтрации, или, если сформулировать задачу несколько иначе, к выявлению и учету понижения, обусловленного дополнительными сопротивлениями.

Это понижение S_d , определяемое характером вскрытия пласта, так называемое несовершенство скважины по характеру вскрытия пласта (в отличие от несовершенства скважины по степени вскрытия пласта), обычно выражается следующим образом [16]:

$$S_d = \frac{Q}{2\pi T} \zeta, \quad (2.27)$$

где ζ – и есть то самое дополнительное сопротивление, зависящее в общем случае от времени.

Удовлетворительных теоретических решений задачи полной оценки этой части сопротивления пока нет. Основное затруднение в получении такого решения связано с разнородностью и разнообразием факторов, определяющих несовершенство скважины по характеру вскрытия пласта. Это сопротивление обуславливается, во-первых, самим фильтром. Во-вторых, существенное значение имеют нарушения естественного состояния водовмещающих пород под влиянием бурения и откачки и, как следствие этого, изменение водопроницаемости пород в прискважинной зоне. В-третьих, дополнительные сопротивления возникают в связи с нарушением линейного закона фильтрации вблизи возмущающей скважины, рассмотренным нами подробнее выше. Кроме того, сейчас можно считать доказанным, что на величине понижения уровня в возмущающих скважинах сказывается и нарушение линейного закона фильтрации в краевых частях депрессионных воронок, где градиенты напора малы [10, 42].

Таким образом, в общем виде величину ζ можно представить суммой [16]

$$\zeta = \zeta_\Phi + \zeta_\Pi + \zeta_H, \quad (2.28)$$

где индексами "Ф", "П" и "Н" обозначены сопротивления соответственно фильтра, пород в прискважинной зоне и обусловленные инерционной составляющей.

Учитывая, что уже даже однозначное выделение каждой из составляющих в (2.28) удается чрезвычайно редко, а надежных методик оценки этих составляющих по результатам ОФО в одиночных скважинах нет, целесообразным представляется обоснование методики комплексной оценки суммарного сопротивления ζ .

Заметим – во многих случаях величина ζ вводится в основную формулу для совершенной скважины (первое слагаемое в правой части (2.22)), и тогда эта скважина рассматривается как некоторая фиктивная с приведенным радиусом r_0^* [16], равным

$$r_0^* = r_0 e^{-\zeta},$$

причем величина r_0^* в зависимости от характера деформации депрессионной воронки в прискважинной зоне может быть и больше и меньше радиуса r_0 реальной скважины.

Вместе с тем, указанный методический прием не применим для оценки дополнительного сопротивления по характеру вскрытия водоносного пласта по ре-

зультатам ОФО одиночными скважинами, так как при расчете приведенного радиуса необходимо задание независимо определенных параметров пласта, а именно их определение и является целью ОФО. Этот прием используется, главным образом, для расчетов предельно допустимого понижения уровня в эксплуатационных скважинах проектируемого водозабора при оценке эксплуатационных запасов ПВ.

Отнесем дополнительное сопротивление, определяющее несовершенство возмущающей скважины по характеру вскрытия пласта, на счет инерционной составляющей. Запишем уравнение (2.27) с учетом (2.28) в виде [40]

$$S_d = \frac{Q}{2\pi T} \zeta^* + bQ^2, \quad \zeta^* = \zeta - \zeta_H, \quad b = \frac{1}{(2\pi C_m)^2} \frac{1}{r}. \quad (2.29)$$

Здесь все обозначения прежние.

Первое слагаемое в правой части первого соотношения в (2.29) представим следующим образом:

$$\frac{Q}{2\pi T} \zeta^* = \frac{Q^2}{2\pi T Q} \zeta^*.$$

Тогда уравнение (2.27) несложно преобразовать к виду

$$S_d = b^* Q^2, \quad b^* = f(Q). \quad (2.30)$$

С учетом (2.30) и сопротивления на линейный закон фильтрации (т.е. сопротивления совершенной по характеру вскрытия пласта скважины) полное понижение уровня в возмущающей скважине равно

$$S = aQ + b^* Q^2, \quad (2.31)$$

где параметр a определяется первым выражением в (2.25), в котором $r^0 = r_0$.

В этом случае экспериментальное опытное определение параметров a и b^* кривой (2.31) может строиться на той же методической основе, что и при оценки инерционной составляющей сопротивления, а их результаты – интерпретироваться на основе индикаторных диаграмм $S(Q)$ (см. (2.24)) и $\frac{S}{Q}(Q)$ (см. (2.26)). Отличия индикаторных диаграмм в предложенной здесь трактовке параметров уравнения (2.31) состоят в том, что в силу сложной функциональной зависимости параметра b^* от Q , график, например, $\frac{S}{Q}(Q)$ в общем случае не является прямой линией, хотя диаграмма $S(Q)$ в целом сохраняет форму, близкую к параболической [40].

Заметим в связи с этим – из литературы известно несколько способов оценки инерционной составляющей сопротивления в (2.22) по результатам ОФО пласта одиночными скважинами при нестационарном режиме фильтрации ПВ; краткие обзоры их приведены, например, в работах [90, 93, 95] и др. Наиболее простыми и надежными из них следует, по-видимому, признать графоаналитические

методы, в основу которых кладутся индикаторные диаграммы $S(Q)$ и $\frac{S}{Q}(Q)$.

Эти методы, как показано выше, принципиально применимы и для анализа уравнения (2.31), причем целесообразно ограничиться методом интерпретации диаграмм $\frac{S}{Q}(Q)$.

В методическом плане ОФО основываются на необходимости кратковременных многократных возмущений водоносного пласта совершенной по степени вскрытия скважиной с разными фиксированными дебитами при условии полного восстановления уровня в скважине после каждого из них.

Преобразуем уравнение (2.31) следующим образом:

$$\frac{S_i}{Q} = a_i + b_i * Q.$$

Последнее описывает семейство кривых, проходящих через опытные точки, соответствующие одинаковым моментам времени t_i от начала каждого возмущения.

Эти кривые отсекают на оси $\frac{S}{Q}$ отрезки a_i , характеризующие фильтрацию при линейном законе к совершенной по характеру вскрытия водоносного пласта скважине.

Сняв с графика величины a_i и a_{i+1} и вычтя первую из второй, получаем

$$T = \frac{1}{4\pi(a_{i+1} - a_i)} \ln \frac{t_{i+1}}{t_i}. \quad (2.32)$$

На основе тех же величин a_i и a_{i+1} рассчитывается пьезо- или уровнепроводность:

$$\chi = \frac{r_0^2}{2,25 t_i} \exp\left(\frac{a_i}{a_{i+1} - a_i} \ln \frac{t_{i+1}}{t_i}\right), - \quad (2.33)$$

и, соответственно, емкость пласта. В уравнениях (2.32) и (2.33) все обозначения прежние.

Заметим здесь, что наиболее существенно на достоверность рассчитываемых емкостных параметров сказывается точность оценки радиуса возмущающей скважины. Последний целесообразно принимать равным максимальной величине, установленной геофизическими методами (например, по данным кавернометрии).

Значения b_i * без труда можно вычислить как тангенс угла касательной к кривой $\frac{S_i}{Q}(Q)$ в точке, соответствующей выбранной величине Q . Рассчитанное значение будет характеризовать интегральное, суммарное сопротивление скважины на несовершенство по характеру вскрытия пласта, зависящее от дебита откачки.

Проиллюстрируем методику определения фильтрационных и емкостных параметров пласта по данным ОФО одиночной скважины конкретным примером. На рис. 2.8 показаны индикаторные диаграммы для серии кратковременных откачек из совершенной по степени вскрытия скважины в напорном пласте; исходные данные взяты из работы [95]. Результаты расчетов по формулам (2.32) и (2.33) сведены в табл. 2.1. Для сравнения отметим, что параметры, определенные методом эталонной кривой по результатам прослеживания понижения уровня в наблюдательной скважине, отстоящей от возмущающей на расстояние $r = 145$ м, равны: $T = 1330 \text{ м}^3/\text{сут}$; $\mu^* = 6,13 \cdot 10^{-4}$.

Следует еще раз подчеркнуть – индикаторные диаграммы $\frac{S}{Q}$ не обязательно должны быть прямыми, как это постулировано в экспериментальных исследованиях, результаты которых приведены в работах [2, 18, 77, 79, 85, 90, 93, 95, 99]. Это обстоятельство, по-видимому, и является причиной в названных публикациях значительных расхождений параметров, определенных по данным прослеживания уровня в возмущающих и наблюдательных скважинах.

Несколько осложняются индикаторные диаграммы для скважин, работающих в безнапорных пластах. Дело в том, что здесь уровень воды в скважине и в водоносном пласте непосредственно у водоприемной части скважины заметно различается. Это связано с двумерностью фильтрационного потока и проявлением еще одного дополнительного сопротивления (по отношению к сопротивлению,

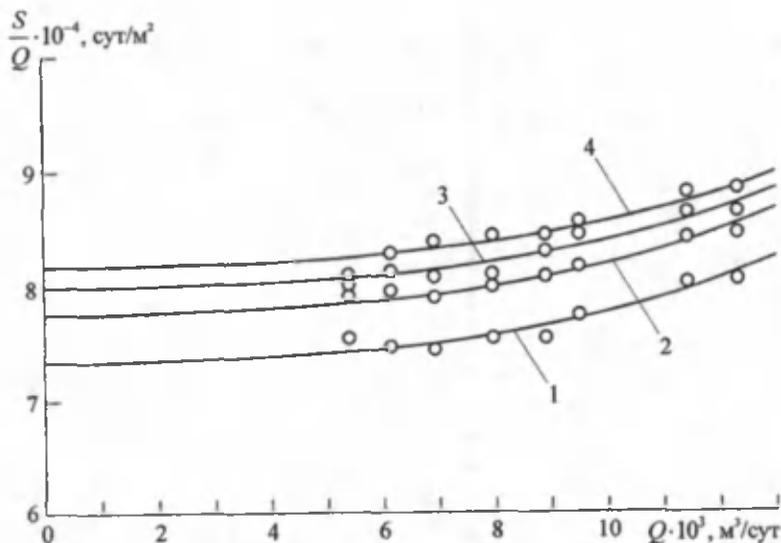


Рис. 2.8. Индикаторные диаграммы от качек из скважины на моменты времени от начала каждого возмущения 5 мин (1), 10 мин (2), 15 мин (3) и 20 мин (4)

Результаты расчетов параметров пласта

Расчетные характеристики возмущений и параметры пласта	Значения характеристик и параметров			
	5	10	15	20
Время от начала возмущения t_i , мин				
Отрезок $a_i \cdot 10^{-4}$, сут/м ² , отсекаемый на оси графика	7,35	7,75	8,00	8,17
Водопроводимость пласта T , м ² /сут, определенная при заданном соотношении $\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)$	1380 $\left(\frac{10}{5}\right)$ 1340 $\left(\frac{15}{5}\right)$ 1340 $\left(\frac{20}{5}\right)$	1290 $\left(\frac{15}{10}\right)$ 1310 $\left(\frac{20}{10}\right)$	1350 $\left(\frac{20}{15}\right)$	
Среднее значение водопроводимости T_{cp} , м ² /сут	1335			
Расчетное значение радиуса возмущающей скважины r_0 , м	0,23			
Упругая емкость пласта $\mu^* (\cdot 10^{-4})$, определенная при заданном соотношении $\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)$	5,99 $\left(\frac{10}{5}\right)$ 7,97 $\left(\frac{15}{5}\right)$ 7,94 $\left(\frac{20}{5}\right)$	13,2 $\left(\frac{15}{10}\right)$ 10,8 $\left(\frac{20}{10}\right)$	7,89 $\left(\frac{20}{15}\right)$	
Среднее значение упругой емкости пласта μ_{cp}^*	$8,97 \cdot 10^{-4}$			

определяемому законом Дарси). Если фильтр скважины не затоплен, то такой разрыв в уровнях называется участком высачивания.

Для оценки величины участка высачивания h_B в однородном потоке обычно рекомендуется пользоваться формулой, предложенной В.М. Шестаковым [86]:

$$h_B = \sqrt{\left(0,73 \lg \frac{\sqrt{Q}}{r_0} - 0,51\right) \bar{Q} + h_C^2 - h_C}, \quad (2.34)$$

где $\bar{Q} = \frac{Q}{K}$; h_c – столб воды в скважине при откачке. Остальные обозначения прежние.

Вместе с тем, необходимость задания точного значения K при том, что главной задачей ОФО как раз и является его определение, несоответствие замеренной величины h_c ее теоретическому значению, следующему из линейного закона фильтрации, вследствие дополнительных понижений в скважине, обусловленных нарушением линейности течения ПВ и изменением проводимости пород вблизи возмущающей скважины, делают результаты расчетов по формуле (2.34) существенно неопределенными.

В соответствии с рассматриваемым здесь подходом к интерпретации опытных данных уравнение фильтрации в безнапорном пласте можно представить в виде [40]

$$S = aQ + b^*Q^2 + h_B.$$

Объединение двух последних слагаемых в правой части последнего уравнения дает

$$S = aQ + b^{**}Q^2, \quad b^{**} = b^* + \frac{h_B}{Q^2}, \quad b^{**} = f(Q, t). \quad (2.35)$$

Здесь все обозначения прежние. На основе уравнения (2.35) индикаторные диаграммы принципиально могут обрабатываться изложенным ранее способом.

При интерпретации результатов ОФО безнапорного пласта необходимо учитывать еще одну особенность возмущения такого пласта. Известно, что в начальный период откачки безнапорный пласт ведет себя как напорный, и, следовательно, расчетная емкость пласта существенно зависит от расчетного момента

времени, на который строится диаграмма $\frac{S}{Q}(Q)$. Кроме того, становится неопре-

деленной закономерность формирования участка высачивания и, соответственно, возможность экстраполяции параметра b^{**} в формуле (2.35) в область больших значений времени. Поэтому оценку фильтрационных и емкостных параметров безнапорного пласта необходимо проводить на основе серии откачек значительной продолжительности, обеспечивающей достижение в каждой из откачек опытной серии режима фильтрации с гравитационной емкостью пласта.

Проиллюстрируем интерпретацию индикаторных диаграмм для скважин в безнапорных пластах на основе (2.35).

К сожалению, в специальной литературе автору удалось найти единственный пример кустовых откачек в безнапорном пласте на три понижения; данные по этим откачкам, выполненным на участках детальных разведок ПВ в долинах рек Центрального Казахстана, приведены в работе Л.Я. Тененбаума и И.И. Гринбаума [78]. Особенностью этих откачек является та, что они проводились под методическое обеспечение их интерпретации, основывающееся на предположении об установившейся фильтрации ПВ, соответственно, в названной статье не приводятся индикаторные диаграммы временного прослеживания снижения уровня в возмущающих и наблюдательных скважинах. Это, во-первых, исключает

возможность расчета емкостных параметров пласта (в первую очередь, гравитационной емкости), а, во-вторых, определяет некоторую условность оценок фильтрационных параметров. Так, если в приведенном ранее примере интерпретации индикаторных диаграмм за счет вычитания снятых с оси $\frac{S}{Q}$ диаграммы не-

нескольких отрезков a_i и a_{i+1} , отвечающих одним и тем же моментам времени t_i и t_{i+1} от начала каждого возмущения, удавалось избавиться в расчетной зависимости от абсолютного значения радиуса зоны квазистационарности (см. выражение (2.32)), то, имея только один такой отрезок a , исключить величину r_K из расчетов уже не представляется возможным. Поэтому за r_K в расчетах брались установленные по наблюдательным скважинам значения; этим и определяется условность оценок фильтрационных параметров на основе данных этих откачек.

Самое главное, для чего использовалась информация из [78], – это то, что приведенные на рис. 2.9 индикаторные диаграммы откачек и результаты расчетов фильтрационных параметров, сведенные в табл. 2.2, показывают принципиальную возможность обработки данных ОФО безнапорного пласта на основе уравнений (2.35), учитывающих наличие в возмущающей скважине участка высачивания (для скважины с незатопленным фильтром). При этом участок высачивания определяет дополнительные искажающие факторы, обуславливающие самую раз-

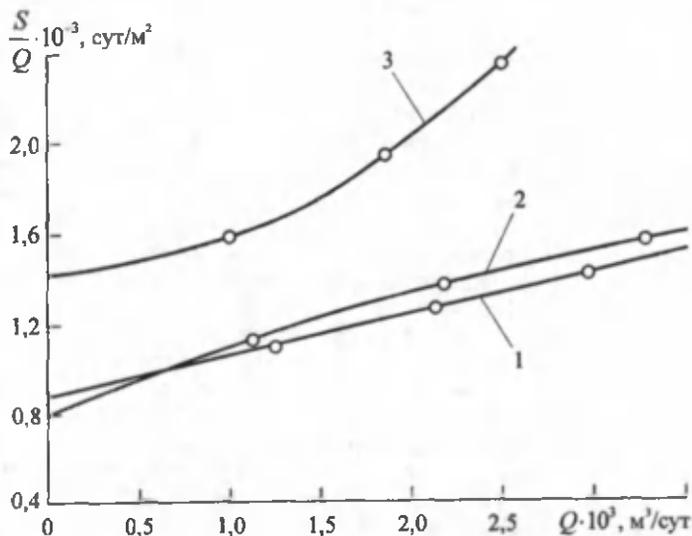


Рис. 2.9. Индикаторные диаграммы откачек на три понижения из скважин 617 (1), 615 (2) и 554 (3)

Результаты расчетов параметров пласта

Характеристики диаграммы и параметры пласта	Значения характеристик и параметров		
	№№ скважин	554	615
Отрезок $a \cdot 10^{-2}$, сут/м ² , отсекаемый на оси графика	0,80	1,43	0,88
Водопроницаемость пласта T , м ² /сут:			
– по возмущающей скважине;	1390	820	1200
– по наблюдательным скважинам	1390	813	1170
Коэффициент фильтрации K , м/сут:			
– по возмущающей скважине;	63,5	74,5	74,8
– по наблюдательным скважинам	63,6	74,0	73,4

нообразную форму индикаторных диаграмм $\frac{S}{Q}(\varrho)$ (см. рис. 2.9). Можно, по видимому, ожидать, что и индикаторные диаграммы ОФО безнапорных пластов скважинами с затопленными фильтрами также можно обрабатывать на основе уравнений (2.35).

Обычно считается, что наиболее полезным свойством информации, получаемой на стадии восстановления уровня после прекращения откачки, является ее меньшая по сравнению со стадией снижения зависимость от нерегулярных изменений дебита. Поэтому весьма перспективной, на первый взгляд, представляется оценка дополнительных потерь напора в возмущающей скважине на несовершенство ее по характеру вскрытия пласта на основе обработки результатов прослеживания восстановления уровня после многократных откачек.

Однако в этом случае становится неопределенным соотношение фильтрационных сопротивлений, обусловленных нелинейными составляющими (или относимых на нелинейные составляющие) для периода откачки, а затем восстановления уровня³. Так, при нагнетании вода в безнапорный пласт через скважину с незатопленным фильтром на ее стенке не образуется скачок уровня, аналогичный участку высачивания [80]. С другой стороны, отметка уровня, от которой отсчитывается повышение, уже содержит составляющую, обусловленную несовершенством скважины по характеру вскрытия пласта, поэтому оценка параметров a и b^* (или b^{**}) для периода восстановления уровня невозможна без привлечения данных откачки [18].

Таким образом, использование двухчленной зависимости позволило обосновать простой и вполне надежный способ комплексной оценки дополнительного понижения уровня в возмущающей скважине, обусловленного ее несовершенст-

³ Напомним, что восстановление уровня трактуется как накладываемое на продолжающуюся и после остановки откачку нагнетание с дебитом откачки [15, 22, 35, 52, 63].

вом по характеру вскрытия пласта, и, следовательно, способ определения вполне достоверных значений фильтрационных и емкостных параметров пласта⁴. Естественно, этот способ не может заметить традиционные способы ОФО, основанные на кустовых откачках. Однако в увязке со значениями параметров, определенных по результатам таких опытных полевых работ, позволит значительно расширить объем информации о фильтрационных и емкостных параметрах опробуемых пластов.

2.3. Методические проблемы экспериментального опытного определения начального градиента

При исследовании пластов наибольший интерес представляет течение воды вблизи возмущающей скважины. Рассмотрим его особенности при законе фильтрации с предельным градиентом.

Поскольку практически важные задачи (например, задача о притоке к скважине при возмущении с постоянным дебитом или постоянным понижением уровня – фильтрация в напорном пласте с осевой симметрией) неавтономельны, их исследуют либо приближенными методами, либо численно. В работах [10, 11] приведено решение такой задачи, полученное на основе метода интегральных соотношений. Покажем здесь это решение, позволяющее сделать ряд выводов о закономерностях притока ПВ к скважине и исследовать существующие методы полевого опытного определения начального градиента напора, как важнейшего параметра нелинейного закона фильтрации.

Существенно заметить, что правильная формулировка задачи о фильтрации с предельным градиентом требует, чтобы на внешней границе области возмущения задавался не градиент напора, а скорость фильтрации [10]. Поэтому, считая начальное состояние пласта невозмущенным, основную систему уравнений задачи следует записать в виде

$$\frac{m}{\mu^*} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{|v(r, t)|}{K} + G. \quad (2.37)$$

В уравнениях (2.36) и (2.37) m – мощность водоносного пласта; v – модуль скорости фильтрации; μ^* – упругая емкость пласта; S – понижение уровня в точке пласта на расстоянии r от оси возмущающей скважины в момент времени t от начала откачки. Остальные обозначения прежние.

Запись закона фильтрации (2.37) предполагает наличие линейного участка зависимости модуля скорости фильтрации v от градиента напора, для которого (этого участка) можно определить коэффициент фильтрации K_0 , отвечающий закону Дарси.

⁴ Разумеется, достоверность определенных таким образом параметров уступает достоверности параметров, установленных по данным опытных кустовых откачек.

В соответствии с общим правилом применения метода интегральных соотношений [9, 11] распределение скорости фильтрации в пласте берется в виде

$$v(r, t) = -\frac{Q}{2\pi r m} \left[1 - \frac{r}{l(t)} \right], \quad r \leq l(t), \quad (2.38)$$

где Q – постоянный дебит возмущения (откачки); $l(t)$ – длина области влияния возмущения (радиус этой области).

Из (2.37) с учетом (2.38) следует

$$S(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} \left\{ \ln \frac{l(t)}{r} - \left[1 - \frac{2\pi T G l(t)}{Q} \right] \left[1 - \frac{r}{l(t)} \right] \right\}, \quad (2.39)$$

откуда, в частности, для точек пласта вблизи возмущающей скважины

$$S(r_w, t) \cong \frac{Q}{2\pi T} \left[\ln \frac{l(t)}{r_w} - 1 + \frac{2\pi T G l(t)}{Q} \right], \quad r_w \ll l(t), \quad (2.40)$$

и где с учетом того, что уже при малых t от начала возмущения $r_0 \ll l(t)$ –

$$l^2(t) + 2 \frac{l^2(t)}{l^*} = 12 \chi t, \quad l^* = \frac{Q}{2\pi T G}. \quad (2.41)$$

В уравнениях (2.39), (2.40) и (2.41), как и прежде, $T = Km$ – водопроводимость

пласта; $\chi = \frac{T}{\mu^*}$ – пьезопроводность; l^* – характерный линейный размер об-

ласти возмущения, обеспечивающий оценку характерного времени – $t^* = \frac{l^{*2}}{\chi}$

[11]. Характерные размер и время представляют собой параметры, сопоставление с которыми установленных в процессе опыта характеристик возмущения (в первую очередь, длины области влияния возмущения $l(t)$) позволяет судить о режиме фильтрации, линейном или нелинейном.

Соответственно решение задачи качественно различно при $\frac{t}{t^*} \ll 1$ и

$\frac{t}{t^*} \gg 1$ [11]. Так, при малых значениях времени $l(t) \ll l^*$. Пренебрегая в

(2.41) членами порядка $\frac{l(t)}{l^*}$, нетрудно показать – при малых t фильтрация ПВ

вблизи возмущающей скважины аналогична фильтрации при линейном законе (законе Дарси). Это объясняется тем, что в начальный период откачки фильтрация развивается в ограниченной области, где градиенты напора велики, и, следовательно, поправка на предельный градиент пренебрежимо мала. С течением времени область возмущения растет и все большую ее часть составляет зона малых градиентов, соответственно все более существенным становится вид закона

фильтрации при малых скоростях. Наконец, в случае, если $t \gg t^*$ (или $l(t) \gg l^*$) из (2.40) и (2.41) следует [11]

$$l(t) \cong \sqrt[3]{3 \frac{\chi' Q}{\pi T G}}, \quad (2.42)$$

$$s(r_w, t) \cong G \sqrt[3]{3 \frac{\chi' Q}{\pi T G}} + \frac{Q}{6\pi T} \ln \frac{3\chi' Q}{\pi T G r_w^3} - \frac{Q}{2\pi T},$$

иными словами, для больших значений времени от начала возмущения закон изменения напора становится уже не логарифмическим, а степенным [11].

Итак, задача о притоке ПВ к скважине, работающей с постоянным расходом, из напорного пласта при законе фильтрации с предельным градиентом решена в [10, 11] полностью. Приведенное здесь решение обеспечивает теоретический анализ закономерностей нелинейной фильтрации при таком законе, выступает основой для возможной разработки методических приемов полевого опытного определения параметров нелинейности (предельного градиента G , характерного размера l^* и времени t^*), обеспечивает критический анализ уже существующих методов.

Необходимо отметить в этой связи, что одной из основополагающих проблем современной гидродинамики является проблема идентификации, причем не только в узком, традиционном ее понимании (обычно идентификации параметров проводящей среды), но и в более широком – идентификация физико-математических моделей фильтрации жидкостей. Особая роль отводится здесь эксперименту (лабораторному и натурному); напомним, что основной закон фильтрации (закон Дарси) был установлен в результате именно экспериментальных исследований и, наряду с другими соображениями, послужил идентификатором широко известной линейной теории фильтрации. При таком подходе обязательным представляется анализ состоятельности и достоверности экспериментальных оценок подобных идентификаторов, однако как раз такой анализ и подходы к нему остаются слабым местом теоретических исследований фильтрации жидкостей. Проиллюстрируем это на примере модели движения ПВ при малых гидравлических градиентах (градиентах давления или напора), конкурирующей с линейной [20, 26].

В настоящее время многие исследователи отмечают необходимость практического учета нелинейности закона фильтрации при малых градиентах давления p (или напора H). Подобный учет требует высокого уровня методической разработанности проблемы идентификации параметров, в том числе, нелинейного уравнения движения. Однако разрешенность этой проблемы остается на уровне середины позапрошлого века; эксперименты традиционно выполняются в лабораториях в слегка модифицированных фильтрационных приборах Дарси с целью лишь качественного доказательства нелинейности этого уравнения и установление его самого общего вида. Известен, пожалуй, единственный метод А.Г. Арье [6] полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации. Реализация его на практике требует обязательного предварительного анализа достоверности полученных с его помощью результатов.

В своем методе А.Г. Арье [6] предложил величину предельного градиента определять по разности понижений уровня ПВ в двух наблюдательных скважи-

нах на выбранный момент времени. Нетрудно видеть, что из (2.39) в этом случае вытекает следующее выражение [20, 26]:

$$G = \frac{(S_1 - S_2) + \frac{Q}{2\pi T} \frac{(r_2 - r_1)}{l(t)} - \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1}}{r_2 - r_1} \quad (2.43)$$

Здесь r_1 и r_2 – расстояния от центра возмущения до наблюдательных скважин; S_1 и S_2 – понижения уровня в них на выбранный момент времени t . Остальные обозначения прежние.

Аналогичное уравнение в пренебрежении отношением $\frac{r_2 - r_1}{l(t)}$ даст А.Г.

Арье; оно представлено им как аналитическое приближение некоего "машинного" решения [5].

Основная идея метода заключается в следующем. Очевидно, что вследствие указанной нелинейности закона фильтрации в возмущенной области должны формироваться градиенты давления (или напора), превышающие градиенты, которые существовали бы при фильтрации, отвечающей линейному уравнению движения. Иными словами, разность понижений ($S_1 - S_2$) должна иметь аномально высокое значение. После выделения в ней разности понижений, которая была бы при линейном законе, оставшаяся величина полностью относится на счет нелинейности уравнения движения; именно она обеспечивает оценку предельного градиента [26].

Проанализируем принципиальную применимость указанного метода для анализа фильтрации ПВ на примере результатов откачки из четвертичных аллювиальных отложений в долине р. Жаксысарысу в Центральном Казахстане, заполняющих депрессию палеозойского фундамента. Исследуем для этого систематические и случайные погрешности оценок G , l^* и l^* .

Водоносный пласт представлен толщей песчано-гравийных отложений с включением мелкой гальки и редкими линзами песчанистых глин (см. рис. 2.10 и 2.12). Кровлю повсеместно образуют покровы суглинков, супесей и, реже, глин мощностью 1-1,5, иногда до 3 м. Подстиляется пласт неогеновыми водонепроницаемыми глинами, а на эпигенетических участках долины – слабо проницаемыми палеозойскими породами. В целом водоносный пласт однороден в плане и разрезе, в нем отсутствуют какие-либо факторы аномальности, затрудняющие анализ закономерностей фильтрации ПВ [19, 24, 26, 32, 33].

На рис. 2.10 и 2.12 показаны схемы и разрезы опытных кустов, а на рис. 2.11 и 2.13 – приведены индикаторные кривые временного прослеживания понижения уровня в наблюдательных скважинах кустов 801 и 806. Приведенное выше решение предполагает, что на индикаторных кривых откачек выделяются участки, по которым устанавливаются параметры пласта, отвечающие линейному закону фильтрации. При этом, как отмечалось ранее в [19, 24, 26, 32, 33], графики временного прослеживания в координатах $S(lg t)$ выходят на асимптотическую прямую, отвечающую жесткому режиму фильтрации при гравитационной емко-

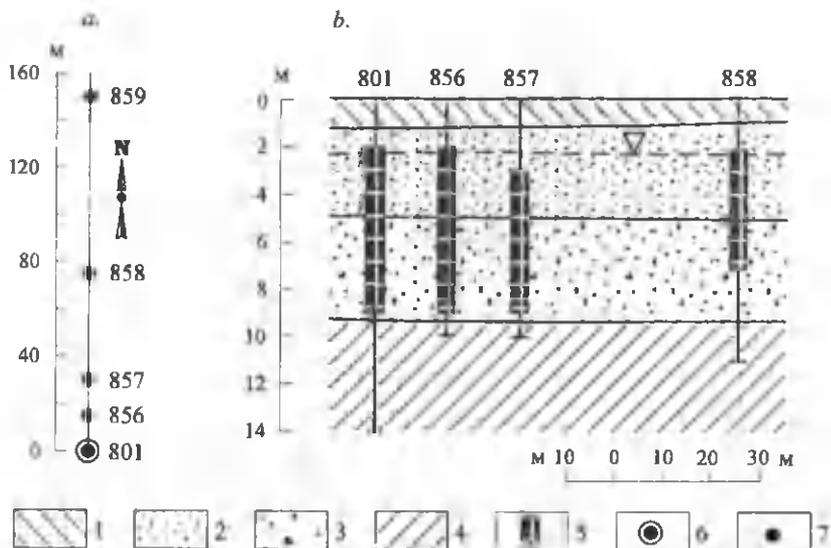


Рис. 2.10. Схема (а) и разрез (б) опытного куста 801 (месторождение подземных вод Жаксысарысу, по данным С.С. Сутбаева, В.И. Дзюмана и В.В. Прохожан, 1972 г.): 1 - суглинистый почвенно-растительный слой; 2 - пески разномерные; 3 - песчано-гравийно-галечниковые отложения; 4 - неогеновые глины; 5 - интервал установки фильтра; 6 - возмущающая скважина; 7 - наблюдательная скважина

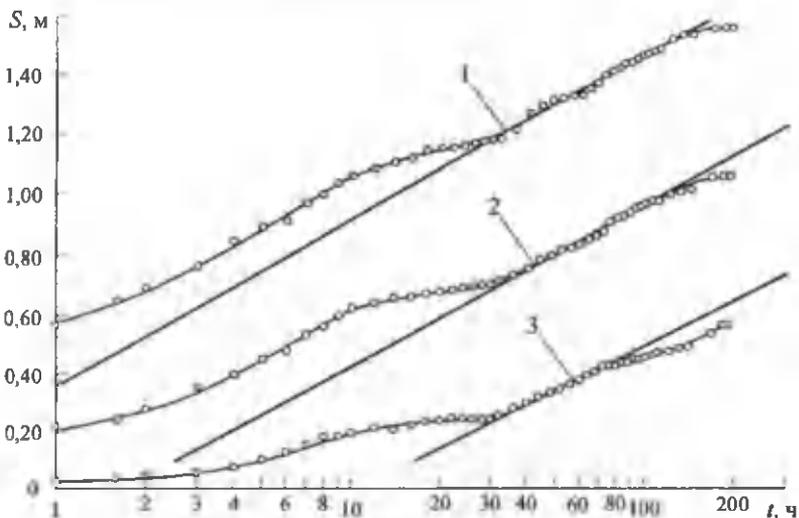


Рис. 2.11. Индикаторные кривые снижения уровня в наблюдательных скважинах куста 801 (по данным С.С. Сутбаева, В.И. Дзюмана и В.В. Прохожан, 1972 г.): скв. 856 (1); скв. 857 (2); скв. 858 (3)

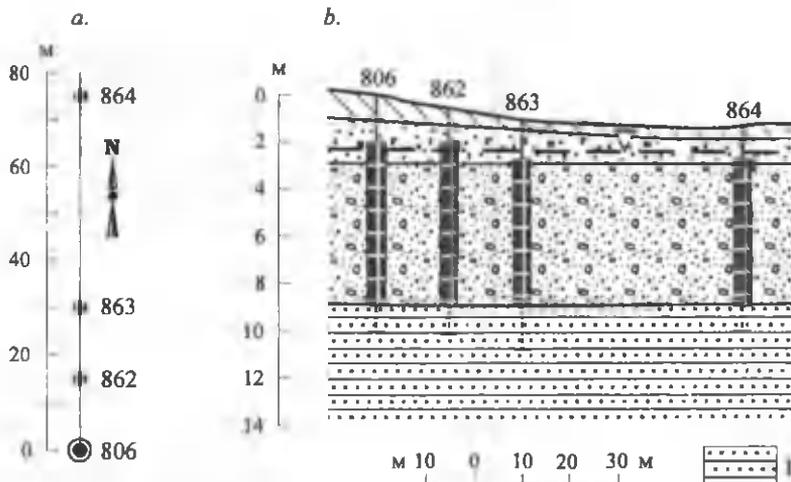


Рис. 2.12. Схема (а) и разрез (б) опытного куста 806 (месторождение подземных вод Жаксысарысу, по данным С.С. Сутбаева, В.И. Дзюмана и В.В. Прохожан, 1972 г.): 1 - полимиктовые песчаники. Остальные обозначения те же, что и на рис. 2.10

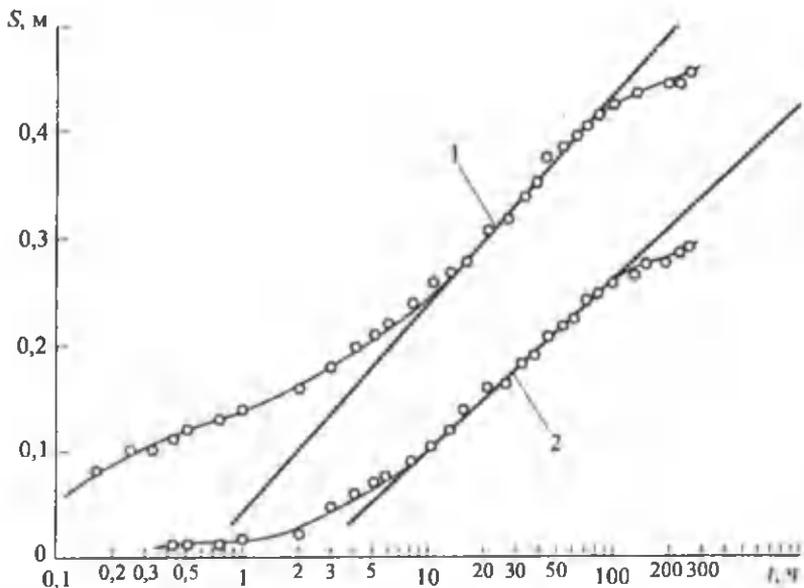


Рис. 2.13. Индикаторные кривые снижения уровня в наблюдательных скважинах куста 806 (по данным С.С. Сутбаева, В.И. Дзюмана и В.В. Прохожан, 1972 г.): скв. 862 (1); скв. 863 (2)

сти пласта, через 35-40 ч от начала откачки и позволяют применять традиционные методы (графоаналитический и эталонных кривых) для определения фильтрационных и емкостных параметров. Эти параметры в нашем случае оценены первым из них (см. табл. 2.3).

Результаты расчетов параметров нелинейности фильтрации сведены в табл. 2.4. На расчетный момент времени $t = 100$ ч влияние возмущения по обоим кустам фиксировалось как понижение на первые сантиметры в наблюдательных скважинах на расстоянии в 300-450 м (на рис. 2.10 и 2.12 они не показаны), что свидетельствует о принципиальной возможности использования в расчетах также и формулы А.Г. Арье, которая следует из (2.43) в пренебрежение вторым слагаемым в числителе [6, 26]:

$$G = \frac{(S_1 - S_2) - \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1}}{r_2 - r_1} \quad (2.44)$$

Здесь все обозначения прежние. При выводе формулы (2.44) полагалось, по-видимому, что $\frac{r_2 - r_1}{l(t)} < 0,05 \ln \frac{r_2}{r_1}$, хотя для обоих опытных кустов это отношение не выполняется.

Расчетные значения понижений уровня в наблюдательных скважинах на момент времени $t = 100$ ч снимались с асимптотических участков графиков прослеживания,

$$S_i = A_i + 2C_i, \quad (2.45)$$

где S_i – расчетное понижение уровня в i -той скважине на выбранный расчетный момент времени; A_i – отрезок, отсекаемый расчетной асимптотой индикаторного графика прослеживания в i -той скважине на оси S при $t = 1$ (в выбранном масштабе времени); C_i – угловой коэффициент расчетной асимптоты индикаторного графика прослеживания в i -той скважине.

Таблица 2.3

Значения фильтрационных и емкостных параметров водоносного пласта по опытным кустам

Параметры	Значения параметров	
№№ кустов	801	806
Средний дебит откачки \bar{Q} , м ³ /ч	94,97	24,12
Среднее значение водопроницаемости T , м ² /сут	815	576
Среднее значение уровнепроводности a , м ² /сут	6135	4052
Гравитационная емкость μ	0,133	0,142

Параметры нелинейного закона фильтрации

Параметры	Значения параметров	
	801	806
№№ кустов		
Расстояние от центра возмущения (оси возмущающей скважины) до оси наблюдательной скважины, м:		
– первой расчетной, r_1 ;	30	15
– второй расчетной r_2	75	30
Расчетное время t , ч	100	100
Расчетное понижение уровня в наблюдательных скважинах на расчетное время, м:		
– первой расчетной, S_1 ;	0,972	0,435
– второй расчетной S_2	0,493	0,265
Расчетное значение радиуса влияния возмущения $l(t)$, м	554	446
Значения параметров нелинейности на основе формулы (2.43):		
– предельный градиент напора G ;	0,0024	0,0043
– характерный размер l^* , м;	187	37
– характерное время t^* , ч	136,26	8,19
Значения параметров нелинейности на основе формулы А.Г. Арье (2.44):		
– предельный градиент напора G ;	0,0016	0,0039
– характерный размер l^* , м;	281	41
– характерное время t^* , ч	309,97	9,75

Необходимо отметить следующее. В [24, 32, 33] полагается, что наиболее вероятные значения параметров расчетных асимптот A_i и C_i оцениваются с использованием метода наименьших квадратов. Это позволяет в значительной степени объективизировать вычисления, так как ручное графическое построение тех же расчетных асимптот обуславливает личные случайные погрешности параметров этих асимптот [28, 29, 30, 33], которые загодя по абсолютной величине перекрывают аномальность разности понижений ($S_1 - S_2$), определяющую принципиальную возможность определения предельного градиента напора. При этом в названных публикациях исследовались личные случайные погрешности только одного рода, обусловленные рассеянием опытных точек относительно расчетных асимптот на индикаторных графиках. Личные случайные погрешности характеристик асимптот A_i и C_i , обусловленные выбором длины этих асимптот, вооб-

ще пока не исследовались, хотя именно они наиболее существенно влияют на достоверность устанавливаемых опытным путем параметров нелинейного закона фильтрации, т.е. во многом определяют состоятельность рассматриваемого здесь метода полевого опытного определения этих параметров.

Очевидно, что упрощенная формула А.Г. Арье (2.44) за счет пренебрежения вторым слагаемым в числителе (2.43) вносит в значения определяемых параметров нелинейности фильтрации систематические погрешности. Однако оценка таких погрешностей смысла не имеет, так как, это будет показано ниже, сам метод А.Г. Арье, предполагающий полевое опытное определение параметров нелинейного закона фильтрации по результатам интерпретации индикаторных кривых временного прослеживания уровня в процессе опытной кустовой откачки в двух наблюдательных скважинах, на самом деле не применим для решения этой задачи.

Перейдем теперь к анализу принципиальной применимости запатентованного метода А.Г. Арье. Для этого на примере результатов опробования водоносного пласта кустом 801 выполним оценки случайных и систематических погрешностей устанавливаемого из опыта предельного градиента напора. Сопоставление величин одних только случайных погрешностей с величиной установленного из опыта предельного градиента напора уже позволит сделать принципиальный вывод о применимости или неприменимости метода [26].

Как уже отмечалось ранее, приведенное в настоящем подразделе решение предполагает, что на индикаторных кривых откачек выделяются участки, по которым устанавливаются параметры водоносного пласта, отвечающие линейному закону фильтрации (см. рис. 2.11 и 2.13). В [24, 29, 30 32, 33] нами предложена и на материалах опытной откачки опробована методика оценок случайных погрешностей водопроводимости и уровневпроводности отложений. Эта методика обеспечивает и определение наиболее вероятных значений самих параметров.

Воспользуемся результатами расчетов из [24, 29, 30 32, 33]; фильтрационные и емкостные параметры, установленные по результатам ОФО пласта кустом 801 (и необходимые в дальнейших рассуждениях параметры индикаторных кривых), а также их абсолютные погрешности с доверительной вероятностью в 0,954 или 2σ для наблюдательных скважин, отстоящих от центра возмущения соответственно на 30,00 и 75,00 м, приведены в табл. 2.5. Представленные случайные погрешности характеризуют суммарную, итоговую их величину на назначенный уровень доверительной вероятности [24, 29, 30 32, 33].

Отметим, что поскольку для построения индикаторных диаграмм использовался часовой масштаб оси $\lg t$, то и в табл. 2.5 все параметры приведены к этому масштабу времени. В табл. 2.3 значения всех приведенных там параметров даны в традиционно используемых в гидрогеологии единицах.

Оценим сначала достоверность расчетов предельного градиента на основе уравнения А.Г. Арье [5, 6], т.е. уравнения (2.44). Представим один из множителей вычитаемого в числителе (2.44) следующим образом [26]:

$$\frac{Q}{2\pi T} = \frac{C}{0,366\pi} \quad (2.46)$$

Таблица 2.5

Фильтрационные и емкостные параметры водоносного пласта и их случайные погрешности (с доверительной вероятностью 0,954), установленные по кусту 801 графоаналитическим методом с привлечением регрессионного анализа

Параметры	Значения параметров по наблюдательным скважинам куста		
	856	857	858
$2\sigma_{\bar{C}}$, м ^{1/ч}	7,39	7,39	7,39
Расстояние от центра возмущения до наблюдательной скважины r , м	15	30	75
Угловой коэффициент расчетной асимптоты C , м	0,549	0,540	0,486
Понижение уровня A в момент времени t_0 , м	-	-0,108	-0,479
$2\sigma_C$, м	0,0326	0,0243	0,0236
$2\sigma_A$, м	-	0,0455	0,0411
Водопроницаемость T , м ^{2/ч}	31,66	32,18	35,76
$2\sigma_T$, м ^{2/ч}	3,10	2,89	3,28
Относительная погрешность водопроницаемости $2\delta_T$, %	9,79	8,98	9,17
Уровнепроницаемость a , м ^{2/ч}	-	252,70	258,51
$2\sigma_a$, м ^{2/ч}	-	49,84	58,51
Относительная погрешность уровнепроницаемости, $2\delta_a$, %	-	19,72	22,63
Гравитационная емкость μ	-	0,127	0,138
Относительная погрешность гравитационной емкости $2\delta_\mu$, %	-	21,67	24,42

Тогда с учетом среднего $\bar{C} \cong 0,513$ м (как следует из табл. 2.5) получаем, что это вычитаемое равно 0,409 м. Расчетные значения понижений уровня в наблюдательных скважинах на момент времени $t = 100$ равны соответственно 0,972 и 0,493 м (см. табл. 2.4), а уменьшаемое в числителе (2.44) – $(S_1 - S_2) \cong 0,479$ м. Отсюда разность составляет 0,070 м, а параметры закона фильтрации получаются следующими (см. табл. 2.4): $G \cong 0,0016$; $t^* \cong 310$ ч; $l^* \cong 280$ м. Они показывают, в частности, – при реальной продолжительности опытной откачки в 189 ч с асимптотическими участками в интервале времени от 40 до 72-104 ч [26, 33] полученные фильтрационные параметры практически точно совпадают с параметрами модели фильтрации, в которой берется линейное уравнение движения.

Как следует из (2.44), величина (малая) предельного градиента G определяется разностью относительно больших величин в числителе формулы, поэтому предельный градиент значим только в том случае, когда случайные погрешности уменьшаемого и вычитаемого не перекрывают разности последних.

Погрешность вычитаемого с доверительной вероятностью в 0,954⁵ можно без труда вычислить с использованием следующего выражения, в котором учтена также формула (2.46) [26]:

$$2\sigma_1 \cong \sqrt{\left(\frac{2\sigma_c}{0,366\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{C2\sigma_n}{0,366\pi} \frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{C2\sigma_n}{0,366\pi} \frac{1}{r_2}\right)^2}.$$

В нем членами, содержащими σ_n , по порядку величин можно пренебречь, соответственно $2\sigma_1 \sim 2\sigma_c$. Отсюда с учетом среднего $2\sigma_c = 0,0240$ м (см. табл. 2.5), получаем, что $2\sigma_1 \cong 0,0191$ м.

Аналогично можно представить погрешность уменьшаемого в числителе (2.44):

$$2\sigma_2 \cong \sqrt{(2\sigma_{s_1})^2 + (2\sigma_{s_2})^2}. \quad (2.47)$$

Здесь $2\sigma_{s_1}$ и $2\sigma_{s_2}$ – погрешности расчетных понижений уровня в скважинах. Они, в свою очередь, с учетом (2.45) оцениваются по формуле

$$2\sigma_{s_i} \cong \sqrt{(2\sigma_A)^2 + (2\sigma_c \lg t)^2}, \quad (2.48)$$

в которой опущен член, содержащий σ , (как имеющий больший порядок малости в сравнении с остальными). Подстановка в (2.47) и (2.48) указанных выше параметров графиков прослеживания и их погрешностей из табл. 2.5, дает $2\sigma_2 \cong 0,091$ м, а суммарную погрешность числителя – 0,094 м.

Таким образом, погрешность только уменьшаемого и уже с доверительной вероятностью в 0,954 существенно превышают разность членов в числителе (2.44). Как уже отмечалось в [19, 31, 74, 75], при решении гидрогеологических задач наметились два пути использования физико-математических моделей фильтрации. Определение физической сущности процесса, в том числе, доказательство закона движения жидкости, обязательно требует анализа представительности экспериментальных данных, на основе которых закон движения доказываем; определенные экспериментально параметры можно считать представительными, значимыми, если их предельно допустимые случайные погрешности не превышают по абсолютной величине значения самих этих параметров. Соответственно установленная по формуле А.Г. Арье величина предельного градиента G не значима,

⁵ Напомним, что для технических приложений погрешности обычно оцениваются с доверительной вероятностью в 0,954 и равны 2σ (где σ – среднее квадратичное отклонение анализируемого параметра). Соответственно и в настоящем подразделе систематические и случайные погрешности, там, где это специально не оговаривается, оцениваются с такой же доверительной вероятностью.

и, следовательно, никакой речи об экспериментальном установлении нелинейности закона фильтрации по результатам опыта не может быть в принципе [26]. Хотя такой вывод не ставит под сомнение сам факт нелинейности фильтрации при малых градиентах напора или давления.

Как уже отмечалось выше, сама формула А.Г. Арье следует из уравнения (2.43) в пренебрежении отношением $\frac{r_2 - r_1}{l(t)}$. За счет такого пренебрежения в величину G внесена систематическая погрешность; совместное решение (2.39) и (2.41) с учетом (2.43) дает такие параметры нелинейного закона фильтрации: $G \cong 0,0024$; $l(t) \cong 550$ м; $l^* \cong 187$ м; $t^* \cong 136$ ч. Таким образом, оцененная на основе (2.44) величина предельного градиента оказалась заниженной в 1,5 раза, соответственно завышенными – значения характерного размера и характерного времени (см. табл. 2.4). Тем не менее, l^* и t^* таковы, что отклонения от закона Дарси еще не должны вносить решающие искажения в фильтрационные параметры и не препятствуют их оценке графоаналитическим методом.

С другой стороны, второе слагаемое в числителе (2.43) имеет свои случайные погрешности, обусловленные погрешностями входящих в него измеряемых или вычисляемых параметров. Соответственно суммарную погрешность этого слагаемого с учетом (2.46) можно представить в виде [26]

$$2\sigma_3 \cong \sqrt{\left(\frac{2\sigma_c}{0,366\pi} \frac{r_2 - r_1}{l(t)}\right)^2 + \left(\frac{C2\sigma_{l(t)}}{0,366\pi} \frac{r_2 - r_1}{l^2(t)}\right)^2}, \quad (2.49)$$

где $2\sigma_{l(t)}$ целиком определяется погрешностью уронепроводности (или пьезо-проводности) [26]:

$$2\sigma_{l(t)} \cong 2\sigma_a \sqrt{\frac{3t}{a}}. \quad (2.50)$$

В (2.49) и (2.50), как и прежде, опущены слагаемые, содержащие $2\sigma_i$, $2\sigma_n$ и $2\sigma_r$. Подставив в эти уравнения все известные параметры, а также среднее значение $2\sigma_a$, равное $54,2$ м²/ч (см. табл. 2.5), получаем, что $2\sigma_{l(t)} \cong 58,7$ м, а случайная погрешность второго слагаемого в числителе (2.43) $2\sigma_3 \cong 0,0042$ м при величине этого слагаемого $0,036$ м. Отсюда алгебраическая сумма всех членов в числителе (2.43) возрастает до $0,106$ м; итоговая случайная погрешность ее составляет $0,094$ м.

На первый взгляд, определенный по материалам опытной откачки предельный градиент значим. Обратим, вместе с тем, внимание на то, что в расчетах мы оперировали величинами случайных погрешностей, имеющих доверительную вероятность лишь $0,954$. А чтобы принципиально судить о возможности опытной регистрации параметров закона фильтрации (при исключении систематических погрешностей) необходимо сравнивать такие параметры с их предельно допустимыми погрешностями. Воспользовавшись так называемым "правилом трех сигм" [70], оценим предельные погрешности G ; как отмечалось ранее, будем считать

приближенно, что такие погрешности отвечают доверительной вероятности 0,9973 и составляют 3σ .

Отсюда нетрудно видеть — предельная случайная погрешность алгебраической суммы в числителе (2.43) равна 0,141 м и заметно превышает саму сумму. Иными словами, и в этом случае никакой речи об экспериментальной регистрации начального градиента давления по результатам опыта идти не может [26].

Итак, анализируемый патентованный метод определения предельного градиента на самом деле не обеспечивает достоверной оценки G ; случайные погрешности измерений и вычислений, возникающие при проведении и интерпретации результатов опытных откачек, уже с доверительной вероятностью 0,954-0,9973 превышают саму установленную величину предельного градиента. Повышение точности измерительной аппаратуры принципиально ситуацию не меняет, так как случайные инструментальные погрешности составляют незначительную часть итоговых [24, 32, 33].

Исследуем теперь вероятные систематические погрешности, возникающие при полевом опытным определении предельного градиента напора (или давления) на основе метода А.Г. Арье. Необходимость выявления и оценок таких погрешностей диктуется тем, что в выражения (2.43) и (2.44), на основе которых рассчитываются значения предельного градиента напора, входит разность понижений уровня ПВ в наблюдательных скважинах на назначенный момент времени, и при этом совершенно не учитываются абсолютные величины таких понижений. А между тем, аномалия разности понижений, с которой и соотносится нелинейность закона фильтрации при малых градиентах напора, потенциально может быть обусловлена целым комплексом причин и факторов, на имеющих ничего общего с нелинейностью закона фильтрации (т.е., в нашем случае, с наличием предельного градиента напора).

Поясним сказанное примером. На рис. 2.14 представлены теоретически рассчитанные индикаторные диаграммы снижения уровня в наблюдательных скважинах куста 801 в процессе смоделированной опытной откачки при законе фильтрации с предельным градиентом (как показано выше, из уравнения (2.43) следует $G \cong 0,0024$), а также при линейном законе фильтрации. При моделировании откачки использовались средние значения фильтрационных и емкостных параметров водоносного пласта, полученные по результатам его ОФО, и брался полученный в процессе ОФО дебит откачки (см. табл. 2.3).

Как видно из рисунка, абсолютные величины модельных понижений уровня в наблюдательных скважинах на расчетный момент времени $t = 100$ ч разнятся весьма существенно. Так, понижения уровня в скважинах 857 и 858, отстоящих от центра возмущения пласта на расстояния соответственно 30,00 и 75,00 м, при законе фильтрации с предельным градиентом напора равны 2,126 и 1,647 м, а разность понижений уровня $S_1 - S_2 \cong 0,479$ м, т.е. точно отвечает аномальной величине разности понижений, установленной из опыта и позволившей рассчитать предельный градиент G . Моделирование откачки при линейном законе фильтрации для тех же скважин дало следующие величины понижений уровня — 0,877 и 0,505 м, а разность понижений уровня составила $S_1 - S_2 \cong 0,372$ м.

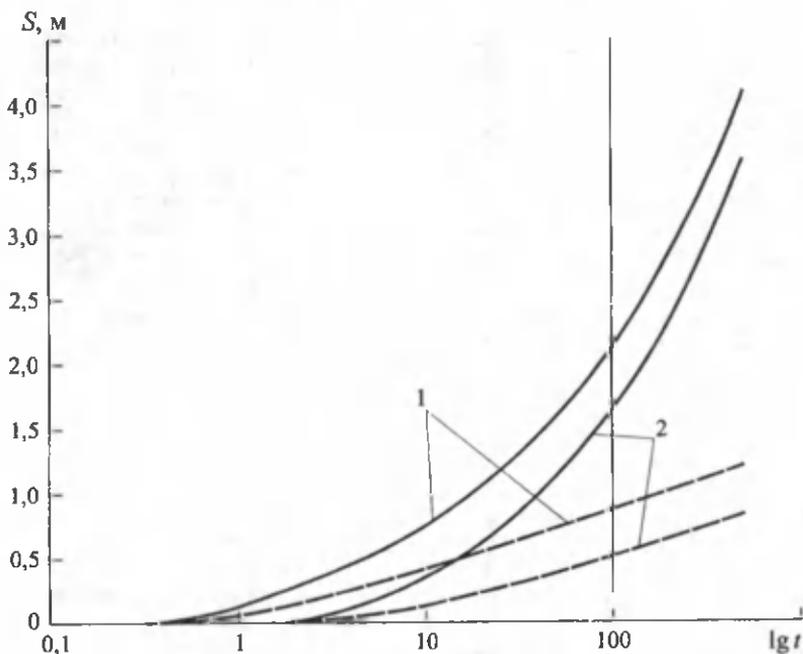


Рис. 2.14. Теоретически рассчитанные индикаторные кривые снижения уровня воды в наблюдательных скважинах 857(1) и 858(2) куста 801 при законе фильтрации с предельным градиентом (сплошные линии) и при линейном законе фильтрации на основе средних значений водопроницаемости и уровнестроительности (пунктирные линии)

Полученные результаты моделирования с одной стороны показывают, что в рамках расчетной модели вычисления произведены корректно, так как выявленная с учетом указанной разности понижений уровня величина предельного градиента напора позволила рассчитать модельную разность понижений, в точности равную установленной экспериментально. А с другой стороны – абсолютные значения модельных понижений уровня при законе фильтрации с предельным градиентом не соответствуют экспериментальным (см. табл. 2.4), точно также не соответствуют им и модельные величины понижений уровня, рассчитанные в предположении линейного закона фильтрации (как не соответствует и модельная разность понижений уровня установленной из опыта). Иными словами, в измеренных понижениях уровня содержится составляющая, не учтенная в исходной расчетной модели, она и обеспечивает те самые расхождения натуральных и модельных данных. Соответственно возникает задача выявления и оценки этой составляющей.

Так, на величинах понижения уровня в наблюдательных скважинах (а также на их разности) может сказаться наклонность подошвы водоносного пласта, причем максимально в случаях, когда скважины расположены по направлению укло-

на подошвы. В районе куста 801 уклон подошвы пласта с высокой точностью контролируют естественные уклоны грунтового потока, соответственно расчеты строятся с учетом направления луча наблюдательных скважин вдоль линий тока грунтовых вод (в ненарушенных условиях) вверх или вниз по потоку.

Заметим здесь, что для куста 801 угол между линией тока и лучом наблюдательных скважин вниз по направлению естественного потока составляет около 45° (угловых). Поэтому оценку модельных величин понижения уровня в наблюдательных скважинах куста (а тем самым — значимости рассчитанного предельного градиента G) выполним для крайних, предельных случаев, зная наверняка — реальные условия откачки тем более отвечают таким оценкам.

Решение задачи о фильтрации ПВ к скважинам при наклонном водоупоре со слабым уклоном приведено в книге П.Я. Полубариновой-Кочиной [66]. Оно (это решение) имеет вид

$$S = \frac{Q}{4\pi T} e^{-\alpha x} \int_{\lambda_0}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{r^2}{4B^2\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{Q}{4\pi T} W\left(\lambda_0, \frac{r}{B}\right), \quad (2.51)$$

где $W\left(\lambda_0, \frac{r}{B}\right)$ — "функция скважины"; $\lambda_0 = \frac{r^2}{4at}$; $B^2 = \frac{a}{\beta}$; $\beta = \frac{b^2}{4a}$; $\alpha = \frac{b}{2a}$;

$b = \frac{Ki}{\mu}$; i — уклон водоупора. Остальные обозначения прежние. Интеграл, входящий в формулу (2.51), табулирован Хантушем (*Hantush*) [91], правда, для другой задачи; в названной работе приведены таблицы значений интеграла.

Считая заданными осредненные параметры водоносного пласта (часть их приведена в табл. 2.3), рассчитаем понижения уровня в точках пласта вверх и вниз по потоку грунтовых вод, отстоящих от центра возмущения на те же расстояния, что и реальные наблюдательные скважины, на расчетный момент времени $t = 100$ ч. С использованием следующих данных по опытному кусту 801, дополняющих данные из табл. 2.3,

Среднее значение коэффициента фильтрации водовмещающих отложений K , м/сут	115,6
Расстояние до наблюдательной скважины, м:	
• первой, r_1 ;	30
• второй, r_2	75
Уклон водоупора, i	0,002

нетрудно показать: $\frac{r_1^2}{4at} = 0,008802$; $\frac{r_2^2}{4at} = 0,055012$; $\frac{r_1}{B} = 0,004250$; $\frac{r_2}{B} =$

0,010626. Отсюда по таблице [91] находим $W_1\left(\lambda_0, \frac{r_1}{B}\right) \cong 4,1651$ и $W_2\left(\lambda_0, \frac{r_2}{B}\right) \cong$

2,3813.

Подставив все теперь известные значения α , $W_1\left(\lambda_0, \frac{r_1}{B}\right)$, $W_2\left(\lambda_0, \frac{r_2}{B}\right)$,

$x_1 = r_1$ и $x_2 = r_2$ (при этом ось x направлена в сторону подъема плоскости водоупора), получаем, что для случая, когда луч наблюдательных скважин направлен вверх по уклону водоупора модельные понижения уровня в скважинах равны $S_1 \cong 0,923$ и $S_2 \cong 0,524$ м, а разность этих понижений $(S_1 - S_2) \cong 0,399$ м. Для случая, когда луч скважин направлен вниз по уклону водоупора модельные понижения имеют несколько иные значения: $S_1 \cong 0,931$ и $S_2 \cong 0,536$ м. Соответственно разность понижений $(S_1 - S_2) \cong 0,395$ м.

Таким образом, модельные понижения уровня в наблюдательных скважинах (а также и разность модельных понижений) остаются практически неизменными и соответствующими модельным значениям для откачки при линейном законе фильтрации в водоносном пласте с горизонтальным водоупором.

Итак, первый тест показал, что наклонность водоупора принципиально не может определять аномальную разность понижений уровня в наблюдательных скважинах куста 801. Кроме того, наклонность водоупора не является причиной и наблюдаемых отклонений зарегистрированных в опыте понижений уровня от модельных значений. Поэтому следует искать иное объяснение наблюдаемому в опыте явлению.

Так, в частности, все выполненные ранее вычисления строились в предположении изотропности водоносного пласта — в расчетах принимались осредненные значения фильтрационных и емкостных параметров пласта, установленных по результатам интерпретации индикаторных диаграмм временного прослеживания снижения уровня в наблюдательных скважинах куста. А между тем, параметры пласта по наблюдательным скважинам 857 и 858 заметно разнятся (см. табл. 2.5). Соответственно в следующем тесте моделируется откачка при линейном законе фильтрации и горизонтальном водоупоре, а понижения уровня в точках пласта, отстоящих от центра возмущения на те же расстояния, что и реальные наблюдательные скважины, вычисляются с учетом фильтрационных и емкостных параметров, полученных в результате интерпретации данных ОФО по этим скважинам; указанные данные приведены, как уже отмечалось ранее, в табл. 2.5. Результаты моделирования показаны на рис. 2.15.

Из рисунка видно, что модельные понижения уровня в скважине 857 больше понижений, рассчитанных при линейном законе фильтрации с учетом осредненных значений водопроницаемости T и уровнепроводности a . Для скважины 858, наоборот, модельные понижения уровня меньше рассчитанных на основе осредненных значений T и a . На расчетный момент времени $t = 100$ ч модельные понижения уровня в скважинах равны соответственно $S_1 \cong 0,922$ и $S_2 \cong 0,481$ м, а разность понижений $S_1 - S_2 \cong 0,441$ м.

Эти данные уже значительно точнее отвечают полученным из эксперимента, однако не соответствуют им полностью. Соответственно остается вероятность оценки предельного градиента. Вместе с тем, использование локальных (полученных по каждой из назначенных наблюдательных скважин) значений фильтра-

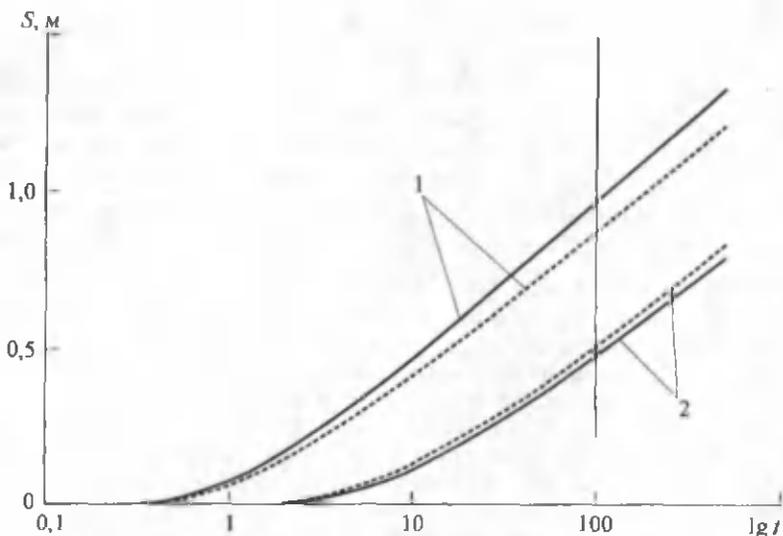


Рис. 2.15. Теоретически рассчитанные индикаторные кривые снижения уровня воды в наблюдательных скважинах 857(1) и 858(2) куста 801 при линейном законе фильтрации с учетом водопроницаемости, установленной по данным временного прослеживания уровня отдельно в каждой скважине (сплошные линии), и при линейном законе фильтрации на основе средних значений водопроницаемости и уровнепроницаемости (пунктирные линии)

ционных и емкостных параметров пласта требует преобразования расчетных формул (2.43) и (2.44); выражение, например, (2.43) преобразуется следующим образом:

$$G = \frac{(S_1 - S_2) - \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{1}{T_1} \ln \frac{l_1(t)}{r_1} - \frac{1}{T_2} \ln \frac{l_2(t)}{r_2} \right] + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) - \dots}{r_2 - r_1} \dots \quad (2.52)$$

$$\dots \frac{-\frac{Q}{2\pi} \left[\frac{1}{T_1} \ln \frac{r_1}{l_1(t)} - \frac{1}{T_2} \ln \frac{r_2}{l_2(t)} \right]}{r_2 - r_1} \dots$$

где $l_1(t)$ и $l_2(t)$ – значения длины области возмущения водоносного пласта откачкой, рассчитанные с учетом установленных по результатам интерпретации временного прослеживания понижений уровня в скважинах величин пьезо- или уровнепроницаемости, соответственно a_1 и a_2 . Остальные обозначения прежние.

Как следует из формулы (2.52), основная задача, в соответствии с которой в методе А.Г. Арье использовалась разность понижений уровня в двух наблюдате-

льных скважинах, – избавиться в расчетной формуле от значения длины (радиуса) области возмущения $l(t)$ – на самом деле не решена (как, впрочем, не удалось избавиться от него и в (2.43)). Кроме того, радиусы $l_1(t)$ и $l_2(t)$ в (2.52), рассчитываются на назначенный момент времени подбором из уравнений (2.39) и (2.41), а так как реально имеются две группы параметров, то получаются два значения предельного градиента, и вычислительная схема, включающая уравнения (2.39) и (2.41), не будет сходящейся; сходимость вычислительной схемы обеспечивается только в случае изотропности фильтрационных и емкостных параметров водоносного пласта, т.е. при единственности его установленных из опыта параметров.

Поэтому теряет смысл использовать для расчетов предельного градиента напора именно разность понижений уровня, в принципе достаточно иметь результаты временного прослеживания уровня в одной наблюдательной скважине. В этом случае расчетная формула приобретает следующий вид:

$$G = \frac{S - \frac{Q}{2\pi T} \left[\ln \frac{l(t)}{r} - 1 + \frac{r}{l(t)} \right]}{l(t) - r}. \quad (2.53)$$

Здесь все обозначения прежние.

Физический смысл уравнения (2.53) тот же, что и (2.43): при фильтрации с предельным градиентом величина понижения уровня в наблюдательной скважине S должна иметь аномально большое значение. Соответственно предельный градиент рассчитывается из разности этого аномального значения S и модельного понижения уровня при линейном законе фильтрации $\left[\ln \frac{l(t)}{r} - 1 + \frac{r}{l(t)} \right]$. Радиус

области возмущения $l(t)$ в выражении (2.53) рассчитываются на назначенный момент времени подбором из уравнений (2.39) и (2.41).

Единственной рекомендацией по использованию формулы (2.53) (как, впрочем, и всех предыдущих формул для расчета предельного градиента) является та, что следует использовать результаты прослеживания по наблюдательным скважинам, отстоящим от центра возмущения на достаточно большое расстояние. Как показано в предыдущем подразделе, для ближайших к возмущающей наблюдательных скважин велика вероятность искажения измеренного понижения уровня за счет несовершенства возмущающей скважины по степени и характеру вскрытия пласта, за счет инерционной составляющей сопротивления движению жидкости; на эти искажающие реальную картину фильтрации факторы ошибочно может быть отнесена нелинейность закона фильтрации ПВ. Очевидно, что в таком случае вычисленное значение предельного градиента не несет никакой смысловой нагрузки.

Попытаемся оценить параметры нелинейного закона фильтрации на основе уравнения (2.53). Совместное решение (2.39), (2.41) и (2.53) с учетом фильтрационных и емкостных параметров, установленных по скважине 858 (отстоящей на расстояние 75,00 м от центра возмущения) – они приведены в табл. 2.5, характеристик откачки (дебит откачки $Q = 94,97 \text{ м}^3/\text{ч}$, понижение уровня в скважине $S \cong$

0,493 м на расчетный момент времени $t = 100$ ч), дает следующие параметры нелинейного закона фильтрации: $l(t) \cong 556,96$ м; $G \cong 2,34 \cdot 10^{-5}$; $l^* \cong 18045,4$ м; $t^* \cong 3,057 \cdot 10^7$ ч. Последние значения существенно более правдоподобны по сравнению с рассчитанными ранее на основе уравнений (2.43) и (2.44) – моделирование откачки с их учетом на основе уравнения (2.39) дает понижение уровня в наблюдательной скважине 858 на тот же расчетный момент времени $t = 100$ ч, точно совпадающее со снятым с расчетной асимптоты индикаторного графика временного прослеживания уровня ($S \cong 0,493$ м).

Совершенно аналогично для наблюдательной скважины 862 куста 806, стоящей на 15,00 м от центра возмущения, расчетное понижение уровня в которой на расчетный момент времени $t = 100$ ч при дебите откачки в $Q = 24,12$ м³/ч составляет $S = 0,435$ м (известны локальные значения фильтрационных и емкостных параметров, полученных по этой скважине, – $T = 23,17$ м²/ч; $a = 164,67$ м²/ч), параметры нелинейного закона фильтрации вычислены следующими: $l(t) \cong 296,94$ м; $G \cong 3,46 \cdot 10^{-4}$; $l^* \cong 487,6$ м; $t^* \cong 1390,7$ ч. Модельное понижение уровня в наблюдательной скважине на тот же самый расчетный момент времени $t = 100$ ч точно отвечает снятому с расчетной асимптоты индикаторного графика временного прослеживания уровня.

Вместе с тем, как видно из расчетных формул, значения предельного градиента, как разность уменьшаемого и вычитаемого в числителе (2.53), существенно меньше алгебраических сумм в числителе выражений (2.43) или (2.44). А именно в результате сравнения величин случайных погрешностей этой суммы (с доверительной вероятностью 0,954-0,9973) и самой суммы был сделан вывод о недопустимости использования метода А.Г. Арбе для опытных экспериментальных оценок предельного градиента в рамках научной проблемы (при единичности эксперимента). Сказанное в еще большей степени применимо и для метода определения G по результатам интерпретации результатов временного прослеживания уровня в отдельной наблюдательной скважине с использованием формулы (2.53).

Таким образом, на основе единичных опытов, аналогичных описанному, невозможно судить о соответствии реальному процессу фильтрации выбранной физико-математической модели течения ПВ, в том числе и включающий в себя нелинейное уравнение движения. Проблема опытной регистрации параметров этого уравнения с такой точки зрения остается открытой.

С другой стороны, такой вывод далеко не бесспорен. В физике элементарных частиц давно и весьма успешно используются принципиально иные подходы для экспериментального подтверждения теоретических выкладок. В частности, вероятность экспериментальной регистрации единичного распада устойчивой частицы (например, протона), период полураспада которой может измеряться миллиардами лет, исчезающе мала. Однако если в эксперименте используется достаточно большое число таких частиц, вероятность регистрации распада за заданный (и вполне реальный) период времени повышается практически до 100 %.

Точно так же и оцениваемая в молекулярной физике вероятность столкновения отдельно взятых молекул газа весьма мала. Однако в некотором конечном макрообъеме газа такие столкновения происходят постоянно.

Таким образом, и в нашем случае вывод о нелинейности закона фильтрации, вернее, об экспериментальной регистрации нелинейности закона фильтрации при малых градиентах напора (или давления) может быть сделан только по результатам массового опробования водоносных систем. При этом если достаточно представительная экспериментальная выборка покажет однозначную тенденцию локальных экспериментов, аналогичную показанной выше на примере интерпретации индикаторного графика прослеживания уровня на основе выражения (2.53), можно будет сделать вывод о малой вероятности неслучайной подобной группировки опытных данных, и только тогда на ее счет можно будет отнести нелинейность закона фильтрации. Иными словами, только тогда можно будет говорить о решении проблемы экспериментальной регистрации нелинейности закона фильтрации, несмотря на то, что в единичных опытах параметры закона фильтрации регистрируются с весьма низкой достоверностью.

Полученные параметры закона фильтрации с предельным градиентом (в первом приближении принятые за достоверные⁶) позволяют сделать самые предварительные оценки влияния нелинейности течения ПВ, например, на их эксплуатационные запасы. Как известно, последние для месторождений ПВ в долинах рек Центрального Казахстана, имеющих крайне неравномерный сток, рассчитываются на продолжительность непрерывной сработки естественных запасов между двумя относительно многоводными паводками, полностью восстанавливающими эти запасы. Для каждой реки (в пределах каждого месторождения ПВ) такой срок обосновывается по результатам анализа обеспеченности стока и составляет, как правило, 3-8 лет.

Соответственно расчеты показывают, что на трехгодичный срок сработки естественных запасов ($t = 26300$ ч) по схеме водозабора, аналогичной схеме опытного куста 801, при том же водоотборе, что был в процессе откачки ($Q = 94,97 \text{ м}^3/\text{ч}$), понижение уровня S в точке пласта, пространственно совпадающей с местом расположения наблюдательной скважины 858 (т.е. на расстоянии 75 м от центра возмущения), при линейном законе фильтрации составит 1,607 м. При законе фильтрации с предельным градиентом понижение будет равным 1,817 м. Иными словами, дополнительное понижение уровня, обусловленное нелинейностью закона фильтрации при малых градиентах напора, достигает 0,210 м; оно примерно такое же и для возмущающей скважины. Вместе с тем, расчетная величина понижения уровня в возмущающей (водозаборной) скважине радиусом $r_0 \cong 0,20$ м достигает при линейном законе фильтрации $S_0 \cong 4,108$ м. С учетом того, что к этой величине следует добавить дополнительное понижение уровня на несовершенство возмущающей скважины по характеру вскрытия водоносного пласта (см. предыдущий подраздел), составляющее, по крайней мере, не менее 30-50 % от S_0 , можно сделать вывод – при существующем уровне доверительной вероятности (оправдываемости) расчетов эксплуатационных запасов ПВ в 80 %

⁶ Отметим здесь еще раз, что нелинейность закона фильтрации при малых градиентах напора (или давления) под сомнение не ставится – существуют фильтрационные эффекты, однозначно свидетельствующие о такой нелинейности, например, зарегистрированные в скважинах колебания уровня с собственными частотами (см. следующий раздел).

дополнительным понижением уровня на нелинейность закона фильтрации при малых градиентах напора (составляющим примерно 5 % от S_0) можно пренебречь.

Очевидно, что при большем расчетном сроке сработки естественных запасов ПВ величина дополнительного понижения уровня на нелинейность закона фильтрации возрастет, однако увеличится и расчетное понижение уровня в возмущающей скважине S_0 , так что их соотношение изменится в целом незначительно.

Последний вывод не может быть общим, он применим только к вполне конкретным условиям куста 801, для которых и выполнялись оценки параметров нелинейного закона фильтрации и оценки влияния нелинейности на закономерности течения ПВ. Соответственно такие оценки должны стать нормой при выполнении гидрогеологических расчетов и прогнозов.

В заключение следует обратить внимание на следующий факт. Установленная из опыта по кусту 801 величина предельного градиента ($G \cong 2,34 \cdot 10^{-5}$) почти на порядок меньше контрольного значения предельного градиента в крупнозернистых песках, вычисленного на основе уравнения Букингема-Рейнера для цилиндрического капилляра (см. подраздел 1.2) [89]. Аналогично величина предельного градиента по кусту 806 ($G \cong 3,46 \cdot 10^{-4}$) примерно на 0,5-1 порядок меньше контрольного значения G в мелкозернистых и глинистых песках из [89]. Такое различие определяется, по всей вероятности, несоответствием масштабов осреднения течения, положенных в основу модели фильтрации ПВ, в соответствии с которой планировались, проводились и интерпретировались полевые эксперименты, и модели движения жидкости в капилляре, использованной для тестового расчета. Таким образом, еще раз подтверждается, что анализ моделей фильтрации ПВ по масштабам осреднения течения имеет прямой выход на практические приложения теории фильтрации ПВ.

Список литературы к разделу 2

1. Алиев В.А., Гурбанов Р.С., Мамедов Г.А., Фарзана Я.Г. Обобщенный закон Дарси // Труды АЗИНХ. 1967. Вып. 26. С. 77-88.
2. Альтовский М.Е. Расчет дебита по откачкам из одиночных скважин. М.: Л.: Госгеолыздат. 1940. 115 с.
3. Арье А.Г. Исследование процесса фильтрации жидкости в пористой среде // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М., 1982. 57 с.
4. Арье А.Г. К вопросу о существовании начального градиента фильтрации // Формирование подземных вод как основа гидрогеологических прогнозов. Материалы I Всесоюзной гидрогеологической конференции. М.: Наука, 1982. Т. 1. С. 109-114.
5. Арье А.Г. Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 101 с.
6. Арье А.Г. А. с. № 1160283 СССР. Кл. G 01 № 15/08. Способ определения начального градиента фильтрации. Опубл. 07.06.1985. Бюл. № 21.

7. *Арбе А.Г.* Влияние физического взаимодействия воды и породы на процесс геофильтрации. Автореферат диссертации... доктор геол.-минер. наук. М., 1987. 44 с.

8. *Бадов В.В., Киселев А.А.* Модели геофильтрации // Обзор. Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1984. 51 с.

9. *Баренблатт Г.И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1954. № 9. С. 35-49.

10. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрация жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 289 с.

11. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.

12. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.

13. *Биндеман Н.Н., Язвин Л.С.* Оценка эксплуатационных запасов подземных вод (методическое руководство). М.: Недра, 1970. 216 с.

14. *Бондаренко Н.Ф.* Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 216 с.

15. *Боревский Б.В., Самсонов Б.Г., Язвин Л.С.* Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. М.: Недра, 1979. 326 с.

16. *Бочевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М.* Основы гидрогеологических расчетов. М.: Недра, 1969. 368 с.

17. *Брилинг И.А.* Фильтрация в глинистых породах // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М., 1984. 57 с.

18. *Бураков М.М.* К определению гидрогеологических параметров трещино-пористых пластов по результатам одиночных откачек // Генезис подземных вод. Тезисы докладов III тематической конференции молодых научных сотрудников. Иркутск: Изд-во ИЗК СО АН СССР, 1983. С. 55-60.

19. *Бураков М.М.* Исследование водоотбора в неоднородных по фильтрационным и емкостным свойствам водоносных пластах (на примере месторождений Центрального Казахстана). Автореферат диссертации... кандидат геол.-минер. наук. Алма-Ата, 1987. 25 с.

20. *Бураков М.М.* О методике полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации // Применение математических методов и ЭВМ в геологии. Тезисы докладов к IV Научному областному семинару. Новочеркасск: Изд-во НПИ, 1987. С. 73-74.

21. *Бураков М.М.* К обоснованию инерционной составляющей фильтрации при нестационарном режиме возмущения // Гидрогеологические и инженерно-геологические условия формирования подземных вод Казахстана. Алма-Ата: Изд-во КазПТИ, 1990. С. 36-42.

22. *Бураков М.М.* Модель восстановления уровня после откачки с переменным дебитом // Водные ресурсы. 1991. Т. 18. № 2. С. 38-43.

23. *Бураков М.М.* Об уравнении движения жидкости в теории релаксационной фильтрации // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1994. № 6. С. 83-88.

24. *Бураков М.М.* Об оценке достоверности фильтрационных параметров // Водные ресурсы. 1996. Т. 23. № 5. С. 539-547.

25. *Бураков М.М.* О феноменологической модели фильтрации подземных вод при малых градиентах давления // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1997. № 2. С. 97-105.
26. *Бураков М.М.* Оценка возможности определения начального градиента при опытных откачках подземных вод // Водные ресурсы. 1998. Т. 25. № 3. С. 372-374.
27. *Бураков М.М.* Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. I // Геология Казахстана. 1999. № 3. С. 85-95.
28. *Бураков М.М.* Экспериментальная оценка случайных личных погрешностей фильтрационных параметров // Вода: экология и технология. Тезисы докладов Четвертого Международного конгресса. М.: СИБИКО Интернэшнл, 2000. С. 219-220.
29. *Бураков М.М.* О величине личных случайных погрешностей фильтрационных параметров // Новые подходы и методы в изучении природных и природно-хозяйственных систем. Доклады к Международной конференции. Алматы: Казак университети, 2000. С. 158-163.
30. *Бураков М.М.* Личные случайные погрешности фильтрационных параметров // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 2000. № 6. С. 103-115.
31. *Бураков М.М.* Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. II // Геология Казахстана. 2002. № 4. С. 72-86.
32. *Бураков М.М.* Об оценках достоверности фильтрационных и емкостных параметров, полученных по данным прослеживания восстановления уровня подземных вод // Гидрометеорология и экология. 2005. № 2. С. 153-170.
33. *Бураков М.М.* Методические основы оценок случайных погрешностей фильтрационных и емкостных параметров водоносных горизонтов. Алматы: Изд-во "ProService LTD", 2007. 74 с.
34. *Бураков М.М., Гринбаум И.И.* Экспериментальное исследование фильтрации воды в песке при малых скоростях течения // Редкол. ж. Вестник АН КазССР. Алма-Ата, 1988. 10 с. Деп. в ВИНТИ, № 8505-В 88.
35. *Бураков М.М., Павличенко Л.М.* О восстановлении уровня после откачки с переменным дебитом // Вестник АН КазССР. 1989. № 10. С. 58-66.
36. *Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
37. *Веселов В.В., Бураков М.М.* Реализация принципов системности при обосновании физико-математических моделей фильтрации подземных вод // Самоорганизация природных, техногенных и социальных систем: междисциплинарный синтез фундаментальных и прикладных исследований. Материалы второй Международной конференции. Алматы: Гылым, 1998. С. 61-63.
38. *Гольдберг В.М., Скворцов Н.П.* Проницаемость и фильтрация в глинах. М.: Недра, 1986. 161 с.
39. *Гуревич А.Е.* Практическое руководство по изучению движения подземных вод при поисках полезных ископаемых. Л.: Недра, 1980. 216 с.
40. *Жанарханов С.Ж., Бураков М.М.* Определение коэффициента водоотдачи по результатам откачек из одиночных скважин // Известия АН КазССР. Серия геологическая. 1982. № 4. С. 71-75.

41. **Зеленин И.В.** Об оценке водопроницаемости по величине удельных дебитов скважин // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1979. № 2. С. 82-86.
42. **Ковалькова В.А., Саркисова А.И.** К обработке вогнутых к оси дебитов индикаторных кривых // Известия ВУЗов. Нефть и газ. 1969. № 1. С. 49-52.
43. **Костерин А.В.** О термодинамическом обосновании различных форм закона фильтрации // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1979. Вып. 3. С. 39-41.
44. **Маскет М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Л.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.
45. **Минский Е.М.** О турбулентной фильтрации в пористых средах // Доклады АН СССР. 1951. 78. № 3. С. 409-412.
46. **Минский Е.М.** О притоке газа к забою несовершенной скважины при нелинейном законе сопротивления // Труды ВНИИ. 1954. Вып. 5. С. 3-16.
47. **Мирзаджанзаде А.Х.** Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку: Азнефтеиздат, 1959. 409 с.
48. **Мирзаджанзаде А.Х., Ковалев А.Г., Зайцев Ю.В.** Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. М.: Недра, 1972. 200 с.
49. **Мирзаджанзаде А.Х., Мингареев Р.Ш., Ентов В.М., Грайфер В.И., Вахитов Г.Г., Дияшев Р.Н., Зайцев Ю.В.** О нелинейной фильтрации в слоистых пластах // Нефтяное хозяйство. 1972. № 1. С. 44-49.
50. **Мироненко В.А.** Динамика подземных вод. М.: Недра, 1983. 357 с.
51. **Мироненко В.А., Шестаков В.М.** Основы гидрогеомеханики. М.: Недра, 1974. 296 с.
52. **Мироненко В.А., Шестаков В.М.** Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М.: Недра, 1978. 325 с.
53. **Михайлов Н.В., Ребиндер П.А.** О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем // Коллоидный журнал. 1955. 17. № 2. С. 107-119.
54. **Молокович Ю.М.** Одномерная фильтрация несжимаемой вязко-пластичной жидкости. Казань: Изд-во КГУ, 1969. 88 с.
55. **Молокович Ю.М., Скворцов Э.В.** Одномерная фильтрация сжимаемой вязко-пластичной жидкости. Казань: Изд-во КГУ, 1971. 63 с.
56. **Муратов И.Б., Саттаров. М.А.** Изучение фильтрационных аномалий в природных образцах песка при низких градиентах давления. Душанбе, 1977. 15 с. Деп. в ВИНТИ, № 1468-77 Деп.
57. **Надарейшвили А.В.** Оценка водопроницаемости артезианских горизонтов по величине удельных дебитов скважин // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1974. № 11. С. 89-97.
58. **Насберг В.М.** Обобщенная формула Дюпюи-Краснопольского для напорной совершенной скважины // Известия ТНИСГЭИ. 1947. 1. С. 129-142.
59. **Нерпин С.В., Чудновский А.Ф.** Энерго- и массообмен в системе растение – почва – воздух. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 359 с.
60. **Нехорошев В.М., Филиппов Ю.Ф.** Определение коэффициента водоотдачи по результатам откачки из одиночной скважины // Геологический журнал. 1978. 38. № 6. С. 134-136.
61. **Николис Г., Пригожин И.** Познание сложного. Введение. М.: Мир, 1990. 344 с.

62. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.
63. *Основы гидрогеологии.* Гидрогеодинамика / И.К. Гавич, В.С. Ковалевский, Л.С. Язвин и др. Новосибирск: Наука, 1983. 241 с.
64. *Павилонский В.М.* Фильтрация воды в глинистых грунтах при малых градиентах напора // Фильтрация воды в пористых средах. Доклады 3 Международного симпозиума. Киев, 1978. Ч. 1. С. 75-82.
65. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.
66. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
67. *Порядин В.И.* Особенности инфильтрационного водообмена в пласте // Геология Казахстана. 2002. № 2. С. 80-98.
68. *Пузыревская Т.Н.* Просачивание воды через песчаные грунты // Известия НИИГ. 1931. 1. С. 251-256.
69. *Ребиндер П.А.* Физико-химическая механика – новая область науки. М., 1958. 78 с.
70. *Рождественский А.В., Чеботарев А.И.* Статистические методы в гидрологии. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 424 с.
71. *Самойлов О.Я.* Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 182 с.
72. *Саттаров М.А.* Вопросы фильтрации в области малых скоростей течения. Автореферат диссертации... доктор техн. наук. Киев, 1978. 44 с.
73. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
74. *Ситников А.Б.* Исследование массопереноса подземных вод в насыщенно-ненасыщенных грунтах зоны азрации. Диссертация... доктор геол.-минер. наук. Киев, 1978. 369 с.
75. *Ситников А.Б.* Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны азрации. Киев: Наукова думка, 1986. 152 с.
76. *Степочкин Б.Ф.* О двучленной формуле сопротивления пористых сред // Журнал прикладной механики и технической физики. 1962. № 3. С. 117-120.
77. *Тагильцев С.Н.* Экспериментально-теоретическая модель процесса нарушения линейного закона фильтрации и ее практическое значение // Формирование подземных вод как основа гидрогеологических прогнозов. Материалы I Всесоюзной гидрогеологической конференции. М.: Наука, 1982. Т. 1. С. 118-123.
78. *Текенбаум Л.Я., Гринбаум И.И.* Упрощенный метод расчета водопроницаемости и коэффициента фильтрации пород на основе единичного удельного дебита откачек // Разведки и охрана недр. 1965. № 2. С. 31-39.
79. *Требин Г.Ф.* Экспериментальные исследования режимов течения жидкости и газа в пористой среде // Труды ВНИИ. 1954. Вып. 3. С. 85-106.
80. *Усенко В.С., Гояор А.Н.* К исследованию работы поглощающих скважин в безнапорном пласте // Труды ВНИИВО. 1973. Вып. 2. С. 34-39.
81. *Форхгеймер Ф.* Гидравлика. М.: Л.: ОНТИ, 1935. 616 с.
82. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967. 544 с.
83. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33-52.

84. *Шаймуратов П.В.* Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980. 223 с.
85. *Шейдеззер А.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960. 250 с.
86. *Шестаков В.М.* Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М.: Изд-во МГУ, 1965. 234 с.
87. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
88. *Шестаков В.М.* Вопросы терминологии в геогидродинамике // Водные ресурсы. 1984. Т. 8. № 5. С. 156-159.
89. *Шестаков В.М.* Гидрогеодинамика. М.: Изд-во МГУ. 1995. 368 с.
90. *Birsoy Y.K., Summers W.K.* Determination of aquifer parameters from step tests and intermittent pumping data // Ground Water. 1980. 18. № 2. P. 137-146.
91. *Hantush M.S.* Analysis of data from pumping tests in leaky aquifers // Transactions. American Geophysical Union. 1956. 37. P. 702-714.
92. *Irmay S.* On the theoretical derivation of Darcy and Forchheimer formulas // Transactions. American Geophysical Union. 1958. 39. P. 702-707.
93. *Kelly J.E., Anderson K.E., Burnham W.L.* The "Cheat Sheet": a new tool for the field evaluation of wells by step-testing // Ground Water. 1980. 18. № 3. P. 294-298.
94. *King F.H.* Principles and conditions of the movement of ground-water // U.S. Geological Survey. 19-th Annual Report. 1898. 2. P. 59-297.
95. *Nahm G.Y.* Estimation transmissivity and well loss constant using multirate test data from a pumped well // Ground Water. 1980. 18. № 3. P. 281-285.
96. *Skawiński R.* Mechanizm przepływu cieczy w ośrodkach porowatych w świetle badań eksperymentalnych // Zeszyty naukowe AGH. 1974. № 459. 62 s.
97. *Schneebeli G.* Expériences sur la limite de validité de la turbulence dans un écoulement de filtration // La houille blanche. 1955. № 2. P. 141-149.
98. *Theis C.V.* The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage // Transactions. American Geophysical Union. 1935. 16. P. 519-524.
99. *Uhl V.W., Jr., Sharma G.K.* Results of pumping tests in crystalline-rock aquifers // Ground Water. 1978. 16. № 3. P. 192-203.
100. *Vries J. de.* Prediction of non-Darcy flow in porous media // Journal of the irrigation and drainage engineering. 1979. 105. № IR2. P. 147-162.

3. ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В ряде публикаций (см., например, [10, 26, 27, 32, 56]) уже рассматривались результаты теоретической интерпретации процесса свободных колебаний давления p (или напора H) в жидкости в водоносном пласте после импульсного возбуждения пласта, в том числе, на основе модели, предложенной в работах И. Краусс (*Krauss*) [60, 61]. Позже, в конце 80-х годов, появились работы С.Ф. Григоренко [10, 26], посвященные той же проблеме. Логическим завершением их стала кандидатская диссертация [27], представленная С.Ф. Григоренко к защите в 1992 г. Надо отметить, что в своих теоретических построениях он использовал физико-математическую модель движения подземных вод (ПВ), в принципе ничем не отличающуюся от той, что была предложена И. Краусс.

Необходимость развития такой теории диктуется рядом соображений. С одной стороны подобная разработка сулит создание принципиально новой экспериментальной базы в гидрогеологии; интерес к проблеме волновых процессов в водоносных пластах уже реализовался появлением методик проведения опытно-фильтрационного опробования (ОФО) водовмещающих отложений и интерпретации результатов этих опытов [10, 26, 27, 32, 60, 61]. С другой – многие аспекты названных методик слабо обоснованы теоретически, а по ряду позиций они попросту некорректны.

Полное завершение теории релаксационной фильтрации, в которой рассматривается, в том числе, и явление свободных колебаний пьезометрического уровня в скважине после импульсного возбуждения водоносного пласта, получила в работах [11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 57, 58]. В них применялся принципиально иной, в сравнении с использованным И. Краусс и С.Ф. Григоренко, подход к обоснованию физико-математической модели фильтрации. В этих работах проанализирована и возможность построения на основе выдвинутой теории методик ОФО водоносных систем.

3.1. О существующих теоретических представлениях колебаний уровня подземных вод с собственными частотами

К настоящему времени, как уже отмечалось выше, имеется значительное число публикаций, в которых изучались волновые процессы в водоносных пластах [1, 23, 32, 43, 56, 60, 61]. В этих работах в основном приводятся данные исследований вынужденных колебаний уровня ПВ в скважинах, хотя в статьях [10, 26, 27, 32, 56, 61] рассмотрены результаты полевых наблюдений, в ходе которых зарегистрированы собственные колебания уровня. В [23] априорно полагалось наличие последних, имеющих собственные частоты, и обосновывались частоты вынужденных колебаний, которые обеспечивают резонанс с собственными.

В большинстве опубликованных работ при формальном описании экспериментов использовались механические аналоги (собственные затухающие колебания груза, закрепленного на свободном конце пружины). Такие механические аналоги положены в основу формализации вынужденных колебаний уровня.

В ряде случаев описание распространения волн с собственными частотами в водоносных пластах выполняется на базе уже принятых физико-математических представлений о движении ПВ (главное из которых – линейный закон фильтрации и уравнение фильтрации параболического типа). Однако такое описание некорректно и не всегда может быть использовано при анализе волновых процессов.

Поясним сказанное примером [11]. В работе [60] предпринята попытка найти решение задачи о собственных колебаниях уровня ПВ в возмущающей скважине и водоносном пласте вблизи нее. Полагалось, что эти колебания инициируются мгновенным снижением или повышением напора в скважине (рис. 3.1). Процесс распространения волн описывается известным параболическим уравнением одномерной осесимметричной нестационарной фильтрации (1.19), записанным в понижениях в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

где $S(r, t)$ – понижение (повышение) уровня ПВ в точке пласта с координатой r

в момент времени t от начала опыта; $\chi = \frac{T}{\mu^*}$ – пьезопроводность пласта¹ (T –

водопроницаемость, а μ^* – упругая емкость водовмещающих отложений); $T = Km$ (K – коэффициент фильтрации водовмещающих отложений, m – мощность водоносного пласта).

Уравнение (3.1) решалось при следующих граничных условиях [60]:

$$S(\infty, t) = 0, \quad T r_0 \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\frac{Q(t)}{2\pi} = \frac{F_\phi}{2\pi} \frac{\partial S(r_\phi, t)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Здесь $Q(t)$ – расход осевого потока воды в стволе скважины (приток ПВ в скважину или отток из нее); $F_\phi = \pi r_\phi^2$ – площадь внутреннего поперечного сечения возмущающей скважины; r_ϕ – радиус внутреннего сечения фильтровой колонны; r_0 – радиус скважины (внешний радиус фильтровой колонны).

Решение задачи с условиями (3.2) представлено в [60] в виде

$$S(r, t) = f(r) \cdot e^{\gamma t}, \quad (3.3)$$

$$\gamma = \omega_* \left(-\beta + i\sqrt{1 - \beta^2} \right), \quad \beta < 1, \quad (3.4)$$

¹ В настоящем разделе, как и прежде, используется терминология, предложенная В.М. Шестаковым [53].

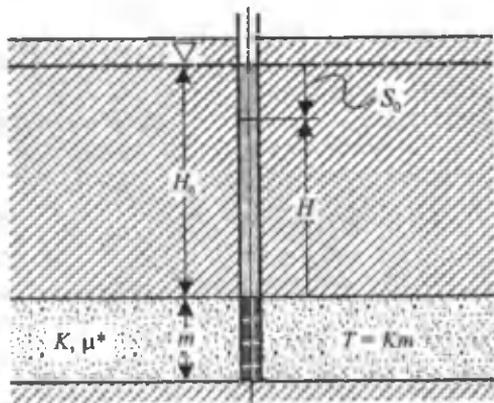


Рис. 3.1. Схема системы скважина-водоносный пласт

$$\gamma = \omega_w \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \right), \quad (3.5)$$

$$\beta > 1,$$

где $f(r)$ – некоторая функция от координаты r ; γ – параметр; ω_w – частота собственных колебаний; β – коэффициент затухания собственных колебаний.

Подстановка (3.3) в (3.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \kappa^2 f = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\gamma}{x}, \quad (3.6)$$

решение которого [51]

$$f(r) = C_1 I_0(\kappa r) + C_2 K_0(\kappa r).$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные, определяемые из граничных условий; $I_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго родов [49].

Не рассматривая здесь окончательный вид полученного в [60] решения, проанализируем сам подход к его отысканию.

Из уравнения (3.6) очевидно, что значение γ должно быть положительным. Однако в этом случае из (3.3) получается – функция $S(r, t)$ неограниченно возрастает, а это невозможно, так как дополнительная энергия в систему скважина-водоносный пласт не поступает.

В уравнении (3.5) значение γ , как нетрудно убедиться, при любом $\beta > 1$ отрицательно. Поэтому при подстановке (3.3) в (3.1) вместо уравнения (3.6) получаем [11]

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \kappa^2 f = 0. \quad (3.7)$$

Решение последнего для собственных колебаний при условии, что функция $S(r, t)$ должна оставаться конечной при $r_0 \rightarrow 0$, представляется в виде [33]

$$f(r) = C_1 J_0(\kappa r), \quad (3.8)$$

где $J_0(\kappa r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [49].

Если подставить в (3.3) значение γ из (3.5) и использовать начальное условие $S(r_0, t) = S(r_\phi, t) = S_0$ и $J_0(\kappa r_0) \rightarrow 1$ при $r_0 \rightarrow 0$ для отыскания постоянной C_1 в (3.8), то окончательно решение будет иметь вид

$$S(r, t) = S_0 \cdot e^{-\omega_w(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})t} J_0(\kappa r).$$

Отсюда следует, что при мгновенном снижении (повышении) уровня в скважине ($t = 0$) распределение понижения (повышения) напора в пласте также мгновенно приобретет вид

$$\frac{S(r, 0)}{S_0} = J_0(\kappa r)$$

(см. рис. 3.2). С течением времени изменение пьезометрического уровня в каждой точке монотонно (без колебаний) убывает по закону $Ae^{-\omega_w(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})t}$ [11].

Очевидно, показанное решение не имеет физического смысла, так как трудно объяснить возникновение стоячих волн (если их вообще можно назвать волнами) в неограниченном в плане пласте. Иными словами, оно не удовлетворяет требованию монотонности характеристик движения ПВ (в частности, распределения напора) в области фильтрации для уравнений параболического типа при отсутствии периодической составляющей вынужденных колебаний.

Если же задавать γ в виде комплексного числа [11]

$$\gamma = -(\zeta + i\omega_w)$$

(здесь ζ – параметр затухания колебаний), сходного с задаваемым в [60] из уравнения (3.4), и использовать для отыскания постоянной C_1 в (3.8) второе условие

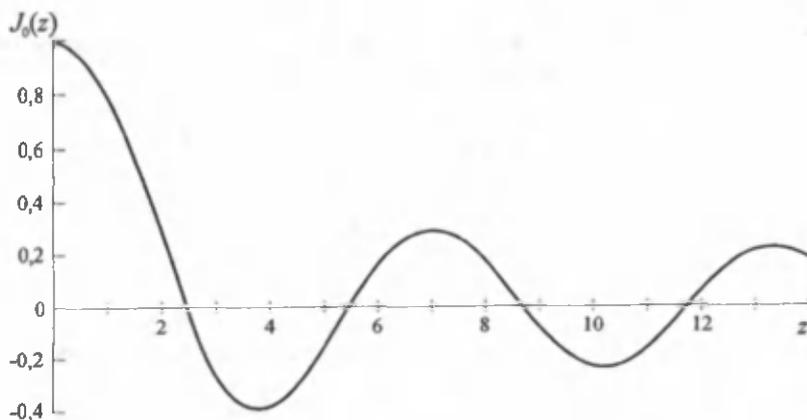


Рис. 3.2. График функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(z)$

из (3.2), то нетрудно показать, что это условие на самом деле определяет затухающие вынужденные колебания уровня воды в возмущающей скважине. Подробнее обоснование подобной задачи для плоского одномерного движения жидкости рассмотрено в работе [33]. В нашем случае решение представляется в виде цилиндрической волны –

$$S(r, t) = S_0 \cdot e^{-\epsilon t} \cos \omega_w t J_0(\kappa r).$$

До сих пор, исходя из предположения о собственных колебаниях уровня, мы рассматривали решения, соответствующие стоячим цилиндрическим волнам. Однако последние могут возникать лишь в средах конечного объема [33], а это противоречит принятой в [60] постановке задачи (пласт в ней полагается неограниченным в плане). Для вынужденных же колебаний уровня ПВ в неограниченном водоносном пласте решение уравнения (3.7) следует искать в виде, отвечающем бегущей расходящейся волне [33]. Поэтому получаем

$$S(r, t) = S_0 \cdot e^{-(\epsilon + i\omega_w)t} H_0^{(1)}(\kappa r),$$

где $H_0^{(1)}(\kappa r)$ – функция Ханкеля [49].

Таким образом, ни полученные в работе [60] решения, ни представленные выше уравнения не описывают собственные колебания уровня ПВ. Вынужденные же колебания в неограниченных водоносных пластах могут определяться волнами с произвольными частотами. Соответственно последние не обладают какой-либо однозначной связью с геометрическими и фильтрационными параметрами водоносного пласта, как предполагается в [60, 61] для собственных колебаний. Кроме того, полученное в [60] решение не имеет ничего общего с принятой в статье постановкой задачи (важно отметить, что выполненные И. Краусс экспериментальные исследования, результаты которых представлены в [61], отвечают постановке задачи, а не ее решению) о мгновенном снижении (повышении) напора в возмущающей скважине при линейном законе движения ПВ, приводящем к уравнению фильтрации параболического типа. Правильное решение задачи в такой постановке должно принципиально отличаться от приведенного в [60] главным образом отсутствием периодической составляющей изменения напора [11].

Нетрудно показать, что последнее в упрощенной постановке в изображении по Лапласу-Карсону имеет вид

$$S^0(r, t_p) = \frac{S_0 K_0(\kappa r)}{K_0(\kappa r_0) + \frac{2\mu^*}{\kappa r_0} K_1(\kappa r_0)}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{\chi t_p}. \quad (3.9)$$

Здесь $S^0(r, t_p)$ – изображение функции $S(r, t)$; t_p – параметр преобразования; $K_1(\kappa r_0)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка [49]. Остальные обозначения прежние.

Решения аналогичной задачи в более общей постановке (с учетом несовершенства возмущающей скважины по характеру и степени вскрытия водоносного пласта, а также изменения радиуса фильтра по длине), полученные с помощью метода интегральных преобразований (по Лапласу и Лапласу-Карсону), приведены в [24, 59] (в [24], кроме того, дан обзор таких решений).

Результаты численного перехода от изображений вида (3.9) к оригиналу, представленные в [24, 59] в форме эталонных кривых, позволяют выполнить качественный анализ закономерностей восстановления уровня в скважине после его мгновенного снижения или повышения. Такой анализ однозначно свидетельствует, в частности (а это главное для нас), об отсутствии собственных колебаний уровня. Таким образом, описание таких колебаний напора ПВ в водоносных пластах на основе уравнений параболического типа, как предлагается в работах [60, 61], неверно.

Позже, как уже отмечалось ранее, в конце 80-х годов прошлого века, появились работы С.Ф. Григоренко [10, 26, 27], посвященные той же проблеме. В своих теоретических построениях он использовал физико-математическую модель движения ПВ, в принципе ничем не отличающуюся от той, что была предложена И. Краусс.

Итак, выше фактически исследовались формальные проблемы распространения волн давления в водоносном пласте, однако пока не рассматривалась состоятельность самой исходной физико-математической модели движения жидкости. Остается поэтому неясным, является отмеченное несоответствие следствием частных ошибок интерпретации, либо следствием неадекватности используемой физико-математической модели наблюдаемому в экспериментах явлению. Попытаемся проанализировать здесь эту физико-математическую модель.

В соответствии с представлениями И. Краусс в уже названных статьях в качестве механического аналога процессу колебаний уровня в системе скважина-водоносный пласт выступает процесс собственных затухающих колебаний груза, подвешенного к закрепленной одним концом пружине. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta\omega_w \frac{dz}{dt} + \omega_w^2 z = 0, \quad (3.10)$$

где z — координата смещения груза относительно положения равновесия (вдоль вертикальной оси z). Остальные обозначения прежние. Далее, в работе [60], представленная модель записывается для столба жидкости в стволе скважины.

И. Краусс приводит решение задачи о свободных колебаниях груза [60]; это же самое решение для затухающих колебаний приведено в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [35]. Не будем подробно останавливаться на его изложении, рассмотрим лишь физические предпосылки, использованные при обосновании уравнения (3.10) и достаточно подробно изложенные в той же монографии [35]. Параллельно будем прослеживать вывод уравнения движения, полученного И. Краусс на основе этих предпосылок.

В работе [35] указывается, что при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение, следствием чего, собственно говоря, и являются затухающие колебания. Энергия движущегося тела при этом переходит в тепло или диссипируется. Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим, его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния, как среды, так и тела. Однако, как отмечается в [35], существует категория явлений, для которых движение в среде может быть описано с помощью механических уравнений движения введе-

нием в них некоторых дополнительных членов. Сюда относятся, в частности, и колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия допустимо считать, что на тело действует сила трения, зависящая только от его скорости.

Если эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело сила трения не действует, а первый не исчезающий член пропорционален скорости [35]. Соответственно будем считать, что движущаяся ламинарно в стволе скважины жидкость испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости движения. Считая далее жидкость чисто вязкой, и пренебрегая изменением ее массы в скважине, силу сопротивления (трения) запишем в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha \frac{dz}{dt}, \quad (3.11)$$

где α – положительный коэффициент. Знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную направлению вектора скорости движения тела (столба воды в стволе скважины).

Снизу на столб воды в стволе скважины действует сила давления со стороны водоносного пласта, составляющая

$$f_p = -\pi r_\phi^2 [p_0 - p(r_\phi, t)],$$

где r_ϕ – как и прежде, радиус внутреннего сечения фильтровой колонны, $p(r_\phi, t)$ – текущее значение давления в жидкости во вскрытой скважиной части водоносного пласта (т.е. в самой скважине), а p_0 – давление в жидкости в невозмущенном пласте.

По принципу Даламбера сумма сил, действующих на систему материальных точек, равна силе инерции [28]. Последняя в пренебрежении изменением массы жидкости в скважине есть

$$f_{\text{ин}} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Отсюда получаем для $r = r_0$

$$-m \frac{1}{t_0} \frac{\partial z}{\partial t} - m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \pi r_\phi^2 [p_0 - p(r_\phi, t)],$$

или, после несложных преобразований, –

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial z}{\partial t} = g \left(1 - \frac{H_0}{H} \right), \quad (3.12)$$

где m – масса жидкости в стволе скважины; $p = \rho g H$ и $m = \rho \pi r_\phi^2 H$; H – пьезометрический напор в скважине; H_0 – пьезометрический напор в невозмущенной скважине; t_0 – характерное время.

Последнее уравнение полностью совпадает с уравнением свободных затухающих колебаний столба воды в стволе скважины, использованным в работах [60, 61].

Необходимо обратить внимание на то, что слагаемое (3.11) вошло в алгебраическую сумму (3.12) в виде $-\frac{m}{t_0} \frac{\partial z}{\partial t}$, иными словами в (3.12) полагается, что

$$\alpha = \frac{m}{t_0}. \quad (3.13)$$

Такое преобразование следует из введенного в [35] соотношения

$$\frac{\alpha}{m} = 2\beta,$$

определяющего коэффициент α через параметры процесса собственных затухающих колебаний – массу груза, закрепленного на свободном конце пружины m ,

и коэффициент затухания колебаний β . Имея ввиду, что $\beta = \frac{1}{2t_0}$ [12] (см. также следующий подраздел), без труда можно перейти от последнего выражения к соотношению (3.13).

При анализе полученных уравнений свободных затухающих колебаний необходимо обратить внимание на два обстоятельства, определяющих физические особенности представленной модели, которые были полностью проигнорированы в [60]. Во-первых, модель обосновывалась применительно к системе с сосредоточенными параметрами. Соответственно масса движущегося тела в (3.12) предполагается сосредоточенной в ограниченном объеме пространства, так что в соответствии с записью уравнений (3.10) и (3.12) сила упругости пружины оказывается приложенной ко всей массе тела. Во-вторых, уравнение (3.12), как уже отмечалось выше, справедливо для изолированной диссипативной системы, при этом система ограничивается только стволом скважины. Иными словами, в модели затухающих колебаний уровня в скважине по условию не предусмотрен обмен энергией и материей (водой) между скважиной и водоносным пластом. Источником энергии самих колебаний уровня может быть только энергия упругого сжатия жидкости в стволе скважины.

Для того чтобы преодолеть это затруднение, в работах [10, 26, 27, 60, 61] воздействие на пласт в модели предлагается учитывать граничным условием вида (3.2), записанным в [60] в следующем виде.

$$-Tr \left. \frac{\partial H(r, t)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow r_0} = \frac{Q(t)}{2\pi} = r_\phi^2 \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Здесь $H(r, t)$ – пьезометрический напор в точке водоносного пласта с координатой r в момент времени t от начала возмущения; остальные обозначения прежние.

Однако это граничное условие на самом деле введено искусственно и неправомерно, так как, повторимся, изолированная диссипативная система не может обмениваться массой с другими системами, обмен энергией для изолирован-

ной системы также запрещен. Таким образом, условие вида (3.14) связывает две системы, изначально (при выводе уравнения движения) не связанные. Собственные затухающие колебания при этом рассматриваются обособленно в изолированной колебательной системе – скважине, а условие (3.14), хоть и неправомерно, должно обеспечивать описание в модели И. Краусс и С.Ф. Григоренко передачи силового воздействия колебаний этой системы на водоносный пласт. Иными словами, согласно подходу к описанию распространения колебаний в водоносном пласте, берутся две самостоятельные задачи движения жидкости: одна описывает колебания столба воды в стволе скважины с собственными частотами (в изолированной системе, не предполагающей обмен массой и энергией с другими системами, а затухание колебаний в этой системе определяется только трением жидкости о внутренние стенки скважины), другая описывает вынужденные колебания уровня в водоносном пласте (исключая собственно скважину) – открытой системе при линейном законе фильтрации и в отсутствие инерционной составляющей сопротивления движению жидкости. Обе эти системы искусственно связываются условием (3.14). В этом случае, действительно, распространение волн в водоносном пласте может описываться уравнением фильтрации параболического типа, однако при этом не имеет никакого значения все приведенные построения с целью формального описания колебаний уровня с собственными частотами в работах И. Краусс и С.Ф. Григоренко.

Вообще вызывает недоумение то, что в работах И. Краусс для построения физико-математической модели колебаний столба воды в скважине с собственными частотами используется аналогия с колебаниями груза, подвешенного на свободном конце пружины, жестко закрепленной другим концом, т.е. что используется кинематическая модель. Такая модель не обеспечивает оценку собственных частот на основе параметров самой системы (например, модуля сжатия воды, ее плотности).

А между тем такая возможность очевидна. Ведь если пренебречь, как это принято в работе И. Краусс [60], изменением массы жидкости в стволе скважины, то неизбежно приходим к задаче о продольных собственных колебаниях стержня (длиной H_0) с закрепленным одним концом, подробно рассмотренной в работе [34] (это гидродинамическая модель). А такое решение уже обеспечивает возможность вычисления собственных частот таких колебаний, исходя из параметров материала (жидкости), из которого изготовлен стержень, и его геометрических характеристик (длины). В силу изолированности такой колебательной системы эти частоты никак не зависят от фильтрационных параметров и пространственных размеров водоносного пласта.

Необходимо подчеркнуть следующее. Ранее² нами со ссылкой на работу [7] приводилось обоснование изотермического процесса фильтрации жидкости в пористой среде. Вместе с тем, если в деформируемом теле происходит движение, то температура такого тела, вообще говоря, не постоянна, а меняется со временем и от точки к точке вдоль тела. Это обстоятельство существенно усложняет точные уравнения движения.

² См. подраздел 1.3.

Однако положение упрощается вследствие очень медленной передачи тепла из одного участка тела к другому (посредством простой теплопроводности). Если можно принять, что теплообмен практически не происходит в течение промежуточных времени порядка периода колебательных движений в теле, то каждый участок тела рассматривается как теплоизолированный, т.е. движение представляется адиабатическим [34]. Соответственно в качестве расчетных величин модуля сжатия берутся их адиабатические значения.

Продольные колебания в стержне (вдоль вертикальной оси z , совпадающей с продольной осью стержня) описываются уравнением вида [34]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{\rho}{(E_\rho)_{ад}} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \quad (3.15)$$

где $(E_\rho)_{ад}$ – адиабатическое значения модуля сжатия; ρ – как и прежде, плотность материала стержня (воды в стволе скважины). Остальные обозначения прежние.

В уравнении (3.15) отсутствует член, определяющий сопротивление движению жидкости в стволе скважины за счет ее трения о внутренние стенки скважины. Соответственно колебания получаются незатухающими. Очевидно, что это определенная абстракция, однако уравнение (3.15) обеспечивает вполне достоверную оценку собственных частот колебаний уровня воды в скважине.

На закрепленном конце стержня (на уровне кровли напорного пласта), при $z = 0$, должно быть $H = 0$, а на свободном конце (статический пьезометрический уровень воды в скважине), при $z = H_0$, $-\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ [34].

Решение уравнения (3.15) отыскивается в виде [34]

$$H = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz, \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{(E_\rho)_{ад}}}$$

Здесь все обозначения прежние.

Из условия при $z = H_0$ имеем $\cos kH_0 = 0$, откуда для собственных частот получается

$$\omega = \sqrt{\frac{(E_\rho)_{ад}}{\rho}} \frac{\pi}{2H_0} (2N+1), \quad (3.16)$$

где N – целые числа.

Связь адиабатического и изотермического модулей сжатия воды выражается уравнением [34]

$$\frac{1}{(E_\rho)_{ад}} = \frac{1}{E_\rho} - \frac{T\alpha^2}{c_p}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad (3.17)$$

где E_p – как и прежде, модуль сжатия воды (изотермический); T – абсолютная температура воды; c_p – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении; α – относительное изменение объема воды V при нагревании.

Учитывая, что температура воды в стволе скважины при инициации колебаний уровня по методике И. Краусс и С.Ф. Григоренко реально изменяется только на доли градуса, с большой точностью относительным изменением объема воды при нагревании α можно пренебречь, т.е. в первом уравнении в (3.17) можно считать $(E_p)_{Ad} \cong E_p$. Кроме того, как следует из уравнения (3.16), такая предпосылка (с учетом $N = 0$) обеспечивает абсолютную минимальную оценку собственной частоты колебаний уровня.

Выполним здесь такую оценку. Взяв модули сжатия воды $E_p = 2,03 \cdot 10^9$ Па [7, 8], плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, пьезометрический напор $H_0 = 100$ м и N , как уже отмечалось, равным 0, из уравнения (3.16) получаем, что вероятная минимальная собственная частота колебаний пьезометрического уровня в стволе скважины $\omega \cong 22,4$ с⁻¹. Очевидно, что, как следует из (3.16), при уменьшении H_0 и увеличении N собственные частоты должны возрасть.

Из приведенного теста следует – характерное минимальное значение частоты собственных колебаний уровня в скважине (повторимся, рассматриваемой как изолированная система) многократно (приблизительно на 2-3 порядка) превышают частоты, полученные при ОФО реальных водоносных пластов и равные по порядку величин $\omega \cong n(10^{-2}-10^{-1})$ с⁻¹. Это определяется в первую очередь малой сжимаемостью воды. Тогда становится непонятным, а чем, собственно, определяются колебания уровня в скважине с собственными частотами порядка $\omega \cong n(10^{-2}-10^{-1})$ с⁻¹, зарегистрированные в опытах [60, 61]?

Возникает подозрение, что кинематическая модель колебания груза, подвешенного на свободном конце пружины, использованная в качестве аналога для описания свободных колебаний пьезометрического уровня в скважине, выбрана намеренно, и именно потому, что не позволяет выполнять тестовые расчеты с целью оценки ее применимости. Она попросту не предназначена для вычисления собственных частот с применением "внутренних" параметров колебательной системы – массы подвешенного груза, геометрических параметров (например, длины) пружины и ее жесткости; модель не содержит физических предпосылок колебаний. Кстати, по этой причине вся физическая интерпретация собственных колебаний уровня в скважинах в работах С.Ф. Григоренко [10, 26, 27] сводится к рассуждениям о некоторых "переходных процессах" в системе скважина-водоносный пласт.

Кроме того, отсутствие строгих исходных физических представлений о процессе позволяет произвольное и без каких-либо обоснований оперирование (в том числе, и введение новых) граничными условиями системы. Таким образом и введено условие водообмена в кинематическую модель.

Необходимость обеспечения непротиворечивой интерпретации процесса колебаний пьезометрического уровня в скважине невольно вызывает прямую ас-

социацию с колеблющимся в скважине грузом, закрепленным на свободном конце пружины (см. рис. 3.3), подсказанную представлениями о колебательных процессах, использованными в работах [60, 61]. Только в этом случае появляется необходимый для инициирования колебаний источник энергии, при этом частоты собственных колебаний столба воды в скважине будут определяться не параметрами этого столба (его длиной H_0 и сжимаемостью воды), а характеристиками пружины и инерцией подвешенного к ней груза. Затухание колебаний будет определяться трением груза о воду.

Однако тогда однозначной становится исходная предпосылка о том, что и колебания столба воды в стволе скважины и колебания давления (или пьезометрического напора) в водоносном пласте (за пределами собственно возмущающей скважины) будут *вынужденными*. А тогда безразличным становится, какого типа уравнением (параболическим или какого-либо иного типа) будет описываться процесс распространения волн давления в водоносном пласте.

Итак, система, в которой могут наблюдаться колебания с собственными частотами, должна быть либо изолированной, но единой (т.е. колебания должны рассматриваться как единый процесс сразу во всей системе), либо в открытой системе, изначально связанной с другой системой, только в этом случае возможен обмен массой (водой) и энергией между водоносным пластом и скважиной. При этом источником колебаний должен быть водоносный пласт, а опытная скважина должна рассматриваться как реагирующая система, хотя первичное воздействие на пласт производилось именно через скважину.

Для того чтобы систему открыть, необходимо ввести потоковую составляющую [44]. В качестве такой потоковой составляющей, открывающей механическую систему, можно рассмотреть уравнение фильтрации ПВ. При этом потоковая составляющая рассматривается применительно к системе (водоносному пласту) с рассредоточенными параметрами, поэтому она должна быть градиентной.

Повторим заново вывод уравнения, обеспечивающего описание свободных затухающих колебаний пьезометрического уровня в скважине с собственными частотами, с учетом потоковой составляющей.

Итак, на жидкость в скважине в соответствии с третьим законом Ньютона действует сила со стороны жидкости в водоносном пласте. Учитывая закономерность изменения напора в водоносном пласте в процессе его возмущения, и пренебрегая изменением массы жидкости в скважине, эту силу представим в виде

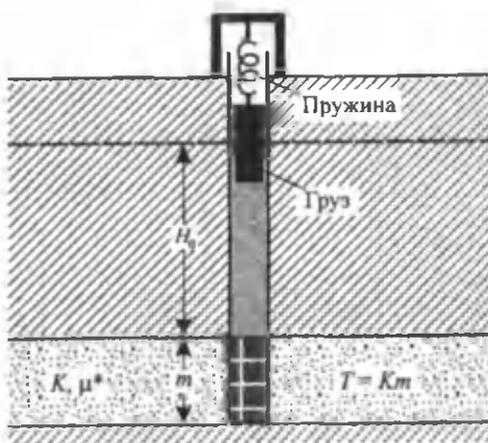


Рис. 3.3. Схема инициации колебаний пьезометрического уровня в скважине по И. Краусс [50]

$$f_p = m \frac{\chi}{t_0} \Delta H(r_0, t).$$

Здесь t_0 – как и прежде, характерное время; $H(r_0, t)$ – напор в точке водоносного пласта с координатой r_0 (на стенке скважины) в момент времени t от начала возмущения; Δ – оператор Лапласа. Это и есть та самая потоковая составляющая, обеспечивающая открытость системы скважина – водоносный пласт.

Движущаяся ламинарно в стволе скважины жидкость испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости движения. Считая жидкость чисто вязкой, и снова пренебрегая изменением ее массы в скважине, силу сопротивления (трения), так же, как и в (3.11), запишем в виде

$$f_{mp} = -\frac{m}{t_0} \frac{\partial H(t)}{\partial t}.$$

Как и раньше, по принципу Даламбера считаем, что сумма сил, действующих на систему материальных точек, равна силе инерции. Последняя в пренебрежении изменением массы жидкости в скважине есть

$$f_{in} = m \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}.$$

Отсюда, используя принцип неразрывности, иными словами, полагая, что $H(r_0, t) = H(t)$, где $H(t)$ – как и прежде, пьезометрический напор в скважине, получаем для $r = r_0$

$$-m \frac{1}{t_0} \frac{\partial H}{\partial t} + m \frac{\chi}{t_0} \Delta H = m \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (3.18)$$

Так как в (3.18) все силы действуют на одну и ту же массу жидкости, то это уравнение можно упростить и записать в виде

$$t_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} - \chi \Delta H = 0 \quad \text{или} \quad t_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial t} - \chi \Delta p = 0,$$

где, как и прежде, $p = \rho g H$.

Таким образом, правильная формулировка задачи приводит к уравнению фильтрации совершенно другого типа, в сравнении с использованным в работах И. Краусс и С.Ф. Григоренко, – к гиперболическому (волновому) уравнению. При этом введение потоковой составляющей принципиально изменяет характеристики системы – частоты собственных колебаний в такой системе определяются уже геометрическими и фильтрационными параметрами возмущенной части водоносного пласта.

Однако из последнего уравнения еще не ясно, как могут быть описаны колебания уровня в водоносном пласте с собственными частотами, ведь пока ничего не сказано о геометрических параметрах возмущенной области в водоносном пласте, а ранее неоднократно подчеркивалось со ссылкой на Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [33], что собственные частоты сильно зависят от геометрических характеристик этой области, ее ограниченности в плане. Иными словами, на первый

план выступает вопрос, если при проведении ОФО водоносного пласта зафиксированы колебания пьезометрического уровня с собственными частотами, то неизменным условием этого должно быть условие ограниченности в плане области возмущения. Какими физическими предпосылками определяется такое условие? Каков в этом случае становится физический смысл характерного времени t_0 ? Ответы на эти вопросы в соответствии с принципом конструктивизма требуют фактически разработки новой модели фильтрации (теории), обеспечивающей адекватное описание процесса распространения волн давления (или напора) в водоносном пласте.

3.2. Физико-математическая модель релаксационной фильтрации

Рассмотрим физико-математическую модель движения ПВ, обеспечивающую, в том числе, описание свободных колебаний пьезометрического уровня. Обоснование и подробное изложение ее дано в работах [12, 14, 20], по которым и будет строиться настоящий раздел. Полная формулировка этой модели заключается в составлении на основе уравнений неразрывности, состояния и закона фильтрации дифференциальных уравнений для распределения давления в жидкости p или напора H [18]. Положим при этом, что жидкость (ПВ) движется в изолированном однородном и изотропном пласте.

Из теоретической гидромеханики известно, что свободные колебания определяются монохроматическими стоячими волнами [33]. Напомним в связи с этим два очевидных положения, лежащих основой представлений о таких волнах, — стоячие волны образуются в ограниченном объеме проводящей среды, а их описание и анализ должны выполняться на базе уравнений фильтрации гиперболического типа (волновых уравнений). Эти положения, тем не менее, так или иначе, проигнорированы при теоретическом обосновании названных выше методов. Рассмотрим подробнее физические предпосылки реализации этих положений.

В разрезе водоносный пласт по условию выделен непроницаемыми твердыми горизонтальными поверхностями — подошвой и кровлей. Замкнутость пространства, в котором распространяются волны, в плане в пласте, в принципе имеющем большую протяженность, обуславливается структурированностью фильтрующейся жидкости, реализующейся нелинейностью закона фильтрации при малых градиентах давления, в частности, существованием начального (предельного) градиента в жидкости (модуль его равен G). Нелинейность закона фильтрации такого рода установлена многочисленными экспериментальными исследованиями (подробнее см. раздел 2). Вертикальные поверхности, на которых в краевых частях области возмущения выполняется условие $|\text{grad } p| = G$, ограничивают область возмущения в плане. Во внешней части водоносного пласта жидкость ведет себя как твердое тело [12].

Следует подчеркнуть, что опытная регистрация свободных колебаний со стабильными частотами свидетельствует об устойчивом пространственном положении внешней границы области возмущения, а, следовательно, наиболее обос-

нованным с этой точки зрения (при безынерционном движении жидкости) выступает закон фильтрации вида [7, 8, 12, 16]

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \left(\text{grad } p - G \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right),$$

где, как и прежде, v – модуль вектора скорости фильтрации; k – проницаемость проводящей (пористой) среды; η – вязкость жидкости. Бародиффузионный перенос, в который трансформируется фильтрационный на этой границе, в силу несоизмеримо меньшей скорости диффузии в сравнении со скоростью фильтрации не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на пространственное положение границы [12].

При импульсном возбуждении водоносного пласта должна возникнуть, по крайней мере, одна бегущая цилиндрическая волна. На ее переднем фронте градиент давления намного превышает предельный, однако, с продвижением волны происходит ее выполаживание, и на некотором расстоянии R от оси возмущающей скважины градиент давления на фронте волны становится равным предельному, ее продвижение прекращается, и бегущая волна отражается внутрь возмущенной области.

В процессе движения такой волны структура жидкости полностью разрушается. Восстановление ее происходит диффузионным путем [6] – очень медленно по сравнению с разрушением, поэтому рассматривать условия влияния восстановления структуры на закономерности колебаний пьезометрического уровня для кратковременного возмущения нет смысла. Соответственно закон фильтрации жидкости (при безынерционном движении) в возмущенной области становится линейным.

В основу волнового уравнения фильтрации кладутся обычно представления о релаксационных явлениях в жидкостях [34, 36]¹. Максвеллом на базе таких представлений выдвинуто положение об отсутствии принципиальных различий в механических свойствах жидкостей и твердых тел. При кратковременном воздействии на жидкости они упруго деформируются; после прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие со временем. Если период $\frac{1}{\omega}$ изменения внешней (меняющейся с частотой ω) силы велик по сравнению с продолжительностью затухания напряжений τ_0 , $\omega \tau_0 \ll 1$, то жидкость будет вести себя как обычная вязкая жидкость. При достаточно больших частотах, когда $\omega \tau_0 \gg 1$, жидкость будет вести себя как аморфное твердое тело [34].

Примем наиболее простое предположение о законе затухания внутренних напряжений (после прекращения движения), будем считать, что оно происходит по простой экспоненциальной зависимости (имеющей, кстати говоря, солидное

¹ Так как в основу рассматриваемой в настоящем подразделе физико-математической модели фильтрации кладутся представления о релаксационных явлениях, то и сама модель обозначена нами, вслед за Ю.М. Молоковичем [39], как "модель (или теория) релаксационной фильтрации". Это отражено также и в названии раздела.

теоретическое и экспериментальное обоснование [50]). Последней отвечает аналогичная зависимость для деформаций сдвига, приобретающая в терминах фильтрационной феноменологической модели вид $\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \bar{v}$, где t – время.

Нетрудно видеть, что уравнение

$$\bar{v} + \tau_0 \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p \quad (3.19)$$

приводит к правильным результатам в обоих предельных случаях кратковременного и продолжительного воздействия на жидкость в пористой среде, а потому может служить интерполяционным уравнением для промежуточных случаев. Так, для периодического движения, когда $\text{grad } p$ и \bar{v} зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$ [34], из (3.19) имеем

$$\bar{v} = -\frac{1}{(1-i\omega\tau_0)} \frac{k}{\eta} \text{grad } p.$$

При $\omega\tau_0 \ll 1$ эта формула дает

$$\bar{v} = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p, \quad (3.20)$$

т.е., получаем закон фильтрации вязкой жидкости (закон Дарси), а при $\omega\tau_0 \gg 1$

$$\frac{k}{\eta} \text{grad } p = i\omega\tau_0 \bar{v} = -\tau_0 \frac{d\bar{v}}{dt} -$$

выражение, аналогичное выражению для касательных напряжений в твердом теле, записанное в терминах фильтрационной модели.

Уравнение (3.19) аналогично уравнению движению упруго-вязкой жидкости [40].

Для того чтобы замкнуть систему уравнений фильтрационной модели, воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{v}) = 0$$

(n – пористость проводящей среды; ρ – плотность жидкости), а также тем, что свойства жидкости, так же как и пористость, и проницаемость проводящей среды, являются функциями давления. Как уже было показано в разделе 1 (см. (1.16)), в предположении слабой сжимаемости жидкости и пористой среды [7, 8]

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho_0}{E_p}, \quad \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{n_0}{E_n}, \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{k}{\eta} \right) = \frac{k_0}{\eta_0 E_k}. \quad (3.21)$$

где n_0 , k_0 , ρ_0 , η_0 – соответственно пористость и проницаемость среды, плотность и вязкость жидкости при давлении p_0 (невозмущенный пласт); E_p , E_n и E_k – модули объемного сжатия воды и пористой среды.

Подстановка в уравнение неразрывности уравнений состояния из (3.21) и закона фильтрации (3.19) приводят к соотношению, аналогичному волновому уравнению теплопроводности [36],

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \Delta p, \quad \chi = \frac{k_0}{\eta_0} \left(\frac{n_0}{E_p} + \frac{1}{E_n} \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Здесь χ – пьезопроводность отложений; Δ – оператор Лалласа. Остальные обозначения прежние

Для завершения постановки задачи необходимо определить начальные и граничные условия. Рассмотрим задачу о распространении волн с собственными частотами в водоносном пласте после импульсного возбуждения его через возмущающую скважину, например, по методике, предложенной в работах [10, 26, 27, 60, 61]. Согласно ей пьезометрический уровень в скважине с загерметизированным устьем отдавливается сжатым воздухом, затем скважина выдерживалась при постоянном давлении газа до стабилизации динамического уровня воды в ней (с максимальным перепадом давления p^0) и давления в возмущенной области. В момент времени $t = 0$ устье скважины разгерметизируется, и избыточное давление воздуха в ней резко сбрасывается, в результате чего в водоносном пласте инициируются волны с собственными частотами, проявлением которых в возмущающей скважине являются свободные колебания пьезометрического уровня ПВ; ограничимся здесь рассмотрением установившегося процесса колебаний уровня. На внешней границе области возмущения, на расстоянии R от ее центра,

выполняются условия $\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R-0} = 0$ и соответственно $v = 0$ [12].

Пренебрежем для простоты и обзорности решения емкостью скважины. Преобразуем уравнение (3.22) для цилиндрических волн следующим образом [12]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\tau_0}{\chi} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (3.23)$$

Решение задачи будем искать в виде [12, 33]

$$p(r, t) = A e^{-(\beta+i\omega)t} \cdot f(r), \quad (3.24)$$

где A – некоторая постоянная; p – изменение давления относительно начального p^0 ; β – коэффициент затухания колебаний; $f(r)$ – некоторая функция от координаты.

Подстановка (3.24) в (3.23) дает для функции $f(r)$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \kappa^2 f = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\tau_0}{\chi} \left(\omega^2 - \beta^2 + \frac{\beta}{\tau_0} \right) + \frac{1}{\chi} (1 - 2\beta\tau_0) i \omega. \quad (3.25)$$

Это – уравнение функций Бесселя нулевого порядка. В стоячей цилиндрической волне p должно оставаться конечным при $r_0 \rightarrow 0$ (r_0 – радиус скважины); соот-

ветствующим решением является $J_0(\kappa r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [33, 49].

Таким образом, (3.24) можно представить в виде

$$p(r, t) = p^0 e^{-(\beta + i\omega)t} \cdot J_0(\kappa r).$$

Ограничимся в нем действительной частью, имеем [12]

$$p(r, t) = p^0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t \pm \phi) \cdot J_0(\kappa r), \quad (3.26)$$

где ϕ – фазовый угол.

Из асимптотического представления функций Бесселя следует, что аргумент в $J_0(\kappa r)$ должен быть действительным числом. Поэтому во втором уравнении (3.25) необходимо положить $\text{Im} \kappa^2 = 0$ и $2\beta\tau_0 - 1 = 0$, откуда, в частности, следует соотношение $\beta = \frac{1}{2\tau_0}$. Соответственно вместо второго уравнения в (3.25) получаем [12]

$$\kappa^2 = \frac{\tau_0(\omega^2 - \beta^2) + \beta}{\chi}. \quad (3.27)$$

Рассматриваемая колебательная система имеет бесконечное число частот собственных колебаний, необходимо только, чтобы в радиусе области возмущения укладывалось целое число полуволн: $\kappa R = \frac{\lambda_N}{2} N$ (λ_N – длина волны, $N = 1, 2, \dots$). Имеющееся граничное условие обеспечивает оценку этих частот. Возьмем

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=R} = -p^0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t \pm \phi) \cdot \kappa J_1(\kappa R) = 0,$$

откуда $J_1(\kappa R) = 0$. Последнее уравнение имеет счетное множество корней $j_{1,N}$:

$$\kappa_N R = j_{1,N}.$$

Тогда с учетом (3.27) получаем [12]

$$\omega_N = \sqrt{\frac{j_{1,N}^2 \cdot c^2}{R^2} - \beta^2} = \sqrt{\omega_{0N}^2 - \beta^2}. \quad (3.28)$$

Здесь $c = \sqrt{\frac{\chi}{\tau_0}}$ – скорость распространения волн [36]; $\frac{j_{1,N} \cdot c}{R} = \omega_{0N}$ – собственные частоты колебаний при отсутствии сил трения (резонансные частоты).

Выражение (3.26) описывает свободные колебания давления в жидкости, амплитуда которых уменьшается на протяжении опыта по экспоненциальному закону. Пучности и узлы давления целиком определяются максимумами, минимумами и нулями функции $J_0(\kappa r)$. Очевидно – полученное решение существует

для всех значений β , ω_N и τ_0 , удовлетворяющих условиям $2\beta\tau_0 - 1 = 0$ и $\tau_0\omega_N^2 > \beta(\beta\tau_0 - 1)$.

Модель релаксационной фильтрации построена нами в предположении слабого демпфирования, когда $\beta \ll \omega_0$, т.е. зарегистрированная собственная частота лишь немного меньше резонансной. При сильном демпфировании, когда $\omega_0^2 < \beta^2$, величина ω становится мнимой. В этом случае комплексное решение, имеющее физический смысл, не существует; разным знакам в выражении (3.28) должны соответствовать два независимых решения [47], однако тогда приходим к задаче, для которой нет нетривиальных решений. Поэтому ограничимся только одним из независимых решений, причем знак перед $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ выбираем из условия излучения волны по направлению от скважины.

С другой стороны функция $f(r) \sim J_0(\kappa r)$, где $\kappa^2 = \frac{\nu - \nu^2 \tau_0}{\chi}$ и

$\nu = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > 0$, получаемая из уравнения (3.25), существует лишь в области значений ω_0 и β , для которой $\nu\tau_0 < 1$, т.е. при очень малых значениях ν . Тогда решение показывает, что сразу после импульсного воздействия на пласт в области возмущения распределение давления становится аналогичным стоячей волне; в дальнейшем отклонение давления от начального в каждой точке области, не совершая колебаний, закономерно уменьшается.

В случае, когда $\nu\tau_0 > 1$, вместо (3.25) получаем [12]

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \kappa^2 f = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\nu^2 \tau_0 - \nu}{\chi}.$$

Решением последнего уравнения является функция [49, 51]

$$f(r) = C_1 I_0(\kappa r) + C_2 K_0(\kappa r). \quad (3.29)$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные; $I_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ – как и прежде, модифицированные функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго родов.

Поскольку при $r \rightarrow \infty$, $I_0(\kappa r) \rightarrow \infty$, в (3.29) следует положить $C_1 = 0$. Из условия при $t = 0$ и $r = r_0$ находим постоянные AC_2 , откуда решение задачи приобретет вид [12]

$$p(r, t) = A^* e^{-\nu t} \cdot K_0(\kappa r), \quad A^* = \frac{P^0}{K_0(\kappa r_0)}, \quad (3.30)$$

показывающий – процесс восстановления давления в пласте уже не определяется стоячими волнами.

Необходимо отметить, что последнее выражение практически полностью совпадает с решением И. Краусс [60]. Отличие заключается в отсутствии в (3.30) множителя, определяющего колебания давления в жидкости (пьезометрическо-

го уровня). Кроме того, функция $K_0(\kappa r)$ в (3.30) существует только в области возмущения, на внешнем контуре которой выполняется условие $|\text{grad } p| = G$, т.е. в области $r_0 \leq r \leq R$, тогда как согласно решению И. Краусс возмущение мгновенно (по времени) распространяется на бесконечность, как это и предполагается в решениях уравнения фильтрации параболического типа вида (3.1).

Совершенно аналогичное решение получается и в случае $\beta = \omega_0$, в нем достаточно лишь заменить ν на β .

Имеющиеся экспериментальные данные из [10, 26, 27, 32, 60, 61] (см., рис. 3.4) прекрасно согласуются с полученной физико-математической моделью релаксационной фильтрации ПВ. Вместе с тем, возможность построения на базе этой модели методик ОФО водоносных пластов и интерпретации результатов такого опробования требует обстоятельного самостоятельного исследования; эта проблема будет рассмотрена в подразделе 3.4.

Сходная картина должна наблюдаться и в случае движения жидкости с осевой симметрией (импульсное возмущение водоносного пласта большой мощности через несовершенную по степени вскрытия скважину – точечный пьезометр). Причем рост площади фронтальной поверхности сферической волны происходит прямо пропорционально увеличению квадрата радиуса до ее фронта [21].

Нетрудно видеть при этом, что уравнение (3.22) для случая фильтрации с центральной симметрией преобразуется к виду

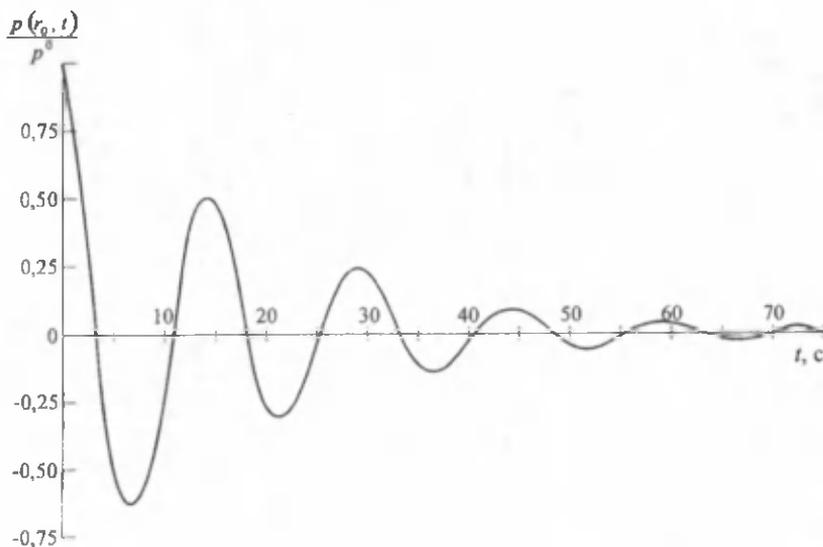


Рис. 3.4. Индикаторная кривая прослеживания колебаний пьезометрического уровня в скважине (по данным И. Краусс [60, 61])

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\tau_0}{\chi} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (3.31)$$

Решением его при тех же краевых условиях, что и для случая фильтрации с осевой симметрией, является выражение для монохроматической стоячей сферической волны вида [33]

$$p = A^* e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t \pm \phi) \cdot \frac{\sin \kappa r}{r}, \quad A^* = \frac{P^0 r_0}{\sin \kappa r_0},$$

где все обозначения прежние.

Собственные частоты этой колебательной системы определяются тем же выражением (3.28). К приведенному решению применим проделанный выше анализ, при этом при $\nu \tau_0 < 1$ решение уравнения (3.31) приобретет вид

$$p = A^* e^{-m t} \cdot \frac{\sin \kappa r}{r}, \quad A^* = \frac{P^0 r_0}{\sin \kappa r_0},$$

показывающий, что, как и в случае движения жидкости с центральной симметрией, сразу после воздействия на пласт в области возмущения распределение давления становится аналогичным стоячей волне. В дальнейшем отклонение давления от начального в каждой точке области, не совершая колебаний, закономерно уменьшается. При $\nu \tau_0 > 1$ решение уравнения (3.31) имеет вид

$$p = A^* e^{-\nu t} \cdot \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad A^* = \frac{P^0 r_0}{e^{-\kappa r_0}}, \quad r_0 \leq r \leq R.$$

Перейдем теперь к анализу распространения в ПВ плоских волн. Положим, что, как и в предыдущих случаях, после импульсного возмущения здесь также возникают колебания пьезометрического уровня с собственными частотами⁴. Точно так же, как и в [12], считаем – движение ПВ после импульсного возмущения водоносного пласта описывается дифференциальным уравнением фильтрации в частных производных гиперболического типа (3.22), преобразованным для плоского потока к виду [21]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\tau_0}{\chi} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (3.32)$$

Здесь все обозначения прежние.

Для завершения постановки задачи примем, как и раньше, что максимальный перепад давления в дрене при импульсном возмущении задается равным p^0 .

Ограничимся рассмотрением установившегося процесса колебаний уровня; решение задачи будем искать в виде [33]

$$p(x, t) = A e^{-(\beta + i\omega)t} \cdot f(x), \quad (3.33)$$

⁴ Оставим в стороне обсуждение технических возможностей такого возмущения через совершенную по степени вскрытия пласта горизонтальную дрину значительной длины (вскрывшую к тому же напорный пласт). Нас будет интересовать только формальное представление процесса колебаний пьезометрического уровня с собственными частотами.

где $p(x, t)$ – изменение давления в жидкости в точке водоносного пласта с координатой x (отсчет ведется от вертикальной стенки дрены) в момент времени t от начала возмущения относительно начального p_0 . Все остальные обозначения прежние.

Подстановка (3.33) в (3.32) дает для функции $f(x)$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \kappa^2 f = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\tau_0}{\chi} \left(\omega^2 - \beta^2 + \frac{\beta}{\tau_0} \right) + \frac{1}{\chi} (1 - 2\beta\tau_0) i\omega. \quad (3.34)$$

Следует обратить внимание на то, что выражение для κ^2 полностью совпадает с аналогичным выражением для случаев движения жидкости с осевой и центральной симметрией.

Решением уравнения (3.34) являются цилиндрические функции Бесселя целого порядка первого и второго рода [49]:

$$f(x) = C_1 \sqrt{x} \cdot J_{\frac{1}{2}}(\kappa x) + C_2 \sqrt{x} \cdot Y_{\frac{1}{2}}(\kappa x). \quad (3.35)$$

Значения функций $J_{\frac{1}{2}}(z)$ и $Y_{\frac{1}{2}}(z)$ нами табулированы с использованием

имеющихся таблиц сферических функций Бесселя целого (нулевого) порядка первого и второго рода из [49] и приведены в Приложении, а графики показаны на рис. 3.5.

По аналогии с цилиндрической стоячей волной полагаем, что и в плоской p должно оставаться конечным при $x = 0$. Функция $Y_{\frac{1}{2}}(\kappa x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ (см.

рис. 3.5). Поэтому в (3.35) следует принять $C_2 = 0$. Отсюда получаем окончательно [21]

$$f(x) = C_1 \sqrt{x} \cdot J_{\frac{1}{2}}(\kappa x).$$

Исследуем полученное решение, не уточняя далее его вид. Как видно из рис. 3.5, при $x = 0$ функция $J_{\frac{1}{2}}(\kappa x) = 0$. Это означает – сразу же после им-

пульсного возмущения водоносного пласта пьезометрический уровень в дрене мгновенно приходит в исходное состояние (давление в дрене становится равным p_0) и в дальнейшем остается постоянным, т.е. колебаний уровня с собственными частотами нет.

Последнее, во-первых, противоречит исходному предположению о наличии таких колебаний, а, во-вторых, показывает отсутствие в водоносном пласте стоячих волн. В самом деле, как уже отмечалось ранее, площади фронтальной поверхности бегущих цилиндрической и сферической волн по мере их продвижения быстро растут, что приводит к выполаживанию волн и уменьшению градиента давления на их фронте. В плоской же бегущей волне площадь фронтальной по-

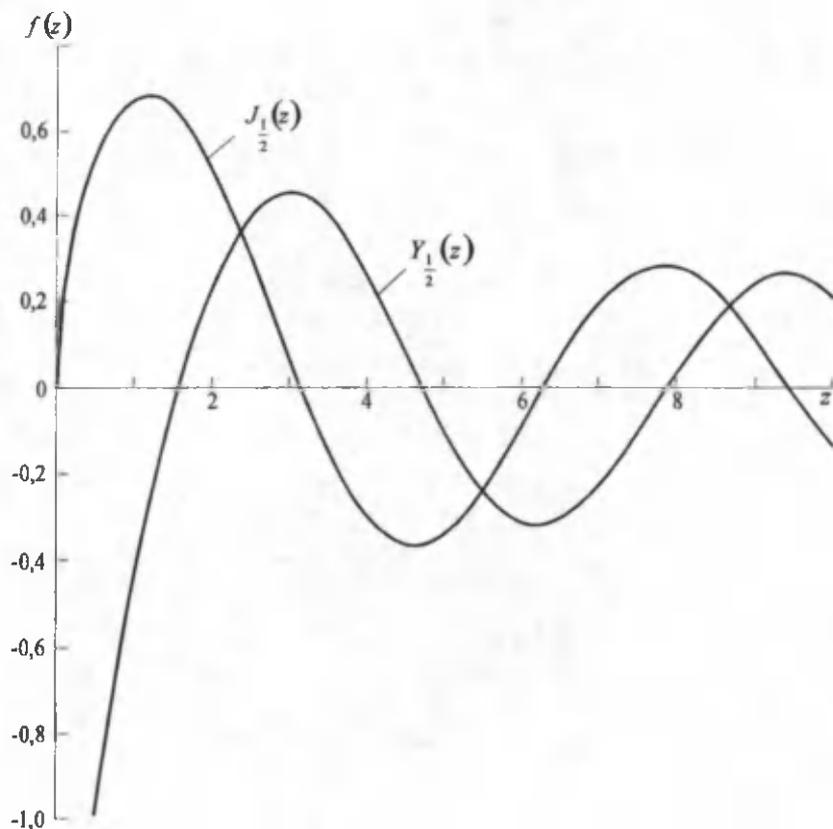


Рис. 3.5. Графики функций Бесселя полуцелого порядка

верхности остается постоянной, и волна не выполаживается⁵. Соответственно отсутствует необходимое условие формирования твердой непроницаемой поверхности на внешнем контуре области возмущения, $|\text{grad } p| = G$, а, следовательно, бегущая волна не отражается внутрь возмущенной области, и плоские стоячие волны не образуются. Естественно поэтому, что и колебания пьезометрического

⁵ Разумеется такая волна выполаживается, но за счет диссипации энергии. На некотором, достаточно большом расстоянии от внутреннего контура возмущения градиент давления на фронте волны становится равным предельному, однако энергия отраженной волны (в том числе за счет диссипации в возмущенной области) уже недостаточна для формирования стоячих волн. Аналогичные явления в той или иной степени проявляются и в цилиндрических и сферических волнах, что отражается, в частности, в степени демпфирования колебаний.

уровня с собственными частотами в плоском потоке возникать не должны (как это и следует из приведенных формальных выкладок) [21].

Приведенные выше решения, как и решения из работ И. Краусс [60, 61] и С.Ф. Григоренко [10, 27], по сути, являются кинематическими, а, следовательно, в них не выражена в явном виде связь таких характеристик колебаний уровня, как коэффициент затухания β и продолжительность затухания напряжений сдвига τ_0 , с параметрами среды, в которой формируются стоячие волны, т.е. с параметрами водоносного пласта. А между тем, очевидно, что и продолжительность затухания напряжений сдвига τ_0 , и связанный с ней соотношением $\beta = \frac{1}{2\tau_0}$ ко-

эффициент затухания колебаний *должны* обуславливаться фильтрационными свойствами проводящей среды. Попытаемся выявить эту обусловленность, используя иной, в сравнении с использованным выше, подход к обоснованию вида закона фильтрации (3.19) в возмущенной области, предложенный в работе [28] со ссылками на многочисленные предыдущие исследования, иными словами, попытаемся построить гидродинамическую модель собственных колебаний пьезометрического уровня.

В соответствии с этим подходом выделим некоторый элементарный объем статистически однородной пористой среды W_n , физически вместе с тем намного превышающий размеры пор и зерен среды; как мы уже неоднократно подчеркивали, только для объема, охватывающего большое их число, достаточно представительны осредненные характеристики. Объем пор, по которым фильтруется жидкость, в этом элементе равен $W_G = n_D W_n$ (здесь n_D – динамическая, активная пористость проводящей среды). Рассмотрим силы, действующие на жидкость.

На поверхность выделенного объема жидкости в соответствии с третьим законом Ньютона действует давление со стороны смежных слоев воды и твердого скелета пористой среды в направлении внутренней нормали к поверхности S объема W_G . Соответственно сила давления составляет $\oint_S p dS$. Поскольку поверх-

ность S замкнута, а функция давления в жидкости непрерывна вместе со своими первыми производными, к последнему выражению применимо преобразование Гаусса [7, 30]:

$$\oint_S p dS = - \int_{W_G} \nabla p dW_G,$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Фильтрующаяся ламинарно жидкость, как уже неоднократно подчеркивалось, испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости фильтрации \vec{v} . Считая жидкость чисто вязкой, и используя закон Дарси (для возмущенной области), объемную силу сопротивления (трения) запишем в виде

$$\int_{W_G} \frac{\eta}{k} \vec{v} dW_G.$$

Здесь все обозначения прежние.

Как уже отмечалось ранее, по принципу Даламбера сумма сил, действующих на систему материальных точек, равна силе инерции. Последняя в объеме W_G есть [28]

$$\int_{W_G} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dW_G$$

(здесь u — модуль вектора скорости движения (не фильтрации) жидкости). Так как $n_D \vec{u} = \vec{v}$, то

$$\int_{W_G} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dW_G = \int_{W_G} \frac{1}{n_D} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dW_G.$$

Отсюда получаем —

$$\int_{W_G} \nabla p dW_G - \int_{W_G} \frac{\eta}{k} \vec{v} dW_G = \int_{W_G} \frac{1}{n_D} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dW_G. \quad (3.36)$$

Поскольку взятый объем W_G произволен, из (3.36) следует

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \left(\nabla p + \frac{1}{n_D} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

или, после несложных преобразований, —

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \nabla p - \frac{k \rho}{\eta n_D} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Последнее уравнение полностью совпадает с (3.19), однако в нем продолжительность затухания напряжений сдвига выражено через параметры среды и фильтрующей жидкости:

$$\tau_0 = \frac{k \rho}{\eta n_D},$$

или, если перейти от проницаемости среды к коэффициенту фильтрации (см. раздел 1), —

$$\tau_0 = \frac{K}{g n_D}. \quad (3.37)$$

Здесь все обозначения прежние.

Соответственно и коэффициент затухания колебаний β получает вполне ясную физическую интерпретацию, согласно которой большие его величины характерны для сред с меньшей проницаемостью и наоборот:

$$\beta = \frac{\eta}{2k} \frac{n_D}{\rho},$$

или

$$\beta = \frac{g n_D}{2K} \quad (3.38)$$

Попытаемся оценить применимость и корректность такой интерпретации параметров τ_0 и β . Это оказывается возможным сделать, выявив, насколько уравнения (3.37) и (3.38) отвечают имеющимся экспериментальным данным о фильтрационных и миграционных параметрах.

Считая в уравнении (3.37) характерным значение $\tau_0 \sim N \cdot 10^0$ с (такой порядок величин τ_0 следует из имеющихся экспериментальных данных, приведенных в [60, 61]), а также $g \sim 10 \text{ м/с}^2$, получаем, что

$$n_D = (0,1 - 1) K \quad (3.39)$$

Задав в (3.39) контрольные величины коэффициента фильтрации в интервале от 10 до 200 м/сут (или соответственно $K \sim 1,2 \cdot 10^{-4} - 2,3 \cdot 10^{-3}$ м/с), можно показать, что n_D в этом случае должна быть порядка $1,2 \cdot 10^{-5} - 2,3 \cdot 10^{-3}$, т.е. существенно меньше (на 1-2 порядка) характерных значений активной трещиноватости, установленных с использованием принципиально иной методической базы – опытно-миграционного опробования водоносных пластов – и составляющих $5 \cdot 10^{-4} - 10^{-2}$ [2], не говоря уже об активной пористости рыхлых (песчаных) отложений, достигающей по порядку величины значения 10^{-1} . Иначе следует признать – релаксационные процессы реально проявляются в средах, для которых характерные значения K составляют $5 \cdot 10^{-3} - 1$ м/с или 430-86400 м/сут. Вместе с тем, в работе [61] приводятся результаты экспериментальных исследований, согласно которым свободные колебания уровня зафиксированы в водоносном пласте с коэффициентом фильтрации около 160 м/сут, а по данным аналогового моделирования колебания уровня с собственными частотами возможны в проводящих средах с $K \sim 40$ м/сут [56].

Указанное несоответствие является формальным проявлением противоречия, возникающего вследствие привлечения в феноменологическую фильтрационную модель понятий и терминов из физической феноменологической модели движения жидкости в порах или трещинах (см. раздел 1). Напомним, что четким и физически обоснованным критерием разграничения этих моделей является масштаб осреднения течения – характерный размер некоторого элементарного объема пространства, отвечающего некоторому заданному условию. Таким условием является требование многократного превышения межмолекулярных расстояний (в физической модели), так чтобы в элементарном объеме содержалось достаточно большое число молекул, и было бы возможно осреднение параметров среды, т.е. приведение их в соответствие течению в целом, а не движению одной или нескольких молекул. Аналогично и в фильтрационной феноменологической модели элементарный объем проводящей среды должен намного превышать размеры пор и зерен среды.

Как известно, нерегулярность структуры порового пространства не позволяет изучать фильтрацию обычными методами гидромеханики – путем решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей совокуп-

ность всех пор [18]. Именно поэтому осуществляется переход от физического описания течения к фильтрационному. При этом такой переход вызывает и качественное изменение модели движения жидкости – фильтрационное течение становится потенциальным, т.е. безвихревым, а силы сопротивления каркаса проводящей среды и внутреннего трения движущейся жидкости заменяются объемными силами трения; для их количественного выражения в понятийную базу модели вводятся понятия, обозначенные терминами "скорость фильтрации" и "коэффициент фильтрации".

Таким образом, в фильтрационной модели представление об инерционности движения жидкости, отвечающее физической феноменологической модели, не столь очевидно. Для согласования его с понятийной базой фильтрационной модели в выражение силы инерции необходимо ввести некоторый параметр P , зависящий в общем случае от соотношения l_{\min} и l_n – характерных размеров элементарных объемов соответственно жидкости и проводящей среды, выступающих масштабами осреднения течения для его физического и фильтрационного описания. Этот параметр должен выделить из полного значения активной пористости n_D ту ее часть, в которой реально действуют силы инерции⁶. Однако он в принципе не обеспечивает переход физической модели в фильтрационную, так как его оценка в каждом конкретном случае так же сложна, как и отмеченная выше проблема решения уравнений течения вязкой жидкости для всей совокупности пор или трещин. Одной из составляющих такого параметра, по-видимому, можно считать поправку (сомножитель) к модулю вектора скорости движения жидкости u на кривизну пор, которую, например, в [29, 54] предлагается считать постоянной и равной 1,6. Кстати в (3.36), (3.37) и (3.38) эта поправка не учтена.

Похожий подход к учету инерционной составляющей сопротивления предложен в работе В.С. Голубева [25].

Соответственно уравнения (3.37) и (3.38) преобразуются соответственно к следующему виду:

$$\tau_0 = \frac{K}{g P n_D}, \quad \beta = \frac{g P n_D}{2K}. \quad (3.40)$$

Здесь все обозначения прежние. В уравнениях в (3.40) безразмерный параметр P по порядку величин составляет 10^1 - 10^3 .

Как уже отмечалось ранее, имеющиеся экспериментальные данные из [10, 26, 27, 32, 60, 61] прекрасно согласуются с построенной теорией релаксационной фильтрации. На рис. 3.4 представлены результаты прослеживания свободных колебаний уровня в возмущающей скважине, пройденной в доломитах в районе Регенсбург (ФРГ), после импульсного возбуждения водоносного пласта, взятыми из работы [61]. Обработка их в соответствии с изложенной здесь моделью дает следующие характеристики колебаний уровня в скважине: $\beta_C \cong 0,054 \text{ с}^{-1}$; $\omega_C \cong$

⁶ Подчеркнем здесь, что практически все схемы проведения опытно-миграционного опробования водоносных систем исключают инерционную составляющую сопротивления движению жидкости.

0,448 с⁻¹; $\tau_0 \cong 9,26$ с (индекс "С" здесь обозначает параметры, установленные для возмущающей скважины).

Итак, в настоящем подразделе предложен вариант теории релаксационной фильтрации, обеспечивающий непротиворечивую интерпретацию собственных колебаний пьезометрического уровня в скважине, вскрывшей напорный водоносный пласт. При этом характеристики таких колебаний (в частности, собственные частоты) определяются фильтрационными параметрами пласта, так что нет необходимости искусственно вводить условие водообмена в системе скважина-водоносный пласт⁷. Предложенная теория позволяет также теоретические исследования закономерностей распространения волн в водоносном пласте, определяющих как свободные, так и вынужденные колебания пьезометрического уровня, и получение критериальных оценок для таких исследований (некоторые такие критерии рассмотрены выше). Она (эта теория) обеспечивает теоретическую базу разработки методик проведения и интерпретации ОФО водоносных пластов методами, основанными на инициации и прослеживании колебаний уровня в возмущающей скважине. Все эти задачи рассмотрены в следующих подразделах.

В заключение необходимо обсудить еще одну проблему, связанную с уравнением движения вида (3.19). Так, в работах [39, 40, 42] обращается внимание на то, что в уравнении фильтрации, учитывающем релаксацию скорости и давления в жидкости, закон фильтрации задается в виде

$$\bar{v} + \tau_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\eta} \text{grad} \left(p + \tau_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (3.41)$$

формально полностью (с точностью до постоянных релаксации τ_1) совпадает с уравнением фильтрации несжимаемой жидкости в релаксационно сжимаемой пористой среде, где уравнение состояния и движения имеют вид

$$n + \tau_2 \frac{\partial n}{\partial t} = n_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_n} \right), \quad \bar{v} = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p, \quad (3.42)$$

хотя описывают различные фильтрационные потоки. В уравнениях (3.41) и (3.42) τ_1 и τ_2 – постоянные релаксации соответственно давления и пористости; остальные обозначения прежние. Иными словами, названные модели выступают как конкурирующие, в то время как сколько-нибудь обоснованных критериев выбора в рамках феноменологической фильтрационной теории авторы [39, 40, 42] не выдвинули.

Такое положение обусловлено парадоксальной ситуацией: авторы [3, 38, 39, 40, 41, 42, 45], обосновывая и исследуя волновое уравнение фильтрации, совершенно не рассматривали возможность описания этими уравнениями свободных колебаний уровня ПВ (для описания вынужденных колебаний уровня, как свидетельствует опыт [1, 43], с успехом может применяться традиционное уравнение

⁷ Разумеется, если емкости скважины и водовмещающих отложений одинаковы, в противном случае это условие определяет внутреннее граничное условие и должно вводиться обязательно – такая задача, как следствие теории релаксационной фильтрации, рассматривается ниже в подразделе 3.4.

фильтрации В.Н. Щелкачева [55] параболического типа). Исключение составляет, пожалуй, диссертация С.В. Григоренко [27], в которой с использованием положений тех же работ [3, 38, 39, 40, 41, 42, 45] построена методика определения фильтрационных параметров, предусматривающая интерпретацию именно свободных колебаний уровня. Однако и в этой работе и в других публикациях С.Ф. Григоренко с соавторами [10, 26] главное внимание уделяется техническим аспектам проведения ОФО, и практически не анализируются особенности волновых процессов, определяющих такие колебания. А как раз последние, ограничивая исходные уравнения фильтрации, могут быть основой критериев их выбора.

Более того, в названных работах в основу рассматриваемых моделей кладутся представления Максвелла о релаксационных явлениях, главное из которых – соотношение продолжительности действия внешней силы, обуславливающей деформацию тела, и времени затухания τ напряжений сдвига [34]. Такие представления прямо предписывают опытное обоснование уравнений релаксационной фильтрации посредством инициации в водоносном пласте волн с собственными частотами. Интерпретация же результатов продолжительных возмущений (откачек, нагнетаний) на базе этих уравнений смысла не имеет. Как показано в работе [24], даже при относительно кратковременном (но превышающем τ) воздействии на пласт течение жидкости с хорошим приближением следует модели В.Н. Щелкачева [55], эффекты релаксации принципиально не учитывающей.

С другой стороны, в соответствии с положениями феноменологической фильтрационной теории закон фильтрации жидкости является следствием уравнений количества движения [7, 8]. Поэтому в величине скорости фильтрации должны отразиться все особенности течения жидкости через пористые среды, а уравнение движения (3.19), учитывающее релаксацию только скорости, комплексно содержит в себе все составляющие релаксации, в том числе, давления и пористости. Последнее нетрудно показать и формально.

Как мы уже неоднократно подчеркивали, в основу любой феноменологической фильтрационной модели кладется система уравнений неразрывности, закона фильтрации и состояния. Таким образом, закон фильтрации (уравнение движения) не следует из такой модели, он должен быть в нее задан. Единственным надежным и достоверным способом установления вида закона фильтрации в таких условиях является экспериментальный. Вместе с тем, некоторые сведения о законе фильтрации можно получить, исходя из самых общих соображений [7, 8]; в разделе 2 мы эти соображения уже приводили. Главное из них, которое нас будет здесь интересовать, – это существование функциональной связи $k = k(n)$, причем линейной для характерного интервала значений давления p .

Подобная функциональная связь (в том числе и нелинейная), как отмечали Г.И. Баренблатт и А.П. Крылов [9], установлена еще А.А. Флориним при построении теории консолидации грунтов. Эта связь подтверждается анализом уравнений состояний, записанных относительно средних нормальных напряжений в твердом скелете пористой среды [7, 8]:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{E_n} \right), \quad \frac{k}{\eta} = \frac{k_0}{\eta_0} \left(1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{E_k} \right), \quad (3.43)$$

где σ – среднее нормальное напряжение в скелете пористой среды (σ_0 – напряжение в невозмущенном пласте); остальные обозначения прежние. Из формул (3.43) вообще следует, что изменение проницаемости среды обусловлено изменением пористости.

Предыдущие выкладки справедливы в предположении, что в выбранной точке пористой среды с уменьшением давления в жидкости мгновенно (по времени) происходит соответствующее возрастание среднего нормального напряжения в скелете пористой среды и наоборот. Последнее обусловлено линейной связью между p и σ вида [7, 8]

$$P = p + \sigma ,$$

где P – горное давление.

Однако в реальных условиях наблюдается некоторое отставание по времени изменения напряжения в пористой среде σ при изменении давления в жидкости p . При неустановившейся фильтрации сжимаемой жидкости должна проявляться релаксация как напряжения, так и давления. Поэтому согласно теории механического взаимодействия горных пород и насыщающих их жидкостей, и исходя из комбинации моделей Максвелла и Кельвина, вслед за В.И. Пиквуза [45] можем записать [13]

$$P = p + \tau_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma + \tau_3 \frac{\partial \sigma}{\partial t} .$$

Здесь τ_3 – время релаксации среднего нормального напряжения в скелете пористой среды.

Тогда, учитывая релаксацию σ и обусловленную ей релаксацию пористости (а через нее – проницаемости), вместо (3.43) имеем [13]

$$\frac{k}{\eta} - \frac{k_0}{\eta_0} + \tau_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right) = - \frac{k_0}{\eta_0 E_k} \left(\sigma - \sigma_0 + \tau_3 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) ,$$

где τ_4 – продолжительность релаксации проницаемости. Нетрудно видеть, что последнее уравнение решается относительно превышений параметров – $\Delta \frac{k}{\eta}$ и

$\Delta \sigma$; перепишем его относительно полных значений этих параметров:

$$\frac{k}{\eta} + \tau_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right) = - \left(\sigma + \tau_3 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{k_0}{\eta_0 E_k} . \quad (3.44)$$

Соотношение (3.44) устанавливает взаимообусловленность релаксации проницаемости пористой среды от релаксирующего напряжения в ее скелете.

Зададим релаксацию скорости фильтрации, проницаемости и давления в жидкости в закон фильтрации. Покажем, что в этом случае уравнение

$$\bar{v} + \tau_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = - \left[\frac{k}{\eta} + \tau_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right) \right] grad \left(p + \tau_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (3.45)$$

не противоречит (3.20) и должно обращаться в тождество [13].

Несложные преобразования (3.45) дают [13]

$$\begin{aligned} \bar{v} + \tau_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = & -\frac{k}{\eta} \text{grad } p - \tau_4 \text{ grad } p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right) - \\ & - \tau_1 \frac{k}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } p) + \tau_1 \cdot \tau_4 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } p) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Экспериментальные данные из [10, 26, 27, 32, 60, 61] однозначно свидетельствуют, что свободные колебания уровня определяются релаксационными процессами только в жидкости. Так, постоянная τ_1 в таких опытах по порядку величин не превышает 1-10 с. Оценки же постоянной времени релаксации среднего нормального напряжения в скелете пористой среды, выполненные в работах [46, 52], дают $\tau_1 \sim 10^7$ с; из (3.44) следует точно такой же порядок постоянной релаксации проницаемости τ_4 . Соответственно низкочастотные составляющие колебаний, обусловленные релаксацией проницаемости, в выполненных экспериментах вообще не проявляются. Последнее связано с тем, что при значительном времени релаксации проницаемости, т.е. значительном запаздывании ее изменения с момента воздействия на пласт, и чрезвычайно малой продолжительности опыта пласт можно считать несжимаемым на протяжении опыта – соответственно $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \right) = 0$ с высокой точностью.

Таким образом, второе и четвертое слагаемые в правой части (3.46) в принятом приближении пренебрежимо малы. Тогда [13]

$$\bar{v} + \tau \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \text{grad } p \right), \quad \tau_0 = \tau_1 = \tau. \quad (3.47)$$

Последнее соотношение с учетом (3.20), как и требовалось показать, обращается в тождество, т.е. релаксация скорости фильтрации определяется релаксацией давления в жидкости при линейной зависимости скорости фильтрации от градиента давления.

Рассмотрим другой предельный случай – длительное возмущение пласта, когда продолжительность его соизмерима с τ_4 и соответственно много больше постоянной релаксации давления τ_1 . Очевидно, релаксационными процессами в жидкости в таком приближении можно пренебречь. Формально это выражается тем, что при длительном возмущении формируется зона квазистационарного режима фильтрации, где $\text{grad } p \rightarrow \text{const}$, а $\frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } p) \rightarrow 0$, и, как отмечалось $\tau_1 \ll \tau_4$. Тогда вместо (3.46) имеем [13]

$$\bar{v} + \tau \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\eta} \text{grad } p \right), \quad \tau_0 = \tau_4 = \tau. \quad (3.48)$$

т.е. и в этом случае получаем соотношение, которое, с учетом (3.20), представляет собой тождество. Релаксация скорости фильтрации здесь целиком определяется релаксацией проницаемости пористой среды. Следует обратить внимание на то, что, как и (3.47) и (3.48), тождеством является выражение (3.41).

Таким образом, закон фильтрации вида (3.19), учитывающий релаксацию скорости фильтрации, комплексно содержит в себе релаксацию давления в жидкости и пористости (проницаемости). Постоянная τ_0 этого закона определяется либо постоянной релаксации давления p при кратковременном импульсном возбуждении пласта (с целью инициации колебаний уровня с собственными частотами), либо постоянной релаксации пористости (или проницаемости) пласта при его длительном возмущении. Уравнение движения вида (3.41), содержащее две составляющие релаксации, на самом деле представляет собой тождество и не противоречит линейному закону фильтрации (закону Дарси). Использование (3.19) исключает необходимость задания других составляющих релаксации в уравнение состояния [13].

3.3. Некоторые следствия теории релаксационной фильтрации

Рассмотрим здесь некоторые следствия предложенной теории, позволяющие в принципе оценить возможность создания на ее основе методов интерпретации результатов ОФО, проанализировать корректность других теоретических представлений процесса колебаний уровня.

Первым и наиболее важным из них является иное, в сравнении с существующим, представление о волнах давления (или напора), вызванных вынужденными колебаниями уровня ПВ в возмущающей скважине. Соответственно с иных позиций необходимо рассматривать и волновые эффекты, которые могут возникать в водоносных пластах. Обратимся, в частности, к такому эффекту, как фильтрационный резонанс. Дело в том, что, например, в работе [23] исследовалась формальная сторона этой проблемы – обосновывались частоты вынужденных колебаний уровня в возмущающих скважинах, которые должны совпадать с собственными частотами и становится вероятен резонанс этих колебаний, а сам эффект принимался без какого-либо критического анализа как некоторая объективная данность. А между тем последнее не столь очевидно.

Перейдем сначала к рассмотрению вынужденных колебаний, т.е. колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле. Особый интерес представляет случай, когда вынуждающая сила является простой периодической функцией времени с частотой γ , откуда давление в жидкости при $r \rightarrow 0$ [21]

$$p(t) = B \cdot \cos \gamma t,$$

где B – некоторая постоянная (в нашей задаче – это амплитуда колебаний давления). Последнее выражение удобно представить в комплексной форме, для чего в его правой части запишем $\exp(i\gamma t)$ вместо $\cos \gamma t$:

$$p(t) = B \cdot \exp(i\gamma t). \quad (3.49)$$

При установившихся вынужденных колебаниях энергия системы остается неизменной [34]; система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, диссипирующую благодаря наличию трения. Проявлением этого является постоянство амплитуды колебаний давления p в пласте. Нетрудно видеть – уравнение (3.23) с учетом (3.26), (3.27) и (3.28) преобразуется к виду [21]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (3.50)$$

откуда следует, что в предположении $\beta = 0$ для вынужденных колебаний последним слагаемым в левой части (3.50) можно пренебречь:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Очевидно, что совершенно аналогично тому, как это происходит при распространении волн давления в жидкости после импульсного возбуждения водоносного пласта (эти волны определяют колебания давления с собственными частотами [12]), область возмущения и в случае вынужденных колебаний оказывается ограниченной и замкнутой в плане. При возбуждении водоносного пласта внешней силой от возмущающей скважины должна оторваться бегущая цилиндрическая волна. На ее переднем фронте градиент давления намного превышает предельный, однако, с продвижением волны происходит ее выполаживание, и на некотором расстоянии R от оси скважины градиент давления на фронте волны становится равным предельному, продвижение волны прекращается, и она отражается внутрь возмущенной области.

В процессе движения такой волны структура жидкости полностью разрушается. Восстановление ее, как отмечалось выше, происходит очень медленно по сравнению с разрушением. Кроме того, подвод энергии извне обеспечивает поддержание структуры жидкости в энергетически неравновесном (разрушенном) состоянии на протяжении всего возмущения, поэтому рассматривать условия влияния восстановления структуры на закономерности колебаний не имеет смысла.

Наложение излученных и отраженных волн, как и в случае колебаний с собственными частотами, приводит к образованию стоячих волн; ограничимся здесь рассмотрением установившегося процесса колебаний давления. Соответственно решение задачи в самом общем случае должно удовлетворять следующим граничным условиям [48]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p(0, t) + \alpha_2 \frac{\partial p(0, t)}{\partial r} &= 0, \\ \delta_1 p(R, t) + \delta_2 \frac{\partial p(R, t)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Положим, что движение воды в пласте до начала возмущения отсутствовало, тогда исходное распределение давления в водоносном пласте (начальное условие) задается в виде [21]

$$p(r, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Как уже указывалось ранее, существование твердой непроницаемой поверхности на внешней границе области возмущения, на расстоянии R от ее центра, отражается условием

$$\frac{\partial p(R, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{и соответственно} \quad v = 0. \quad \text{Действие}$$

внешней силы, вызывающей вынужденные колебания уровня в возмущающей скважине, не сопровождается отбором или нагнетанием жидкости в пласт, иными словами, в стоячей цилиндрической волне p должно оставаться конечным при

$$r \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p(0, t)}{\partial r} = 0. \quad \text{Названные условия полностью удовлетворяют (3.51), в}$$

котором $\alpha_1 = \delta_1 = 0$.

Нетривиальное решение задачи, удовлетворяющее условиям (3.51), как и во всех прежних случаях, при отыскании его методом разделения переменных, в самом общем виде задается как произведение [51]

$$p(r, t) = T(t) \cdot f(r),$$

где $T(t)$ и $f(r)$ – произвольные функции от времени и координаты.

В монохроматической стоячей волне распределение давления с учетом (3.49) представляется в виде [33]

$$p(r, t) = \exp(i\gamma t) \cdot f(r), \quad (3.52)$$

откуда для функции $f(r)$ получаем

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \lambda^2 f = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}. \quad (3.53)$$

Это – уравнение функций Бесселя нулевого порядка. Как уже указывалось выше, в стоячей цилиндрической волне p должно оставаться конечным при $r_0 \rightarrow 0$; соответствующим решением (3.53) является $J_0(\lambda r)$ – как и прежде, функция Бесселя первого рода нулевого порядка [33].

Таким образом, (3.52) приобретает вид

$$p(r, t) = B \cdot \exp(i\gamma t) \cdot J_0(\lambda r)$$

Ограничимся в нем действительной частью, имеем [21]

$$p(r, t) = B \cdot \cos(\gamma t \pm \delta) \cdot J_0(\lambda r),$$

где δ – фазовый угол.

Для оценки связи фильтрационных параметров водоносного пласта и геометрических характеристик области возмущения (ее радиуса) с частотными характеристиками колебаний давления воспользуемся, как и в случае колебаний с собственными частотами, условием на внешней границе этой области:

$$\frac{\partial p(R, t)}{\partial r} = -B \cdot \cos(\gamma t \pm \delta) \cdot \lambda \cdot J_1(\lambda R) = 0,$$

откуда $J_1(\lambda R) = 0$. Последнее уравнение имеет счетное множество корней $J_{1,n}$, т.е. $\lambda_n R = j_{1,n}$. Тогда с учетом второго выражения из (3.53) получаем

$$\gamma = \frac{j_{1,n} \cdot c}{R} \quad (3.54)$$

Таким образом, вынужденные колебания давления в жидкости (пьезометрического напора) описываются той же самой системой уравнений, что и свободные колебания, но при нулевом коэффициенте затухания колебаний β [21].

Вернемся теперь к обсуждению возможности явлений резонанса в водоносном пласте, в частности, резонанса давления в жидкости. Положим, что в возмущающей скважине инициируются вынужденные колебания пьезометрического уровня с заданными частотой и амплитудой. В соответствии с приведенным здесь решением в водоносном пласте в области вокруг скважины с некоторым радиусом R (определяемым предельным градиентом давления G) формируются стоячие волны. Предположим далее – в пласте в той же области с началом возмущения (и под его воздействием) возникают свободные колебания давления, совпадающие по частоте с вынужденными, т.е. создаются все предпосылки для резонанса давления [21].

С возникновением резонанса должна начать быстро возрастать амплитуда колебаний давления, причем сразу на всех концентрических окружностях внутри области возмущения, соответствующих пучностям давления, в том числе (и это самое главное в рассматриваемом процессе) и в полуволне, пространственно примыкающей к внешней границе области, т.е. при $r = R$. Рост амплитуды p в этой полуволне должен сопровождаться возрастанием градиента давления

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R+0}, \text{ так что его значение быстро становится выше предельного } G. \text{ Соот-}$$

ветственно внешняя граница области возмущения неизбежно отодвинется от центра возмущения на некоторое расстояние δR , определяемое условием

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=(R+\delta R)+0} = G \text{ (заметим при этом, что в } \delta R \text{ должно укладываться целое чис-}$$

ло полуволн, так как частота вынужденных колебаний давления в жидкости γ по условию не меняется на протяжении опыта, не меняется и скорость распространения волн в водоносном пласте с).

А если так, то следует ожидать изменения частоты собственных колебаний пьезометрического уровня, достаточно жестко связанной с геометрическими параметрами области возмущения (в частности, с ее радиусом); эта частота, как следует из (3.54), станет равной [21]

$$\gamma = \frac{j_{1,n} \cdot c}{R + \delta R}$$

Последняя уже не совпадает с частотой вынужденных колебаний, следовательно, о дальнейшем развитии резонанса давления в жидкости речь идти уже не может.

При этом вся дополнительная энергия (по отношению к энергии источника вынужденных колебаний), выделявшаяся в колебательной системе на начальном этапе формирования резонанса, целиком пошла на разрушение структуры жидкости в области δR .

В заключение остановимся на еще одном следствии релаксационной фильтрации [21]. В настоящее время существует единственный способ полевого опытного определения предельного градиента давления по результатам кустовой откачки, предложенный А.Г. Арьев [4, 5]. Однако выполненный нами анализ случайных погрешностей измерений и расчетов, возникающих при проведении опытов и интерпретации их результатов, однозначно показывает несостоятельность этого метода, а, следовательно, неприменимость его не только для оценок параметров нелинейного закона фильтрации, но и для качественной регистрации последнего [16] (см. также раздел 2).

Можно указать еще метод, описанный в работах [31, 37], который используется в нефтяной гидрогеологии для выявления дополнительных фильтрационных сопротивлений в призабойной (к возмущающей скважине) зоне, в том числе, связанных с проявлением различных факторов нестационарной фильтрации жидкости [31]. Он применяется также и для качественной регистрации нелинейности закона фильтрации. Вместе с тем, реализация его на практике с такой целью требует обязательного исследования надежности, достоверности полученных на его основе выводов. Именно в этой части указанный метод разработан явно недостаточно. Соответственно на настоящий момент единственным теоретически обоснованным и не зависящим от погрешностей измерений и вычислений способом качественной регистрации нелинейности закона фильтрации при малых градиентах давления является, как уже отмечалось в [11, 57], способ прослеживания колебаний пьезометрического уровня с собственными частотами после импульсного возмущения водоносного пласта.

3.4. К методике определения фильтрационных параметров водоносных пластов по результатам прослеживания свободных и вынужденных колебаний уровня подземных вод

Оценки фильтрационных параметров водовмещающих отложений, выполняемые на основе интерпретации прослеживания свободных колебаний давления в возмущающей скважине, вытекающей из упомянутых ранее моделей И. Краусс и С.Ф. Григоренко [10, 26, 27, 60, 61], обеспечиваются за счет учета водообмена в системе скважина-водоносный пласт, хотя, как показывалось ранее, такой водообмен в принципе не предусмотрен этими физико-математическими моделями. Попытаемся оценить связь фильтрационных параметров с характеристиками свободных колебаний пьезометрического уровня ПВ на основе учета такого водообмена для модели релаксационной фильтрации, рассмотренной в настоящем разделе.

Отметим, что водообмен водоносного пласта со скважиной (определяемый разностью емкостей водовмещающих отложений и скважины) прямо не предусмотрен и в модели релаксационной фильтрации, так как кинематическое по своей сути уравнение этой модели описывает распространение волны в водоносном

пласте – изолированной системе. Формально колебания пьезометрического уровня в скважине описывается тем же волновым уравнением для точки водоносного пласта, пространственно совпадающей со скважиной. С другой стороны и запрета в модели на такой водообмен нет, последний, очевидно, определяется разными величинами емкости скважины и водовмещающих отложений.

Перейдем в дальнейшем изложении от давлений в формуле (3.26) к напорам, так что уравнение (3.26) приобретет следующий вид [15, 17, 58]:

$$H(r, t) = H^0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t \pm \phi) \cdot J_0(\kappa r), \quad (3.55)$$

где H^0 – максимальный перепад напора в скважине при импульсном возбуждении водоносного пласта.

Выраженный в объемных единицах, приток ПВ в скважину (или отток из нее) составляет

$$Q(t) = 2\pi T r_0 \left. \frac{\partial H(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0}. \quad (3.56)$$

Здесь T – как и прежде, водопроводимость водовмещающих отложений; $H(r, t)$ – изменение пьезометрического напора в водоносном пласте на расстоянии r от оси возмущающей скважины в момент времени t от начала опыта.

С другой стороны, этот приток (отток) можно определить скоростью изменения уровня в скважине:

$$Q(t) = \pi r_\phi^2 \frac{\partial H(t)}{\partial t}, \quad (3.57)$$

где r_ϕ – внутренний радиус фильтровой колонны (r_ϕ полагается постоянным по всей ее длине); $H(t)$ – изменение пьезометрического уровня в скважине.

Пренебрежем для простоты дополнительным сопротивлением на несовершенство скважины по характеру вскрытия пласта [17]. Тогда $H(t) = H(r_0, t)$; приравняв правые части соотношений (3.56) и (3.57), имеем

$$2T r_0 \frac{\partial H}{\partial r} = r_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.58)$$

Подстановка в последнее уравнение выражения (3.55) дает при $\phi = 0$ [17]

$$T = \frac{(\beta \cdot \cos \omega t + \omega \cdot \sin \omega t) \cdot r_\phi^2 \cdot J_0(\kappa r_0)}{2\kappa r_0 \cdot \cos \omega t \cdot J_1(\kappa r_0)},$$

или в виде, удобном для дальнейшего анализа, –

$$T = \frac{r_\phi^2 \cdot J_0(\kappa r_0)}{2\kappa r_0 \cdot J_1(\kappa r_0)} \left[\beta + \omega \frac{H^0 \cdot \sin \omega t}{H^0 \cdot \cos \omega t} \right]. \quad (3.59)$$

Выбрав на графике временного прослеживания колебаний уровня моменты времени t_i таким образом, чтобы $\omega t_i = \pi, 2\pi, \dots$, можно существенно упростить (3.59):

$$T = \frac{\beta r_0^2 \cdot J_0(\kappa r_0)}{2\kappa r_0 \cdot J_1(\kappa r_0)}. \quad (3.60)$$

При этом полагается, что

$$H(r_0, t_i) = H^0 e^{-\beta t_i} \cdot J_0(\kappa r_0),$$

откуда [17]

$$J_0(\kappa r_0) = \frac{H(r_0, t_i)}{H^0} e^{\beta t_i}. \quad (3.61)$$

Из уравнения (3.61) с помощью таблиц функций Бесселя (приведенных, например, в [49]) несложно отыскать расчетные значения сначала комплексного параметра κr_0 –

$$\kappa r_0 = \inf J_0(\kappa r_0), \quad (3.62)$$

а затем и функции $J_1(\kappa r_0)$. Они в соответствии с (3.60) должны обеспечивать оценку водопроницаемости T .

Рассчитанная из (3.62), с учетом известного r_0 , величина параметра κ позволяет установить с использованием уравнения (3.26) проницаемость водоносного пласта, а, следовательно, и емкость водовмещающих отложений:

$$\mu^* = \frac{T}{\chi}.$$

Показанное здесь решение задачи интерпретации опытных данных получено на самом деле в пренебрежение емкостью скважины – именно это отражает условие (3.58). Вместе с тем, водообмен в системе скважина-водоносный пласт в том виде, как он представлен выше, для модели релаксационной фильтрации имеет смысл лишь в случае разных емкостей водовмещающих отложений и скважины. А тогда задачу водообмена следует рассматривать совершенно в иной постановке; иными словами, возникает задача учета такого водообмена для оценок его влияния на достоверность определяемых из опыта исходных величин, обеспечивающих расчеты фильтрационных и емкостных параметров водоносного пласта [17].

Рассмотрим эту задачу. Положим, что в начальный момент возбуждения пласта величины напора (и их изменения по отношению к исходному значению H_0) в скважине и водоносном пласте совпадают. В дальнейшем же напор в скважине на протяжении всего ОФО по абсолютной величине меньше напора в водоносном пласте; колебания его в скважине происходят с той же частотой, что и в пласте, однако отстают по фазе от колебаний напора в последнем (с величиной фазового угла ϕ). Тогда условие водообмена (3.58) запишется в следующем виде [17]:

$$2T r_0 \left. \frac{\partial H(r, t)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow r_0} - 2T r_0 \left. \frac{\partial \Delta h(r, t)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow r_0} = r_0^2 \frac{\partial H(t)}{\partial t} - r_0^2 \frac{\partial \Delta h(t)}{\partial t}, \quad (3.63)$$

где $\Delta h(r, t)$ и $\Delta h(t)$ – разности теоретического и фактического значений напора соответственно в водоносном пласте и скважине. Очевидно, что в этом соотношении $\Delta h(r_0, t) = \Delta h(t)$.

Возьмем самый простой случай. Зададим $\Delta h(r_0, t)$ в следующем виде [17]:

$$\Delta h(r_0, t) = \Delta h^0 \left[(1 - e^{-\beta t}) e^{-\beta t} \right] \cdot \cos(\omega t - \phi_1) \cdot J_0(\kappa r_0), \quad (3.64)$$

где Δh^0 – исходная (максимальная) величина разности теоретического и фактического значений напора в водоносном пласте и скважине. Она в процессе возмущения "набирается" практически мгновенно, так что $\beta_1 \gg \beta$.

С учетом последнего условия, а также помня, что рассматриваются установившиеся колебания пьезометрического уровня, упростим выражение (3.64):

$$\Delta h(r_0, t) = \Delta h^0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t - \phi_1) \cdot J_0(\kappa r_0). \quad (3.65)$$

Подстановка в (3.63) выражения из (3.55) и уравнения (3.65) дает [17]

$$T = \frac{r_\phi^2 \cdot J_0(\kappa r_0)}{2\kappa r_0 \cdot J_1(\kappa r_0)} \left[\beta + \omega \frac{H^0 \cdot \sin(\omega t - \phi) - \Delta h^0 \cdot \sin(\omega t - \phi_1)}{H^0 \cdot \cos(\omega t - \phi) - \Delta h^0 \cdot \cos(\omega t - \phi_1)} \right]. \quad (3.66)$$

Нетрудно видеть, что при $\phi_1 = \phi = 0$ и $\omega t_i = \pi, 2\pi, \dots$ последнее выражение вырождается в (3.60).

На основе (3.66) появляется возможность оценки систематической погрешности модели для установленной из опыта величины водопроницаемости T , обусловленной влиянием емкости возмущающей скважины. Положим в нем, как и в (3.59), $\phi = 0$ и представим для моментов времени, отвечающих условию $\omega t_i = \pi, 2\pi, \dots$ в следующем виде:

$$T = \frac{r_\phi^2 \cdot J_0(\kappa r_0)}{2\kappa r_0 \cdot J_1(\kappa r_0)} \left[\beta - \omega \frac{\Delta h^0 \cdot \sin(n\pi - \phi_1)}{H^0 - \Delta h^0 \cdot \cos(n\pi - \phi_1)} \right], \quad (3.67)$$

где $n = 1, 2, \dots$

Очевидно, что одна из составляющих указанной погрешности полностью определяется величиной вычитаемого в правой части (3.67), а та, в свою очередь,

зависит от отношения $\frac{\Delta h^0}{H^0}$ и фазового угла ϕ_1 [17]:

$$\Psi(H^0, \Delta h^0, \phi_1) = \frac{\Delta h^0 \cdot \sin(n\pi - \phi_1)}{H^0 - \Delta h^0 \cdot \cos(n\pi - \phi_1)} = \frac{a \cdot \sin(n\pi - \phi_1)}{1 - a \cdot \cos(n\pi - \phi_1)}, \quad a = \frac{\Delta h^0}{H^0}.$$

Вычисленные для ряда значений a , ϕ_1 и n величины этой составляющей систематической погрешности модели приведены в табл. 3.1 и на рис. 3.6. Как следует из представленных на этом рисунке графиков, она быстро растет при увеличении фазового угла ϕ_1 и разницы между емкостями скважины и водовмещающих отложений, выражающемся в росте параметра a . Кроме того, составляющая рассчитывалась только для значений n , равных 1 и 2. При больших величинах

нах n значения функции $\Psi(H^0, \Delta h^0, \phi_1)$ в точности равны приведенным на рис. 3.6 и в табл. 3.1.

Например, при $\beta = 0,08 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ и $n = 2$ фазовый угол ϕ_1 в 0,6 рад и соотношение $\frac{\Delta h^0}{H^0}$ от 0,1 до 0,5 обуславливают относительную систематическую погрешность водопроемкости T от 49,7 до 240,5 %.

Задача интерпретации результатов прослеживания свободных колебаний пьезометрического уровня ПВ в скважине сводится, таким образом, к выявлению и устранению указанной систематической погрешности, или иначе – к выявлению составляющей этих колебаний, отвечающей теоретическому решению. Принципиальное значение для решения такой задачи, как уже отмечалось выше, имеет возможность достоверной оценки коэффициента затухания колебаний β по опытным данным. Исследуем подробнее эту проблему.

Выберем на графике прослеживания максимумы и минимумы значений изменения пьезометрического уровня в скважине $H_c(t)$. Вычтем уравнение (3.64) из (3.55) и запишем полученное выражение для двух таких соседних максимумов (двух соседних минимумов). С учетом того, что $\beta_1 \gg \beta$, это выражение можно представить в виде [17]

$$H_c(t_1) = e^{-\beta t_1} [H^0 \cdot \cos \omega t_1 \cdot J_0(\kappa r_0) - \Delta h^0 \cdot \cos(\omega t_1 - \phi_1) \cdot J_0(\kappa r_0)] \equiv F_1 e^{-\beta t_1},$$

$$H_c(t_2) = e^{-\beta t_2} [H^0 \cdot \cos \omega t_2 \cdot J_0(\kappa r_0) - \Delta h^0 \cdot \cos(\omega t_2 - \phi_1) \cdot J_0(\kappa r_0)] \equiv F_2 e^{-\beta t_2}.$$

Здесь все обозначения прежние.

Возьмем натуральные логарифмы от двух последних соотношений, имеем

$$\begin{aligned} \ln H_c(t_1) &= \\ &= -\beta t_1 + \ln F_1, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \ln H_c(t_2) &= \\ &= -\beta t_2 + \ln F_2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Рис. 3.6. Графики зависимости функции погрешностей от сдвига фазы при значениях параметра a , равных соответственно 0,05 (1), 0,1 (2), 0,2 (3) и 0,5 (4), и при $n = 1$ (сплошная линия) и $n = 2$ (пунктирная линия)

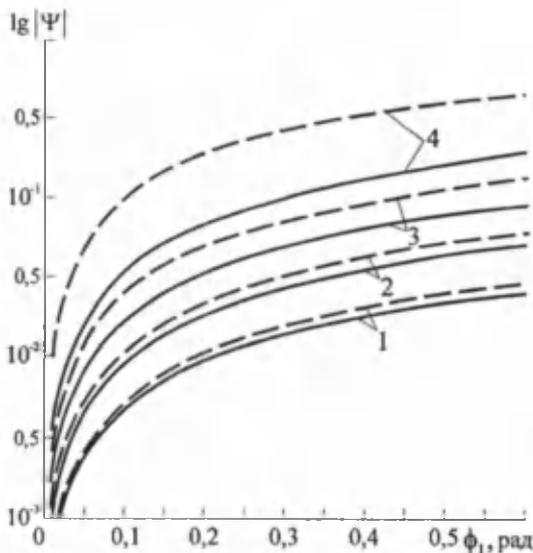


Таблица 3.1

Значения функции $\Psi(H^0, \Delta h^0, \phi_1)$ в зависимости от величин фазового угла ϕ_1 , параметра $a = \frac{\Delta h^0}{H^0}$ и множителя n

ϕ_1	$n = 1$				$n = 2$			
	$a = 0,05$	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,5$	$a = 0,05$	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,5$
0,01	0,0004762	0,0009091	0,0016667	0,0033333	-0,0005263	-0,0011111	-0,0024999	-0,0099993
0,05	0,0023801	0,0045441	0,0083316	0,0166667	-0,0026303	-0,0055525	-0,0124909	-0,0499168
0,10	0,0047551	0,0090799	0,0166528	0,0333333	-0,0052530	-0,0110864	-0,0249272	-0,0993371
0,15	0,0071199	0,0135992	0,0249531	0,0499999	-0,0078605	-0,0165835	-0,0372549	-0,1477787
0,20	0,0094694	0,0180936	0,0332219	0,0666661	-0,0104453	-0,0220256	-0,0494211	-0,1947866
0,25	0,0117986	0,0225550	0,0414488	0,0833315	-0,0130000	-0,0273947	-0,0613740	-0,2399447
0,30	0,0141024	0,0269750	0,0496228	0,0999955	-0,0155172	-0,0326734	-0,0730642	-0,2828855
0,35	0,0163757	0,0313453	0,0577330	0,1166568	-0,0179898	-0,0378448	-0,0844445	-0,3232972
0,40	0,0186137	0,0356576	0,0657683	0,1333140	-0,0204109	-0,0428925	-0,0954705	-0,3609271
0,45	0,0208113	0,0399035	0,0737174	0,1499650	-0,0227736	-0,0478008	-0,1061007	-0,3955840
0,50	0,0229637	0,0440746	0,0815685	0,1666070	-0,0250714	-0,0525547	-0,1162972	-0,4271366
0,55	0,0250659	0,0481627	0,0893097	0,1832367	-0,0272980	-0,0571401	-0,1260254	-0,4555106
0,60	0,0271132	0,0521594	0,0969287	0,1998497	-0,0294473	-0,0615437	-0,1352546	-0,4806841

В силу того, что $\cos \omega t_2 = \cos (\omega t_1 + \omega \Delta t)$ и $\cos (\omega t_2 - \phi_1) = \cos (\omega t_1 + \omega \Delta t - \phi_1)$, а $\omega \Delta t = 2\pi$, в уравнениях (3.68) и (3.69) должно быть $F_1 = F_2$. Тогда в результате вычитания (3.69) из (3.68) следует [17]

$$\beta = \frac{\ln \frac{H_c(t_1)}{H_c(t_2)}}{t_2 - t_1}.$$

Таким образом, отличие емкости возмущающей скважины от емкости водоносного пласта не влияет на достоверности оценок коэффициента затухания колебаний по опытным данным. Соответственно появляется простая возможность восстановления значений напора в скважине на любой момент времени на протяжении возмущения, отвечающих теоретическому решению, а, следовательно, на первый взгляд применимой становится рассмотренная выше методика определения фильтрационных параметров водоносного пласта.

Действительно, имея измеренное начальное значение перепада напора в скважине $H_c(0) = H^0 \cdot J_0(\kappa r_0)$ и величину коэффициента затухания колебаний β , нетрудно рассчитать $H(r_0, t)$:

$$H(r_0, t) = H^0 e^{-\beta t} \cdot \cos \omega t \cdot J_0(\kappa r_0). \quad (3.70)$$

Не вызывает особых затруднений и определение на основе опытных данных таких параметров возмущения, как частота колебаний ω и продолжительность затухания напряжений сдвига в жидкости τ_0 .

Вместе с тем, пока еще ничего не сказано о физическом смысле и методах оценки параметра H^0 . В частности, из модели релаксационной фильтрации следует (и это подтвердило исследование влияния емкости скважины на достоверность фильтрационных параметров), что за H^0 на самом деле должно приниматься не просто значение перепада напора в скважине на момент начала возмущения, а величина этого перепада на оси возмущающей скважины. При этом последняя, как предполагается теоретически, должна обладать емкостью, совпадающей с емкостью водоносного пласта.

Соответственно по формуле (3.70) устанавливается теоретическое изменение напора на расстоянии r_0 от оси скважины с использованием измеренного комплексного параметра $H_c(0) = H^0 \cdot J_0(\kappa r_0)$, в котором величина H^0 , в свою очередь, напрямую измерению не поддается, а вычисление ее на основе значений (измеренных и рассчитанных по опытным данным) $H_c(0)$, ω , β и τ_0 требует еще и априорного задания, как следует из уравнения (3.27), пьезопроводности⁸ χ . Использование же в качестве H^0 установленной из опыта величины $H_c(0)$ тре-

⁸ Точно также априорное задание пьезопроводности χ требует и методика интерпретации результатов преследования С.Ф. Григоренко [10, 26, 27].

бует принятия условия $J_0(\kappa r_0) = 1$ или, что то же самое, $\kappa r_0 = 0$. Это, в свою очередь, означает $J_1(\kappa r_0) = 0$, а тогда становится неопределенной величина водопроницаемости T в уравнении (3.60) [17].

Корректность рассмотренной выше схемы водообмена, т.е. соответствие ее реальным условиям, должна быть отражена в данных ОФО; в первую очередь это относится к регистрации на диаграммах колебаний пьезометрического уровня в скважине фазового угла ϕ . Возможность же оценки разности теоретического и фактического значений напора в скважине $\Delta h(t)$ без результатов прослеживания колебаний давления в жидкости в пласте на определенном расстоянии от оси возмущающей скважины представляется, по меньшей мере, проблематичной. Так, в частности, на диаграмме прослеживания колебаний на протяжении первого полупериода должны зафиксироваться разные по протяженности первая и вторая четверти периода (соответственно разными по протяженности должны быть первый и второй полупериоды), а величина первого периода должна отличаться от следующих (равных между собой) как раз на ту самую разность первых двух четвертей периода.

Как уже отмечалось ранее, на рис. 3.4 представлена индикаторная диаграмма прослеживания свободных колебаний уровня в возмущающей скважине после импульсного возбуждения водоносного пласта. Обработка ее дала следующую величину частоты колебаний – $\omega_c \cong 0,448 \text{ с}^{-1}$ (индекс "С", как и прежде обозначает параметры, установленные для возмущающей скважины), соответственно значение периода колебаний $T \cong 15,2 \text{ с}$. Отсюда теоретически рассчитанная величина четверти периода составляет 3,8 с, однако из диаграммы эта величина определена примерно в 3,3 с. Таким образом, разность первых четвертей первого периода равна около 0,5 с, соответственно $\phi \cong 0,207 \text{ рад}$.

Таким образом, рассмотренная методика, базирующаяся на модели релаксационной фильтрации ПВ, на самом деле не обеспечивает определения фильтрационных параметров водоносного пласта по результатам интерпретации прослеживания свободных колебаний пьезометрического уровня в возмущающей скважине. Положение можно было бы исправить, если дополнить методику определением, например, расстояния от центра возмущения до одного из узлов цилиндрических стоячих волн, отвечающих одному из нулей функции $J_0(\kappa r)$, с целью установления параметра κ и соответственно – значения H^0 . Для этого необходимо бурение наблюдательной скважины и такое ее оборудование, которое полностью исключало бы влияние емкости на результаты прослеживания (например, тензиометрами, датчиками пластового давления).

Однако реально в опытах перепад напора в возмущающей скважине $H_c(0)$ задается не более 10, максимум 15 сантиметров [60, 61], в наблюдательной скважине он еще меньше, если даже скважина окажется в точке пучности волны. Это предъявляет чрезвычайно высокие требования к чувствительности и точности измерительной аппаратуры. В опытах же С.Ф. Григоренко величина $H_c(0)$ задавалась до 8 и даже 15 м [10, 26, 27], соответственно снижаются требования к точно-

сти и чувствительности измерительной аппаратуры. Вместе с тем, и в том и в другом случаях нет каких-либо критериев, обеспечивающих выбор расстояния от центра возмущения, на котором следует бурить наблюдательную скважину, т.е. неопределенным становится приуроченность этой скважины (пусть даже она не совпадает с узлом или пучностью стоячей волны) к вполне определенной стоячей волне, какой-то точке ее профиля (кстати отметить, что точно такие же требования предъявляются к оборудованию наблюдательных скважин для проведения и интерпретации результатов ОФО водоносного пласта при инициировании в нем вынужденных колебаний пьезометрического уровня с малой амплитудой, которые формально описываются той же системой уравнений (3.26) и (3.27), но с коэффициентом затухания $\beta = 0$ [21]).

Итак, выполненное исследование показало, что, во-первых, не существует основного предполагаемого преимущества, связываемого с возможным применением методик интерпретации результатов прослеживания свободных и вынужденных колебаний пьезометрического уровня: возможности ОФО водоносного пласта одиночной выработкой (скважиной) и его кратковременности. Во-вторых, технические трудности, возникающие при организации такого опробования и интерпретации его результатов, представляются на настоящий момент непреодолимыми. Поэтому реализация методических разработок, базирующихся на теории релаксационной фильтрации, возможна и целесообразна лишь на принципиально иных, в сравнении с существующими, технических и методических подходах к экспериментальному изучению распространения волн в водоносном пласте.

Список литературы к разделу 3

1. *Алексеев В.С., Зайцев А.С., Круглова Н.Д.* Принципы проектирования и эксплуатации наблюдательных скважин // Обзор. Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1981. 32 с.
2. *Алексеев В.С., Коммунар Г.М., Шержуков Б.С.* Массоперенос в водонасыщенных горных породах // Итоги науки и техники. Сер. Гидрогеология. Инженерная геология. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 11. 143 с.
3. *Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х.* К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Известия ВУЗов. Нефть и газ. 1975. № 6. С. 71-74.
4. *Арбе А.Г.* Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 101 с.
5. *Арбе А.Г.* а. с. № 1160283 СССР. Кл. G 01 № 15/08. Способ определения начального градиента фильтрации. Опубл. 07.06.1985. Бюл. № 21.
6. *Балаян Н.М., Костерин А.В.* Разностный метод расчета фильтрации тиксотропной жидкости с переменным спектром релаксации // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1991. Вып. 11. С. 3-12.
7. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрация жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 289 с.
8. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.

9. **Баренблатт Г.И., Крылов А.П.** Об упруго-пластическом режиме фильтрации // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1955. № 2. С. 5-13.
10. **Башмаков В.И., Боровский Л.В., Вартамян Г.С., Григоренко С.Ф., Зобнин А.В., Куликов Г.В., Шарпанов Н.Н.** Исследование водоносных горизонтов методом колебаний // Водные ресурсы. 1986. Т. 13. № 2. С. 31-39.
11. **Бураков М.М.** Об одном представлении колебаний уровня подземных вод с собственными частотами // Водные ресурсы. 1994. Т. 21. № 1. С. 69-71.
12. **Бураков М.М.** К теории релаксационной фильтрации подземных вод // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1994. № 3. С. 83-88.
13. **Бураков М.М.** Об уравнении движения жидкости в теории релаксационной фильтрации // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1994. № 6. С. 83-88.
14. **Бураков М.М.** О теории релаксационной фильтрации подземных вод // Самоорганизация природных и социальных систем. Материалы семинара. Алмата: Гылым, 1995. С. 36-37.
15. **Бураков М.М.** К оценке геофильтрационных параметров по результатам прослеживания свободных колебаний пьезометрического уровня в скважинах // Вода: экология и технология. Тезисы докладов Второго Международного Конгресса. М.: SIBICO International, 1996. С. 118-119.
16. **Бураков М.М.** Оценка возможности определения начального градиента при опытных откачках подземных вод // Водные ресурсы. 1998. Т. 25. № 3. С. 372-374.
17. **Бураков М.М.** К определению фильтрационных параметров водоносных пластов по результатам прослеживания свободных и вынужденных колебаний уровня подземных вод // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1999. № 6. С. 97-108.
18. **Бураков М.М.** Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. II // Геология Казахстана. 2002. № 4. С. 72-86.
19. **Бураков М.М., Веселов В.В.** Приложение теории релаксационной фильтрации к интерпретации прослеживания свободных колебаний давления в водоносном пласте // Проблемы вычислительной математики и информационных технологий. Материалы Международной научно-практической конференции. Алматы: Изд-во КазГУ, 1999. С. 136-137.
20. **Бураков М.М., Веселов В.В.** Теория релаксационной фильтрации подземных вод // Геология и минерагения Казахстана. Доклады и тезисы докладов казахстанских геологов. Алматы: Казгео, 2000. С. 323-326.
21. **Веселов В.В., Бураков М.М.** Некоторые следствия теории релаксационной фильтрации подземных вод // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1998. № 4. С. 81-89.
22. **Веселов В.В., Бураков М.М.** К оценке фильтрационных параметров по данным прослеживания свободных колебаний уровня подземных вод // Академик К.И. Сатпаев и его роль в развитии науки, образования и индустрии в Казахстане. Труды Международного симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения К.И. Сатпаева. Алматы: КазНТУ, 1999. Ч. I. С. 262-265.
23. **Веселов В.В., Гонтов Д.П., Калачиков Т.С., Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.** К вопросу о возможности существования фильтрационного ре-

- зонанса // Моделирование и исследование предельных возможностей систем управления. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1976. С. 174-181.
24. *Гидродинамические* и физико-химические свойства горных пород / Н.Н. Веригин, С.В. Васильев, В.С. Саркисян, Б.С. Шержуков. М.: Недра, 1976. 272 с.
25. *Голубев В.С.* Уравнения движения жидкости в пористой среде с застойными зонами // Доклады АН СССР. 1978. Т. 238. № 6. С. 1318-1320.
26. *Григоренко С.Ф.* Универсальная методика определения основных гидрогеологических параметров на основе спектрального анализа переходных процессов в системе скважина-водоносный горизонт // Актуальные вопросы гидрогеологии. М., 1988. С. 75-91. Деп. в ВИНТИ, № 881-В 88.
27. *Григоренко С.Ф.* Теоретические основы и методика определения фильтрационных свойств по характеристикам колебательного процесса в системе скважина-водоносный горизонт. Автореферат диссертации... кандидат техн. наук. М., 1992. 24 с.
28. *Гуревич А.Е., Капченко Л.Н., Кругликов Н.М.* Теоретические основы нефтяной гидрогеологии. Л.: Недра, 1972. 271 с.
29. *Казанский А.Б.* Теория фильтрационной диффузии и ее приложение к задачам гидрологии и гидрогеологии. М.: Наука, 1973. 136 с.
30. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
31. *Кривоносов И.В., Балакиров Ю.А.* Освоение, исследование и эксплуатация многопластовых скважин. М.: Недра, 1975. 168 с.
32. *Кузьменко Э.Д., Баграмян Е.А., Колодий С.В., Кузьменко А.Д.* Обработка и интерпретация данных расходомерии скважин при восстановлении давления в режиме затухающих свободных колебаний // ЭИ. ВИЭМС. Серия гидрогеология и инженерная геология. Отечественный производственный опыт. 1984. Вып. 4. С. 10-16.
33. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
35. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
36. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
37. *Мирзаджанзаде А.Х., Ковалев А.Г., Зайцев Ю.В.* Особенности эксплуатации аномальных нефтей. М.: Недра, 1972. 200 с.
38. *Молокович Ю.М.* К теории нелинейной фильтрации с учетом релаксационных эффектов // Известия ВУЗов. Математика. 1977. № 5. С. 66-73.
39. *Молокович Ю.М.* К теории релаксационной фильтрации в релаксационно-сжимаемых и трещиновато-пористых средах // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1979. Вып. 3. С. 42-50.
40. *Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикун В.И., Штанин А.В.* Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во КГУ, 1980. 136 с.
41. *Молокович Ю.М., Шарипов Э.А.* К теории нестационарной прямолинейно-параллельной фильтрации в релаксационно-сжимаемой пористой среде //

Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1983. Вып. 5. С. 57-83.

42. **Молокович Ю.М., Шкуро А.С.** Учет влияния сил инерции на распределение давления в пласте и дебит при пуске галереи с постоянным забойным давлением // Известия ВУЗов. Нефть и газ. 1975. № 3. С. 33-36.

43. **Муфтахов А.Ж.** Определение фильтрационных параметров водоносных горизонтов, расположенных в прибрежных зонах // Водные ресурсы. 1986. Т. 13. № 3. С. 174-178.

44. **Николис Г., Пригожин И.** Познание сложного. Введение. М.: Мир, 1990. 344 с.

45. **Пикуза В.И.** К теории одномерной нестационарной фильтрации в вязкоупругом нефтяном пласте // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1978. Вып. 2. С. 52-58.

46. **Порядин В.И.** Конседиментационная солянокупольная реодинамика // Алма-Ата, 1986. 16 с. Деп. в ВИНТИ, № 5075-В 86.

47. **Скучик Е.** Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 558 с.

48. **Смирнов М.М.** Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968. 112 с.

49. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.

50. **Степанов В.А., Песчанская Н.Н., Шнейцман В.В.** Прочность и релаксационные явления в твердых телах. Л.: Наука, 1984. 246 с.

51. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

52. **Федынский В.В.** Разведочная геофизика. Геофизические методы исследования земной коры, поисков и разведки полезных ископаемых. М.: Недра, 1967. 679 с.

53. **Шестаков В.М.** Вопросы терминологии в геогидродинамике // Водные ресурсы. 1984. Т. 8. № 5. С. 156-159.

54. **Шестаков В.М.** Гидрогеодинамика. М.: Изд-во МГУ. 1995. 368 с.

55. **Щелкачев В.Н.** Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Доклады АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 103-106.

56. **Bredehoeft J.D., Cooper H.H., Jr., Papadopoulos I.S.** Inertial and storage effects in well-aquifer system: an analog investigation // Water Resources Research. 1966. V. 2. № 4. P. 697-707.

57. **Burakov M.M.** On a representation of ground water level oscillations with natural frequencies // Water Resources. 1994. V. 21. № 1. P. 63-65.

58. **Burakov M.M.** To the estimating of geofiltrational parameters on the results of the free oscillation observing of head level in wells // Water: ecology and technology. (International congress). Moscow: SIBICO International, 1996. P. 91.

59. **Cooper H.H., Jr., Bredehoeft J.D., Papadopoulos I.S.** Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water // Water Resources Research. 1967. V. 3. № 1. P. 263-269.

60. **Krauss I.** Die Bestimmung der Transmissivität von Grundwasserleitern aus dem Einschwingverhalten des Brunnen-Grundwasserleitersystems // Journal of Geophysics. 1974. 40. P. 381-400.

61. **Krauss I.** Das Einschwingverfahren-Transmissivitätsbestimmung ohne Pumpversuch // GWF-Wasser/Abwasser. 1977. 118. № 9. S. 407-410.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выразить математически фильтрацию так, чтобы формулы отражали реальное передвижение воды по межминеральному пространству или реальные перескоки молекул, создающие в итоге фильтрационный поток, принципиально невозможно. Поэтому при описании фильтрации используется феноменологический подход, в соответствии с которым уравнения движения жидкости являются эквивалентом не природного процесса переноса, а фиктивного (модельного) процесса течения некоторой модельной сплошной среды, обладающей свойствами идеальной жидкости и текущей по всему объему проводящей области.

Каждой модели движения ставится в соответствие свой характерный размер проводящей среды – масштаб осреднения течения, определяющий детальность и точность приближения моделью реального процесса, понятийную базу и терминологию, требования к экспериментальному изучению фильтрации. Реально на практике для описания процесса движения жидкости через пористые среды (*фильтрации*) безальтернативно используется *фильтрационная* физико-математическая модель. В некоторых разновидностях фильтрационной модели для более полного их соответствия реальному процессу используется понятие об эффективных (кажущихся) параметрах; эффективные параметры несут в себе информацию не только о свойствах проводящей среды и фильтрующейся жидкости, но и о действии режимобразующих факторов.

Одной из самых спорных и мало исследованных с точки зрения соответствия масштабу осреднения течения проблем фильтрационной модели является обоснование уравнения движения жидкости – закона фильтрации. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что наиболее широко используемый линейный закон фильтрации (закон Дарси) справедлив для движения воды, нефти и других жидкостей в большинстве пористых, трещиноватых и закарстованных пород при большом диапазоне гидравлических градиентов (градиентов давления или напора) и скоростей фильтрации. На его основе в настоящее время базируется большинство теоретических исследований фильтрации, и интерпретируются опытные работы.

Вместе с тем, к настоящему времени многочисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями установлены отклонения от линейного закона в области как больших, так и малых гидравлических градиентов. Такие отклонения обусловлены с одной стороны проявлением инерционной составляющей сопротивления движению жидкости, а с другой – отличием свойств реальной жидкости от свойств идеальной ньютоновой. Это определяет необходимость изучения нелинейной фильтрации, главной целью которого является установление границ применимости закона Дарси и, соответственно, выводов теоретических построений и практических исследований, базирующихся на нем, а также разработка методических приемов, обеспечивающих опытную регистрацию параметров нелинейности фильтрации.

На основе сформулированного и исследованного Г.И. Баренблаттом авторского модельного решения задачи о нестационарной фильтрации жидкости к скважине при степенном законе сопротивления получено асимптотическое приближение этого решения применительно к инерционной составляющей течения, справедливое при квазистационарном режиме фильтрации. Использование двучленного закона фильтрации позволило развить методический подход к оценке дополнительных, в сравнении с линейной составляющей сопротивления, потерь напора в возмущающих скважинах, обусловливающих их несовершенство по характеру вскрытия пласта. Применение этого подхода позволяет определять достоверные значения фильтрационных и емкостных параметров водоносного пласта по результатам одиночных откачек.

Приведены результаты экспериментальных исследований фильтрации воды в песке при малых градиентах напора, выполненных автором. Исследования подтвердили, что отклонения от линейного закона в этой области градиентов проявляются не только в глинистых грунтах, для которых такие аномалии установлены и анализируются сравнительно давно, но и в пористых средах, образованных значительно более крупнозернистым материалом.

Для обоснования модели фильтрации при малых градиентах напора целесообразно (с позиций феноменологического подхода к описанию течения в проводящих средах) фильтрующуюся жидкость рассматривать как тиксотропную систему с эффективной вязкостью. При этом для фильтрационной модели несущественны причины неьютонового поведения жидкости, важен сам факт нелинейности течения, для интерпретации которого может быть привлечена гипотеза о структурированности жидкости.

Наличие начального (или предельного) градиента напора в формулах не означает отсутствия потока при меньших градиентах, а является способом упростить математическую формулу для достаточно больших градиентов. При градиентах, меньших начального (или предельного), в опытах регистрируется уже не фильтрационный, а бародиффузионный перенос жидкости. Сам начальный градиент следует рассматривать именно как некоторое граничное значение градиента, при котором механический фильтрационный перенос жидкости в проводящей среде переходит в бародиффузионный.

На примере опытных кустовых откачек подземных вод (ПВ) в долине р. Жаксысарысу в Центральном Казахстане проанализированы теоретические и методические аспекты полевого опытного определения параметров нелинейного закона фильтрации на основе единственного известного из литературы (и запатентованного) метода А.Г. Арье. Показана принципиальная неприменимость этого метода для решения такой задачи, поэтому предложен новый оригинальный метод определения параметров нелинейного закона фильтрации.

При этом вывод о нелинейности закона фильтрации, вернее, об экспериментальной регистрации нелинейности закона фильтрации при малых градиентах напора может быть сделан только по результатам массового опробования водонесных систем. Если достаточно представительная экспериментальная выборка покажет однозначную тенденцию локальных экспериментов в регистрации начального градиента, то можно будет сделать вывод о малой вероятности неслучайной подобной группировки опытных данных, и только тогда на ее счет можно будет отнести нелинейность закона фильтрации. Иными словами, только тогда

можно будет говорить о решении проблемы экспериментальной регистрации нелинейности закона фильтрации, несмотря на то, что в единичных опытах параметры закона фильтрации регистрируются с весьма низкой достоверностью.

В последние годы накопились экспериментальные данные, не укладывающиеся в рамки имеющихся теоретических представлений о фильтрации ПВ. В ряде опытов зарегистрированы свободные колебания давления в жидкости после импульсного возбуждения пласта. Подобные исследования на первый взгляд suggest создание принципиально новой экспериментальной базы в гидрогеологии. Интерес к этой проблеме реализовался разработкой методик проведения опытно-фильтрационного опробования водоносных систем и интерпретации его результатов. Вместе с тем, попытка описания собственных колебаний давления линейной фильтрационной моделью окончилась закономерной неудачей; многие аспекты упомянутых методик оказались некорректными.

Предложена модель релаксационной фильтрации ПВ. Известно, что свободные колебания определяются монохроматическими стоячими волнами – они образуются в ограниченном объеме проводящей среды, а их аппроксимация должна выполняться уравнением фильтрации гиперболического типа. Показано, что ограниченность пространства в плане обусловлена структурированностью жидкости, определяющей наличие начального (предельного) градиента давления в жидкости (с модулем G). Вертикальные поверхности, на которых в краевых частях области возмущения выполняется условие $|\text{grad } p| = G$, ограничивают ее в плане. Во внешней части пласта, где фильтрационный перенос трансформируется в бародиффузионный, условно принимается, что жидкость ведет себя как твердое тело.

В основу уравнения фильтрации положены представления о релаксационных явлениях в жидкости, обуславливающих отсутствие принципиальных различий в механических свойствах жидкостей и твердых тел. При кратковременном воздействии на жидкости они упруго деформируются; после прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие со временем. Уравнение движения жидкости, учитывающее релаксацию скорости фильтрации, в совокупности с уравнениями неразрывности и состояния приводит к волновому уравнению фильтрации. Решение задачи о возбуждении пласта через скважину, вытекающее из модели, прекрасно согласуется с экспериментальными данными. Модель обобщена на случай вынужденных колебаний давления. На ее основе выполнена оценка принципиальной возможности построения методик опытно-фильтрационного опробования водоносных пластов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы функций Бесселя полуцелого порядка

Для составления таблиц значений функций Бесселя первого $J_n(z)$ и второго $Y_n(z)$ рода полуцелого порядка использованы имеющиеся таблицы сферических функций Бесселя первого и второго родов нулевого порядка¹.

Как известно, сферические функции Бесселя первого рода $j_n(z)$, второго рода $y_n(z)$ и третьего рода $h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(2)}(z)$ являются частными решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2z \frac{dw}{dz} + [z^2 - n(n+1)]w = 0,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Они связаны с цилиндрическими функциями Бесселя полуцелого порядка следующими соотношениями¹:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z),$$

$$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z).$$

Отсюда очевидно, что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} j_0(z), \quad Y_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} y_0(z).$$

Когда n — действительное число, каждая из функций $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ имеет бесконечное множество действительных нулей; все нули простые, за исключени-

¹ Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.

ем точки $z = 0$. Нули цилиндрических функций Бесселя полуцелого порядка точно совпадают с нулями сферических функций Бесселя $J_{0,5}$ и $Y_{0,5}$.

Значения функций Бесселя – сферических порядка 0 и цилиндрических полуцелого порядка

x	$J_0(x)$	$J_{\frac{1}{2}}(x)$	$Y_0(x)$	$Y_{\frac{1}{2}}(x)$
1	2	3	4	5
0	1	0	$-\infty$	$-\infty$
0,1	0,99833417	0,25189292	-9,95004170	-2,51052712
0,2	0,99334665	0,35445073	-4,90033290	-1,74856038
0,3	0,98506736	0,43049350	-3,18445500	-1,39166845
0,4	0,97354586	0,49127699	-2,30265250	-1,16197936
0,5	0,95885108	0,54097376	-1,75516510	-0,99024581
0,6	0,94107079	0,58161818	-1,37555940	-0,85014896
0,7	0,92031098	0,61436108	-1,09263170	-0,72939518
0,8	0,89669511	0,63992613	-0,87088339	-0,62150561
0,9	0,87036323	0,65881249	-0,69067774	-0,52280141
1,0	0,84147098	0,67139667	-0,54030231	-0,43109885
1,1	0,81018851	0,67798876	-0,41236011	-0,34507466
1,2	0,77669924	0,67886519	-0,30196480	-0,26392892
1,3	0,74119860	0,67428938	-0,20576833	-0,18719328
1,4	0,70389266	0,66452376	-0,12140510	-0,11461488
1,5	0,66499666	0,64983809	-0,04715813	-0,04608317
1,6	0,62473350	0,63051410	0,01824970	0,01841856
1,7	0,58333224	0,60684881	0,07579088	0,07884633
1,8	0,54102646	0,57915497	0,12622339	0,13511891
1,9	0,49805268	0,54776231	0,17015240	0,18713497
2,0	0,45464871	0,51301611	0,21807342	0,24606949
2,1	0,41015208	0,47527671	0,24040291	0,27796455
2,2	0,36749837	0,43491743	0,26750051	0,31657456
2,3	0,32421966	0,39232258	0,28968523	0,35053413
2,4	0,28144299	0,34788533	0,30724738	0,37978155
2,5	0,23938886	0,30200491	0,32045745	0,40427831
2,6	0,19826976	0,25508399	0,32957260	0,42401168
2,7	0,15828884	0,20752588	0,33484153	0,43899672
2,8	0,11963863	0,15973148	0,33650798	0,44927728
2,9	0,08249977	0,11209643	0,33481316	0,45492686
3,0	0,04704000	0,06500818	0,32999750	0,45604882

1	2	3	4	5
3,1	0,01341312	0,01884302	0,32230166	0,45277604
3,2	-0,01824192	-0,02603668	0,31196712	0,44527044
3,3	-0,04780173	-0,06928522	0,29923629	0,43372184
3,4	-0,07515915	-0,11057613	0,28453241	0,41861161
3,5	-0,10022378	-0,14960457	0,26755905	0,39938682
3,6	-0,12292235	-0,18608962	0,24909956	0,37710670
3,7	-0,14319896	-0,21977626	0,22921622	0,35179224
3,8	-0,16101523	-0,25043718	0,20814940	0,32374794
3,9	-0,17635030	-0,27787442	0,18613649	0,29329448
4,0	-0,18920062	-0,30192049	0,16341091	0,26076607
4,1	-0,19957978	-0,32243971	0,14020096	0,22650770
4,2	-0,20751804	-0,33932866	0,11672877	0,19087216
4,3	-0,21306185	-0,35251693	0,09320911	0,15421714
4,4	-0,21627320	-0,36196712	0,06984838	0,11690222
4,5	-0,21722892	-0,36767486	0,04684351	0,07928586
4,6	-0,21601978	-0,36966852	0,02438098	0,04172249
4,7	-0,21274963	-0,36800845	0,00263589	0,00455948
4,8	-0,20753429	-0,36278600	-0,01822896	-0,03186562
4,9	-0,20050053	-0,35412257	-0,03806375	-0,06722791
5,0	-0,19178485	-0,34216798	-0,05673244	-0,10121771
5,1	(-1) -1,8153	(-1) -3,2709	(-2) -7,4113	(-1) -1,3354
5,2	(-1) -1,6990	(-1) -3,0913	(-2) -9,0099	(-1) -1,6393
5,3	(-1) -1,5703	(-1) -2,8844	(-1) -1,0460	(-1) -1,9214
5,4	(-1) -1,4310	(-1) -2,6532	(-1) -1,1754	(-1) -2,1793
5,5	(-1) -1,2828	(-1) -2,4004	(-1) -1,2885	(-1) -2,4110
5,6	(-1) -1,1273	(-1) -2,1285	(-1) -1,3849	(-1) -2,6149
5,7	(-2) -9,6611	(-1) -1,8404	(-1) -1,4644	(-1) -2,7896
5,8	(-2) -8,0104	(-1) -1,5392	(-1) -1,5268	(-1) -2,9338
5,9	(-2) -6,3369	(-1) -1,2281	(-1) -1,5720	(-1) -3,0466
6,0	(-2) -4,6569	(-2) -9,1015	(-1) -1,6003	(-1) -3,1276
6,1	(-2) -2,9863	(-2) -5,8849	(-1) -1,6119	(-1) -3,1765
6,2	(-2) -1,3402	(-2) -2,6626	(-1) -1,6073	(-1) -3,1932
6,3	(-3) 2,6689	(-3) 5,3449	(-1) -1,5871	(-1) -3,1784
6,4	(-2) 1,8211	(-2) 3,6759	(-1) -1,5519	(-1) -3,1325
6,5	(-2) 3,3095	(-2) 6,7322	(-1) -1,5024	(-1) -3,0562
6,6	(-2) 4,7203	(-2) 9,6757	(-1) -1,4397	(-1) -2,9511
6,7	(-2) 6,0425	(-1) 1,2479	(-1) -1,3648	(-1) -2,8187
6,8	(-2) 7,2664	(-1) 1,5119	(-1) -1,2785	(-1) -2,6601
6,9	(-2) 8,3832	(-1) 1,7570	(-1) -1,1822	(-1) -2,4777
7,0	(-2) 9,3855	(-1) 1,9813	(-1) -1,0770	(-1) -2,2736

Продолжение табл.

1	2	3	4	5
7,1	(-1) 1,0267	(-1) 2,1828	(-2) -9,6415	(-1) -2,0498
7,2	(-1) 1,1023	(-1) 2,3600	(-2) -8,4493	(-1) -1,8090
7,3	(-1) 1,1650	(-1) 2,5115	(-2) -7,2065	(-1) -1,5536
7,4	(-1) 1,2145	(-1) 2,6360	(-2) -5,9263	(-1) -1,2863
7,5	(-1) 1,2507	(-1) 2,7329	(-2) -4,6218	(-1) -1,0099
7,6	(-1) 1,2736	(-1) 2,8014	(-2) -3,3061	(-2) -7,2722
7,7	(-1) 1,2833	(-1) 2,8413	(-2) -1,9919	(-2) -4,4101
7,8	(-1) 1,2802	(-1) 2,8528	(-3) -6,9174	(-2) -1,5415
7,9	(-1) 1,2645	(-1) 2,8358	(-3) 5,8231	(-2) 1,3059
8,0	(-1) 1,2367	(-1) 2,7909	(-2) 1,8188	(-2) 4,1046
8,1	(-1) 1,1974	(-1) 2,7191	(-2) 3,0067	(-2) 6,8277
8,2	(-1) 1,1472	(-1) 2,6211	(-2) 4,1360	(-2) 9,4499
8,3	(-1) 1,0870	(-1) 2,4987	(-2) 5,1973	(-1) 1,1947
8,4	(-1) 1,0174	(-1) 2,3527	(-2) 6,1820	(-1) 1,4296
8,5	(-2) 9,3940	(-1) 2,1852	(-2) 7,0825	(-1) 1,6475
8,6	(-2) 8,5395	(-1) 1,9981	(-2) 7,8921	(-1) 1,8466
8,7	(-2) 7,6203	(-1) 1,7934	(-2) 8,6051	(-1) 2,0251
8,8	(-2) 6,6468	(-1) 1,5732	(-2) 9,2170	(-1) 2,1816
8,9	(-2) 5,6294	(-1) 1,3400	(-2) 9,7240	(-1) 2,3146
9,0	(-2) 4,5791	(-1) 1,0961	(-1) 1,0124	(-1) 2,4233
9,1	(-2) 3,5066	(-2) 8,4401	(-1) 1,0415	(-1) 2,5058
9,2	(-2) 2,4227	(-2) 5,8632	(-1) 1,0596	(-1) 2,5643
9,3	(-2) 1,3382	(-2) 3,2561	(-1) 1,0669	(-1) 2,5960
9,4	(-3) 2,6357	(-3) 6,4476	(-1) 1,0635	(-1) 2,6016
9,5	(-3) -7,9106	(-2) -1,9454	(-1) 1,0497	(-1) 2,5815
9,6	(-2) -1,8159	(-2) -4,4892	(-1) 1,0257	(-1) 2,5357
9,7	(-2) -2,8017	(-2) -6,9622	(-2) 9,9213	(-1) 2,5654
9,8	(-2) -3,7396	(-2) -9,3407	(-2) 9,4941	(-1) 2,3714
9,9	(-2) -4,6216	(-1) -1,1602	(-2) 8,9817	(-1) 2,2548
10,0	(-2) -5,4402	(-1) -1,3726	(-2) 8,3907	(-1) 2,1171

Нули функций Бесселя полуцелого порядка

S	$J_{0,S}$	$Y_{0,S}$	S	$J_{0,S}$	$Y_{0,S}$
1	3,141593	1,570796	5	15,707963	14,137167
2	6,283185	4,712389	6	18,849556	17,278760
3	9,424778	7,853982	7	21,991149	20,420352
4	12,566370	10,995574	8	-	23,561945

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ, ИХ СОТНОШЕНИЯ	6
1.1. Принципы феноменологического подхода к описанию движения жидкости в проводящих средах	6
1.2. Физическая модель движения жидкости через проводящие среды	7
1.3. Описание движения жидкости через проводящие среды фильтрационными моделями	16
1.4. Водобалансовая модель	43
Список литературы к разделу 1	44
2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД	50
2.1. Об уравнении движения подземных вод в фильтрационной модели	50
2.2. Об оценке инерционной составляющей сопротивления движению жидкости	67
2.3. Методические проблемы экспериментального опытного определения начального градиента	80
Список литературы к разделу 2	100
3. ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД	106
3.1. О существующих теоретических представлениях колебаний уровня подземных вод с собственными частотами	106
3.2. Физико-математическая модель релаксационной фильтрации	119
3.3. Некоторые следствия теории релаксационной фильтрации	137
3.4. К методике определения фильтрационных параметров водоносных пластов по результатам прослеживания свободных и вынужденных колебаний уровня подземных вод	141
Список литературы к разделу 3	149
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	154
ПРИЛОЖЕНИЕ	157

8000 с

Михаил Максимович Бураков

**Физико-математические модели нелинейной фильтрации
подземных вод**

Подписано в печать 11.05.2012
Формат 60x84/8. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Объем 9,41 п.л.
Тираж 450 экз. Заказ 89.

Типография АО «НЦ НТИ»

050026, г. Алматы, ул. Боегенбай батыра, 221