Посвящается
столетию со дня рождения
доктора технических наук, профессора
Виктора Яковлевича Хасилева

Виктор Яковлевич Хасилев
(1912–1980)

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ им. Л.А. МЕЛЕНТЬЕВА

О.А. Балышев, С.О. Балышев

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОНТУРНЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Ответственный редактор
д-р техн. наук *В.А. Стенников*

НОВОСИБИРСК
АКАДЕМИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГЕО"
2012

УДК 536.1+519.9+518.5; 532.54
ББК 39.71-022
Б209

Балышев, О.А. Физико-математические основы описания динамических процессов в многоконтурных гидравлических цепях / О.А. Балышев, С.О. Балышев ; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева. – Новосибирск : Академическое изд-во "Гео", 2012. – 219 с. – ISBN 978-5-904682-99-6 (в пер.).

Монография посвящена дальнейшему развитию теории гидравлических цепей, которое заключается в переходе от анализа установившихся режимов к анализу неустановившихся, что выражается в первую очередь в трансформации замыкающих соотношений. Для цепей с сосредоточенными параметрами она представлена в многочленной дифференциальной форме записи, учитывающей инерцию и емкостные свойства трубопроводных систем. Можно провести аналогию с электрическими системами, где действует дифференциальный закон Ома для цепей постоянного тока относительно мгновенных значений разности потенциалов и тока.

Теоретические построения разнообразных видов течения сплошной среды по гидравлической цепи рассмотрены для разветвленной и многоконтурной цепей с целью постановки, анализа и численных расчетов задач параметрического регулирования, структурного и оптимального управления при заданных графиках потребления.

Решение этих задач требует применения вариационных методов, поскольку количество искомых параметров увеличивается, и для определения единственного решения необходимо формулировать критерий отбора. Этот критерий может быть записан, в частности, как функционал общей энергии гидравлической цепи и связан с вариацией траекторий эксплуатации трубопроводной системы.

Книга будет полезна специалистам, чьи интересы лежат в области теории гидравлических цепей и моделирования процессов в динамических системах.

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *И.В. Наумов*,
д-р техн. наук *Э.А. Таиров*,
д-р техн. наук, профессор *В.Р. Чупин*

ISBN 978-5-904682-99-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея анализа нестационарного потокораспределения в многоконтурных гидравлических цепях в 60-х гг. прошлого столетия отождествлялась в первую очередь с изучением гидравлического удара в теплоснабжающих системах, насыщаемых регулировочной аппаратурой. Для ее расчета декларировалось расщепление процесса в цепи на два режима: гидравлический (как стационарный) и тепловой (как нестационарный). Примерно к этому времени Виктором Яковлевичем Хасилевым были сформулированы основная терминология, положения, методы и модели "Теории гидравлических цепей", направленные на создание инструмента анализа стационарного потокораспределения, который при реализации на вычислительной технике того времени позволял получать решение многих технических задач предпроектной и проектной практики разработки систем теплоснабжения [102, 118, 120, 174–185, 194]. Однако В.Я. Хасилев понимал, что модели стационарного потокораспределения могут дать оценки равновесных и установившихся состояний, и изучение с их помощью эксплуатационных режимов в тепловых системах при параметрическом регулировании и структурном управлении наталкивается на определенные описательные и вычислительные трудности. Поэтому апробированные математические модели стационарного потокораспределения в гидравлических цепях необходимо было расширить в описательном плане до математических моделей нестационарного потокораспределения, что в конечном счете трансформировало системы нелинейных алгебраических уравнений в системы обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений.

За реализацию этой идеи тогда взялись молодые сотрудники Борис Николаевич Громов и Владимир Георгиевич Сидлер, которые в качестве описательного элемента цепи взяли фундаментальную систему дифференциальных уравнений Н.Е. Жуковского в частных производных, превосходно отражающую изменения давлений в длинном трубопроводе даже в линейной постановке [49, 149–154]. В дальнейшем эта система уравнений корректировалась за счет введения нелинейного слагаемого, учитывающего квадратичное трение на ветвях гидравлической цепи.

В качестве альтернативы этому подходу В.Я. Хасилевым была предложена идея аппроксимации общих уравнений гидродинамики на гидравлической цепи (т. е. фактически на нерегулярных сетках). Эта идея разрабатывалась под его руководством в начале 1970-х гг. и привела к математической модели в виде системы функционально-дифференциальных уравнений. К сожалению, по разным причинам в середине 1970-х гг. эта работа прервалась, и вернуться к ней довелось только через 20 лет. Тем не менее еще в 1970-е гг. за менее чем пятилетний период разработки этой идеи был не только создан своеобразный подход к математическому моделированию нестационарного потокораспределения в многоконтурных гидравлических цепях, но и созданы разнообразные методы формирования замыкающих соотношений, базирующихся на общей системе уравнений гидродинамики или на фундаментальной нелинейной системе уравнений Жуковского.

Многолетние перерывы в научном процессе невосполнимы, так как часто связаны с уходом ученых из жизни. Так, Виктор Яковлевич скончался в 1980 г., за последующие годы изменилось восприятие проблемы нестационарного потокораспределения, трансформировались определения и методы теории гидравлических цепей, приобретая оттенок консерватизма, развился понятийный и вычислительный аппарат соответственно развитию вычислительных и интеллектуальных устройств. Поэтому возвращение к этой тематике в 1990-х гг. более напоминало топтание на месте, а не дальнейшее развитие и расширение теории гидравлических цепей. В определенной мере за годы перерыва в этих исследованиях могучая школа Хасилева видоизменилась как основное направление, распавшись на мелкие ручейки [2–4, 13–15, 18, 22, 24, 27, 33–36, 47, 48, 56–61, 70, 76, 79, 81–101, 104, 106–108, 110–115, 117, 122, 124, 125, 127, 128, 130, 133, 138–140, 142–169, 171, 172, 187, 192, 193]. И с каждым годом остается все меньше людей, "зараженных" его идеями, начинавших когда-то свою научную работу под его руководством.

В декабре 2012 г. основателю междисциплинарной теории гидравлических цепей и генератору идей ее дальнейшего развития Виктору Яковлевичу Хасилеву исполнилось бы 100 лет. В память о нем авторы, выполняя свой долг, решили опубликовать эту монографию, написанную в стенах института, где теория создавалась и развивается по сей день.

Методологический подход, базирующийся на аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных, позволяет получать и анализировать численные решения. Понятно, что это наиболее распространенный инструмент анализа систем, ориентированный на применение компьютерной техники, но и он может иметь своеобразные разветвления, приводящие к различным математическим объектам.

Численный анализ нестационарного потокораспределения на основе уравнений Жуковского обобщенно можно охарактеризовать тремя моментами. Во-первых, процесс течения для каждой ветви гидравлической цепи описывается уравнениями в частных производных гиперболического типа, для однозначного решения которых необходимо задание начального и граничных условий. Во-вторых, аппроксимация этих уравнений на характеристической сетке (пространственно-временной) требует соблюдения определенных условий: точности, сходимости и устойчивости численного решения, а это выражается в жестких ограничениях на дискретные шаги аппроксимации в пространстве и во времени. В-третьих, для гидравлической цепи искомыми являются функции, характеризующие состояние ветвей, а узловые параметры могут быть найдены по искомым функциям, тогда как для уравнений Жуковского картина обратная, что приводит к несколько парадоксальной ситуации: для определения состояния на ветви необходимо иметь известными концевые значения искомых параметров, а для многоконтурной цепи они являются неизвестными и могут быть получены из системы уравнений первого и второго законов Кирхгофа и замыкающих соотношений. В частном случае разветвленной цепи задача нестационарного потокораспределения на базе уравнений Жуковского может быть решена, так как в этом случае всегда можно проследить на цепи пути от начального до конечного узла, где задаются граничные условия. Этот путь численного анализа можно назвать традиционным, согласно ему сегодня разработаны достаточно точные и надежные методы и алгоритмы численного анализа режимов для трубопроводных систем, обустроенных регуляторами и источниками возмущений. Он требует большой вычислительной работы, связанной с многократным решением систем алгебраических линейных или нелинейных уравнений.

Если возможна полная пространственно-временная аппроксимация системы уравнений Жуковского, то имеет право на осуществление и частичная (только по времени или только по пространству) аппроксимация. Эта возможность, а именно аппроксимация по узлам заданной гидравлической цепи, использовалась авторами. Время при этом оставалось непрерывным. В данном случае модели нестационарного потокораспределения для многоконтурных гидравлических цепей записываются в виде системы функционально-дифференциальных нелинейных уравнений, что дает ряд преимуществ как в описательном, так и в вычислительном плане.

В монографии сохранена методология, сформулированная В.Я. Хасилевым по аналогии с многоконтурными электрическими цепями для решения задач стационарного потокораспределения в цепях с сосредоточенными параметрами. Она основана на двух сетевых законах сохранения (законах Кирхгофа) и замыкающем соотношении, также являющемся выражением законов сохранения (закон Ома) для ветви гидравлической цепи. Однако для задач нестационарного потокораспределения в многоконтурных гидравлических цепях закон Ома рассматривается в дифференциальной форме относительно искомых токов и потерь напряжения на ветвях цепи. Понятно, что интерпретация его применительно к гидравлическим цепям учитывает специфику этого объекта.

Вывод замыкающих соотношений как обыкновенных дифференциальных уравнений в монографии основан на законах сохранения механики сплошной среды, в частном случае аппроксимации на гидравлической цепи – на термодинамическом подходе, приводящем к экстремальным постановкам, с учетом второго закона термодинамики и, безусловно, с учетом подхода Н.Е. Жуковского. Все эти подходы дают эквивалентные замыкающие соотношения для описания многоконтурных гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами и позволяют создавать математические модели для цепей с распределенными и регулируемыми параметрами в зависимости от целей исследования гидравлических цепей, так как в их основе заложены законы сохранения массы, импульса движения и энергии.

Методы аппроксимации при принятых инженерных предположениях и допущениях в конечном счете приводят к системам нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с минимальным их количеством, равным количеству линейно независимых контуров (для метода контурных расходов) относительно искомых хордовых расходов и потерь напора или равным количеству узловых давлений за минусом узла баланса (для метода узловых давлений) относительно искомых расходов и давлений в узлах гидравлической цепи.

Предлагаемая в монографии методика построения математических моделей динамических процессов в многоконтурных гидравлических цепях позволяет перейти от систем нелинейных алгебраических уравнений к системам нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с минимальным количеством уравнений (по количеству хордовых переменных для метода контурных расходов или по количеству искомых линейно независимых узловых давлений для метода узловых давлений).

Экстремальный подход также позволяет после соответствующих преобразований, учитывающих специфику гидравлической цепи, получить конечную систему дифференциальных уравнений относительно хордовых расходов при изменении во времени возмущающих параметров (расходов потребителей).

Эти моменты дают возможность расширить класс задач, являющихся ключевыми при анализе динамических процессов в гидравлических цепях, в зависимости как от воздействий внутренних параметров, так и от внешних возмущений.

Таким образом, данные модели позволяют решать задачи регулирования, управления и прогноза для режимов гидравлических цепей. Стационарные режимы можно рассматривать как частный случай при отсутствии возмущений и времени, стремящемся к бесконечности.

Реальные свойства рассматриваемых технических объектов отражаются в замыкающих соотношениях либо как постоянные, либо как функции от времени – в зависимости от решаемых задач.

Глава 1

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Определения, обозначения и классификация гидравлических цепей

Любая теория начинается с определений и классификаций, закладывающих основу для дальнейших формальных описаний и анализа. Поэтому изначально разграничим определения, относящиеся к объектам изучения (реальным техническим системам) и объектам математического моделирования (абстрактным обобщениям реальных технических объектов).

Объектами изучения являются реальные технические системы, имеющие в своем составе основные элементы: источники массы и энергии, потребителей этих ресурсов и технические средства передачи (транспортирования) ресурсов от источников их производства до потребителей. Техническое воплощение различных элементов отражает соответствующие виды массы и энергии, например, тепло транспортируется по трубопроводной системе, электричество – по линиям электропередач, масса – по трубопроводным системам и посредством систем дискретного транспорта.

Все элементы системы осуществляют вполне определенные функции выработки, транспорта и потребления массы и энергии, выполняя при этом конкретную задачу: обеспечение некоторой потребности в любой момент времени при любых условиях эксплуатации (как нормальных, так и неординарных) при соблюдении необходимых качественных характеристик для использования этих ресурсов потребителями. Под это описание подходит и определение гидравлической цепи [77, 97, 103, 119, 121, 175, 176, 178–185].

Гидравлической цепью (далее – г. ц.) будем считать "совокупность устройств и соединяющих их трубопроводов, закрытых или открытых каналов, осуществляющих транспортировку сжимаемых и несжимаемых жидкостей (воды, нефти, газа, воздуха и других)" [77, 97]. Таким образом, г. ц. должна рассматриваться прежде всего как первая ступенька абстракции (на уровне физической модели) реальной гидравлической системы и, следовательно, как самостоятельный объект, который можно технически собрать или мысленно представить. А физические модели, как правило, требуют математического описания явлений и процессов, имеющих место в изучаемом объекте (в нашем случае – в г. ц.). Таким образом, формируется математическая модель объекта исследования.

Под *математической моделью гидравлической цепи* понимается абстрактная символьная запись, составленная на основе физических законов сохранения при движении массы и энергии по транспортным путям от источников до потребителей, описывающая явления и процессы с учетом разнообразных возмущений (внутренних и внешних) и предназначенная для решения задач анализа, синтеза и управления, вплоть до численной реализации.

Под математическим моделированием в широком смысле понимается целенаправленное абстрактное описание явления или процесса, адаптированное к современным информационно-вычислительным средствам и информационным технологиям, отражающее реальные явления или процессы в конкретных объектах и позволяющее ставить и решать разнообразные задачи анализа и синтеза стационарных и динамических систем.

Первичные требования, предъявляемые к математическим моделям, можно кратко сформулировать следующим образом:

1) рациональная широта – количество необходимых параметров для адекватного отображения реального объекта на абстрактное описание;

2) достаточная глубина – сложность описания, отражающая связь известных основных закономерностей параметров с формой записи в виде совокупности условий и уравнений;

3) простота – возможность применения различных методов преобразований для упрощения модели.

Использование математических знаний при математическом моделировании первоначально преследует двоякую цель: во-первых, используя активные преобразования пространства переменных параметров, уменьшить размерность этого пространства, и во-вторых, используя пассивные преобразования и не изменяя размерность пространства переменных, понизить сложность описания (системы связей параметров). Для достижения каждой из этих целей разработаны специфические методы: для первой – методы преобразований линейных пространств, для второй – методы линеаризации, степенных рядов, специальных функций и т. п.

Под г. ц. понимают и собственно *математическую модель*, включающую две составные части: расчетную схему цепи, геометрически отражающую конфигурацию (структуру) изучаемой системы и картину возможных направлений, смешения и разделения потоков транспортируемой среды; совокупность математических соотношений, описывающих взаимозависимость количественных характеристик элементов данной схемы, а также законы течения и распределения расходов, давлений и температур (в неизотермическом случае) транспортируемой среды по всем этим элементам и их изменение во времени (при изучении динамических процессов).

В любой гидравлической системе различают три ее основные составляющие (подсистемы): 1) **источники** давления или расхода (например, насосные или компрессорные станции, аккумулирующие емкости и др.), обеспечивающие притоки транспортируемой среды и привносящие энергию в систему; 2) трубопроводную или гидравлическую **сеть** (в виде совокупности взаимосвязанных трубопроводов, воздуховодов и открытых каналов, соединяющих источники с множеством потребителей и доставляющих эту среду); 3) абонентские подсистемы (или просто **потребителей**).

Общность элементов рассматриваемых систем определяется обобщенными параметрами: мощностью источников, выработкой массы или энергии в единицу времени, пропускной способностью сети и нагрузкой потребителей в единицу времени. При работе системы в целом все эти параметры должны быть взаимоувязаны, так как в системе они взаимозависимы. Такое деление, в общем-то, довольно условно и зависит от целей исследования реальной системы и характера решаемых задач, степени детализации, а также от режимов работы. Например, в качестве потребителей могут рассматриваться как отдельные установки, так и здания или, скажем, кварталы города, или даже город в целом. Сеть в одних случаях включает лишь основные магистрали между источниками и укрупненными потребителями, а в других она может отображать и конкретизировать эти связи вплоть до разводящих линий и фактических потребителей. Точно так же и источники могут задаваться вместе со своей "начинкой" (оборудованием) либо только выходными параметрами. Одни и те же аккумулирующие емкости в системе в режимах их заполнения являются потребителями, а в режиме опорожнения – источниками и т. д. В теории гидравлических цепей (далее – т. г. ц.) обобщенными параметрами приняты расходы и потери давлений (аналоги силы и градиента силы по протяженности), через них связываются все подсистемы.

При математическом моделировании все эти подсистемы находят соответствующее отображение в **расчетной схеме** цепи: участки сети, включающие арматуру и другие местные сопротивления, – в виде ветвей; места расположения источников расхода (притоков) и потребителей (стоков), а также соединения ветвей – в виде узлов (вершин); источники напора (а иногда и расхода) могут относиться как к узлам, так и к ветвям.

Среди параметров узлов и ветвей г. ц. будем различать: технические характеристики (диаметры трубопроводов, размеры сечения каналов, длины и гидравлические сопротивления ветвей); гидравлические параметры (расход жидкости на ветвях или в узлах, давление в узлах, изменение давления или температуры на ветвях), описывающие состояние системы в любом из режимов ее работы; граничные условия – варьируемые входные данные (величины притоков и нагрузок, допустимые диапазоны значений гидравлических параметров).

Гидравлическая цепь удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к моделям: 1) она способна замещать исследуемый и управляемый объект, т. е. реальную трубопроводную систему; 2) ее изучение и реализация повышают наши знания о системе и позволяют управлять ее структурой и режимами работы.

Математическое моделирование всегда является приближенным, и степень его точности должна согласовываться с целями исследования или управления, количеством и качеством исходных данных, параметрами используемой вычислительной техники. В связи с этим точность как физического, так и математического моделирования любой гидравлической системы будет определяться в основном выбором для ее отображения и изучения г. ц. одного из следующих типов:

1) *с сосредоточенными параметрами*, когда все технические характеристики узлов и ветвей, а также граничные условия считаются константами, не зависящими от того или иного потокораспределения (такие цепи моделируют реальные системы как системы с изотермическим течением несжимаемой жидкости);

2) *с переменными параметрами*, когда хотя бы часть технических и гидравлических параметров или граничных условий задается в виде функций от искомых величин, так что их фактические значения являются переменными и определяются ("регулируются") самим потокораспределением;

3) *с распределенными параметрами* – в случае наиболее строгого описания совместного изменения гидравлических параметров вдоль элементов расчетной схемы.

С математической точки зрения, для установившихся режимов это приводит к разным системам уравнений специальной структуры, соответственно: 1) из линейных (сетевых) и нелинейных (замыкающих) алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами; 2) из уравнений общего характера с переменными коэффициентами и правыми частями; 3) к смешанным системам, содержащим подсистемы уравнений в дифференциальной или интегральной форме.

Трудности с терминологией и выбором обозначений, особенно для стыковых научных направлений, общеизвестны. В качестве посильной цели будем руководствоваться лишь стремлением отбора и упорядочения необходимого "рабочего" минимума понятий и символики, используемых в смежных дисциплинах: теории электрических цепей, линейной алгебре, теории графов и гидравлике. При этом предпочтение отдается техническим терминам, как более наглядным и привычным для теории электрических цепей и отраслевой литературы.

Ниже приведена сводка исходных понятий и обозначений, используемых в дальнейшем.

Схема цепи – графическое изображение моделируемой системы, совокупность трех упорядоченных множеств: множества узлов $J = \{j: j = 1, ..., m\}$, состоящего из подмножеств (потребителей J_1, источников J_2 и простых точек разветвления на схеме J_3); множества ветвей $I = \{i: i = 1, ..., n\}$, отображающих заданные попарные связи (соединения) между узлами; множества **условных знаков**, характеризующих тип и специфические особенности элементов. С точки зрения теории графов, схема г. ц. – конечный помеченный ориентированный граф (орграф), дополненный специальными поясняющими знаками, если это требуется. Числа m и n называются параметрами г. ц. Принятые в трубопроводном транспорте схемы подразделяются на радиальные (источник–потребитель), магистральные (источник–магистраль–ответвления–потребитель), петлевые (многоконтурные). Они строятся согласно критерию минимальности суммарной длины сети. Эта геометрия трубопроводной системы отображается графом, где определены следующие понятия.

Остовное дерево (просто дерево) – подграф без контуров (может совпадать с исходной схемой), соединяющий все узлы m и имеющий $m - 1$ ветвь. Орграф сети, содержащий только простые пути и связывающий все узлы.

Простой контур – конечная и замкнутая последовательность ориентированных ветвей, у которой совпадают начальный и конечный узлы. (В дальнейшем рассматриваются именно такие контуры.) Число c линейно независимых контуров в любой выбранной на схеме базисной системе контуров однозначно определяется параметрами г. ц.: $c = n - m + 1$. Текущий номер базисного контура будем обозначать через r: $r = 1, ..., c$.

Источники (притоки) и **потребители** (стоки) – узлы, в которых задано поступление или отбор транспортируемой среды.

Активная (пассивная) ветвь – связь между узлами, содержащая (не содержащая) источник подводимой энергии.

Базисный (опорный) **узел** – точка на схеме с фиксированным значением потенциала (чаще всего это узел, в котором поддерживается извне атмосферное давление).

Хорды – ветви, не вошедшие в выбранное остовное дерево и дополняющие его до многоконтурной схемы.

Понятно, что полученная система уравнений

$$+ \quad \ll 2(0 = 0,$$

$$-A\,7(A,"1)7\,[hd(t) - H\;d(t)] + £[A,.(0 - //ДО] = 0$$

содержит *п* уравнений, а количество искомых функций в общем случае может изменяться от 2и до 3и + (m - 1) в зависимости от поставленной задачи. Минимальное число соответствует задаче анализа режимов гидравлической цепи, где при известных Q(0 и *Н{Г)* требуется определить расходы *х(t)* и потери давлений /?(£) на всех участках сети и далее вычислить давление по формуле

$$P(t) = \{A\overline{d}T)\sim'[amPm(t) - (h\,d(t) - H\,dm$$

где *аап*- линейно зависимая строка расширенной матрицы А, преобразованная в столбец с элементами, имеющими противоположные знаки *am = -a ñi\ Pm(t)* - известное давление в балансовом *т-м* узле.

Поскольку эти уравнения не описывают изменения давлений по ответвлениям схемы, находящимся вне ее “контурной” части, в общем случае следует обратиться к связям между у, и узловыми давлениями Ру. Так как одно из давлений (например, Р„' в узле *т)* должно быть обязательно задано (в качестве точки отсчета для их значений в остальных узлах), что физически очевидно и для электрических, и для гидравлических систем, то неизвестными могут быть не более m - 1 давлений Ру.

Рассмотренных соотношений и сетевых условий достаточно для построения *двух эквивалентных систем уравнений,* описывающих потокораспределение в произвольной г. ц. с сосредоточенными параметрами. В первом случае объединение *п* замыкающих соотношений, *т* - 1 линейно независимых уравнений материального баланса и *с* контурных уравнений приведет к общей системе из *п + т - \+ с = 2п* уравнений относительно *2п* неизвестных *х^t)* и z/,(t). если будут заданы все s, и Вторую систему можно получить, если использовать *п* замыкающих соотношений, *zz*- 1 линейно независимых уравнений материального баланса с *п* уравнениями связи *у^t) = Pj(t) - Pj+{(t)* или /?,(£) = = *Pj(t) - Pj+*,(£) + Я,(Г), тогда имеем систему из 2и + m - 1 уравнений относительно неизвестных Т,(f). А,(0 и Р;(Г).

Таким образом, применение компактных и достаточно формальных средств (речь идет о математическом аппарате векторной и матричной алгебры) для обозримой записи и преобразований математической формулировки задач дает возможность в полной мерс классифицировать получаемые системы уравнений и оперировать с ними, а также эффективно применять численные методы линейной и нелинейной алгебры.

1.2. Общие задачи для нестационарного потокораспределения

Алгебра векторов и матриц давно получила широкое распространение в различных областях естественных наук и техники. Успешно применялась она и в теории электрических цепей, что позволило дать наиболее общее описание и обосновать многие расчетные методы и приемы, используемые в электротехнике.

Используя изложенный выше материал, сконструируем общую математическую модель переноса массы по некоторой идеализированной цепи на основе некоторых достаточно общих предположений.

1. Любая геометрия транспорта массы или энергии, как было показано выше, может быть отображена в виде графа, который описывается постоянными и матричными инвариантами: количеством узлов m, количеством ветвей n, количеством линейно независимых контуров c, матрицей соединений линейно независимых узлов и ветвей A размерностью $(m - 1) \times n$, которую можно представить в блочном виде $A = [A_d; A_c]$ из квадратной (A_d), характеризующей разветвленную цепь, и прямоугольной (A_c), характеризующей хорды. Так как элементы этой матрицы определены в поле действительных чисел, то и все формируемые критерии должны быть действительными (определитель, собственные числа и т. д. матрицы A). Проблема разбиения матрицы A на блоки является самостоятельной задачей, и для ее решения может быть использован аппарат матричного анализа.

2. Внешними возмущающими воздействиями для рассматриваемой системы являются мощности источников и нагрузки потребителей, изменяющиеся во времени, измеренные на ретроспективном интервале времени. Предполагается, что они могут рассматриваться в некотором пространстве реализаций – случайных событий (t, p), где p – вероятность совокупности случайных событий, оказывающих влияние, например, на процесс потребления, неявная функция времени. Тогда в поле комплексных чисел можно записать

$$Q(t) = (1 - p)Q_D(t) + iQ_S(p),$$

где $Q_D(t)$ – детерминированная составляющая, основная закономерность которой построена с учетом характерного свойства изменения во времени по данным наблюдений; $Q_S(p)$ – стохастическая составляющая в пространстве случайных событий, т. е. не что иное, как отклонение наблюдаемых величин $Q_H(t)$ от определенной составляющей $Q_D(t)$:

$$Q_S(p) = Q_H(t) - Q_S(t).$$

Тогда и решение потокораспределения (расходы на ветвях) должно принадлежать комплексному числовому полю. Это значит, что

$$x(t) = x_D(t) + ix_S(p),$$

и система уравнений первого закона Кирхгофа относительно блочного представления матрицы A запишется в виде

$$A[x_D(t) + ix_S(p)] = (1 - p)Q_D(t) + iQ_S(p),$$

что приведет к расщепленной системе уравнений

$$Ax_D(t) = (1 - p)Q_D(t),$$

$$Ax_S(p) = Q_S(p).$$

Эта система линейных функциональных уравнений относительно изменений расходов на ветвях дерева примет вид

$$x_{Dd}(t) = (1 - p)\Omega_D(t) + B_d^T x_{Dc}(t),$$

$$x_{Sd}(p) = \Omega_S(p) + B_d^T x_{Sc}(p).$$

Здесь принято $\Omega_D(t) = A_d^{-1}Q_D(t)$ и $\Omega_S(p) = A_d^{-1}Q_S(p)$.

Значит, если известны $xDc(t)$ и $xSc(p)$, могут быть определены обе составляющие расходов на ветвях разветвленной цепи: $xDd(t)$ и $xsd(p)$.

Это представление касается и систем уравнений второго закона Кирхгофа относительно составляющих вектор-функции контурных расходов $xDc(t)$ и $xSc(p)$:

$$Bdh(BdT[(1-p)aD(t)+BIxtoitj])+Eh(xDc(t))=BH(t)-B,A(Qd(0),$$

$$Bdh(Bj,[n5(p)+B^xSc(p)])+Eh(xSc(p))=-Bdh(Qs(p)).$$

При начальных условиях $xDc(0)=xm$ и $x5c(0)=0$ для этой системы имеем задачу Коши, если вид $lz(£)=/(x(t))$ замыкающих соотношений определен. От вида замыкающих соотношений зависит вид уравнений: линейный или нелинейный, алгебраический или дифференциальный, а следовательно, и метод решения этих систем уравнений.

Определенные решения этой системы позволяют получить:

- изменения расходов на ветвях разветвленного графа

$$(*)=O- \qquad +BdXDc(O.$$

$$Xsd(P)=n\,s(p)+B^{T}1Xsc(p)\backslash$$

- изменение потерь напоров на всех ветвях графа

$$Kt)=f(xD(t)+ixs(p))\backslash$$

- изменения давления в $(т-1)$-м узле графа

$$P\,it)=AJ1[amPn(O+/И\;O)+Я(0],$$

тем самым мы имеем полное представление о состоянии гидравлической цепи.

3. Однако здесь возникает задача о выводе замыкающих соотношений, которые должны отражать реальную систему трубопроводного транспорта, т. е., во-первых, реальную транспортируемую по ней среду, поскольку газ и воздух, нефть и вода, электрическая и тепловая энергии различны по своим физическим свойствам. Во-вторых, уже это формирует определенные требования к геометрическим параметрам трубопроводной системы с учетом ограничений изменяющихся потребителей (насосные или компрессорные станции, охлаждение или нагрев транспортируемой среды, регулирование режимов и т. д.). В-третьих, задачи регулирования и управления пропускной способностью системы связаны с резервом мощностей источников.

Как правило, эти характеристики должны входить в замыкающие соотношения некоторыми функциональными зависимостями, при получении которых используются детерминированные законы сохранения для динамических процессов: сохранения массы, импульса движения, сохранения энергии и термодинамических соотношений.

В т. г. ц. за замыкающее соотношение принята квадратичная зависимость потери напора от расхода (закон Дарси), и при определении стационарного потокораспределения это приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Распространение этого же закона на динамические процессы при определении нестационарного потокораспределения приводит к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При определении

Относительно x^{h}_{Dc} и x^{h}_{Sc} имеем систему линейных уравнений, которую можно анализировать и решать.

Понятно, что предложенная линеаризация системы нелинейных уравнений не является единственной, но для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где за начальное приближение может быть взято начальное значение, она может оказаться достаточно эффективной с учетом свойства нелинейности.

1.3. Математическое описание задачи анализа нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи

В рамках т. г. ц. первоочередной и наиболее простой задачей, на которой теория зарождалась и развивалась, является задача анализа стационарного потокораспределения. Дальнейшее расширение и развитие т. г. ц. возможно только при изучении динамических процессов. Поэтому сформулируем общую задачу анализа нестационарного потокораспределения и ее трансформацию к контурной системе дифференциальных уравнений.

Понятно, что одной из характерных особенностей г. ц. является нелинейность систем уравнений, которая не зависит от принятого подхода математического описания. Это можно продемонстрировать при математическом описании частной задачи анализа нестационарного потокораспределения в многоконтурной открытой и активной гидравлической цепи.

Для замкнутой системы функционально-дифференциальных уравнений, получаемых на основе законов сохранения массы и движения (первый и второй законы Кирхгофа) и закона движения на отдельно взятом участке (закон Дарси), имеем

$$Ax(t) = Q(t) \text{ (первый закон Кирхгофа)},$$

$$Bh(t) = BH(t) \text{ (второй закон Кирхгофа)},$$

$h(t) = \frac{\quad}{\quad} + Sx^2(t) + Cx(t)$ (запись нестационарного замыкающего соотношения, согласованного с законом Дарси).

Здесь и далее, согласно принятым выше обозначениям, A и B – соответственно матрицы инцидентности линейно независимых узлов и ветвей и линейно независимых контуров и ветвей размерностью $(m - 1) \times n$ и $c \times n$; R, S, C – квадратные диагональные матрицы порядка n; $x(t)$, $h(t)$ – вектор-столбцы искомых функций параметра t по всем ветвям цепи размерностью n; – соответственно вектор-столбцы известных функций параметра t отборов в линейно независимых узлах размерностью $(m - 1) \times 1$ и активных напоров на ветвях размерностью $n \times 1$.

Или на основе экстремального подхода могут быть представлены два варианта:

1) ограничения в виде уравнений первого закона Кирхгофа и критерия минимизации в виде общей энергии гидравлической цепи, т. е.

$$Ax(t) = Q(t),$$

$$\min \Phi(x(t), h(t)) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) Q_j(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{x_i(t)} [h_i(t) + H_i(t)]\, dx,$$

2) ограничения в виде уравнений второго закона Кирхгофа и того же критерия, т. е.

$$Bh(t) = BH(t),$$

$$\min\Phi(x(t),h(t)) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)Q_j(t) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)} [h_i(t)+H_i(t)]dx.$$

После активных преобразований, уменьшающих количество искомых функций, используя свойство линейности уравнений Кирхгофа, позволяющее выражать либо переменные на ветвях дерева через контурные искомые (уравнения первого закона Кирхгофа), либо контурные переменные через искомые на ветвях дерева (второй закон Кирхгофа), независимо от подхода получим систему с нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно хордовых расходов

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -G_c[x_c(t)]^T S_c x_c(t) - G_d\left[Q_d(t)+B_d^T x_c(t)\right]^T S_d\left[Q_d(t)+B_d^T x_c(t)\right]^T -$$

$$-G_{cd}x_c(t)+G_H(t)-G_{rd}\frac{dQ(t)}{dt}-G_{dd}Q_d(t),$$

где

$$G_c = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1} B_c,\ G_d = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1} B_d,$$

$$G_{cd} = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1}\left[C_c + B_dC_dB_d^T\right],\ G_H(t) = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1} BH(t),$$

$$G_{rd} = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1} B_dR_dA_d^{-1},\ G_{dd} = \left[B_cR_c + B_dR_dB_d^T\right]^{-1} B_dC_dA_d^{-1},$$

$$Q_d(t) = A_d^{-1}Q(t).$$

Используя эту систему дифференциальных уравнений, можно записать общую задачу анализа режимов нестационарного потокораспределения в многоконтурной открытой и активной гидравлической цепи.

Пусть известны узловые отборы $Q_j(t)$ во всех узлах цепи $j = 1, 2, ..., m$ как функции времени t, активные напоры $H_i(t)$, характеристики r_i, s_i, c_i на всех ветвях цепи $i = 1, 2, ..., n$ как функции времени и постоянные величины (цепи без регуляторов).

Необходимо определить расходы $x_i(t)$ и потери давления $h_i(t)$ на всех ветвях цепи $i = 1, 2, ..., n$, давления $P_j(t)$ в узлах $j = 1, 2, ..., m - 1$ (при предположении, что $P_m(t)$ – известная функция времени), являющиеся реакциями на внешние $Q_j(t)$ и внутренние $H_i(t)$ возмущения, и управляющие воздействия (в случае одного источника), которыми могут быть расход $Q_m(t)$ и давление $P_m(t)$ в источнике (m-й узел).

Таким образом, все перечисленные параметры, как известные, так и искомые, связаны следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -G_c[x_c(t)]^T S_c x_c(t) - G_d\left[Q_d(t)+B_d^T x_c(t)\right]^T S_d\left[Q_d(t)+B_d^T x_c(t)\right]^T -$$

$$-G_{cd}x_c(t)+G_H(t)-G_{rd}\frac{dQ(t)}{dt}-G_{dd}Q_d(t),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t)=Q_d(t)+B_d^T x_c(t);$$

$$h(t)=R\frac{dx(t)}{dt}+Sx^2(t)+Cx(t);$$

$$P(t)=\left(A_d^T\right)^{-1}\left[a_m P_m(t)-\left(h_d(t)+H_d(t)\right)\right].$$

1.4. Анализ стационарных точек нестационарного потокораспределения

Для определения стационарных точек в любой фиксированный момент времени, в предположении равенства нулю скорости изменения расходов $\left(\frac{dx_c(t)}{dt}=0\right)$, запишем систему c квадратичных уравнений относительно тех же хордовых расходов:

$$G_c[x_c]^T S_c x_c+G_d\left[Q_d+B_d^T x_c\right]^T S_d\left[Q_d+B_d^T x_c\right]^T+G_{cd}x_c-G_H+G_{dd}Q_d=0.$$

Это уравнение является, по сути, не чем иным, как совокупностью квадратичной и линейной форм и постоянного вектора, следовательно, каждое уравнение системы может быть представлено в виде

$$\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c}W_{ij}^{(k)}x_i x_j+\sum_{i=1}^{c}w_i^{(k)}x_i+q=0 \text{ при } k=1,2,\ldots,c.$$

Или, вводя матрицу квадратичной формы $W^{(k)}$ и вектор линейной формы $w^{(k)}$, получим матричную запись каждого квадратичного уравнения:

$$x^T W^{(k)}x+2w^{(k)}x+q^{(k)}=0 \text{ при } k=1,2,\ldots,c.$$

Из этого уравнения очевидно, что стационарные точки в c-мерном декартовом пространстве (пространстве контурных расходов) располагаются в точках пересечения поверхностей второго порядка, которые могут быть центральными, нецентральными и вырожденными. Остановимся только на центральных поверхностях, т. е. будем рассматривать поверхности, имеющие центр типа эллиптических и гиперболических.

Так, для двухконтурной гидравлической цепи в пространстве контуров имеем или два эллипса, или две гиперболы, или эллипс и гиперболу. Для трехконтурной гидравлической цепи в том же пространстве имеем эллипсоиды и двуполостные гиперболоиды в различных сочетаниях по три.

Обратим внимание на то, что компоненты векторов $w^{(k)}$ зависят от отборов $Q_j=\text{const}$, а это влияет на расположение центров каждой центральной поверхности второго порядка, если эти поверхности невырожденные.

Компоненты матрицы $W^{(k)}$ зависят от сопротивлений участков цепи, которые при отлаженной трубопроводной системе (без регулирующих устройств) являются постоянными и не привносящими возмущения, как H_i и Q_j, входящие в свободные члены, а следовательно, влияющие на изменение только осей поверхностей второго порядка.

Таким образом, в силу того что компоненты матрицы $W^{(k)}$ являются множителями перед квадратичными степенями искомых функций и зависят только от сопротивлений ветвей, входящих в линейно независимый контур, а сопротивления отображают геометрические и физические характеристики трубопроводной системы, можно связать их с инвариантами этой матрицы. Тем самым появляется возможность за их счет получить дополнительные ограничения, например, при решении задачи проектирования трубопроводных систем.

Коэффициенты $w^{(k)}$, стоящие перед первыми степенями искомых функций, зависят от производительности источников и нагрузок потребителей, а из-за большой изменчивости нагрузок потребителей происходят сдвиги центра центральных поверхностей второго порядка и, как следствие, изменение потокораспределения.

Свободные члены зависят от контурных активных напоров, от производительностей источников и нагрузок потребителей, что непосредственно влияет на изменение осей центральных поверхностей второго порядка.

Для исследования поверхностей второго порядка можно использовать аппарат характеристических уравнений, собственных чисел и матричных инвариантов преобразования уравнений второй степени в пространстве хордовых расходов.

Для квадратичной формы, общей для уравнений стационарных точек, можно выполнить такие линейные преобразования системы координат (сдвига и вращения), что для каждого уравнения второй степени позволит избавиться от линейных слагаемых и слагаемых, содержащих попарные произведения искомых параметров. Однако необходимо заметить, что каждая квадратичная форма имеет собственный центр и углы поворота, что приводит к новым c системам координат, которые объединяет только изначальная. Возможность применения таких преобразований ограничена только анализом геометрической интерпретации поверхностей второго порядка.

Это преобразование может быть представлено в виде

$$x_l' = g_{l1}x_1 + g_{l2}x_2 + \ldots + g_{lc}x_c \quad (l = 1, 2, \ldots, c), \text{ или } x' = Gx.$$

Так как преобразование симметрическое, то существует c собственных попарно ортогональных векторов этого преобразования

$$e_1, e_2, \ldots, e_c$$

(можно предположить, что они единичные), которым соответствуют собственные значения

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_c,$$

являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} W_{11}-\mu & W_{12} & W_{13} & \cdots & W_{1c} \\ W_{21} & W_{22}-\mu & W_{23} & \cdots & W_{2c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{c1} & W_{c2} & W_{c3} & \cdots & W_{cc}-\mu \end{vmatrix} = 0, \text{ или } |W - E\mu| = 0$$

для каждого уравнения второй степени из системы уравнений хордовых расходов.

Алгебраическая запись характеристического уравнения имеет вид

$$\mu^c + (-1)^{c-1} I_{c-1}\mu^{c-1} + (-1)^{c-2} I_{c-2}\mu^{c-2} + \ldots + (-1)I_0 = 0,$$

где I_r – инварианты матрицы W.

Инварианты являются численными характеристиками матрицы W, поскольку вычисляются как значения определителей матриц, построенных на основе ее элементов.

Кроме матрицы квадратичной формы W составим матрицу $(c + 1)$-го порядка, включающую столбец коэффициентов при первой степени искомых параметров, вида

$$W_p = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1c} & w_{1(c+1)} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2c} & w_{2(c+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{c1} & W_{c2} & \cdots & W_{cc} & w_{c(c+1)} \\ w_{1(c+1)} & w_{2(c+1)} & \cdots & w_{c(c+1)} & q \end{bmatrix},$$

определитель этой матрицы обозначим через $D = \det W_p$.

Вопросам раскрытия "векового" уравнения и получения характеристических чисел посвящена обширная литература, поэтому в данном параграфе остановимся на этом кратко.

Под *полной* проблемой собственных значений понимается проблема нахождения всех собственных значений матрицы W, так же как и принадлежащих этим характеристическим числам собственных векторов (или векторов, образующих канонический базис).

Определение компонент собственного вектора требует решения системы c однородных уравнений с c неизвестными, т. е. для вычисления всех собственных векторов матрицы требуется решить c систем вида

$$(W - \mu_i E)X_i = 0,$$

где $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ci})$ – собственный вектор матрицы W, принадлежащий характеристическому числу μ_i.

Как отмечалось ранее, коэффициенты характеристического полинома являются (с точностью до знака) суммами всех миноров определителя матрицы W порядка i, опирающихся на главную диагональ.

При постановке проблемы характеристических чисел для матриц, элементы которых заданы приближенно, возникает вопрос об устойчивости полученного решения, т. е. вопрос о том, как изменяются характеристические числа и собственные векторы при изменении элементов данной матрицы в пределах допустимой погрешности. То, что в отдельных случаях проблема характеристических чисел не может быть устойчивой, ясно из следующих соображений. Допустим, что данная матрица, если ее численное задание рассматривать как точное, имеет лишь простые характеристические числа, однако при определенном изменении ее элементов в пределах точности задания можно прийти к матрице, имеющей кратное характеристическое число с нелинейным элементарным делителем. В этом случае каноническая форма матрицы при изменении ее элементов в пределах точности задания претерпевает *качественное* изменение, переходя от диагональной формы к общей канонической форме. В частности, даже число собственных векторов изменяется скачкообразно. В этих условиях полная проблема характеристических чисел (а также определение собственных векторов) просто теряет смысл.

Пусть W – заданная матрица, а $W + dW$ – близкая к ней матрица. Выясним, как изменятся характеристические числа и собственные векторы матрицы W, когда она получит приращение dW. Проведем рассуждения в предположении, что все характеристические числа матрицы W различны, отбрасывая величины второго порядка малости, т. е. будем рассматривать dW (и соответственно dX и $d\mu$) как дифференциалы, а не как конечные приращения.

Пусть

$$WX_i = \mu_i X_i \ (i = 1, 2, ..., c).$$

Тогда

$$dWX_i + WdX_i = \mu_i dX_i + d\mu_i X_i \, .$$

Пусть $V_1, V_2, ..., V_c$ – собственные векторы сопряженной матрицы W^*, соответствующие характеристическим числам $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, ..., \bar{\mu}_c$. Тогда

$$\big((dW)X_i, V_j\big) + \big(W(dX_i), V_j\big) = \mu_i \big(dX_i, V_j\big) + d\mu_i \big(X_i, V_j\big).$$

Полагая в этом равенстве $i = j$, получим

$$((dW)X_i, V_i) + (W(dX_i), V_i) = \mu_i (dX_i, V_i) + d\mu_i (X_i, V_i),$$

отсюда

$$d\mu_i = \frac{((dW)X_i, V_i)}{(X_i, V_i)}, \text{ так как } W^* V_i = \bar{\mu}_i V_i \, .$$

Полагаем теперь $i \neq j$. В силу равенств $(V_i, V_j) = 0$ и $\big(W(dX_i), V_j\big) = \mu_i \big(dX_i, V_j\big)$ получим

$$\big(\mu_i - \mu_j\big)\big(dX_i, V_j\big) = \big((dW)X_i, V_j\big),$$

отсюда

$$\big(dX_i, V_j\big) = \frac{\big((dW)X_i, V_j\big)}{\mu_i - \mu_j}.$$

Пусть

$$dX_i = \sum_{j=1}^{c} \alpha_{ij} X_j \, .$$

Тогда

$$\big(dX_i, V_j\big) = \alpha_{ij} \big(X_j, V_j\big)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{ij} = \frac{\big((dW)X_i, V_j\big)}{\big(X_j, V_j\big)\big(\mu_i - \mu_j\big)} \text{ при } i \neq j.$$

Коэффициент α_{ii} остается, естественно, неопределенным в силу неоднозначности собственного вектора, и без нарушения общности можно считать, что $\alpha_{ii} = 0$.

Теперь перейдем к оценкам. Из формулы дифференциала характеристических чисел получим

$$|d\mu_i| \leq \frac{\|dW\| \, |X_i| \, |V_i|}{|(X_i, V_i)|} = c_i \|dW\|,$$

где

$$c_i = \frac{|X_i| \, |V_i|}{|(X_i, V_i)|}.$$

Ясно, что $c_i \geq 1$. Если собственные векторы вещественны, то

$$c_i = \frac{1}{|\cos\varphi_i|},$$

где φ_i – угол между векторами X_i и V_i.

Число c_i носит название ***коэффициента перекоса*** матрицы W и соответствует характеристическому числу μ_i, т. е. изменение μ_i при данной $\|dW\|$ может быть тем больше, чем больше соответствующий этому характеристическому числу коэффициент перекоса c_i. Для нормальных матриц

$$|d\mu_i| \leq \|dW\|, \text{ так как } X_i = V_i.$$

Поэтому для нормальных матриц задача определения характеристических чисел *всегда устойчива*. Для произвольных же матриц задача определения характеристических чисел будет неустойчивой только при большом значении коэффициента перекоса.

Несложно дать грубую оценку модуля корней характеристического уравнения.

Пусть коэффициенты уравнения – вещественные числа и корни, в силу принятых ограничений на вид поверхности второго порядка вещественные и упорядоченные по возрастанию: $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_c$.

Введем следующие величины:

$$A = \max\left\{\left|(-1)^{c-1} I_{c-1}\right|, \left|(-1)^{c-2} I_{c-2}\right|, \ldots, \left|(-1)^2 I_1\right|, \left|(-1)I_0\right|\right\},$$

$$B = \max\left\{1, \left|(-1)^{c-1} I_{c-1}\right|, \left|(-1)^{c-2} I_{c-2}\right|, \ldots, \left|(-1)^2 I_1\right|\right\}.$$

Грубая оценка корней должна удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{1 + B\left|(-1)I_0\right|^{-1}} < |\mu_k| < 1 + A.$$

Это неравенство соответствует ограничениям корней алгебраического уравнения с анализом коэффициентов уравнения.

Интерес к характеристическим числам вызван тем, что во многих прикладных вопросах физики μ_k представляют собой собственные частоты. Более обобщенно можно сказать, что в приложениях μ_k являются наблюдаемыми величинами, с помощью которых можно провести сравнение теоретических выводов с экспериментом.

В предположении, что поверхность, описанная представленной формой второго порядка, относится к классу центральных (эллиптических или гиперболических), это означает формально, что $\det I_0 \neq 0$, и для определения координат центра поверхности имеем систему линейных уравнений

$$I_0 x + w = 0,$$

решение которой

$$x^0 = -I_0^{-1} w.$$

Тогда начало координат может быть перенесено в точку с координатами $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_c^0)$ с помощью линейного преобразования

$$x = \bar{x} + x^0 = \bar{x} - I_0^{-1} w,$$

что при подстановке в уравнение поверхности второго порядка позволит избавиться от линейных слагаемых.

Понятно, что данное условие оговаривает существование центра для каждой поверхности второго порядка, но система хордовых расходов имеет c уравнений, а следовательно, и c центров. Это обстоятельство не позволяет привести все уравнения к каноническому виду, даже такому:

$$x^T I_0 x + \frac{D}{\det I_0} = 0\,.$$

Для эллиптических поверхностей имеют место ограничения на инварианты характеристического уравнения, которые записываются в виде системы неравенств

$$I_0 I_{(c-1)} > 0, I_1 > 0, ..., I_{(c-2)} > 0, D < 0.$$

Для гиперболических поверхностей имеют место ограничения на инварианты характеристического уравнения вида (для многополостного гиперболоида)

$$I_0 I_{(c-1)} > 0, I_1 < 0, ..., I_{(c-2)} < 0, D < 0.$$

Все эти рассуждения можно проиллюстрировать на примерах двух- и трехконтурных гидравлических цепей.

Рассмотрим двухконтурную открытую и активную гидравлическую цепь (рис. 1.4).

Для этой цепи задача анализа режимов нестационарного потокораспределения запишется так:

– при известных характеристиках ветвей цепи

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix};$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix} \text{ и } P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix},\ Q(t) = \begin{bmatrix} -Q_1(t) \\ +Q_2(t) \end{bmatrix}$$

определить

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},\ h(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} \text{ и } P_2(t)$$

в случае, если оно не задано, удовлетворяющие системе функционально-дифференциальных уравнений

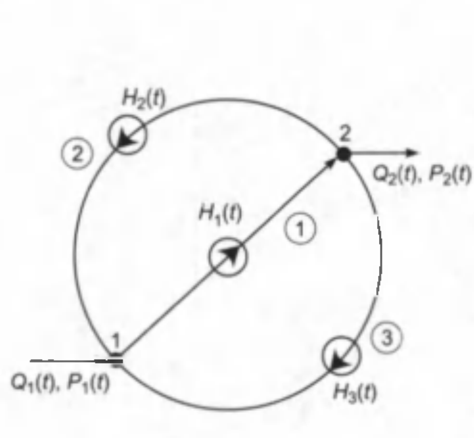


Рис. 1.4. Двухконтурная открытая и активная гидравлическая цепь:

узлов $m = 2$, ветвей $n = 3$, линейно независимых контуров $c = 2$

$$r_1\frac{dx_1(t)}{dt}+r_2\frac{dx_2(t)}{dt}+s_1x_1^2(t)+s_2x_2^2(t)+c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=H_1(t)+H_2(t),$$

$$(r_1+r_3)\frac{dx_1(t)}{dt}-r_3\frac{dx_2(t)}{dt}+(s_1+s_3)x_1^2(t)-2s_3x_1(t)x_2(t)+s_3x_2^2(t)+[c_1+c_3+s_3Q_2(t)]x_1(t)-$$

$$-[c_3+s_3Q_2(t)]x_2(t)=H_1(t)+H_3(t)-r_3\frac{dQ_2(t)}{dt}-s_3Q_2^2(t)-c_3Q_2(t),$$

$$x_1(0)=x_{01},\ x_2(0)=x_{02};$$

$$x_3(t)=x_1(t)-x_2(t)-Q_1(t);$$

$$h_1(t)=r_1\frac{dx_1(t)}{dt}+s_1x_1^2(t)+c_1x_1(t),$$

$$h_2(t)=r_2\frac{dx_2(t)}{dt}+s_2x_2^2(t)+c_2x_2(t),$$

$$h_3(t)=r_3\frac{dx_3(t)}{dt}+s_3x_3^2(t)+c_3x_3(t);$$

$$P_2(t)=P_1(t)-\left[r_1\frac{dx_1(t)}{dt}+s_1x_1^2(t)+c_1x_1(t)-H_1(t)\right].$$

Основной системой, описывающей нестационарное потокораспределение в гидравлической цепи, является каноническая система двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Очевидно, что эта система имеет стационарные точки, в которых касательные параллельны оси времени $\left(\frac{dx_1(t)}{dt}=0\right.$ и $\left.\frac{dx_2(t)}{dt}=0\right)$. Следовательно, для их определения имеем систему двух нелинейных алгебраических уравнений вида

$$s_1x_1^2+s_2x_2^2+c_1x_1+c_2x_2-H_1-H_2=0,$$

$$(s_1+s_3)x_1^2-2s_3x_1x_2+s_3x_2^2+(c_1+c_3+s_3Q_2)x_1-(c_3+s_3Q_2)x_2-H_1-H_3+s_3Q_2^2+c_3Q_2=0.$$

Каждое из этих уравнений представляет собой полное квадратное уравнение и некую поверхность второго порядка в пространстве контуров, вид которой может быть исследован известными методами пассивных преобразований координат (сдвига и вращения) [29–31].

Обозначим

$$g_{11}^{(1)}=s_1,\ g_{12}^{(1)}=0,\ g_{21}^{(1)}=0,\ g_{22}^{(1)}=s_2,\ g_1^{(1)}=c_1,\ g_2^{(1)}=c_2,\ g^{(1)}=-H_1-H_2$$

и

$$g_{11}^{(2)}=s_1+s_3,\ g_{12}^{(2)}=s_3,\ g_{21}^{(2)}=s_3,\ g_{22}^{(2)}=s_3,\ g_1^{(2)}=c_1+c_3+s_3Q_2,\ g_2^{(2)}=c_3+s_3Q_2,$$

$$g^{(2)}=-H_1-H_3+s_3Q_2^2+c_3Q_2.$$

Тогда оба уравнения можно записать в матричном виде:

$$x^TG^{(1)}x+2\overline{g}^{(1)}x+g^{(1)}=0,$$

$$x^TG^{(2)}x+2\overline{g}^{(2)}x+g^{(2)}=0,$$

где $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ – квадратные матрицы второго порядка с элементами $g_{ij}^{(1)}$ и $g_{ij}^{(2)}$ соответственно; $\bar{g}^{(1)}$ и $\bar{g}^{(2)}$ – векторы с элементами $g_i^{(1)}$ и $g_i^{(2)}$ соответственно.

Из коэффициентов этих уравнений можно сформировать инварианты, которые остаются постоянными при линейных преобразованиях кривых второго порядка, а для трубопроводной системы могут быть применены как дополнительные ограничения на известные параметры участков, активных напоров и нагрузок потребителей. Для двумерного пространства имеем два инварианта как значения определителей, формируемых из коэффициентов уравнения второй степени

$$\Delta^{(1)} = \begin{bmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} & g_1^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g^{(1)} \end{bmatrix}$$

для первого уравнения и

$$\Delta^{(2)} = \begin{bmatrix} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} & g_1^{(2)} \\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} & g_2^{(2)} \\ g_1^{(2)} & g_2^{(2)} & g^{(2)} \end{bmatrix}$$

для второго уравнения.

В двумерном декартовом пространстве имеем характеристическое уравнение второго порядка, т. е.

$$p^2 - I_1^{(1)} p + \delta^{(1)} = 0,$$

где $I_1^{(1)} = g_{11}^{(1)} + g_{22}^{(1)}$; $\delta^{(1)} = \det \begin{bmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = g_{11}^{(1)} g_{22}^{(1)} - g_{12}^{(1)} g_{21}^{(1)}$,

и

$$p^2 - I_1^{(2)} p + \delta^{(2)} = 0,$$

где $I_1^{(2)} = g_{11}^{(2)} + g_{22}^{(2)}$; $\delta^{(2)} = \det \begin{bmatrix} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} \\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = g_{11}^{(2)} g_{22}^{(2)} - g_{12}^{(2)} g_{22}^{(2)}$.

Так как для двухконтурного пространства характеристические уравнения кривых второго порядка выражаются уравнениями второй степени, то для каждого из них можно определить характеристические числа (рис. 1.5):

$$p_{1,2}^{(1)} = 0.5 I_1^{(1)} \pm \sqrt{0.25 (I_1^{(1)})^2 - \delta^{(1)}}$$

и

$$p_{1,2}^{(2)} = 0.5 I_1^{(2)} \pm \sqrt{0.25 (I_1^{(2)})^2 - \delta^{(2)}}.$$

Рис. 1.5. Возможные корни характеристического уравнения:

а – комплексные сопряженные; *б* – вещественные равные; *в* – вещественные разные

Для дальнейшего анализа линейных преобразований необходимо иметь характеристику полной матрицы уравнения, т. е.

$$\bar{\Delta}^{(1)} = \det\begin{bmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} & g_{1}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} & g_{2}^{(1)} \\ g_{1}^{(1)} & g_{2}^{(1)} & g^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= g_{11}^{(1)}g_{22}^{(1)}g_{33}^{(1)} + g_{12}^{(1)}g_{1}^{(1)}g_{2}^{(1)} + g_{21}^{(1)}g_{1}^{(1)}g_{2}^{(1)} - (g_{1}^{(1)})^2 g_{22}^{(1)} - g_{12}^{(1)}g_{21}^{(1)}g^{(1)} - g_{11}^{(1)}(g_{2}^{(1)})^2$$

и

$$\bar{\Delta}^{(2)} = \det\begin{bmatrix} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} & g_{1}^{(2)} \\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} & g_{2}^{(2)} \\ g_{1}^{(2)} & g_{2}^{(2)} & g^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= g_{11}^{(2)}g_{22}^{(2)}g_{33}^{(2)} + g_{12}^{(2)}g_{1}^{(2)}g_{2}^{(2)} + g_{21}^{(2)}g_{1}^{(2)}g_{2}^{(2)} - (g_{1}^{(2)})^2 g_{22}^{(2)} - g_{12}^{(2)}g_{21}^{(2)}g^{(2)} - g_{11}^{(2)}(g_{2}^{(2)})^2.$$

Отсюда следует классификация различных действительных линий второго порядка на основании достаточных признаков:

– если $\delta < 0$ и $\bar{\Delta} \neq 0$, то имеем *гиперболу*, иначе $(\bar{\Delta} = 0)$ *две пересекающиеся прямые*;

– если $\delta = 0$ и $\bar{\Delta} \neq 0$, то имеем *параболу*;

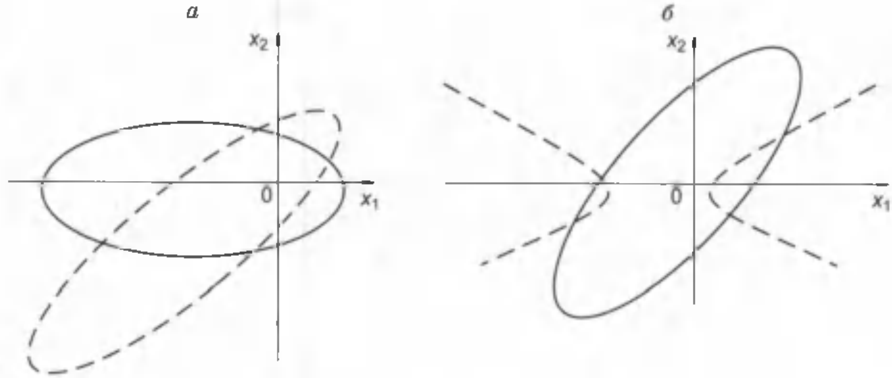
– если $\delta > 0$ и $I_1\bar{\Delta} < 0$, то имеем *эллипс*.

Для трубопроводной системы $\delta = 0$ может иметь место только в двух случаях: движение не имеет инерции, т. е. все характеристики инерции движения жидкости по участкам равны нулю ($r_i = 0$ для $i = 1, 2, 3$), или гидравлическое сопротивление участков равно нулю ($s_i = 0$ для $i = 1, 2, 3$), что в принципе невозможно для реального объекта, а следовательно, стационарные точки не могут располагаться на пересечении парабол.

Равенство $\bar{\Delta}=0$ также не имеет смысла, ибо оно соблюдается только для закрытых ($Q_j = 0$ для всех $j = 1, 2$) и пассивных ($H_i = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$) трубопроводных систем, не имеющих емкости ($c_i = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$), что противоречит принципу функционирования трубопроводных систем.

Так как имеют место соотношения относительно инварианта δ, что $\delta < 0$ – гипербола и $\delta > 0$ – эллипс (рис. 1.6), то это налагает определенные ограничения на гидравлические сопротивления трубопроводной системы, т. е. сумма квадратов гидравлических сопротивлений хорд должна быть меньше произведения сумм гидравлических сопротивлений ветвей контуров по всей гидравлической цепи. Это утверждение в многоконтурной цепи ставит на первое место разветвленную цепь как основной объект, выполняющий необходимые функции трубопроводного транспорта – доставку необходимого количества массы от источника потребителям (открытые системы), а хорды выполняют второстепенную роль – резервных связей. Это характерно для закрытых систем, где основой функционирования является циркуляционное движение жидкости с отдачей энергии потребителям.

Таким образом, возможны три варианта расположения стационарных точек: 1) на пересечении эллипсов; 2) на пересечении гипербол; 3) на пересечении эллипса и гиперболы (см. рис. 1.6).



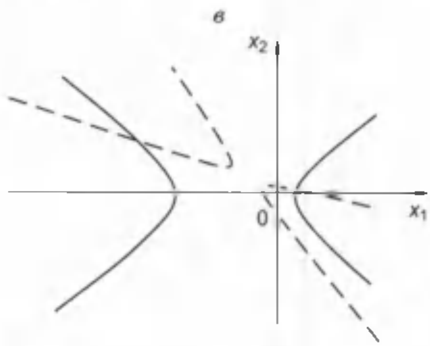


Рис. 1.6. Возможные варианты кривых второго порядка, приемлемых для анализа стационарных точек двухконтурной гидравлической цепи:

а – два эллипса; *б* – эллипс и гипербола; *в* – две гиперболы

Согласно ограничениям на инварианты кривых второго порядка, преобразованные уравнения системы двух нелинейных уравнений можно записать в виде:

для эллипсов

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}>p_2^{(1)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}>p_2^{(2)}>0;$$

для эллипса и гиперболы

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}>p_2^{(1)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}<0,\ p_2^{(2)}>0;$$

для гипербол

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}\big/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}<0,\ p_2^{(1)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}\big/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}<0,\ p_2^{(2)}>0.$$

Эти преобразования имели бы смысл для упрощения системы контурных уравнений, а именно, удалением слагаемых попарных произведений и линейных членов, только в случае эквивалентности центров для обеих кривых, что для гидравлической цепи не характерно. Для уравнений центров (x_1^0, x_2^0) двухконтурной цепи имеем

– первое уравнение дает линейную систему вида

$$\begin{cases} s_1 x_1 + c_1 = 0, \\ s_2 x_2 + c_2 = 0, \end{cases}$$

решение которой $\left(x_1^0 = -\dfrac{c_1}{s_1}, x_2^0 = -\dfrac{c_2}{s_2} \right)$;

– второе уравнение порождает систему вида

$$\begin{cases} (s_1 + s_3) x_1 - s_3 x_2 + (c_1 + c_3 + s_3 Q_2) = 0, \\ \qquad -s_3 x_1 + s_3 x_2 - (c_3 + s_3 Q_2) = 0, \end{cases}$$

решение которой $\left(x_1^0 = -\dfrac{c_1}{s_1}, x_2^0 = \dfrac{s_1 c_3 - s_3 c_1 + s_1 s_3 Q_2}{s_1 s_3} \right)$.

Очевидно, что центры кривых не совпадают.

Рассмотрим трехконтурную открытую и активную гидравлическую цепь (рис. 1.7).

Для этой цепи задача анализа режимов нестационарного потокораспределения запишется так:

– при известных характеристиках ветвей цепи

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix};$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \\ H_4(t) \\ H_5(t) \\ H_6(t) \end{bmatrix} \text{ и } P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} -Q_1(t) \\ +Q_2(t) \\ 0 \\ +Q_4(t) \end{bmatrix}$$

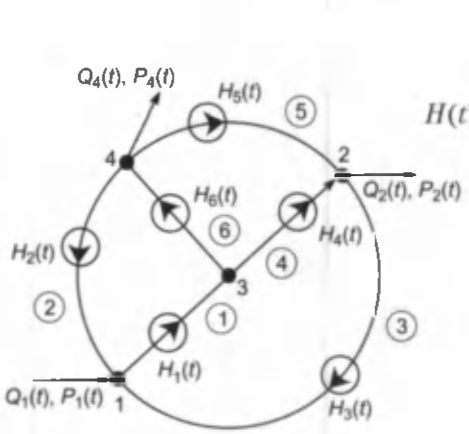


Рис. 1.7. Трехконтурная открытая и активная гидравлическая цепь:

узлов $m = 4$, ветвей $n = 6$, линейно независимых контуров $c = 3$

определить

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\\x_6(t)\end{bmatrix},\quad h(t)=\begin{bmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\\h_3(t)\\h_4(t)\\h_5(t)\\h_6(t)\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \begin{bmatrix}P_2(t)\\P_3(t)\\P_4(t)\end{bmatrix}$$ в случае, если они не заданы.

Система дифференциальных уравнений относительно контурных расходов принимает вид

$$r_1\frac{dx_4(t)}{dt}-r_2\frac{dx_5(t)}{dt}+(r_1+r_2+r_6)\frac{dx_6(t)}{dt}=$$

$$=-s_1x_4^2(t)-2s_1x_4(t)x_6(t)-s_2x_5^2(t)-2s_2x_5(t)x_6(t)-c_1x_4(t)+(c_2+2s_2Q_4(t))x_5(t)-$$

$$-(c_1+c_2+c_6-2s_2Q_4(t))x_6(t)+r_2\frac{dQ_4(t)}{dt}-s_2Q_4^2(t)+c_2Q_4(t)+H_1(t)+H_2(t)+H_6(t),$$

$$(r_1+r_3+r_4)\frac{dx_4(t)}{dt}+r_3\frac{dx_5(t)}{dt}-r_1\frac{dx_6(t)}{dt}=$$

$$=-(s_1+s_3+s_4)x_4^2(t)-2s_3x_4(t)x_5(t)-2s_1x_4(t)x_6(t)-s_3x_5^2(t)-s_1x_6^2(t)-(c_1+c_3+c_4-2s_3Q_2(t))\times$$

$$\times x_4(t)-(c_3-2s_3Q_2(t))x_5(t)-c_1x_6(t)-r_3\frac{dQ_2(t)}{dt}-s_3Q_2^2(t)+c_3Q_2(t)+H_1(t)+H_3(t)+H_4(t),$$

$$-r_4\frac{dx_4(t)}{dt}+r_5\frac{dx_5(t)}{dt}+r_6\frac{dx_6(t)}{dt}=$$

$$=s_4x_4^2(t)-s_5x_5^2(t)-s_6x_6^2(t)+c_4x_4(t)-c_5x_5(t)-c_6x_6(t)-H_4(t)+H_5(t)+H_6(t).$$

Для стационарного режима имеем систему алгебраических уравнений

$$-s_1x_4^2-2s_1x_4x_6-s_2x_5^2-2s_2x_5x_6-c_1x_4+(c_2+2s_2Q_4)x_5-$$

$$-(c_1+c_2+c_6-2s_2Q_4)x_6-s_2Q_4^2+c_2Q_4+H_1+H_2+H_6=0,$$

$$-(s_1+s_3+s_4)x_4^2-2s_3x_4x_5-2s_1x_4x_6-s_3x_5^2-s_1x_6^2-(c_1+c_3+c_4-2s_3Q_2)x_4-$$

$$-(c_3-2s_3Q_2)x_5-c_1x_6-s_3Q_2^2+c_3Q_2+H_1+H_3+H_4=0,$$

$$s_4x_4^2-s_5x_5^2-s_6x_6^2+c_4x_4-c_5x_5-c_6x_6-H_4+H_5+H_6=0.$$

Или в матричном виде:

$$x_c^T(t)G^{(1)}x_c(t)+2\overline{g}^{(1)}x_c(t)+g^{(1)}=0,$$

$$x_c^T(t)G^{(2)}x_c(t)+2\overline{g}^{(2)}x_c(t)+g^{(2)}=0,$$

$$x_c^T(t)G^{(3)}x_c(t)+2\overline{g}^{(3)}x_c(t)+g^{(3)}=0,$$

где

$$G^{(1)}=\begin{bmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} & g_{13}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} & g_{23}^{(1)} \\ g_{31}^{(1)} & g_{32}^{(1)} & g_{33}^{(1)} \end{bmatrix},\ G^{(2)}=\begin{bmatrix} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} & g_{13}^{(2)} \\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} & g_{23}^{(2)} \\ g_{31}^{(2)} & g_{32}^{(2)} & g_{33}^{(2)} \end{bmatrix},\ G^{(3)}=\begin{bmatrix} g_{11}^{(3)} & g_{12}^{(3)} & g_{13}^{(3)} \\ g_{21}^{(3)} & g_{22}^{(3)} & g_{23}^{(3)} \\ g_{31}^{(3)} & g_{32}^{(3)} & g_{33}^{(3)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{g}^{(1)}=\begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ g_3^{(1)} \end{bmatrix},\ \bar{g}^{(2)}=\begin{bmatrix} g_1^{(2)} \\ g_2^{(2)} \\ g_3^{(2)} \end{bmatrix},\ \bar{g}^{(3)}=\begin{bmatrix} g_1^{(3)} \\ g_2^{(3)} \\ g_3^{(3)} \end{bmatrix}, g^{(1)}=f_1(t), g^{(2)}=f_2(t), g^{(3)}=f_3(t).$$

И для каждого из уравнений для стационарных точек имеем характеристические уравнения третьей степени:

$$\left(p^{(1)}\right)^3 - I_1^{(1)}\left(p^{(1)}\right)^2 + I_2^{(1)}p^{(1)} - \delta^{(1)} = 0,$$

$$\left(p^{(2)}\right)^3 - I_1^{(2)}\left(p^{(2)}\right)^2 + I_2^{(2)}p^{(2)} - \delta^{(2)} = 0,$$

$$\left(p^{(3)}\right)^3 - I_1^{(3)}\left(p^{(3)}\right)^2 + I_2^{(3)}p^{(3)} - \delta^{(3)} = 0,$$

где

$$I_1 = g_{11} + g_{22} + g_{33},\quad I_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},\quad \delta = \det G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Так как для трехконтурного пространства характеристические уравнения кривых второго порядка выражаются уравнениями третьей степени, то можно для каждой из них определить характеристические числа в поле действительных чисел. Для этого введем обозначения:

$$P^{(r)} = -\frac{\left(I_1^{(r)}\right)^2}{3} + I_2^{(r)},\quad G^{(r)} = 2\left(-\frac{I_1^{(r)}}{3}\right)^3 + \frac{I_1^{(r)}I_2^{(r)}}{3} - \delta^{(r)},$$

$$Q^{(r)} = \left(\frac{P^{(r)}}{3}\right)^3 + \left(\frac{G^{(r)}}{2}\right)^2,\quad A^{(r)} = \sqrt[3]{-\frac{G^{(r)}}{2} + \sqrt{Q^{(r)}}},\quad B^{(r)} = \sqrt[3]{-\frac{G^{(r)}}{2} - \sqrt{Q^{(r)}}}.$$

При $Q^{(r)} < 0$ и $r = 1, 2, 3$ каждое характеристическое уравнение имеет три различных вещественных корня (рис. 1.8):

$$p_1^{(r)} = A^{(r)} + B^{(r)} + \frac{I_1^{(r)}}{3},\quad p_2^{(r)} = -\frac{A^{(r)} + B^{(r)}}{2} + i\frac{A^{(r)} - B^{(r)}}{2}\sqrt{3},\quad p_3^{(r)} = -\frac{A^{(r)} + B^{(r)}}{2} - i\frac{A^{(r)} - B^{(r)}}{2}\sqrt{3}.$$

Имеем инварианты поверхностей второго порядка в трехмерном декартовом пространстве хордовых расходов и с добавлением определителя

$$\Delta = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g \end{bmatrix}.$$

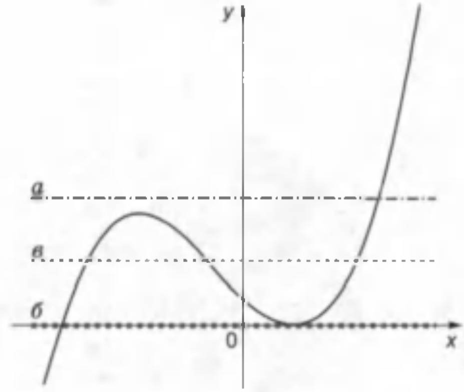


Рис. 1.8. Возможные корни характеристического уравнения:

а – один вещественный и два комплексных сопряженных; *б* – три вещественных и два из них равны; *в* – три вещественных разных

Анализ поверхностей второго порядка на основе этих инвариантов и предположений относительно реальной трубопроводной системы позволяет высказать суждение о возможных поверхностях, на пересечении которых определяются стационарные точки:

– если $I_1\delta > 0$, $I_2 > 0$ и $\Delta < 0$, то имеем *эллипсоид*;

– если $I_1\delta < 0$, $I_2 > 0$ и $\Delta < 0$, то имеем *двуполостный гиперболоид*;

– если $I_1\delta > 0$, $I_2 < 0$ и $\Delta > 0$, то имеем *однополостный гиперболоид*.

Тогда для гидравлической цепи могут иметь место следующие вариации (рис. 1.9): 1) три пересекающихся эллипсоида; 2) два эллипсоида и гиперболоид; 3) один эллипсоид и два гиперболоида; 4) три пересекающихся гиперболоида.

Согласно ограничениям на инварианты поверхности второго порядка, преобразованные уравнения системы можно записать в виде:

для эллипсоидов

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_3^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}>p_2^{(1)}>p_3^{(1)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_3^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}>p_2^{(2)}>p_3^{(2)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_1^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_2^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_3^{(3)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(3)}>p_2^{(3)}>p_3^{(3)}>0;$$

для эллипсоидов и гиперболоида

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_3^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}>p_2^{(1)}>p_3^{(1)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_3^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}>p_2^{(2)}>p_3^{(2)}>0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_1^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_2^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_3^{(3)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(3)}>p_2^{(3)}>0,\ p_3^{(3)}<0;$$

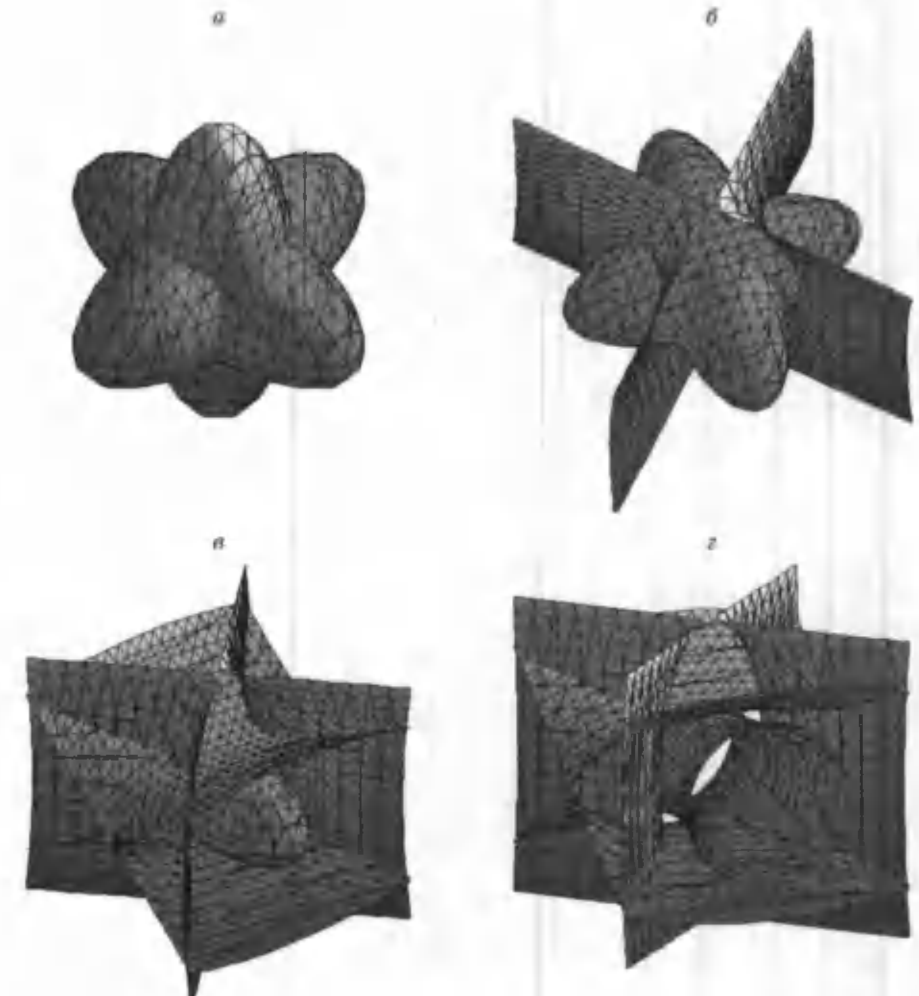


Рис. 1.9. Возможные вариации поверхностей второго порядка, приемлемые для анализа стационарных точек трехконтурной гидравлической цепи:

а – три эллипсоида; *б* – два эллипсоида и однополостный гиперболоид; *в* – эллипсоид и два однополостных гиперболоида; *г* – три гиперболоида

для гиперболоидов

$$\frac{\left(X_1^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_1^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_2^{(1)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(1)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(1)}/\left(\delta^{(1)}p_3^{(1)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(1)}<0,\, p_2^{(1)}<0,\, p_3^{(1)}<0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_1^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_2^{(2)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(2)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(2)}/\left(\delta^{(2)}p_3^{(2)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(2)}<0,\, p_2^{(2)}<0,\, p_3^{(2)}<0,$$

$$\frac{\left(X_1^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_1^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_2^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_2^{(3)}\right)}+\frac{\left(X_3^{(3)}\right)^2}{-\bar{\Delta}^{(3)}/\left(\delta^{(3)}p_3^{(3)}\right)}=1 \text{ при } p_1^{(3)}<0,\, p_2^{(3)}<0,\, p_3^{(3)}<0.$$

Для анализа стационарных точек динамических процессов в гидравлических цепях использовался трехчленный закон записи замыкающих соотношений, который наряду с квадратичным слагаемым (гидравлическое сопротивление) включает и линейное слагаемое (емкостное сопротивление). Это отражается на сдвиге гиперэллипсоидов параллельно осям координат, что приводит к различному положению их центров для всей системы контурных уравнений. Из анализа следует, что контурные уравнения, а именно система линейно независимых контуров, должны выбираться так, чтобы ориентация всех ветвей, принадлежащих контуру, совпадала с ориентацией контура. В противном случае получим хотя бы один гипергиперболоид, что было бы крайне нежелательно для численных расчетов. В задачах стационарного потокораспределения, использующих одночленный вид замыкающего соотношения (квадратичный закон Дарси), этот факт устанавливается по результатам расчета (переворотом направления расхода на ветви).

При одночленном виде замыкающего соотношения гиперэллипсоиды для всех линейно независимых контуров имеют единственный центр, т. е. преобразование сдвига, ликвидирующее линейные слагаемые, не требуется. Однако это характерно только для закрытых гидравлических цепей. Если цепи открытые, то в силу преобразования системы уравнений первого закона Кирхгофа в контурных уравнениях появляются линейные слагаемые, зависящие от нагрузок потребителей, что отражает динамический процесс.

Таким образом, на описании одной из частных задач анализа нестационарных режимов потокораспределения в открытой и активной многоконтурной гидравлической цепи проведен анализ поверхностей, на которых располагается множество стационарных точек. К ним может стремиться траектория движения процесса при разнообразных внутренних и внешних возмущениях. Задача предугадать эту точку заранее сопряжена с определенными трудностями. Наиболее рациональный подход в этом направлении, вероятно, заключается в постановке экспериментов и наблюдении за реальными трубопроводными системами путем максимального оснащения их разнообразной измерительной аппаратурой по всем параметрам транспортируемой массы (давления, расхода, температуры, энергии и т. д.). Только таким способом можно подтвердить адекватность расчетов на математической модели. В свою очередь, это должно стимулировать развитие технологических процессов регулирования и управления с целью оптимизации общей энергии системы.

1.5. Классификация задач нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи

В т. г. ц. для расширения задач стационарного потокораспределения введено понятие *регулируемых цепей*, которое подразумевает, что реальные трубопроводные системы оснащены регуляторами расхода, предназначенными для изменения расхода на участках системы (типа дроссельных шайб, изменяемых диафрагм и т. п.), и регуляторами давления для изменения давлений (типа насосов, турбин отбора мощности и т. п.). Следуя этому, для нестационарного потокораспределения предполагается, что эти изменения как реакции на внешние и внутренние возмущения в цепи связаны с пропускной способностью ветвей и активными напорами, которые, в свою очередь, зависят от характеристик ветвей (различных коэффициентов сопротивлений и напоров). Предполагается, что они изменяются во времени ($r_i(t)$, $s_i(t)$, $c_i(t)$) вследствие изменения отборов у потребителей по количеству $Q_j(t)$ и качеству $P_j(t)$. Исходя из этих предположений, **общую математическую модель нестационарного потокораспределения** можно представить в следующем виде:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -G_c(t)[x_c(t)]^T S_c(t)x_c(t) - G_d(t)\left[Q_d(t) + B_d^T x_c(t)\right]^T S_d(t)\left[Q_d(t) + B_d^T x_c(t)\right]^T -$$

$$-G_{cd}(t)x_c(t) + G_H(t) - G_{rd}(t)\frac{dQ(t)}{dt} - G_{dd}(t)Q_d(t),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t) = Q_d(t) + B_d^T x_c(t);$$

$$h(t) = R(t)\frac{dx(t)}{dt} + S(t)x^2(t) + C(t)x(t);$$

$$P(t) = \left(A_d^T\right)^{-1}[a_m P_m(t) - (h_d(t) + H_d(t))],$$

где

$$G_c(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1} B_c, \quad G_d(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1} B_d,$$

$$G_{cd}(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1}\left[C_c(t) + B_d C_d(t) B_d^T\right],$$

$$G_H(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1} BH(t),$$

$$G_{rd}(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1} B_d R_d(t) A_d^{-1},$$

$$G_{dd}(t) = \left[B_c R_c(t) + B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1} B_d C_d(t) A_d^{-1}, \quad Q_d(t) = A_d^{-1} Q(t).$$

Из этой модели при некоторых допущениях можно формировать различные модификации.

Допустим, например, что используется двухчленный закон в записи замыкающего соотношения. Это может привести к двум случаям.

1. Сопротивления, стоящие перед квадратом расхода, равны нулю на всех ветвях гидравлической цепи, т. е. $s_i = 0$ и $c_i \neq 0$, $r_i \neq 0$, что обращает в нулевые матрицы: $S_c(t) = 0$, $S_d(t) = 0$, $S(t) = 0$. Тогда имеем

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -G_{cd}(t)x_c(t) + G_H(t) - G_{rd}(t)\frac{dQ(t)}{dt} - G_{dd}(t)Q_d(t),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t) = Q_d(t) + B_d^T x_c(t);$$

$$h(t) = R(t)\frac{dx(t)}{dt} + C(t)x(t);$$

$$P(t) = \left(A_d^T\right)^{-1}[a_m P_m(t) - (h_d(t) + H_d(t))],$$

где

$$G_c(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_c,\;\; G_d(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_d,$$

$$G_{cd}(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}\left[C_c(t)+B_dC_d(t)B_d^T\right],$$

$$G_H(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}BH(t),$$

$$G_{rd}(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_dR_d(t)A_d^{-1},$$

$$G_{dd}(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_dC_d(t)A_d^{-1},\;\; Q_d(t)=A_d^{-1}Q(t).$$

Относительно хордовых расходов имеем систему линейных дифференциальных уравнений.

2. Сопротивления, стоящие перед расходом в первой степени, равны нулю на всех ветвях гидравлической цепи, т. е. $c_i=0$ и $s_i\neq 0$, $r_i\neq 0$, что обращает в нулевые матрицы: $C_c(t)=0$, $C_d(t)=0$, $C(t)=0$. Тогда имеем

$$\frac{dx_c(t)}{dt}=-G_c(t)[x_c(t)]^T S_c(t)x_c(t)-G_d(t)\left[Q_d(t)+B_d^Tx_c(t)\right]^T S_d(t)\left[Q_d(t)+B_d^Tx_c(t)\right]^T+$$

$$+G_H(t)-G_{rd}(t)\frac{dQ(t)}{dt}-G_{dd}(t)Q_d(t),$$

$$x_c(0)=x_{c0}=\text{const};$$

$$x_d(t)=Q_d(t)+B_d^Tx_c(t);$$

$$h(t)=R(t)\frac{dx(t)}{dt}+S(t)x^2(t);$$

$$P(t)=\left(A_d^T\right)^{-1}[a_mP_m(t)-(h_d(t)+H_d(t))],$$

где

$$G_c(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_c,\;\; G_d(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_d,$$

$$G_{cd}(t)=0,\;\; G_H(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}BH(t),$$

$$G_{rd}(t)=\left[B_cR_c(t)+B_dR_d(t)B_d^T\right]^{-1}B_dR_d(t)A_d^{-1},\;\; G_{dd}(t)=0,\;\; Q_d(t)=A_d^{-1}Q(t).$$

Относительно хордовых расходов имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений.

В первом случае это будет математическая модель *нестационарного потокораспределения с линейным трением*, во втором – *нестационарного потокораспределения с нелинейным трением*. Понятно, что каждая из них имеет свою область применения для изучения реальных процессов, происходящих в трубопроводных системах транспорта массы и энергии.

Остановимся еще на одной записи приведенных выше моделей. Предположим, что время изменяется дискретно, что естественно для процесса наблюдения за системой, так как датчики, фиксирующие параметры состояния системы, распределяются дискретно по участкам и отсчеты по ним осуществляются через равные промежутки времени, т. е. $\Delta t=t_{l+1}-t_l$. Тогда от производных, содержащихся в моделях, можно перейти к конечным приращениям, тем самым записать дискретные модели для каждого фиксированного момента времени t_{l+1}. Например:

общая модель дискретного нестационарного потокораспределения

$$x_c(t_{l+1}) = x_c(t_l) - \Delta t G_c(t_l)[x_c(t_l)]^T S_c(t_l) x_c(t_l) -$$

$$-\Delta t G_d(t_l)\left[Q_d(t_{l+1}) + \Delta t B_d^T x_c(t_l)\right]^T S_d(t_l)\left[Q_d(t_{l+1}) + B_d^T x_c(t_l)\right]^T -$$

$$-\Delta t G_{cd}(t_l) x_c(t_l) + \Delta t G_H(t_l) - G_{rd}(t_l)[Q(t_{l+1}) - Q(t_l)] - \Delta t G_{dd}(t) Q_d(t_{l+1}),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t_{l+1}) = Q_d(t_{l+1}) + B_d^T x_c(t_{l+1});$$

$$h(t_{l+1}) = R(t_{l+1})\Delta t[x(t_{l+1}) - x(t_l)] + S(t_{l+1}) x^2(t_{l+1}) + C(t_{l+1}) x(t_{l+1});$$

$$P(t_{l+1}) = \left(A_d^T\right)^{-1}[a_m P_m(t_{l+1}) - (h_d(t_{l+1}) + H_d(t_{l+1}))],$$

где

$$G_c(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_c,$$

$$G_d(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d,$$

$$G_{cd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1}\left[C_c(t_{l+1}) + B_d C_d(t_{l+1}) B_d^T\right],$$

$$G_H(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} BH(t_{l+1}),$$

$$G_{rd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d R_d(t_{l+1}) A_d^{-1},$$

$$G_{dd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d C_d(t_{l+1}) A_d^{-1}, \quad Q_d(t_{l+1}) = A_d^{-1} Q(t_{l+1}).$$

Эту модель по аналогии с общей моделью можно представить как дискретную модель с линейным трением

$$x_c(t_{l+1}) = x_c(t_l) - \Delta t G_d(t_l) Q_d(t_{l+1}) -$$

$$-\Delta t G_{cd}(t_l) x_c(t_l) + \Delta t G_H(t_l) - G_{rd}(t_l)[Q(t_{l+1}) - Q(t_l)] - \Delta t G_{dd}(t) Q_d(t_{l+1}),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t_{l+1}) = Q_d(t_{l+1}) + B_d^T x_c(t_{l+1});$$

$$h(t_{l+1}) = R(t_{l+1})\Delta t[x(t_{l+1}) - x(t_l)] + C(t_{l+1}) x(t_{l+1});$$

$$P(t_{l+1}) = \left(A_d^T\right)^{-1}[a_m P_m(t_{l+1}) - (h_d(t_{l+1}) + H_d(t_{l+1}))],$$

где

$$G_c(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_c,$$

$$G_d(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d,$$

$$G_{cd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} \left[C_c(t_{l+1}) + B_d C_d(t_{l+1}) B_d^T\right],$$

$$G_H(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} BH(t_{l+1}),$$

$$G_{rd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d R_d(t_{l+1}) A_d^{-1},$$

$$G_{dd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d C_d(t_{l+1}) A_d^{-1}, \quad Q_d(t_{l+1}) = A_d^{-1} Q(t_{l+1}),$$

а также как дискретную модель с нелинейным трением

$$x_c(t_{l+1}) = x_c(t_l) - \Delta t G_c(t_l)[x_c(t_l)]^T S_c(t_l) x_c(t_l) -$$

$$-\Delta t G_d(t_l)\left[Q_d(t_{l+1}) + \Delta t B_d^T x_c(t_l)\right]^T S_d(t_l)\left[Q_d(t_{l+1}) + B_d^T x_c(t_l)\right]^T -$$

$$-\Delta t G_{cd}(t_l) x_c(t_l) + \Delta t G_H(t_l) - G_{rd}(t_l)[Q(t_{l+1}) - Q(t_l)] - \Delta t G_{dd}(t) Q_d(t_{l+1}),$$

$$x_c(0) = x_{c0} = \text{const};$$

$$x_d(t_{l+1}) = Q_d(t_{l+1}) + B_d^T x_c(t_{l+1});$$

$$h(t_{l+1}) = R(t_{l+1})\Delta t[x(t_{l+1}) - x(t_l)] + S(t_{l+1}) x^2(t_{l+1});$$

$$P(t_{l+1}) = \left(A_d^T\right)^{-1}[a_m P_m(t_{l+1}) - (h_d(t_{l+1}) + H_d(t_{l+1}))],$$

где

$$G_c(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_c,$$

$$G_d(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d, \; G_{cd}(t_{l+1}) = 0,$$

$$G_H(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} BH(t_{l+1}),$$

$$G_{rd}(t_{l+1}) = \left[B_c R_c(t_{l+1}) + B_d R_d(t_{l+1}) B_d^T\right]^{-1} B_d R_d(t_{l+1}) A_d^{-1}, \; G_{dd}(t_{l+1}) = 0, \; Q_d(t_{l+1}) = A_d^{-1} Q(t_{l+1}).$$

Опираясь на описание непрерывных и дискретных моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях, можно предложить следующую классификацию задач, имеющую в основе простое суждение: что из множества параметров, входящих в описание, задано и какие параметры необходимо определить? Вообще, задачи могут быть распределены по классам: задачи анализа, задачи синтеза, задачи наблюдения и управления. При этом все задачи могут возникать на различных стадиях действия трубопроводной системы, ее проектирования и эксплуатации, ибо всегда существует требование максимального обеспечения потребностей потребителей при минимальных затратах энергии на транспортировку.

На основе предлагаемых моделей составим полный перечень параметров, изменяющихся во времени и отображающих состояние гидравлической цепи в любой момент времени.

Параметры *источников и потребителей* описываются парой вектор-функций – $Q(t)$ и $P(t)$, первая содержит отрицательные компоненты, относящиеся к источникам, и положительные – к потребителям, вторая имеет только положительные компоненты вследствие законов физики движения сплошной среды.

Размерности этих векторов равны $m - 1$, т. е. количеству узлов цепи без единицы, ибо в силу первого закона Кирхгофа в цепи без потери массы m-й узел является узлом баланса, где $Q_m(t) = \sum_{j=1}^{m-1} Q_j(t)$.

Параметры *ветвей* для общей модели, как в непрерывном, так и дискретном случаях, описываются тройкой вектор-функций – $R(t)$, $S(t)$ и $C(t)$, а в случаях линейной и нелинейной моделей – парой вектор-функций – либо $R(t)$ и $C(t)$, либо $R(t)$ и $S(t)$. Размерности всех векторов равны количеству участков, принадлежащих цепи (n). Значения элементов векторов $S(t)$ и $C(t)$ положительные, вектора $R(t)$ – отрицательные.

Параметры *состояния цепи*: начальное и конечное состояние цепи – два вектора x^0 и x^T размерностью n. Компоненты векторов – вещественные числа; *состояние ветвей* описывается парой вектор-функций $x(t)$ и $h(t)$ размерностью n, компоненты которых вещественные функции времени; *состояние узлов* цепи $P(t)$ – вектор-функция размерностью $m - 1$, так как считается, что изменение давления в одном из узлов всегда известно ($P_m(t)$).

Параметры, характеризующие источники: $P_{uj}(t)$ и $Q_{uj}(t)$ при $u_j = 1, 2, ..., m_u$, где m_u – количество источников в гидравлической цепи. Как правило, источники оснащены измерительной аппаратурой и для них характерны систематические измерения давления и расхода. Для потребителей также необходимы данные по изменениям во времени давления и расхода: $P_{nj}(t)$ и $Q_{nj}(t)$ при $n_j = m_u, m_u + 1, ..., m_n$, где m_n – количество потребителей в гидравлической цепи. Здесь не все так однозначно, как с источниками, в отношении оснащенности измерительной аппаратурой: для крупных потребителей этот вопрос решен положительно, а для огромного жилищного сектора он решается выборочно и низкими темпами. Тем не менее потребители являются основными *внешними возмущающими воздействиями* на режимы гидравлических цепей, а следовательно, только по их изменениям должна отстраиваться регулирующая аппаратура на ветвях цепи, и на основе этих данных могут решаться разнообразные задачи надежности, безопасности и экономии энергетических ресурсов для трубопроводной системы. Исходя из значимости этих параметров, будем считать, что они заданы, так же как и параметры, характеризующие источники. Тем более что они непосредственно отображают качественные и количественные показатели эффективности работы трубопроводной системы, выполняющей основную функцию снабжения потребителей в нормальных и неординарных условиях эксплуатации.

Анализ режимов нестационарного потокораспределения предполагает заданными:

– графики нагрузки потребителей $Q_j(t)$ при $j = 1, 2, ..., m - 1$;

– давления в узлах потребления $P_j(t)$ при $j = 1, 2, ..., m - 1$;

– характеристики ветвей: $r_i(t)$, $s_i(t)$, $c_i(t)$ и $H_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$, в частном случае $r_i(t) = \text{const} = r_i$, $s_i(t) = \text{const} = s_i$, $c_i(t) = \text{const} = c_i$ и $H_i(t) = \text{const} = H_i$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– давление в источнике $P_m(t)$.

Задавая различные характеристики графиков потребления, необходимо определить:

– изменения потокораспределения по ветвям цепи $x_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– потери давления на ветвях цепи $h_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– давления в узлах разветвления $P_{\eta j}(t)$, где ηj не принадлежит множеству потребителей.

При этом характеристики ветвей – известные функции или константы.

Анализ режимов регуляторов предполагает заданными:

– графики нагрузки потребителей $Q_j(t)$ при $j = 1, 2, ..., m - 1$;

– давления в узлах потребления $P_j(t)$ при $j = 1, 2, ..., m - 1$;

– характеристики ветвей: $r_i(t)$, $s_i(t)$, $c_i(t)$ и $H_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$, в частном случае $r_i(t) = \text{const} = r_i$, $s_i(t) = \text{const} = s_i$, $c_i(t) = \text{const} = c_i$ и $H_i(t) = \text{const} = H_i$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– давление в источнике $P_m(t)$.

Задавая различные характеристики регуляторов, как функциональные, так и параметрические, необходимо определить:

– изменения потокораспределения по ветвям цепи $x_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– потери давления на ветвях цепи $h_i(t)$ при $i = 1, 2, ..., n$;

– давления в узлах разветвления $P_{\eta j}(t)$, где ηj не принадлежит множеству потребителей.

Задача анализа распадается на две подзадачи: описание самой системы функционирования и как это описание адаптировано к выполнению функций системы.

Первая подзадача – описание трубопроводной системы для изучения нестационарных режимов – приведена ранее в непрерывной и дискретной постановках для цепей с линейным и нелинейным трением.

Для второй подзадачи необходимо статистическое описание внешних возмущений, к которым относятся $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ – параметры потребителей, а их изменения во времени должны адекватно отображаться на описанной системе функционирования. Эта подзадача не менее сложна, чем первая, и более разнообразна по данным наблюдений и методам их обработки. Например, если $P_j(t)$ при потреблении $Q_j(t)$ j-м потребителем можно интерпретировать как постоянную величину, то $Q_j(t)$ может иметь разнообразные функциональные описания: непериодические воздействия типа ступенчатых функций, периодические функции – суммарное выражение гармонических колебаний, случайные возмущения и т. д.

Особенностью задач анализа является замкнутость основной системы уравнений, т. е. равенство количества уравнений системы в описании числу искомых параметров. Отсюда для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в непрерывной постановке с заданными начальными условиями следует единственность решения. В дискретной постановке на каждом интервале времени имеем равенство количества алгебраических уравнений числу определяемых параметров.

Синтез гидравлических цепей трубопроводной системы можно подразделить на две задачи: *структурную*, когда выбирается геометрическая структура связей потребителей с источниками из множества возможных схем, что напрямую связано с определением элементов матрицы A, т. е. $(m - 1) \times n$ неизвестных; и *параметрическую*, когда выбираются параметры ветвей, например, r_i, s_i и c_i, для известной структуры гидравлической цепи из множества параметров, т. е. $3n$ неизвестных.

Здесь в случае синтеза структуры являются заданными:

– геометрическое место точек расположения источников и потребителей, например, координаты $m_u + m_n$ точек на генплане;

– производительность источников $Q_{uj}(t) = \text{const}$ при $u_j = 1, 2, ..., m_u$ и нагрузки потребителей $Q_{nj}(t) = \text{const}$ при $n_j = m_u + 1, m_u + 2, ..., m_u + m_n$.

При такой скудной информации требуется определить схему потокораспределения, т. е. ненулевые элементы матрицы соединений линейно независимых узлов и ветвей гидравлической цепи. Ясно, что количество элементов матрицы равно $(m - 1) \times n$, и эту задачу можно расщепить на две: первая – отыскание дерева (простые пути, соединяющие все точки источников с потребителями и точки разветвления цепи). Эта структура обеспечивает многие свойства трубопроводной системы: функциональность, минимальную стоимость, наблюдаемость, управляемость и другие, но ее пороком является ненадежность, невозможность организации циркуляционных потоков, полная несостоятельность работы в неординарных условиях. Поэтому возникает вторая задача, связанная с ликвидацией нежелательных свойств. Одной из мер может быть минимальное кольцевание разветвленной структуры.

После решения в полном объеме задачи структурного синтеза гидравлическая цепь может быть представлена в виде графа, определение параметров элементов которого относится к задаче параметрического синтеза гидравлической цепи.

Задача параметрического синтеза, основанная на структуре системы и графиках потребления с учетом режимных параметров, позволяет определять постоянные и переменные характеристики ветвей цепи. К первым могут быть отнесены пропускные способности, ко вторым – регуляторы, их функции и параметры.

В задаче параметрического синтеза гидравлической цепи предполагаются известными:

– схема движения, т. е. многоконтурный помеченный орграф гидравлической цепи, на основе которого записывается система дифференциальных уравнений относительно контурных расходов;

– графики нагрузок потребителей $Q_j(t)$ и давления в узлах потребления $P_i(t)$;

– функциональная связь между характеристиками ветвей и диаметрами, т. е. $r_i(t) = r_i(D_i(t))$, $s_i(t) = s_i(D_i(t))$ и $c_i(t) = c_i(D_i(t))$; если на ветви нет регуляторов, то эти связи не изменяются во времени и считаются постоянными значениями.

В этом случае требуется определить диаметры всех ветвей цепи D_i при $i = 1, 2, ..., n$. Таким образом, с учетом режимных параметров имеем $n + c$ неизвестных.

Синтез регулируемых устройств может распадаться на две задачи: функциональную и параметрическую. В первой задаче неизвестными являются функции и параметры регулирующих устройств ветвей гидравлической цепи, во второй – для выбранных функций неизвестные параметры этих функций.

Задачи синтеза управляющих воздействий в гидравлической цепи предполагают, что управление связано с реакцией гидравлической цепи на внешние возмущения, которые не могут быть компенсированы системой автоматического регулирования, и требуется определить возможности их компенсации с помощью изменения параметров источников и активных напоров ветвей. Здесь предполагаются неизвестными: активные напоры на ветвях цепи – вектор-функция $H(t)$ – n неизвестных; давление в узлах источников – вектор-функция $P_u(t)$ – m_u неизвестных; расходы в узлах источников – вектор-функция $Q_u(t)$ – m_u неизвестных. Таким образом, общее количество неизвестных в задачах синтеза управляющих воздействий составит $(c + n + 2) \times m_u$, что значительно больше, чем число уравнений системы.

Задачи синтеза имеют особенность недоопределенной системы, когда количество искомых параметров больше количества уравнений, следовательно, в том описании, которое приведено ранее, они имеют множество решений. Это порождает проблему выбора единственного решения, например, за счет формирования некоторого критерия, по определенному значению которого отбирается единственное из множества решений, реализуемое технически.

Перечисленные выше задачи, решаемые на основе математической модели нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи, могут эффективно использоваться в процессах проектирования и эксплуатации трубопроводных систем при условии, что имеется достоверная информация об изменении нагрузок и давлений потребителей во времени. Этот вопрос может быть решен только максимальным оснащением измерительной аппаратурой в первую очередь потребителей, независимо от потребляемой ими мощности. В принятых постановках предполагалось, что к хордам отнесены ветви, соединяющие потребителей, поэтому с них и должна быть получена информация о расходах, потерях давлений и т. п.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАМЫКАЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

2.1. Общая модель нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи

Как указывалось выше, в т. г. ц. для изучения стационарного потокораспределения введены определенные параметры: расход x и потери давления $y = h + H = P_j - P_l + H$ на ветви многоконтурной цепи, которые однозначно определяют ее состояние, а векторы этих параметров – всей цепи в целом.

Следуя определениям и математическим описаниям т. г. ц., будем рассматривать многоконтурные открытые (с источниками и потребителями $Q \neq 0$) и активные (с действующими напорами $H \neq 0$) цепи.

В полученных в гл. 1 выражениях не оговорен вид замыкающих соотношений, определяющих изучаемые процессы в цепях и описывающих физику этих процессов на ветвях. Формы записи этих соотношений могут быть, например, алгебраическими для стационарных процессов, обыкновенными дифференциальными для нестационарных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами или в частных производных для нестационарных процессов в цепях с распределенными параметрами. Таким образом, вывод формы замыкающих соотношений для ветви связан с различными инженерными предположениями и допущениями: о физических свойствах транспортируемой энергии или массы, о геометрических размерах и материалах участка трубопровода, о структуре трубопроводной системы, о скоростях движения энергии или массы по участку трубопровода и о различных сопротивлениях.

При математическом моделировании нестационарного потокораспределения в открытой и активной многоконтурной гидравлической цепи имеем три задачи.

Задача разбиения графа на два составляющих подграфа: подграф разветвленной цепи (дерево) и подграф (хорды), превращающий разветвленную цепь в многоконтурную. Оговорено, что такое разбиение для многоконтурной цепи всегда существует, однако оно не единственно. Если быть точным, то существует счетное множество разбиений, и выделение единственного из них связано с решением оптимизационной задачи отбора единственного решения из заданного множества по некоторому критерию.

Задача аппроксимации нагрузок потребителей. Их закономерности и природа могут быть изучены на базе материала наблюдений во времени. При этом природа изменения потребления во времени может быть либо определенной (детерминированной), либо вероятностной (стохастической). Однако наиболее конструктивный подход состоит в двойственном описании процессов потребления – это детерминированно-стохастический подход, где детерминированному слагаемому соответствует аппроксимация в пространстве реализаций, а стохастическому – аппроксимация в пространстве событий.

Задача вывода замыкающих соотношений является задачей физико-технического характера, так как в формальном описании функциональных связей между потерей напора и расходом аккумулируются возможные технические и физические свойства реального объекта (трубопроводной системы).

Задача разбиения графа гидравлической цепи связана с анализом матрицы A, которая дает $C_n^{m-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}$ множество разбиений, среди них только часть является деревом, для которых $\det(A_d) \neq 0$, в противном случае разбиения содержат контуры. Однако и A_d с определителем, не равным нулю, может быть счетным множеством, что приводит к множеству решений. Поскольку анализируется матрица, элементы которой принадлежат полю вещественных чисел, введем дополнительные ограничения на собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ матрицы A_d, которые должны быть вещественными и различными. Но и эти ограничения не гарантируют единственного решения, следовательно, необходимо сформировать критерий отбора единственного решения из оставшегося множества. Этот критерий может быть сформирован, например, относительно общей энергии гидравлической цепи.

2.2. Уравнения Жуковского и вывод замыкающих соотношений для гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами

Численный анализ нестационарного потокораспределения на базе уравнений Н.Е. Жуковского [32] состоит из трех моментов: во-первых, процесс течения для каждой ветви гидравлической цепи описывается уравнением в частных производных гиперболического типа, для однозначного решения которого необходимо задание начального и граничных условий; во-вторых, аппроксимация этого уравнения на характеристической сетке (пространственно-временной) требует соблюдения определенных условий: точности, сходимости и устойчивости численного решения, а это выражается в жестких ограничениях на дискретные шаги аппроксимации в пространстве и во времени; в-третьих, для гидравлической цепи искомыми являются функции, характеризующие состояние ветвей, и узловые параметры могут быть найдены по искомым функциям, а для уравнений Жуковского картина обратная, что приводит к достаточно парадоксальной ситуации: для определения состояния на ветви необходимо иметь известными концевые значения искомых параметров, а они для многоконтурной цепи являются неизвестными и могут быть определены из системы уравнений первого и второго законов Кирхгофа и замыкающих соотношений. В частном случае разветвленной цепи задача нестационарного потокораспределения на базе уравнений Жуковского может быть решена, так как в этом случае всегда можно проследить на цепи пути от начального до конечного узла, где задаются граничные условия. Этот путь численного анализа можно назвать традиционным. Согласно ему в настоящее время разработаны достаточно точные и надежные методы и алгоритмы численного анализа режимов для трубопроводных систем, оснащенных регуляторами и источниками возмущений, хотя при этом и требуется большая вычислительная работа, связанная с многократным решением систем алгебраических линейных или нелинейных уравнений.

Если возможна полная пространственно-временная аппроксимация системы уравнений Жуковского, то имеет право на осуществление и частичная (только по времени или только по пространству) аппроксимация. То есть возможна аппроксимация по узлам заданной гидравлической цепи – время при этом остается непрерывным. В данном случае модели нестационарного потокораспределения для многоконтурных гидравлических цепей записываются в виде системы функционально-дифференциальных нелинейных уравнений, что дает ряд преимуществ как в описательном, так и в вычислительном плане.

Схемы реализации этого подхода в случаях цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами идентичны и различаются только количеством анализируемых искомых параметров. Так, для цепей с сосредоточенными параметрами искомыми являются расходы и перепады давлений на ветвях и давления в узлах, а для цепей с распределенными параметрами, например, – массовые расходы на ветвях, давления и температуры в узлах цепи.

Основополагающими для исследований по гидравлическим переходным процессам в трубах являются классические работы Н.Е. Жуковского [52, 53]. Изучению гидравлических переходных процессов в трубопроводных линиях, уравнительных резервуарах, системах подачи топлива, кровеносных сосудах и прочее с использованием аналитических, графических и численных, в основном конечно-разностных, методов посвящена обширная отечественная и зарубежная литература [50, 51, 75, 78, 109, 189, 190].

В связи с развитием транспорта капельных жидкостей и взаимным резервированием магистралей возросла актуальность математического моделирования ударных воздействий не только на линейные трубопроводы, но и на сложные многоконтурные сети труб [109].

Для описания гидравлических переходных процессов в таких системах возможны два подхода, базирующихся на предположениях об упругих и неупругих колебаниях. Поскольку любая математическая модель описывает протекающие физические процессы лишь приближенно, возникает необходимость в оценках приближения с учетом в первую очередь вычислительных преимуществ каждой из моделей и физических особенностей изучаемой системы.

Здесь основное внимание обращено на распространение описания динамических процессов в трубе (уравнения Н.Е. Жуковского) на многоконтурные сети труб, их анализ при различных допущениях и возможности применения.

Модель упругих колебаний имеет в своей основе систему двух дифференциальных уравнений [52, 53] для однониточной линии водовода. Дополненная с учетом квадратичного трения и гравитационного напора [109, 189], эта система принимает вид

$$
\begin{gathered}
-a^2\rho_0\frac{dw}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+w\frac{\partial P}{\partial \zeta},\\
-\frac{\partial P}{\partial \zeta}=\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\lambda w^2}{4R_0}\pm gi_0\right),\\
a=\frac{1}{\sqrt{\rho_0/K+2\rho_0R/(\delta E)}}.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь и далее P, w, ρ – давление, скорость и плотность потока жидкости в трубе соответственно; t, ζ – временная и геометрическая координаты; a – скорость звука в рассматриваемой среде; ρ_0 – плотность жидкости при нормальных условиях;

λ – коэффициент гидравлического трения; R – радиус трубы; g – ускорение свободного падения; i_0 – уклон трубопровода; K, E – модули упругости жидкости и материала трубы соответственно; δ – толщина стенки трубы.

Сущность этой модели заключается в исходных предположениях об эластичности стенок трубы и сжимаемости капельной жидкости в процессе распространения звука. Ее приближенный характер обнаруживается в противоречии между указанными предпосылками и выводом уравнений, в которых принято $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, что позволило получить систему линейных уравнений [52, 53].

Модель неупругих колебаний исходит из абсолютной несжимаемости лишенной звукопроводных свойств капельной жидкости, а также абсолютной жесткости труб. Здесь имеем

$$-\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda w^2}{4R_0} \pm g i_0 \right). \tag{2.2}$$

В этой модели предполагается, что возмущения, наложенные на трубопроводную систему, вызывают гармонические колебания потоков на множестве участков сети и соответственно колебания давлений в узлах, что связано с открытыми капиллярами пренебрежимо малой емкости.

Принципиальным преимуществом модели неупругих колебаний является возможность описания гидравлических переходных процессов в многоконтурных трубопроводных цепях с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, это позволяет наиболее просто оценивать ударные воздействия, а также демпфирующие свойства подобных систем с учетом трения.

При математическом моделировании многоконтурных трубопроводных сетей возникает вопрос об условиях эквивалентности систем (2.1) и (2.2) и о сравнительной эффективности соответствующих вычислительных процедур.

Проанализируем вывод системы (2.1), соблюдая определенную строгость в отношении сжимаемости и деформируемости.

Из законов сохранения следует:

а) уравнение неразрывности потока

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{2\rho}{R_0}\frac{dR}{dt};$$

б) уравнение движения

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\lambda \rho}{4R} w^2 \pm g i_0 \rho;$$

в) уравнение состояния для изотермического процесса

$$P = P_0 + K\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right);$$

г) уравнение деформации стенок трубы

$$R = R_0 + \frac{R_0^2}{\delta E}(P - P_0).$$

Здесь P_0 – атмосферное давление; R_0 – предельное значение радиуса трубы; $\dfrac{d\rho}{dt}$, $\dfrac{dw}{dt}$, $\dfrac{dR}{dt}$ – полные производные от плотности, скорости и радиуса по времени соответственно.

Из уравнений в) и г) определим полные производные плотности и текущего радиуса по времени, так как они являются функциями давления, а давление – искомая функция геометрической координаты и времени, и подставим в уравнения а) и б). Тогда получим систему уравнений пульсаций давления и скорости потока:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\delta E(K-P+P_0)}{\left[\delta E+2R_0(K-P+P_0)\right]}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{\partial P}{\partial t}+w\frac{\partial P}{\partial\zeta},\\
-\frac{\partial P}{\partial\zeta}=\frac{K\rho_0}{K-P+P_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{\lambda}{4R_0}w^2\mp gi_0\right).
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

В этой системе уравнений плотность и скорость распространения упругих колебаний являются функциями давлений и определяются следующим образом:

$$
a(P)=\left[\sqrt{\frac{K\rho_0}{(K-P+P_0)^2}+\frac{2K\rho_0R_0}{\delta E(K-P+P_0)}}\right]^{-1},
$$

$$
\rho(P)=\frac{K\rho_0}{K-P+P_0}.
$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (2.3) учитывает сжимаемость капельной жидкости.

Область изменения разности давлений описывается полусегментом $(-\infty, K]$, т. е. от разрежения до уплотнения жидкости, и с увеличением $(P-P_0)$ скорость распространения упругих колебаний $a(P)$ монотонно убывает, а плотность жидкости возрастает. При этом обе функции не имеют экстремальных точек.

Таким образом, модель, представленная системой уравнений (2.3), является общей моделью течения капельной жидкости с учетом сжимаемости, деформируемости трубы, квадратичного трения и гравитации. В предположении несжимаемости она трансформируется в модель неупругих колебаний, описываемую системой уравнений (2.2).

При исследовании нестационарного потокораспределения в сложных многоконтурных трубопроводных системах используем в дальнейшем систему уравнений (2.3), справедливую для любой ветви гидравлической цепи, и ее линейную аппроксимацию по координате протяженности ветви в пределах от 0 до l (l – длина ветви). После очевидных преобразований получим

$$
\begin{gathered}
\frac{dP_{\text{к}}(t)}{dt}+\frac{dP_{\text{н}}(t)}{dt}=-\frac{2\delta E\left\{K+P_0-0.5[P_{\text{к}}(t)+P_{\text{н}}(t)]\right\}}{l\left\{\delta E+2R_0\left(K+P_0-0.5[P_{\text{к}}(t)+P_{\text{н}}(t)]\right)\right\}}[w_{\text{к}}(t)-w_{\text{н}}(t)]-\\
-\frac{1}{l}[w_{\text{к}}(t)+w_{\text{н}}(t)][P_{\text{к}}(t)-P_{\text{н}}(t)],\\
\frac{dw_{\text{к}}(t)}{dt}+\frac{dw_{\text{н}}(t)}{dt}=-\frac{K+P_0-0.5[P_{\text{к}}(t)+P_{\text{н}}(t)]}{0.5Kl\rho_0}[P_{\text{к}}(t)-P_{\text{н}}(t)]-\\
-\left(\frac{1}{l}+\frac{\lambda}{8R_0}\right)w_{\text{к}}^2(t)-\frac{\lambda}{4R_0}w_{\text{к}}(t)w_{\text{н}}(t)-\left(\frac{1}{l}+\frac{\lambda}{8R_0}\right)w_{\text{н}}^2(t)\pm 2gi_0.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Индексы "к" и "н" для давления и скорости обозначают соответственно конец и начало ветви.

Заметим, что в этой системе уравнений концевые значения распределенных параметров $P(t)$ и $w(t)$ связаны между собой на ветви, и нет возможности без упрощений и допущений заменить их сосредоточенными параметрами типа расхода и потери давления. Использование же цепей с распределенными параметрами для описания переходного процесса в многоконтурных цепях неизбежно приводит к системам многочисленных обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых может вызвать определенные трудности.

Рассмотрим по аналогии трансформацию системы уравнений (2.2). Для этого введем сосредоточенные характеристики переходного процесса на ветви цепи:

расход (объемный) $$x(t) = w(t)F,$$

потеря давления $$y(t) = h(t) + H(t) = \frac{P_к(t) - P_н(t)}{g\rho_0}.$$

После аппроксимации уравнений системы (2.2), подстановки характеристик и алгебраических преобразований для каждой i-й ветви получим замыкающее соотношение вида

$$y_i(t) = \frac{l_i}{\pi g R_{0i}^2}\frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{\lambda_i l_i}{4\pi^2 R_{0i}^5}x_i^2(t) \pm g i_{0i} l_i - H_i(t)$$

или, введя обозначения

$$r_i = \frac{l_i}{\pi g R_{0i}^2}, \quad s_i = \frac{\lambda_i l_i}{4\pi^2 g R_{0i}^5}, \quad H_i(t) = \pm g i_{0i} - H_i(t), \tag{2.5}$$

придем к выражению

$$y_i(t) = r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} + s_i(t)x_i^2(t) - H_i(t), \tag{2.6}$$

где $r_i(t)$ – коэффициент волнового сопротивления ветви; $s_i(t)$ – известный при установившемся движении коэффициент гидравлического сопротивления.

Полученное дифференциальное уравнение (2.6) описывает переходный процесс на ветви г. ц. с сосредоточенными параметрами и согласуется с моделью неупругих колебаний (2.1). В силу приближенного характера используемой здесь модели неупругих колебаний уравнение (2.6) обеспечивает верхнюю количественную оценку решения уравнений вида (2.4), не искажая картины упругих колебаний во времени.

Для описания установившихся процессов и расчета потокораспределения в многоконтурных трубопроводных сетях применяются методы теории нелинейных г. ц. [77, 86, 97, 177, 178] – аналогов линейных электрических цепей [80]. Здесь, как и в электротехнике, используются свойства топологической структуры односвязной цепи для разбиения множества ее ветвей на подмножества ветвей дерева и хорд [80], преобразования переменных к контурным и узловым переменным, сокращающие размеры систем алгебраических уравнений и трансформирующие матрицы в симметрическую форму. В целом это значительно упрощает и ускоряет вычислительные процедуры.

При использовании нелинейной г. ц. для исследования в ней переходных процессов особенно ярко обнаруживаются преимущества моделей неупругих колебаний.

2.3. Гидравлические цепи с распределенными параметрами

Базовые уравнения и замыкающие соотношения для ветви г. ц. Рассмотрим движение сжимаемой жидкости по эластичной трубе с квадратичным трением и гравитацией. В качестве базовой снова примем систему уравнений, полученных на основе законов сохранения массы и количества движения:

а) уравнение сплошности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial w}{\partial \zeta}=f(P); \tag{2.7}$$

б) уравнение движения

$$\rho\frac{dw}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial \zeta}-\frac{\lambda\rho}{4R}w^2\pm g\rho i_0; \tag{2.8}$$

в) уравнение состояния, в частном случае

$$\rho=\frac{K\rho_0}{K+P_0-P}; \tag{2.9}$$

г) уравнение деформаций трубы

$$f(P)=\frac{2\rho}{R_0}\frac{dR}{dt},\ \text{где}\ R=R_0+\frac{R_0^2}{\delta E(P-P_0)}; \tag{2.10}$$

д) уравнение теплообмена

$$\frac{d\theta}{dt}+\gamma\theta\frac{\partial P}{\partial t}=\alpha_0\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R}\right), \tag{2.11}$$

где γ, α_0 – некоторые постоянные теплофизические характеристики; ρ – плотность жидкости; R – текущий радиус трубы (R_0 – предельное его значение); λ – коэффициент гидравлического трения; g – ускорение свободного падения; i_0 – гидравлический уклон; K, E – модули упругости жидкости и материала трубы соответственно; δ – толщина стенки трубы.

Система (2.7)–(2.11) является обобщенной системой уравнений Н.Е. Жуковского [52, 53]. В этой системе плотность сплошной среды и радиус трубы являются функциями давления, которое изменяется не только по времени, но и по протяженности ветви цепи.

Используя уравнения (2.9) и (2.11), исключим плотность и $f(P)$ в (2.6), (2.7) и (2.11) и получим три дифференциальных уравнения в частных производных для искомых функций – скорости, давления и температуры потока жидкости в трубе:

$$\begin{gathered}\left(b+\frac{1}{a-P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}+w\frac{\partial P}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial w}{\partial\zeta}=0,\\ \frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{a-P}{c}\frac{\partial P}{\partial\zeta}-\frac{d}{e+P}w^2=\pm g i_0,\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}+w\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}+\frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)+\frac{a-P}{\gamma}\theta\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{a-P}{\alpha}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R}\right),\end{gathered} \tag{2.12}$$

где a, b, c, d, e, γ, α – некоторые постоянные величины.

На основе этих уравнений можно получить замыкающее соотношение для ветви гидравлической цепи с распределенными параметрами. Для этого введем следующие предположения: 1) объемный расход на участке трубы изменяется только во времени $x(t) = w(\zeta, t)\pi R^2(P)$, что соответствует линейной аппроксимации скорости по длине трубы и использованию значений скоростей в начале и конце трубы; 2) падение давления – функция только времени $y(t) = P_н(t) - P_к(t) + H(t)$, связанная с начальным и конечным давлениями и активным напором.

Согласно этим предположениям, подставляя выражения скорости, давления и их производных в уравнения системы (2.12), после несложных преобразований получим замыкающее соотношение вида

$$y(t) = -\frac{1}{f_1(P) + f_2(P)x^2(t)}\frac{dx}{dt} \pm \frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2(t)}x^2(t) \pm$$
$$\pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2(t)}, \tag{2.13}$$

где $f_1(P)$, $f_2(P)$, $f_3(P)$, $f_4(P)$, $f_5(P)$, $f_6(P)$ – некоторые известные функции давления.

Замыкающее соотношение (2.13) связывает падение давления на ветви с распределенным параметром – давлением в виде нелинейной дифференциальной формы в зависимости от расхода на той же ветви. Однако коэффициенты этой формы, в отличие от цепей с сосредоточенными параметрами [97], являются функциями искомого параметра – давления. Необходимо отметить, что в общем случае эти коэффициенты могут зависеть и от второго распределенного параметра – температуры, если уравнение (2.13) для системы (2.7)–(2.11) заменить выражением, связывающим плотность с давлением и температурой.

Из уравнения теплообмена можно получить замыкающее уравнение для температуры (падения температуры) на ветви в виде

$$\Delta\theta = \phi_2(P)\frac{d\theta}{dt} - \phi_1(P) \times$$
$$\times\left[-\frac{1}{f_1(P)+f_2(P)x^2(t)}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{f_3(P)+f_4(P)x^2(t)}x^2(t) \pm \frac{1}{f_5(P)+f_6(P)x^2(t)}\right]x(t)\theta(t), \tag{2.14}$$

где $\phi_1(P)$, $\phi_2(P)$ – известные функции давления.

Для стационарных режимов при условиях $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ замыкающие соотношения принимают вид

$$y = \frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2}x^2 \pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2},$$
$$\Delta\theta = -\phi_1(P)\left[\frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2}x^2 \pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2}\right]x\theta. \tag{2.15}$$

Уравнения (2.13)–(2.15) в дальнейшем используем при описании потокораспределения.

2.4. Общая модель нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи с учетом природы внешних возмущений

Пусть задана некоторая г. ц. с числом ветвей n и числом узлов m. Характеристики ветвей для установившегося режима заданы выпуклыми функциями, связывающими расход (осредненная по сечению скорость) и напор между узлами ветви (эквивалент падения давления):

$$h_i = F(x_i).$$

Необходимо определить частоту и амплитуду пульсаций давления в переходном процессе, вызываемые малыми внешними возмущениями.

Переходные процессы для гидравлической цепи в целом описываются следующей системой уравнений:

$$Ax(t) = Q(t),$$

$$Bh(t) = BH(t), \qquad (2.16)$$

$$h(t) = R(t)\frac{dx}{dt} + x^T(t)S(t)x(t),$$

где $Q(t)$ – вектор расходов в узлах цепи размерностью $(m - 1) \times 1$; $H(t)$ – вектор действующих напоров на ветвях цепи размерностью $n \times 1$; $R(t)$, $S(t)$ – диагональные матрицы размерностью $n \times n$, элементы которых волновые и гидравлические сопротивления соответственно.

Для упрощения математической модели используются свойства многоконтурной цепи и соответствующие алгебраические преобразования. После подстановки блочных матриц в систему (2.16) и определения $x_d(t)$ через $x_c(t)$ как $x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) - A_d^{-1}A_c x_c(t)$, получим систему из c нелинейных дифференциальных уравнений относительно $x_c(t)$ вида

$$R\frac{dx_c(t)}{dt} = G(t) - x_c^T(t)S_c x_c(t) -$$

$$-\left[A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t)\right]^T B_d S_d \left[A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t)\right]. \qquad (2.17)$$

Здесь $R = B_d R_d(t) B_d^T + ER_c(t)$; $G(t) = BH(t) - B_d R_d(t) A_d^{-1}\frac{dQ}{dt}$.

Для определения единственного решения $x_c(t)$ необходимо задать начальные условия в некоторый фиксированный момент времени, например:

$$x_c(0) = x_{c0}. \qquad (2.18)$$

Тогда имеет место задача Коши (2.17), (2.18) для c нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что в моделях с распределенными параметрами число нелинейных дифференциальных уравнений в два раза больше, чем в моделях с сосредоточенными параметрами. При этом преобразование таких систем возможно лишь в пространстве линейно независимых узлов $(m - 1 > c)$.

Таким образом, полная математическая модель исследования гидравлических переходных процессов в сложной многоконтурной сети труб может быть представлена в матричной форме.

Последовательность решения задачи анализа нестационарного потокораспределения в многоконтурной гидравлической цепи заключается в следующем.

1. Определение хордовых расходов (расходов на хордах многоконтурного графа) является решением задачи Коши при заданных параметрах гидравлической цепи:

$$R\frac{dx_c(t)}{dt}=G(t)-x_c^T(t)S_c(t)x_c(t)-\left[A_d^{-1}Q(t)+B_d^T x_c(t)\right]^T B_d S_d(t)\left[A_d^{-1}Q(t)+B_d^T x_c(t)\right],$$

$$x_c(0)=x_{c0}.$$

2. Определение расходов на ветвях дерева как решение линейного уравнения

$$x_d(t)=A_d^{-1}Q(t)-A_d^{-1}A_c x_c(t).$$

3. Определение падения давлений на всех ветвях цепи по формуле

$$h_i(t)=r_i(t)\frac{dx_i}{dt}+s_i(t)x_i^2(t)+H_i(t),\ i=1,\ ...,\ n.$$

4. Определение давлений во всех линейно независимых узлах цепи. Предполагается, что в линейно зависимом узле давление $P_m(t)$ задано:

$$A^T P(t)=-P_m(t)+h(t)+H(t).$$

Приведенное описание является обобщением известных моделей анализа стационарного потокораспределения [86, 97, 178] и легко в них трансформируется при $\frac{dx(t)}{dt}\to 0$. В контексте переходных процессов оно может оказаться полезным при расчете начального потокораспределения в цепи при известных и постоянных значениях действующих напоров, нагрузок потребителей и характеристик цепи.

Последовательная реализация моделей нестационарного потокораспределения использовалась для исследования нормальных и аварийных режимов в тепловых сетях. В то же время возможности применения этих моделей значительно шире.

Описание гидравлической цепи с распределенными параметрами. При математическом описании задачи нестационарного потокораспределения на многоконтурной гидравлической цепи с распределенными параметрами в основном представляет интерес изменение во времени узловых давлений и температур и расходов на ветвях цепи, а это значит, что искомые функции времени определяются для конкретных точек геометрического пространства. При этом нет необходимости описывать каждую ветвь цепи системой трех уравнений в частных производных, достаточно воспользоваться приближенным описанием с выведенными замыкающими соотношениями как для стационарных, так и для нестационарных режимов.

Все известные и неизвестные функции связаны между собой системой уравнений вида

$$Ax(t) = Q(t),$$

$$-A^T P(t) = a_m^T P_m(t) + h(t) + H(t),$$

$$h(t) = -\frac{1}{f_1(P) + f_2(P)x^2(t)}\frac{dx}{dt} \pm \frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2(t)}x^2(t) \pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2(t)},$$

$$-A^T \Theta(t) = a_m^T \Theta_m(t) + \Delta\theta(t), \tag{2.19}$$

$$\Delta\theta(t) = \phi_2(P)\frac{d\theta}{dt} -$$

$$-\phi_1(P)\left[-\frac{1}{f_1(P)+f_2(P)x^2(t)}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{f_3(P)+f_4(P)x^2(t)}x^2(t) \pm \frac{1}{f_5(P)+f_6(P)x^2(t)}\right]x(t)\theta(t)$$

при начальных условиях, либо задаваемых:

$$x(0) = x_0,\ P(0) = P_0,\ \theta(0) = \theta_0,$$

либо определяемых из некоторого стационарного состояния:

$$Ax(0) = Q(0),$$

$$-A^T P(0) = a_m^T P_m(0) + h(0) + H(0),$$

$$h = \frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2}x^2 \pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2},$$

$$-A^T \Theta(0) = a_m^T \Theta_m(0) + \Delta\theta(0), \tag{2.20}$$

$$\Delta\theta(0) = -\phi_1(P)\left[\frac{1}{f_3(P) + f_4(P)x^2}x^2 \pm \frac{1}{f_5(P) + f_6(P)x^2}\right]x\theta.$$

Здесь a_m^T – строка матрицы A^T для линейно зависимого узла цепи.

Таким образом, математические модели как стационарного, так и нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях с распределенными параметрами укладываются в рамки систем нелинейных алгебраических или систем функционально-дифференциальных уравнений, причем коэффициенты в этих уравнениях, отражающие геометрические и физические свойства системы, представляют функции искомых распределенных параметров. Системы (2.19) и (2.20) являются замкнутыми, так как количество уравнений в них совпадает с числом искомых параметров. На базе этих описаний можно ставить различные задачи анализа режимов при разнообразных внешних возмущениях, анализа чувствительности системы к внутренним возмущениям, анализа устойчивости при структурных возмущениях, идентификации систем, анализа и синтеза функций регулирования отдельных элементов системы и системы в целом и многие другие прикладные задачи.

Размерность предлагаемых систем уравнений зависит от сложности рассматриваемых реальных трубопроводных систем и уровня детализации при эквивалентировании этих схем. Высокий уровень детализации приводит к столь большому числу уравнений, что даже с помощью современных вычислительных методов и производительной компьютерной техники их решение затруднительно. Поэтому возникает вопрос о преобразовании описанных выше систем уравнений к системам меньшей размерности с использованием специфических свойств графа (геометрии сети) и, частично, алгебраического описания (уравнения первого и второго законов Кирхгофа).

Число переменных в первых трех группах уравнений (2.19) и (2.20) равно числу этих уравнений. Поэтому их можно решать независимо от группы уравнений теплообмена. После определения расходов и давлений находятся температуры в линейно независимых узлах. Линейность уравнений первого и второго законов Кирхгофа и, как следствие, возможность выражения части параметров линейными функциями позволяют разбить граф цепи на соответствующие подграфы (так, многоконтурный граф может быть представлен в виде графа дерева и графа хорд).

На основании третьей группы уравнений системы (2.19) исключается параметр падения давлений. Остальная часть уравнений связывает расходы и давления:

$$Ax(t) = Q(t),$$

$$-A^T P(t) + \Psi_1(P,x)\frac{dx}{dt} + \Psi_2(P,x)x^2(t) = a_m^T P_m(t) + H(t),$$

где $\Psi_1(P, x)$ и $\Psi_2(P, x)$ – матрицы размерностью $n \times n$, коэффициенты которых составлены из ранее введенных функций. Эта система имеет на n искомых параметров меньше, чем (2.19).

Представляя вектор расходов в блочном виде, приходим к выражению

$$x_d(t) = A_d^{-1}\left[Q(t) - A_c x_c(t)\right],$$

согласно которому, как только будут определены c компонент вектора расходов на хордах, так по линейным соотношениям будет найдена $m - 1$ компонента вектора расходов на ветвях дерева. Подставляя это выражение и его производные по времени во вторую группу уравнений, получим систему n уравнений с таким же количеством неизвестных параметров – давлений в линейно независимых узлах и расходов на хордах вида

$$-A^T P(t) + \Phi_1(P,x_c)\frac{dx_c}{dt} + x_c^T(t)\Phi_2(P,x_c)x_c(t) + \Phi_3(P,x_c)x_c(t) =$$

$$= a_m^T P_m(t) + W(H(t), Q(t)).$$

Таким образом, для гидравлической цепи можно получить систему дифференциальных уравнений в количестве не менее n в случае, если плотность сплошной среды является функцией только давления. Количество уравнений конечной системы возрастает в более общем случае, когда плотность является функцией давления и температуры.

Следовательно, можно формировать математические модели гидравлических цепей с распределенными параметрами для изучения нестационарных режимов при решении задач регулирования сложных многоконтурных трубопроводных систем и управления ими.

Рассмотренные модели упругих и неупругих колебаний, отождествляемые с расширенными уравнениями Жуковского, при определенных физических допущениях приводят к математическим моделям нестационарного и стационарного потокораспределения в многоконтурных гидравлических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Так, непосредственно из системы уравнений Жуковского можно вывести замыкающие соотношения в пространстве переменных – расходов и потерь давлений на ветвях цепи в виде конечных нелинейных дифференциальных форм. Используя их совместно с уравнениями первого закона Кирхгофа (сохранения массы) относительно расходов и второго закона Кирхгофа (сохранения импульса) по контурам цепи относительно потерь давлений на ветвях контура, получим общее описание нестационарного потокораспределения в виде системы функционально-дифференциальных уравнений. Предельный переход этой системы при скорости изменения расхода, стремящейся к нулю, дает систему нелинейных алгебраических уравнений, описывающих стационарное потокораспределение той же цепи.

Дальнейшие преобразования, основанные на линейности недоопределенной системы функциональных уравнений (первый закон Кирхгофа), разработанные только для т. г. ц., позволяют получить для цепей с сосредоточенными параметрами систему нелинейных дифференциальных уравнений с меньшим количеством искомых функций (контурных расходов). Решение задачи Коши для этой системы является основой для более простого вычисления всех параметров цепи, описывающих состояния давлений в узлах, потерь давлений и расходов на ветвях. Этот процесс вычислений расписан поэтапно от начального состояния цепи.

В многоконтурной гидравлической цепи с распределенными параметрами характеристики ветвей являются функциями не только времени, но и геометрической координаты (протяженности ветви). Тем не менее и в этом случае для вывода замыкающих соотношений можно воспользоваться системой уравнений Н.Е. Жуковского, дополненной уравнением сохранения энергии. Из этой расширенной системы уравнений в частных производных на основе аппроксимации на нерегулярной сетке и с введением параметров состояния, определенных в т. г. ц., выводятся два замыкающих соотношения в дифференциальной форме относительно потерь давления и потерь температуры для ветви цепи, применительно к цепи с распределенными параметрами с функциональными коэффициентами при искомых функциях и их производных. Если получены замыкающие соотношения, то, следуя понятийному и описательному аппарату т. г. ц., несложно составить математическую модель нестационарного потокораспределения для цепей с распределенными параметрами. Это и показано по аналогии с описанием и трансформацией системы уравнений для цепей с сосредоточенными параметрами.

В п. 2.1 из описания общей математической модели нестационарного потокораспределения, записанной в терминах т. г. ц., сформулированы три коренные задачи: исследование геометрии многоконтурной г. ц. на основе анализа матрицы соединений линейно независимых узлов и ветвей графа; анализ пространства внешних возмущений, к которым отнесены мощности источников и нагрузки потребителей, и интерпретация их либо в пространстве реализаций (определенность), либо в пространстве случайных событий (вероятность), либо, как предлагается в настоящей работе, смешанный вариант в пространстве реализаций – случайных событий (детерминированно-стохастические системы); анализ записи законов сохранения и синтезирование функциональных замыкающих соотношений основных параметров состояния гидравлической цепи.

Понятно, что решение этих задач требует применения разных математических методов.

Задача разбиения графа на подграфы (дерево и хорды) опирается на всесторонний анализ основной матрицы описания графа, элементами которой являются вещественные числа, а именно числа, принадлежащие ограниченному множеству [−1, 0, +1]. Следовательно, элементы матричного анализа должны отражать непосредственно свойства как заданного многоконтурного графа: связность, цикличность, существование простых путей от источников до потребителей через узлы ветвления, так и графов разбиения. Для разветвленного графа характерны связность всех узлов цепи, т. е. существование простых путей, связывающих узлы источников со всеми узлами потребления. Для хордового графа характерно, что хорды должны превращать разветвленный граф в многоконтурный и каждая хорда должна принадлежать только одному линейно независимому контуру. Все это позволяет надеяться, что плодотворным методом в решении поставленных вопросов является аппарат анализа собственных чисел квадратной матрицы A_d, которых, в принципе, может быть построено из основной матрицы цепи A не более чем C_n^{m-1} (число сочетаний из n по $m-1$).

Отбор решения предусматривает в первую очередь удовлетворение следующих ограничений:

– определитель матрицы A_d не равен нулю ($\det A_d \neq 0$), это равносильно факту, что разветвленный граф не имеет контуров;

– собственные числа "векового" уравнения матрицы A_d

$$[A_d - E\lambda] = 0$$

должны быть вещественными;

– собственные числа должны быть различными.

Этот подход к разбиению многоконтурного графа на подграфы (разветвленный и хордовый) проиллюстрируем на орграфах двух- и трехконтурной гидравлической цепи.

Пусть задан двухконтурный орграф (рис. 2.1). Он содержит: узлов $m = 6$, участков $n = 7$, линейно независимых контуров $c = n - (m - 1) = 2$, матрицу соединений линейно независимых узлов и участков размерностью 5 × 7

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

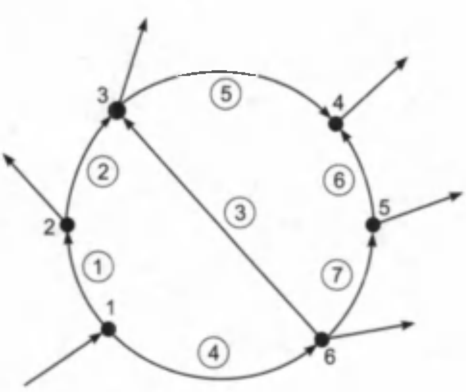


Рис. 2.1. Двухконтурный орграф гидравлической цепи

Необходимо представить эту матрицу в блочном виде:

$$A = [A_d, A_c],$$

где первая матрица (A_d), квадратная порядка $m - 1$, отображает граф разветвленной гидравлической цепи, который должен охватывать все узлы цепи и не иметь контуров, это означает, что ее определитель отличен от нуля; вторая матрица (A_c), прямоугольная размерностью $(m - 1) \times c$, отображает участки (хорды), дополняющие разветвленный граф до многоконтурного.

Так как граф разбивается по участкам цепи, то общее количество разбиений равно числу сочетаний, в данном случае из 7 столбцов по 5, т. е. $N = C_7^5 = \dfrac{7 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 21$, однако при $\det(A_d) \neq 0$ количество разбиений может быть равно только $N(\det(A_d) \neq 0) = \det(A \cdot A^T) = 15$.

Из этих 15 матриц только одна имеет вещественные и разные характеристические числа

$$A_{d\ 2,3,4,5,7} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и соответствующую хордовую матрицу можно записать как

$$A_{c\ 1,6} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

что соответствует графу, представленному на рис. 2.2.

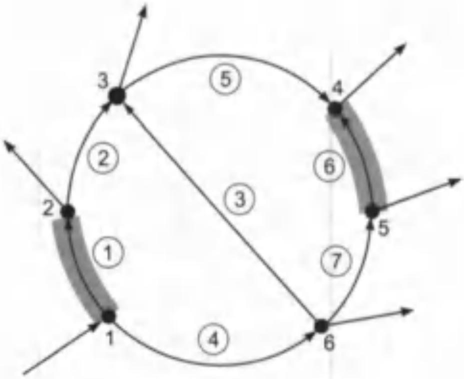


Рис. 2.2. Разбиение графа двухконтурной цепи

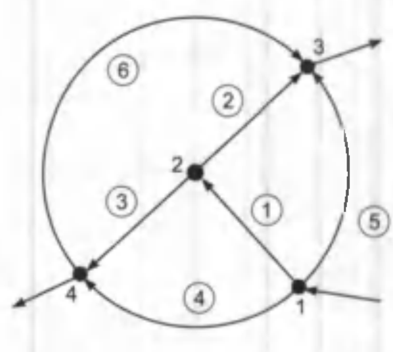


Рис. 2.3. Трехконтурная гидравлическая цепь

Рассмотрим трехконтурную гидравлическую цепь (рис. 2.3). Она содержит: узлов $m = 4$, участков $n = 6$, линейно независимых контуров $c = n - (m - 1) = 3$, матрицу соединений линейно независимых узлов и участков размерностью 3×6

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Общее количество разбиений $N = C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Количество разбиений разветвленного графа $N = \det\left(A \cdot A^T\right) = 16$. Из этих 16 матриц только две подобные матрицы имеют вещественные и различные характеристические числа

$$A_{d\ 2,3,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } A_{d\ 2,3,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

определители и характеристические числа которых являются равными.

Отсюда хордовые матрицы имеют вид

$$A_{c\ 1,5,6} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } A_{c\ 1,4,6} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что соответствует графам, приведенным на рис. 2.4.

Если после использования этих ограничений остается счетное множество возможных разбиений, то для отбора из него единственного разбиения необходимо формировать критерий отбора, а так как исчерпаны геометрические возможности анализа графа, то этот критерий должен формулироваться с учетом физических и технических характеристик изучаемого объекта, отображенных в коэффициентах замыкающих соотношений. Задачу можно считать решенной в случае, когда получим единственно возможный вариант разбиения графа.

Интерпретация графиков мощности источников и нагрузок потребителей, которые изменяются во времени, для решения задач анализа режимов нестационарного потокораспределения и задач синтеза режимов регулирующих устройств

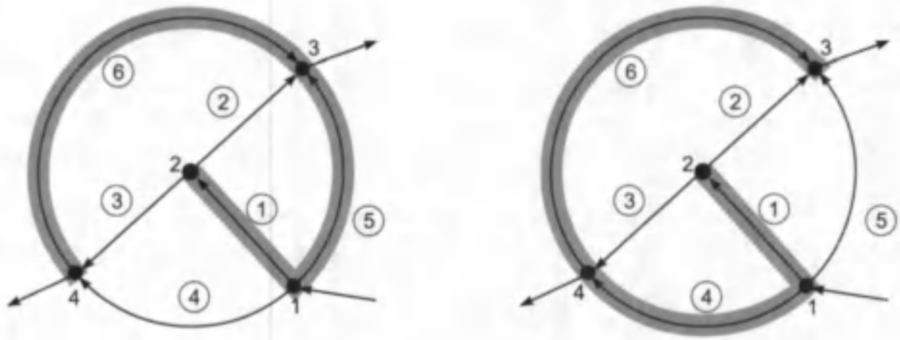


Рис. 2.4. Разбиение графа трехконтурной гидравлической цепи

и управления трубопроводной системой требует адекватного функционального описания. Существующие методы радикально противоположные. Одни декларируют определенность процессов потребления и, как следствие, их формализацию в классе определенных функций с использованием методов равномерной или квадратичной интерполяции. Другие утверждают, что процессы потребления случайны, и предлагают интерпретировать их с вероятностной точки зрения, используя аппарат марковских процессов. Однако марковские процессы являются идеализированной вероятностной моделью, ограниченной требованиями стационарности и эргодичности, что не всегда выполняется для реальных процессов. Не умаляя достоинств каждого из этих подходов и подвергнув глубокому анализу процессы потребления, предполагаем, что в изменении наблюдений можно выявить закономерность, которую будем интерпретировать, например, как изменяющееся во времени математическое ожидание, а разницу между наблюдаемой величиной и определенной интерпретацией отнесем к случайностям. При этом предполагаем, что измерения объективно отражают как выявленную детерминированную закономерность, так и влияние случайных факторов, выраженных в этой разности и описываемых вероятностными функциями распределения. Таким образом, предлагается интерпретировать наблюдения совместно в пространстве реализаций (основная детерминированная функция $Q_D(t)$) и в пространстве событий (стохастическая составляющая $Q_S(p)$ – вероятностная функция от вероятности). Тогда в комплексном пространстве (вещественная ось – время t, а мнимая – обобщенная координата случайных событий, вероятность p) можно записать

$$Q(t) = Q_D(t) + iQ_S(p),$$

и согласно этой записи аппроксимировать определенную и случайную составляющие. Если мера p определяет степень влияния случайной составляющей, то $1 - p$ должна соответствовать степени влияния определенной составляющей, т. е. запись принимает вид

$$Q(t) = (1-p)Q_D(t) + iQ_S(p).$$

Это представление возмущающих воздействий в виде смешанных функциональных зависимостей, естественно, отразится и на записи математической модели нестационарного потокораспределения, так как и решение относительно хордовых расходов лежит в поле комплексных чисел, следовательно, должно определяться обоими слагаемыми:

$$x_c(t) = (1-p)x_{Dc}(t) + ix_{Sc}(p).$$

Общая модель анализа режимов нестационарного потокораспределения в этом смысле может быть представлена двумя системами уравнений относительно неизвестных вектор-функций хордовых расходов: $x_D(t)$ и $x_S(t)$. Так как они имеют одинаковую размерность $c \times 1$ и их связи записываются сложными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, то здесь и далее опускается индекс c:

$$B_d f\left(B_d^T x_D(t)\right) + Ef\left(x_D(t)\right) = BH(t) - B_d f\left(\Omega_D(t)\right);$$

$$B_d f\left(B_d^T x_S(p)\right) + Ef\left(x_S(p)\right) = -B_d f\left(\Omega_S(p)\right)$$

при $x_D(0) = x_{D0}$ и $x_S(0) = 0$.

Далее по линейным соотношениям определяются следующие параметры:

$$x_{Dd}(t) = \Omega_D(t) + B_d^T x_D(t);\;\; x_{Sd}(p) = \Omega_S(p) + B_d^T x_S(p);$$

$$h_D(t) = f\left(x(t)\right);\;\; h_S(p) = f\left(x(p)\right);$$

$$P(t) = A_d^{-1}\left[a_m^T P_m(t) + f\left(x(t)\right) + H(t)\right].$$

Таким образом, если замыкающие соотношения определены, то решение приведенной выше системы уравнений даст полную картину о состоянии гидравлической цепи и изменении траектории в виде некоторых "полос" во временном пространстве.

Такая сложность систем, как нелинейность уравнений (алгебраических или дифференциальных), как показано в п. 2.2, 2.3, зависит от принятых замыкающих соотношений. Сформулированный подход вывода их из уравнений Жуковского на основе законов сохранения массы, импульса движения и энергии дает приближенное описание связей и адаптирован к разнообразным физическим и техническим предположениям. Он никак не противоречит общим уравнениям гидродинамики или механики сплошных сред, но несколько упрощает понимание в силу близости изучаемых объектов систем. Именно поэтому вывод замыкающих соотношений представлен для двух распространенных случаев гидравлических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами. Базовыми уравнениями для первого случая принята система уравнений неупругих колебаний, для второго – система уравнений упругих колебаний. Понятно, что во втором случае увеличивается число искомых переменных и сложность уравнений связей (замыкающих соотношений).

2.5. Основные законы и уравнения движения сплошной среды

Выше замыкающие уравнения гидравлической цепи были выведены из системы уравнений Н.Е. Жуковского, однако это не единственный путь их получения. Поэтому сформулируем фундаментальную систему уравнений движения сплошной среды на базе теорем и законов механики, статистической физики и термодинамики [72, 73, 116, 141].

Под потоком сплошной среды понимается движение таких материальных тел, которые непрерывно заполняют пространство как бы сплошным образом (гипотеза сплошности) и расстояние между элементарными материальными точками которых изменяется в процессе течения (гипотеза текучести). Эти гипотезы легли в основу описания движения сплошной среды, связанного с обобщением методов механики системы материальных точек. Движение сплошной среды (континуума), как правило, рассматривается и математически описывается в евклидовом пространстве и абсолютном времени.

Используя основные теоремы механики [73, 116] и гипотезы сплошности и текучести [141], выведем уравнения динамики сплошной среды.

Математическое описание динамики системы материальных точек базируется на фундаментальных теоремах о количестве движения, моменте количества движения и кинетической энергии [116] (с учетом гипотез сплошности и текучести для сплошной среды они несколько изменяются).

Теорема о количестве движения системы материальных точек: *производная по времени от суммы количеств движения точек системы равна сумме внешних сил.*

С учетом гипотез сплошности и текучести эта формулировка примет вид: *производная по времени от интеграла по объему от количества движения сплошной среды по элементарному объему равна сумме интегралов поверхностных и массовых сил.*

Общая математическая формулировка этой теоремы:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho w d\tau = \int_{\tau}\rho F d\tau + \int_{\Sigma}P_n d\Sigma. \tag{2.21}$$

Здесь и далее t – время; τ – рассматриваемый объем сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ; ρ – плотность сплошной среды; w – вектор скорости движения сплошной среды; F – вектор массовых сил; P_n – тензор напряжений на поверхности Σ.

Производная по времени в левой части уравнения (2.21) зависит не только от подынтегральной функции, но и от интегрируемого объема τ, поэтому ее можно записать в виде [179, 185]

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho w d\tau = \int_{\tau}\left[\frac{d}{dt}(\rho w) + \rho w \operatorname{div} w\right]d\tau.$$

Произведя дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho w d\tau = \int_{\tau}\rho\frac{dw}{dt}d\tau + \int_{\tau}w\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w\right)d\tau. \tag{2.22}$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, преобразуем интеграл по поверхности (второе слагаемое в правой части уравнения (2.21)) в интеграл по объему:

$$\int_{\Sigma}P_n d\Sigma = \int_{\tau}\operatorname{div} P_n d\tau. \tag{2.23}$$

Выражения (2.23) и (2.22) подставим в уравнение (2.21):

$$\int_{\tau}w\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w\right)d\tau = -\int_{\tau}\rho\frac{dw}{dt}d\tau + \int_{\tau}\rho F d\tau + \int_{\tau}\operatorname{div} P_n d\tau.$$

Согласно теореме о движении центра тяжести системы материальных точек [116] и ее обобщению на сплошную среду, правая часть полученного уравнения в случае замкнутой системы (без источников массы) равна нулю, следовательно,

$$\int_{\tau}w\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w\right)d\tau = 0.$$

В силу непрерывности подынтегральной функции и произвольности выбранного объема справедливо равенство

$$w\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w\right) = 0,$$

но $w \neq 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w\right) = 0. \tag{2.24}$$

Уравнение (2.24) есть уравнение неразрывности потока сплошной среды, общая математическая запись закона сохранения массы.

При описании трехмерного движения в декартовых координатах уравнение (2.24) принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=0. \quad (2.25)$$

Теорема о моменте количества движения системы материальных точек: *производная по времени от суммы моментов количества движения точек системы относительно произвольной неподвижной точки равна сумме моментов внешних сил относительно этой точки.*

Для сплошной среды имеем: *производная по времени от интеграла моментов количества движения выбранного элементарного объема сплошной среды относительно неподвижной точки равна сумме интегралов моментов внешних сил относительно этой точки.*

Общая математическая формулировка этой теоремы:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho w r d\tau=\int_\tau \rho F r d\tau+\int_\Sigma P_n r d\Sigma. \quad (2.26)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (2.26). Продифференцировав и перегруппировав члены подынтегрального выражения, получим

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho w r d\tau=\int_\tau\left[\rho w\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}w\right)+\rho w w+\rho\frac{dw}{dt}r\right]d\tau.$$

Поскольку, как показано выше, $\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}w=0$ и $w=0$, то

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho w r d\tau=\int_\tau \rho\frac{dw}{dt}r d\tau. \quad (2.27)$$

Интеграл по поверхности, стоящий в правой части уравнения (2.26), можно привести к интегралу по объему:

$$\int_\Sigma P_n r d\Sigma=\int_\tau \operatorname{div}(P_n r)d\tau. \quad (2.28)$$

Воспользовавшись (2.27) и (2.28), преобразуем уравнение (2.26) к виду

$$\int_\tau\left[\rho\frac{dw}{dt}r-\rho F r-\operatorname{div}(P_n r)\right]d\tau=0.$$

Тогда справедливо уравнение

$$\rho\frac{dw}{dt}r-\rho F r-\operatorname{div}(P_n r)=0. \quad (2.29)$$

Рассмотрим полученное уравнение в декартовой системе координат и преобразуем в нем третье слагаемое на основе теорем векторного анализа [105]:

$$\operatorname{div}(P_n r)=\frac{\partial(P_n r)}{\partial x}x+\frac{\partial(P_n r)}{\partial y}y+\frac{\partial(P_n r)}{\partial z}z=iP_x+jP_y+kP_z+\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)r=$$

$$=\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)r.$$

Подставив полученное выражение $\operatorname{div}(rP_n)$ в уравнение (2.29), получим

$$\left[\rho\frac{dw}{dt}-\rho F-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)\right]r=0,$$

но $r\neq 0$, следовательно, имеем

$$\rho\frac{dw}{dt}-\rho F-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)=0. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) есть уравнение движения сплошной среды в напряжениях, соответствующее обобщенному закону Ньютона [63] и допущениям:

– компоненты тензора напряжений в данной точке сплошной среды полностью определяются компонентами тензора скорости деформации и обратно;

– компоненты тензора напряжений в данной точке сплошной среды являются линейными функциями от компонент тензора скоростей деформации, причем коэффициенты этих функций не зависят от выбора системы координат, т. е. сплошная среда изотропна.

При этих условиях связи между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций имеют вид

$$\begin{aligned}
P_{xx}&=-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_x}{\partial x},\quad P_{xy}=P_{yx}=\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial y}\right),\\
P_{yy}&=-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_y}{\partial y},\quad P_{xz}=P_{zx}=\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial x}\right),\\
P_{zz}&=-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_z}{\partial z},\quad P_{yz}=P_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Подставив эти выражения компонент тензора напряжений в уравнение (2.30), распишем покомпонентно:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{dw_x}{dt}&=\rho X+\frac{\partial}{\partial x}\left(-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\right],\\
\rho\frac{dw_y}{dt}&=\rho Y+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\right],\\
\rho\frac{dw_z}{dt}&=\rho Z+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(-P+\lambda\operatorname{div}w+2\mu\frac{\partial w_z}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь P – давление; λ, μ – коэффициенты Пуассона; X, Y, Z – компоненты массовых сил F.

Система уравнений (2.32) описывает движение сплошной среды в декартовой системе координат и носит название уравнений Навье–Стокса.

Для одномерного течения имеем

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho w\frac{\partial w}{\partial x}=\rho X+\frac{\partial}{\partial x}\left(-P+\lambda\frac{\partial w}{\partial x}+2\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{2.33}$$

Теорема о кинетической энергии системы материальных точек: *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех сил, как внешних, так и внутренних.*

Для сплошной среды имеем: *изменение кинетической и внутренней энергии элементарного объема сплошной среды за конечный промежуток времени равно сумме работ всех сил, как внутренних, так и внешних.*

Эта теорема может быть выражена уравнением

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}(K+U)d\tau=\int_{\Sigma}P_n w d\Sigma+\int_{\Sigma}k\,\mathrm{grad}\,T d\Sigma+\int_{\Sigma}q d\Sigma+\int_{\tau}\rho q_m d\tau+\int_{\tau}\rho F w d\tau. \qquad (2.34)$$

Здесь и далее K – кинетическая энергия элементарного объема сплошной среды; U – полная внутренняя энергия; k – коэффициент теплопроводности сплошной среды; T – температура сплошной среды; q – поверхностные источники энергии; q_m – внутренние источники энергии.

Рассмотрим левую часть уравнения (2.34). Для этого, раскрыв выражение кинетической энергии, представим подынтегральную функцию в виде

$$K+U=\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right).$$

Возьмем производную от интеграла по изменяющемуся объему:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right)d\tau=\int_{\tau}\left\{\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right)\right]+\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right)\mathrm{div}\,w\right\}d\tau=$$

$$=\int_{\tau}\left[-\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right)\mathrm{div}\,w+\rho w\frac{dw}{dt}+\rho\frac{dU}{dt}+\rho\left(\frac{w^2}{2}+U\right)\mathrm{div}\,w\right]d\tau,$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}(K+U)d\tau=\int_{\tau}\rho\left(w\frac{dw}{dt}+\frac{dU}{dt}\right)d\tau. \qquad (2.35)$$

Преобразуем поверхностные интегралы, входящие в правую часть уравнения (2.34), используя формулу Гаусса–Остроградского:

$$\int_{\Sigma}P_n w d\Sigma+\int_{\Sigma}k\,\mathrm{grad}\,T d\Sigma+\int_{\Sigma}q d\Sigma+\int_{\tau}\rho q_m d\tau+\int_{\tau}\rho F w d\tau=$$

$$=\int_{\tau}\left[\mathrm{div}(P_n w)+\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,T)+\mathrm{div}\,q+\rho q_m+\rho F w\right]d\tau.$$

Подставляя полученное выражение и (2.35) в уравнение (2.34), запишем

$$\int_{\tau}\left[\rho w\frac{dw}{dt}+\rho\frac{dU}{dt}-P_n\,\mathrm{div}\,w-w\,\mathrm{div}\,P_n-\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,T)-\mathrm{div}\,q-\rho q_m-\rho F w\right]d\tau=0.$$

При предположении о произвольности объема интегрирования и непрерывности подынтегральной функции имеем

$$\rho w\frac{dw}{dt}-\rho F w-w\,\mathrm{div}\,P_n+\rho\frac{dU}{dt}-P_n\,\mathrm{div}\,w-\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,T)-\mathrm{div}\,q-\rho q_m=0.$$

Первые три слагаемых составляют уравнение движения (2.30) и, следовательно,

$$\rho\frac{dU}{dt}=P_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+P_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+P_z\frac{\partial w_z}{\partial z}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)-\operatorname{div}q-\rho q_m. \qquad (2.36)$$

Уравнение (2.36) является математическим выражением закона сохранения энергии в элементарном объеме движущейся сплошной среды.

При одномерном течении имеем

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+w\frac{\partial U}{\partial x}\right)=P\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial q}{\partial x}+\rho q_m. \qquad (2.37)$$

Таким образом, для математического описания движения сплошной среды получены уравнения: неразрывности (2.24) – закон сохранения массы; количества движения (2.32) – закон сохранения импульса; энергии (2.36) – закон сохранения энергии, т. е. всего пять уравнений, содержащих семь неизвестных функций: $\rho(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t) = [w_x(x, y, z, t),\ w_y(x, y, z, t),\ w_z(x, y, z, t)]$, $P(x, y, z, t)$, $T(x, y, z, t)$ и $U(x, y, z, t)$. Необходимо эту систему уравнений дополнить еще двумя, связывающими искомые функции. Этими уравнениями могут быть уравнения состояния (термическое и калорическое), в которые входят давление, температура, плотность и внутренняя энергия. В общем виде их можно записать:

$$F(\rho, P, T) = 0, \quad f(\rho, T, U) = 0. \qquad (2.38)$$

Теперь система уравнений (2.24), (2.32), (2.36) и (2.38) разрешима относительно искомых функций: давления, температуры, плотности, внутренней энергии и вектора скорости, при известных краевых условиях.

Для вывода дифференциальных уравнений движения сплошной среды использовались основные теоремы механики. Подобный подход описан в монографии Х.А. Рахматулина с соавторами [45], где уравнения движения выводятся на базе принципа Даламбера. Этим, однако, не исчерпываются возможности и способы качественного познания законов движения. Равноправными являются вариационные формулировки, устанавливающие стационарные свойства некоторых величин и позволяющие полностью или частично заменить приведенные выше теоремы.

Основным положением в механике, для применения вариационных методов к изучению движения системы материальных точек, является универсальный принцип наименьшего действия [37], высказанный Пьером-Луи Моро Мопертюи в 1744 г.: *количество Действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в Природе, является наименьшим возможным.*

Однако понятие *действия* вызывало много споров на протяжении столетия, до тех пор, пока не появились функциональные определения его в работах Лагранжа, Гаусса и Гамильтона.

Различные интерпретации принципа наименьшего действия нашли отражение в теории теплоты, оптике, квантовой механике, теории относительности и других разделах физики, но для механики сплошных сред остается некоторая неоднозначность в отношении определения функции *действия*, хотя нет сомнения в применимости этого принципа. В работах В.Я. Хасилева [97, 178] сделана фактически первая попытка определить функцию *действия* для гидравлических цепей по аналогии с электрическими, где для пассивных электрических цепей имеет место теорема Максвелла о минимуме тепловой энергии. Эта первая попытка применения вариационных принципов к изучению движения сплошной среды по сложной многоконтурной гидравлической цепи, к сожалению, не нашла обобщения на более сложные течения (неизотермическое движение сжимаемых сред) ввиду того, что при описании этих движений не очевиден выбор функционального определения понятия действия.

2.6. Замыкающие соотношения для изотермического процесса движения сплошной среды

Общие уравнения механики сплошной среды, приведенные в п. 2.5, позволяют при некоторых конкретизированных предположениях получить замыкающие соотношения для различных типов гидравлических цепей (с сосредоточенными, квазираспределенными и распределенными параметрами). Так как в системах централизованного снабжения протяженность трубопроводов обычно многократно превышает размеры их поперечного сечения, то можно рассматривать эти процессы как одномерные.

Поэтому для дальнейших выкладок достаточно системы уравнений (2.25), (2.33), (2.37) и (2.38). Следующее предположение касается изотермичности процесса течения сплошной среды ($T = \text{const}$, или $dT = 0$) и позволяет исключить из математического рассмотрения уравнения (2.37), (2.38).

Базовыми являются одномерные уравнения сплошности (2.25) и движения (2.33), а также термическое уравнение состояния, связывающее плотность и давление.

Запишем некоторые частные случаи изотермического процесса течения сплошной среды и выведем замыкающие соотношения для них.

1. Рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$), для которой

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial l} = 0.$$

1а. Квазистационарное (установившееся) движение $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0\right)$, для которого справедлива система уравнений

$$\rho \frac{\partial w}{\partial l} = 0,$$

$$\rho w \frac{\partial w}{\partial l} = \rho X + \frac{\partial}{\partial l}\left(-P + \lambda \frac{\partial w}{\partial l} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial l}\right).$$

Так как $\rho = \text{const} \neq 0$, то из первого уравнения системы имеем

$$\frac{\partial w}{\partial l} = 0,$$

а второе уравнение принимает вид

$$0 = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l}.$$

Полученные уравнения разрешимы относительно искомых функций $w(l)$ и $P(l)$:

$$w(l) = \text{const},$$

$$P_1 - P_2 = \rho XL, \text{ или } \frac{P_1 - P_2}{\rho} = XL.$$

Введем обозначения: $x = \left(\pi d^2 w\right)/4$ – объемный расход, $h = \left(P_1 - P_2\right)/\rho$ – потеря давления. Тогда имеем

$$x = \text{const}, h = XL. \tag{2.39}$$

Потеря давления на участке гидравлической цепи не зависит от объемного расхода, а зависит только от гравитации.

1б. Неустановившееся движение несжимаемой сплошной среды. В этом случае имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial l}\right) = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} + \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right].$$

Так как $\rho = \text{const} \neq 0$, то из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial l}\right) = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} + \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right].$$

Из $\rho w = \text{const}$ следует $\frac{\partial w}{\partial l} = 0$ и $w(l, t) = w(t)$, но $w(t) = \frac{4x(t)}{\pi\rho d^2}$. После чего уравнение движения принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi\rho d^2}{4}X - \frac{\pi d^2}{4}\frac{\partial P}{\partial l}.$$

Отсюда

$$h(t) = XL - \frac{4L}{\pi\rho d^2}\frac{dx}{dt}. \tag{2.40}$$

В случае математического описания нестационарных режимов несжимаемой сплошной среды полученное замыкающее соотношение может быть полезно при моделировании движения в поле сил тяжести.

1в. Квазистационарное движение несжимаемой сплошной среды с учетом закона Дарси. В этом случае имеем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$0 = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\rho\lambda}{2d}w^2,$$

где $\frac{\rho\lambda}{2d}w^2 = \frac{\partial}{\partial l}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right] - \rho w\frac{\partial w}{\partial l}$.

При введенных ранее обозначениях получим известное в теории гидравлических цепей замыкающее соотношение:

$$h = H_{\text{гр}} + sx^2, \tag{2.41}$$

где $H_{\text{гр}} = XL$; $s = \dfrac{8\lambda L}{(\pi\rho)^2 d^5}$.

1г. Неустановившееся движение несжимаемой сплошной среды с учетом закона Дарси. В этом случае имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} + sx^2.$$

Введя те же обозначения, что и ранее, получим замыкающее соотношение

$$h(t) = H_{\text{гр}} + r\frac{dx(t)}{dt} + sx^2(t), \tag{2.42}$$

где $r = \dfrac{4L}{\pi\rho d^2}$.

Это соотношение полезно для описания нестационарных режимов в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами.

2. Рассмотрим сжимаемую сплошную среду, для которой уравнение состояния в случае изотермического процесса имеет вид

$$f(\rho, P) = 0,$$

или в явном виде

$$\rho = \varphi(P).$$

Производные от плотности по времени и геометрической координате в этом случае определяются формулами

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial l}.$$

2а. Квазистационарный процесс движения сжимаемой сплошной среды, для которого справедлива одномерная система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \rho X + \frac{\partial}{\partial l}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right] - \rho w\frac{\partial w}{\partial l}.$$

Пусть $(\lambda + 2\mu) = \text{const}$ (вязкость не зависит от плотности и давления), тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \rho X + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} - \rho w\frac{\partial w}{\partial l},$$

но из уравнения неразрывности имеем $\rho w = \text{const}$, $x = \dfrac{\pi\rho d^2}{4} = \text{const}$.

Следовательно,

$$w(l)=\frac{4}{\pi d^2\varphi(P)}x$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial l}=-\frac{4}{\pi d^2\varphi^2(P)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial l}\right)x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial l^2}=\frac{4}{\pi\varphi^3(P)d^2}\left[\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)^2-\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}\right)\varphi(P)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right)^2\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)^2\right]x.$$

Подставив в уравнение движения все полученные выражения для ρ, ρw, $\dfrac{\partial w}{\partial l}$ и $\dfrac{\partial^2 w}{\partial l^2}$, запишем

$$\frac{\partial P}{\partial l}=\varphi(P)+\frac{16x^2}{\left(\pi\varphi(P)d^2\right)^2}-\frac{4(\lambda+2\mu)x}{\pi\varphi^3(P)d^2}\left[\varphi(P)\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}-\left(2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right)^2-\varphi(P)\frac{\partial^2\varphi}{\partial P^2}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)^2\right].$$

Полученное соотношение в дифференциальной форме связывает сосредоточенный параметр – массовый расход x с распределенным параметром – давлением $P(l)$ на участке гидравлической цепи.

Логично разрешить это соотношение относительно массового расхода, так как, разрешая его относительно потери давления, придется интегрировать нелинейное дифференциальное уравнение.

Относительно массового расхода x имеем полное квадратное уравнение, корни которого определяются по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{2.43}$$

где

$$a=\frac{16}{\left(\pi\varphi(P)d^2\right)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial l},$$

$$b=\frac{4(\lambda+2\mu)}{\pi\varphi^3(P)d^2}\left[-\varphi(P)\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}+\left(2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right)^2-\varphi(P)\frac{\partial^2\varphi}{\partial P^2}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)^2\right],$$

$$c=\varphi(P)X-\frac{\partial P}{\partial l}.$$

Таким образом, замыкающее соотношение для сжимаемой сплошной среды в явной форме записывается как нелинейное дифференциальное уравнение, и математическая модель гидравлической цепи с распределенным параметром $P(l)$ может быть представлена системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

2б. Квазистационарное движение сжимаемой сплошной среды с учетом закона Дарси. В случае одномерного течения имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho w)=0,\quad \frac{\partial P}{\partial l}=\rho X-\frac{\rho\lambda}{2d}w^2.$$

Подставив обозначения, введенные ранее, и результат решения уравнения неразрывности, получим

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \varphi(P)X - \frac{8\lambda}{\pi^2\varphi(P)d^5}x^2,$$

отсюда имеем замыкающее соотношение

$$x = \sqrt{\frac{\pi^2\varphi^2(P)d^5}{8\lambda}X - \frac{\pi^2\varphi(P)d^5}{8\lambda}\frac{\partial P}{\partial l}} \tag{2.44}$$

в дифференциальной форме относительно распределенного параметра $P(l)$.

2в. Неустановившееся движение сжимаемой сплошной среды. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\rho = \varphi(P), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} + \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right] - \rho w\frac{\partial w}{\partial l}.$$

Введя обозначения

$$x(t) = \frac{\pi\varphi(P)d^2}{4}, \quad h(t) = P(0,t) - P(L,t)$$

и произведя интегрирование по длине участка, после преобразований получим замыкающее соотношение

$$h(t) = -\frac{4L}{\pi d^2}\frac{dx(t)}{dt} + \left\{\frac{4}{\pi d^2}\int_0^L \frac{1}{\varphi(P)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dl - \left[\frac{4(\lambda+2\mu)}{\pi d^2}\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right]\right\}x(t) - \frac{12}{\pi\varphi(P)d^4}x^2(t) + X\int_0^L \varphi(P)dl.$$

Или, введя обозначения

$$r = -\frac{4L}{\pi d^2}, \quad s_0 = \frac{4}{\pi d^2}\left[\int_0^L \frac{1}{\varphi(P)}\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}dl - \frac{\lambda+2\mu}{\pi d^2}\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial l}\right],$$

$$s = -\frac{16}{\pi^2\varphi^2(P)d^4}, \quad H_{\text{гр}} = X\int_0^L \varphi(P)dl,$$

для нестационарного процесса движения сжимаемой сплошной среды имеем замыкающее соотношение в виде нелинейного дифференциального уравнения с интегральными коэффициентами, зависящими от искомой функции:

$$h(t) = r\frac{dx(t)}{dt} + s_0x(t) + sx^2(t) + H_{\text{гр}}. \tag{2.45}$$

2г. Неустановившееся движение сжимаемой сплошной среды с учетом закона Дарси. В этом случае описание одномерного движения сплошной среды укладывается в следующую систему уравнений:

$$\rho = \varphi(P), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\rho w) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial l} - \frac{\lambda\rho}{2d}w^2.$$

Введем, как и ранее, обозначения

$$x(t)=\frac{\pi\varphi(P)d^2}{4}w(t),\quad h(t)=P(0,t)-P(L,t).$$

Подставив эти выражения в уравнение движения, произведя интегрирование по протяженности участка и сгруппировав слагаемые, получим замыкающее соотношение

$$h(t)=X\int_0^L\varphi(P)dl+x(t)\int_0^L\frac{4}{\pi\varphi(P)d^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dl+\frac{8\lambda}{\pi^2d^5}x^2(t)\int_0^L\frac{dl}{\varphi(P)}-\frac{4L}{\pi d^2}\frac{dx(t)}{dt},$$

или

$$h(t)=r\frac{dx(t)}{dt}+s_0x(t)+sx^2(t)+H_{\text{гр}},\tag{2.46}$$

где $s_0=\frac{4}{\pi d^2}\int_0^L\frac{1}{\varphi(P)}\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}dl$, $s=\frac{8\lambda}{\pi^2d^5}\int_0^L\frac{dl}{\varphi(P)}$.

Таким образом, при изотермическом процессе, когда уравнение энергии не рассматривается, дополнительно к известным замыкающим соотношениям для гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами (в случаях несжимаемой сплошной среды) получены замыкающие соотношения для гидравлических цепей с распределенными параметрами, в которых коэффициенты являются интегральными соотношениями от распределенного параметра – давления на участке.

2.7. Замыкающие соотношения для адиабатического процесса течения сплошной среды

Несколько усложним задачу вывода замыкающих соотношений, рассматривая неизотермический процесс ($T(l,t)\neq\text{const}$), но предполагая отсутствие теплообмена с внешней средой ($\delta Q=0$), т. е. адиабатичность процесса.

При этом предположении полная система уравнений одномерного движения сплошной среды относительно искомых функций: скорости $w(l,t)$, плотности $\rho(l,t)$, давления $P(l,t)$, температуры $T(l,t)$ и внутренней энергии $U(l,t)$, запишется в виде:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial l}(\rho w)=0,$$

– уравнение движения

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho w\frac{\partial w}{\partial l}=\rho X-\frac{\partial P}{\partial l}+\frac{\partial}{\partial l}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial l}\right],$$

– уравнение энергии

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}+\rho w\frac{\partial U}{\partial l}=P\frac{\partial w}{\partial l}+\frac{\partial}{\partial l}\left(k\frac{\partial T}{\partial l}\right)+\rho q_m,$$

– термическое уравнение состояния

$$\rho=\varphi(P,T),$$

– калорическое уравнение состояния

$$U = \Psi(\rho, P, T).$$

Введем обозначения:

массовый расход $\quad x(t) = \dfrac{\pi d^2}{4}\rho w = \dfrac{\pi d^2}{4}\varphi(P,T)w,$

потеря давления $\quad h(t) = P(L, t) - P(0, t),$

и подставим их в систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi(P,T)}{\partial t} + \frac{4}{\pi d^2}\frac{\partial x(t)}{\partial l} = 0.$$

После дифференцирования и интегрирования по длине участка от 0 до L уравнение движения примет вид

$$h(t) = -\frac{4L}{\pi d^2}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{32}{\pi^2 d^4 \varphi(P,T)}x^2(t) -$$

$$-x(t)\int_0^L \frac{\lambda + 2\mu}{\pi d^2 \varphi^2(P,T)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial l}\right)dl + X\int_0^L \varphi(P,T)dl.$$

Уравнение энергии после дифференцирования и интегрирования от 0 до L запишется в форме

$$h(t) = \left[\varphi^2(P,T)\frac{\partial\Psi}{\partial P} + P\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right]^{-1}\left\{\frac{\pi d^2}{4x(t)}\left[\varphi^2(P,T)k\frac{\partial T}{\partial l}\int_0^L \varphi^2(P,T)q_m dl -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^L \varphi^3(P,T)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)dl\right] - T\left[\varphi^2(P,T)\frac{\partial\Psi}{\partial T} + P\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right]\right\}.$$

Полученную систему уравнений в зависимости от режима движения можно привести к различным замыкающим соотношениям.

а) Квазистационарное движение несжимаемой сплошной среды

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \rho = \varphi(T).$$

В этом случае получим следующие замыкающие соотношения:

$$\begin{aligned} h &= s(T)x^2 + s_0 x + H_{\text{гр}}(T), \\ \theta &= r(P,T)x^{-1} + q(P,T), \end{aligned} \tag{2.47}$$

где

$$s(T) = \frac{32}{\pi^2 \varphi(T) d^4}, \quad s_0(T) = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\pi\varphi^2(T)d^2}\frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial l}, \quad H_{\text{гр}} = \int_0^L \varphi(T)dl$$

и

$$r(P,T) = \frac{\pi k d^2}{4(\partial\Psi/\partial P)}\frac{\partial T}{\partial l} + \int_0^L \frac{\pi\varphi(T)d^2}{4(\partial\Psi/\partial P)}q_m dl\ ,$$

$$q(P,T) = -\frac{\varphi^2(T)(\partial\Psi/\partial T) + P(\partial\varphi/\partial T)}{\varphi^2(T)(\partial\Psi/\partial P)}T\ .$$

б) Нестационарный режим движения несжимаемой сплошной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0\,, \ \rho = \varphi(T).$$

В этом случае имеем следующие замыкающие соотношения в ранее введенных обозначениях:

$$h(t) = s_d \frac{dx(t)}{dt} + s(T)x^2(t) + s_0(T)x(t) + H_{\text{гр}}(T),$$
$$\theta(t) = r_d(P,T)x^{-1}(t) + q(P,T), \tag{2.48}$$

где

$$s_d = -\frac{4L}{\pi d^2}\,,\ r_d(P,T) = r(P,T) - \int_0^L \frac{\pi\varphi(T)d^2}{4(\partial\Psi/\partial P)}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right]dl.$$

в) Квазистационарный режим течения сжимаемой сплошной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \rho = \varphi(P, T).$$

Замыкающие соотношения принимают вид

$$h = s(P,T)x^2 + \left[s_0 - \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\pi\varphi^2(P,T)d^2}\frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial l}\right]x + H_{\text{гр}}(P,T), \tag{2.49}$$
$$\theta = r_s(P,T)x^{-1} + q_s(P,T),$$

где

$$r_s(P,T) = \left(\varphi^2(P,T)\frac{\partial\Psi}{\partial P} + P\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right)^{-1}\left[\frac{\pi\varphi^2(P,T)kd^2}{4}\frac{\partial T}{\partial l} + \int_0^L \frac{\pi\varphi^3(P,T)d^2}{4}q_m\,dl\right],$$

$$q_s(P,T) = \frac{\varphi^2(P,T)(\partial\Psi/\partial T) + P(\partial\varphi/\partial T)}{\varphi^2(P,T)(\partial\Psi/\partial P) + P(\partial\varphi/\partial P)}T.$$

г) Нестационарный режим течения сжимаемой сплошной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0, \quad \rho = \varphi(P, T).$$

В этом случае имеем следующие замыкающие соотношения:

$$h(t) = s_d \frac{dx(t)}{dt} + s(P,T)x^2(t) + \left[s_0(P,T) - \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\pi\varphi^2(P,T)d^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial l}\,,$$
$$\theta(t) = r_d'(P,T)x^{-1}(t) + q_d(P,T)\,, \tag{2.50}$$

где

$$r_d'(P,T) = \frac{\pi\varphi^2(P,T)kd^2\dfrac{\partial T}{\partial l} + \displaystyle\int_0^L\left[\pi\varphi^2(P,T)q_m - \pi\varphi^3(P,T)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right]dl}{4\left[\varphi^2(P,T)\dfrac{\partial\Psi}{\partial P} + P\dfrac{\partial\varphi}{\partial P}\right]}.$$

Таким образом, в настоящей главе продемонстрирован подход к выводу разнообразных (по режимам и процессам) замыкающих соотношений на основе уравнений Н.Е. Жуковского и фундаментальных уравнений механики сплошной среды. Рассмотренные предположения (о сжимаемости и несжимаемости; стационарности и нестационарности; вязкости и трении; изотермичности и неизотермичности; адиабатичности и неадиабатичности) приводят к различным замыкающим соотношениям, как для цепей с сосредоточенными параметрами (например, для воды), так и для цепей с распределенными параметрами (например, для нефти и нефтепродуктов или газопроводных систем).

2.8. Гидравлические сопротивления

Замыкающие соотношения, выведенные при различных допущениях и предположениях, в большинстве случаев являются многочленными, а в тех из них, где учитывается закон Дарси, содержится слагаемое с квадратом расхода и коэффициентом гидравлического сопротивления при нем.

Гидравлическое сопротивление [54] является некоторой обобщенной характеристикой участка, в которой связаны: геометрия трубы (внутренний диаметр, шероховатость внутренней поверхности и длина), физические свойства транспортируемой среды (плотность, вязкость и др.), режимы течения (ламинарный, квадратичный, турбулентный). Все это отражено в коэффициенте удельного гидравлического трения λ, изучению которого было уделено большое внимание в экспериментах и в методах обработки измеряемых величин [5, 7, 8, 54, 55, 126, 195]. Как правило, этот коэффициент выражается функцией от переменных: вязкости μ, плотности ρ, скорости течения w, диаметра D и шероховатости k.

Рассмотрим для воды эти параметры и их функциональные связи с коэффициентом гидравлического трения.

Плотность воды ρ зависит от температуры T (табл. 2.1).

Коэффициент динамической вязкости μ также зависит от температуры T (табл. 2.2).

Модуль упругости для воды изменяется в зависимости от давления и температуры (табл. 2.3).

Приведенные в табл. 2.1–2.3 числовые значения физических параметров воды могут быть использованы при разнообразных гидравлических расчетах. Кроме того, они будут полезны при разработке аналитических описаний, т. е. для

Таблица 2.1

Изменение плотности воды в зависимости от температуры

T, °C	ρ, кг/м^3	T, °C	ρ, кг/м^3
0	999.87	50	988.07
4	1000.00	60	983.24
10	999.73	70	977.81
20	998.23	80	971.83
30	995.67	90	965.34
40	992.24	100	958.38

Таблица 2.2

Зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры

T, °C	μ, г/(см·с)	T, °C	μ, г/(см·с)
0	0.017 797 7	20	0.010 082 1
5	0.015 200 0	30	0.007 965 4
10	0.013 096 4	50	0.005 434 4
12	0.012 392 9	100	0.002 683 4
15	0.011 388 4		

Таблица 2.3

Значения модуля упругости для воды (10^{-8} Н/м^2)

Температура, °C	Давление, Н/см^2				
	5	10	20	40	80
0	1.89	1.90	1.92	1.95	1.98
5	1.93	1.95	1.97	2.01	2.07
10	1.95	1.97	2.01	2.05	2.12
15	1.97	2.00	2.03	2.09	2.17
20	1.98	2.02	2.06	2.12	2.22

получения функциональных зависимостей, необходимых при анализе трубопроводных систем (в частности, транспортирующих воду) и построении моделей гидравлической цепи.

Рассмотрим числовые данные табл. 2.1 с точки зрения их аналитического описания в виде степенной функции. Понятно, что степень этой функции можно менять ($n = 0, 1, 2, ...$) и тем самым получать различные выражения вида

$$\rho(T) = a = \text{const},$$

$$\rho(T) = a + bT \text{ (линейная функция)},$$

$$\rho(T) = a + bT + cT^2 \text{ (квадратичная функция)},$$

$$\rho(T) = a + bT + cT^2 + dT^3 \text{ (кубичная функция)}$$

....

Этот ряд можно продолжить по крайней мере до степени $n = 11$, используя численную информацию для определения коэффициентов полиномов.

Ясно, что для нахождения коэффициентов выбранного полинома степени $n < 11$ для всех степеней имеем переопределенные системы линейных уравнений, а следовательно, конечное множество решений, и только в случае $n = 11$ получим замкнутую систему уравнений относительно 12 коэффициентов, которая имеет единственное решение, так как матрица системы линейных уравнений неособенная.

Проблема выбора единственного решения из конечного множества решений может быть сведена к формированию некоторого критерия отбора. Так, для переопределенных систем общеупотребительным является критерий среднеквадратичной ошибки на всем интервале измерений, который в данном случае можно записать в виде

$$F(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{10}) = \sum_{i=1}^{12}\left[\rho(T_i) - \sum_{k=0}^{10}\alpha_k T_i^k\right]^2,$$

и этот критерий должен иметь минимальное значение. Несмотря на то что критерий является конструктивным, он позволяет сформировать единственную замкнутую систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома с использованием необходимых и достаточных условий существования экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 2\sum_{i=1}^{12}\left[\rho(T_i) - \sum_{k=0}^{10}\alpha_k T_i^k\right]\left(-T_i^k\right) = 0, \text{ отсюда } \sum_{i=1}^{12}\sum_{k=0}^{10}\alpha_k T_i^k T_i^l = \sum_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i^l,\ l = 0, 1, ..., 10.$$

Этот критерий можно применять, например, для построения систем уравнений для различных степеней полинома. В рассматриваемом случае имеем

$$\rho(T)=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}\rho(T_i)=a=\text{const} \ \ (\text{рис. } 2.5, a),$$

$$\begin{cases} a\cdot 12+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i \ \ (\text{рис. } 2.5, б), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot 12+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^4=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i^2 \ \ (\text{рис. } 2.6, a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot 12+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2+d\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3+d\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^4=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^4+d\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^5=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i^2, \\ a\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^4+c\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^5+d\sum\limits_{i=1}^{12}T_i^6=\sum\limits_{i=1}^{12}\rho(T_i)T_i^3 \ \ (\text{рис. } 2.6, б). \end{cases}$$

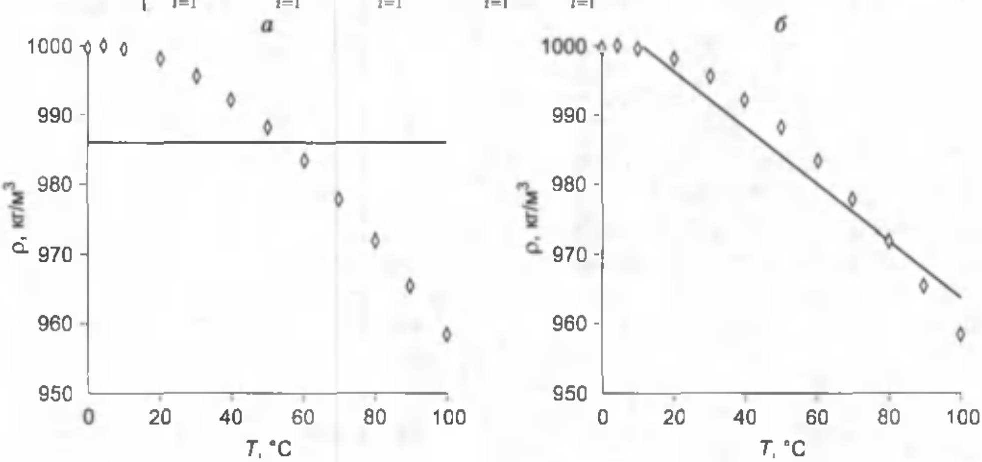


Рис. 2.5. Аппроксимация числовых данных зависимости плотности воды от температуры полиномом нулевой (*а*) и первой (*б*) степени:

точки – числовые данные; линия – $\rho(T) = 985.8675$ (*а*), $\rho(T) = 1004.9176 - 0.412\,638T$ (*б*)

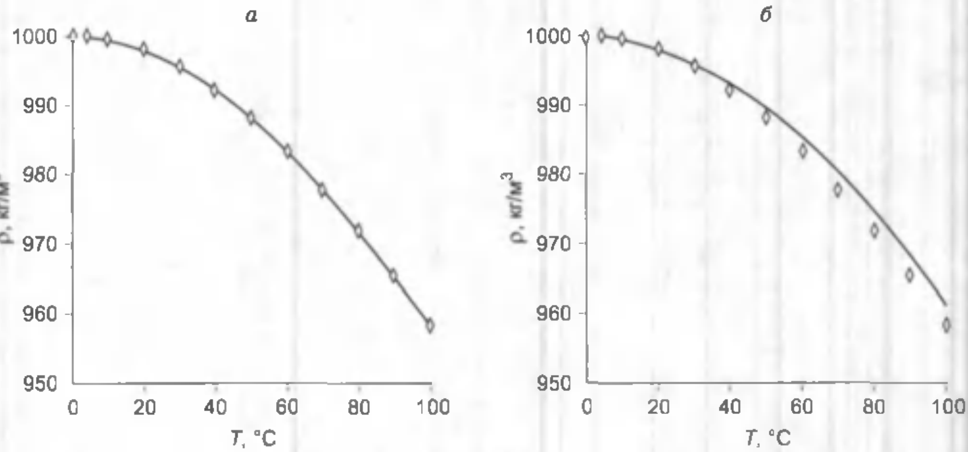


Рис. 2.6. Аппроксимация числовых данных зависимости плотности воды от температуры полиномом второй (*а*) и третьей (*б*) степени:

точки – числовые данные; линия – $\rho(T) = 1000.4642 - 0.066\,304T - 0.003\,359T^2$ (*а*), $\rho(T) = 1000.1294 + 0.105\,516 \cdot 10^{-5}T - 0.005\,431T^2 + 0.000\,013T^3$ (*б*)

Для определения коэффициентов полинома во всех случаях использовался метод наименьших квадратов. Поэтому каждый полином можно оценивать как сумму квадратов разностей табличных данных и значений аналитической функции по всем известным точкам

$$F(K) = \frac{1}{12}\operatorname{sqrt}\sum_{i=1}^{12}\left(\rho(T_i) - \sum_{k=0}^{K}\alpha_k T_i^k\right)^2.$$

Для рассмотренных выше полиномов эти оценки принимают значения:

K	0	1	2	3
$F(K)$	48.251 073	11.177 212	3.938 491	0.363 415

Из таблицы значений можно сделать вывод, что $F(K)$ – монотонно убывающая функция для полиномов степеней 0, 1, 2 и 3. Однако, что будет с ней при степени полинома $K > 3$, сказать трудно, так как необходимо провести все расчеты, т. е. получить полную информацию об изменении $F(K)$.

Тем не менее визуальный контроль посредством построения графиков показывает, что полиномы второй и третьей степени достаточно точно описывают характер изменения плотности воды в зависимости от температуры (полином второй степени дает экстремальную точку, которую не дает полином третьей степени).

По аналогии рассмотрим числовые значения коэффициента динамической вязкости (см. табл. 2.2) с точки зрения их аналитического описания в виде степенной функции. Понятно, что степень этой функции можно менять ($n = 0, 1, 2, \ldots$) и тем самым получать различные выражения вида

$$\mu(T) = a = \text{const},$$

$$\mu(T) = a + bT \text{ (линейная функция)},$$

$$\mu(T) = a + bT + cT^2 \text{ (квадратичная функция)},$$

$$\mu(T) = a + bT + cT^2 + dT^3 \text{ (кубичная функция)}$$

....

Этот ряд можно продолжить по крайней мере до степени $n = 9$, используя численную информацию для определения коэффициентов полиномов.

Подход построения рационального полинома для коэффициента динамической вязкости такой же, как и для плотности воды.

После определения коэффициентов по методу наименьших квадратов имеем

$$\mu(T) = 0.010\,671\,2,$$

$$\mu(T) = 0.014\,384\,2 - 0.000\,138\,2T,$$

$$\mu(T) = 0.016\,773\,0 - 0.000\,353\,9T + 0.214\,887 \cdot 10^{-5}T^2,$$

$$\mu(T) = 0.014\,765\,31 - 0.000\,512\,1T + 0.715\,718 \cdot 10^{-5}T^2 - 0.353\,356 \cdot 10^{-7}T^3.$$

На рис. 2.7 представлены результаты расчетов по полиномам нулевой и первой степени. На рис. 2.8 представлены результаты расчетов по полиномам второй и третьей степени.

Согласно значениям по сформулированным критериям отбора, для коэффициента динамической вязкости получим:

K	0	1	2	3
$F_r(n)$	$-0.111\,111 \cdot 10^{-7}$	$0.344\,444 \cdot 10^{-6}$	0.005 097	$-0.484\,978 \cdot 10^{-6}$
$F(K)$	0.013 399 801 08	0.005 574 644 994	0.015 387 002 64	0.000 321 214 52
$F_I(K)$	−39.311 605 67	2.350 804 33	18.494 609 59	51.210 603 47

Минимум оценки средней разности значений коэффициента динамической вязкости воды на интервале изменения температуры соответствует полиному степени $n = 3$.

По квадратичному критерию минимальное значение из рассмотренных полиномов имеет полином третьей степени, но интегральная оценка на данном интервале имеет наибольшее значение. Интегральный критерий имеет минимум при степени полинома $n = 0$, что также не соответствует характеру изменения коэффициента динамической вязкости.

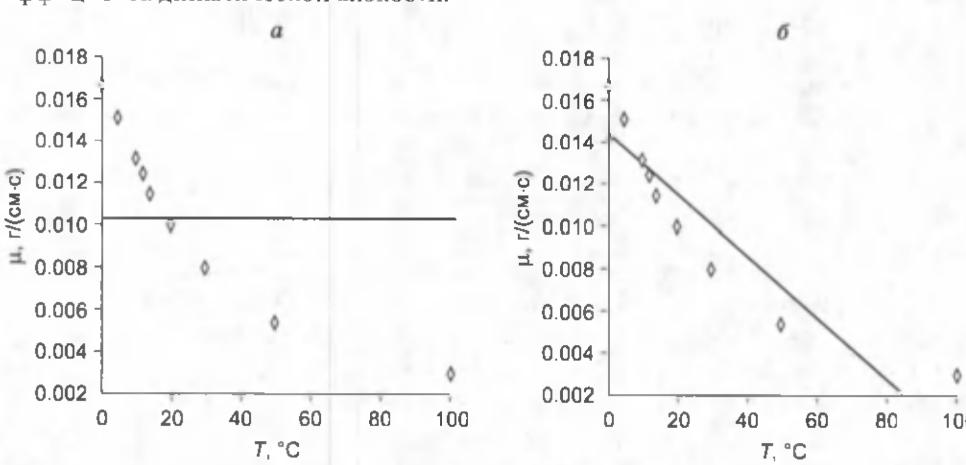


Рис. 2.7. Приближение числовых данных изменения коэффициента динамической вязкости воды от температуры полиномом нулевой ($а$) и первой ($б$) степени:
точки – числовые данные; линия – $\mu(T) = 0.010\,671\,2$ ($а$), $\mu(T) = 0.014\,384\,2 - 0.000\,138\,2T$ ($б$)

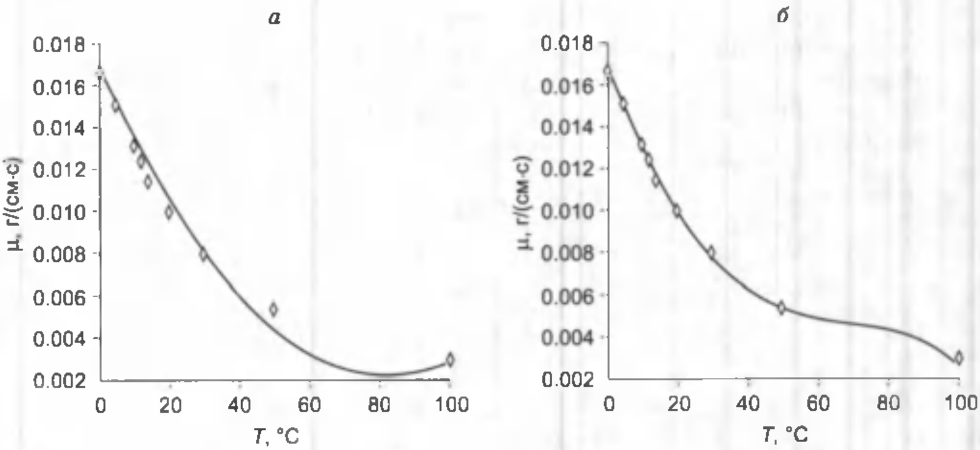


Рис. 2.8. Приближение числовых данных изменения коэффициента динамической вязкости воды от температуры полиномом второй (*а*) и третьей (*б*) степени:
точки – числовые данные; линия – $\mu(T) = 0.016\,773\,0 - 0.000\,353\,9T + 0.214\,887\cdot 10^{-5}T^2$ (*а*), $\mu(T) = 0.014\,765\,31 - 0.000\,512\,1T + 0.715\,718\cdot 10^{-5}T^2 - 0.353\,356\cdot 10^{-7}T^3$ (*б*)

Таким образом, по принятым критериям отбора единственного полинома аппроксимации коэффициента динамической вязкости воды ни один не может быть признан удовлетворительным.

Проведенный анализ, связанный с построением степенных функций аппроксимации значений плотности и коэффициента динамической вязкости воды, показывает, что аппроксимацию можно проводить аналитическими функциями различных степеней, т. е. на множестве полиномов, каждый из которых является некоторым приближением, и кроме ошибок измерений, обусловленных точностью измерительных приборов, добавляются ошибки аппроксимации. Для использования функции аппроксимации на определенном отрезке изменения аргумента можно в качестве критерия отбора полинома брать либо средние оценки, либо среднеквадратичные, но всегда надо помнить, что они могут оказаться несостоятельными за пределами этого интервала.

Принятой формулой кинематической вязкости является гиперболическая функция вида

$$\nu = \frac{0.0178}{1 + 0.0337T + 0.000\,221T^2},$$

что больше соответствует характеру зависимости вязкости от температуры.

Рассмотрим числовые данные (см. табл. 2.3) для модуля упругости воды E в зависимости от температуры T и давления P. Встает задача определения степени полинома от двух независимых переменных: $E = f(T, P)$.

Как и ранее, начнем с полинома нулевого порядка $K = 0$, т. е. имеем

$$E = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} E_{ij},$$

где i – индекс по температуре; j – индекс по давлению.

Подставив данные табл. 2.3, получим $E = 2.0132 \cdot 10^8$. Средняя ошибка для интервалов $T \in [5, 80]$ и $P \in [0, 20]$ составит $\Delta E_{\varsigma} = 0$, среднеквадратичная ошибка $\Delta E_{\sigma} = 0.016\,333\,719\,72$, интегральная оценка $\Delta E_I = 0.218\,648\,878\,1$.

Запишем полином первой степени

$$E = a + bT + cP,$$

где коэффициенты a, b, c определяются решением системы уравнений, полученной методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j\right)(-1) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j\right)(-T_i) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j\right)\left(-P_j\right) = 0. \end{cases}$$

После определения коэффициентов, решив систему линейных уравнений, запишем полином первой степени

$$E(T, P) = 194\,901\,989.3 + 215\,967.741\,9T - 27\,698.929P.$$

Средняя ошибка для интервала $T \in [5, 80]$ и $P \in [0, 20]$ составит $\Delta E_{\varsigma} = 0$, среднеквадратичная ошибка $\Delta E_{\sigma} = 0.011\,676\,298\,31$, интегральная оценка $\Delta E_I = 0.258\,448\,756\,8$.

Запишем полином второй степени

$$E = a + bT + cP + dT^2 + hP^2,$$

где коэффициенты a, b, c, d, h определяются решением системы уравнений, полученной методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j - dT_i^2 - hP_j^2\right)(-1) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j - dT_i^2 - hP_j^2\right)(-T_i) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j - dT_i^2 - hP_j^2\right)\left(-P_j\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j - dT_i^2 - hP_j^2\right)\left(-T_i^2\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}\left(E_{ij} - a - bT_i - cP_j - dT_i^2 - hP_j^2\right)\left(-P_j^2\right) = 0. \end{cases}$$

После определения коэффициентов, решив систему линейных уравнений, запишем полином второй степени

$$E(T, P) = 184\,792\,717.1 + 353\,662.239T + 1\,094\,285.714P - 1\,596.46T^2 - 17\,714.29P^2.$$

Оценки для этого полинома подсчитываются аналогично: средняя ошибка для интервала $T \in [5, 80]$ и $P \in [0, 20]$ составит $\Delta E_s = -0.414 \cdot 10^{-7}$, среднеквадратичная ошибка $\Delta E_\sigma = 0.003\,639\,360\,74$, интегральная оценка $\Delta E_I = 0.212\,397\,816\,9$.

Составим для показателей оценок сводную таблицу:

K	0	1	2
$F_r(n)$	0	0	$-0.414 \cdot 10^{-7}$
$F(K)$	0.016 333 719 72	0.011 676 298 31	0.003 639 360 74
$F_I(K)$	0.218 648 878 1	0.258 448 756 8	0.212 397 816 9

Здесь для полинома второй степени оценки имеют наименьшие значения, но нельзя утверждать, что они минимальные, поскольку непонятно, как они могут измениться в случае полиномов бо́льших степеней.

Итак, при представлении числовых данных в виде аналитических функций, т. е. полиномов различных степеней, можно сделать следующие выводы:

– в результате аппроксимации числовых данных аналитическими функциями, коэффициенты которых определяются по методу наименьших квадратов, имеем конечное множество полиномов разных степеней;

– для выбора из этого множества единственного полинома необходимо сформулировать критерии отбора.

Таким образом, в общем виде задача аппроксимации имеет множество решений и выбор единственного решения зависит от исследователя.

Кроме физических свойств сплошной среды, транспортируемой по трубопроводу, необходимо анализировать режим течения. Для круглых труб с постоянным диаметром в результате анализа опытных данных Рейнольдс установил и сформулировал общее условие существования того или иного режима и перехода от одного режима к другому.

Основными параметрами, определяющими характер режима по Рейнольдсу [132], являются: средняя скорость течения жидкости v, диаметр трубопровода D, плотность сплошной среды ρ, абсолютная вязкость сплошной среды μ. При этом чем больше размеры поперечного сечения $S = \pi D^2/4$ и плотность ρ и чем меньше ее вязкость μ, тем легче при увеличении скорости режим меняется на турбулентный.

Для характеристики режима течения сплошной среды Рейнольдсом был введен безразмерный критерий Re (число Рейнольдса), учитывающий влияние перечисленных выше параметров:

$$\mathrm{Re} = \frac{vD\rho}{\mu} \text{ или } \mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu}.$$

Согласно опытным данным, по этой формуле можно определить оценку режима для воды: если Re < 2300, имеет место ламинарный режим течения; если Re > 2300, имеет место турбулентный режим течения; случай Re = 2300 носит название переходного режима.

В подавляющем большинстве случаев (течения воды в трубах, каналах, реках) наблюдается турбулентный режим. Ламинарный режим встречается значительно реже, он наблюдается при течении вязких жидкостей или в трубах очень малого диаметра (капиллярах).

Если трубы негладкие, то зоны режимов определяются с учетом относительной шероховатости $\varepsilon = 2k/D$, где k – шероховатость внутренней стенки. С учетом этого имеем:

– ламинарный режим, $\mathrm{Re} < 2300$;

– переходный режим, $\mathrm{Re} = 2300$;

– турбулентный режим для "гладких труб", $4000 < \mathrm{Re} < 80\dfrac{D}{2k}$;

– турбулентный режим для шероховатых труб (доквадратичная область), $80\dfrac{D}{2k} < \mathrm{Re} < 1000\dfrac{D}{2k}$;

– турбулентный режим для "вполне шероховатых труб", $\mathrm{Re} > 1000\dfrac{D}{2k}$.

Коэффициент гидравлического сопротивления для различных условий определяется по разным формулам [126].

Формула Шази устанавливает связь потери напора с квадратом скорости при установившемся режиме течения и может быть представлена в принятых ранее обозначениях в виде

$$h = sx^2,$$

где $s = \dfrac{32L}{\pi^2 C^2 D^5}$; L – длина трубопровода; C – коэффициент Шази.

Формула Дарси–Вейсбаха может быть записана аналогично, но коэффициент пропорциональности s выражается по другому:

$$s = \frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5}$$

(g – ускорение свободного падения; λ – коэффициент). Здесь s – коэффициент гидравлического сопротивления, который является обобщенной характеристикой конечного участка трубопровода, а коэффициенты C и λ определяются по формулам, достаточно обоснованным теоретически и подтвержденным экспериментальными данными.

Если исходить из предположения эквивалентности формул Шази и Дарси–Вейсбаха, то получим соотношение коэффициентов C и λ вида

$$C = \sqrt{\frac{4g}{\lambda}}.$$

Далее будут рассмотрены наиболее употребляемые в расчетной практике формулы для определения λ.

Ламинарный режим. При ламинарном режиме в круглых трубах для определения коэффициента λ применяется формула Пуазейля вида

$$\lambda = \frac{16\pi\mu D}{\rho x}.$$

Справедливость формулы Пуазейля подтверждена многочисленными экспериментальными данными для течения различных жидкостей в трубах разных диаметров при ламинарном режиме. Числовые данные зависимости λ от Re приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения коэффициента λ при ламинарном режиме

Re	λ	Re	λ	Re	λ
100	0.640	500	0.128	1300	0.049
150	0.427	600	0.106	1400	0.045
200	0.320	700	0.091	1500	0.043
250	0.256	800	0.080	1600	0.040
300	0.214	900	0.071	1700	0.038
350	0.183	1000	0.064	1800	0.036
400	0.160	1100	0.058	1900	0.034
450	0.142	1200	0.053	2000	0.032

Рассмотрим эту формулу как функцию $\lambda(x)$ и упростим формулу Пуазейля, разложив в ряд Тейлора по степеням x в окрестности некоторой точки $x = x_0$ при очевидном условии, что ρ и μ не зависят от расхода. Тогда получим выражение

$$\lambda(x) = \frac{16\pi\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_0^{-k}x^{k-1}.$$

Ряд знакопеременный и сходящийся при $k \to \infty$ к выражению формулы Пуазейля. Если брать конечное число слагаемых ряда, можно получать с разной точностью аппроксимацию формулы Пуазейля полиномами различных степеней. Критерием отбора в данном случае может быть принята заданная точность при вариации степени полинома K:

$$\lambda(x) = \frac{16\pi\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{K}(-1)^{k-1}x_0^{-k}x^{k-1}.$$

Например:

полином нулевой степени $$\lambda(x) = \frac{16\pi\mu}{\rho}x_0^{-1},$$

полином первой степени $$\lambda(x) = \frac{16\pi\mu}{\rho}\left[x_0^{-1} - x_0^{-2}x\right],$$

полином второй степени $$\lambda(x) = \frac{16\pi\mu}{\rho}\left[x_0^{-1} - x_0^{-2}x + x_0^{-3}x^2\right]$$

и так далее до K.

Турбулентный режим. При турбулентном режиме для коэффициентов λ и C различными авторами в разное время было предложено большое число расчетных формул.

Первоначально эти коэффициенты принимались постоянными (например, по Шази для всех случаев $C = 50$; по Дюпюи $\lambda = 0.03$). В дальнейшем для определения этих коэффициентов был предложен ряд формул, полученных на основе обработки опытных данных, учитывающих зависимость λ и C от поперечного сечения и шероховатости стенок (формулы Куттера, Базена, Маннинга) [5].

Недостатки этих чисто эмпирических формул, заключающиеся в ограниченной возможности их применения – лишь в условиях, сходных с условиями эксперимента, были в значительной мере устранены на основе теории подобия. Таковы, например, формулы Блазиуса, Мизеса, Ланга [195], в которых λ является функцией числа Рейнольдса. Еще более совершенны формулы, предложенные в середине прошлого столетия (Прандтль–Никурадзе, Кольбрук и Уайт, Альтшуль, Шевелев [132, 195]) и основанные на достижениях гидродинамики в области исследования турбулентного режима.

Однако и из этих формул некоторые (например, формулы Прандтля–Никурадзе) имеют ограниченную область применения и подходят лишь для отдельных зон турбулентного режима. В связи с этим возникла задача об установлении единой универсальной формулы, справедливой для всей области турбулентного режима. На возможность получения подобной формулы указывал еще Д.И. Менделеев. В 1883 г. он писал: “Должно думать, что все дело трения в трубах сведется к одному общему закону, в котором при больших скоростях окажут влияние те члены, которые почти исчезают при малых, и обратно”.

Из таких универсальных формул прежде всего следует назвать формулу Кольбрука и Уайта [132, 195], применяемую для всей области турбулентного течения в шероховатых трубах с естественной шероховатостью:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{k_1}{3.7D}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right).$$

Значения абсолютной k и “эквивалентной” k_1 шероховатости приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения шероховатости для труб

Материал и состояние труб	k, k_1, мм
Абсолютная шероховатость	
Чистые цельнотянутые из латуни, меди и свинца	0.01
Новые цельнотянутые стальные	0.05–0.15
Стальные с незначительной коррозией	0.20–0.30
Новые чугунные	0.30
Асбоцементные	0.03–0.80
Старые стальные	0.50–2.00
“Эквивалентная” шероховатость	
Новые стальные цельнотянутые	0.02–0.07
Стальные цельнотянутые эксплуатируемые	0.20–0.50
Стальные цельнотянутые с сильной коррозией	< 1.00
Железные оцинкованные	0.15–0.18
Новые чугунные асфальтированные	0.13
Новые чугунные	0.25
Чугунные эксплуатируемые	1.40

Из приведенной выше формулы как частные случаи легко получаются формулы Прандтля–Никурадзе:

для гладких труб (при $k_1/D = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\left(0.3984\,\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right);$$

для вполне шероховатых труб (при $\mathrm{Re} = \infty$)

$$\lambda = \left(1.74 + 2\lg(1/\varepsilon)\right)^{-2}.$$

Из других универсальных формул приведем следующие:

Н.З. Френкеля [5]

$$\lambda = \left[-2\lg\left(\frac{k_1}{3.7D} + \left(\frac{6.81}{\mathrm{Re}}\right)^{0.9}\right)\right]^{-2},$$

А.Д. Альтшуля (1951 г.) [5, 7]

$$\lambda = \left[1.8\lg\left(\frac{0.1k_1}{D} + \frac{7}{\mathrm{Re}}\right)\right]^{-2},$$

И.А. Исаева [5]

$$\lambda = \left[-1.8\lg\left(\left(\frac{k_1}{3.7D}\right)^{1.11} + \frac{6.8}{\mathrm{Re}}\right)\right]^{-2}.$$

Для определения коэффициента λ может быть рекомендована более простая приближенная формула, предложенная А.Д. Альтшулем [7, 8]:

$$\lambda = 0.1\left(\frac{1.46k_1}{D} + \frac{100}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25}.$$

Формулы Френкеля, Альтшуля, Исаева могут быть представлены как функции расходов, а следовательно, их можно разложить в степенные ряды (как показано для ламинарного течения) с различной степенью точности, что облегчает дальнейший анализ потокораспределения в гидравлических цепях.

При движении реальной жидкости помимо потерь на трение по длине потока могут возникать еще так называемые местные потери напора. Причиной последних, например в трубопроводах, являются различного рода конструктивные вставки (колена, тройники, сужения и расширения трубопровода, задвижки, вентили и т. п.), необходимость установки которых определяется условиями сооружения и эксплуатации трубопровода. Местные сопротивления вызывают изменение скорости течения жидкости по величине (сужение и расширение), направлению (колено) или по величине и направлению одновременно (тройник).

Теоретически определение местных потерь напора представляет некоторые трудности ввиду большой сложности происходящих при этом процессов и может быть осуществлено только для немногих частных случаев, например сужения и расширения трубопровода. Применение к этим случаям теоремы о потере энергии при неупругом ударе твердого тела (так называемая теорема Борда) приводит к уравнению [132, 195]

$$h_{\text{м.п}} = \frac{8}{\pi^2 g}\left(\frac{x_1}{D_1^2} - \frac{x_2}{D_2^2}\right).$$

При практических расчетах местные потери определяются по формуле, выражающей потерю пропорционально квадрату расхода:

$$h_{\text{м.п}} = \zeta \frac{8}{g\pi^2 D^4} x^2.$$

Здесь x – средний расход движения жидкости в сечении потока за местным сопротивлением; D – диаметр трубы за местным сопротивлением; ζ – безразмерный коэффициент местного сопротивления. Величина ζ устанавливается опытным путем и зависит от вида местного сопротивления для определенного конструктивного исполнения.

Если по каким-либо соображениям потерю напора желательно выразить через расход перед местным сопротивлением, необходимо провести пересчет коэффициента местного сопротивления, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4,$$

где ζ_1 и ζ_2 – коэффициенты местных сопротивлений, соответствующие диаметрам D_1 и D_2.

В некоторых случаях удобно определять местные сопротивления по так называемой эквивалентной длине, понимая под последней такую длину прямого участка трубопровода данного диаметра, на которой потеря напора на трение по длине $h_{\text{л.п}}$ эквивалентна потере напора $h_{\text{м.п}}$, вызываемой этим местным сопротивлением. Величина эквивалентной длины $L_\text{э}$ может быть установлена из равенства потери напора по длине (формула Дарси–Вейсбаха)

$$h_{\text{л.п}} = \lambda \frac{8L_\text{э}}{g\pi^2 D^5} x^2$$

и из формулы для местных потерь напора

$$h_{\text{л.п}} = \zeta \frac{8}{g\pi^2 D^4} x^2.$$

Приравнивая правые части этих формул

$$\lambda \frac{8L_\text{э}}{g\pi^2 D^5} x^2 = \zeta \frac{8}{g\pi^2 D^4} x^2,$$

находим

$$L_\text{э} = \frac{\zeta}{\lambda} D.$$

Исследованию местных сопротивлений посвящено большое число работ, в основном экспериментальных [5, 7, 8, 54, 55, 126, 132, 195]. В них установлено, что коэффициент местного сопротивления ζ зависит не только от вида конструктивного исполнения, но и от режима течения жидкости, связанного с числом Рейнольдса.

Как показали работы А.Д. Альтшуля, В.Н. Карева и Н.З. Френкеля, наибольшие изменения коэффициента ζ в зависимости от Re происходят в области ламинарного режима. При малых значениях числа Рейнольдса (Re < 10) этот коэффициент обратно пропорционален Re. При больших значениях числа Рейнольдса,

Таблица 2.6

Значения коэффициента B для некоторых конструктивных исполнений при ламинарном режиме

Вид конструктивного исполнения	B
Шаровой вентиль	48.8
Тройник	32.5
Угловой вентиль	21.7
Колено (прямоугольное)	16.3

Таблица 2.7

Значения коэффициента местного сопротивления в квадратной области турбулентного режима

Вид конструктивного исполнения	C	ζ_k
Колено с углом 90°	130	0.20
Задвижка	400–2500	0.36–2.50
Пробковый кран	150	0.40
Обыкновенный вентиль	3000	4.00
Угловой вентиль	400	0.80
Шаровой клапан	500	1.60

по Ф.П. Товстолесу, можно записать формулу, пригодную для практических расчетов [7, 8]:

$$\zeta = \frac{B}{\mathrm{Re}^{0.285}}.$$

Значения коэффициента B в этой формуле для некоторых частных случаев приведены в табл. 2.6.

А.Д. Альтшуль рекомендует определять коэффициент местного сопротивления по следующей двухчленной формуле, применяемой при ламинарном и турбулентном режимах:

$$\zeta = \frac{C}{\mathrm{Re}} + \zeta_k,$$

где C – коэффициент, зависящий от конструктивного исполнения; ζ_k – коэффициент местного сопротивления в квадратичной области турбулентного режима (табл. 2.7).

Расширение трубопровода. Конструктивное исполнение расширения трубопровода может быть двух видов – постепенное и внезапное (рис. 2.9, *а*, *б*).

Переходные расширяющиеся конусы, или диффузоры. Коэффициент ζ для диффузоров может быть определен по формуле

$$\zeta = \frac{D_2^2 - D_1^2}{D_2^4 \sin(\theta/2)}\left[D_2^2\left(\frac{\lambda}{8} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) + D_1^2\left(\frac{\lambda}{8} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

где θ – угол конусности; λ – коэффициент, учитывающий потери напора по длине.

При внезапном расширении трубопровода имеем формулу для коэффициента сопротивления

$$\zeta = \left(\frac{D_2^2}{D_1^2} - 1\right)^2.$$

Сужение трубопровода. Конструктивное исполнение сужения трубопровода, аналогично расширению, может быть двух видов – постепенное и внезапное (см. рис. 2.9, *в*, *г*).

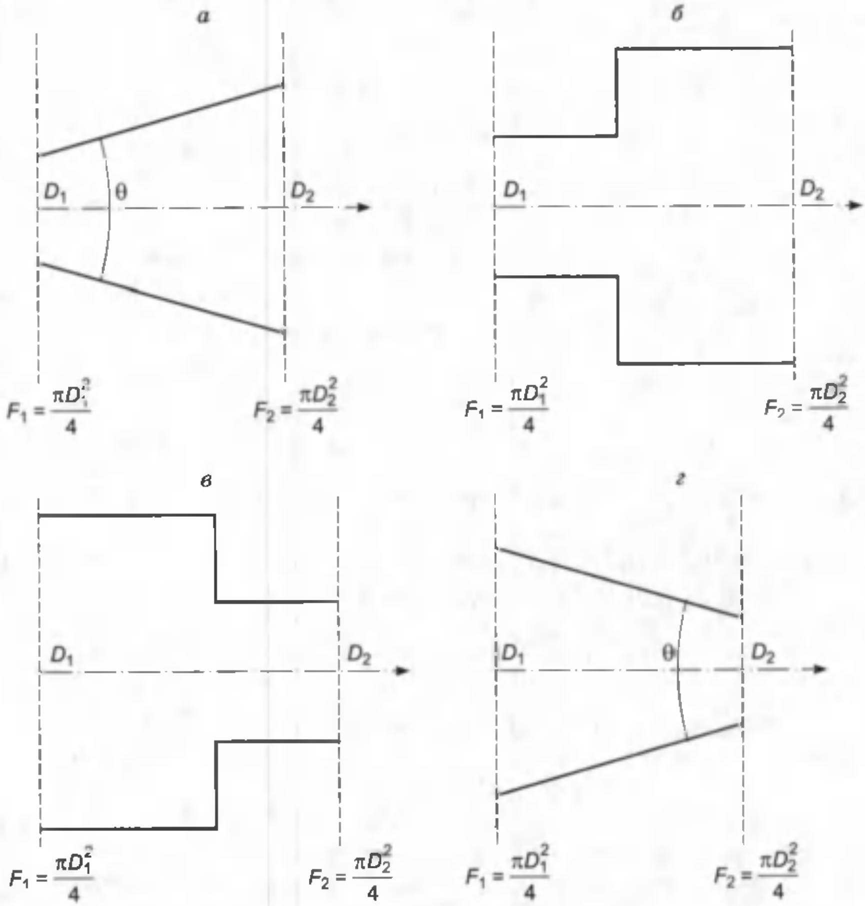


Рис. 2.9. Расширение (*а*, *б*) и сужение (*в*, *г*) трубопровода:
а, *г* – постепенное; *б*, *в* – внезапное

Постепенное сужение – конфузоры. Коэффициент сопротивления определяется по формуле

$$\zeta = \frac{D_1^2 - D_2^2}{D_1^4 \sin(\theta/2)}\left[D_1^2\left(\frac{\lambda}{8} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) + D_2^2\left(\frac{\lambda}{8} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

При внезапном сужении имеем формулу для коэффициента сопротивления

$$\zeta = \left(\frac{D_1^2}{D_2^2} - 1\right)^2.$$

Диафрагма. Диафрагмы, устанавливаемые в трубопроводе (рис. 2.10), могут быть постоянного сечения $d_0 = \text{const}$ (например, для наладки системы или измерения расхода) и переменного сечения $d_0 = \text{var}$ (например, как регулирующий расход элемент).

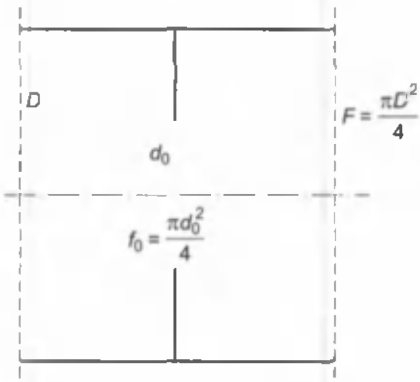


Рис. 2.10. Диафрагма, устанавливаемая в трубопроводе

В случае постоянного диаметра диафрагмы коэффициент сопротивления ζ зависит от отношения площади сечения диафрагмы $f_0 = \pi d_0^2/4$ к площади сечения трубы $F = \pi D^2/4$ и может быть определен по формуле И.Е. Идельчика [132]:

$$\zeta = \left(1 + \frac{0.707}{\sqrt{1 - d_0^2/D^2}}\right)^2 \left(\frac{D^2}{d_0^2} - 1\right)^2.$$

Если диафрагма имеет переменное сечение, следует различать "совершенное" сжатие при $F > 20f_0$ и "несовершенное" сжатие при $F < 20f_0$. Значения коэффициента сопротивления ζ для диафрагмы в трубе переменного сечения при "совершенном" сжатии приведены ниже:

f_0/F	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ζ	232.0	51.0	19.8	9.61	5.26	3.08	1.88	1.17	0.73	0.48

Дроссельный (поворотный) клапан, пробковый кран и задвижка. Эти устройства могут выполнять регулирующие функции в трубопроводных системах (рис. 2.11).

Коэффициенты местных сопротивлений для указанных устройств зависят от угла поворота α для дроссельного клапана и пробкового крана или от степени открытия задвижки h/D. Значения коэффициентов сопротивления для этих устройств представлены в табл. 2.8, 2.9.

Приведенные выше простейшие устройства в основном оказывают влияние на изменение гидравлического сопротивления трубопроводов, оснащенных ими, и поэтому могут быть использованы для регулирования пропускной способности, т. е. изменения расхода на участке гидравлической цепи. Они являются определенной конструктивной базой для дальнейших разработок автоматических регуляторов расхода, что необходимо для учета динамических процессов, вносимых потребителями.

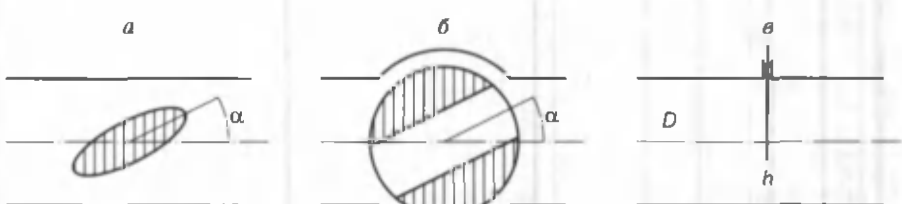


Рис. 2.11. Схемы стандартных устройств для трубопроводных систем:
а – дроссельный клапан, *б* – пробковый кран, *в* – задвижка

Таблица 2.8

Значение коэффициента сопротивления для дроссельного клапана и пробкового крана

Устройство	Угол открытия α, град													
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	82.5
Дроссельный клапан	0.05	0.29	0.75	1.56	3.10	5.47	9.68	17.3	31.2	52.6	106	206	486	∞
Пробковый кран	0.24	0.52	0.90	1.54	2.51	3.91	6.22	10.8	18.7	32.6	58.8	118	256	–

Таблица 2.9

Значения коэффициента сопротивления для задвижки

Диаметр трубы	Степень открытия h/D											
	13/72	7/36	5/24	1/4	1/3	3/8	5/12	11/24	1/2	7/12	2/3	1
Малые трубы ($D < 0.5$ м)	43	35	28	17	7.9	5.5	4.0	2.9	2.0	1.1	0.87	0.5
Большие трубы ($D > 0.5$ м)	41	35	31	23	12	8.6	6.3	4.6	3.3	1.5	0.77	0.05

Для регулирования давлений в узлах г. ц. могут применяться более сложные механизмы – насосы для увеличения напора, а для его снижения – механизмы отбора мощности. Эти технические устройства позволяют оптимально расходовать энергию по доставке.

Глава 3

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3.1. Связь уравнений движения Лагранжа с гидравлическими цепями

Определения, принципы и методы динамики точки и системы материальных точек, заложенные в механике, являются классическими абстракциями движения. Это значит, что они могут претендовать на обобщения и в других физических областях, в том числе в механике сплошных сред, являясь фундаментальной базой для изучения процессов движения на заданном графе.

Предметом механики является решение двух основных задач:

– найти движение, которое получает тело или система тел под действием заданных сил (прямая задача);

– найти силы, способные сообщить телу или системе тел заданное движение (обратная задача, или задача управления).

Таким образом, понятия механики являются вполне общими и достаточно абстрактными, чтобы их конкретизация в рамках той или иной отрасли знаний могла послужить основой для изучения процессов, например, в т. г. ц.

Отправные моменты механики: уравнения связей и реакции связей; множители Лагранжа и их связь с реакциями связей; уравнения движения материальной точки по поверхности; уравнения движения системы материальных точек по поверхностям; уравнения Лагранжа [6, 9, 10, 71, 72, 74, 131, 170]. Они могут служить базой для построения математических моделей динамики гидравлических цепей относительно параметров этих цепей, в том числе для формирования экстремальных моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами. Такие постановки позволяют рассмотреть технологию построения математических моделей не в виде конечной замкнутой системы алгебро-дифференциальных уравнений, а в виде задачи на отыскание условного экстремума.

При переходе к гидравлическим цепям с распределенными параметрами и моделированию нестационарного потокораспределения в них методы механики должны быть расширены за счет принципов, законов и методов термодинамики, так как в запись законов сохранения наряду с механическими параметрами (силы, скорости движения и реакции связей) входят и термодинамические параметры (температура, давление, удельный объем, энтропия и энтальпия). Введение этих параметров в описание значительно усложняет математические модели, поскольку все указанные параметры изменяются не только во времени, но и в геометрическом пространстве, и в то же время они являются искомыми функциями для исследуемого процесса нестационарного потокораспределения.

Особое внимание сконцентрируем на цепях с сосредоточенными параметрами как наиболее простых и достаточно общих объектах, методология изучения которых вполне развита и непротиворечива.

Гидравлические цепи и терминология механики

Уравнения связей. Для гидравлической цепи [97, 177, 178] уравнения первого закона Кирхгофа можно, в частности, интерпретировать как уравнения связей.

Пусть задана система, образованная n точками

$$M_1(x_1), M_2(x_2), ..., M_n(x_n)$$

и подчиненная связям, выражаемым линейными соотношениями между их координатами вида

$$Ax(t) - Q(t) = 0.$$

Число $m - 1$ этих уравнений по количеству линейно независимых узлов заданного графа сети меньше n координат по количеству ветвей графа, и только в случае, когда заданный граф не имеет контуров ($m - 1 = n$), тогда из линейной системы однозначно определяются координаты системы $x_i(t)$ ($i = 1, ..., m - 1$), т. е. расходы на ветвях графа (дерева)

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t).$$

Поэтому $c = n - (m - 1)$ есть не что иное, как число степеней свободы, а для многоконтурной гидравлической цепи – количество линейно независимых контуров.

Эта система является *голономной*, так как всегда можно выразить все координаты в функциях, подходящим образом выбранных из них c координат в силу линейности системы и возможности найти матрицу A_d с определителем, не равным нулю:

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) - A_d^{-1}A_c x_c(t).$$

Введя обозначения $\Omega(t) = A_d^{-1}Q(t)$ и $B_d^T = -A_d^{-1}A_c$, получим

$$x_d(t) = \Omega(t) + B_d^T x_c(t).$$

Так выражается $m - 1$ координата (расходы на ветвях дерева) через c координат (расходы на ветвях–хордах).

Для одноконтурной цепи (рис. 3.1, *а*) уравнения связей запишутся в виде

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_3 + Q_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = +x_1 - x_2 - Q_2 = 0.$$

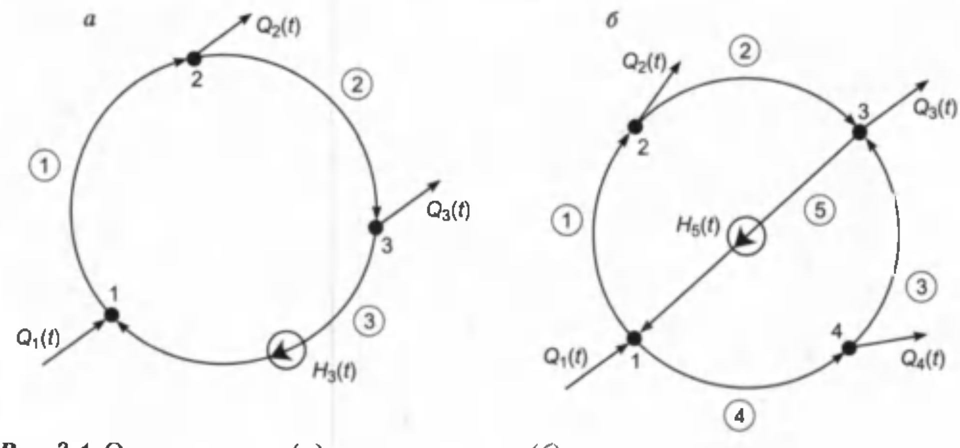


Рис. 3.1. Одноконтурная (*а*) и двухконтурная (*б*) гидравлические цепи

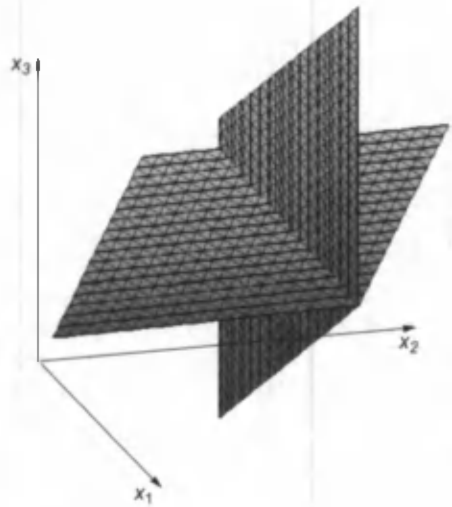


Рис. 3.2. Изображение линейных связей расходов для одноконтурной гидравлической цепи

Геометрическая интерпретация представлена на рис. 3.2.

Для двухконтурной цепи имеем

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -x_1 + x_3 - x_5 + Q_1 = 0,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 - x_2 - Q_2 = 0,$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_2 - x_3 + x_4 - Q_3 = 0.$$

Геометрическая иллюстрация в пятимерном пространстве не представима, но ясно, что и в этом случае имеем совокупность гиперплоскостей.

Пусть система образована n точками

$$N_1(h_1), N_2(h_2), ..., N_n(h_n)$$

и подчинена связям, выраженным линейными соотношениями между координатами, согласно второму закону Кирхгофа [16, 19, 21], вида

$$Bh(t) - BH(t) = 0.$$

Число этих уравнений c по количеству линейно независимых контуров заданного графа сети меньше n координат по количеству ветвей графа.

Как говорилось выше, $m - 1 = n - c$ есть не что иное, как число степеней свободы, и, следовательно, в данной постановке для гидравлической цепи оно совпадает с количеством линейно независимых узлов.

Связи голономные, значит, можно выразить $m - 1$ координату системы, считая их независимыми, через c зависимых координат линейными соотношениями

$$h_c(t) = B_c^{-1}BH(t) - B_c^{-1}B_d h_d(t), \ \det B_c \neq 0.$$

Введя обозначения

$$H^*(t) = B_c^{-1}BH(t), \ \ B^* = B_c^{-1}B_d,$$

получим

$$h_c(t) = H^*(t) + B^* h_d(t).$$

Таким образом, получены c выражений зависимых координат (потери напоров на хордах) через $m - 1$ независимую координату (потери напоров на ветвях дерева).

Для гидравлической цепи эти связи могут быть представлены следующими соотношениями. Для одноконтурной цепи (см. рис. 3.1, *а*)

$$\varphi_1(h_1(t), h_2(t), h_3(t)) = h_1 + h_2 + h_3 - H_3 = 0.$$

Геометрическая интерпретация представлена на рис. 3.3.

Для двухконтурной цепи (см. рис. 3.1, *б*)

$$\varphi_1\left(h_1(t),h_2(t),h_3(t),h_4(t),h_5(t)\right)=h_1+h_2+h_3-H_3=0,$$

$$\varphi_2\left(h_1(t),h_2(t),h_3(t),h_4(t),h_5(t)\right)=h_3+h_4+h_5-H_3=0.$$

Связи могут быть и нелинейными, в частности, согласно первому закону Кирхгофа, примем

$$Ax^2(t)-Q(t)=0.$$

В принятых обозначениях имеем выражение

$$x_d(t)=\sqrt{\Omega(t)-B_d^T x_c^2(t)}.$$

Для гидравлической цепи имеем следующие соотношения. Для одноконтурной цепи (см. рис. 3.1, *а*)

$$f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)=-x_1^2+x_3^2+Q_1=0,$$

$$f_2\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)=+x_1^2-x_2^2-Q_2=0.$$

Геометрическая интерпретация представлена на рис. 3.4.

Для двухконтурной цепи (см. рис. 3.1, *б*)

$$f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=-x_1^2+x_3^2-x_5^2+Q_1=0,$$

$$f_2\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=x_1^2-x_2^2-Q_2=0,$$

$$f_3\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=-x_4^2+x_5^2-Q_4=0.$$

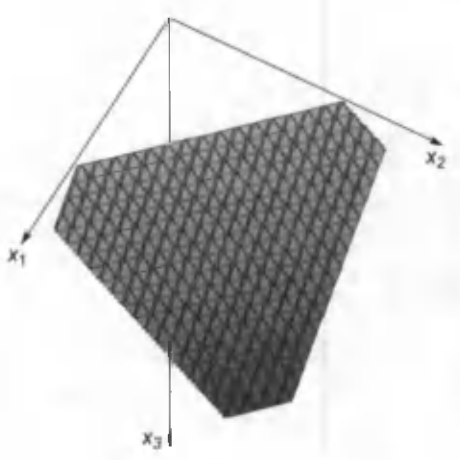


Рис. 3.3. Изображение поверхности связей относительно потерь давлений в одноконтурной гидравлической цепи

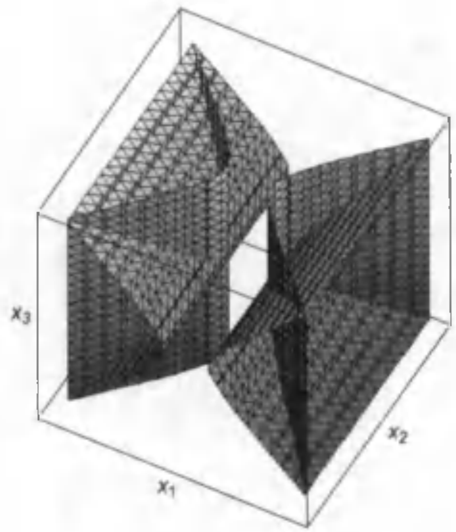


Рис. 3.4. Изображение нелинейных связей расходов для одноконтурной гидравлической цепи

Связи могут выражаться квадратичными формами, в частности, для электрических цепей в случае интерпретации первого закона Кирхгофа относительно баланса мощностей как функций тока.

И наконец, рассмотрим случай, когда любая материальная точка имеет две координаты, что соответствует ветви с двумя параметрами (расходом и потерей напора).

Пусть задана система, образованная n точками

$$M_1\left(x_1(t),h_1(t)\right),\ M_2\left(x_2(t),h_2(t)\right),\ldots,M_n\left(x_n(t),h_n(t)\right),$$

уравнения связей записываются на основе законов Кирхгофа. Первый закон – баланс расходов в узлах гидравлической цепи [16, 26, 65]:

$$Ax(t)-Q(t)=0.$$

Число этих соотношений, как ранее оговаривалось, для гидравлической цепи соответствует количеству линейно независимых узлов m – 1, следовательно, можно выразить такое количество координат вектора $x_d(t)$ через c координат $x_c(t)$.

Второй закон – баланс потерь напора в замкнутом контуре гидравлической цепи:

$$Bh(t)-BH(t)=0.$$

Число этих соотношений (c) соответствует количеству линейно независимых контуров гидравлической цепи, следовательно, можно выразить c компонент вектора $h_c(t)$ через m – 1 компоненту вектора $h_d(t)$:

$$h_c(t)=B_c^{-1}BH(t)-B_c^{-1}B_d h_d(t),\ \det B_c\neq 0.$$

Таким образом, из $2n$ координат из n уравнений связей можно выразить n зависимых координат через n независимых, т. е. число степеней свободы в данном случае равно n.

Для гидравлической цепи имеем: для одноконтурной (см. рис. 3.1, *а*)

$$f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)=-x_1+x_3+Q_1=0,$$

$$f_2\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)=x_1-x_2-Q_2=0,$$

$$f_3\left(h_1(t),h_2(t),h_3(t)\right)=h_1+h_2+h_3-H_3=0,$$

для двухконтурной цепи (см. рис. 3.1, *б*)

$$f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=-x_1+x_3-x_5+Q_1,$$

$$f_2\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=x_1-x_2-Q_2,$$

$$f_3\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t)\right)=-x_4+x_5-Q_4,$$

$$f_4\left(h_1(t),h_2(t),h_3(t),h_4(t),h_5(t)\right)=h_1+h_2+h_3-H_3,$$

$$f_5\left(h_1(t),h_2(t),h_3(t),h_4(t),h_5(t)\right)=h_3+h_4+h_5-H_3.$$

В рассмотренных случаях голономных связей для многоконтурных гидравлических цепей максимальное количество связей не превышает число ветвей заданного графа цепи, а минимальное – не меньше числа линейно независимых контуров, что в итоге определяет количество независимых координат. Количество независимых координат зависит от того, на какой основе формируется система связей: если используется только первый закон Кирхгофа, то независимых координат будет c; если используется только второй закон Кирхгофа, то $m - 1$.

Заканчивая рассмотрение понятия и классификации связей для гидравлических цепей, остановимся на неголономных связях, которые для гидравлических цепей, в частности, могут быть представлены в виде

$$A\frac{dx(t)}{dt} - Q(t) = 0$$

и являются системой линейных дифференциальных уравнений.

Разрешив эту систему относительно независимых переменных функций, получим

$$\frac{dx_d(t)}{dt} = \Omega(t) + B_d^T \frac{dx_c(t)}{dt}.$$

В предположении, что функция $\Omega(t)$ непрерывная и дифференцируемая по t, запишем

$$x_d(t) = \int_0^t \Omega(t)dt + B_c^T x_c(t) + C_d.$$

Таким образом, имеем голономные связи, выраженные определенным алгебраическим соотношением.

На основе сказанного выше многоконтурные гидравлические цепи при моделировании динамических процессов можно рассматривать как динамические системы с голономными связями – в случае, если изучаются процессы нормальных режимов, т. е. не связанные с утечками расходов на ветвях цепи, или аварийными ситуациями, когда связи могут трансформироваться в неголономные, вида дифференциальных или интегральных уравнений, не приводимых к алгебраической форме.

Заметим, что для гидравлических цепей из уравнений связей следует, что число независимых параметров может быть либо c в случае, если искомым параметром является расход на ветви, либо $m - 1$, если искомыми параметрами являются давления в узлах. Это значит, что из систем уравнений первого и второго законов Кирхгофа можно получить бесчисленное множество потокораспределений на заданной гидравлической цепи. Поэтому имеет место проблема отбора единственного решения. Данная проблема может быть, в частности, решена, если сформулировать некоторый критерий отбора, например, на основе известных принципов механики.

Если в рассмотренных выше уравнениях связей отсутствует параметр времени (t), то имеем задачу стационарного потокораспределения, являющуюся предысторией задачи нестационарного потокораспределения. Последнюю с позиций механики можно интерпретировать как задачу движения по неподвижным и подвижным поверхностям.

Обозначим через $F_\nu(X_\nu)$ равнодействующую заданных проекциями X_ν сил, действующих на точку M_ν. Для гидравлической цепи $X_\nu = y_i = h_i + H_i$. Тогда из принципа возможных скоростей следует уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} X_{\nu i}\delta x_{\nu i} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{L_i}(h_i + H_i)\delta x_i = 0,$$

и при квадратичном замыкающем соотношении $h_i = s_i x_i^2$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{x_i^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} H_i x_i = 0.$$

Полученное уравнение должно иметь минимум для всех перемещений $\delta x_{\nu i}$, допускаемых связями.

Таким образом, из принципа возможных скоростей для системы материальных точек, движущихся по множеству поверхностей, не изменяющихся во времени, следует задача стационарного потокораспределения для гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами в известной экстремальной постановке [97]:

– найти вектор x, компоненты которого обращают в минимум функцию

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{x_i^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} H_i x_i$$

при линейных ограничениях $Ax - Q = 0$.

Множители Лагранжа. В дальнейшем все выкладки и рассуждения будем производить с уравнениями системы связей, записанными на основе первого закона Кирхгофа, не рассматривая другие варианты записи уравнений, хотя все последующие рассуждения можно также применять и к ним.

Перемещения точки M_ν $(\nu=1, 2, ..., n)$ связаны $m-1$ соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta x_i = 0,$$

которые получаются дифференцированием уравнений первого закона Кирхгофа:

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., m-1,$$

представленных в записи уравнений по узлам гидравлической цепи.

Уравнения относительно вариаций расходов на ветвях цепи показывают, что c из этих вариаций могут быть выбраны произвольно. Будем считать вариации расходов на хордах графа ***независимыми вариациями***, а остальные ($m-1$), определяемые уравнениями связей, вариации расходов на ветвях дерева цепи – ***зависимыми вариациями***.

Для определения условий равновесия можно, в частности, применить метод множителей Лагранжа. Умножим уравнения полученной для вариаций системы соответственно на неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m-1}$ и просуммируем с уравнениями, выведенными из принципа возможных скоростей, после чего определим множители таким образом, чтобы в полученной сумме обратились в нуль коэффициенты при $m-1$ зависимой вариации расходов, тогда коэффициенты при независимых вариациях должны также обратиться в нуль. То есть требуется определить неопределенные множители λ_j таким образом, чтобы обратились в нуль все коэффициенты, и тогда получим n совместных уравнений:

$$y_i + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = s_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если допустить, что неопределенные множители Лагранжа для гидравлической цепи интерпретируются как давления в узлах цепи, то имеем уравнения второго закона Кирхгофа, записанного относительно давлений в узлах. Эти уравнения совместно с уравнениями связей составят полную систему уравнений относительно неизвестных параметров гидравлической цепи (расходов на всех ветвях и давлений в линейно независимых узлах).

Таковы общие уравнения стационарного потокораспределения в многоконтурной гидравлической цепи.

Когда давления в узлах будут известны, тогда можно из линейных соотношений определить и *реакции связей*. Очевидно, что уравнения равновесия не изменятся, если отбросить связь $f_j = 0$ и присоединить к заданным силам, действующим на точку M_ν, силу с проекциями $P_\nu a_{1j}, P_\nu a_{2j}, ..., P_\nu a_{nj}$, которая является действием связи на точку M_ν, т. е. так называемой реакцией связей. Непосредственно находим величину этой силы, ее направление $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$ нормально к поверхности, которая получается, если предположить, что в уравнении $f_1(x) = 0$ по всем координатам, кроме $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$, имеются численные значения, соответствующие положению равновесия, а координаты $x_m, ..., x_n$ являются текущими.

Формулировка принципа Даламбера и общее уравнение динамики для системы со связями. Если для гидравлической цепи рассматривать, с одной стороны, вектор, представляющий все силы, действующие на перемещение расхода по участку, и приложенный в случае сосредоточенных параметров к точке, а с другой стороны, приложенный к этой же точке вектор I, равный и противоположно направленный равнодействующей сил, и равный произведению некоторой массы на скорость изменения расхода, то уравнение движения можно интерпретировать следующим образом. В каждый момент времени существует равновесие между действующими силами и вектором I, называемым *силой инерции*. Проекции этого вектора на оси координат выражаются как $-k_i \frac{dx_i}{dt}$.

Гидравлическую цепь с n ветвями можно представить как систему движущихся точек с массами $k_1, k_2, ..., k_n$. Можно утверждать, что в каждый момент времени существует равновесие между всеми силами, действующими на эти точки, и силами инерции этих точек. Это утверждение и есть принцип Даламбера.

Таким образом, для гидравлической цепи имеем систему n точек (расходов на ветвях цепи) с массами $k_1, k_2, ..., k_n$ и координатами $x_1, x_2, ..., x_n$, подчиненную заданным связям. Эти связи могут, в частности, зависеть от времени. На каждой ветви действуют силы, проекции равнодействующей F_i заданных сил, приложенных к точке M_ν. Обозначим их через X_i ($i = 1, 2, ..., n$).

В каждый фиксированный момент времени, согласно принципу Даламбера, имеет место равновесие между заданными силами, силами инерции и реакциями связей. Если системе сообщить произвольное возможное перемещение, то сумма работ заданных сил, сил инерции и реакций связей будет равна нулю. Но если возможные перемещения будут допускаться связями, имеющими место в момент времени t, то сумма работ реакций связей будет сама по себе равна нулю. Следовательно, сумма работ сил инерции и заданных сил равна нулю.

Обозначим через δx_i соответствующие возможные изменения расходов на ветвях цепи, допускаемые связями, имеющими место в момент времени t. Уравнения движения можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - k_i\frac{dx_i}{dt}\right)\delta x_i = 0.$$

Это равенство будет иметь место для всех возможных вариаций расходов, допускаемых связями, существующими в данный момент.

Для гидравлических цепей важно расшифровать, что понимается под силами, действующими на систему в процессе движения. Во-первых, в цепях имеются гравитационные напоры, функционально не связанные с параметром времени и тем более расхода, а зависящие от рельефа местности, т. е. от высот размещения узлов начала и конца участка, следовательно, их можно принять для цепи с сосредоточенными параметрами как известную постоянную характеристику ветви $(H_{\text{гр}}=\text{const})$. Во-вторых, имеются действующие напоры, которые изменяются во времени, а также они могут изменяться в зависимости от расхода, т. е. в общем случае их можно считать функцией расхода и времени $(H_i=H_i(x_i,t))$, они являются известной характеристикой ветви. В-третьих, потери напора на ветви являются искомой функцией на ветви (в общем виде функция от времени $h_i=h_i(t)$), эта сила представляет собой внутренние потери за счет процессов, происходящих внутри пространства транспортируемой сплошной среды. В-четвертых, действующее давление в узле источника – известная функция времени ($P_j=P_j(t)$ при $j=m$). В-пятых, давления в узлах цепи, за исключением узла источника, – искомые функции времени ($P_j=P_j(t)$ при $j=1,2,...,m-1$).

Согласно этому определяются и проекции сил на ветви цепи, с обязательным использованием замыкающих соотношений, которые описывают функциональные связи искомых и известных параметров цепи как для цепи в целом, так и на отдельной ветви.

Наиболее разработанными и изученными являются модели стационарного потокораспределения в гидравлической цепи, которые соответствуют уравнению равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \delta x_i = 0.$$

Здесь под X_i понимается замыкающее соотношение в форме Дарси с действующим напором.

Приведение уравнений движения гидравлической цепи к наименьшему числу. Для гидравлических цепей, согласно уравнениям первого закона Кирхгофа, для получения наиболее общего возможного перемещения расхода, допускаемого связями, существующими в момент времени t, необходимо и достаточно сообщить c параметрам $q_1, q_2, ..., q_c$ произвольные вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_c$. То есть хордовым расходам сообщаются произвольные вариации. Говорят, что рассматриваемая система обладает c степенями свободы. Так как наиболее общее возможное перемещение системы в момент t определяется произвольными вариациями $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_c$, то вариации $\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n$ расходов на ветвях цепи являются определенными, если выбраны δq_i $(i=1, 2, ..., c)$. Следовательно, для вариации расходов на ветвях цепи имеет место выражение

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{c} a_{ij}\delta q_j + \sum_{j=1}^{c} b_{ij}Q_j \quad (i = 1, 2, ..., m-1).$$

Если полученные выражения внести в общее уравнение динамики, то имеем

$$\sum_{j=1}^{c}\left(G_j - P_j\right)\delta q_j = 0,$$

где

$$G_j = \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij}, \ P_j = k_j \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 x_i}{dt^2} a_{ij}, \ j = 1, 2, ..., c.$$

Если полученное уравнение правомочно для любых возможных перемещений, допускаемых связями в момент времени t, то оно должно удовлетворяться при любых вариациях δq_j. Следовательно, справедливо равенство $G_j - P_j = 0$.

Таким образом, получены уравнения движения для гидравлической цепи. Число этих уравнений равно числу степеней свободы или количеству линейно независимых контуров цепи (c).

Метод множителей Лагранжа для голономной системы. Для гидравлической цепи уравнения первого закона Кирхгофа представляют собой голономные связи:

$$Ax(t) - Q(t) = 0.$$

Чтобы определить возможное изменение расходов в гидравлической цепи, допускаемое связями в момент времени t, необходимо присвоить времени числовое значение и сообщить расходам такие вариации δx_i, чтобы функции уравнений связей от этих приращений были равны нулю, т. е. такие, чтобы нулю были равны полные вариации этих функций. Получаются следующие уравнения, которым при возможных изменениях расхода должны удовлетворять все δx_i:

$$A\delta x = 0.$$

Заметим, что когда связи зависят от времени, действительные изменения расходов не входят в число рассматриваемых здесь возможных изменений.

Эти уравнения показывают, что среди n вариаций δx_i только c вариаций будут независимыми, а остальные ($m - 1$) будут выражаться линейно из полученных уравнений как функции c независимых вариаций:

$$\delta x_c = B\delta x_d.$$

Применим метод множителей Лагранжа. Если в уравнениях равновесия заменим величины X величинами

$$y_i = -k_i \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

то имеем

$$k\frac{d^2 x}{dt^2} = y(t) + A^T P(t).$$

Таким образом, получили c уравнений, которые совместно с $m-1$ уравнением связи позволяют определить c расходов на ветвях–хордах гидравлической цепи и $m-1$ давление в линейно независимых узлах P_j как функции времени.

Этот метод удобен в том случае, когда число ветвей гидравлической цепи сравнительно невелико. В противном случае надо постараться свести решение задачи к интегрированию возможно меньшего числа уравнений.

3.2. Уравнения Лагранжа для гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами

Для гидравлической цепи расход, характеризующий любую ветвь, условно назовем "точкой", имеющей в качестве координаты $x_i(t)$. Тогда, используя уравнения связей, отображающие первый закон Кирхгофа в виде совокупности гиперплоскостей, всегда можно координаты движущейся по ним точки выразить через конечное число (c) новых параметров.

Для приведенных примеров одноконтурной и двухконтурной гидравлических цепей (см. рис. 3.1) запишем следующие уравнения.

Для одноконтурной цепи

$$-x_1(t)+x_3(t)+Q_1(t)=0,$$

$$x_1(t)-x_2(t)-Q_2(t)=0.$$

Обозначив $x_3(t)=q(t)$, получим

$$x_1(t)=q(t)+Q_1(t),$$

$$x_2(t)=q(t)+Q_1(t)-Q_2(t),$$

$$x_3(t)=q(t),$$

где $q(t)$ – новый параметр.

Для двухконтурной цепи

$$-x_1(t)+x_3(t)-x_5(t)+Q_1(t)=0,$$

$$x_1(t)-x_2(t)-Q_2(t)=0,$$

$$-x_4(t)+x_5(t)-Q_4(t)=0.$$

Обозначив $x_2(t)=q_1(t)$, $x_4(t)=q_2(t)$, получим

$$x_1(t)=q_1(t)+Q_2(t),\ \ x_2(t)=q_1(t),$$

$$x_3(t)=q_1(t)+q_2(t)-Q_1(t)+Q_2(t)+Q_4(t),$$

$$x_4(t)=q_2(t),\ \ x_5(t)=q_2(t)+Q_4(t),$$

где $q_1(t)$, $q_2(t)$ – новые параметры.

В общем виде для многоконтурной цепи справедлива запись

$$x_d(t)=A_d^{-1}Q(t)+B_d^T q(t),\ \ x_c(t)=q(t),$$

где новым параметрам отведена роль расходов на ветвях–хордах.

Эти выражения таковы, что если из них исключить $q(t)$, то вновь получаются уравнения плоскостей. В силу изменения расходов в узлах цепи они явно содержат время t, которое входит в уравнения, описывающие совокупность гиперплоскостей. Чтобы задать движение этой системы, достаточно знать, как выражаются через t параметры q, определяющие положение движущихся точек. Для определения $q(t)$ требуется c уравнений, которые могут быть составлены следующим образом.

Найдем все частные производные от уравнений связей новых переменных $q(t)$ по первой компоненте вектора, предполагая, что остальные $(c-1)$ имеют фиксированное значение, и, умножая на них слагаемые уравнения равновесия для всех ветвей цепи, получим следующие уравнения.

Для одноконтурной цепи (см. рис. 3.1, a)

$$\frac{\partial x_1}{\partial q}=1,\ \frac{\partial x_2}{\partial q}=1,\ \frac{\partial x_3}{\partial q}=1,$$

уравнение запишется в виде

$$R_1\frac{dx_1}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial q}+R_2\frac{dx_2}{dt}\frac{\partial x_2}{\partial q}+R_3\frac{dx_3}{dt}\frac{\partial x_3}{\partial q}=Y_1\frac{\partial x_1}{\partial q}+Y_2\frac{\partial x_2}{\partial q}+Y_3\frac{\partial x_3}{\partial q}.$$

С учетом значений частных производных имеем

$$R_1\frac{dx_1}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial q}+R_2\frac{dx_2}{dt}\frac{\partial x_2}{\partial q}+R_3\frac{dx_3}{dt}\frac{\partial x_3}{\partial q}=Y_1+Y_2+Y_3.$$

Если $Y=h(t)+H(t)$, то получим уравнение движения среды по одноконтурной гидравлической цепи.

Для двухконтурной цепи (см. рис. 3.1, $б$)

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1}=1,\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1}=1,\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1}=1,\ \frac{\partial x_4}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial x_5}{\partial q_1}=0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_2}=0,\ \frac{\partial x_2}{\partial q_2}=0,\ \frac{\partial x_3}{\partial q_2}=1,\ \frac{\partial x_4}{\partial q_2}=1,\ \frac{\partial x_5}{\partial q_2}=1.$$

С учетом этих значений уравнения запишутся в виде

$$R_1\frac{dx_1}{dt}+R_2\frac{dx_2}{dt}+R_3\frac{dx_3}{dt}=Y_1+Y_2+Y_3,$$

$$R_3\frac{dx_3}{dt}+R_4\frac{dx_4}{dt}+R_5\frac{dx_5}{dt}=Y_3+Y_4+Y_5.$$

Если $Y=h(t)+H(t)$, то имеем уравнение движения среды по двухконтурной гидравлической цепи.

В терминах т. г. ц. эти примеры показывают, что инерционные слагаемые в левых частях уравнений формально являются не чем иным, как произведением матрицы контуров на вектор-столбец скоростей изменения расходов на ветвях цепи, а правые части – произведением матрицы контуров на вектор-столбец всех действующих сил на ветви цепи.

Таким образом, для уравнений, отображающих первый закон Кирхгофа для гидравлической цепи, представляющих уравнения голономных связей, всегда можно выделить c расходов, независимых параметров (расходы на хордовых ветвях цепи):

$$x_c(t) = q(t).$$

Расходы на ветвях дерева гидравлической цепи можно выразить через расходы на хордах как зависимые параметры, согласно уравнениям связей:

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T q(t).$$

Тогда вектор-функция расходов на всех ветвях цепи имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^{-1}Q(t) + B_d^T q(t) \\ q(t) \end{bmatrix}.$$

Продифференцировав по введенным параметрам $q(t)$ выражения связей, получим

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_d(t)}{\partial q} \\ \dfrac{\partial x_c(t)}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_d^T \\ E \end{bmatrix} = B^T.$$

Уравнения движения по гидравлической цепи могут быть записаны как

$$BR\frac{dx(t)}{dt} = By(t).$$

Эти уравнения можно записать и в несколько иной форме. Введем обозначения для производных от независимых параметров по времени $q_i'(t) = \dfrac{dq_i(t)}{dt}$ $(i = 1, 2, ..., c)$ и $x_j'(t) = \dfrac{dx_j(t)}{dt}$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Тогда полученные уравнения можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j},$$

но

$$\frac{d}{dt}\left(R_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - R_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = R_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j},$$

x_i являются функциями времени и непосредственно зависят от q_j, которые также являются функциями t, следовательно,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{c} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Точно так же $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$ зависит от t и непосредственно, и через q_j, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

В приведенных выражениях $\frac{dx_i}{dt}$ будем рассматривать как функции q_j, $\frac{dq_j}{dt}$ и t. Тогда найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial q_j'}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial x_i}{\partial q_j},\quad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Заменяя в уравнении движения величины $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ найденными для них значениями, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}R_i x_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{n}R_i x_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Положим

$$T=\sum_{i=1}^{n}0.5R_i x_i^2,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

где $Q_j=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$.

Полученное уравнение является уравнением движения по Лагранжу. Для того чтобы его получить, достаточно записать величину T и в этой величине заменить производные $\frac{dx_i}{dt}$ их значениями, выразив T через q_j' и t; после чего можно составить конечные уравнения гидравлической цепи.

Далее рассмотрим более простые методы составления уравнений движения для гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами. Эти методы могут различаться для цепей с квазираспределенными или с распределенными параметрами, поэтому здесь представлены наиболее простые цепи.

Сначала рассмотрим цепи с сосредоточенными параметрами, которые являются аналогом голономной механической системы материальных точек, так как уравнения первого закона Кирхгофа можно интерпретировать как алгебраические линейные связи.

Пусть $q_1, q_2, ..., q_c$ – координаты голономной системы (гидравлической цепи) и $q_1', q_2', ..., q_c'$ – их производные по времени при ее движении. В терминологии т. г. ц. q_c – хордовые расходы; вектор хордовых расходов содержит c компонент, что равно количеству линейно независимых контуров цепи, которое соответствует количеству степеней свободы механической системы из n материальных точек с $m-1$ голономными связями. Покажем, по Лагранжу, что можно записать уравнения движения, если известно выражение *кинетической энергии*, или *энергии скоростей*

$$T=0.5\sum_i m_i v_i^2=\sum_i\int m_i v_i dv_i,$$

как функции переменных q_j, q_j' и t $(j=1,2,...,c)$ для гидравлической цепи – энергии расходов.

За скорость точки в гидравлической цепи принята скорость изменения расхода на ветви цепи, являющаяся функцией только времени, поэтому для отдельно взятой i-й ветви справедливо

$$\int m_i \frac{dx_i}{dt} dx_i = m_i x_i \frac{dx_i}{dt},$$

а энергия скоростей для всей гидравлической цепи есть сумма энергий скоростей на всех ветвях, т. е.

$$T = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \frac{dx_i}{dt} = 0.5 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^2.$$

Энергия расходов гидравлической цепи является аналогом кинстической энергии механической системы материальных точек, отсюда следует аналогия и для функций Лагранжа.

Так как за параметры гидравлической цепи приняты $q_1, q_2, ..., q_c$ – расходы на ветвях–хордах, то их произвольные малые вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_c$ определяют наиболее общее возможное перемещение системы, а с учетом уравнений связей (уравнения первого закона Кирхгофа) с геометрической точки зрения положенис системы в любой момент времени определяется c геометрически независимыми между собой параметрами q_j (j=1, ..., c). Тогда координаты каждой точки системы (расходы на всех ветвях цепи) можно выразить как функции этих параметров. Согласно этому, для гидравлической цепи расходы на всех ветвях цепи могут быть представлены в виде

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^{-1} Q(t) + B_d^T q(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^{-1} Q(t) + B_d^T q(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

т. е.

$$x(t) = A_d^{-1} Q(t) + B_d^T q(t).$$

Наибольшее общее возможное перемещение, допускаемое связями в любой момент времени t, выражается как

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q} \delta q = B^T \delta q.$$

Подставляя полученные выражения в общее уравнение движения, получим уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{c} (F_k - G_k) \delta q_k = 0,$$

где для краткости положено

$$F_k = \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{dx_i}{dt}, \quad G_k = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Общее уравнение нестационарных режимов гидравлической цепи должно иметь место, каковы бы ни были возможные малые вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_c$, поскольку оно справедливо для всех возможных перемещений, допускаемых связями. Оно распадается на c уравнений:

$$F_k - G_k = 0 \quad (k = 1, 2, ..., c).$$

С учетом приведенных выше рассуждений и введенной функции энергии расходов эти уравнения для гидравлической цепи можно записать:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \quad (k=1,2,...,c),$$

где $T=0.5\frac{d}{dt}\sum_i R_i x_i^2$, $Q_k=\sum_i y_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$, $y_i=C_i x_i+S_i x_i^2-H_i(t)$.

Полученные уравнения называются уравнениями Лагранжа для системы материальных точек с голономными связями.

Все вышесказанное относится к гидравлическим цепям, в которых известные расходы в узлах источников и потребителей не зависят от времени. Это сделано для того, чтобы на наиболее простом случае показать применимость методов множителей Лагранжа для получения общего уравнения движения и для формирования математической модели нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи. Эта цель, очевидно, и была достигнута.

Для приведенных схем (см. рис. 3.1) эти последовательности формирования моделей выглядят следующим образом.

Для одноконтурной цепи (см. рис. 3.1, *а*) уравнения связей, записанные через независимую переменную, имеют вид

$$x_1(t)=q(t)+Q_1(t),$$

$$x_2(t)=q(t)+Q_1(t)-Q_2(t),$$

$$x_3(t)=q(t).$$

Полная энергия расходов для всей цепи

$$R_1[q(t)+Q_1(t)][q'(t)+Q'_1(t)]+R_2[q(t)+Q_1(t)-Q_2(t)][q'(t)+Q'_1(t)-Q'_2(t)]+R_3q(t)q'(t)-$$

$$-0.5\left\{C_1[q(t)+Q_1(t)]^2+C_2[q(t)+Q_1(t)-Q_2(t)]^2+C_3q^2(t)\right\}-$$

$$-\frac{1}{3}\left\{S_1[q(t)+Q_1(t)]^3+S_2[q(t)+Q_1(t)-Q_2(t)]^3+S_3q^3(t)\right\}+H(t)q(t);$$

энергия расходов

$$T=R_1[q(t)+Q_1(t)]q'(t)+R_2[q(t)+Q_1(t)-Q_2(t)]q'(t)+R_3q(t)q'(t).$$

Для двухконтурной цепи (см. рис. 3.1, *б*) уравнения связей, записанные через независимые переменные, имеют вид

$$x_1(t)=q_1(t),\quad x_2(t)=q_1(t)-Q_2(t),$$

$$x_3(t)=q_1(t)+q_2(t)-Q_1(t),$$

$$x_4(t)=q_2(t)-Q_4(t),\quad x_5(t)=q_2(t).$$

Полная энергия расходов для всей цепи

$$R_1 q_1(t) q_1'(t) + R_2 [q_1(t) - Q_2(t)][q_1'(t) - Q_2'(t)] + R_3 [q_1(t) + q_2(t) - Q_1(t)][q_1'(t) + q_2'(t) - Q_1'(t)] +$$

$$+ R_4 [q_2(t) - Q_4(t)][q_2'(t) - Q_4'(t)] + R_5 q_2(t) q_2'(t) -$$

$$-0.5\left\{C_1 q_1^2(t) + C_2 [q_1(t) - Q_2(t)]^2 + C_3 [q_1(t) + q_2(t) - Q_1(t)]^2 + C_4 [q_2(t) - Q_4(t)]^2 + C_5 q_2^2(t)\right\} -$$

$$-\frac{1}{3}\left\{S_1 q_1^3(t) + S_2 [q_1(t) - Q_2(t)]^3 + S_3 [q_1(t) + q_2(t) - Q_1(t)]^3 + S_4 [q_2(t) - Q_4(t)]^3 + S_5 q_2^3(t)\right\} +$$

$$+ H(t)[q_1(t) + q_2(t) - Q_1(t)];$$

энергия расходов

$$T = R_1 q_1(t) q_1'(t) + R_2 [q_1(t) - Q_2(t)] q_1'(t) + R_3 [q_1(t) + q_2(t) - Q_1(t)][q_1'(t) + q_2'(t)] +$$

$$+ R_4 [q_2(t) - Q_4(t)] q_2'(t) + R_5 q_2(t) q_2'(t).$$

Таким образом, для гидравлических цепей в случае, когда изменения расходов в узлах источников и потребителей явно не зависят от времени, наиболее просто применим метод Лагранжа для составления математической модели нестационарного потокораспределения, так как в этом случае имеем аналог голономной механической системы материальных точек, для которых уравнение Лагранжа и выведено.

Для гидравлических цепей, в которых изменение расхода в источниках и у потребителей явно зависит от времени, практически всегда существует возможность (если аналитически задана хотя бы одна из функций: изменение действующего напора на одной из ветвей цепи или изменение фиксированного давления в одном из узлов цепи) преобразовать уравнения первого закона Кирхгофа к параметрическому виду от этих функций. Тем самым уравнения связей перестанут быть явно зависимыми от времени.

С точки зрения математики, интересным и, вероятно, новым для исследования является объект, когда связи выражаются на основе второго закона Кирхгофа уравнениями вида

$$Bh(t) - BH(t) = 0,$$

а функция Лагранжа для гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами имеет тот же вид, что и для гидравлической цепи с уравнениями первого закона Кирхгофа, т. е. энергия расходов

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^2.$$

Поэтому либо уравнения связей должны быть записаны относительно переменных расходов, либо функция Лагранжа должна быть выражена через переменные потери давления. Но потери давления с расходами связаны дифференциальным соотношением

$$h(t)=R\frac{dx(t)}{dt}+Cx(t)+Sx^2(t),$$

из которого нетрудно аналитически выразить расходы как функции потери давления. Тогда, подставляя замыкающие соотношения в уравнения связей, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$B\left[R\frac{dx(t)}{dt}+Cx(t)+Sx^2(t)\right]-BH(t)=0,$$

т. е. имеем неголономную систему.

Если гидравлическая цепь пассивная ($H(t)=0$), то независимые переменные $x_d(t)$ должны удовлетворять системе однородных нелинейных дифференциальных уравнений

$$B_d\left[R_d\frac{dx_d(t)}{dt}+C_dx_d(t)+S_dx_d^2(t)\right]=0,$$

а зависимые переменные $x_c(t)$ должны удовлетворять системе

$$B_c\left[R_c\frac{dx_c(t)}{dt}+C_cx_c(t)+S_cx_c^2(t)\right]=-B_d\left[R_d\frac{dx_d(t)}{dt}+C_dx_d(t)+S_dx_d^2(t)\right].$$

При соответствующем выборе системы линейно независимых контуров, когда выбранная хордовая ветвь входит только в один контур $B_c=E$ (единичная матрица), имеем

$$R_c\frac{dx_c(t)}{dt}+C_cx_c(t)+S_cx_c^2(t)=-B_d\left[R_d\frac{dx_d(t)}{dt}+C_dx_d(t)+S_dx_d^2(t)\right].$$

Число степеней свободы этой системы равно $m-1>c$, что говорит о возрастании неопределенности системы с неголономными связями по сравнению с системой с голономными связями.

В случае активной гидравлической цепи введем новую переменную

$$y(t)=h(t)-H(t)=R\frac{dx(t)}{dt}+Cx(t)+Sx^2(t)-H(t),$$

что приведет к тем же системам дифференциальных уравнений.

В любом из этих случаев в первую очередь приходится разрешить систему дифференциальных уравнений относительно независимых переменных, а она является недоопределенной, так как содержит c уравнений, связывающих $m-1$ параметр (расходы на ветвях дерева гидравлической цепи).

Так характеризуется математическая модель нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи с неголономными связями, которая требует самостоятельного изучения.

Практически возможность получения уравнений динамики для гидравлической цепи с использованием определений и принципов механики системы материальных точек со связями имеется и не противоречит подходам описания, основанным на законах сохранения и их аппроксимации. При этом демонстрируемый здесь подход приводит к формированию целого класса экстремальных и вариационных задач изучения динамики процессов в гидравлических цепях.

3.3. О некоторых задачах нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях

Остановимся на некоторых теоретических задачах т. г. ц. в ракурсе динамических процессов, протекающих в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами.

С точки зрения задач механики, математические модели динамики гидравлических цепей предназначены прежде всего для изучения траекторий изменения гидравлических режимов в цепи с заданными и неизменяемыми параметрами на всех ветвях цепи и известными воздействиями, заключенными в зависимостях от времени: заданных в узлах давлений, потребностей потребителей и мощностей источников в узлах, действующих напоров на ветвях цепи. Это известная задача анализа режимов гидравлических цепей, которая позволяет в определенной степени учитывать время, что является некоторым расширением задачи анализа стационарного потокораспределения.

Для прикладных областей решение задачи анализа режимов может быть полезным на стадии проектирования трубопроводных систем при выборе параметров участков системы и разнообразных регулирующих и управляющих устройств.

Перечисленные задачи вписываются в традиционный пакет задач, решаемых на базе моделей стационарного потокораспределения, но учитывающих специфику развития процессов в гидравлических цепях. Это позволяет в несколько ином ракурсе оценить возможности регулирования и управления трубопроводными системами.

Следующий класс задач можно отнести к обратным задачам, или задачам синтеза гидравлических цепей, когда по известному нестационарному потокораспределению определяются коэффициенты системы дифференциальных уравнений. Эти задачи возникают при выборе параметров трубопроводных систем, включающих линейные участки, оснащенные запорной и регулирующей аппаратурой и другими приборами количественного и качественного регулирования. Принципиально важно этот класс задач решать на базе моделей нестационарного потокораспределения, которые позволяют учитывать динамические возмущения (источники, потребители, действующие напоры, фиксированные давления и др.) уже на стадии проектных решений, что может быть полезным для организации надежной работы трубопроводных систем.

Оценка реакций гидравлических цепей на малые и большие возмущения внутренних и внешних параметров приводит к еще не рассматривавшемуся классу задач (анализ чувствительности и устойчивости динамических систем), непосредственно примыкающих к режимным вопросам в нормальных и экстремальных условиях эксплуатации трубопроводных систем.

К новым относятся задачи оценки влияния инерционного слагаемого на потокораспределение, т. е. определение условий, при каких возмущениях системы его можно не учитывать, в частности использовать стационарные модели анализа потокораспределения, а в каких случаях можно переходить к замене времени выбранным параметром и использовать параметрические модели. Последние классы задач принципиально не могут быть решены с помощью моделей стационарного потокораспределения.

Указанные выше классы задач для моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях отражают характер прикладных исследований трубопроводных систем различного назначения и разнообразного обустройства, которые могут быть органически вписаны в категорию гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами. Однако эти задачи требуют своей постановки и решения и для более сложных трубопроводных систем, моделями которых могут быть гидравлические цепи с квазираспределенными и распределенными параметрами, учитывающие обмен массы и энергии с окружающей средой, химические процессы, происходящие на участках сети, фазовые превращения и другие процессы.

С точки зрения математики, появляется целый спектр новых математических объектов. Вопросы аппроксимации систем уравнений в частных производных гиперболического типа на нерегулярных графах находятся на начальной стадии изучения и связаны прежде всего с квазирегулярными сетками (например, последние работы А.А. Самарского [135–137]). Первоочередными вопросами здесь являются: аппроксимация и точность, оценочные критерии которых, вероятно, несколько отличны от критериев аппроксимации и точности на регулярных сетках. Отсюда, в частности, возможен переход к дифференциальным уравнениям на графах (первые работы по этой тематике были опубликованы А.И. Вольпертом [44]). Здесь же появляется новый объект для математического анализа системы алгебро-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, представляющих интерес в плане существования решений (работы Ю.Е. Бояринцева и В.Ф. Чистякова [41, 42, 191]).

Эти проблемы характерны в основном для математических моделей нестационарного потокораспределения, записанных в виде конечных замкнутых систем уравнений (первый и второй законы Кирхгофа и замыкающие соотношения). Тем не менее интерес представляют и экстремальные модели, предварительные методы построения которых описаны в настоящей работе. В постановках, разобранных выше для гидравлических цепей, возникает ряд вариационных задач на базе описаний Лагранжа для нелинейных уравнений с голономными и неголономными связями.

Наряду с теоретическими вопросами: о существовании решений таких моделей; качественной и количественной оценке чувствительности и устойчивости решений к изменению начальных и граничных условий и коэффициентов системы уравнений; существовании решения обратных задач для систем уравнений Штурма–Лиувилля, – возникает необходимость создания, модернизации и реализации численных методов решения сформулированных задач на уровне современных методов и вычислительных средств. Понятно, что построение численных алгоритмов должно максимально учитывать возможности современных вычислительных средств с точки зрения размерности задач и скорости получения решения с использованием информационных технологий и математических редакторов различного типа.

Приведенный перечень задач т. г. ц. далеко не полный, однако его можно использовать как некоторый ориентир в разработке теории и методов динамических гидравлических цепей.

Моделирование нестационарного потокораспределения многоконтурных гидравлических цепей на базе принципов и законов механики возможно только для цепей с сосредоточенными параметрами, т. е. в предположении, что рассматриваются сплошные среды при неизменных (в частности, постоянных) плотностях и температурах, что позволяет интерпретировать законы сохранения относительно параметров: скорости течения и сил, действующих на систему, включая и силы реакций связей, которые выражаются в виде конечной системы линейных уравнений.

При таких предположениях, когда гидравлические цепи описываются конечными замкнутыми системами уравнений с постоянными коэффициентами, характеризующими геометрические и физические свойства течения сплошной среды по ветви цепи и по цепи в целом, их условно можно интерпретировать как систему материальных точек и в стационарной постановке получить точки равновесия системы, а в нестационарной – траектории движения с учетом реакций связей. Это значит, что цепи с сосредоточенными параметрами можно интерпретировать как движение системы материальных точек с голономными связями, а следовательно, для описания их можно использовать весь арсенал механики, в частности, экстремальные принципы, обобщенные координаты и методы Лагранжа.

Однако если рассматривать процессы, протекающие в гидравлических цепях с распределенными параметрами, где характеристики ветвей являются функциями искомых параметров, зависящих от геометрической координаты, то для математического моделирования процессов нестационарного потокораспределения принципов и методов механики оказывается недостаточно, так как в описании в общем виде появляются новые искомые параметры: температура, давление, удельная плотность, внутренняя энергия и другие, для введенной классификации не являющиеся постоянными. Снятие такого ограничения позволяет расширить класс объектов в теории гидравлических цепей.

3.4. Термодинамические основы гидравлических цепей

Далее будет рассмотрен один из аспектов нормальных структурных изменений гидравлической цепи, обусловленных изъятием ветвей графа, не приводящим к его распаду. Такие постановки и описания связаны с реальной задачей структурного управления трубопроводными системами и, в частности, реальными инженерными трубопроводными системами водо- и теплоснабжения.

Обоснование математических моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях использует фундаментальные законы сохранения при движении сплошной среды и развивается двумя путями, в первом из которых применяются методы классической механики (обобщенные параметры, уравнение Лагранжа и функция Лагранжа [28]), во втором – термодинамические методы (системные параметры, классификация систем, второе начало термодинамики и т. д. [66]). Оба подхода приводят математические модели нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях к некоторым экстремальным моделям (вариационным задачам) и в итоге дают тождественные модели в виде замкнутых систем функционально-дифференциальных уравнений. Для рассмотрения цепей с квазираспределенными и распределенными параметрами подход с позиций классической механики оказывается малопродуктивным, так как использует ограничения на виды энергии, и это вынуждает перейти к более общим методам термодинамики, позволяющим расширить множество параметров, описывающих процессы течения в таких цепях.

Изучение обоих подходов при моделировании нестационарных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами позволяет, во-первых, перейти на новый качественный уровень и отказаться от методов классической механики и, во-вторых, распространить с большей уверенностью методы термодинамики на формирование математических моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях с квазираспределенными и распределенными параметрами.

Основное внимание уделяется обобщенному объекту исследования – гидравлической цепи с регулируемыми параметрами, хотя рассматривается и частный случай, когда сопротивления ветвей, зависящие только от диаметра проходного сечения, изменяются во времени, что позволяет легко изучать реакции гидравлической цепи на внутренние возмущения. В прикладной области регулирование режимов трубопроводных систем может дать некоторый эффект в снижении энергетических затрат на перекачку и структурном перераспределении энергоносителя в цепях с квазираспределенными и распределенными параметрами.

На простых примерах гидравлической цепи, по которой происходит движение сплошной среды без трения или с линейным и квадратичным трением, рассматриваются возможности построения экстремальных моделей при структурном регулировании, когда многоконтурная цепь вырождается в разветвленную. Методы построения математических описаний, апробированные на простых примерах, обобщаются на многоконтурные сложные гидравлические цепи, где представлены течения с линейным, нелинейным трением и гравитационным напором.

Необходимо рассмотреть следующие задачи: адаптация понятий и определений термодинамики к гидравлическим цепям; математическое описание нестационарного потокораспределения для закрытых цепей с различными замыкающими соотношениями, учитывающими физические условия протекания процессов в трубе; определение всевозможных состояний системы. Кроме того, формулируется постановка задачи регулирования потокораспределения на хордах, что позволяет трансформировать задачу для многоконтурной цепи в задачу для потокораспределения по дереву; первоначально рассматриваются закрытые цепи, а далее методы описания распространяются на открытые и неоднородные цепи. В заключение исследованы пассивные и активные преобразования, цель которых упростить конечные математические описания и сократить количество анализируемых переменных.

Термодинамические системы. В классической механике при движении системы материальных точек состояние ее в любой момент времени полностью (однозначно) определяется, если известно положение системы (координаты каждой материальной точки в пространстве) и скорости каждой точки (проекции направления, в котором передвигается эта точка в пространстве). Следовательно, для системы, состоящей из n материальных точек, необходимо задать $6n$ переменных и такое же количество уравнений, связывающих эти переменные, которые могут быть выведены на основе общих законов сохранения. Согласно этим законам записывается замкнутая система уравнений: для конечного равновесного состояния – алгебраических (точка в пространстве n измерений), для процесса движения – дифференциальных (траектории в пространстве $n + 1$ измерения).

Сплошная среда по определению состоит из бесчисленного множества точек, описание состояния при этом должно включать бесконечное количество переменных, связанных бесконечным числом уравнений. Так как гидравлическая цепь предназначена для транспортировки сплошной среды, то и количество уравнений для описания ее состояния равно бесконечности. Но гидравлическая цепь является отображением реальных систем, состояние которых необходимо контролировать, значит, должно существовать конечное количество переменных и связывающих их уравнений.

Действительно, использование механического подхода к описанию состояния системы довольно неудобно, так как этот подход требует рассмотрения бесконечного множества точечных масс и невозможно вычислить все переменные, определяющие состояние системы. Часто в таком количестве переменных нет и практической необходимости, потому что величины, с которыми приходится иметь дело, описывают осредненные свойства части системы или системы в целом, следовательно, точное знание движения каждой материальной точки в некоторых задачах не требуется.

В термодинамике вводятся обобщающие понятия, в том числе и о состоянии системы.

Обычно в термодинамике есть возможность оперировать измеряемыми величинами: температурой как характеристикой тепловой энергии, удельным объемом как характеристикой переменной массы и давлением как характеристикой силы. Последние две величины – аналоги механических, но для некоторого замкнутого пространства.

Для гидравлических цепей, которые по своей геометрии состоят из конечномерных замкнутых пространств (ветви, как правило, цилиндрические, соединяющиеся в единую многоконтурную цепь узлами), можно ввести параметры, по предположению независимые от длины ветвей: объемный расход x, м^3/ч; потеря напора y, м вод. ст. для несжимаемой жидкости и изотермического процесса ($\rho = \text{const}$, $T = \text{const}$); массовый расход G, кг/ч; потеря давления ΔP, Н/м^2; объемная плотность теплового потока q, Дж/(м^3·ч), падение температуры $\Delta\Theta$, °С для неизотермического процесса сжимаемой жидкости ($\rho = \phi(T, P) = \text{var}$, $T = \text{var}$, $q = \text{var}$). Последние параметры являются характеристиками цепей с распределенными или квазираспределенными параметрами. Предполагается, что для ветви цепи с сосредоточенными параметрами они осреднены или неизменяемы по геометрической координате (x, G, q) и времени t; $\Delta\Theta$ и ΔP – линейные аппроксимации T и P соответственно. В отношении изменения этих параметров во времени не делается никаких предположений.

Таким образом, гидравлическая цепь является системой, элементы которой ветви, а состояние системы определяется обобщенными параметрами: расходом, потерей напора, давлением, температурой и др. В дальнейшем под гидравлической цепью понимается совокупность n ветвей, соединенных в сколь угодно сложную многоконтурную систему, состояние которой определяется $3n$ параметрами, в случае цепи с сосредоточенными параметрами (x и y).

Геометрия гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами характеризуется не только объемом, но и формой. В то же время большинство термодинамических параметров не зависят от формы, поэтому объем является единственной заданной геометрической характеристикой. Только в тех случаях, когда отношение поверхности к объему очень велико (что имеет место в гидравлических цепях), следует рассматривать и поверхность, еще и потому, что в процессе течения сплошной среды по трубам приходится учитывать различные силы (инерции, тяжести, линейного и нелинейного трения и др.).

В термодинамике предполагается, что разные части термодинамической системы находятся в состоянии покоя или движутся так медленно, что их кинетической энергией можно пренебречь (например, задачи стационарного или установившегося потокораспределения в гидравлической цепи, где силы инерции движения не учитываются). Если в действительности этого не происходит, то для того, чтобы однозначно и полностью определить состояние системы, следует задать скорости различных ее частей. С течением времени система бесчисленного множества материальных точек (так как все состояния равновероятны) последовательно проходит все динамические состояния, соответствующие данному термодинамическому состоянию. Поэтому можно утверждать, что термодинамическое состояние есть совокупность динамических состояний, через которые в результате молекулярного движения система быстро проходит. Это определение состояния скорее абстрактное и отнюдь не единственное. Для термодинамической характеристики системы особо важными являются *состояния равновесия*. Эти состояния обладают свойством не изменяться до тех пор, пока внешние условия остаются неизменными. Здесь предлагается рассмотреть *преобразования* гидравлической цепи от начального состояния до конечного через непрерывную последовательность промежуточных равновесных состояний в результате изменяющегося внешнего воздействия.

Другой аспект, отличающий возможности термодинамики от механики, состоит в разработанном аппарате перехода от случайных величин к определенным осредненным системным параметрам. Пока, к сожалению, этот аппарат не адаптирован к гидравлическим цепям, хотя его полезность применительно к задачам эквивалентирования цепей очевидна. Однако для этого требуется осмысление и адаптация методов статистической физики к термодинамике.

Следующим аспектом, полезным для математического моделирования динамики процессов в гидравлических цепях, является первое начало термодинамики, расширяющее рамки закона сохранения энергии в плане учета и анализа не только механических ее видов. Для цепей с сосредоточенными параметрами, где рассматриваются процессы изотермические и адиабатические с несжимаемой жидкостью, достаточно закона сохранения энергии в трактовке классической механики, а для цепей с распределенными параметрами применение первого начала термодинамики позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно искомых величин с очень сложными выражениями для коэффициентов.

Последнее, на чем следует остановиться, это формулировка второго начала термодинамики, несколько отличная от экстремальных принципов механики. Общность их заключается в том, что они позволяют представить математические модели движения сплошной среды в виде экстремальных или вариационных задач. Экстремальные методы классической механики описаны в работе [16]. Применение второго начала термодинамики дает возможность построения экстремальных моделей гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами и готовит базу для экстремальных моделей цепей с распределенными параметрами.

Согласно второму началу термодинамики, дифференциал энтропии больше или равен алгебраической сумме всех видов энергии, имеющихся в изучаемой системе:

$$dS \geq \frac{1}{T}du - \frac{P}{T}dv + \sum \frac{1}{T}dA,$$

где du – дифференциал внутренней энергии системы; $(P/T)dv$ – энергия сжатия объема; $(1/T)dA$ – различные виды механической энергии.

Для гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами имеет место несжимаемость сплошной среды $\rho = \text{const}$ ($v = \text{const}$, $dv = 0$). Внутренняя энергия системы зависит от изменения температуры, но принят изотермический процесс ($T = \text{const}$) и отсутствие теплообмена с окружающей средой ($dQ = 0$), следовательно, имеем $du = 0$. Таким образом, из всех слагаемых только сумма механических работ в гидравлической цепи не равна нулю:

$$\sum_i dA_i = \sum_i (-H_i + h_i)dx_i,$$

где H_i – действующий напор на i-й ветви; h_i – потеря напора на i-й ветви за счет разных сопротивлений, препятствующих течению сплошной среды при транспорте элементарного расхода dx_i.

Тогда интеграл энтропии на i-й ветви запишется в виде

$$\int_0^{S_i} dS \geq \frac{1}{T}\left[\int_0^{x_i} -H_i(t)dx_i + \int_0^{x_i} h_i(t)dx_i\right].$$

Рассмотрим интеграл $I = \int_0^t F dx$. Поскольку $dx = vdt$, получим

$$I = \int_0^t \left(F\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

Если сила F является суммой всех сил, действующих в гидравлической цепи: инерционных $R\frac{dx}{dt}$, сил тяжести H_g, линейного трения Cx, квадратичного трения Sx^2, действующего напора H, то в силу аддитивности имеем сумму интегралов:

$$I = -\int_0^t \left(R\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right)dt + \int_0^t \left(H_g\frac{dx}{dt}\right)dt + \int_0^t \left(Cx\frac{dx}{dt}\right)dt + \int_0^t \left(Sx^2\frac{dx}{dt}\right)dt - \int_0^t \left(H\frac{dx}{dt}\right)dt =$$

$$= \left[-R\left(x\frac{dx}{dt}\right) \pm H_g x + \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{3}Sx^3 - Hx\right]_0^t =$$

$$= -R(t)x(t)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}C(t)x^2(t) + \frac{1}{3}S(t)x^3(t) + \left[\pm H_g - H(t)\right]x(t).$$

Это не противоречит утверждению, что полная работа всех сил на ветви за промежуток времени $[0, t]$ равна изменению кинетической энергии и энергии инерции.

Таким образом, справедливо неравенство

$$S_i \ge \frac{1}{T}\left[-H_i(t)x_i(t)+\int_0^{x_i} h_i(x_i)dx_i\right],$$

а для многоконтурной гидравлической цепи, состоящей из n ветвей, полная энтропия системы равна сумме энтропий:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \ge -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}H_i(t)x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^{x_i} h_i(x_i)dx_i.$$

Потери напора на ветви цепи с помощью замыкающих соотношений могут быть представлены функциональными соотношениями от расхода.

Так, для чисто инерционного процесса имеем

$$h_i(t)=-r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt},$$

для инерционного процесса с гравитацией

$$h_i(t)=-r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt}\pm H_{gi},$$

для инерционного процесса с гравитацией и линейным трением

$$h_i(t)=-r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt}\pm H_{gi}+c_i(t)x_i(t),$$

и, наконец, для инерционного процесса с гравитацией, емкостью и квадратичным трением имеем

$$h_i(t)=-r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt}\pm H_{gi}+c_i(t)x_i(t)+s_i(t)x_i^2(t).$$

Если замыкающие соотношения заданы в одной из предложенных форм, то несложно вычислить интеграл от $h_i(t)$ по dx_i, а следовательно, получить полную энтропию системы в виде суммы функциональных выражений, изменяющихся во времени.

Так, используя второе начало термодинамики, можно формировать экстремальный подход для математических моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами при разной записи замыкающих соотношений. Этот подход можно обобщить и на цепи с распределенными и квазираспределенными параметрами, где возникает необходимость анализа дополнительных параметров, изменяющихся по длине ветви: плотности, скорости, температуры и внутренней энергии.

Представленное разнообразие замыкающих соотношений связано с физикой протекающих процессов на ветви и соответствует специфике трубопроводных систем различного назначения.

3.5. Промежуточные состояния инерционной гидравлической цепи

Для понимания движения в гидравлической цепи как процесса смены состояний термодинамической системы, от одного равновесного промежуточного состояния к другому, рассмотрим простой пример трехконтурной закрытой, но ак-

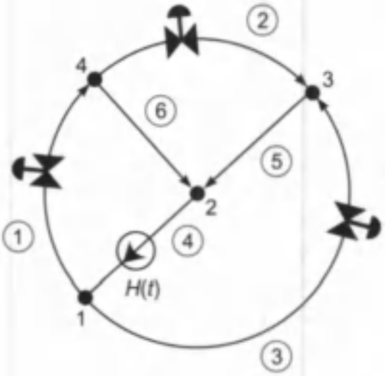


Рис. 3.5. Трехконтурная закрытая и активная гидравлическая цепь

тивной цепи (рис. 3.5), в которой одна ветвь (хорда) имеет регулятор, изменяющий сопротивление по некоторому закону от определенного значения до бесконечности, что при времени, стремящемся к бесконечности, соответствует полному отключению ветви и превращению цепи в двухконтурную. Примем это за первое промежуточное состояние.

Далее, в полученной цепи опять же существует хорда с аналогичным регулятором, который при $t \to \infty$ трансформирует двухконтурную цепь в одноконтурную. Это второе промежуточное состояние.

И наконец, в полученной одноконтурной цепи имеется хорда с регулятором, который при $t \to \infty$ превращает одноконтурную цепь в дерево (граф без контуров – разветвленный граф). Это конечное состояние.

Для каждого из описанных промежуточных состояний составим математические модели нестационарного потокораспределения и проанализируем режимы в этих цепях, если возмущения вносят только регуляторы. Базой для формирования моделей пусть будет второе начало термодинамики.

Начнем с трехконтурной цепи и будем считать, что от начального состояния к первому промежуточному при полном закрытии ветви 1 она придет через некоторое время kT_1. Под состоянием гидравлической цепи здесь подразумевается установившееся потокораспределение, т. е. вектор расходов на ветвях цепи.

Сформулируем ее математическое описание. Согласно первому закону Кирхгофа (дискретному закону сохранения массы), имеем

$$-x_1(t) - x_3(t) + x_4(t) = 0,$$

$$-x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) = 0,$$

$$x_2(t) + x_3(t) - x_5(t) = 0.$$

Пусть задана трехконтурная гидравлическая цепь (см. рис. 3.5), содержащая 3 линейно независимых узла и 6 ветвей. Пусть на ветвях 1, 2 и 3 (хордах) имеются регуляторы, изменяющие диаметры от D_i до 0 по закону:

$$D_1(t) = D_1 e^{-\lambda_1 \Theta_1}, \quad D_2(t) = D_2 e^{-\lambda_2 \Theta_2}, \quad D_3(t) = D_3 e^{-\lambda_3 \Theta_3},$$

где λ_i – темп закрытия $(\lambda_i = 1/T_i)$; $\Theta_i = t - \tau_i$, $0 \le \tau_i \le kT_i$ (рис. 3.6).

Для потока по дереву имеем выражения

$$x_4(t) = x_1(t) + x_3(t),$$

$$x_5(t) = x_2(t) + x_3(t),$$

$$x_6(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

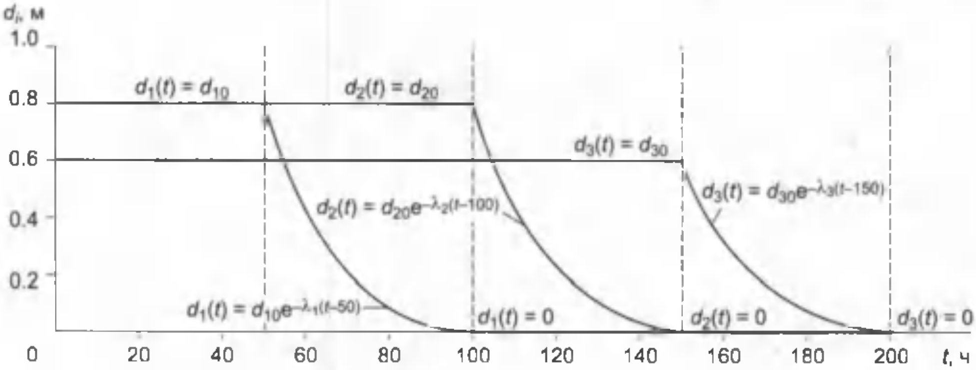


Рис. 3.6. Изменение диаметра ветвей во времени

В момент времени $t = \tau_1$ начинает изменяться диаметр на первой ветви, и при $\Theta_1 \to \infty$, $\lim D_1(t) \to 0$ трехконтурная цепь практически вырождается в двухконтурную (рис. 3.7). Ее описание принимает вид

$$-x_3(t) + x_4(t) = 0,$$

$$-x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) = 0,$$

$$x_2(t) + x_3(t) - x_5(t) = 0.$$

Соответственно, для потока по дереву имеем выражения

$$x_4(t) = x_3(t), \quad x_5(t) = x_2(t) + x_3(t), \quad x_6(t) = -x_2(t).$$

В момент времени $t = \tau_2$ начинает изменяться диаметр на второй ветви, и при $\Theta_2 \to \infty$, $\lim D_2(t) \to 0$ двухконтурная цепь практически вырождается в одноконтурную (рис. 3.8). Ее описание принимает вид

$$-x_3(t) + x_4(t) = 0,$$

$$-x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) = 0,$$

$$x_3(t) - x_5(t) = 0.$$

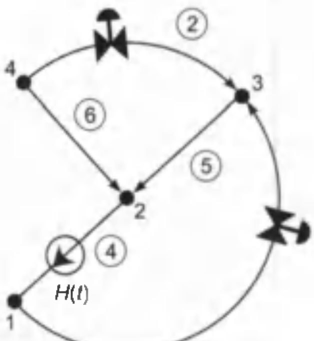


Рис. 3.7. Двухконтурная закрытая и активная гидравлическая цепь

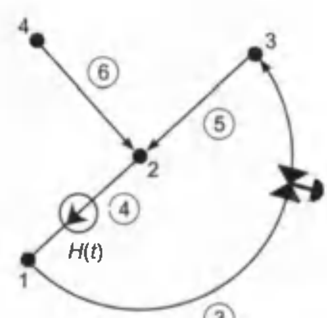


Рис. 3.8. Одноконтурная закрытая и активная гидравлическая цепь

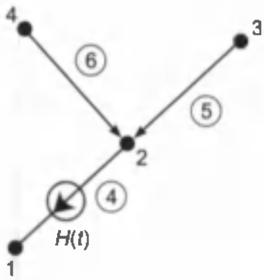


Рис. 3.9. Закрытая и активная гидравлическая цепь без контуров

Соответственно, для потока по дереву имеем выражения

$$x_4(t)=x_3(t),\ \ x_5(t)=x_3(t),\ \ x_6(t)=0.$$

В момент времени $t=\tau_3$ начинает изменяться диаметр на третьей ветви, и при $\Theta_3\to\infty$, $\lim D_3(t)\to 0$ одноконтурная цепь вырождается в цепь без контуров (рис. 3.9). Ее описание принимает вид

$$x_4(t)=0,\ \ -x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,\ \ -x_5(t)=0.$$

Соответственно, для потока по дереву в конечном состоянии имеем тривиальное решение

$$x_4(t)=0,\ \ x_5(t)=0,\ \ x_6(t)=0.$$

Это единственно возможное потокораспределение в закрытой разветвленной гидравлической цепи.

Общую энтропию для данных состояний можно записать в качестве критерия отбора решений, как максимизируемый функционал:

$$\max\left[-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}H_i(t)x_i(t)+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)}h_i(t)dx_i\right],$$

а так как рассматривается инерционный процесс течения сплошной среды, то имеем

$$\max\frac{1}{T}\left[-z_1x_1\frac{dx_1}{dt}-z_2x_2\frac{dx_2}{dt}-z_3x_3\frac{dx_3}{dt}-H(t)x_4-z_4x_4\frac{dx_4}{dt}-z_5x_5\frac{dx_5}{dt}-z_6x_6\frac{dx_6}{dt}\right].$$

Этот функционал вместе с соответствующими ограничениями (для трех-, двух- и одноконтурной цепей) составляет некоторую вариационную задачу нахождения траекторий $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ и интенсивных параметров $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$ при условии, что известно давление в первом узле $P_1(t)$:

$$P_2(t)=P_1(t)-H(t)-z_4\frac{dx_4}{dt},$$

$$P_3(t)=P_1(t)-H(t)-z_4\frac{dx_4}{dt}-z_5\frac{dx_5}{dt},$$

$$P_4(t)=P_1(t)-H(t)-z_4\frac{dx_4}{dt}-z_6\frac{dx_6}{dt}.$$

Теперь можно сформулировать общую вариационную задачу нестационарного потокораспределения в многоконтурной закрытой, но активной гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами:

– необходимо определить компоненты вектор-функции скалярного аргумента t (времени)

$$x(t)=[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)],$$

обращающие в максимум функционал

$$-\frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{n} H_i(t)x_i(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i} h_i(t)dx\right].$$

Здесь n – количество ветвей цепи, удовлетворяющих ограничениям

$$Ax(t)=0,$$

где A – матрица соединений линейно независимых узлов и ветвей размерностью $(m-1)\times n$.

По определенному решению этой задачи можно с помощью функциональных соотношений найти и компоненты вектор-функции $P(t)$ – давлений в линейно независимых узлах цепи:

$$P_d(t)=P_m(t)+A_d[h_d(t)+H(t)].$$

Для задачи, поставленной ранее, как оптимизационной для трехконтурной цепи, учитывая специфику ограничений, можно сократить число искомых функций путем выражения из ограничений потоков на ветвях дерева через потоки на хордах, с помощью которых можно заменить соответствующие переменные в функционале.

Так, с учетом выражений потоков на ветвях дерева для трехконтурной цепи имеем

$$\max\frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{3}-z_i x_i\frac{dx_i}{dt}-z_4(x_1+x_3)\left(\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_3}{dt}\right)-z_5(x_2+x_3)\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}\right)-\right.$$

$$\left.-z_6(x_1-x_2)\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right)-\frac{H}{T}(x_2+x_3)\right];$$

для двухконтурной цепи

$$\max\frac{1}{T}\left[\sum_{i=2}^{3}-z_i x_i\frac{dx_i}{dt}-z_4x_3\frac{dx_3}{dt}-z_5(x_2+x_3)\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}\right)-z_6x_2\frac{dx_2}{dt}-Hx_3\right];$$

для одноконтурной цепи

$$\max\frac{1}{T}\left[-z_3x_3\frac{dx_3}{dt}-z_4x_3\frac{dx_3}{dt}-z_5x_3\frac{dx_3}{dt}-Hx_3\right].$$

Конечному состоянию соответствуют нулевые потоки на всех ветвях дерева, что дает максимальное значение энтропии для цепи, равное нулю, так как все другие промежуточные значения отрицательные.

Согласно необходимым и достаточным условиям существования решения оптимизационных задач, получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:
для трехконтурной цепи

$$-(z_1+z_4+z_6)\frac{dx_1}{dt}+z_6\frac{dx_2}{dt}-z_4\frac{dx_3}{dt}=H(t),$$

$$z_6\frac{dx_1}{dt}-(z_2+z_5+z_6)\frac{dx_2}{dt}-z_5\frac{dx_3}{dt}=H(t),$$

$$-z_4\frac{dx_1}{dt}-z_5\frac{dx_2}{dt}-(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0;$$

для двухконтурной цепи

$$-(z_2+z_5+z_6)\frac{dx_2}{dt}-z_5\frac{dx_3}{dt}=H(t),$$

$$-z_5\frac{dx_2}{dt}-(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0;$$

для одноконтурной цепи

$$-(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0.$$

Тождественные системы уравнений можно получить и с использованием метода множителей Лагранжа, решением задачи на безусловный экстремум, но это более длинный путь, связанный с дополнительными преобразованиями.

Для трехконтурной цепи введем дополнительные переменные λ_1, λ_2, λ_3 и запишем функцию Лагранжа

$$\max\frac{1}{T}\left[-z_1x_1\frac{dx_1}{dt}-z_2x_2\frac{dx_2}{dt}-z_3x_3\frac{dx_3}{dt}-z_4x_4\frac{dx_4}{dt}-z_5x_5\frac{dx_5}{dt}-\right.$$

$$\left.-z_6x_6\frac{dx_6}{dt}-Hx_3-\lambda_1(-x_1-x_3+x_4)-\lambda_2(-x_4+x_5+x_6)-\lambda_3(x_2+x_3-x_5)\right],$$

для двухконтурной цепи, введя дополнительные переменные δ_1, δ_2, δ_3,

$$\max\frac{1}{T}\left[-z_2x_2\frac{dx_2}{dt}-z_3x_3\frac{dx_3}{dt}-z_4x_4\frac{dx_4}{dt}-z_5x_5\frac{dx_5}{dt}-\right.$$

$$\left.-z_6x_6\frac{dx_6}{dt}-Hx_3-\delta_1(-x_3+x_4)-\delta_2(-x_4+x_5+x_6)-\delta_3(x_2+x_3-x_5)\right],$$

для одноконтурной цепи, введя дополнительные переменные ε_1, ε_2, ε_3,

$$\max\frac{1}{T}\left[-z_3x_3\frac{dx_3}{dt}-z_4x_4\frac{dx_4}{dt}-z_5x_5\frac{dx_5}{dt}-\right.$$

$$\left.-z_6x_6\frac{dx_6}{dt}-Hx_3-\varepsilon_1(-x_3+x_4)-\varepsilon_2(-x_4+x_5+x_6)-\varepsilon_3(x_3-x_5)\right].$$

Как и ранее на основе необходимых условий существования экстремума, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений относительно большего количества искомых переменных (расходы на ветвях и множители Лагранжа), которую с помощью преобразований можно свести к системе трех дифференциальных уравнений для трехконтурной цепи

$$-(z_1+z_4+z_6)\frac{dx_1}{dt}+z_6\frac{dx_2}{dt}-z_4\frac{dx_3}{dt}=H(t),$$

$$z_1\frac{dx_1}{dt}+z_2\frac{dx_2}{dt}+z_3\frac{dx_3}{dt}=0,$$

$$-z_4\frac{dx_1}{dt}-z_5\frac{dx_2}{dt}-(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0,$$

к системе двух уравнений для двухконтурной цепи

$$-(z_2+z_3+z_6)\frac{dx_2}{dt}-z_5\frac{dx_3}{dt}=H(t),$$

$$-z_5\frac{dx_2}{dt}-(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0$$

и одному уравнению для одноконтурной цепи

$$(z_3+z_4+z_5)\frac{dx_3}{dt}=0.$$

Заметим, что неполное совпадение контурных уравнений, полученных ранее, с уравнениями, выведенными из постановки экстремальной задачи по методу множителей Лагранжа, заключается в том, что ранее независимые контуры выбирались исследователем неформально, а при реализации метода множителей Лагранжа они были получены в результате формальных преобразований. Тем не менее следует отметить, что решения этих уравнений в обоих случаях дают эквивалентные значения искомых переменных.

Таким образом, на элементарной гидравлической цепи продемонстрирована тождественность двух подходов – алгебраического и экстремального:

1) исключение переменных (на основании ограничений, записанных в форме равенств, и возможности решения однородной системы уравнений):

$$Ax(t)=0,$$

$$A_d x_d(t)+A_c x_c(t)=0,$$

$$x_d(t)=A_d^{-1}A_c x_c(t);$$

2) применение метода множителей Лагранжа с последующими преобразованиями ради свертывания системы уравнений с минимальным количеством искомых переменных.

В первом случае получаем неканоническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащую c уравнений по количеству искомых функций (расходов на ветвях–хордах).

Во втором случае имеем систему функционально-дифференциальных уравнений ($m-1$ функциональное уравнение, связывающее расходы на всех ветвях цепи, и n обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих расходы на всех ветвях цепи и множители Лагранжа).

Есть некоторый положительный эффект в применении метода множителей Лагранжа при формировании модели нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи с сосредоточенными параметрами. Если при составлении замкнутой системы уравнений на основе первого и второго законов Кирхгофа и замыкающих соотношений решение вопроса об ориентации ветвей, контуров и выборе системы линейно независимых контуров и линейно независимого узла полностью возложено на исследователя, т. е. решается практически волюнтаристски, то метод множителей Лагранжа и последующие преобразования системы функционально-дифференциальных уравнений в некоторой степени позволяют формализовать решение вопроса о системе линейно независимых контуров и их ориентации.

Для задачи потокораспределения с введенным столбцом множителей Лагранжа $\Lambda=[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m-1}]^T$ математическая формулировка запишется в общем виде

$$\max\frac{1}{T}\left[-\sum_{i=1}^{n}H_i(t)x_i(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}h_i(t)dx\right]-\Lambda Ax(t)\,,$$

так как в силу замыкающих соотношений $h=h(x(t))$ предполагается, что максимизируемая функция является функцией $n+m-1$ переменных $x_i(t)$ и λ_j.

В силу необходимых и достаточных условий существования экстремума требуется

$$\frac{\partial F(x,\lambda)}{d\lambda_j}=Ax(t)=0,$$

$$\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x_i}=-H_i(t)-h_i(t)-\Lambda A=0.$$

Первая подсистема имеет $m-1$ функциональное уравнение, содержащее n неизвестных расходов. Из нее можно выразить $m-1$ расход через $c=n-m+1$ расход (расходы на ветвях дерева через расходы на хордах)

$$x_d(t)=-A_d^{-1}A_cx_c(t).$$

Подставив полученные выражения во вторую подсистему, получим систему n уравнений относительно c неизвестных расходов и $m-1$ неизвестных множителей Лагранжа:

$$-H_i(t)-h_i\big(x_c(t)\big)-\Lambda A_c=0,$$

$$-H_i(t)-h_i\left(-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right)-\Lambda A_d=0.$$

Так как вторая подсистема содержит $m-1$ уравнение и матрица A_d неособенная, то из нее определяются множители Лагранжа как функции хордовых расходов:

$$\Lambda=A_d^{-1}\left(-H_i(t)-h_i\left(-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right)\right).$$

Подставив это выражение в первую подсистему, получим систему c обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых хордовых расходов:

$$-H_{ci}(t)-h_i\left(x_c(t)\right)-A_d^{-1}\left(-H_{di}(t)-h_i\left(-A_d^{-1}A_c x_c(t)\right)\right)=0.$$

По решению этой системы при соответствующих начальных условиях последовательно определяются: расходы на ветвях дерева, потери давления на всех ветвях цепи, давления во всех линейно независимых узлах цепи, по несложным функциональным соотношениям.

Возвращаясь к приведенному примеру, оговорим, что необходимо принимать за начальные значения решения систем дифференциальных уравнений, описывающих режимы трех-, двух- и одноконтурных гидравлических цепей.

За начальные условия для трехконтурной цепи (см. рис. 3.5) может быть принято начальное состояние сети

$$x_1(0)=x_{01},\ x_2(0)=x_{02},\ x_3(0)=x_{03},$$

для двухконтурной цепи – первое промежуточное состояние

$$x_2(T_1)=x_2(t), x_3(T_1)=x_3(t)$$

и для одноконтурной цепи – второе промежуточное состояние

$$x_3(T_2)=x_3(t).$$

Здесь и далее под состоянием системы (начальным, промежуточным и конечным) понимается стационарное потокораспределение, соответствующее модели теории гидравлических цепей и определяемое решением системы нелинейных алгебраических уравнений.

Так, в трехконтурной цепи для определения начального состояния имеем систему вида

$$(S_1+S_4+S_6)x_1^2+S_6x_2^2+S_4x_3^2-2S_6x_1x_2+2S_4x_1x_3-H=0,$$

$$-S_6x_1^2+(S_2+S_5-S_6)x_2^2+S_5x_2^2+2S_6x_3^2+2S_5x_2x_3=0,$$

$$S_4x_1^2+S_5x_2^2+(S_3+S_4+S_5)x_1^2+2S_4x_1x_3+2S_5x_2x_3-H=0;$$

$$x_4=x_1+x_3,\ x_5=x_2+x_3, x_6=x_1-x_2;$$

$$P_2=P_1+H+S_4x_4^2,$$

$$P_3=P_1+H+S_4x_4^2+S_5x_5^2,$$

$$P_4=P_1+H+S_4x_4^2+S_6x_6^2.$$

Первое промежуточное состояние соответствует потокораспределению в двухконтурной цепи и определяется решением системы

$$(S_2+S_5-S_6)x_2^2+S_5x_3^2+2S_5x_2x_3=0,$$

$$S_5x_2^2+(S_3+S_4+S_5)x_3^2+2S_5x_2x_3-H=0,$$

$$x_4=x_3,\ x_5=x_2+x_3,\ x_6=-x_2;$$

$$P_2 = P_1 + H + S_4 x_4^2,$$

$$P_3 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_5 x_5^2,$$

$$P_4 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_6 x_6^2.$$

Второе промежуточное состояние соответствует потокораспределению в одноконтурной цепи и определяется решением системы

$$(S_3 + S_4 + S_5)x_3^2 - H = 0;$$

$$x_4 = x_3,\ x_5 = x_3,\ x_6 = 0;$$

$$P_2 = P_1 + H + S_4 x_4^2,$$

$$P_3 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_5 x_5^2,$$

$$P_4 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_6 x_6^2.$$

Конечное состояние соответствует потокораспределению по дереву и определяется системой

$$-x_4 = 0,\ -x_4 + x_5 + x_6 = 0,\ -x_5 = 0;$$

$$x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0;$$

$$P_2 = P_1 + H,\ P_3 = P_1 + H,\ P_4 = P_1 + H.$$

То есть для закрытой цепи имеем равные расходы на всех ветвях дерева и равные давления во всех линейно независимых узлах. Так как циркуляции нет, то расходы не зависят от сопротивлений и равны нулю. Здесь активный напор только способствует увеличению давления, так как циркуляция в разветвленной сети отсутствует.

При определении стационарного потокораспределения с помощью описанных выше систем приходится решать системы нелинейных алгебраических уравнений. Например, для начального состояния имеем систему трех уравнений, для промежуточных – двух и одного уравнения, для конечного состояния – линейную систему.

Для промежуточного состояния в случае одноконтурной цепи при расчете стационарного потокораспределения имеем одно нелинейное алгебраическое уравнение, решение которого находится аналитическим методом

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{H}{S_3 + S_4 + S_5}},$$

$$x_4 = x_3,\ x_5 = x_3,\ x_6 = 0,$$

$$P_3 = P_1 + H + \frac{S_4 H}{S_3 + S_4 + S_5},$$

$$P_4 = P_1 + H + \frac{(S_4 + S_5)H}{S_3 + S_4 + S_5}\,.$$

$$P_5 = P_1 + H + \frac{S_4 H}{S_3 + S_4 + S_5}\,.$$

Понятно, что из двух решений хордового расхода только положительное имеет физический смысл и соответствует циркуляции по единственному контуру цепи. Отрицательное решение создает противоток на третьей ветви, и в первом узле сходятся два противоположных потока, что в циркуляционной сети невозможно.

Для промежуточного состояния в случае двухконтурной цепи уже имеем систему двух нелинейных алгебраических уравнений, решение которой можно аналитически определить, например, методом исключения.

Так, из первого уравнения выразим x_2 через x_3

$$x_2 = \frac{-S_5 \pm \sqrt{S_5^2 - 4S_5(S_2 + S_5 - S_6)}}{S_2 + S_5 - S_6}x_3$$

и подставим во второе уравнение, что дает уравнение относительно одного неизвестного, которое и определим как

$$x_3 = \pm\mathrm{sqrt}\left\{H(S_2+S_5-S_6)^2 \Big/ \left\{(S_2+S_4+S_5)(S_2+S_5-S_6)^2 + S_5\left[-S_5 \pm \sqrt{S_5^2 - 4S_5(S_2+S_5-S_6)}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times 2(S_2+S_5-S_6) + \left[-S_5 \pm \sqrt{S_5^2 - 4S_5(S_2+S_5-S_6)}\right]\right\}\right\},$$

$$x_4 = x_3,\quad x_5 = x_2 + x_3,\quad x_6 = -x_2,$$

$$P_2 = P_1 + H + S_4 x_3^2,$$

$$P_3 = P_1 + H + S_5 x_2^2 + 2S_5 x_2 x_3 + (S_4 + S_5)x_3^2,$$

$$P_4 = P_1 + H + S_6 x_2^2 + S_4 x_3^2.$$

Учитывая сложность и громоздкость аналитического решения стационарного потокораспределения для двухконтурной гидравлической цепи, и во избежание ошибок при преобразованиях в процессе поиска решения ручным способом стоит воспользоваться, например, математическим редактором Maple.

Начальное состояние определяется потокораспределением в трехконтурной цепи и описывается системой трех нелинейных уравнений относительно трех неизвестных расходов на хордах цепи:

$$(S_1 + S_4 + S_6)x_1^2 + S_6 x_2^2 + S_4 x_3^2 - 2S_6 x_1 x_2 + 2S_4 x_1 x_3 - H = 0,$$

$$-S_6 x_1^2 + (S_2 + S_5 - S_6)x_2^2 + S_5 x_3^2 + 2S_6 x_1 x_2 + 2S_5 x_2 x_3 = 0,$$

$$S_4 x_1^2 + S_5 x_2^2 + (S_3 + S_4 + S_5)x_3^2 + 2S_4 x_1 x_3 + 2S_5 x_2 x_3 - H = 0.$$

Далее определяются все остальные параметры цепи:

$$x_4 = x_1 + x_2,\ x_5 = x_2 + x_3,\ x_6 = x_1 - x_2,$$

$$P_2 = P_1 + H + S_4 x_4^2,$$

$$P_3 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_5 x_5^2,$$

$$P_4 = P_1 + H + S_4 x_4^2 + S_6 x_6^2.$$

Таким образом, для инерционной модели определены понятия и даны методы построения моделей и расчета искомых параметров. Далее модели будут уточняться за счет введения в замыкающие уравнения дополнительных слагаемых, учитывающих различные факторы, действующие в системе.

Здесь нами было убедительно показано, что аналитическое решение для рассматриваемых примеров, в принципе, возможно, но требует значительного объема рутинных выкладок, и конечный результат получается труднообозримым даже для стационарного потокораспределения в трехконтурной цепи. Поэтому единственным путем анализа нестационарного потокораспределения является численное решение систем функционально-дифференциальных уравнений с заданными или рассчитанными начальными условиями.

3.6. Промежуточные состояния инерционной гидравлической цепи с линейным трением

Разобранные выше примеры трансформации из начального установившегося состояния потокораспределения в трехконтурной цепи через промежуточные состояния до конечного в разветвленной цепи приводят нас к необходимости уточнения замыкающих соотношений. В настоящем разделе предполагается, что в системе труб действует линейное трение, а следовательно, в замыкающее соотношение нужно включить дополнительное слагаемое. Рассматриваемое далее замыкающее соотношение состоит из инерционного, линейного и постоянного слагаемых и может быть представлено для ветви в виде

$$h_i(t) = -r_i \frac{dx_i}{dt} + c_i\, x_i(t) \pm H_{gi} - H_i(t),$$

где c_i – некоторые коэффициенты, характеризующие линейное трение на i-й ветви, что соответствует ламинарному режиму течения; H_{gi} – гравитационный напор на i-й ветви; $H_i(t)$ – действующий напор на i-й ветви – известная, изменяемая во времени функция для задач анализа нестационарного потокораспределения.

Понятно, что уравнения первого закона Кирхгофа и в этом случае остаются неизменными:

$$Ax(t) = Q(t),$$

а для закрытой цепи имеем $Q(t) = 0$. Из них, как и ранее, определяются расходы на ветвях дерева $x_d(t)$ через расходы на хордах $x_c(t)$, т. е.

$$x_d(t) = A_d^{-1} Q(t) - A_d^{-1} A_c x_c(t).$$

Для функционала относительно переменных расходов и потерь напора на ветвях запишем

$$\max \frac{1}{T}\left[-\sum_{i=1}^{c} H_{ci}(t)x_{ci}(t)-\sum_{i=c+1}^{n} H_{di}(t)x_{di}(t)+\sum_{i=1}^{c}\int_{0}^{x_{ci}} h_{ci}(x)dx+\sum_{i=c+1}^{n}\int_{0}^{x_{di}} h_{di}(x)dx\right].$$

Далее, с учетом вида замыкающего соотношения запишем системы уравнений для рассмотренной ранее трехконтурной гидравлической цепи с четырьмя узлами и шестью ветвями (см. рис. 3.5).

Уравнения первого закона Кирхгофа:

$$-x_1(t)-x_3(t)+x_4(t)=0,$$

$$-x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,$$

$$x_2(t)+x_3(t)-x_5(t)=0;$$

выражения для потока по дереву

$$x_4(t)=x_1(t)+x_3(t),$$

$$x_5(t)=x_2(t)+x_3(t),$$

$$x_6(t)=x_1(t)-x_2(t).$$

Функционал для этой цепи и с принятыми замыкающими соотношениями имеет вид

$$\max\left[\begin{array}{c} -r_1x_1(t)\frac{dx_1}{dt}+\frac{c_1}{2}x_1^2(t)\pm H_{g1}x_1(t)-r_2x_2(t)\frac{dx_2}{dt}+\frac{c_2}{2}x_2^2(t)\pm H_{g2}x_2(t)- \\ -r_3x_3(t)\frac{dx_3}{dt}+\frac{c_3}{2}x_3^2(t)\pm H_{g3}x_3(t)-H(t)x_3(t)-r_4x_4(t)\frac{dx_4}{dt}+\frac{c_4}{2}x_4^2\pm H_{g4}x_4(t)- \\ -r_5x_5(t)\frac{dx_5}{dt}+\frac{c_5}{2}x_5^2(t)\pm H_{g5}x_5(t)-r_6x_6(t)\frac{dx_6}{dt}+\frac{c_6}{2}x_6^2(t)\pm H_{g6}x_6(t) \end{array}\right].$$

Подставляя в функционал выражения расходов на ветвях дерева через расходы на хордах цепи, после приведения подобных членов получим

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\left[-(r_1+r_4+r_6)x_1(t)+r_6x_2(t)-r_4x_3(t)\right]\frac{dx_1}{dt}+$$

$$+\left[r_6x_1(t)-(r_2+r_5+r_6)x_2(t)-r_5x_3(t)\right]\frac{dx_2}{dt}+\left[-r_4x_1(t)-r_5x_2(t)-(r_3+r_4+r_5)x_3(t)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(c_1+c_4+c_6)x_1^2(t)+\frac{1}{2}(c_2+c_5+c_6)x_2^2(t)+\frac{1}{2}(c_3+c_4+c_5)x_3^2(t)+$$

$$+c_4x_1(t)x_3(t)+c_5x_2(t)x_3(t)-c_6x_1(t)x_2(t)\pm\left(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6}\right)x_1(t)\pm$$

$$\pm\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)x_2(t)\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)x_3(t)-H(t)x_3(t).$$

Продифференцировав это выражение по x_1, x_2 и x_3, получим замкнутую систему трех неоднородных дифференциальных уравнений относительно трех искомых функций:

$$-(r_1+r_4+r_6)\frac{dx_1}{dt}+r_6\frac{dx_2}{dt}-r_4\frac{dx_3}{dt}+(c_1+c_4+c_6)x_1-c_6x_2+c_4x_3\pm$$

$$\pm\left(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6}\right)=0,$$

$$-r_6\frac{dx_1}{dt}-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}-c_6x_1+(c_2+c_5+c_6)x_2+c_5x_3\pm\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)=0,$$

$$-r_4\frac{dx_1}{dt}-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}+c_4x_1+c_5x_2+(c_3+c_4+c_5)x_3\pm$$

$$\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-H(t)=0.$$

Для решения полученной системы уравнений задаются начальные условия, соответствующие начальному состоянию гидравлической цепи.

Во время протекания процесса потокораспределения регулятор на первой ветви работает согласно закону изменения диаметра:

$$D_1(t)=D_{01}\mathrm{e}^{-\lambda_1\Theta_1},$$

$$r_1(t)=\frac{4L_1}{\pi D_{01}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_1\Theta_1}}=r_{01}\mathrm{e}^{2\lambda_1\Theta_1},$$

$$c_1(t)=c_{01}\mathrm{e}^{\lambda_1\Theta_1},$$

$$\Theta_1=t-\tau_1.$$

В процессе изменения сопротивления ветви 1 наступает момент kt_1, когда оно приобретает большое значение, что позволяет считать расход по этой ветви равным нулю. Следовательно, схема трансформируется в двухконтурную цепь, для которой справедливо описание

$$-x_3(t)+x_4(t)=0,$$

$$-x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,$$

$$x_2(t)+x_3(t)-x_5(t)=0.$$

Функционал для этой цепи имеет вид

$$\sum_{i=2}^{6}\left[-r_ix_i(t)\frac{dx_i}{dt}+c_i\frac{x_i^2(t)}{2}\pm H_{gi}x_i(t)\right]-H(t)x_3(t).$$

Поток по ветвям дерева определяется из уравнений первого закона Кирхгофа:

$$x_4=x_3,\quad x_5=x_2+x_3,\quad x_6=-x_2.$$

Подставив эти выражения в функционал, продифференцировав его по неизвестным функциям и преобразовав полученные выражения, имеем систему двух дифференциальных уравнений относительно $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}+(c_2+c_5+c_6)x_2+c_5x_3\pm\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)=0,$$

$$-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}+c_5x_2+(c_3+c_4+c_5)x_3\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-H(t)=0.$$

За начальные условия можно взять потокораспределение в трехконтурной цепи в момент времени $t=nT_1$, т. е.

$$x_2(0)=x_2(nT_1),\ x_3(0)=x_3(nT_1).$$

В процессе изменения потокораспределения работает регулятор на второй ветви цепи, согласно закону

$$D_2(t)=D_2^0\mathrm{e}^{-\lambda_2\Theta_2},$$

$$r_2(t)=r_{02}\mathrm{e}^{2\lambda_2\Theta_2},$$

$$c_2(t)=c_{02}\mathrm{e}^{\lambda_2\Theta_2},$$

$$\Theta_2=t-\tau_2.$$

По истечении времени nT_2 сопротивление на второй ветви становится достаточно большим, что приближенно соответствует нулевому расходу, и схема трансформируется в одноконтурную цепь, для которой имеем

$$-x_3+x_4=0,$$

$$-x_4+x_5+x_6=0,$$

$$x_3-x_5=0.$$

Функционал для этой цепи

$$-r_3\frac{dx_3}{dt}x_3+c_3\frac{x_3^2}{2}\pm H_{g3}x_3-r_4\frac{dx_4}{dt}x_4+c_4\frac{x_4^2}{2}\pm H_{g4}x_4-Hx_4-$$

$$-r_5\frac{dx_5}{dt}x_5+c_5\frac{x_5^2}{2}\pm H_{g5}x_5-r_6\frac{dx_6}{dt}x_6+c_6\frac{x_6^2}{2}\pm H_{g6}x_6.$$

Для потока по дереву имеем выражения

$$x_4=x_3,\ x_5=x_3,\ x_6=0.$$

Подставив эти выражения в функционал, взяв производные по искомым функциям и преобразовав полученные выражения, получим одно дифференциальное уравнение

$$-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}+(c_3+c_4+c_5)x_3\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-H(t)=0,$$

которое при начальном условии $x_3(0)=x_3(nT_2)$ имеет единственное решение.

И в этом процессе действует регулятор на третьей ветви согласно закону изменения диаметра:

$$D_3(t) = D_{03}\mathrm{e}^{-\lambda_3\Theta_3},$$

$$c_3(t) = c_{03}\mathrm{e}^{\lambda_3\Theta_3},$$

$$r_3(t) = r_{03}\mathrm{e}^{2\lambda_3\Theta_3},$$

$$\Theta_3 = t - \tau_3,$$

и через время nT_3 цепь превращается в дерево (разветвленный граф), потокораспределение по которому описывается следующим образом:

$$x_4(t) = 0,$$

$$-x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) = 0,$$

$$-x_6(t) = 0,$$

функционал этой цепи

$$-z_4\frac{dx_4}{dt}x_4 + S_4^0\frac{x_4^2}{2} \pm H_{g4}x_4 - Hx_4 - z_5\frac{dx_5}{dt}x_5 + S_5^0\frac{x_5^2}{2} \pm H_{g5}x_5 - z_6\frac{dx_6}{dt}x_6 + S_6^0\frac{x_6^2}{2} \pm H_{g6}.$$

Для потока по дереву имеем

$$x_4(t) = 0,\ x_5(t) = 0,\ x_6(t) = 0,$$

и значение функционала равно нулю.

3.7. Промежуточные состояния инерционной гидравлической цепи с емкостью и нелинейным трением

Продолжим усложнение математической модели динамического потокораспределения в гидравлической цепи путем введения в замыкающее соотношение дополнительного слагаемого, учитывающего квадратичное трение.

Выше были рассмотрены две модели: инерционная, содержащая только силы инерции и действующие напоры, и инерционная с линейным трением и гравитацией, содержащая силы инерции, трения при ламинарном режиме течения, силы тяжести и действующие напоры. В настоящем разделе замыкающее соотношение дополняется квадратичным слагаемым, описывающим переходные режимы от ламинарного к турбулентному, согласно широко применяемому в гидравлике закону Дарси.

Исходя из этого закона замыкающее соотношение может быть представлено в виде

$$h_i(t) = -r_i(t)\frac{dx_i}{dt} + c_i(t)x_i(t) + s_i(t)x_i^2(t) \pm H_{gi} - H_i(t),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $S_i(t)$ – коэффициент гидравлического сопротивления i-й ветви.

Теперь модель динамического потокораспределения в гидравлической цепи можно сформулировать и записать следующим образом:

– найти вектор-функцию расходов гидравлической цепи

$$x(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right]^T,$$

обращающую в максимум функционал

$$\Phi(x(t))=\frac{1}{T}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[-r_i(t)x_i(t)\frac{dx_i}{dt}+c_i(t)\frac{x_i^2(t)}{2}+s_i(t)\frac{x_i^3(t)}{3}\pm H_{gi}x_i(t)-H_i(t)x_i(t)\right]\right\}$$

при ограничениях

$$Ax(t)=0.$$

Далее можно с помощью преобразований свести задачу на отыскание условного экстремума к задаче на безусловный экстремум, используя свойства гидравлической цепи, а именно, разбиение графа на дерево и хорды и соответственно его матричное описание – на блоки.

Функционал можно записать относительно неизвестных параметров расходов на хордах цепи в виде

$$\Phi(x_c(t))=\frac{1}{T}\left\{-H_d^T\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]-H_c^Tx_c(t)-R_d\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]\frac{d}{dt}\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]-\right.$$

$$-R_cx_c(t)\frac{dx_c}{dt}+\left(\frac{C_d}{2}\right)^T\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]^2+\left(\frac{C_c}{2}\right)^Tx_c^2(t)+\left(\frac{S_d}{3}\right)^T\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]^3+\left(\frac{S_c}{3}\right)^Tx_c^3(t)\pm$$

$$\left.\pm H_{gd}^T\left[-A_d^{-1}A_cx_c(t)\right]\pm H_{gc}^Tx_c(t)\right\}.$$

Имеем экстремальную задачу без ограничений относительно меньшего числа неизвестных параметров.

Теперь можно, как ранее в примере трансформации трехконтурной гидравлической цепи в дерево, записать системы уравнений для различных промежуточных состояний.

Для трехконтурной цепи потокораспределение определяется решением системы уравнений

$$-(r_1+r_4+r_6)\frac{dx_1}{dt}+r_6\frac{dx_2}{dt}-r_4\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6}\right)-$$

$$-(c_1+c_4+c_6)x_1+c_6x_2-c_4x_3-(s_1+s_4+s_6)x_1^2-s_6x_2^2-s_4x_3^2+2s_6x_1x_2-2s_4x_1x_3,$$

$$r_6\frac{dx_1}{dt}-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-z_5\frac{dx_3}{dt}=\mp\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)+c_6x_1-$$

$$-(c_2+c_5+c_6)x_2-c_5x_3+s_6x_1^2-(s_2+s_5-s_6)x_2^2-s_5x_3^2-2s_6x_1x_2-2s_5x_2x_3,$$

$$-r_4\frac{dx_1}{dt}-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-c_4x_1-c_5x_2-$$

$$-(c_3+c_4+c_5)x_3-s_4x_1^2-s_5x_2^2-(s_3+s_4+s_5)x_3^2-2s_4x_1x_3-2s_5x_2x_3$$

с начальными условиями, соответствующими начальному состоянию цепи

$$x_1(0)=x_1^0,\quad x_2(0)=x_2^0,\quad x_3(0)=x_3^0.$$

и изменяемыми на первой ветви параметрами

$$D_1(t) = D_{01}\mathrm{e}^{-\lambda_1\Theta_1},$$

$$r_1(t) = \frac{4L_1}{\pi D_{01}^2 \mathrm{e}^{-2\lambda_1\Theta_1}} = r_{01}\mathrm{e}^{2\lambda_1\Theta_1},$$

$$c_1(t) = c_{01}\mathrm{e}^{\lambda_1\Theta_1},$$

$$\Theta_1 = t - \tau_1,$$

$$s_1(t) = s_{01}\mathrm{e}^{5\lambda_1\Theta_1}.$$

Для двухконтурной гидравлической цепи получим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$-(r_2 + r_5 + r_6)\frac{dx_2}{dt} - r_5\frac{dx_3}{dt} = \mp(H_{g2} + H_{g5} - H_{g6}) -$$

$$-(s_2 + c_5 + c_6)x_2 - c_5x_3 - (s_2 + s_5 - s_6)x_2^2 - s_5x_3^2 - 2s_5x_2x_3,$$

$$-r_5\frac{dx_2}{dt} - (r_3 + r_4 + r_5)\frac{dx_3}{dt} = H \mp (H_{g3} + H_{g4} + H_{g6}) -$$

$$-c_5x_2 - (c_3 + c_4 + c_5)x_3 - s_5x_2^2 - (s_3 + s_4 + s_5)x_3^2 - 2s_5x_2x_3$$

с начальными условиями, соответствующими первому промежуточному состоянию

$$x_2(0) = x_2(kT), \quad x_3(0) = x_3(kT),$$

и изменяемыми на первой ветви параметрами

$$D_2(t) = D_2^0\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\Theta_2},$$

$$r_2(t) = r_{02}\,\mathrm{e}^{2\lambda_2\Theta_2},$$

$$c_2(t) = c_{02}\mathrm{e}^{\lambda_2\Theta_2}, \quad \Theta_2 = t - \tau_2,$$

$$s_2(t) = s_{02}\mathrm{e}^{5\lambda_2\Theta_2}.$$

Для одноконтурной гидравлической цепи потокораспределение описывается одним дифференциальным уравнением

$$-(r_3 + r_4 + r_5)\frac{dx_3}{dt} = H \mp (H_{g3} + H_{g4} + H_{g5}) - (c_3 + c_4 + c_5)x_3 - (s_3 + s_4 + s_5)x_3^2$$

с начальными условиями, соответствующими второму промежуточному состоянию

$$x_3(0) = x_3(kT_2),$$

и изменяемыми на третьей ветви параметрами

$$D_3(t) = D_{03}\mathrm{e}^{-\lambda_3\Theta_3},$$

$$c_3(t) = c_{03}\mathrm{e}^{\lambda_1\Theta_1}, \quad r_3(t) = r_{03}\mathrm{e}^{2\lambda_1\Theta_1}, \quad \Theta_3 = t - \tau_3,$$

$$s_3(t) = s_{03}\mathrm{e}^{5\lambda_2\Theta_3}.$$

Конечное состояние, соответствующее потокораспределению в разветвленной гидравлической цепи, имеет тривиальное решение (нулевые расходы на всех участках цепи и нулевое значение функционала).

3.8. Промежуточные состояния для открытой многоконтурной гидравлической цепи

Закрытые гидравлические цепи являются отображением циркуляционных трубопроводных систем теплоснабжения, но наряду с ними существуют разнообразные технические системы транспорта, в которых происходит разбор вещества (системы водоснабжения, газоснабжения и др.). В описательном плане при формализации математической модели нестационарного потокораспределения в гидравлической цепи это приводит в записи уравнений первого закона Кирхгофа к неоднородным уравнениям, т. е.

$$Ax(t) = Q(t),$$

где $Q(t)$ – вектор-функция размерностью $(m-1)\times 1$, характеризующая интенсивность источников и стоков в узлах цепи.

Как и ранее, рассматриваем многоконтурную гидравлическую цепь. При движении капельной жидкости по цепи действуют силы инерции, квадратичного трения, емкостные силы, сила тяжести и действующие напоры, т. е. замыкающее соотношение для каждой ветви с учетом изменяемости параметров представимо в виде

$$h_i(t) = -r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} + c_i(t)x_i(t) + s_i(t)x_i^2(t) \pm H_{gi} - H_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

В предположении об открытости гидравлической цепи математическая модель нестационарного потокораспределения изменится только в записи ограничений, т. е. системы уравнений первого закона Кирхгофа, и приобретет следующий вид:

– найти вектор-функцию расходов на всех ветвях цепи

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T,$$

обращающую в максимум функционал

$$\Phi(x(t)) = -\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{x_i(t)}[h_i(t) - H_i(t)]dx$$

при условиях

$$Ax(t) = Q(t).$$

Как и ранее, используя свойство линейности системы ограничений и равенство ранга матрицы A количеству уравнений, найдем выражения $x_d(t)$ через $x_c(t)$:

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) - A_d^{-1}A_c x_c(t).$$

Произведение матриц $A_d^{-1}A_c$ принято [6, 62, 71, 178, 188] обозначать как B_d^T – матрица размерностью $c\times n$, а произведение $A_d^{-1}Q(t)$ обозначим через $\Omega(t)$. Тогда имеем

$$x_d(t) = \Omega(t) + B_d^T x_c(t).$$

Это матричное уравнение говорит о том, что для всякого фиксированного момента времени $t = t_0$ в некоторой гиперплоскости $x_d(t_0)Ox_c(t_0)$ имеем совокупность прямых, не параллельных оси $Ox_c(t_0)$, а следовательно, каждая прямая может рассматриваться как точка некоторой двойственной гиперплоскости с координатами $\left(\Omega(t_0), B_d^T\right)$, и можно применить многомерное преобразование Лежандра [11, 12, 67]. Причем здесь основной акцент будет сделан на активных преобразованиях, позволяющих сократить количество искомых переменных. Эти преобразования базируются на специфике поставленной задачи анализа нестационарного потокораспределения в открытых гидравлических цепях.

Поскольку вектор расходов на всех ветвях цепи может быть представлен в блочном виде (вектор расходов на ветвях дерева и вектор расходов на хордах) и с учетом специфики ограничений, отраженной в линейных неоднородных уравнениях, для многоконтурной гидравлической цепи всегда существует возможность записать выражения $x_d(t)$ через $x_c(t)$, решая систему линейных неоднородных уравнений. В соответствии с этим и функционал можно представить в виде трех слагаемых:

$$\Phi(x(t)) = -\frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)} H_i(t)dx - \sum_{i=1}^{c}\int_0^{x_i(t)} h_{ci}(t)dx - \sum_{i=c+1}^{n} h_{di}(t)dx\right],$$

но

$$h_{ci}(t) = -r_{ci}(t)\frac{dx_{ci}(t)}{dt} + c_{ci}(t)x_{ci}(t) + s_{ci}(t)x_{ci}^2(t) \pm H_{gi} - H_i(t),$$

$$h_{di}(t) = -r_{di}(t)\frac{dx_{di}(t)}{dt} + c_{di}(t)x_{di}(t) + s_{di}(t)x_{di}^2(t) \pm H_{gi} - H_i(t),$$

$$x_d(t) = \Omega(t) + B_d^T x_c(t),$$

$$\frac{dx_d(t)}{dt} = \frac{d\Omega(t)}{dt} + B_d^T\frac{dx_c(t)}{dt}, \quad x_d^2(t) = \left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right]^2.$$

Согласно приведенным выражениям, функционал в пространстве хордовых расходов принимает вид

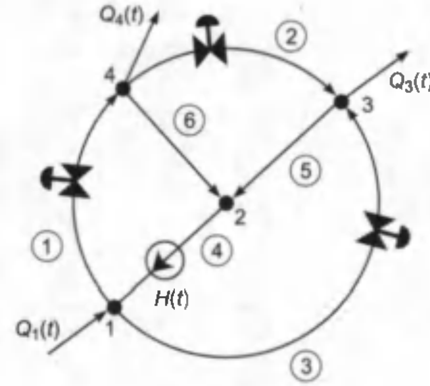
$$x_c(t) = -\frac{1}{T}\left\{\sum_{i=1}^{n} H_i(t)x_{ci}(t) - \sum_{i=1}^{c}\left[-r_{ci}(t)x_{ci}(t)\frac{dx_{ci}}{dt} + c_{ci}(t)\frac{x_{ci}^2(t)}{2} + s_{ci}(t)\frac{x_{ci}^3(t)}{3} \pm H_{gi}\right] - \right.$$

$$-R_d(t)\left[\frac{d\Omega}{dt} + B_d^T\frac{dx_c}{dt}\right]\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right] +$$

$$\left. + \frac{C_d(t)}{2}\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right]^2 + \frac{S_d(t)}{3}\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right]^3 \pm H_{gd}\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right]\right\}.$$

Таким образом, задача анализа нестационарного потокораспределения для открытой $(\Omega(t) \neq 0)$ и активной $(H(t) \neq 0)$ многоконтурной гидравлической цепи заключается в отыскании таких хордовых расходов, которые максимизировали бы полученный функционал.

Рис. 3.10. Открытая и активная гидравлическая цепь с тремя контурами



Далее рассмотрим эту постановку для описанного выше примера.

Пусть задана открытая и активная трехконтурная гидравлическая цепь (рис. 3.10). Для этой цепи конечная система трех дифференциальных уравнений запишется в виде

$$-(r_1+r_4+r_6)\frac{dx_1}{dt}+r_6\frac{dx_2}{dt}-r_4\frac{dx_3}{dt}+(c_1+c_5+c_6-2s_4Q_1-2s_6Q_4)x_1-(c_6-2s_6Q_4)x_2+$$

$$+(c_4-2s_4Q_1)x_3+(s_1+s_4+s_6)x_1^2+s_6x_2^2+s_4x_3^2-2s_6x_1x_2+2s_4x_1x_3\pm(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6})-$$

$$-H+r_4\frac{dQ_1}{dt}+r_6\frac{dQ_4}{dt}-s_4^0Q_1-s_6^0Q_4+s_4Q_1^2+s_6Q_4^2=0,$$

$$r_6\frac{dx_1}{dt}-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}-(c_6-2s_6Q_4)x_1+(c_2+c_5+c_6-2s_5Q_3-2s_6Q_4)x_2+$$

$$+(c_6-2s_5Q_3)x_3-s_6x_1^2+(s_2+s_5+s_6)x_2^2+c_5x_3^2+2c_6x_1x_2+2s_5x_2x_3\pm(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6})+$$

$$+r_5\frac{dQ_3}{dt}-r_6\frac{dQ_4}{dt}-c_5Q_3+c_6Q_4+s_5Q_3^2-s_6Q_4^2=0,$$

$$-r_4\frac{dx_1}{dt}-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}+(c_4-2s_4Q_1)x_1+(c_5-2s_5Q_3)x_2+$$

$$+(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3)x_3+s_4x_1^2+s_5x_2^2+(s_3+s_4+s_5)x_3^2+2s_4x_1x_3+$$

$$+2s_5x_2x_3\pm(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5})-H+r_4\frac{dQ_1}{dt}+r_5\frac{dQ_3}{dt}-c_4Q_1-c_5Q_3+s_4Q_1^2+s_5Q_3^2=0$$

с начальными условиями, соответствующими начальному состоянию

$$x_1(0)=x_1^0,\quad x_2(0)=x_2^0,\quad x_3(0)=x_3^0,$$

и изменяемыми на первой ветви параметрами

$$D_1(t)=D_{01}e^{-\lambda_1\Theta_1},$$

$$r_1(t)=\frac{4L_1}{\pi D_{01}^2e^{-2\lambda_1\Theta_1}}=r_{01}e^{2\lambda_1\Theta_1},$$

$$c_1(t)=c_{01}e^{\lambda_1\Theta_1},\quad \Theta_1=t-\tau_1,$$

$$s_1(t)=s_{01}e^{5\lambda_1\Theta_1}.$$

Для двухконтурной гидравлической цепи (рис. 3.11) получим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$-\left(r_2+r_5+r_6\right)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}+\left(c_2+c_5+c_6-2s_5Q_3+2s_6Q_4\right)x_2+\left(c_5-2s_5Q_3\right)x_3+$$

$$+\left(s_2+s_5+s_6\right)x_2^2+s_5x_3^2+2s_5x_2x_3\pm\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)+r_5\frac{dQ_3}{dt}-r_6\frac{dQ_4}{dt}-$$

$$-c_5Q_3+c_6Q_4+s_5Q_3^2-s_6Q_4^2=0,$$

$$-r_5\frac{dx_2}{dt}-\left(r_3+r_4+r_5\right)\frac{dx_3}{dt}+\left(c_5-2s_5Q_3\right)x_2+\left(c_3+c_4+c_5-2s_5Q_3\right)x_3+s_5x_2^2+\left(s_3+s_4+s_5\right)x_3^2-$$

$$-2s_5x_2x_3\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-H+r_4\frac{dQ_1}{dt}+r_5\frac{dQ_3}{dt}-c_4Q_1-c_5Q_3+s_4Q_1^2+s_5Q_3^2=0$$

с начальными условиями, соответствующими первому промежуточному состоянию

$$x_2(0)=x_2(kT),\quad x_3(0)=x_3(kT),$$

и изменяемыми на первой ветви параметрами

$$D_2(t)=D_2^0e^{-\lambda_2\Theta_2},\quad r_2(t)=r_2^0e^{2\lambda_2\Theta_2},$$

$$c_2(t)=c_{02}e^{\lambda_2\Theta_2},\quad \Theta_2=t-\tau_2,$$

$$s_2(t)=s_{02}e^{5\lambda_2\Theta_2}.$$

Для одноконтурной гидравлической цепи (рис. 3.12) потокораспределение описывается одним дифференциальным уравнением

$$-\left(r_3+r_4+r_5\right)\frac{dx_3}{dt}+\left(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3\right)x_3+\left(s_3+s_4+s_5\right)x_3^2\pm$$

$$\pm\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-H+r_4\frac{dQ_1}{dt}+r_5\frac{dQ_3}{dt}-c_4Q_1-c_5Q_3+s_4Q_1^2+s_5Q_3^2=0$$

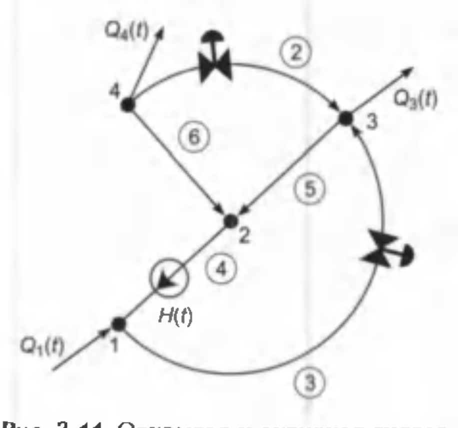


Рис. 3.11. Открытая и активная гидравлическая цепь с двумя контурами

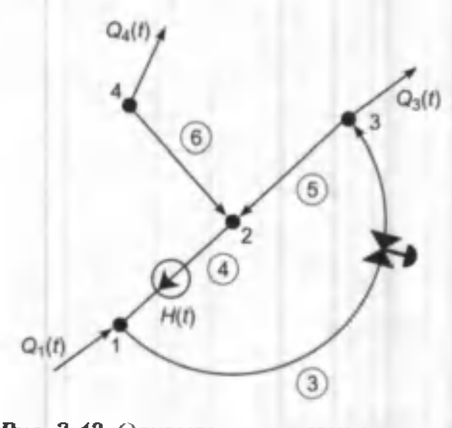


Рис. 3.12. Открытая и активная гидравлическая цепь с одним контуром

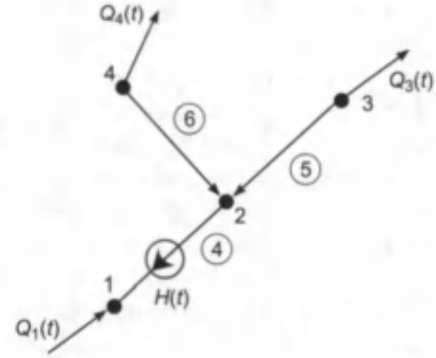


Рис. 3.13. Открытая и активная гидравлическая цепь без контуров

с начальными условиями, соответствующими второму промежуточному состоянию

$$x_3(0) = x_3\left(kT_2\right),$$

и изменяемыми на третьей ветви параметрами

$$D_3(t) = D_{03}e^{-\lambda_3\Theta_3},$$

$$c_3(t) = c_{03}e^{\lambda_3\Theta_3}, \quad r_3(t) = r_{03}e^{2\lambda_3\Theta_3}, \quad \Theta_3 = t - \tau_3,$$

$$s_3(t) = s_{03}e^{5\lambda_3\Theta_3}.$$

Конечное состояние, соответствующее потокораспределению в разветвленной гидравлической цепи (рис. 3.13), удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$x_4(t) = -Q_1(t),$$

$$-x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) = 0,$$

$$-x_5(t) = Q_3(t),$$

и функционал запишется в виде

$$-r_4Q_1\frac{dQ_1}{dt} + \frac{c_4}{2}Q_1^2 - \frac{s_4}{3}Q_1^3 \mp H_{g4}Q_1 + HQ_1 - r_5Q_3\frac{dQ_3}{dt} + \frac{c_5}{2}Q_3^2 - \frac{s_5}{3}Q_3^3 \mp$$

$$\mp H_{g5}Q_3 - r_6Q_4\frac{dQ_4}{dt} + \frac{c_6}{2}Q_4^2 - \frac{s_6}{3}Q_4^3 \mp H_{g6}Q_4.$$

Таким образом, из уравнений первого закона Кирхгофа находим решение, при котором функционал в каждый фиксированный момент времени имеет максимальное значение (энтропия положительна для открытой системы). Расходы по ветвям дерева соответствуют расходам источника и стоков.

3.9. Неоднородные гидравлические цепи

Ранее было показано, что подразумевается под понятием неоднородности гидравлической цепи с точки зрения числовых характеристик ветвей цепи, однако при этом не оговаривался вид замыкающих соотношений. Приведенный анализ закрытых и открытых гидравлических цепей ставит вопрос о расширении понятия неоднородности на принимаемые к описанию замыкающие соотношения, поэтому теперь мы можем представить скорректированное определение. Под *неоднородной гидравлической цепью* будем понимать такую многоконтурную цепь, в которой характеристики ветвей не только сильно различаются по численным значениям, но и замыкающие соотношения могут иметь разные формы записи, отражающие физические процессы, протекающие в ветвях.

Возникает необходимость исследования динамического потокораспределения в гидравлических цепях при разных формах записи замыкающих соотношений. Рассмотрим два частных случая: во-первых, когда на ветвях–хордах заданы замыкающие соотношения в виде линейных дифференциальных форм, что адекватно ламинарному режиму, а на ветвях дерева – квадратичные дифференциальные формы, что соответствует турбулентному режиму; во-вторых, поменяем местами эти соотношения: на хордах – квадратичный закон движения, на ветвях дерева – линейный.

В общем виде математическую модель динамического потокораспределения в неоднородной многоконтурной гидравлической цепи можно записать как задачу на условный экстремум:

– найти компоненты вектор-функции

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T,$$

обращающей в максимум функционал

$$\Phi(x(t)) = \frac{1}{T}\left[-\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)} H_i(t)dx - \sum_{i=1}^{c}\int_0^{x_{ci}(t)} h_{ci}(t)dx - \sum_{i=c+1}^{n}\int_0^{x_{di}(t)} h_{di}(t)dx\right]$$

при условиях

$$Ax(t) = Q(t).$$

При этом

$$h_{ci}(t) = -r_{ci}(t)\frac{dx_{ci}(t)}{dt} + c_{ci}(t)x_{ci}(t) \pm H_{gi}, \quad i = 1, 2, ..., c$$

и

$$h_{di}(t) = -r_{di}(t)\frac{dx_{di}(t)}{dt} + c_{di}(t)x_{di}(t) + s_{di}(t)x_{di}^2(t) \pm H_{gi} - H_i(t), \quad i = c+1, ..., n.$$

Как и ранее, воспользовавшись линейностью ограничений и возможностью разбиения орграфа на дерево и хорды, запишем выражения расходов на ветвях дерева через расходы на хордах для открытой гидравлической цепи:

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t).$$

Если ввести обозначение $\Omega(t) = A_d^{-1}Q(t)$, то

$$x_d(t) = \Omega(t) + B_d^T x_c(t).$$

После этого замыкающие соотношения запишутся как

$$h_{ci}(t) = -r_{ci}(t)\frac{dx_{ci}(t)}{dt} + c_{ci}(t)x_{ci}(t) \pm H_{gi}, \quad i = 1, 2, ..., c$$

и

$$h_d(t) = -R_d(t)\left[\frac{d\Omega}{dt} + B_d^T\frac{dx_c}{dt}\right] + C_d(t)\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right] + S_d(t)\left[\Omega(t) + B_d^T x_c(t)\right]^2 \pm H_{gd} - H(t).$$

Подставив замыкающие соотношения в функционал, получим

$$\Phi(x_c(t))=\frac{1}{T}\Bigg\{-\sum_{i=1}^{n}H_i(t)x_i(t)-R_c(t)x_c(t)\frac{dx_c(t)}{dt}+\frac{C_c(t)}{2}x_c^2(t)\pm H_{gc}x_c(t)-$$

$$-R_d(t)\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]\left[\frac{d\Omega(t)}{dt}+B_d^T\frac{dx_c(t)}{dt}\right]+\frac{C_d(t)}{2}\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]^2+$$

$$+\frac{S_d(t)}{3}\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]^3\pm H_{gd}\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]-H(t)\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]\Bigg\}\to\max.$$

Решение задачи на безусловный экстремум можно при соответствующих начальных условиях получить из системы дифференциальных уравнений, формируемых на основе необходимых и достаточных условий существования экстремума.

Во втором случае записи замыкающих соотношений для ветвей дерева и хорд поменяются местами, т. е.

$$h_{di}(t)=-r_{di}(t)\frac{dx_{di}(t)}{dt}+c_{di}(t)x_{di}(t)+s_{di}(t)x_{di}^2(t)\pm H_{gdi},\quad i=1,2,\ldots,m-1$$

и

$$h_{cdi}(t)=-r_{ci}(t)\frac{dx_{ci}(t)}{dt}+c_{ci}(t)x_{ci}(t)\pm H_{gci}-H_{ci}(t),\quad i=m,\ldots,n.$$

После подстановки в функционал получим

$$\Phi(x_c(t))=\frac{1}{T}\Bigg\{-\sum_{i=1}^{n}H_i(t)x_i(t)-R_c(t)x_c(t)\frac{dx_c(t)}{dt}+\frac{C_c(t)}{2}x_c^2(t)+\frac{S_c(t)}{3}x_c^3(t)\pm$$

$$\pm H_{gc}x_c(t)-R_d(t)\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]\left[\frac{d\Omega(t)}{dt}+B_d^T\frac{dx_c(t)}{dt}\right]+\frac{C_d(t)}{2}\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]^2\pm$$

$$\pm H_{gd}\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]-H_d(t)\left[\Omega(t)+B_d^T x_c(t)\right]\Bigg\}\to\max.$$

Таким образом, неоднородность рассмотренных цепей выражается в записи функционала относительно хордовых расходов.

Далее рассмотрим математические модели динамического потокораспределения в этих двух случаях на приведенных выше гидравлических цепях.

Как и ранее, имеется открытая и активная трехконтурная гидравлическая цепь, которая в результате последовательной работы регуляторов на хордах 1, 2, 3 переходит от начального состояния через промежуточные (двухконтурная и одноконтурная цепи) в конечное состояние (разветвленная цепь) (рис. 3.14).

Рассмотрим первый случай: линейное трение на ветвях–хордах и квадратичное трение на ветвях дерева.

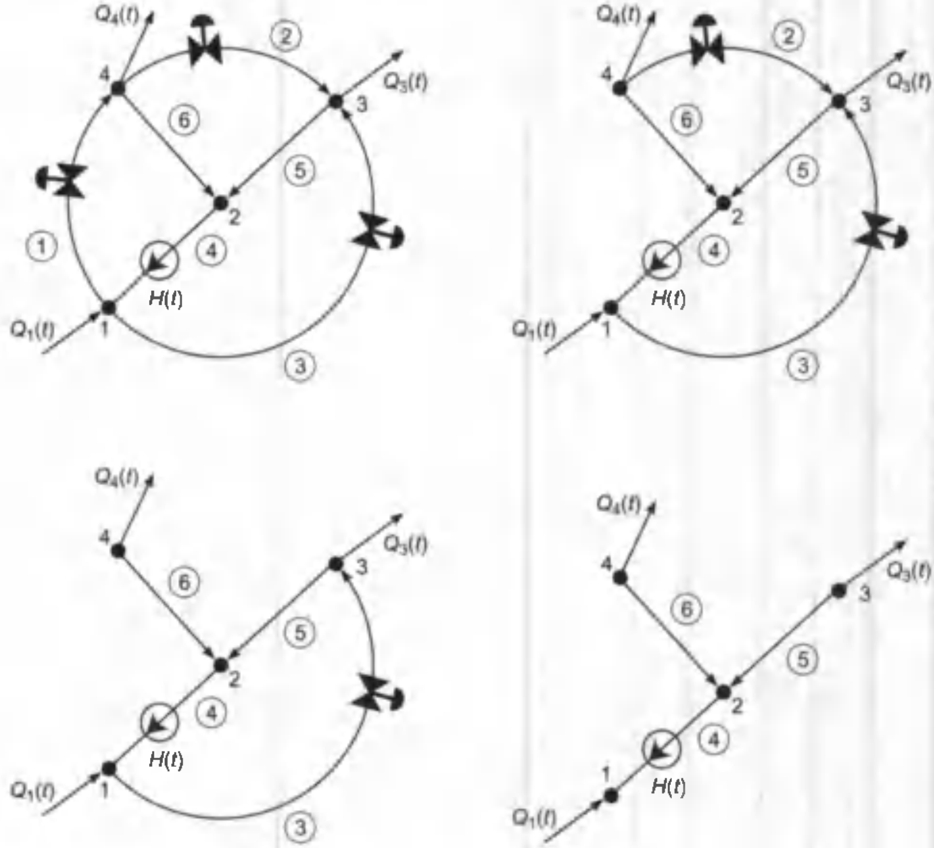


Рис. 3.14. Последовательность цепей

Ограничения для этой последовательности гидравлических цепей имеют вид

$$-x_1(t)-x_3(t)+x_4(t)=-Q_1(t),\ \ -x_3(t)+x_4(t)=-Q_1(t),\ \ -x_3(t)+x_4(t)=-Q_1(t),$$

$$-x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,\ \ -x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,\ \ -x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,$$

$$x_2(t)+x_3(t)-x_5(t)=Q_3(t),\ \ x_2(t)+x_3(t)-x_5(t)=Q_3(t),\ \ x_3(t)-x_5(t)=Q_3(t),$$

$$x_4(t)=-Q_1(t),\ \ -x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)=0,\ \ -x_5(t)=Q_3(t).$$

Отсюда следуют выражения для расходов по ветвям дерева

$$x_4(t)=x_1(t)+x_3(t)-Q_1(t),\ \ x_4(t)=x_3(t)-Q_1(t),\ \ x_4(t)=x_3(t)-Q_1(t),$$

$$x_5(t)=x_2(t)+x_3(t)-Q_3(t),\ \ x_5(t)=x_2(t)+x_3(t)-Q_3(t),\ \ x_5(t)=x_3(t)-Q_3(t),$$

$$x_6(t)=x_1(t)-x_2(t)-Q_4(t),\ \ x_6(t)=-x_2(t)-Q_4(t),\ \ x_6(t)=-Q_4(t),$$

$$x_4(t)=-Q_1(t),\ \ x_5(t)=-Q_3(t),\ \ x_6(t)=-Q_4(t).$$

Функционал для интервала между начальным и первым промежуточным состояниями запишется

$$\Phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = -r_1x_1\frac{dx_1}{dt} - r_2x_2\frac{dx_2}{dt} - r_3x_3\frac{dx_3}{dt} - r_4(x_1+x_3-Q_1)\left(\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right) -$$

$$-r_5(x_2+x_3-Q_3)\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right) - r_6(x_1-x_2-Q_4)\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}-\frac{dQ_4}{dt}\right) \pm$$

$$\pm H_{g1}x_1 \pm H_{g2}x_2 \pm H_{g3}x_3 \pm H_{g4}(x_1+x_3-Q_1) \pm H_{g5}(x_2+x_3-Q_3) \pm H_{g6}(x_1-x_2-Q_4) +$$

$$+\frac{c_1}{2}x_1^2 + \frac{c_2}{2}x_2^2 + \frac{c_3}{2}x_3^2 + \frac{c_4}{2}(x_1+x_3-Q_1)^2 + \frac{c_5}{2}(x_2+x_3-Q_3)^2 + \frac{c_6}{2}(x_1-x_2-Q_4)^2 +$$

$$+\frac{s_4}{3}(x_1+x_4-Q_1)^3 + \frac{s_5}{3}(x_2+x_3-Q_3)^3 + \frac{s_6}{3}(x_1-x_2-Q_4)^3 - H(x_1+x_3-Q_3).$$

Функционал для интервала между первым и вторым промежуточными состояниями:

$$\Phi(x_2(t), x_3(t)) = -r_2x_2\frac{dx_2}{dt} - r_3x_3\frac{dx_3}{dt} - r_4(x_3-Q_1)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right) - r_5(x_2+x_3-Q_3)\times$$

$$\times\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right) - r_6(-x_2-Q_4)\left(-\frac{dx_2}{dt}-\frac{dQ_4}{dt}\right) \pm H_{g2}x_2 \pm H_{g3}x_3 \pm H_{g5}(x_2+x_3-Q_3) \pm$$

$$\pm H_{g6}(-x_2-Q_4) \pm H_{g4}(x_3-Q_3) + \frac{c_2}{2}x_2^2 + \frac{c_3}{2}x_3^2 + \frac{c_4}{2}(x_3-Q_1)^4 + \frac{c_5}{2}(x_2+x_3-Q_3)^2 +$$

$$+\frac{c_6}{2}(-x_2-Q_4)^2 + \frac{s_4}{3}(x_3-Q_3)^3 + \frac{s_5}{3}(x_2+x_3-Q_3)^3 + \frac{s_6}{3}(-x_2-Q_4)^3 - H(x_3-Q_1).$$

Функционал для интервала между вторым промежуточным и конечным состояниями:

$$\Phi(x_3(t)) = -r_3x_3\frac{dx_3}{dt} - r_4(x_3-Q_1)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right) - r_5(x_3-Q_3)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right) + r_6(-Q_4)\frac{dQ_4}{dt} \pm$$

$$\pm H_{g3}x_3 \pm H_{g4}(x_3-Q_1) \pm H_{g5}(x_3-Q_3) \pm H_{g6}(x_3-Q_4) +$$

$$+\frac{c_3}{2}x_3^2 + \frac{c_4}{2}(x_3-Q_1)^2 + \frac{c_5}{2}(x_3-Q_3)^2 + \frac{c_6}{2}(-Q_4)^2 + \frac{s_4}{3}(x_3-Q_1)^3 + \frac{s_5}{3}(x_3-Q_3)^3 +$$

$$+\frac{s_6}{3}(-Q_4)^3 - H(x_3-Q_1).$$

И наконец, для конечного состояния цепи имеем

$$\Phi = -r_4Q_1\frac{dQ_1}{dt} - r_5Q_3\frac{dQ_3}{dt} - r_6Q_4\frac{dQ_4}{dt} \mp H_{g4}Q_1 \mp H_{g5}Q_3 \mp H_{g6}Q_4 +$$

$$+\frac{c_4}{2}Q_1^2 + \frac{c_5}{2}Q_3^2 + \frac{c_6}{2}Q_4^2 - \frac{s_4}{3}Q_1^3 - \frac{s_5}{3}Q_3^3 - \frac{s_6}{3}Q_4^3 + HQ_1.$$

Из приведенных выше функционалов можно получить последовательность систем дифференциальных уравнений для различных промежутков времени, описывающих процессы потокораспределения между состояниями:

– между начальным состоянием и первым промежуточным имеем систему трех уравнений вида

$$-(r_1+r_4+r_6)\frac{dx_1}{dt}+r_6\frac{dx_2}{dt}-r_4\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6}\right)-$$

$$-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_6\frac{dQ_4}{dt}+c_4Q_1+c_6Q_4-s_4Q_1^2-s_6Q_4^2-$$

$$-(c_1+c_4-c_6-2s_4Q_1-2s_6Q_4)x_1+(c_6-2s_6Q_4)x_2-(c_4-2s_4Q_1)x_3-$$

$$-(s_4+s_6)x_1^2-s_6x_2^2-s_4x_3^2+2s_6x_1x_2-2s_4x_1x_3,$$

$$r_6\frac{dx_1}{dt}-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}=\mp\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)-$$

$$-r_5\frac{dQ_3}{dt}+r_6\frac{dQ_4}{dt}+c_5Q_3-c_6Q_4-s_5Q_3^2+s_6Q_4^2+$$

$$+(c_6-2s_6Q_4)x_1-(c_2+c_5-c_6-2s_5Q_3-2s_6Q_4)x_2-(c_5-2s_5Q_3)x_3-$$

$$-s_6x_1^2-(s_5+s_6)x_2^2-s_5x_3^2-2s_6x_1x_2-2s_5x_2x_3,$$

$$-r_4\frac{dx_1}{dt}-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-$$

$$-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_5\frac{dQ_3}{dt}+c_4Q_1+c_5Q_3-s_4Q_1^2-s_5Q_3^2-$$

$$-(c_4-2s_4Q_1)x_1-(c_5-2s_5Q_3)x_2-(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3)x_3-$$

$$-s_4x_1^2-s_5x_2^2-(s_4+s_5)x_3^2-2s_4x_1x_3-2s_5x_2x_3;$$

– для отрезка времени между первым промежуточным и вторым промежуточным состояниями имеем систему двух уравнений вида

$$-(r_2+r_5+r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}=\mp\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)-$$

$$-r_5\frac{dQ_3}{dt}+r_6\frac{dQ_4}{dt}+c_5Q_3-c_6Q_4-s_5Q_3^2+s_6Q_4^2-(c_2+c_5+c_6-2s_5Q_3+2s_6Q_4)x_2-$$

$$-(c_5-2s_5Q_3)x_3-(s_5-s_6)x_2^2-s_5x_3^2-2s_5x_2x_3,$$

$$-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)-$$

$$-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_5\frac{dQ_3}{dt}+c_4Q_1+c_5Q_3-s_4Q_1^2-s_5Q_3^2-\left(S_5^0-2S_5Q_3\right)x_2-$$

$$-\left(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3\right)x_3-s_5x_2^2-\left(s_4+s_5\right)x_3^2-2s_5x_2x_3;$$

– на отрезке времени от второго промежуточного до конечного состояния имеем одно уравнение

$$-\left(r_3+r_4+r_5\right)\frac{dx_3}{dt}=H\mp\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)+r_4\frac{dQ_1}{dt}+r_5\frac{dQ_3}{dt}+$$

$$+c_4Q_1+c_5Q_3-s_4Q_2^2-s_5Q_3^2-\left(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3\right)x_3-\left(s_4+s_5\right)x_3^2.$$

Таким образом, дано описание процессов потокораспределения в виде систем дифференциальных уравнений относительно искомых функций расходов на хордах для неоднородных гидравлических цепей в случае линейных замыкающих соотношений на хордах и нелинейных – на ветвях дерева для различных интервалов времени между состояниями системы. Решение этих систем с принятыми ранее предположениями относительно начального потокораспределения и работы регуляторов на хордах может быть определено однозначно.

Для случая неоднородности цепи начальное распределение расходов на хордах находится из системы трех нелинейных уравнений:

$$H\mp\left(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6}\right)+c_4Q_1+c_6Q_4-s_4Q_1^2-s_6Q_4^2-$$

$$-\left(c_1+c_4-c_6-2s_4Q_1-2s_6Q_4\right)x_1+\left(c_6-2s_6Q_4\right)x_2-\left(c_4-2s_4Q_1\right)x_3-$$

$$-\left(s_4+s_6\right)x_1^2-s_6x_2^2-s_4x_3^2+2s_6x_1x_2-2s_4x_1x_3=0,$$

$$\mp\left(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6}\right)+c_5Q_3-c_6Q_4-s_5Q_3^2-s_6Q_4^2+$$

$$+\left(c_6-2s_6Q_4\right)x_1-\left(c_2+c_5-c_6-2s_5Q_3-2s_6Q_4\right)x_2-\left(c_5-2s_5Q_3\right)x_3-$$

$$-s_6x_1^2-\left(s_5+s_6\right)x_2^2-s_5x_3^2-2s_6x_1x_2-2s_5x_2x_3=0,$$

$$H\mp\left(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5}\right)+c_4Q_1+c_5Q_3-s_4Q_1^2-s_5Q_3^2-$$

$$-\left(c_4-2s_4Q_1\right)x_1-\left(c_5-2s_5Q_3\right)x_2-\left(c_3+c_4+c_5-2s_4Q_1-2s_5Q_3\right)x_3-$$

$$-s_4x_1^2-s_5x_2^2-\left(s_4+s_5\right)x_3^2-2s_4x_1x_3-2s_5x_2x_3=0;$$

$$x_1(0)=x_1,\quad x_2(0)=x_2,\quad x_3(0)=x_3.$$

Полученное решение на хордах позволяет определить и функции расходов на ветвях дерева:

$$x_4(t)=x_1(t)+x_3(t)-Q_1(t),$$

$$x_5(t)=x_2(t)+x_3(t)-Q_3(t),$$

$$x_6(t)=x_1(t)-x_2(t)-Q_4(t),$$

а далее отыскивается давление в линейно независимых узлах цепи согласно формулам

$$P_2(t)=P_1(t)+H(t)+r_4\frac{dx_4}{dt}-c_4x_4-s_4x_4^2\pm H_{g4},$$

$$P_3(t)=P_1(t)+r_5\frac{dx_5}{dt}-c_5x_5-s_5x_5^2\pm H_{g5},$$

$$P_4(t)=P_1(t)+r_6\frac{dx_6}{dt}-c_6x_6-s_6x_6^2\pm H_{g6}.$$

Осталось рассмотреть последние модели для второго обозначенного случая, когда для хорд приняты нелинейные замыкающие соотношения, а для ветвей дерева – линейные.

Это предположение не оказывает влияния на запись линейных ограничений и на выражения расходов по дереву через расходы на хордах, а касается в первую очередь преобразованного относительно хордовых расходов функционала, что в итоге приводит к системам уравнений, отличным по виду от предыдущих.

Итак, относительно хордовых расходов функционалы для различных промежутков времени запишутся следующим образом:

– для отрезка времени от начального до первого промежуточного состояния

$$F(x_1,x_2,x_3)=-r_1x_1\frac{dx_1}{dt}-r_2x_2\frac{dx_2}{dt}-r_3x_3\frac{dx_3}{dt}-$$

$$-r_4(x_1+x_3-Q_1)\left(\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right)-r_5(x_2+x_3-Q_3)\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right)-$$

$$-r_6(x_1-x_2-Q_4)\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}-\frac{dQ_4}{dt}\right)\pm H_{g1}x_1\pm H_{g2}x_2\pm H_{g3}x_3\pm$$

$$\pm H_{g4}(x_1+x_3-Q_1)\pm H_{g5}(x_2+x_3-Q_3)\pm H_{g6}(x_1-x_2-Q_4)+$$

$$+\frac{c_1}{2}x_1^2+\frac{c_2}{2}x_2^2+\frac{c_3}{2}x_3^2+\frac{c_4}{2}(x_1+x_3-Q_1)^2+\frac{c_5}{2}(x_2+x_3-Q_3)^2+\frac{c_6}{2}(x_1-x_2-Q_4)^2+$$

$$+\frac{s_1}{3}x_1^3+\frac{s_2}{3}x_2^3+\frac{s_3}{3}x_3^3-H(x_1+x_3-Q_1);$$

– для отрезка времени между первым и вторым промежуточными состояниями

$$F(x_2,x_3)=-r_2x_2\frac{dx_2}{dt}-r_3x_3\frac{dx_3}{dt}-r_4(x_3-Q_1)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right)-r_5(x_2+x_3-Q_3)\left(\frac{dx_2}{dt}+\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right)-$$

$$-r_6(-x_2-Q_4)\left(-\frac{dx_2}{dt}-\frac{dQ_4}{dt}\right)\pm H_{g2}x_2\pm H_{g3}x_3\pm H_{g4}(x_3-Q_1)\pm H_{g5}(x_2+x_3-Q_3)\pm$$

$$\pm H_{g6}(-x_2-Q_4)+\frac{c_2}{2}x_2^2+\frac{c_3}{2}x_3^2+\frac{c_4}{2}(x_3-Q_1)^2+\frac{c_5}{2}(x_2+x_3-Q_3)^2+$$

$$+\frac{c_6}{2}(-x_2-Q_4)^2+\frac{s_2}{3}x_2^3+\frac{s_3}{3}x_3^3-H(x_3-Q_1);$$

– для отрезка времени между вторым промежуточным и конечным состояниями

$$F(x_3)=-r_3x_3\frac{dx_3}{dt}-r_4(x_3-Q_1)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_1}{dt}\right)-r_5(x_3-Q_3)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dQ_3}{dt}\right)-$$

$$-r_6Q_4\frac{dQ_4}{dt}\pm H_{g3}x_3\pm H_{g4}(x_3-Q_1)\pm H_{g5}(x_3-Q_3)\pm H_{g6}(-Q_4)-H(x_3-Q_3)+$$

$$+\frac{c_3}{2}x_3^2+\frac{c_4}{2}(x_3-Q_1)^2+\frac{c_5}{2}(x_3-Q_3)^2+\frac{c_6}{2}Q_4^2+\frac{s_3}{3}x_3^3.$$

Как и ранее, эти функционалы порождают следующие системы дифференциальных уравнений:

– для первого отрезка времени

$$-(r_1+r_4+r_6)\frac{dx_1}{dt}+r_6\frac{dx_2}{dt}-r_4\frac{dx_3}{dt}=H\mp(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6})-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_6\frac{dQ_4}{dt}-$$

$$-c_4Q_1-c_6Q_4-(c_1+c_4-c_6)x_1-S_6^0x_2-c_6x_3-s_1x_1^2,$$

$$r_6\frac{dx_1}{dt}-(r_2+r_5-r_6)\frac{dx_2}{dt}-r_5\frac{dx_3}{dt}=\mp(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6})-r_5\frac{dQ_3}{dt}-r_6\frac{dQ_4}{dt}+$$

$$+c_5Q_3-c_6Q_4+c_6x_1-(c_2+c_5+c_6)x_2-c_5x_3-s_2x_2^2,$$

$$-r_4\frac{dx_1}{dt}-r_5\frac{dx_2}{dt}-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}=H\mp(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5})-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_5\frac{dQ_3}{dt}+$$

$$+c_4Q_1+c_5Q_3-c_4x_1-c_5x_2-(c_3+c_4+c_5)x_3-s_3x_3^2;$$

– для последнего отрезка времени

$$-(r_3+r_4+r_5)\frac{dx_3}{dt}=H\mp(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5})-r_4\frac{dQ_1}{dt}-r_5\frac{dQ_3}{dt}+$$

$$+c_4Q_1+c_5Q_3-(c_3+c_4+c_5)x_3-s_3x_3^2.$$

Для начального состояния системы потокораспределение определяется как решение системы нелинейных уравнений

$$H\mp(H_{g1}+H_{g4}+H_{g6})-c_4Q_1-c_6Q_4-(c_1+c_4+c_6)x_1+c_6x_2-c_4x_3-s_1x_1^2=-H,$$

$$\mp(H_{g2}+H_{g5}-H_{g6})+c_5Q_3-c_6Q_4+c_6x_1-(c_2+c_5+c_6)x_2-c_5x_3-s_2x_2^2=0,$$

$$\mp(H_{g3}+H_{g4}+H_{g5})+c_4Q_1+c_5Q_3-c_4x_1-c_5x_2-(c_3+c_4+c_5)x_3-s_3x_3^2=-H.$$

Эта задача может быть решена, например, численным методом, как и ранее поставленные и описанные задачи потокораспределения в динамической постановке.

Глава 4

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И ДЕТЕРМИНИРОВАННО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

4.1. Детерминированное описание внешних возмущений в закрытой гидравлической цепи

Динамика развития определений, понятий, методов математического описания и анализа т. г. ц. за менее чем полувековую историю определялась потребностями техники, с одной стороны, и появлением мощных вычислительных средств и математических методов – с другой. Эти объективные условия стимулировали переход от моделей стационарного потокораспределения к моделям переходных процессов в многоконтурных гидравлических цепях, от детерминированных описаний процессов к детерминированно-стохастическим, от алгебраических подходов анализа режимных задач к экстремальным и вариационным.

В последнее десятилетие интенсивно развивались модели и методы анализа переходных (нестационарных) процессов в гидравлических цепях [16, 19, 23, 25], что привело к необходимости изучения нового математического объекта – систем функционально-дифференциальных уравнений, и к переходу от экстремальных моделей к вариационным.

Построение динамических цепей поставило целый ряд нетрадиционных задач, связанных с осмыслением и описанием разнообразных параметров. Эти параметры, как правило, изменяются за счет регулирования, управления и подобных процессов, происходящих в реальных транспортных системах.

В данной главе рассмотрим разделение цепей на строго определенные (детерминированные) и определенно-вероятностные (детерминированно-стохастические). Так, к детерминированным гидравлическим цепям отнесены закрытые гидравлические цепи с процессами циркуляции сплошной среды под действием активных напоров. Реальными объектами таких цепей могут быть, например, системы охлаждения, закрытые (без водоразбора) системы теплоснабжения, кровеносная система и др. В этих системах режимы, их регулирование и управление осуществляются техническими устройствами с помощью контролируемых определенных параметров, естественно, при работе в нормальных условиях.

Экстремальные условия работы этих систем, как правило, связаны с аварийными ситуациями, а они переводят закрытые цепи в качественно другой класс – класс открытых цепей.

Процесс появления аварийных ситуаций носит явно случайный характер, а следовательно, системы приобретают двойственный детерминированно-стохастический характер. Кроме того, реальные технические системы транспорта практически всегда содержат источники и потребителей. Например, системы водо-, газо- и нефтеснабжения, в которых графики потребления могут интерпретироваться как некоторый случайный процесс.

Таким образом, открытые гидравлические цепи за счет неравномерности потребления принципиально являются вероятностными, и происходит как бы смешение двух характеров изменения состояний системы: в процессы движения по определенной технической системе согласно известным детерминированным законам сохранения (массы, движения, энергии) вносятся случайные внешние возмущения (изменение расходов у потребителей). Так как и то и другое имеет место в реальных системах, то в настоящей работе анализируются и описываются закрытые (детерминированные) гидравлические цепи и открытые (детерминированно-стохастические) гидравлические цепи.

В качестве метода описания этих объектов принят вариационный метод, являющийся обобщением экстремальных принципов равновесия. Понятно, что для математического описания динамических процессов в детерминированных и детерминированно-стохастических системах можно использовать два эквивалентных, с точки зрения конечных моделей, подхода (как и при исследовании стационарного потокораспределения): первый основан на использовании законов сохранения (массы и движения для цепей с сосредоточенными параметрами), которые приводят в описательном плане к замкнутым системам функционально-дифференциальных уравнений (количество которых равно числу искомых функций); второй подход использует только закон сохранения массы, который позволяет сформировать систему функциональных уравнений, но их количество меньше, чем число искомых функций, а следовательно, эта система имеет бесконечное множество решений. Для выбора единственного решения необходим критерий отбора (для механических систем, например, это общая энергия системы), который при этом решении достигал бы экстремального значения. Такой подход относится к широко развиваемым вариационным методам [129]. Динамизм идей вариационного исчисления настолько значителен, что они послужили основой развития функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, многих разделов и направлений механики и физики.

Таким образом, для детерминированно-стохастических процессов есть смысл описать процесс построения математических моделей переходных (нестационарных) режимов в закрытых и открытых гидравлических цепях с применением вариационных методов.

4.2. Детерминированные процессы в гидравлических цепях

Для математического описания и изучения процессов, имеющих место в разнообразных транспортных трубопроводных системах, необходимо их схематизировать. Причина в том, что математический анализ применим к исследованию процесса изменения некоторой системы только тогда, когда имеет место предположение, что *каждое возможное состояние* рассматриваемой системы *вполне определено* посредством такого математического аппарата, выбор которого в целом зависит от исследователя. Понятно, что эта математически определенная система есть лишь схема (приближенная модель), в разной мере пригодная для описания реальности и дальнейшего ее анализа. Предположим, что реальное движение сплошной среды по геометрии цепи полностью описывается для любого момента времени указанием *этого момента времени* и оценкой *состояния* среды в любой предшествующий момент времени t_0. То есть для любого момента времени t состояние цепи $x(t)$ полностью определяется ее состоянием $x(t_0)$ в любой предшествующий момент времени $t_0 < t$.

Гидравлические цепи могут быть закрытыми (известные расходы в источнике и у потребителей равны нулю $Q(t) = 0$), имеющими неизменную структуру и определенный набор сил $H(t)$, оказывающих воздействие на циркуляцию сплошной среды. Так как регулирование осуществляется как отклик на возмущение необходимого количества тепловой энергии, а оно непосредственно связано с расходом теплоносителя, то в этом случае можно идеализировать локальное изменение расхода на ветви в зависимости от температур: воздуха ($\theta_н(t)$ – внешняя температура, $\theta_в(t)$ – внутренняя температура у потребителя), на входе и выходе теплообменника (θ' и θ'') и расхода, который можно условно принять за отбор. Тогда этот расход определяется как

$$Q^T(t) = \frac{\alpha_о\left[\theta_в - \theta_н(t)\right]}{c\rho(\theta' - \theta'')},$$

где $\alpha_о$ – обобщенный коэффициент теплопередачи потребителя; c, ρ – удельная теплоемкость и плотность теплоносителя (в частности, воды).

Классификация гидравлических цепей на открытые и закрытые является в значительной мере условной, так как в общем виде потребитель может быть охарактеризован некоторой суммарной функцией, в данном случае

$$Q_p(t) = Q(t) + Q^T(t) = Q(t) + \frac{\alpha_о\left[\theta_в - \theta_н(t)\right]}{c\rho(\theta' - \theta'')},$$

при этом оба слагаемых могут содержать как детерминированную, так и стохастическую составляющие.

Такие цепи могут быть описаны в первом приближении как детерминированные в рамках детерминированных законов сохранения в алгебраической форме [77, 97] или в вариационной интерпретации [17, 65].

В общем виде математическая модель состояний многоконтурной закрытой гидравлической цепи в вариационной интерпретации может быть представлена следующим образом:

– известно некоторое начальное состояние (потокораспределение в момент времени t_0)

$$x(t_0) = x_0 = \text{const};$$

необходимо определить состояние $x(t)$ в момент времени t, удовлетворяющее условиям

$$Ax(t) = 0$$

– однородная система линейных ограничений на вектор расходов для всей цепи $x(t) = \left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right]^T$, где n – количество ветвей цепи; A – матрица соединений $m - 1$ линейно независимых узлов и n ветвей размерностью $(m - 1) \times n$, в частном случае ориентированного графа, элементы которой принимают значения $[-1, 0, +1]$, а правила составления для заданного графа можно найти в работах [17, 64, 65, 77, 97], причем общая энергия цепи должна быть минимальна

$$\min\left[-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{x_i}\left(P_j(\xi) - P_k(\xi)\right)d\xi + \sum_{i=1}^{n} H_i(t)x_i(t)\right].$$

Завершая предлагаемую формализацию, необходимо оговорить следующее: во-первых, $H_i(t)$ являются известными функциями действующих напоров на всех ветвях цепи размерностью $n \times 1$, и, во-вторых, требуется математическое задание строгих функциональных соотношений, связывающих потери давления $(y_i(t)=P_j(t)-P_l(t)=f_i(x))$ с расходами на ветвях цепи, или замыкающих соотношений. Их обобщение на нестационарные процессы может быть записано, например, в виде

$$y_i(t)=P_j(t)-P_k(t)=r_i\frac{dx_i}{dt}+c_ix_i(t)+s_ix_i^2(t)-H_i(t),$$

$$i=1,\dots,n;\quad j,k\in J.$$

Здесь и далее $r_i(t)$, $c_i(t)$, $s_i(t)$ – характеристики i-й ветви, отражающие геометрию ветви и физические свойства сплошной среды при ее движении.

Тогда функционал можно переписать в конкретизированной форме:

$$F(x(t))=\sum_{i=1}^{n}\left[r_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)\right]x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right].$$

Минимальное значение полученного функционала, отождествляемое с балансом энергии и работой всех рассматриваемых сил цепи, должно достигаться при состоянии цепи в момент времени t.

Таким образом, можно сделать окончательную математическую запись детерминированной модели, которая приближенно отображает процессы движения сплошной среды по многоконтурной закрытой гидравлической цепи:

– известно состояние гидравлической цепи в момент времени t_0, определяемое значениями параметра расхода:

$$x(t_0)=[x_1(t_0),\dots,x_n(t_0)]^T=x_0; \tag{4.1}$$

необходимо определить состояние цепи в момент времени t, т. е. найти вектор

$$x(t)=[x_1(t),\dots,x_n(t)]^T, \tag{4.2}$$

компоненты которого должны минимизировать функционал

$$F(x(t))=\sum_{i=1}^{n}\left[r_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)\right]x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right] \tag{4.3}$$

при ограничениях

$$Ax(t)=0. \tag{4.4}$$

Понятно, что согласно ограничениям (4.4), которых, как правило, для гидравлических цепей меньше, чем искомых переменных, имеем бесконечное множество решений (траекторий перехода из точки фазового пространства $x(t_0)$ в точку $x(t)$) (рис. 4.1). Однако, согласно

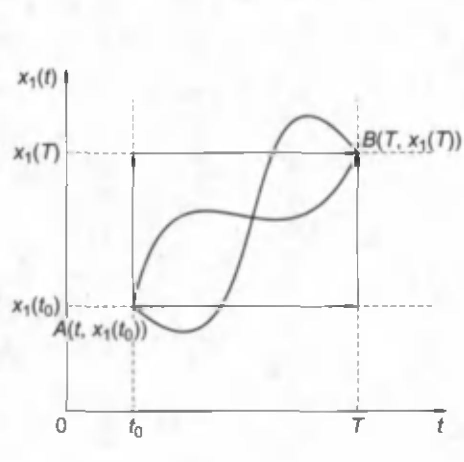


Рис. 4.1. Возможные траектории перехода системы из состояния $x_1(t_0)$ в состояние $x_1(T)$

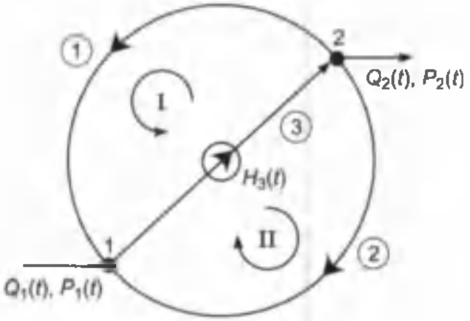


Рис. 4.2. Двухконтурная открытая и активная гидравлическая цепь

функционалу (критерию отбора решения), можно определить единственную траекторию, для которой имеем $\min F\left(x^*(t)\right)$, поскольку функционал при стационарном потокораспределении имеет третью степень, из чего следует наличие экстремальных точек (максимума, минимума и точки перегиба в двумерном фазовом пространстве или, соответственно, для двухконтурной гидравлической цепи – рис. 4.2). Не нарушая общности, пример описания рассматривается на простой открытой и активной гидравлической цепи, состоящей из двух линейно независимых контуров. Переход от описания открытой цепи к закрытой осуществляется занулением расходов потребителей.

После всех преобразований для приведенной цепи функционал запишется следующим образом:

$$F(x_1,x_2)=H_3Q_1+\left(\frac{c_3}{2}-\frac{s_3}{3}Q_1\right)Q_1^2+\left(-H_3-c_3Q_1+s_3Q_1^2\right)x_1+\left(-H_3-c_3Q_1+s_3Q_1^2\right)x_2+$$
$$+\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_3}{2}-s_3Q_1\right)x_1^2+(c_3-2s_3Q_1)x_1x_2+\left(\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{2}-s_3Q_1\right)x_2^2+$$
$$+\frac{1}{3}(s_1+s_3)x_1^3+s_3x_1^2x_2+s_3x_1x_2^2+\frac{1}{3}(s_2+s_3)x_2^3\to\min.$$

При конкретных значениях сопротивлений, активных напоров и мощности источника точка экстремума и значение функционала

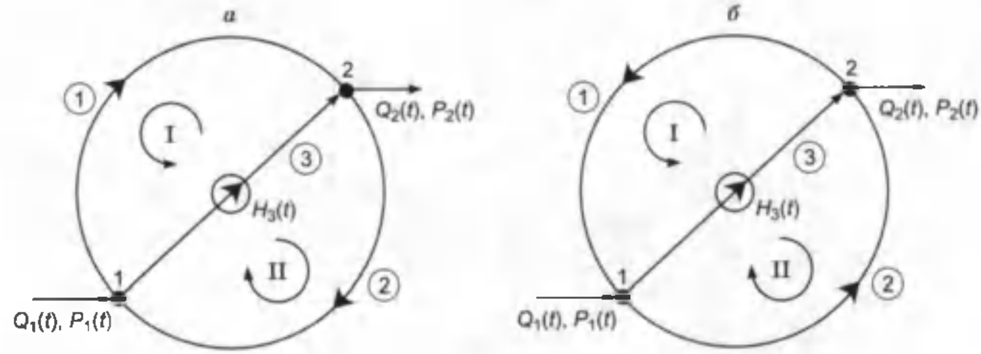
$$\left[\{x_2=-10\,000,\quad x_1=10\,000\},\quad -3.582\,607\,642\cdot 10^9\right].$$

Так как ориентация потоков на ветвях произвольная, то право на существование имеют различные ориентации (рис. 4.3). Ориентация потоков отражается на уравнении баланса расходов в первом узле и, как следствие, изменяет функционал.

Для первой ориентации (см. рис. 4.3, *а*) имеем функционал

$$F_a(x_1,x_2)=-H_3Q_1+\left(\frac{c_3}{2}-\frac{s_3}{3}Q_1\right)Q_1^2+\left(H_3-c_3Q_1-s_3Q_1^2\right)x_1+\left(-H_3+c_3Q_1+s_3Q_1^2\right)x_2+$$
$$+\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_3}{2}+s_3Q_1\right)x_1^2+(-c_3-2s_3Q_1)x_1x_2+\left(\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{2}+s_3Q_1\right)x_2^2+$$
$$+\frac{1}{3}(s_1-s_3)x_1^3+s_3x_1^2x_2-s_3x_1x_2^2+\frac{1}{3}(s_2+s_3)x_2^3\to\min;$$

$$\left[\{x_2=-10\,000,\quad x_1=10\,000\},\quad -3.582\,607\,642\cdot 10^9\right].$$



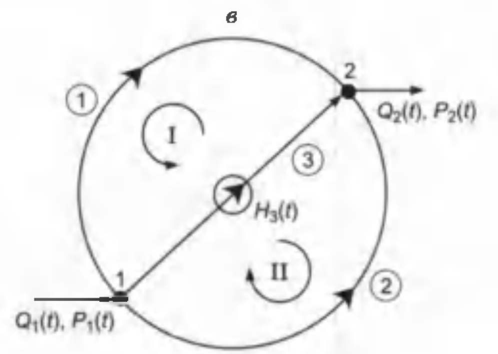


Рис. 4.3. Двухконтурная открытая и активная гидравлическая цепь с разными ориентациями (*а–в*) потоков на хордах

Для второй ориентации (см. рис. 4.3, *б*) имеем

$$F_б(x_1,x_2) = -H_3Q_1 + \left(\frac{c_3}{2} + \frac{s_3}{3}Q_1\right)Q_1^2 + \left(-H_3 + c_3Q_1 + s_3Q_1^2\right)x_1 + \left(H_3 - c_3Q_1 - s_3Q_1^2\right)x_2 +$$

$$+\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2} + s_3Q_1\right)x_1^2 + \left(-c_3 - 2s_3Q_1\right)x_1x_2 + \left(\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2} + s_3Q_1\right)x_2^2 +$$

$$+\frac{1}{3}(s_1 + s_3)x_1^3 - s_3x_1^2x_2 + s_3x_1x_2^2 + \frac{1}{3}(s_2 - s_3)x_2^3 \to \min;$$

$$\left[\{x_2 = -10\,000,\ \ x_1 = 10\,000\},\ \ -2.133\,513\,108\,10 \cdot 10^9\right].$$

Для третьей ориентации (см. рис. 4.3, *в*) имеем

$$F_в(x_1,x_2) = -H_3Q_1 + \left(\frac{c_3}{2} + \frac{s_3}{3}Q_1\right)Q_1^2 + \left(H_3 - c_3Q_1 - s_3Q_1^2\right)x_1 + \left(H_3 - c_3Q_1 - s_3Q_1^2\right)x_2 +$$

$$+\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2} + s_3Q_1\right)x_1^2 + \left(c_3 + 2s_3Q_1\right)x_1x_2 + \left(\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2} + s_3Q_1\right)x_2^2 +$$

$$+\frac{1}{3}(s_1 - s_3)x_1^3 - s_3x_1^2x_2 - s_3x_1x_2^2 + \frac{1}{3}(s_2 - s_3)x_2^3 \to \min;$$

$$\left[\{x_2 = -10\,000,\ \ x_1 = 10\,000\},\ \ -1.300\,227\,856\,10 \cdot 10^9\right].$$

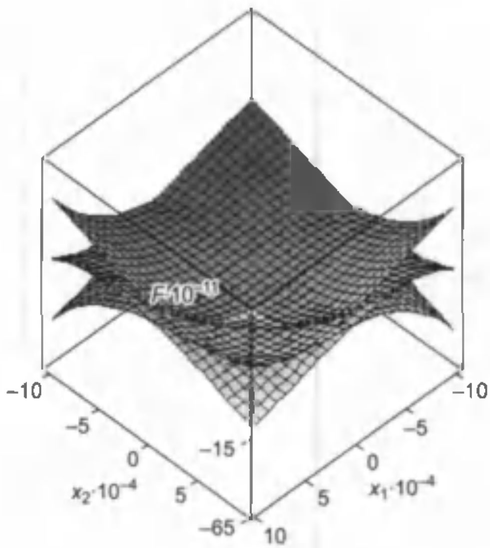


Рис. 4.4. Возможные поверхности функционала для двухконтурной гидравлической цепи при физически возможных течениях

Этим функционалам соответствуют поверхности, приведенные на рис. 4.4.

Решение поставленной задачи (4.1)–(4.4), т. е. определение нестационарного потокораспределения в многоконтурной закрытой гидравлической цепи, можно осуществлять различными способами, которые предусматривают определение в фазовых пространствах разной размерности искомых функций.

Первое направление предполагает непрерывность изменения независимой переменной времени t, т. е. решение представимо непрерывными функциями $x(t)=[x_1(t),...,x_n(t)]^T$. Тогда можно либо сводить все к задаче на безусловный экстремум, увеличивая или уменьшая количество искомых параметров, либо сводить задачу на условный экстремум к замкнутой системе уравнений, сокращая количество искомых переменных.

Следуя методу множителей Лагранжа, введем вектор-столбец неизвестных $\Lambda=[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m-1}]^T$, называемых множителями Лагранжа, и составим обобщенный функционал относительно искомого расширенного вектора $[x_1(t),...,x_n(t),\lambda_1,...,\lambda_{m-1}]^T$, т. е.

$$F(x(t))=-\sum_{i=1}^{n}\left[r_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)\right]x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right]+\Lambda^T Ax(t).$$

Таким образом, получаем задачу на безусловный экстремум:

– найти вектор-функцию $[x_1(t),...,x_n(t)]^T$ скалярного аргумента времени t, имеющую в момент $t=0$ значения $[x_{10},...,x_{n0}]^T$, и вектор $[\lambda_1,...,\lambda_{m-1}]^T$, минимизирующие функционал

$$\Phi_1(x(t),\Lambda)=F(x(t))+\Lambda^T Ax(t).$$

Здесь функционал минимизируется относительно $n+m-1$ неизвестных.

Используя линейность и однородность ограничений, можно $m-1$ неизвестную (вектор расходов на ветвях дерева цепи) выразить через $n-m+1$ неизвестных (вектор расходов на ветвях-хордах), т. е. имеют место выражения

$$x_d(t)=B_d^T x_c(t),\ \ B_d^T=-A_d^{-1}A_c,\ \ \det A_d\neq 0.$$

Далее разобьем функционал в соответствии с принадлежностью ветвей к множеству ветвей дерева и множеству ветвей–хорд:

$$\Phi\left(x_d(t),x_c(t)\right)=-\sum_{i=1}^{m-1}\left[r_{di}(t)\frac{dx_{di}}{dt}-H_{di}(t)\right]x_{di}(t)+\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{c_{di}(t)}{2}x_{di}^2(t)+\frac{s_{di}(t)}{3}x_{di}^3(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=m}^{n}\left[r_{ci}(t)\frac{dx_{ci}}{dt}-H_{ci}(t)\right]x_{ci}(t)+\sum_{i=m}^{n}\left[\frac{c_{ci}(t)}{2}x_{ci}^2(t)+\frac{s_{ci}(t)}{3}x_{ci}^3(t)\right].$$

В полученном функционале заменим $x_d(t)$ согласно выражениям относительно $x_c(t)$, тогда

$$\Phi_2\left(x_c(t)\right)=-\left[R_d(t)B_d^T\frac{dx_c}{dt}-H_d(t)\right]B_d^Tx_c(t)+\left[0.5C_d(t)\left[B_d^Tx_c(t)\right]^2+\frac{S_d(t)}{3}\left[B_d^Tx_c(t)\right]^3\right]-$$

$$-\left[R_c(t)\frac{dx_c}{dt}-H_c(t)\right]x_c(t)+\left[0.5C_c(t)\left[x_c(t)\right]^2+\frac{S_c(t)}{3}\left[x_c(t)\right]^3\right].$$

После этого имеем следующую задачу на безусловный экстремум:

– найти компоненты вектор-функции $x_c^T(t)=\left[x_m(t),...,x_n(t)\right]^T$, принимающей в момент времени $t=0$ значение $x_c^T(0)=\left[x_{m0},x_{(m+1)0},...,x_{n0}\right]^T$, которые минимизируют функционал $\Phi_2\left(x_c(t)\right)$.

Здесь функционал минимизируется относительно $c = n - m + 1$ переменных.

Эти постановки могут оказаться рациональными при эффективных методах решения оптимизационных задач без их трансформации в конечные системы уравнений на основе необходимых условий существования экстремума.

Традиционное использование необходимых и достаточных условий существования экстремума для получения замкнутой системы функционально-дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений позволяет при постановке, например, задачи Коши получить решение задачи нестационарного потокораспределения в многоконтурной закрытой цепи.

Согласно необходимым условиям существования экстремума, должно соблюдаться требование равенства нулю всех частных производных функционала $\Phi_1\left(x(t),\Lambda\right)$ по искомым параметрам. Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Phi_1\left(x_1(t),\Lambda\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\left(x_1(t),\Lambda\right)=0,$$

а эти требования порождают систему уравнений

$$Ax(t)=0,$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[r_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[c_i(t)x_i(t)+s_i(t)x_i^2(t)\right]+A^T\Lambda=0,$$

т. е. получена замкнутая система нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, количество которых равно $n + m - 1$, и содержащих такое же количество искомых параметров. Эта система имеет единственное решение $x(0) = x_0$ при учете значений состояния в момент времени $t = 0$.

Аналогичную трансформацию можно провести и с функционалом $\Phi_2\left(x_c(t)\right)$, только частные производные в этом случае берутся по компонентам вектора $x_c(t)$, т. е. имеем систему

$$\left[R_d(t)B_dB_d^T + R_c(t)\right]\frac{dx_c}{dt} + BH(t) +$$

$$+\left[C_d(t)B_d^T + C_c(t)\right]x_c(t) + S_d(t)\left[B_d^T x_c(t)\right]^2 + S_c(t)x_c^2(t) = 0.$$

Таким образом, получили систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, количество которых равно числу хорд c в гидравлической цепи, и эта система содержит столько же искомых параметров $\left[x_m(t), x_{m+1}(t), ..., x_n(t)\right]$. Используя значение начального состояния $x_c(0) = x_{c0}$, находим решение $\left[x_m(t), x_{m+1}(t), ..., x_n(t)\right]$ и, как следствие, $x_d(t)=B_d^T x_c(t)$.

В этом случае полученная система содержит наименьшее количество уравнений, так как в любой сколь угодно сложной многоконтурной гидравлической цепи число линейно независимых контуров меньше числа ветвей или узлов графа цепи.

Разобранные экстремальные постановки задачи нестационарного потокораспределения эквивалентны постановкам на основе первого и второго законов Кирхгофа и замыкающих соотношений в виде дифференциальных форм, приводящих к системам функционально-дифференциальных нелинейных уравнений в пространствах ветвей или линейно независимых контуров. Эти постановки могут быть реализованы для анализа режимов нестационарного потокораспределения, когда известны все функции изменения сопротивлений ветвей схемы $R(t)$, $C(t)$, $S(t)$ и функции изменения активных напоров всех ветвей схемы $H(t)$. Только в этом частном случае они сводятся к решению замкнутой системы дифференциальных уравнений.

Приведенные выше постановки и описания рассмотрим на примере гипотетической трехконтурной закрытой гидравлической цепи (рис. 4.5).

Пусть задана гидравлическая цепь, содержащая четыре узла ($m = 4$), шесть ветвей ($n = 6$) и три линейно независимых контура ($c = n - m + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$). Направления на ветвях и ориентация линейно независимых контуров выбраны произвольно. Ветви дерева пронумерованы от узла–источника последовательно к каждому потребителю. Хордам принадлежат последние три номера помеченных ветвей гидравлической цепи.

Запишем задачу потокораспределения на условный экстремум.

В момент времени $t = t_0$ имеем состояние цепи $x(t_0) = \left[x_{10}, ..., x_{60}\right]^T$. Необходимо опреде-

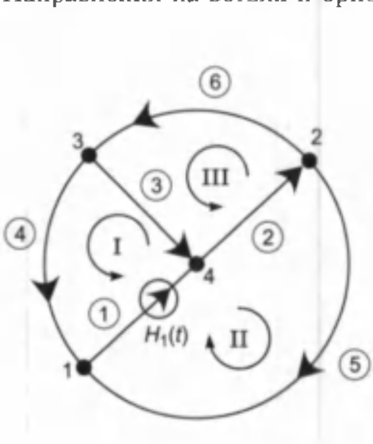


Рис. 4.5. Гипотетическая трехконтурная закрытая гидравлическая цепь

лить состояние цепи, т. е. вектор $x(t)=[x_1(t),...,x_6(t)]^T$, если его компоненты обращают в минимум функционал

$$\Phi(x_1(t),...,x_6(t))=-\sum_{i=1}^{6}\left[r_i(t)x_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)x_i(t)+\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right]$$

при ограничениях

$$f_1(x_1(t),...,x_6(t))=-x_1(t)+x_4(t)+x_5(t)=0,$$

$$f_2(x_1(t),...,x_6(t))=x_2(t)-x_5(t)-x_6(t)=0,$$

$$f_3(x_1(t),...,x_6(t))=-x_3(t)-x_4(t)+x_6(t)=0.$$

Задача на безусловный экстремум с множителями Лагранжа. Введем вектор множителей Лагранжа

$$\Lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]^T$$

и запишем функционал

$$\Phi_1(x_1(t),...,x_6(t),\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=-\sum_{i=1}^{6}\left[r_i(t)x_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)x_i(t)+\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\lambda_k f_k(x_1(t),...,x_6(t)).$$

Необходимо определить $x_1(t),...,x_6(t)$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, обращающие в минимум функционал $\Phi_1(x_i(t),\lambda_j)$.

Из линейных ограничений выразим $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ через $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$, т. е.

$$\varphi_1(x_4(t),x_5(t),x_6(t))=x_4(t)+x_5(t)=x_1(t),$$

$$\varphi_2(x_4(t),x_5(t),x_6(t))=x_5(t)+x_6(t)=x_2(t),$$

$$\varphi_3(x_4(t),x_5(t),x_6(t))=-x_4(t)+x_6(t)=x_3(t).$$

Полученные выражения подставим в функционал

$$\Phi_2(x_4(t),x_5(t),x_6(t))=-\sum_{i=1}^{3}\left[r_i(t)\varphi_i(t)\frac{d\varphi_i}{dt}-H_i(t)\varphi_i(t)+\frac{c_i(t)}{2}\varphi_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}\varphi_i^3(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=4}^{6}\left[r_i(t)x_i(t)\frac{dx_i}{dt}-H_i(t)x_i(t)+\frac{c_i(t)}{2}x_i^2(t)+\frac{s_i(t)}{3}x_i^3(t)\right].$$

Таким образом, формулируется задача на безусловный экстремум относительно искомых $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$: найти параметры, минимизирующие функционал $\Phi_2(x_1(t),...,x_6(t))$; после чего определяются $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ по соответствующим выражениям.

Конечная замкнутая система функционально-дифференциальных уравнений относительно искомых переменных $x_1(t), x_2(t), ..., x_6(t), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеет вид

$$f_1(x_1(t), ..., x_6(t)) = -x_1(t) + x_4(t) + x_5(t) = 0,$$

$$f_2(x_1(t), ..., x_6(t)) = x_2(t) - x_5(t) - x_6(t) = 0,$$

$$f_3(x_1(t), ..., x_6(t)) = -x_3(t) - x_4(t) + x_6(t) = 0;$$

$$r_1(t)\frac{dx_1}{dt} + c_1(t)x_1(t) + s_1(t)x_1^2(t) - H_1(t) - \lambda_1 = 0,$$

$$r_2(t)\frac{dx_2}{dt} + c_2(t)x_2(t) + s_2(t)x_2^2(t) + \lambda_2 = 0,$$

$$r_3(t)\frac{dx_3}{dt} + c_3(t)x_3(t) + s_3(t)x_3^2(t) - \lambda_3 = 0,$$

$$r_4(t)\frac{dx_4}{dt} + c_4(t)x_4(t) + s_4(t)x_4^2(t) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0,$$

$$r_5(t)\frac{dx_5}{dt} + c_5(t)x_5(t) + s_5(t)x_5^2(t) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$r_6(t)\frac{dx_6}{dt} + c_6(t)x_6(t) + s_6(t)x_6^2(t) - \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

При начальных условиях

$$x_1(0) = x_{10},\ \ x_2(0) = x_{20},\ \ x_3(0) = x_{30},\ \ x_4(0) = x_{40},\ \ x_5(0) = x_{50},\ \ x_6(0) = x_{60}$$

она имеет единственное решение

$$x_1(t),\ \ x_2(t),\ \ x_3(t),\ \ x_4(t),\ \ x_5(t),\ \ x_6(t).$$

Для постановки в пространстве хорд с функционалом $\Phi_2(x_4(t), x_5(t), x_6(t))$ конечная замкнутая система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$[r_1(t) + r_3(t) + r_4(t)]\frac{dx_4}{dt} + r_1(t)\frac{dx_5}{dt} - r_3(t)\frac{dx_6}{dt} + [c_1(t) + c_3(t) + c_4(t)]x_4(t) + c_1(t)x_5(t) -$$

$$-c_3(t)x_6(t) + [s_1(t) - s_3(t) + s_4(t)]x_4^2(t) + s_1(t)x_5^2(t) - s_3(t)x_6^2(t) +$$

$$+2s_1(t)x_4(t)x_5(t) + 2s_3(t)x_6(t) - H_1(t) = 0,$$

$$r_1(t)\frac{dx_4}{dt} + [r_1(t) + r_2(t) + r_5(t)]\frac{dx_5}{dt} + r_2(t)\frac{dx_6}{dt} + c_1(t)x_4(t) + [c_1(t) + c_2(t) + c_5(t)]x_5(t) +$$

$$+c_2(t)x_6(t) + s_1(t)x_4^2(t) + [s_1(t) + s_2(t) + s_5(t)]x_5^2(t) + s_2(t)x_6^2(t) +$$

$$+2s_1(t)x_4(t)x_5(t) + 2s_2(t)x_5(t)x_6(t) - H_1(t) = 0,$$

$$-r_3(t)\frac{dx_4}{dt} + r_2(t)\frac{dx_5}{dt} + [r_2(t) + r_3(t) + r_6(t)]\frac{dx_6}{dt} - c_3(t)x_4(t) + c_2(t)x_5(t) +$$

$$+[c_2(t) + c_3(t) + c_6(t)]x_6(t) + s_3(t)x_4^2(t) + s_2(t)x_5^2(t) + [s_2(t) + s_3(t) + s_6(t)]x_6^2(t) +$$

$$+2s_2(t)x_5(t)x_6(t) - 2s_3(t)x_4(t)x_6(t) = 0$$

с условиями

$$x_4(0)=x_{40},\ \ x_5(0)=x_{50},\ \ x_6(0)=x_{60}.$$

После определения хордовых расходов $x_4(t),\ \ x_5(t),\ \ x_6(t)$ можно найти и расходы на ветвях дерева:

$$x_4(t)+x_5(t)=x_1(t),$$

$$x_5(t)+x_6(t)=x_2(t),$$

$$-x_4(t)+x_6(t)=x_3(t).$$

Так могут быть представлены различные математические описания нестационарного потокораспределения в многоконтурной закрытой гидравлической цепи с непрерывным временем.

Понятно, что описанные выше и трансформированные постановки анализа нестационарного потокораспределения в закрытых многоконтурных гидравлических цепях при непрерывном изменении независимой переменной (времени t) во многом идеализированы и предусматривают существование аналитических методов определения решения, как систем дифференциальных уравнений, так и вариационных задач в пространстве непрерывных функций. Но это не всегда возможно, и приходится пользоваться численными методами анализа, поэтому необходимо хотя бы в общих чертах наметить путь, связанный с дискретными постановками и описаниями.

Пусть время t представлено некоторыми фиксированными значениями с равными промежутками $t_{k+1}-t_k=\tau=\text{const}$, т. е. имеем $t\in[t_0,t_1,...,t_K]$, тогда, не теряя общности, можно рассматривать переход системы из одного состояния $t=0$ в состояние $t=t_1$, из состояния $t=t_1$ в состояние $t=t_2$ и т. д. При этом вектор-функция $x(t)$ трансформируется в дискретную функцию $x(t_k)$ $(k=0,1,...,K)$, и в связи с этим в математическое описание следует внести некоторые изменения, что позволит от непрерывных функций $x_i(t)$ перейти к дискретным $x_i(t_k)$.

Рассмотрим дискретные описания задач, сформулированных ранее для непрерывного времени.

Необходимо определить вектор $x(t_k)=[x_1(t_k),...,x_n(t_k)]^T$, отображающий состояние системы в фиксированный момент времени $t=t_k$, если известно предыдущее состояние $x(t_{k-1})=\left[x_1(t_{k-1}),...,x_n(t_{k-1})\right]^T$, с помощью множителей Лагранжа $\Lambda=[\lambda_1,...,\lambda_{m-1}]^T$. Обобщенный функционал в дискретной интерпретации может быть записан как

$$\Phi_3(x(t_k),\Lambda)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{r_i(t_{k-1})x_i(t_{k-1})}{\tau}x_i(t_k)-H_i(t_{k-1})x_i(t_{k-1})+\left[\frac{c_i(t_{k-1})}{2}-\frac{r_i(t_{k-1})}{\tau}\right]x_i^2(t_{k-1})+\frac{s_i(t_{k-1})}{3}x_i^3(t_{k-1})\right]+$$

$$+\Lambda^T Ax(t_{k-1}).$$

Но состояние $x(t_{k-1})$ системы известно, поэтому функционал линейный относительно состояния $x(t_k)$ и, как следствие, имеет тривиальное решение $x(t_k)=x(t_{k-1})$, $\Lambda=0$. Это связано с погрешностью аппроксимации. Так, если принять

$$x_i(t)=0.5\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right],\quad \frac{dx_i}{dt}=\frac{x_i(t_k)-x_i(t_{k-1})}{\tau},$$

то получим нелинейный функционал

$$\Phi_3'\left(x(t_k),\Lambda\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{0.5r_i(t_{k-1})}{\tau}\left[x_i^2(t_k)-x_i^2(t_{k-1})\right]-0.5H_i(t_{k-1})\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right]+0.125c_i(t_{k-1})\times\right.$$

$$\left.\times\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right]^2+0.041\,667s_i(t_{k-1})\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right]^3\right]+0.5\Lambda^T A\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right].$$

Этот функционал $\Phi_3'\left(x(t_k),\Lambda\right)$ имеет экстремальное значение для каждого состояния системы, поэтому для определения всех дискретных состояний необходимо K раз решать задачу на безусловный экстремум ($x(t_k)$, $k=1, ..., K$).

Если использовать выражения расходов на ветвях дерева через расходы на хордах

$$x_d(t_k)=B_d^T x_c(t_k),$$

то функционал относительно хордовых расходов запишется следующим образом:

$$\Phi_4'\left(x_c(t_k)\right)=$$

$$=\frac{0.5}{\tau}\left\{R_d(t_{k-1})B_d^T\left[x_c(t_k)+x_c(t_{k-1})\right]+R_c(t_{k-1})\left[x_c(t_k)+x_c(t_{k-1})\right]\right\}\left[x_c(t_k)-x_c(t_{k-1})\right]-$$

$$-0.5\left[H_d(t_{k-1})B_d^T+H_c(t_{k-1})\right]\left[x_c(t_k)+x_c(t_{k-1})\right]+0.125\left[C_d(t_{k-1})B_d^T+C_c(t_{k-1})\right]\times$$

$$\times\left[x_c(t_k)+x_c(t_{k-1})\right]^2+0.041\,667\left[S_d(t_{k-1})B_d^T+S_c(t_{k-1})\right]\left[x_c(t_k)+x_c(t_{k-1})\right]^3.$$

Так выглядят описания задач на безусловный экстремум при дискретном времени как относительно расширенного вектора искомых параметров, так и относительно искомых расходов на хордах.

Для функционала с расширенным вектором искомых параметров и необходимых условий существования экстремума имеем замкнутую систему алгебраических уравнений:

$$Ax(t_k)=Ax(t_{k-1}),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{r_i(t_{k-1})}{\tau}\left[x_i(t_k)-x_i(t_{k-1})\right]-H_i(t_{k-1})+0.125c_i(t_{k-1})\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right]+\right.$$

$$\left.+0.041\,667s_i(t_{k-1})\left[x_i(t_k)+x_i(t_{k-1})\right]^2\right]+\Lambda^T A=0.$$

Решая K раз полученную систему нелинейных алгебраических уравнений, определим траектории изменения расходов для всей цепи.

Для функционала с вектором хордовых расходов имеем систему нелинейных алгебраических уравнений, но меньшего количества, чем в предыдущем случае:

$$\left[0.5R_d\left(t_{k-1}\right)B_d^T+R_c\left(t_{k-1}\right)\right]\left[x_c\left(t_k\right)-x_c\left(t_{k-1}\right)\right]-\tau BH\left(t_{k-1}\right)+$$

$$+0.125\tau\left[C_d\left(t_{k-1}\right)B_d^T+C_c(t)\right]\left[x_c\left(t_k\right)+x_c\left(t_{k-1}\right)\right]+$$

$$+0.041667\tau\left[S_d\left(t_{k-1}\right)B_d^T+S_c\left(t_{k-1}\right)\right]\left[x_c\left(t_k\right)+x_c\left(t_{k-1}\right)\right]^2=0.$$

Численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений, в частности, может быть получено с помощью разнообразных итерационных процессов (например, методом Ньютона), тем более что проблема начального приближения для этих систем решена априори, так как для определения последующего состояния системы задано предыдущее.

Этот подход математического описания для закрытой многоконтурной гидравлической цепи можно проиллюстрировать, как и ранее для непрерывного времени, на трехконтурной цепи (см. рис. 4.5).

Запишем задачу на безусловный экстремум с расширенным вектором искомых параметров: задан вектор предыдущего состояния $x\left(t_{k-1}\right)=\left[x_1\left(t_{k-1}\right),\dots,x_6\left(t_{k-1}\right)\right]^T$, требуется найти вектор последующего состояния $x\left(t_{k-1}\right)=\left[x_1\left(t_{k-1}\right),\dots,x_6\left(t_{k-1}\right),\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]^T$, обращающий в минимум функционал

$$\Phi_3'\left(x\left(t_k\right),\Lambda\right)=-\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{0.5r_i\left(t_{k-1}\right)}{\tau}\left[x_i^2\left(t_k\right)-x_i^2\left(t_{k-1}\right)\right]-0.5H_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+0.125c_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]^2+0.041667s_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]^3\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}0.5\lambda_j f_j\left(x_1\left(t_k\right)+x_1\left(t_{k-1}\right),\dots,x_6\left(t_k\right)+x_6\left(t_{k-1}\right)\right).$$

Задача на безусловный экстремум относительно искомых параметров вектора расхода на хордах: известно предыдущее состояние $x_c\left(t_{k-1}\right)=\left[x_4\left(t_{k-1}\right),\ x_5\left(t_{k-1}\right),x_6\left(t_{k-1}\right)\right]^T$, необходимо найти последующее состояние системы $x_c\left(t_k\right)=\left[x_4\left(t_k\right),x_5\left(t_k\right),x_6\left(t_k\right)\right]^T$, минимизирующее функционал

$$\Phi_4'\left(x_4\left(t_k\right),x_5\left(t_k\right),x_6\left(t_k\right)\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{3}\left[0.5r_i\left(t_{k-1}\right)\left[\varphi_i\left(t_k\right)+\varphi_i\left(t_{k-1}\right)\frac{\varphi_i\left(t_k\right)-\varphi_i\left(t_{k-1}\right)}{\tau}-0.5H_i\left(t_{k-1}\right)[\varphi_i\left(t_k\right)+\varphi_i\left(t_{k-1}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\left\{0.125c_i\left(t_{k-1}\right)\left[\varphi_i\left(t_k\right)+\varphi_i\left(t_{k-1}\right)\right]^2+0.041667s_i\left(t_{k-1}\right)\left[\varphi_i\left(t_k\right)+\varphi_i\left(t_{k-1}\right)\right]^3\right\}-$$

$$-\sum_{i=4}^{6}\left[0.5r_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]\frac{x_i\left(t_k\right)-x_i\left(t_{k-1}\right)}{\tau}-H_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{i=4}^{6}\left\{0.125c_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]^2+0.041667s_i\left(t_{k-1}\right)\left[x_i\left(t_k\right)+x_i\left(t_{k-1}\right)\right]^3\right\}.$$

Замкнутая система алгебраических уравнений относительно расширенного вектора искомых параметров системы имеет вид

$$-x_1(t_k)-x_3(t_k)+x_4(t_k)=-x_1(t_{k-1})-x_3(t_{k-1})+x_4(t_{k-1}),$$

$$x_2(t_k)-x_5(t_k)-x_6(t_k)=x_2(t_{k-1})-x_5(t_{k-1})-x_6(t_{k-1}),$$

$$-x_3(t_k)-x_4(t_k)+x_6(t_k)=-x_3(t_{k-1})-x_4(t_{k-1})+x_6(t_{k-1}),$$

$$r_1(t_{k-1})\frac{x_1(t_k)-x_1(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_1(t_{k-1})\left[x_1(t_k)+x_1(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_1(t_{k-1})\left[x_1(t_k)+x_1(t_{k-1})\right]^2-H_1(t_{k-1})-\lambda_1=0,$$

$$r_2(t_{k-1})\frac{x_2(t_k)-x_2(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_2(t_{k-1})\left[x_2(t_k)+x_2(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_2(t_{k-1})\left[x_2(t_k)+x_2(t_{k-1})\right]^2+\lambda_2=0,$$

$$r_3(t_{k-1})\frac{x_3(t_k)-x_3(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_3(t_{k-1})\left[x_3(t_k)+x_3(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_3(t_{k-1})\left[x_3(t_k)+x_3(t_{k-1})\right]^2-\lambda_3=0,$$

$$r_4(t_{k-1})\frac{x_4(t_k)-x_4(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_4(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_4(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]^2+\lambda_1-\lambda_3=0,$$

$$r_5(t_{k-1})\frac{x_5(t_k)-x_5(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_5(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_5(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]^2+\lambda_1-\lambda_2=0,$$

$$r_6(t_{k-1})\frac{x_6(t_k)-x_6(t_{k-1})}{\tau}+0.5c_6(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.25s_6(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]^2-\lambda_2+\lambda_3=0$$

при начальных условиях

$$x_1(0)=x_{10},\ \ x_2(0)=x_{20},\ \ x_3(0)=x_{30},\ \ x_4(0)=x_{40},\ \ x_5(0)=x_{50},\ \ x_6(0)=x_{60}.$$

Эта система должна быть последовательно решена K раз, тогда получим процесс изменения состояний гидравлической цепи.

И последний пример, касающийся замкнутой системы алгебраических уравнений относительно вектора хордовых расходов $x_4(t_k)$, $x_5(t_k)$, $x_6(t_k)$:

$$\left[r_1(t_{k-1})+r_3(t_{k-1})+r_4(t_{k-1})\right]\frac{x_4(t_k)-x_4(t_{k-1})}{\tau}+r_1(t_{k-1})\frac{x_5(t_k)-x_5(t_{k-1})}{\tau}-r_3(t_{k-1})\frac{x_6(t_k)-x_6(t_{k-1})}{\tau}+$$

$$+0.5\left[c_1(t_{k-1})+c_3(t_{k-1})+c_4(t_{k-1})\right]\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]+c_1(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]-$$

$$-0.5c_3(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]+0.25\left[s_1(t_{k-1})-s_3(t_{k-1})+s_4(t_{k-1})\right]\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.25s_1(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]^2-0.25s_3(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.5s_1(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.5s_3(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]-H_1(t_{k-1})=0,$$

$$r_1(t_{k-1})\frac{x_4(t_k)-x_4(t_{k-1})}{\tau}+\left[r_1(t_{k-1})+r_2(t_{k-1})+r_5(t_{k-1})\right]\frac{x_5(t_k)-x_5(t_{k-1})}{\tau}+r_2(t_{k-1})\frac{x_6(t_k)-x_6(t_{k-1})}{\tau}+$$

$$+0.5c_1(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]+0.5\left[c_1(t_{k-1})+c_2(t_{k-1})+c_5(t_{k-1})\right]\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.5c_2(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]+0.25s_1(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.25\left[s_1(t_{k-1})+s_2(t_{k-1})+s_5(t_{k-1})\right]\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]^2+0.25s_2(t_{k-1})\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.5s_1(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.5s_2(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]-H_1(t_{k-1})=0,$$

$$-r_3(t_{k-1})\frac{x_4(t_k)-x_4(t_{k-1})}{\tau}+r_2(t_{k-1})\frac{x_5(t_k)-x_5(t_{k-1})}{\tau}+\left[r_2(t_{k-1})+r_3(t_{k-1})+r_6(t_{k-1})\right]\frac{x_6(t_k)-x_6(t_{k-1})}{\tau}-$$

$$-0.5c_3(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]+0.5c_2(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]+$$

$$+0.5\left[c_2(t_{k-1})+c_3(t_{k-1})+c_6(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]+0.25s_3(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.25s_2(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]^2+0.5\left[s_2(t_{k-1})+s_3(t_{k-1})+s_6(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]^2+$$

$$+0.5s_2(t_{k-1})\left[x_5(t_k)+x_5(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]-$$

$$-0.5s_3(t_{k-1})\left[x_4(t_k)+x_4(t_{k-1})\right]\left[x_6(t_k)+x_6(t_{k-1})\right]=0$$

с условиями $x_4(0)=x_{40}$, $x_5(0)=x_{50}$, $x_6(0)=x_{60}$ и $k=1, 2, ..., K$.

После решения этой системы уравнений на k-м шаге определяются

$$x_4(t)+x_5(t)=x_1(t),$$

$$x_5(t)+x_6(t)=x_2(t),$$

$$-x_4(t)+x_6(t)=x_3(t).$$

Таким образом, для закрытой многоконтурной гидравлической цепи рассмотрены разнообразные подходы формирования вариационных моделей анализа нестационарного потокораспределения как для непрерывного, так и для дискретного времени. Необходимо отметить, что все модели с точки зрения конечного решения эквивалентны, а использование той или иной из них зависит от знаний и предпочтений исследователя.

При анализе режимов нестационарного потокораспределения экстремальный подход к построению математической модели по сравнению с формированием замкнутой системы дифференциальных уравнений не дает очевидных преимуществ ни относительно количества искомых переменных, ни относительно методов определения этих переменных. Следовательно, несмотря на эквивалентность применения обоих подходов, более рациональным является составление замкнутой системы дифференциальных уравнений в пространстве контурных расходов, так как в этом случае имеем наименьшее количество искомых функций для решения задачи Коши, и на основании этого решения по линейным функциональным соотношениям определяются расходы на ветвях разветвленной цепи, потери давления на всех ветвях и давления в линейно независимых узлах.

Тем не менее возникает целый класс задач (в частности, задачи параметрического регулирования и структурного управления), в которых резко увеличивается количество искомых функций, и система дифференциальных уравнений относительно них становится недоопределенной, а следовательно, имеет множество решений. Эти задачи возникают в результате возмущений, оказываемых на режим нестационарного потокораспределения потребителями: либо водоразбор – в открытых гидравлических цепях, либо отбор тепловой энергии (за счет изменения расхода на локальных отрезках ветвей) – в закрытых (циркуляционных) гидравлических цепях.

Под параметрическим регулированием будем понимать изменение пропускной способности ветвей как отклик на возмущения потребителей. При этом не допускается снижения пропускной способности до нуля, так как в этом случае ветви перестают функционировать и происходят структурные изменения цепи. Таким образом, для многоконтурных закрытых гидравлических цепей параметрическое регулирование может охватывать практически все ветви, начиная от ветвей, где имеет место регулируемый отбор тепловой энергии (за счет изменения расхода), и далее – на всех ветвях цепи с ограничениями пропускной способности. Вопрос о рациональном параметрическом регулировании можно решать двояко: 1) сформулировать некоторый критерий отбора единственного решения из множества получаемых при заданных вариациях нагрузок потребителей; 2) отбирать только то решение, при котором вариации не вносят возмущений, вызывающих неустойчивость динамических процессов гидравлической цепи. Параметрическое регулирование не допускает развала цепи, так как пропускные способности ветвей не равны нулю и ограничены значениями эквивалентных диаметров $D_{i\min} \le D_i(t) \le D_{i\max}$.

В принципе, параметрическое регулирование может осуществляться и за счет изменения активных напоров на ветвях цепи, что также влияет на пропускную способность, но и для них существенными являются ограничения $H_{i\min} \le H_i(t) \le H_{i\max}$.

Понятно, что все это относится к нормальным режимам нестационарного потокораспределения, а неординарные режимы требуют применения других математических моделей.

Под структурным управлением будем понимать изменение схемы движения, что связано с изъятием некоторых ветвей из графа цепи. Это возможно только для открытых гидравлических цепей, где можно изъять хордовые ветви, и снабжение потребителей будет осуществляться по разветвленной цепи, что способствует простому управлению параметрами источников. В этом случае пропускная способность на хордах может быть равной, т. е. значения эквивалентных диаметров ветвей $0 \le D_i(t) \le D_{i\max}$, где нулевое значение соответствует изъятию ветви из схемы движения.

Теперь, воспользовавшись ранее высказанными соображениями, можно сформулировать математическую модель параметрического регулирования и структурного управления для многоконтурной открытой и активной гидравлической цепи.

Модель нестационарного потокораспределения в пространстве хордовых расходов представлена в виде обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_c}{dt} = RC(t)x_c(t) + R(t)B_c x_c^T(t)S_c(t)x_c(t) +$$

$$+R(t)B_d\left[A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t)\right]^T S_d(t)\left[A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t)\right] + W(t)u(t),$$

где

$$R(t) = \left[-B_c R_c(t) - B_d R_d(t) B_d^T\right]^{-1}, \; C(t) = \left[-B_c C_c(t) - B_d C_d(t) B_d^T\right],$$

$$W = R(t)\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & -B_d R_d(t) A_d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -B_d C_d(t) A_d^{-1} \end{bmatrix}, \; u(t) = \begin{bmatrix} H(t) \\ \dfrac{dQ}{dt} \\ Q(t) \end{bmatrix},$$

и

$$x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t),$$

начальные условия $x_c(0) = x_{c0}$.

Анализ системы нелинейных дифференциальных уравнений затруднителен, а аппарат качественного анализа устойчивости базируется на линейных дифференциальных уравнениях, поэтому воспользуемся предположением, что заданную систему дифференциальных уравнений можно линеаризовать, т. е. привести к виду

$$\frac{dx_c}{dt} = D(t)x_c(t) + W(t)u(t) \text{ и } x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t).$$

Здесь можно ввести понятие задач управления: $x_c(t)$ – вектор фазовых координат, или вектор состояния гидравлической цепи; $x_d(t)$ – вектор выходных координат, или вектор управляемых координат гидравлической цепи; $u(t)$ – вектор управляющих воздействий; $D(t)$ – динамическая матрица гидравлической цепи, компоненты которой зависят от метода линеаризации; $W(t)$ – матрица управляющих воздействий; A_d^{-1} и B_d^T – матрицы выходных координат с постоянными вещественными величинами.

С технической точки зрения, управляющие воздействия, т. е. компоненты вектора $u(t) = \left[H_1(t), ..., H_n(t), \frac{dQ_1}{dt}, ..., \frac{dQ_{m-1}}{dt}, Q_1(t), ..., Q_{m-1}(t)\right]^T$, зависят от нагрузок потребителей и скоростей их изменения во времени, а также от изменения активных напоров, – это величины отклонения органов управления гидравлической цепи. Они влияют на управляемые (выходные) координаты $x_{d1}(t), ..., x_{dm-1}(t)$ гидравлической цепи, являющиеся потокораспределением по разветвленной цепи, в их целенаправленном изменении и состоит задача управления.

По очевидному предположению, координаты векторов $u(t)$ и $x_d(t)$ вещественны и рассматриваются относительно одних и тех же базисов в соответствующих векторных пространствах. Это позволяет полностью отождествить данные векторы с соответствующими матрицами-столбцами их координат относительно фиксированного базиса.

Вектор $x_c(t)$ определяет состояние гидравлической цепи в текущий момент времени t в том смысле, что в последующие моменты времени $\theta > t$ вектор $x_c(\theta)$ и, следовательно, вектор $x_d(\theta)$ зависят только от $x_c(t)$ и от управляющих воздействий $u(\tau)$, приложенных на интервале времени от t до θ.

Матрица-столбец $x_c(t) = [x_{c1}(t), ..., x_{cc}(t)]^T$ является матрицей, составленной из координат вектора состояния $x_c(t)$ в исходном ортонормированном базисе, относительно которого и записаны уравнения гидравлической цепи. Векторное пространство, в котором рассматриваются векторы состояния (фазовых координат), называется фазовым пространством. При этом, естественно, предполагается, что фазовые координаты $x_{c1}(t), ..., x_{cc}(t)$, а также элементы матриц $D(t)$, $W(t)$, A_d^{-1}, B_d^T (относительно этого исходного базиса) являются вещественными.

В процессе управления координаты вектора состояния могут оказаться недоступными для непосредственного наблюдения. Наблюдаемой может оказаться лишь часть фазовых координат или некоторые линейные функции от них. Для того чтобы закончить описание линейного динамического объекта, введем вектор наблюдаемых координат, которым для гидравлической цепи является вектор узловых давлений, или вектор обратных связей $P(t) = [P_1(t), ..., P_m(t)]^T$. Предполагается, что его координаты заданы линейными связями с фазовыми координатами гидравлической цепи:

$$P(t) = C(t)X(t) + E(t),$$

где

$$C(t)=\begin{bmatrix} A_d^{-1}R_d(t)B_d^T & 0 \\ 0 & A_d^{-1}C_d(t)B_d^T \end{bmatrix},\quad X(t)=\begin{bmatrix} \dfrac{dx_c}{dt} \\ x_c(t) \end{bmatrix},\quad E(t)=\begin{bmatrix} A_d^{-1}H(t) \\ A_d^{-1}R_dA_d^{-1}\dfrac{dQ}{dt} \\ A_d^{-1}C_dA_d^{-1}Q(t) \end{bmatrix}.$$

Матрица $C(t)$ называется матрицей наблюдаемых координат, или матрицей обратных связей.

Параметры источников и потребителей описываются парой вектор-функций $Q(t)$ и $P(t)$, первый содержит отрицательные компоненты, относящиеся к источникам, и положительные – к потребителям, второй – только положительные, как следствие законов физики движения сплошной среды. Размерности этих векторов равны $m-1$, т. е. количеству узлов цепи без единицы, так как в силу первого закона Кирхгофа в цепи без потери массы m-й узел является узлом баланса, где соблюдается равенство $Q_m(t)=\sum_{j=1}^{m-1}Q_j(t)$.

Параметры ветвей для общей модели, как в непрерывном, так и в дискретном случаях, описываются тройкой вектор-функций $R(t)$, $S(t)$ и $C(t)$, а в случаях линейной и нелинейной моделей – парой вектор-функций: либо $R(t)$ и $C(t)$, либо $R(t)$ и $S(t)$. Размерности всех векторов равны n – количеству участков, принадлежащих цепи. Значения элементов векторов $S(t)$ и $C(t)$ положительные, вектора $R(t)$ – отрицательные. Так как параметры ветвей являются функциями пропускной способности, а она зависит от эквивалентного диаметра ветви, то для сокращения искомых функций рационально ввести следующие зависимости:

$$R(t)=\alpha D^{-2}(t),\ S(t)=\beta D^{-5}(t),\ C(t)=\delta D^{-2}(t),\ 0\le D(t)\le D_{\max},$$

где α, β, δ – некоторые постоянные коэффициенты.

Тогда математическая модель относительно $n+c$ искомых функций $D(t)=[D_1(t),...,D_n(t)]^T$ и $x_c(t)=[x_1(t),...,x_c(t)]^T$ запишется в виде

$$\frac{dx_c}{dt}=RC(t)x_c(t)+R(t)B_cx_c^T(t)\beta_cD_c^{-5}(t)x_c(t)+$$

$$+R(t)B_d\left[A_d^{-1}Q(t)+B_d^Tx_c(t)\right]^T\beta_dD_d^{-5}(t)\left[A_d^{-1}Q(t)+B_d^Tx_c(t)\right]+W(t)u(t),$$

где

$$R(t)=\left[-B_c\alpha_cD_c^{-2}(t)-B_d\alpha_dD_d^{-2}(t)B_d^T\right]^{-1},\ C(t)=\left[-B_c\delta_cD_c^{-2}(t)-B_d\delta_dD_d^{-2}(t)B_d^T\right],$$

$$W=R(t)\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & -B_d\alpha_dD_d^{-2}(t)A_d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -B_d\delta_dD_d^{-2}(t)A_d^{-1} \end{bmatrix},\quad u(t)=\begin{bmatrix} H(t) \\ \dfrac{dQ}{dt} \\ Q(t) \end{bmatrix},$$

и

$$x_d(t)=A_d^{-1}Q(t)+B_d^Tx_c(t),$$

начальные условия $x_c(0)=x_{c0}$.

Линейный аналог

$$\frac{dx_c}{dt} = D(t)x_c(t) + W(t)u(t) \text{ и } x_d(t) = A_d^{-1}Q(t) + B_d^T x_c(t)$$

имеет вид

$$P(t) = C(t)X(t) + E(t),$$

где

$$C(t) = \begin{bmatrix} A_d^{-1}\alpha_d D_d^{-2}(t)B_d^T & 0 \\ 0 & A_d^{-1}\delta_d D_d^{-2}(t)B_d^T \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_c}{dt} \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad E(t) = \begin{bmatrix} A_d^{-1}H(t) \\ A_d^{-1}R_d A_d^{-1}\dfrac{dQ}{dt} \\ A_d^{-1}C_d A_d^{-1}Q(t) \end{bmatrix}.$$

Параметры – начальное и конечное состояния цепи – два вектора x^0 и x^T размерностью n. Компоненты векторов – вещественные числа; состояние ветвей описывается парой вектор-функций $x(t)$ и $h(t)$ размерностью n, компоненты которых – вещественные функции времени; состояние узлов цепи: $P(t)$ – вектор-функция размерностью $m - 1$, так как считается, что изменение давления в одном из узлов всегда известно: $P_m(t)$.

Параметры, характеризующие источники: $P_{uj}(t)$ и $Q_{uj}(t)$ при $u_j = 1, 2, ..., m_u$, где m_u – количество источников в гидравлической цепи. Как правило, источники оснащены измерительной аппаратурой и для них характерны систематические измерения давления и расхода. Для потребителей необходимы также данные по изменениям во времени давления и расхода: $P_{nj}(t)$ и $Q_{nj}(t)$ при $n_j = m_u$, $m_u + 1, ..., m_n$, где m_n – количество потребителей в гидравлической цепи. Причем потребители являются основными внешними возмущающими воздействиями на режимы гидравлических цепей, следовательно, только по их изменениям может отстраиваться регулирующая аппаратура на ветвях цепи и могут решаться разнообразные задачи надежности, безопасности и экономии энергетических ресурсов для трубопроводной системы. Учитывая значимость этих параметров, будем считать, что они заданы, так же как и параметры, характеризующие источники. Тем более что они непосредственно отображают качественные и количественные показатели эффективности работы трубопроводной системы, выполняющей основную функцию снабжения потребителей и в нормальных, и в неординарных условиях эксплуатации.

Для всего спектра моделей нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях основным возмущением является нагрузка потребителей, и именно она может иметь различную природу: детерминированную, стохастическую, неопределенную или совместную. Это сказывается на математическом описании и, как следствие, на методах отыскания решения, особенно в задачах регулирования и управления. Поэтому имеет смысл более подробно остановиться на различных моделях потребителей.

4.3. Детерминированное описание внешних возмущений в гидравлической цепи

Рассмотрим описание открытых многоконтурных гидравлических цепей, нестационарные процессы в которых определяются не только изменением действующих напоров $H(t)$, но и сложными процессами потребления энергии и массы, что можно записать в общем виде

$$Q(t,p)=Q_D(t)+Q_S(p),$$

где $Q_D(t)$ – определенная (детерминированная) составляющая графика потребления, функция времени; $Q_S(p)$ – случайная (стохастическая) составляющая графика потребления, функция вероятности.

Имеем полную группу событий: расход потребителя равен сумме детерминированной и стохастической составляющих. Для вектор-функции $Q(t, p)$ изменяющихся во времени нагрузок потребителей принято, что они заданы как бы в двумерном пространстве (реализаций t и случайных событий p):

$$Q(t,p)=(1-p)Q_D(t)+iQ_S(p),$$

но в вышеприведенных системах кроме слагаемых нагрузки потребителей содержатся и слагаемые со скоростью изменения нагрузки, т. е.

$$\frac{dQ}{dt}=(1-p)\frac{dQ_D}{dt}+i\frac{\partial Q_S}{\partial p}\frac{dp}{dt},$$

а также

$$Q^2(t)=(1-p)^2Q_D^2(t)-Q_S^2(p)+2i(1-p)Q_D(t)Q_S(t).$$

Это означает, что и решение будет определяться в комплексном пространстве, т. е. справедливы представления

$$x(t)=x_D(t)+ix_S(p),\ x^2(t)=x_D^2(t)-x_S^2(p)+2ix_D(t)x_S(t),\ \frac{dx}{dt}=\frac{dx_D}{dt}+i\frac{\partial x_S}{\partial p}\frac{dp}{dt}.$$

После подстановки этих выражений, приведения подобных и приравнивания вещественных слагаемых и коэффициентов при мнимой единице, получим две системы дифференциальных уравнений относительно неизвестных: первую – хордовых расходов $x_D(t)$, вторую – вероятностных прибавок $x_S(p)$. Так как рассматривается система для определения хордовых расходов, то индекс c можно опустить, а для характеристик ветвей цепи и матриц он сохраняется:

$$\left[B_dR_d(t)B_d^T+R_c(t)\right]\frac{dx_D}{dt}-BH(t)+\left[B_dC_d(t)B_d^T+C_c(t)\right]x_D(t)+S_c\left[x_D^2(t)-x_S^2(p)\right]+$$

$$+\left[A_d^{-1}(1-p)Q_D(t)+B_d^Tx_S(p)\right]^TB_dS_d(t)\left[A_d^{-1}(1-p)Q_D(t)+B_d^Tx_S(p)\right]-$$

$$-\left[A_d^{-1}Q_S(p)+B_d^Tx_S(p)\right]^TB_dS_d(t)\left[A_d^{-1}Q_S(p)+B_d^Tx_S(p)\right]=$$

$$=-B_dR_d(t)A_d^{-1}(1-p)\frac{dQ_D}{dt}+B_dC_d(t)A_d^{-1}(1-p)Q_D(t),$$

$$\left[B_dR_d(t)B_d^T+R_c(t)\right]\frac{\partial x_S(p)}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\left[B_dC_d(t)B_d^T+C_c(t)\right]x_S(p)+2S_c(t)x_D(t)x_S(p)+$$

$$+\left[A_d^{-1}Q_S(p)+B_d^Tx_S(p)\right]^TB_dS_d(t)\left[A_d^{-1}Q_S(p)+B_d^Tx_S(p)\right]+$$

$$+\left[A_d^{-1}(1-p)Q_D(t)+B_d^Tx_D(t)\right]^TB_dS_d(t)\left[A_d^{-1}Q_S(p)+B_d^Tx_S(p)\right]=$$

$$=-B_dR_d(t)A_d^{-1}\frac{\partial Q_S}{\partial p}\frac{dp}{dt}-B_dC_d(t)A_d^{-1}Q_S(t).$$

При анализе нестационарных режимов решение при заданных начальных условиях позволяет оценить изменение детерминированной и стохастической составляющих контурных расходов и, как следствие, все другие параметры гидравлической цепи.

Исследование динамических процессов поставило целый ряд нетрадиционных задач, связанных с осмыслением и описанием разнообразных параметров, входящих в эти описания. Данные параметры, как правило, изменяются в силу регулирования, управления и подобных процессов, происходящих в реальных транспортных системах. Это в первую очередь связано с возмущениями, которые влияют на траектории процессов, происходящих в гидравлической цепи.

Возмущениями в дальнейшем будем называть изменения параметров гидравлической цепи (изменения расходов потребителей, мощности источников, различные гидравлические характеристики участков системы во времени и т. д.), оказывающие непосредственное влияние на режимные параметры цепи (изменение расходов на ветвях цепи и изменение давлений в узлах).

Возмущения можно условно разделить на две группы: *внешние* и *внутренние.*

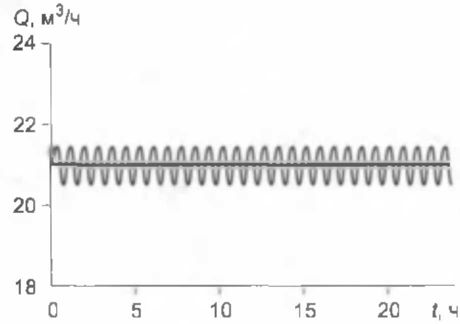
К внешним возмущениям относятся параметры потребителей, изменяющиеся во времени и для гидравлической цепи являющиеся параметрами узлов, а именно вектор-функции узловых расходов $Q(t)$ и давлений $P(t)$ как характеристики количества и качества потребления. В нормальных условиях эксплуатации они отвечают графикам потребления, взаимоувязанным с нестационарными режимами гидравлической цепи. На их изменение во времени влияет множество факторов: производительность труда, качество жизни, рост числа потребителей и другие, что должно адекватно отражаться на изменении мощностей источников и гидравлической цепи в целом. В неординарных условиях эти параметры переходят в класс управляемых с минимально ограниченными значениями для жизнедеятельности. Очевидно, что в нормальных условиях эксплуатации гидравлической цепи они могут регулироваться путем изменения внутренних параметров ветвей системы, если будут оборудованы соответствующими техническими устройствами (регуляторами пропускной способности, давлений и активного напора).

Исходя из условий баланса, суммарный расход всех потребителей равен суммарной мощности источников в системе без потерь, что соответствует идеализации гидравлических цепей. Мощности и давления источников можно отнести к управляющим параметрам, а следовательно, управление в источниках может осуществляться согласно различным принципам: стабилизирующее, с опережением и с обратной связью (в зависимости от цели управления и технического обустройства системы).

К внутренним возмущениям относятся параметры ветвей гидравлической цепи в замыкающих соотношениях, связанных с параметрами режима (расходом и падением давления), что для нестационарных процессов записывается в общем виде

$$\frac{dh(t)}{dt} = R(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2S(t)x(t)\frac{dx(t)}{dt} + C(t)x(t) - H(t).$$

Рис. 4.6. Непрерывный равномерный график нагрузки и его аппроксимация периодической функцией с малой амплитудой и большой частотой



Очевидно, что $R(t)$, $S(t)$, $C(t)$, $H(t)$ отождествляются с внутренними возмущениями и могут быть использованы в качестве регулируемых параметров для заданных графиков потребления.

Остановимся подробнее на аппроксимации внешних возмущений, в первую очередь на графиках потребления. По виду графика потребления можно выделить три типа потребителей.

1. Потребители с непрерывным графиком потребления, как правило, мало изменяющимся во времени для определенного периода, что позволяет аппроксимировать этот график постоянной величиной, равной некоторой средней нагрузке: $Q(t) = Q_{ср} = \text{const}$ (рис. 4.6).

2. Частично неравномерный график потребления за некоторый период (в данном примере – сутки), где внутри периода наблюдаются участки равномерного (по времени) потребления. Это могут быть потребители односменной работы (например, коммунально-бытовые предприятия). Здесь уже недостаточно ориентироваться на осредненную нагрузку, так как она не обеспечивает потребности, и необходимо этот график представлять в виде функции времени, т. е. $Q(t) = A\sin\omega(t+\theta)+\eta$, где A – амплитуда; ω – частота; η, θ – сдвиги по абсциссе и ординате, что учитывает положительность потребителей $Q(t) \geq 0$ (рис. 4.7). Предварительный анализ графиков нагрузки как кусочно-непрерывной функции позволяет оценить численные значения величин: амплитуды A, частоты ω, сдвигов по временной θ и расходной η координатам.

3. Неравномерный график потребления за определенный период времени характерен для самого массового потребителя (например, жилищный сектор). Он также может быть описан периодической функцией вида $Q(t) = A\sin\omega(t+\theta)+\eta$, где A – амплитуда; ω – частота; η, θ – сдвиги по абсциссе и ординате при $Q(t) \geq 0$ (рис. 4.8). Предварительный анализ графиков нагрузки как кусочно-непрерывной функции позволяет оценить численные значения величин A, ω, θ и η. Но это может быть не более чем первым приближением, так как для более точного описания необходимо использовать гармоники высших порядков.

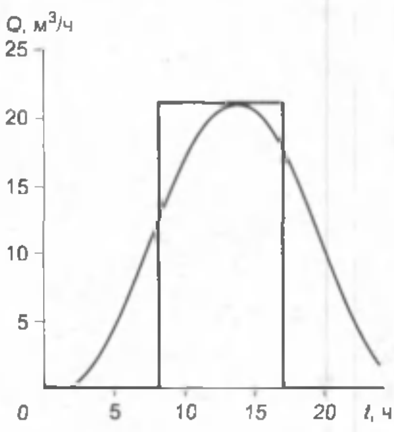


Рис. 4.7. Частично неравномерный график потребления на временном интервале $t \in [8, 17]$ и его аппроксимация периодической функцией с определенными амплитудой, частотой и сдвигами *по фазе и амплитуде*

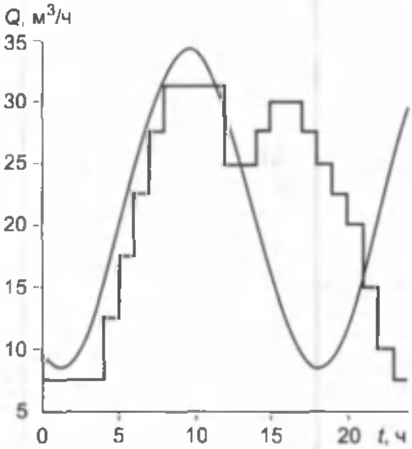


Рис. 4.8. Неравномерный график потребления и его аппроксимация периодической функцией с определенными амплитудой, частотой и сдвигами по фазе и амплитуде

Из этого предварительного анализа можно сделать вывод, что графики потребления характеризуются определенным периодом.

Периодические функции. Пусть $f(t)$ – функция, определенная на всей числовой прямой. Число T называется периодом этой функции, если от прибавления его к аргументу величина функции не меняется, т. е. если для всех t имеет место равенство $f(t+T)=f(t)$.

Если T есть период функции, то nT, где n – любое целое число, также является периодом рассматриваемой функции. Функция, имеющая отличный от нуля период, называется периодической.

Простой пример периодической функции – гармоническое колебательное движение

$$y = A\sin(\omega t + \delta)$$

с периодом $T = 2\pi/\omega$ или частотой $\omega = 2\pi/T$.

Можно предположить, что графики потребления являются периодическими функциями, тогда они могут быть аппроксимированы тригонометрическими функциями, например, вида

$$Q(t) = A\sin\big(\omega(t+\eta)\big)+\theta,$$

где θ является сдвигом по ординате, так как $Q(t)\geq 0$, т. е. задана только в положительном октанте; η – сдвиг по абсциссе, т. е. по временной координате.

Согласно этой формуле, синус суммы двух углов в описании графика нагрузки может быть

$$Q(t) = A\cos(\omega\eta)\sin(\omega t) + A\sin(\omega\eta)\cos(\omega t)+\theta.$$

При предположении, что A, ω, η не зависят от времени, введем обозначения $a = A\sin(\omega\eta)$, $b = A\cos(\omega\eta)$. Тогда получим

$$Q(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)+\theta.$$

Более сложная периодическая функция вида

$$y = \sum_{k=0}^{K} A_k\sin(\omega_k t+\delta_k) + \sum_{k=0}^{K} C_k = \sum_{k=0}^{K}\left[a_k\cos(\omega_k t) + b_k\sin(\omega_k t)\right] + C,$$

где

$$a_k = A_k\sin(\omega_k\eta_k),\; b_k = A_k\cos(\omega_k\eta_k),\; C=\sum_{k=0}^{K} C_k,$$

называется тригонометрическим полиномом K-го порядка. Поэтому возникает вопрос о приближенном представлении произвольной периодической функции $f(t)$ периода 2π в виде тригонометрического полинома K-го порядка, а затем и вопрос о разложении функции $f(t)$ в тригонометрический ряд

$$f(t)=\sum_{k=0}^{K} A_k \sin(\omega_k t+\delta_k)+C,$$

подобно задачам приближенного выражения функции в виде полинома n-й степени или разложения ее в степенной ряд. Это основные задачи гармонического анализа [38–40, 43, 68, 123, 134, 186].

Общий член этого ряда $A_k \sin(\omega_k t+\delta_k)$ называется k-й гармоникой функции $f(t)$. Его можно представить в виде

$$A_k \sin(\omega_k t+\delta_k)=a_k \sin(\omega_k t)+b_k \sin(\omega_k t),$$

где

$$a_k = A_k \sin(\delta_k); \quad b_k = A_k \cos(\delta_k) \text{ при } k=0,1,2,\dots .$$

Гармоника нулевого порядка $A_0 \sin(\delta_0)$ есть постоянная, которую обозначим через $a_0/2 = A_0 \sin(\delta_0)+C$. Теперь основная задача гармонического анализа может быть представлена следующим образом: *необходимо подобрать, если возможно, неизвестные постоянные*

$$a_0, a_1, \dots, a_K; \quad b_1, b_2, \dots, b_K, \dots$$

так, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega_k t)+b_k \sin(\omega_k t)\right]$$

был сходящимся и чтобы его сумма равнялась заданной периодической функции $f(t)$ с периодом 2π.

Неизвестные постоянные могут быть вычислены по формулам

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(\omega_k t)dt,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin(\omega_k t)dt, \quad k=1,2,\dots,$$

$$a_0=2A_0 \sin(\delta_0)+2C.$$

Они называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$, а ряд носит название ряда Фурье функции $f(t)$, который будет сходящимся, и его сумма будет равна $f(t)$ при следующих ограничительных предположениях относительно функции (условия Дирихле). Функция удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(-\pi, \pi)$, если она непрерывна в этом интервале или имеет конечное число разрывов первого рода и если, кроме того, интервал $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых $f(t)$ меняется монотонно.

Если $f(t)$, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$, удовлетворяет в этом интервале условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится во всем интервале $(-\pi, \pi)$ и сумма ряда:

1) равна $f(t)$ во всех точках непрерывности $f(t)$, лежащих внутри интервала;
2) равна $[f(t+0)+f(t-0)]/2$ во всех точках разрыва непрерывности;
3) равна $[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]/2$ на концах интервала, т. е. при $t=-\pi$ и $t=+\pi$.

Если $f(t)$ есть четная функция в промежутке $(-a, a)$, т. е. $f(t)=f(-t)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt,$$

и если $f(t)$ есть нечетная функция в промежутке $(-a, a)$, т. е. $f(t)=-f(-t)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 .$$

Согласно этому, функцию можно разложить в интервале $(0, \pi)$, тогда получим следующие формулы для определения коэффициентов:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(\omega_k t)dt, \quad b_k = 0, \text{ если } f(t) \text{ – функция четная, и}$$

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(\omega_k t)dt, \text{ если } f(t) \text{ – функция нечетная.}$$

Разложение функции будет иметь вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t), \text{ если } f(t) \text{ – функция четная, и}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t), \text{ если } f(t) \text{ – функция нечетная.}$$

Периодические функции периода $2T$. В различных задачах рассмотрим разложение в тригонометрический ряд по косинусам и синусам функции $f(t)$, определяемой не в интервале $(-\pi, +\pi)$, а в интервале $(0, T)$, или разложение в ряд только по косинусам либо только по синусам функции, определенной в интервале $(0, +T)$.

Ряды Фурье и интегралы Фурье используются для представления или приближения функций во многих важных приложениях. Разложение в ряд Фурье есть частный случай разложения в ряд по ортогональным функциям.

Ряды Фурье.

А. Если задан интервал разложения $-\pi < t < \pi$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau)| d\tau$, есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

коэффициенты которого определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos(k\tau)d\tau,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin(k\tau)d\tau,$$

$$c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{-ik\tau}d\tau \text{ для } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Здесь a_k, b_k – действительные числа; c_k – комплексные числа.

Б. Если задан интервал разложения $0 < t < T$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует интеграл $\int_0^T |f(\tau)|d\tau$, есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)\right) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\cos(k\omega_0\tau)d\tau,\ \ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\sin(k\omega_0\tau)d\tau,$$

$$c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{ik\omega_0\tau}d\tau,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

В. Если существует интеграл $\int_0^T [f(\tau)]^2 d\tau$, то средняя квадратичная погрешность $\frac{1}{T}\int_0^T [f(\tau) - P_n(\tau)]^2 d\tau$, где $P_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + \beta_k\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$ – произвольный тригонометрический многочлен, при каждом n принимает наименьшее значение, когда в качестве коэффициентов α_k и β_k многочлена $P_n(t)$ берутся соответствующие коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$, т. е. когда тригонометрический многочлен $P_n(t)$ есть частичная сумма

$$s_n(t) \equiv \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$$

ряда Фурье функции $f(t)$.

Г. Если абсолютная величина $|f(t)|$ интегрируема на интервале разложения, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k\to\infty$ стремятся к нулю (теорема Римана–Лебега). Если функция $f(t)$ на всем замкнутом интервале разложения имеет непрерывные производные до $(m - 1)$-го порядка включительно, причем каждая из них в концах интервала имеет одно и то же значение, и если m-я производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k\to\infty$ убывают не медленнее чем m^{-k}, т. е.

$$|a_k| < \frac{C}{m^k},\ \ |b_k| < \frac{C}{m^k},$$

где C – постоянная.

Д. Действительные коэффициенты a_k, b_k и комплексные коэффициенты c_k связаны формулами

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}),$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \; c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $b_0 = 0$. Ряд Фурье четной или нечетной функции $f(t)$ сводится к рядам Фурье по косинусам или по синусам соответственно.

Функции, разложимые в ряд Фурье и представимые интегралами Фурье. Гармонический анализ.

А. Интеграл Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале $-\infty < t < +\infty$ разложения, по определению есть

$$\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{+\infty} d\omega \int_{+\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos(\omega(t-\tau))\,d\tau \equiv \int_{+\infty}^{+\infty} c(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

где

$$c(\nu) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\tau, \quad C(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

$$\Omega(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \equiv c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (\omega = 2\pi\nu).$$

Б. Косинус- и синус-интегралы Фурье, порожденные действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале $0 < t < +\infty$ разложения, по определению есть

$$2\int_0^{+\infty} c_c(\omega)\cos(2\pi\nu t)\,d\nu \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} C_c(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega,$$

$$2\int_0^{+\infty} c_s(\omega)\sin(2\pi\nu t)\,d\nu \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} C_s(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega,$$

где

$$c_c(\nu) \equiv 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos(2\pi\nu\tau)\,d\tau, \quad C_c(\omega) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_c(\nu),$$

$$c_s(\nu) \equiv 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin(2\pi\nu\tau)\,d\tau, \quad C_s(\omega) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_s(\nu).$$

В. Ряд Фурье или интеграл Фурье, порождаемый действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина которой интегрируема на соответствующем интервале разложения T,

1) сходится к $[f(t-0)+f(t+0)]/2$ на каждом открытом интервале, где функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ кусочно-непрерывны; при этом на каждом замкнутом интервале, в котором функция непрерывна, ряд Фурье сходится к $f(t)$;

2) сходится равномерно к $f(t)$ на каждом таком интервале $(a,b)\subset(a-\delta,b+\delta)\subset T$, где $\delta>0$, что на $(a-\delta,b+\delta)$ функция $f(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию;

3) сходится к $[f(t-0)+f(t+0)]/2$ на каждом открытом интервале, содержащемся в T, на котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию (признак Жордана).

Функция $f(t)$, ограниченная и имеющая конечное число относительных максимумов, относительных минимумов и точек разрыва первого рода на некотором конечном интервале (условие Дирихле), является на этом интервале функцией ограниченной вариации.

Г. Гармонический анализ периодических функций. Пусть $f(t)$ – действительная периодическая функция с периодом T, для которой существует интеграл $\int_0^T |f(\tau)|d\tau$. Тогда

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\omega_0 t}=c_0+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cos(k\omega_0 t+\arg c_k),$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\cos(k\omega_0\tau)d\tau,\quad b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\sin(k\omega_0\tau)d\tau,$$

$$c_k=\bar{c}_{-k}=\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T},\ k=0,1,2,\dots .$$

На каждом открытом промежутке, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, в каждой точке разрыва $f(t)$ по определению полагаем

$$f(t)=[f(t-0)+f(t+0)]/2.$$

Таким образом, функция $f(t)$ представлена в виде суммы:

1) постоянного члена $a_0/2=c_0$ (среднего значения функции $f(t)$) и

2) некоторого множества синусоидальных членов с частотами $\omega_0=1/T$ (основной частоты), $2\omega_0=2/T$ (второй гармонической частоты), $3\omega_0=3/T$ (третьей гармонической частоты).

Здесь k-я гармоническая компонента $2|c_k|\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\arg c_k\right)$ имеет частоту $k\nu_0=k/T$, круговую частоту $k\omega_0=2\pi k\omega_0$, амплитуду $2|c_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ и "фазу" $\arg c_k=-\arg\operatorname{tg}(b_k/a_k)$.

Нечетные члены гармонического разложения описывают апериодическую часть функции.

Любую функцию $f(t)$ действительной переменной t можно представить в виде суммы двух функций: *четной* (симметрической) $f_s(t)$, для которой имеет место равенство $f(t)=f(-t)$, и *нечетной* (антисимметрической) $f_a(t)$, для которой $f(t)=-f(-t)$. Отсюда следует, что

$$f_s(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\ \text{и}\ f_a(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}.$$

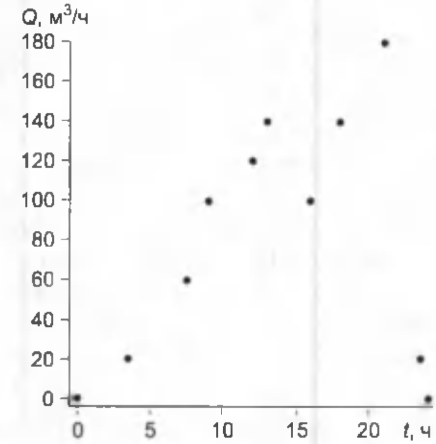


Рис. 4.9. Замеренные расходы у потребителя в течение суток

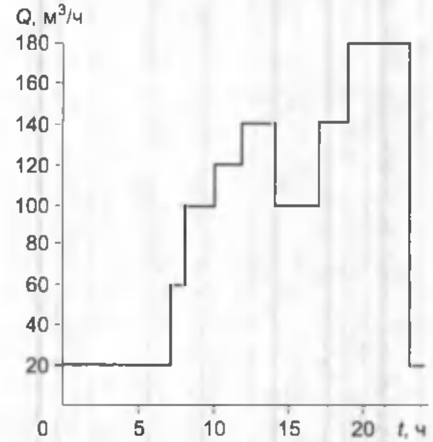


Рис. 4.10. Кусочно-непрерывная функция изменения расхода у потребителя в течение суток

Предположим, что имеются замеры нагрузки потребителей в определенные моменты времени в течение суток, которые могут быть отображены точками в пространстве время–расход (рис. 4.9).

Так как функции внешних возмущений носят кусочно-непрерывный характер $Q(t_i)=Q_i=\text{const}$ для $i=1, 2, ..., N$ и $t\in[t_i,\ t_{i+1}]$, появляется три альтернативы аналитической записи функции $Q(t)$ для дальнейшей аппроксимации их рядами Фурье:

1) в виде кусочно-непрерывной функции (рис. 4.10);

2) в виде линейно-непрерывной функции по средним ординатам на промежутке времени $[t_i,\ t_{i+1}]$ (рис. 4.11, *а*);

3) в виде линейно-непрерывной функции по средним абсциссам на промежутке времени $[t_i,\ t_{i+1}]$ (рис. 4.11, *б*).

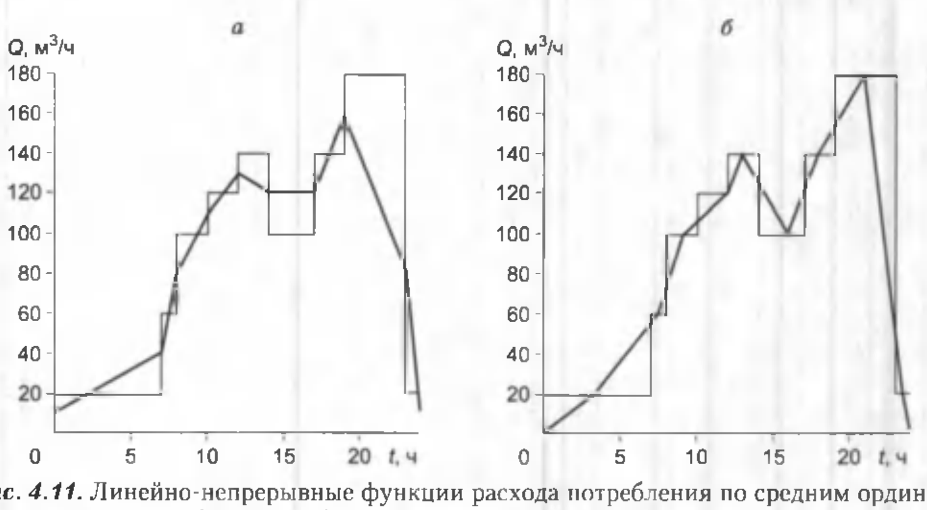


Рис. 4.11. Линейно-непрерывные функции расхода потребления по средним ординатам (*а*) и средним абсциссам (*б*)

Согласно условиям Дирихле, кусочно-непрерывная функция для заданного графика потребления может быть в первом приближении представлена в виде линейно-непрерывной функции по средним ординатам (см. рис. 4.11, *а*).

Из представленных графиков видно, что при аппроксимации по средним ординатам пропадают максимальные и минимальные значения потребления, что, естественно, приводит к ошибкам.

Исходя из точного графика функции расхода у потребителя (см. рис. 4.10), суточное потребление составит $S = 2240$ м^3. По этому потреблению можно судить о приближении того или иного вида аппроксимации. Так, если для линейно-непрерывной аппроксимации по средним ординатам имеем $S_1 = 2080$ м^3, что составит ошибку $\delta_1 = 160$ м^3, то для линейно-непрерывной аппроксимации по средним абсциссам ошибка меньше и соответствующие показатели будут $S_2 = 2110$ м^3 и $\delta_2 = 130$ м^3.

Таким образом, в качестве первого приближения можно предложить линейно-непрерывную аппроксимацию по средним абсциссам, которая также удовлетворяет условиям Дирихле (см. рис. 4.11, *б*).

В принципе, любая из этих двух аппроксимаций может быть использована для гармонического анализа, но в дальнейшем в качестве исходной будет приниматься вторая, как более точно отражающая свойства графика потребления.

Тригонометрические функции могут быть представлены степенными рядами

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Учитывая эти разложения, ряд Фурье можно записать в виде степенного ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k\omega_0 t)^{2n}}{2n!} + b_k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k\omega_0 t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right],$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k\omega_0 t)^{2n}}{2n!} dt, \;\; b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k\omega_0 t)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Погрешность и средняя квадратичная погрешность. Пусть, как и выше, $f(t)$ – функция, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$. Составим линейную комбинацию первых $(2n + 1)$ функций семейства

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots$$

вида

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)),$$

где α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$, β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_K$ – *некоторые численные коэффициенты*. Записанное выражение с конечным числом слагаемых называется тригонометрическим полиномом K-го порядка. Рассмотрим погрешность, которая получается, если заменить $f(t)$ конечной суммой, т. е. рассмотрим разность

$$\Delta_K(t) = f(t) - \left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))\right\}.$$

Наибольшим отклонением $\Delta_K(t)$ суммы от функции $f(t)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$ назовем наибольшее значение $|\Delta_K(t)|$ в этом промежутке: чем меньше будет Δ_K, тем точнее тригонометрический полином K-го порядка представляет функцию $f(t)$. Эта погрешность может служить для оценки числовых параметров тригонометрического полинома K-го порядка (равномерное приближение), если принять, что наименьшее отклонение по модулю равно нулю в $(2n + 1)$ точках промежутка $(-\pi, \pi)$, что дает запись линейной системы уравнений относительно искомых параметров и столбца свободных членов значений $f(t)$ в $(2n + 1)$ точках промежутка $(-\pi, \pi)$.

Однако величину Δ_K неудобно принять за меру приближения, и не только потому, что исследование этой величины затруднительно, но и потому, что при решении вопроса о приближенном представлении функции более важным часто является уменьшение погрешности в "среднем" или "вероятной" погрешности, "наибольшего отклонения".

При применении метода наименьших квадратов для обработки наблюдений за меру точности принимается "средняя квадратичная погрешность", которая определяется следующим образом:

$$\delta_K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta_K^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(t) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))\right]^2 dt.$$

Остается подобрать постоянные α_0, α_1, ..., α_K, β_1, β_2, ..., β_K так, чтобы величина δ_K^2 была наименьшей, т. е. решить задачу на минимум функции δ_K^2 от $(2K + 1)$ переменных. Можно решить эту задачу, используя необходимые и достаточные условия существования экстремума для квадратичной функции, что приведет к замкнутой системе $(2K + 1)$ линейных уравнений относительно искомых неизвестных α_0, α_1, ..., α_K, β_1, β_2, ..., β_K. В то же время можно провести исследование связи искомых неизвестных с коэффициентами Фурье и их поведения при $K \to \infty$.

Для применения второго подхода упростим выражение квадратичной оценки:

$$\left[f(t) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))\right]^2 = f^2(t) - f(t)\alpha_0 -$$

$$-2f(t)\sum_{k=1}^{K}(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{K}\left(\alpha_k^2 \cos^2(kt) + \beta_k^2 \sin^2(kt)\right) + \sigma_K,$$

где σ_K означает линейную комбинацию выражений вида

$$\cos(lt)\cos(mt),\ \sin(lt)\sin(mt),\ \cos(lt)\sin(mt),\ \sin(lt)\cos(mt) \text{ при } l \neq m.$$

В силу свойства ортогональности тригонометрических функций интеграл от всех этих выражений по промежутку $(-\pi, \pi)$ равен нулю, а следовательно, будет равен нулю и интеграл от σ_K по этому промежутку. Интегралы от $\cos^2(kt)$ и $\sin^2(kt)$ равны π и, подставляя их в формулу квадрата ошибки, получим

$$\delta_K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt - \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(kt)dt + \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin(kt)dt\right] +$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right).$$

Принимая во внимание выражение для коэффициентов Фурье функции $f(t)$, можно переписать выражение для квадратичной ошибки в виде

$$\delta_K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt - \frac{\alpha_0 a_0}{2\pi} - \sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k a_k + \beta_k b_k\right] + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right),$$

или, вычитая и прибавляя сумму

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(a_k^2 + b_k^2\right),$$

можно записать

$$\delta_K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(a_k^2 + b_k^2\right) + \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right].$$

Наименьшим значение δ_K^2 будет, очевидно, в том случае, когда последние неотрицательные слагаемые в правой части обратятся в нуль, т. е. это будет иметь место, если положить $\alpha_0 = a_0$ и вообще $\alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Итак, *средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции $f(t)$ посредством тригонометрического полинома K-го порядка будет наименьшей, если коэффициенты полинома суть коэффициенты Фурье функции $f(t)$.*

Отметим при этом одно важное обстоятельство. Из полученного результата следует, что значения α_k и β_k, которые обращают в минимум δ_K^2, не зависят от значения K. Если увеличить K, то надо будет добавить новые коэффициенты α_k и β_k, но уже вычисленные ранее коэффициенты останутся прежними.

Величину ε_K наименьшей погрешности получим по формуле, заменив в последнем результате α_k и β_k соответственно на a_k и b_k, что дает

$$\varepsilon_K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

При возрастании K, т. е. порядка тригонометрического полинома, в правой части равенства будут добавляться новые отрицательные (или, во всяком случае, не положительные) слагаемые $-a_{K+1}^2$, $-b_{K+1}^2, \ldots$, и, таким образом, *погрешность ε_K может только уменьшаться при увеличении K, т. е. точность приближения увеличивается (не уменьшается) при возрастании K.*

Разложение в ряд по ортогональным функциям. Рассмотрим совокупность функций вещественной переменной

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t), \ldots .$$

Если эти функции таковы, что

$$\int_a^b u_m(t)u_n(t)\varphi(t)dt = 0 \text{ при } m \neq n,$$

принято говорить, что функции $u_n(t)$ и $u_m(t)$ образуют в промежутке $[a, b]$ ортогональную систему с весовой функцией $\varphi(t)$.

Пусть дана функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле. Она может быть представлена в виде бесконечной суммы ортогональных функций, т. е. ортогональным рядом вида

$$f(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \ldots + c_nu_n(t) + \ldots .$$

Чтобы вычислить коэффициенты c_m, умножим обе части равенства на $u_m(t)\varphi(t)$ и проинтегрируем на интервале $[a, b]$. Согласно условию ортогональности, исчезнут все интегралы справа, кроме

$$c_m \int_a^b u_m^2(t)\varphi(t)dt,$$

отсюда

$$c_m = \int_a^b u_m(t)\varphi(t)f(t)dt \left[\int_a^b u_m^2(t)\varphi(t)dt\right]^{-1}.$$

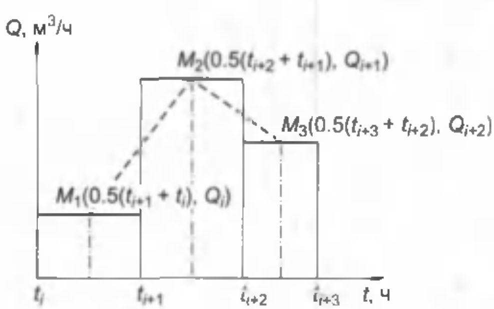
Если кроме условия ортогональности для функций $u_m(t)$ выполняется условие

$$\int_a^b u_m^2(t)\varphi(t)dt = 1,$$

то система называется ортонормированной.

Предположим, что график потребления задан линейно-непрерывной функцией с некоторым периодом T (например, сутки) и расположен в положительной области значений $Q(t_i) = Q_i = \text{const}$ и $Q_i \geq 0$, при этом интервалы времени могут быть неравными: $t_{i+1} - t_i = \text{const} > 0$. Это описание в дальнейшем будем называть *точным*.

Заменим заданный график кусочно-непрерывной функции (см. рис. 4.9) линейно-непрерывной функцией, проходящей через точки $((t_i + 0.5(t_{i+1} - t_i), Q_i)$ при $i = 0, \ldots, N$, так что на отрезке $t \in [t_i + 0.5(t_{i+1} - t_i), t_{i+1} + 0.5(t_{i+2} - t_{i+1})]$ описание представляется линейной функцией (рис. 4.12):



$$Q(t) = \frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{t_{i+1} - t_i}t - \frac{Q_{i+1}(t_{i+1} + t_i) - Q_i(t_{i+2} - t_{i+1})}{t_{i+2} - t_i}.$$

Рис. 4.12. Линейная аппроксимация кусочно-непрерывной функции

Для отрезка $t \in \left[t_{i+1} + 0.5(t_{i+2} - t_{i+1}), t_{i+2} + 0.5(t_{i+3} - t_{i+2})\right]$ имеем

$$Q(t) = \frac{2(Q_{i+2} - Q_{i+1})}{t_{i+3} - t_{i+1}} t - \frac{Q_{i+2}(t_{i+2} + t_{i+1}) - Q_{i+1}(t_{i+3} + t_{i+2})}{t_{i+3} - t_{i+1}}.$$

Непрерывную функцию $f(t)$, аппроксимируемую рядом Фурье, можно заменить, например, некоторой постоянной K или линейно-непрерывной $Lt + K$ на всем заданном интервале $t \in [0, T]$. Понятно, что обе функции удовлетворяют условиям Дирихле и имеют конечное значение интеграла

$$\int_0^T |Q(t)| dt = \int_0^T |K| dt = KT,$$

$$\int_0^T |Q(t)| dt = \int_0^T |Lt + K| dt = \frac{L}{2} T^2 + KT.$$

Коэффициенты ряда Фурье для этих функций вычисляются соответственно по формулам

$$a_k = \int_0^T Q(t) \cos(\omega_0 kt) dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_i \cos(\omega_0 kt) dt = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\omega_0 k} \left[\sin(\omega_0 kt_{i+1}) - \sin(\omega_0 kt_i)\right],$$

$$b_k = \int_0^T Q(t) \sin(\omega_0 kt) dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_i \sin(\omega_0 kt) dt = -\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\omega_0 k} \left[\cos(\omega_0 kt_{i+1}) - \cos(\omega_0 kt_i)\right];$$

$$a_k = \int_0^T Q(t) \cos(\omega_0 kt) dt = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left[\frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} t_{i+1} + \frac{Q_{i+1}(t_{i+1} + t_i) - Q_i(t_{i+2} + t_{i+1})}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} \right] \sin(\omega_0 kt_{i+1}) - \right.$$

$$- \left[\frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} t_i + \frac{Q_{i+1}(t_{i+1} + t_i) - Q_i(t_{i+2} + t_{i+1})}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} \right] \sin(\omega_0 kt_i) +$$

$$\left. + \frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0^2 k^2 (t_{i+2} - t_i)} \left[\cos(\omega_0 kt_{i+1}) - \cos(\omega_0 kt_i)\right] \right\},$$

$$b_k = \int_0^T Q(t) \sin(\omega_0 kt) dt = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left[\frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} t_{i+1} + \frac{Q_{i+1}(t_{i+1} + t_i) - Q_i(t_{i+2} + t_{i+1})}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} \right] \cos(\omega_0 kt_{i+1}) - \right.$$

$$- \left[\frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} t_i + \frac{Q_{i+1}(t_{i+1} + t_i) - Q_i(t_{i+2} + t_{i+1})}{\omega_0 k(t_{i+2} - t_i)} \right] \cos(\omega_0 kt_i) -$$

$$\left. - \frac{2(Q_{i+1} - Q_i)}{\omega_0^2 k^2 (t_{i+2} - t_i)} \left[\sin(\omega_0 kt_{i+1}) - \sin(\omega_0 kt_i)\right] \right\}.$$

Так как оба варианта (точная и аппроксимирующая) функции $Q(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле, то они могут быть представлены гармоническим полиномом K-го порядка

$$Q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K}\left[a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)\right]$$

с коэффициентами a_k и b_k ($k = 1, 2, ..., K$), которые выражаются интегральными соотношениями.

Для графика нагрузки (см. рис. 4.10) суточное потребление составит

$$\int_0^T Q(t)dt = 2240,$$

значение сдвига по амплитуде

$$\frac{a_0}{2} = A_0 \sin\delta_0 = \frac{\max Q(t_i) + \min Q(t_i)}{2} = 100.$$

Эти данные являются значениями гармонического полинома нулевого порядка (рис. 4.13).

Сумма квадратов отклонений значений графика потребления от значений гармонического полинома составляет

$$\delta_K^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \Delta_K^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[Q(t) - \sum_{k=1}^{K}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))\right]^2 dt,$$

что для гармонического полинома нулевого порядка равно

$$\delta_0^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[Q(t) - \frac{a_0}{2}\right]^2 dt = 800.$$

Относительная ошибка суточного потребления при аппроксимации гармоническим полиномом нулевого порядка составляет

$$\left[\int_0^T \frac{a_0}{2}dt - \int_0^T Q(t)dt\right]\left[\int_0^T Q(t)dt\right]^{-1} = 0.071428,$$

т. е. несколько более 7 %.

Рассмотрим аппроксимацию гармоническим полиномом первого порядка, который запишется в виде

$$Q^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta) + b_1 \sin(\omega_0 t + \delta),$$

$$Q^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t)$$

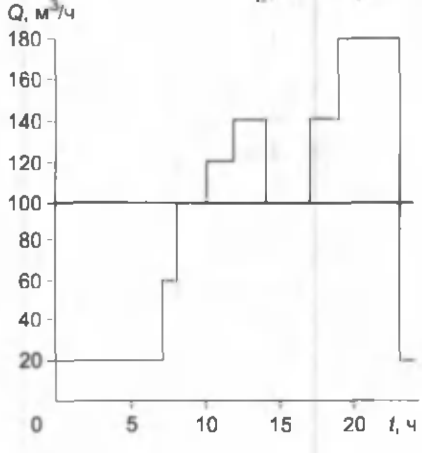


Рис. 4.13. График потребления и гармонический полином нулевого порядка

с коэффициентами

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T Q(t)\cos(\omega_0 t)dt,\ b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T Q(t)\sin(\omega_0 t)dt \text{ при } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Используя информацию о потреблении в течение суток, можно определить все параметры в предположении об их постоянстве, тогда

$$Q^{(1)}(t) = 100 + 80\cos(0.261\,667t + 8.0625).$$

Значения $a_0/2 = 100$, $a_1 = 80$, $\omega_0 = 0.261\,667$, $\delta = 8.0625$, $b_1 = 0$ определяются из замеров потребления.

Интегральное суточное потребление для этой функции составит

$$Si_1 = \int_0^T \left[100 + 80\cos(0.261\,667t + 8.0625)\right]dt = 2\,400.199\,581,$$

отклонение от замеренного потребления Si_1–2240=160.199 581, и относительная погрешность равна 0.071 517 7, так же как и в предыдущей аппроксимации, более 7 % (рис. 4.14).

Однако понятно, что если гармонический полином нулевого порядка равномерно приближает график нагрузки на всем временном интервале без учета его неравномерности и периодичности, то гармонический полином первого порядка, не являясь постоянной, учитывает свойство периодичности изменения графика нагрузки, но слабо учитывает неравномерность. Учет неравномерности можно усилить добавлением слагаемых гармонического ряда, тем самым уменьшая ошибку.

Рассмотрим также в качестве аппроксимирующей функции гармонический полином первого порядка вида

$$Q^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega_0 t) + b_1\sin(\omega_0 t),$$

коэффициенты которого определяются из системы двух линейных уравнений. Имеем функцию (рис. 4.15)

$$Q^{(1)}(t) = 100 - 16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t) - 59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t).$$

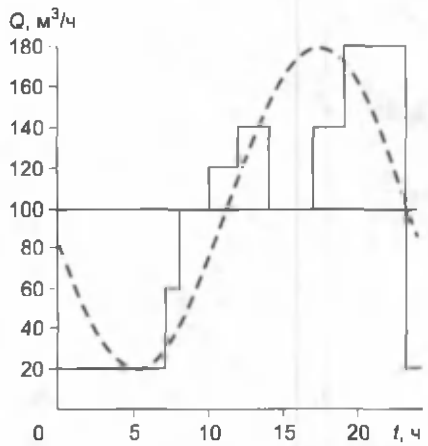


Рис. 4.14. Аппроксимация графика нагрузки гармоническим полиномом первого порядка

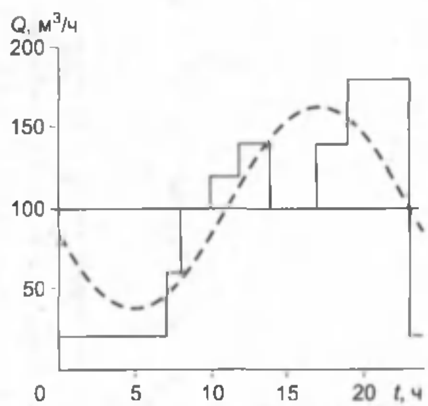


Рис. 4.15. Гармонический полином первого порядка с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов

Интегральное суточное потребление для этой функции составит

$$Si_1 = \int_0^T [100 - 16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t) - 59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t)]dt =$$

$$= 2\,400.197\,763,$$

отклонение от замеренного потребления $Si_1 - 2240 = 160.197\,763$, и относительная погрешность равна 0.071 516 858, так же как и в предыдущей аппроксимации, несколько более 7 %. Оценка суммы квадратов отклонений составляет 1 498.081 533, что дает среднеквадратическое отклонение в любой момент времени 38.705 058 24.

Метод наименьших квадратов для гармонических полиномов дает гарантию сходимости к графику потребления за счет увеличения количества слагаемых аппроксимационной функции, т. е. к уменьшению среднеквадратического отклонения.

Рассмотрим в качестве аппроксимирующей функции гармонический полином второго порядка вида

$$Q^{(2)}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega_0 t) + b_1\sin(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t).$$

Предполагая, что a_0, ω_0, a_1, b_1 ранее определены, необходимо найти значения a_2 и b_2, например, методом наименьших квадратов. Для этого запишем функционал, зависящий от a_2, b_2, в виде

$$\sum_{i=1}^{24}\left[Q(t_i) - \frac{a_0}{2} - a_1\cos(\omega_0 t_i + \delta) - b_1\sin(\omega_0 t_i + \delta) - a_2\cos(2\omega_0 t_i) - b_2\sin(\omega_0 t_i)\right]^2 \to \min.$$

Для определения a_2, b_2, согласно необходимому условию существования экстремума этого функционала, имеем систему двух линейных уравнений

$$a_2\sum_{i=1}^{24}\cos^2(2\omega_0 t_i) + b_2\sum_{i=1}^{24}\cos(2\omega_0 t_i)\sin(2\omega_0 t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{24}\left[Q(t_i) - \frac{a_0}{2} - a_1\cos(\omega_0 t_i) - b_1\sin(\omega_0 t_i)\right]\cos(2\omega_0 t_i),$$

$$a_2\sum_{i=1}^{24}\cos(2\omega_0 t_i)\sin(2\omega_0 t_i) + b_2\sum_{i=1}^{24}\sin^2(2\omega_0 t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{24}\left[Q(t_i) - \frac{a_0}{2} - a_1\cos(\omega_0 t_i) - b_1\sin(\omega_0 t_i)\right]\sin(2\omega_0 t_i).$$

Решение этой системы $a_2 = 4.981\,545\,87$, $b_2 = -47.007\,091\,88$. Гармонический полином второго порядка запишется в виде (рис. 4.16)

$$Q^{(2)}(t) = 100 - 16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t) - 59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t) +$$

$$+ 4.981\,545\,87\cos(0.523\,334t) - 47.007\,091\,88\sin(0.523\,334t).$$

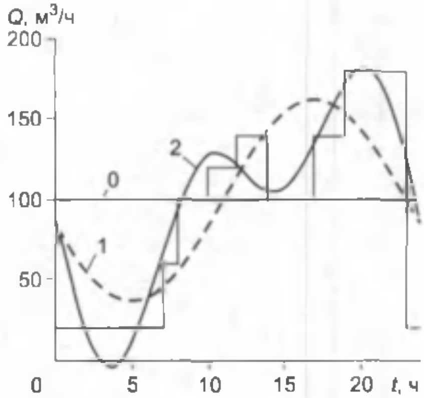


Рис. 4.16. Аппроксимация графика нагрузки гармоническими полиномами нулевого, первого и второго порядков

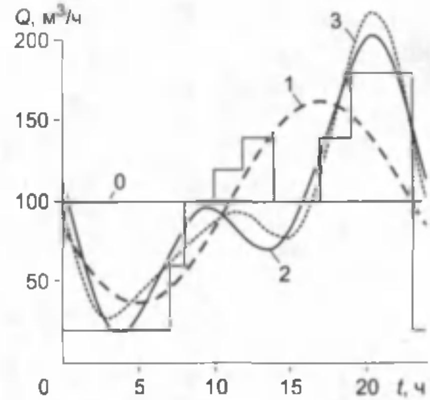


Рис. 4.17. Аппроксимация графика нагрузки гармоническими полиномами нулевого, первого, второго и третьего порядков

Интегральное суточное потребление для этой функции составит

$$\int_0^T \big[100-16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t)-59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t)+$$

$$+4.981\,545\,87\cos(0.523\,334t)-47.007\,091\,88\sin(0.523\,334t)\big]dt=2\,400.135\,461,$$

отклонение от замеренного потребления $Si_2-2240=160.135\,461$, и относительная погрешность равна 0.071 489 045 09, так же как и в предыдущем случае, более 7 %. Оценка суммы квадратов отклонений составляет 524.545 904 3, что дает среднеквадратическое отклонение в любой момент времени 22.902 967 15.

Последняя кривая учитывает не только периодичность, но и неравномерность графика суточного потребления, однако недостаточно точно.

Для уточнения свойства неравномерности рассмотрим гармонический полином третьего порядка

$$Q^{(3)}(t)=100-16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t)-59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t)+$$

$$+4.981\,545\,87\cos(0.523\,334t)-47.007\,091\,88\sin(0.523\,334t)+$$

$$+a_3\cos(0.785\,001t)+b_3\sin(0.785\,001t).$$

Аналогично предыдущему случаю записываем систему двух линейных уравнений, решение которой

$$a_3=-13.613\,351\,43,\quad b_3=-7.408\,265\,252$$

позволяет найти гармонический полином третьего порядка (рис. 4.17)

$$Q^{(3)}(t)=100-16.382\,077\,72\cos(0.261\,667t)-59.997\,021\,4\sin(0.261\,667t)+$$

$$+4.981\,545\,87\cos(0.523\,334t)-47.007\,091\,88\sin(0.523\,334t)-$$

$$-13.613\,351\,43\cos(0.785\,001t)-7.408\,265\,252\sin(0.785\,001t).$$

Продолжая этот однообразный процесс, можно получить аналитическое описание в виде гармонического ряда, приближающегося сколь угодно близко к заданному графику нагрузки.

Таким образом, рассмотрены модели аппроксимации неравномерного графика нагрузки в течение суток. Постоянная (средняя за сутки), которая дает минимальную относительную погрешность, тем не менее не отражает свойство почасового изменения, а следовательно, непригодна для регулирования процессов потокораспределения в гидравлической цепи. Она может эффективно использоваться в проектных проработках для систем с малыми изменениями расходов во времени. Кусочно-линейная модель изменения нагрузки дает малую погрешность отклонений, не превышающую 5 %. Однако и она не отражает свойства периодичности изменения нагрузки в течение суток, что влияет на аналитическое исследование динамического потокораспределения при решении задач регулирования и управления, поэтому данную модель рациональнее применять в задачах анализа режимов динамического потокораспределения. И наконец, непрерывная периодическая функция (тригонометрическая), учитывающая цикличное изменение во времени, позволяет изучать реакции системы на изменение внутренних и внешних возмущений в системе и, что самое главное, применением гармонического анализа (путем повышения порядка гармонического полинома) увеличивать точность решения. Учет свойства периодичности внешних возмущений (графиков потребления) и связанные с ним конструктивные подходы могут решить проблему регулирования трубопроводных систем с точки зрения уменьшения энергетических затрат на транспортировку больших масс по системе. Создание систем регулирования и управления будет стимулировать разработку разнообразных конструкций регуляторов расхода и давления и обустройства ими трубопроводных систем транспорта массы и энергии.

Теоретические вопросы, связанные с изучением свойства периодичности графиков нагрузки потребителей, касаются представления их в аналитическом виде, аппроксимации, приближенного представления и дальнейшего использования этой информации при постановке и решении задач регулирования.

Это требует уточнения аналитического описания с целью уменьшения разности между реальной суточной потребностью и интегральной величиной аналитического представления. Воспользуемся методом наименьших квадратов.

Сумму квадратов ошибок на всем промежутке времени [0, 24] между значениями графика потребления и аналитической функции представим в виде

$$\sum_{r=1}^{24}\Delta^2=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t_r)-Q^a(t_r)\right]^2=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t_r)-\frac{a_0}{2}-a_1\cos(\omega_0 t_r+\delta)-b_1\sin(\omega_0 t_r+\delta)\right]^2,$$

и эта сумма при вариации a_1, b_1 имеет минимальное значение, а a_0, ω_0 и δ ранее приняты постоянными:

$$a_0=\frac{1}{24}\sum_{r=1}^{24}Q(t_r),\ \ \omega_0=\frac{2\pi}{24},\ \delta=18.$$

Тогда, согласно необходимым и достаточным условиям существования экстремума функции двух переменных a_1, b_1, требуется равенство нулю первых производных от функционала по этим переменным. Для функционала

$$F(a_1,b_1)=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t_r)-Q_1^a(t_r)\right]^2$$

имеем

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t)-\frac{a_0}{2}-a_1\cos(\omega_0 t_r+\delta)-b_1\sin(\omega_0 t_r+\delta)\right]\left[-\cos(\omega_0 t_r+\delta)\right]=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1}=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t)-\frac{a_0}{2}-a_1\cos(\omega_0 t_r+\delta)-b_1\sin(\omega_0 t_r+\delta)\right]\left[-\sin(\omega_0 t_r+\delta)\right]=0.$$

Решив систему двух линейных уравнений относительно искомых переменных, получим параметры аппроксимирующей функции потребления вида

$$Q^a(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\omega_0 t+\delta)+b_1\sin(\omega_0 t+\delta).$$

Здесь ошибка покрытия должна уменьшиться и составить

$$\Delta_1=\int_0^T Q(t)dt-\int_0^T\left[\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\omega_0 t+\delta)+b_1\sin(\omega_0 t+\delta)\right]dt.$$

Если уменьшенная ошибка удовлетворяет точности технических расчетов, то можно ограничиться гармоническим полиномом первого порядка, в противном случае необходимо рассмотреть полином второго порядка

$$Q^a(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\omega_0 t+\delta)+b_1\sin(\omega_0 t+\delta)+a_2\cos(2\omega_0 t+\delta)+b_2\sin(\omega_0 t+\delta).$$

Это позволяет либо по методу наименьших квадратов получить оценки всех четырех параметров a_1, b_1, a_2, b_2, решая систему четырех линейных уравнений, либо оценить только a_2, b_2 в предположении, что a_1, b_1 ранее определены. При этом сокращается вычислительная работа, так как решается система только двух уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial a_2}=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t)-\frac{a_0}{2}-a_1\cos(\omega_0 t_r+\delta)-b_1\sin(\omega_0 t_r+\delta)-\right.$$

$$\left.-a_2\cos(2\omega_0 t+\delta)-b_2\sin(2\omega_0 t+\delta)\right]\left[-\cos(2\omega_0 t_r+\delta)\right]=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2}=\sum_{r=1}^{24}\left[Q(t)-\frac{a_0}{2}-a_1\cos(\omega_0 t_r+\delta)-b_1\sin(\omega_0 t_r+\delta)-\right.$$

$$\left.-a_2\cos(2\omega_0 t+\delta)-b_2\sin(2\omega_0 t+\delta)\right]\left[-\sin(2\omega_0 t_r+\delta)\right]=0.$$

Соответственно, интегральная ошибка принимает вид

$$\Delta_2=\int_0^T Q(t)dt-\int_0^T\left[\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\omega_0 t+\delta)+b_1\sin(\omega_0 t+\delta)+a_2\cos(2\omega_0 t+\delta)+b_2\sin(2\omega_0 t+\delta)\right]dt.$$

Это приводит к заключению, что дальнейшее уменьшение ошибки возможно за счет дополнительных слагаемых (тригонометрических функций) с другими частотами и амплитудами. Данный процесс увеличения порядка полинома и уменьшения интегральной оценки потребления можно продолжать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

Как указано выше, к детерминированным гидравлическим цепям относятся закрытые гидравлические цепи с процессами циркуляции сплошной среды под действием активных напоров. В этих системах режимы, их регулирование и управление осуществляются с помощью контролируемых определенных параметров техническими устройствами, естественно, если выполняется анализ работы в нормальных условиях и их влияние на параметры системы. Экстремальные условия работы этих систем, как правило, связаны с аварийными ситуациями, а они переводят закрытые цепи в качественно другой класс – класс открытых цепей.

Процесс появления аварийных ситуаций носит явно случайный характер, а следовательно, системы приобретают двойственный детерминированно-стохастический характер. Кроме того, существуют реальные технические системы транспорта с источниками и потребителями, например, системы водо-, газо- и нефтеснабжения, в которых графики потребления могут интерпретироваться как некоторый случайный процесс.

Таким образом, в контексте детерминированно-стохастических процессов, применяя вариационные методы, далее опишем процесс создания математических моделей переходных (нестационарных) режимов в закрытых и открытых гидравлических цепях.

4.4. Стохастическое описание внешних возмущений в открытой гидравлической цепи

Среди объектов изучения теории гидравлических цепей имеются объекты, более сложные с точки зрения математического описания, чем закрытые цепи, – это, в частности, открытые многоконтурные цепи. Открытость цепей в первую очередь отражается на записи ограничений, где нарушается однородность, а следовательно, знание состояния системы в какой-либо момент времени t_0 уже не определяет состояние системы в последующий момент t, а лишь определяет вероятность того, что система будет находиться в одном из некоторого множества состояний, зависящих от множества состояний источников и потребителей. Последнее множество определяется исходя из факта, что нагрузка потребителей имеет случайную природу, а это означает, что $Q(p)$ является вероятностной функцией, изменяющейся во времени.

Если, как и ранее, $x(t_0) = x_0$ есть состояние цепи в момент времени t_0, а E – некоторое множество состояний системы $x(t) \in E$, то для описания процессов в цепи должна быть найдена вероятность $\left(p\{t_0, x(t_0), t, E\}\right)$ системы, находящейся в момент времени t_0 в состоянии $x(t_0)$, перейти в момент t в одно из состояний $x(t) \in E$ с вероятностью p. Если дополнительное знание состояния системы в момент $t > t_0$ не изменяет этой вероятности, то естественно называть выделенный класс случайных процессов *процессами без последействия* или за их аналогию с цепями Маркова – *процессами марковского типа*.

Схему случайного процесса для открытых гидравлических цепей можно представить следующим образом. Пусть Q – множество элементарных событий (нагрузки потребителей, отображающие отбор массы из системы), а t – непрерывный параметр. *Случайным* называется процесс, который можно описать функцией двух переменных

$$Q(t) = \phi(t, e), \quad e \in q,$$

отображающей нагрузку потребителя, причем q – множество возможных элементарных значений нагрузки.

Для каждого значения параметра t функция $\phi(t, e)$ является функцией элементарных случайных событий e и, следовательно, представляет в этом пространстве случайную величину. Для каждого фиксированного значения e (т. е. для каждого набора элементарных событий) $\phi(t, e)$ зависит только от времени и является определенной функцией одной вещественной переменной t. Каждая такая функция носит название *реализации* случайного процесса $Q(t)$. Случайный процесс, таким образом, рассматривается либо как детерминированный – совокупность реализаций процесса $Q_D(t)$, либо как стохастический – совокупность случайных величин $Q_S(t_0, p) = \phi(t_0, e)$. Естественно, что для определения процесса в последнем случае необходимо задать вероятностную меру в этом функциональном пространстве его реализаций.

Наиболее исследованными и распространенными при моделировании являются стационарные и эргодические случайные процессы. Попытаемся ответить на вопрос, обладают ли свойствами стационарности и эргодичности процессы потребления в открытых гидравлических цепях.

Для открытой гидравлической цепи предполагается большое число одинаковых потребителей в пределах отдельно взятой группы (индивидуальных, коммунально-бытовых или промышленных) [20], включенных в систему в определенный момент времени и с тех пор работающих. С выходом всех потребителей можно связать вероятностную функцию плотности $\phi(t, e)$, имеющую следующие характеристики. Вероятность того, что в некоторый момент t_0 выход j-го потребителя $Q_j(t_0)$ находится в интервале $[a, b]$, определяется интегралом

$$p\{a \le Q_j(t_0) < b\} = \int_a^b \phi(t_0, e)de.$$

Понятно, что интегрирование ведется по промежутку случайной величины. Математическое ожидание любой функции от e, обозначаемое $M[q(e)]$, где $q(e)$ – функция, ожидание которой ищется, определяется следующим образом:

$$M\{q[e(t_0)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} q(t_0, e)\phi(t_0, e)de.$$

Истинные, или *множественные*, средние и дисперсия задаются формулами

$$\mu(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t_0)\phi(t_0, e)de \text{ и } \sigma_e^2(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [e(t_0) - \mu(t_0)]^2 \phi(t_0, e)de,$$

а *стандартное отклонение* есть положительное значение корня квадратного из дисперсии.

Если случайный процесс является стационарным, то параметры $\mu(t)$ и $\sigma^2(t)$ не зависят от времени, т. е. для произвольных t_0 и t_1 справедливо

$$\mu(t_0) = \mu(t_1) = \mu, \quad \sigma^2(t_0) = \sigma^2(t_1) = \sigma^2.$$

В дальнейшем для таких процессов параметр времени в среднем и дисперсии может быть опущен.

Допущение об эргодичности позволяет заменить осреднение по статистическому ансамблю осреднением по времени. Для цепи предполагалось, что все потребители в пределах одной группы одинаковы, поэтому знания лишь одной случайной функции одного потребителя было бы достаточно для того, чтобы по входу одного из них определить статистические параметры для всех. Так, можно записать выражение для среднего

$$\mu_e = \lim \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} e(t)dt.$$

Здесь временное осреднение ведется по одной траектории процесса. Подобное выражение для дисперсии имеет вид

$$\sigma_e^2 = \lim \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \left[e(t)-\mu_t\right]^2 dt = M\left(e^2\right) - M^2(e).$$

Среднеквадратическое отклонение для этого процесса определяется формулой

$$\phi_e^2 = \mu_e^2 + \sigma_e^2.$$

Свойства стационарности и эргодичности в открытых гидравлических цепях в связи с изменением нагрузки потребителей ранее не изучались и требуют тщательного анализа, который должен основываться на реальных измерениях нагрузки различных классов потребителей.

Необходимо отметить, что данные по замерам нагрузки у потребителей в системах водо- и теплоснабжения, публикуемые в технической литературе, крайне редки. Это связано с отсутствием соответствующей малогабаритной и точной измерительной аппаратуры у большого количества потребителей (особенно индивидуальных), отсюда большая трудоемкость при проведении даже выборочных обследований потребителей. Тем не менее имеющиеся опубликованные данные [1] можно подвергнуть анализу. Заметим, однако, что выборки, как правило, недостаточные, и пока невозможно определить достоверность законов распределения нагрузки в пространстве состояний и реализаций. И все же есть надежда даже на основании скудных данных сформулировать некоторый подход к анализу этих процессов и попытаться формализовать процессы потребления для открытых гидравлических цепей.

В табл. 4.1 представлены данные измерений нагрузки потребителей в системе водоснабжения [1], которые можно приближенно распространить и на системы горячего водоснабжения открытых систем теплоснабжения. В результате 357 наблюдений расходов у потребителей по часам суток расходы изменялись от 0.59 до 21.68 л/ч, а число появлений этих расходов характеризует крайнюю неравномерность.

Диаграмма этих данных (рис. 4.18) наглядно отражает эту неравномерность как по часам суток, так и по интервалам нагрузок.

По приведенным в табл. 4.1 данным определялись вероятности появления элементарных событий во времени (табл. 4.2, рис. 4.19).

Если бы для потребления (как случайного процесса) удалось доказать свойства стационарности и эргодичности, то можно было бы многие трудности, связанные с анализом переходных процессов в открытых гидравлических цепях, преодолеть путем применения более простых математических моделей.

Таблица 4.1

Частота появления элементарных событий во времени (расходы воды у потребителей)

Расход, л/ч	Часы суток																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
21.68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
20.67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19.76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
18.84	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	6	0	0
17.93	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	9	5	2	0	1	1	1	0	1	6	15	0	0
17.02	0	0	0	0	0	0	0	2	1	10	21	5	6	6	3	0	1	1	6	11	15	30	1	0
16.10	0	0	0	0	0	0	0	6	3	11	7	11	12	9	7	4	3	4	14	24	27	36	5	1
15.19	0	0	0	0	0	0	0	13	9	21	17	15	14	14	14	15	12	20	40	59	55	66	22	0
14.28	0	0	0	0	0	0	0	36	5	25	30	20	20	28	21	12	19	39	62	59	75	68	61	4
13.37	0	0	0	0	0	0	3	42	36	46	48	44	47	37	26	34	49	63	60	65	58	57	80	5
12.45	0	0	0	0	0	0	12	45	39	54	57	61	53	52	52	52	70	68	51	48	49	39	71	13
11.54	0	0	0	0	0	1	21	32	67	76	53	52	72	73	65	66	69	62	47	31	27	15	44	30
10.63	2	0	0	0	0	2	65	32	79	57	56	59	52	58	62	67	45	37	31	24	23	16	31	54
9.74	5	0	0	0	0	4	36	44	52	23	24	41	36	35	48	39	39	34	25	23	15	6	19	75
8.80	0	0	0	0	0	10	42	36	30	13	15	20	23	25	38	40	29	22	10	9	1	1	12	64
7.84	15	1	1	0	1	6	35	14	22	7	8	5	9	12	10	17	11	11	7	3	3	2	8	53
6.98	36	6	2	2	4	8	36	21	8	1	3	7	5	3	6	5	6	3	1	0	0	0	2	23
6.06	54	10	6	5	6	21	26	10	5	1	0	0	0	1	2	3	2	1	1	0	0	0	1	8
5.15	56	16	6	3	7	24	18	11	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	8
4.24	48	26	12	5	10	36	19	9	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
3.32	53	37	31	24	28	54	21	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	4
2.41	37	87	80	70	76	86	14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1.50	26	102	118	132	121	62	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.59	17	72	101	116	104	43	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	349	357	357	357	357	357	357	357	357	357	355	357	357	357	357	357	357	367	357	357	357	357	357	357

Примечание к табл. 4.1, 4.2. N – суммарное число событий.

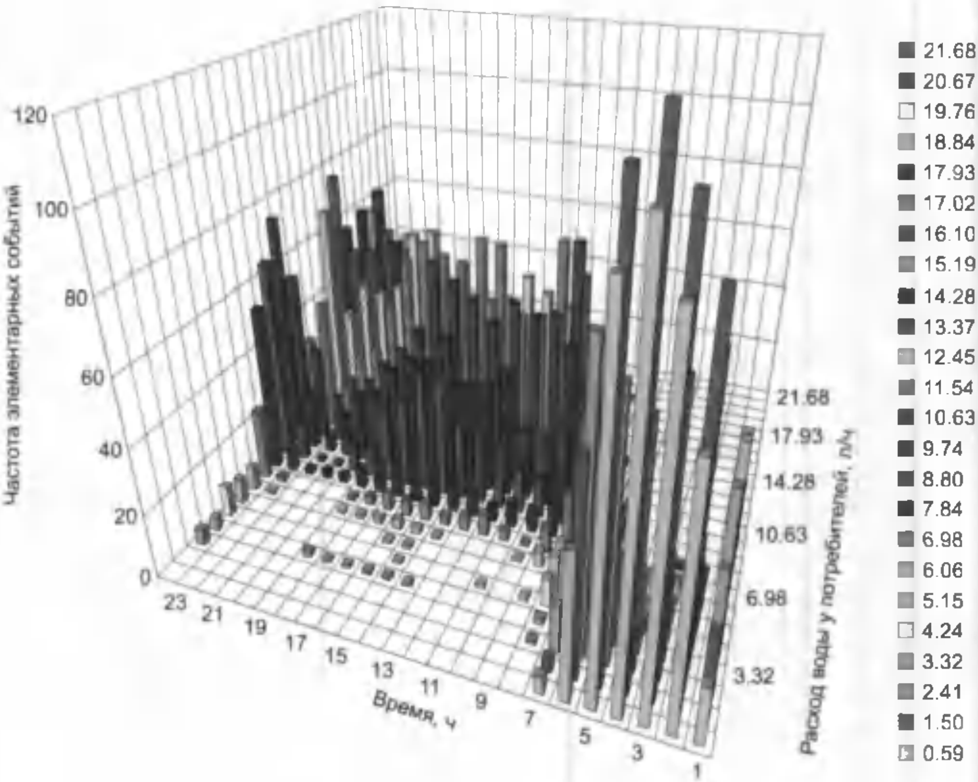


Рис. 4.18. Диаграмма частоты появления элементарных событий во времени

За элементарное событие в открытых гидравлических цепях примем возможное потребление воды q_l (л/ч). Появление этого события связано со временем (см. табл. 4.2), т. е. $q_l(t)\in Q$, кроме того, на его появление влияет множество случайных неизмеряемых факторов, т. е. возможность его появления в некоторый момент времени оценивается вероятностью $p_l(t)$.

Таким образом, в пространстве случайных событий графики водопотребления и горячего водоснабжения описывают некоторую нелинейную поверхность, характеризующую случайный процесс. Отсюда следует, что возмущения, вносимые в открытые гидравлические цепи, носят характер случайного процесса, и это является одним из свойств этих цепей, где смешивается природа внешних возмущений.

Подтверждение факта стационарности случайного процесса, заключающегося в близости математических ожиданий по часам суток, позволяет использовать в расчетах среднее значение 9.138 л/ч. Однако из анализа данных следует неправомочность этого тезиса, так как в течение суток показатель изменяется от 2.0 до 14.4 л/ч, что свидетельствует о явной нестационарности процесса потребления (табл. 4.3). Использование в расчетах осредненного значения 9.138 л/ч ограничено некоторым классом задач, в который не входят задачи регулирования и управления.

Свойство эргодичности, согласно табл. 4.3, также не имеет места для процессов водопотребления, так как вероятности математического ожидания по времени

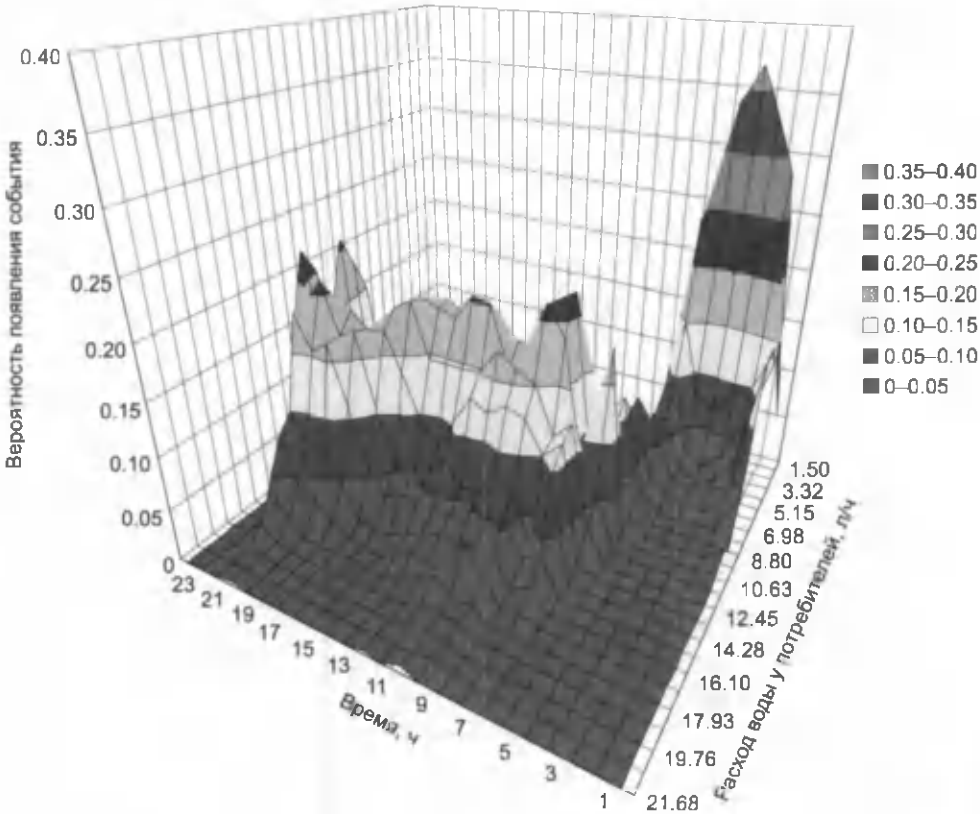


Рис. 4.19. Распределение вероятностей появления элементарных событий по часам суток

суток колеблются от 0.087 до 0.347, а дисперсии – от 1.302 до 8.917, что не позволяет осреднить водопотребление по пространству событий.

Судя по приведенным данным, случайный процесс водопотребления не обладает свойствами стационарности и эргодичности, а это означает, что для задач динамики невозможно использовать осредненные постоянные характеристики, их применение может привести к ошибочным выводам и решениям. Для математических моделей нестационарного потокораспределения в открытых гидравлических цепях, где внешние возмущения связаны с нагрузкой потребителей, изменение нагрузок необходимо рассматривать как некоторое описание динамических случайных процессов.

В табл. 4.4 представлены изменения математического ожидания $M(q(t))$, его максимального (M_{max}), среднего (M_{mean}) значений и их диапазоны ($M_{max} \pm \sigma$, $M_{mean} \pm \sigma$) на промежутке времени в сутки. На соответствующем рис. 4.20 отчетливо прослеживается нелинейный характер изменения, не поддающийся осреднению по времени и по пространству случайных событий. Можно воспользоваться осредненными величинами, но при этом координатные плоскости превратятся в нерегулярные нелинейные поверхности, что нисколько не упростит описание.

Вероятность появления элементарных

Расход, л/ч	Часы суток										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
21.68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.008
20.67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.008	0
19.76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.006	0.008
18.84	0	0	0	0	0	0	0	0.003	0	0.008	0.011
17.93	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.011	0.014
17.02	0	0	0	0	0	0	0	0.006	0.003	0.028	0.059
16.10	0	0	0	0	0	0	0	0.017	0.008	0.031	0.02
15.19	0	0	0	0	0	0	0	0.036	0.025	0.059	0.048
14.28	0	0	0	0	0	0	0	0.101	0.014	0.07	0.085
13.37	0	0	0	0	0	0	0.008	0.118	0.101	0.129	0.135
12.45	0	0	0	0	0	0	0.034	0.126	0.109	0.151	0.161
11.54	0	0	0	0	0	0.003	0.059	0.09	0.188	0.213	0.149
10.63	0.006	0	0	0	0	0.006	0.182	0.09	0.221	0.16	0.158
9.74	0.014	0	0	0	0	0.011	0.101	0.123	0.146	0.064	0.068
8.80	0	0	0	0	0	0.028	0.118	0.101	0.084	0.036	0.042
7.84	0.043	0.003	0.003	0	0.003	0.017	0.098	0.039	0.062	0.02	0.023
6.98	0.103	0.017	0.006	0.006	0.011	0.022	0.101	0.059	0.022	0.003	0.008
6.06	0.155	0.028	0.017	0.014	0.017	0.059	0.073	0.028	0.014	0.003	0
5.15	0.16	0.045	0.017	0.008	0.02	0.067	0.05	0.031	0	0	0
4.24	0.138	0.073	0.034	0.014	0.028	0.101	0.053	0.025	0.003	0	0.003
3.32	0.152	0.104	0.087	0.067	0.078	0.151	0.059	0.006	0	0	0
2.41	0.106	0.244	0.224	0.196	0.213	0.241	0.039	0.003	0	0	0
1.50	0.074	0.286	0.331	0.37	0.339	0.174	0.011	0	0	0	0
0.59	0.049	0.202	0.283	0.325	0.291	0.12	0.014	0	0	0	0
N	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Поэтому необходимо отыскать простую и достаточно точную аппроксимационную форму описания процесса потребления индивидуального потребителя.

Формальную запись случайного процесса водопотребления можно представить, например, в виде

$$Q(t,p)=Q_D(t)+Q_S(p),$$

где $Q_D(t)$ – детерминированная составляющая расхода у потребителя, изменяющаяся только во времени, которая, в частности, может быть описана рядом Фурье; $Q_S(t)$ – стохастическая составляющая расхода, зависящая от вероятности, которая может быть выражена функцией распределения вероятностей параметрического или непараметрического закона распределения [46, 69, 173].

В математические модели открытых гидравлических цепей необходимо ввести описание источников и потребителей, адекватное реальным процессам потребления. То есть составить некоторые аппроксимационные формы в пространстве реализаций и случайных событий.

Таблица 4.2

событий во времени

Часы суток												
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0.003	0	0	0
0.003	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.008	0	0.003	0	0	0	0	0	0	0.003	0	0	0
0.011	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0.003	0.017	0	0
0.025	0.014	0.006	0	0.003	0.003	0.003	0	0.003	0.017	0.042	0	0
0.014	0.017	0.017	0.008	0	0.003	0.003	0.017	0.031	0.042	0.084	0.003	0
0.031	0.034	0.025	0.02	0.011	0.008	0.011	0.039	0.067	0.076	0.101	0.014	0.003
0.042	0.039	0.039	0.039	0.042	0.034	0.054	0.112	0.165	0.154	0.185	0.062	0
0.056	0.056	0.078	0.059	0.034	0.053	0.106	0.174	0.165	0.21	0.19	0.171	0.011
0.123	0.132	0.104	0.073	0.095	0.137	0.172	0.168	0.182	0.162	0.16	0.224	0.014
0.171	0.148	0.146	0.146	0.146	0.196	0.185	0.143	0.134	0.137	0.109	0.199	0.036
0.146	0.202	0.204	0.182	0.185	0.193	0.169	0.132	0.087	0.076	0.042	0.123	0.084
0.165	0.146	0.162	0.174	0.188	0.126	0.101	0.087	0.067	0.064	0.045	0.087	0.151
0.115	0.101	0.098	0.134	0.109	0.109	0.093	0.07	0.064	0.042	0.017	0.053	0.21
0.056	0.064	0.07	0.106	0.112	0.081	0.06	0.028	0.025	0.003	0.003	0.034	0.179
0.014	0.025	0.034	0.028	0.048	0.031	0.03	0.02	0.008	0.008	0.006	0.022	0.148
0.02	0.014	0.008	0.017	0.014	0.017	0.008	0.003	0	0	0	0.006	0.064
0	0	0.003	0.006	0.008	0.006	0.003	0.003	0	0	0	0.003	0.022
0	0	0	0.003	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0.022
0	0	0	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0	0.028
0	0	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.006	0	0	0	0	0.011
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.014
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Предположим, что случайный процесс в пространстве состояний достаточно точно описывается нормальным законом распределения

$$p(Q)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(Q(p,t)-M(q))^2}{2\sigma^2}\right].$$

Тогда имеем

$$Q(p,t)=M(q)\pm\sigma\sqrt{2\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}-\ln p\right)},$$

где $M(q)$, σ^2 – параметры нормального закона распределения (математическое ожидание и дисперсия, в данном случае функции времени):

$$Q(p,t)=M(q(t))\pm\sigma(t)\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{p\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\right)}.$$

Таблица 4.3

Результаты расчетов проверки свойств стационарности и эргодичности случайного процесса водопотребления

Время, ч	$M(q)$, л/с	$p(M(q))$	$\sigma^2(M(q))$	σ	Сдвиг M	Сдвиг p
1	4.505	0.142	4.266	2.065	9.836	0.205
2	2.328	0.253	2.371	1.540	12.013	0.094
3	1.883	0.298	1.667	1.291	12.457	0.049
4	1.669	0.347	1.302	1.141	12.672	0.000
5	1.875	0.299	1.806	1.344	12.465	0.048
6	3.280	0.155	4.858	2.204	11.060	0.192
7	7.877	0.099	8.570	2.927	6.464	0.248
8	10.808	0.087	8.917	2.986	3.532	0.260
9	10.887	0.220	3.867	1.966	3.454	0.127
10	12.408	0.154	5.604	2.367	1.932	0.193
11	12.558	0.159	6.925	2.632	1.782	0.188
12	12.131	0.166	6.204	2.491	2.210	0.181
13	11.974	0.180	5.332	2.309	2.366	0.167
14	11.769	0.195	4.860	2.204	2.571	0.152
15	11.282	0.182	4.655	2.157	3.059	0.165
16	11.160	0.189	4.304	2.075	3.181	0.158
17	11.531	0.192	4.040	2.010	2.809	0.155
18	11.987	0.181	4.152	2.038	2.354	0.166
19	12.705	0.149	4.740	2.177	1.636	0.198
20	13.268	0.179	4.185	2.046	1.073	0.168
21	13.682	0.181	4.174	2.043	0.659	0.166
22	14.340	0.191	4.097	2.024	0.000	0.156
23	12.513	0.202	3.452	1.858	1.828	0.145
24	9.102	0.195	4.803	2.192	5.239	0.155
Максимальные	14.340	0.347	8.917	2.986	–	–
Средние	9.480	0.191	4.548	2.087	–	–

При принятом предположении относительно изменения нагрузки получим описание в виде двух слагаемых. Первое слагаемое зависит только от времени, и его можно интерпретировать как детерминированную составляющую $Q_{Dc}(t)$, а второе зависит от времени и вероятности появления случайного события – стохастическая составляющая $Q_{Sc}(t, p)$. Было бы удобно для описания, если бы второе слагаемое являлось функцией только вероятности, но это возможно только в случае $\sigma^2 = \text{const}$, что не соответствует реальному процессу потребления, где дисперсия во времени изменяется в широком диапазоне.

Начнем анализ с детерминированной составляющей $M(q(t))$, заданной на промежутке [0, 24] в предположении, что на этом промежутке она представима в виде суперпозиции конечного числа гармонических функций. Тогда в качестве аппроксимационной формулы можно использовать ряд Фурье

$$M\big(q(t)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k \cos(k\zeta) + b_k \sin(k\zeta)\big),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{24} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)d\zeta,\ \zeta = \frac{\pi t}{24},\ a_k = \frac{1}{12}\int_0^{24} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{24}\right)dt,\ b_k = \frac{1}{12}\int_0^{24} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{24}\right)dt.$$

Таблица 4.4

Области изменения математического ожидания во времени

Время, ч	$M(q(t))$	$M+\sigma$	$M-\sigma$	M_{max}	$M_{max}+\sigma$	$M_{max}-\sigma$	M_{mean}	$M_{mean}+\sigma$	$M_{mean}-\sigma$
1	4.505	6.570	2.439	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
2	2.328	3.867	0.788	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
3	1.883	3.174	0.592	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
4	1.669	2.810	0.528	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
5	1.875	3.220	0.531	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
6	3.280	5.484	1.076	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
7	7.877	10.804	4.949	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
8	10.808	13.794	7.822	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
9	10.887	12.853	8.920	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
10	12.408	14.775	10.041	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
11	12.558	15.189	9.926	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
12	12.131	14.622	9.640	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
13	11.974	14.283	9.665	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
14	11.769	13.973	9.564	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
15	11.282	13.439	9.124	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
16	11.160	13.234	9.085	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
17	11.531	13.541	9.522	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
18	11.987	14.024	9.949	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
19	12.705	14.882	10.528	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
20	13.268	15.313	11.222	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
21	13.682	15.725	11.638	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
22	14.340	16.364	12.316	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
23	12.513	14.371	10.655	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393
24	9.102	11.293	6.910	14.340	16.346	12.316	9.480	11.567	7.393

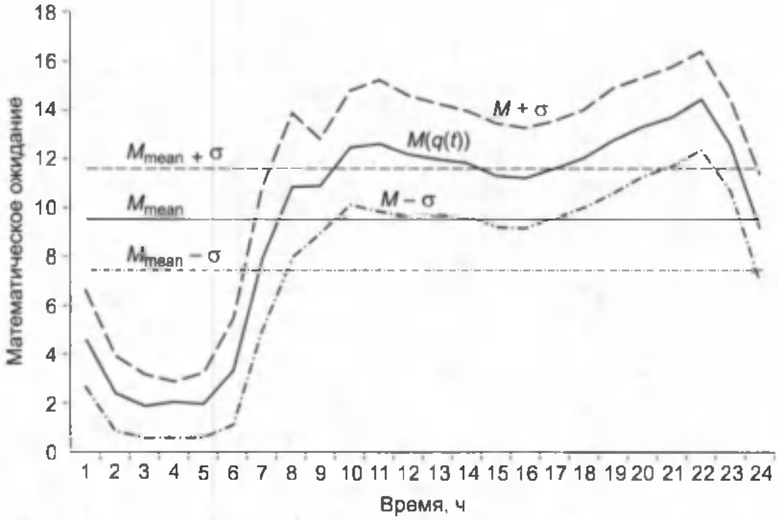


Рис. 4.20. Изменение во времени математического ожидания расхода у потребителя $M(q)$, его среднего значения M_{mean} и их диапазоны

Так как функция $f(t)\to M(q(t_l))$ задана дискретно в определенные моменты времени t_l ($l = 1, 2, ..., 24$), то формулы коэффициентов ряда Фурье запишутся в дискретной форме:

$$a_0 = \frac{1}{12}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\Delta t,\ a_k = \frac{1}{12}\frac{k\pi}{24}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\sin\left(\frac{k\pi t_l}{24}\Delta t\right),$$

$$b_k = \frac{1}{12}\frac{k\pi}{24}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\cos\left(\frac{k\pi t_l}{24}\Delta t\right).$$

Подставляя эти выражения в детерминированную составляющую, получим

$$Q_D(t) = \frac{1}{12}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\Delta t +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k\pi}{12\cdot 24}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\sin\left(\frac{k\pi t_l}{24}\Delta t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{24}t_l\right) - \frac{k\pi}{12\cdot 24}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\cos\left(\frac{k\pi t_l}{24}\Delta t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{24}t_l\right)\right].$$

Понятно, что количество членов ряда, используемое для аппроксимации детерминированной составляющей, должно быть конечно, например, количество слагаемых ряда Фурье связано с точностью замеров δ как

$$\delta \ge \left\| Q_{D(k+1)}(t) - Q_{Dk}(t)\right\| =$$

$$= \frac{(k+1)\pi}{12\cdot 24}\left\{\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\left[\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{24}\right)\right] t_l\Delta t\right\},$$

но $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin (x - y)$, тогда имеем

$$\frac{\delta}{M(q_c)} = \frac{(k+1)\pi}{12}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{24}(\Delta t - t_l)\right).$$

Таким образом, получено трансцендентное уравнение относительно количества k членов ряда Фурье. Оно может быть использовано для определения числа членов ряда Фурье в зависимости от точности измерительной аппаратуры у потребителей. Окончательное выражение расхода у потребителей можно представить в виде

$$Q(t,p) = \frac{1}{12}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\Delta t + \sum_{k=1}^{K}\frac{k\pi}{288}\sum_{l=1}^{24} M\left(q(t_l)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{24}[t_l\Delta t - t]\right) \pm$$

$$\pm \max\sigma(t_l)\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{p\sqrt{2\pi\max\sigma^2(t_l)}}\right)},$$

что достаточно полно отражает двойственный характер внешних возмущений, которыми в данном случае являются нагрузки потребителей в открытых многоконтурных гидравлических цепях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В контексте понятий и определений термодинамики и цели настоящей работы, адаптации их к теории гидравлических цепей можно подвести некоторые итоги.

Реальные трубопроводные системы транспорта различных энергоносителей (и не только их физическое разнообразие) находят свое отражение в математических моделях явлений и процессов, происходящих в них. Базой для этих описаний служит теория гидравлических цепей, позволяющая формировать достаточно простые приближенные модели, отражающие физику явлений и процессов движения сплошной среды по сложным многокольцевым гидравлическим цепям, оснащенным различными измерительными, регулирующими и управляющими устройствами.

В предыдущих работах обсуждался ключевой вопрос о системных параметрах термодинамики и соответствии их параметрам гидравлических цепей, которыми в первоначальной постановке являются характеристики участка системы (ветви цепи) – расход и потеря давлений. Это позволяет описывать состояние цепи как с помощью системы уравнений с определенными коэффициентами для расчета и анализа состояний, так и с помощью использования аппаратуры для измерения фактических параметров состояния ветви при контроле расчетных параметров. Хотя эти параметры являются основными и фундаментальными характеристиками состояния ветви как микросистемы и обобщаются на состояние гидравлической цепи в целом как макросистемы через уравнения связей, имеется необходимость учитывать и реальные свойства процессов, протекающих в них, а это отражается в изменении свободных членов и коэффициентов уравнений, их анализе и формальном описании. Таким образом, возникает необходимость в адаптации определений классификации термодинамических систем к гидравлическим цепям. Классификация, существовавшая в теории гидравлических цепей (закрытые и открытые, пассивные и активные, с сосредоточенными, распределенными и регулированными параметрами), как правило, не связывалась с термодинамикой и распространялась только на стационарное описание.

При изучении нестационарных процессов в гидравлических цепях решение вопроса о классификации цепей позволяет более обоснованно, а в конечном счете и более точно формально описать разнообразные внутренние и внешние возмущения в гидравлической цепи. Это является важным моментом проделанной работы, где основное внимание сосредоточено на сравнении закрытых и открытых гидравлических цепей, при этом конкретизируются такие понятия термодинамики, как изолированная и неизолированная, открытая и закрытая системы.

Закрытой системой по определению называют систему, не обменивающуюся массой с окружающей средой. Для гидравлических цепей это определение подходит к моделям закрытых систем теплофикации, в которых не осуществляется отбор воды на горячее водоснабжение, а подпитка мала и определяется только утечками, которые без потери точности можно принять нулевыми. Эти системы обмениваются с окружающей средой только энергией, т. е. они являются неизолированными системами. Отсюда следует, что системы теплоснабжения могут моделироваться как закрытые неизолированные гидравлические цепи, что приводит к системам однородных уравнений, описывающих первый закон Кирхгофа или, как принято в настоящей работе, к однородной системе ограничений.

Для такого типа систем регулирование осуществляется за счет изменения скорости движения (расхода) или температуры теплоносителя. Изменение скорости движения может регулироваться за счет изменения внутренних параметров системы, например, за счет сопротивлений, действующих напоров на ветвях или напоров в источниках. Температура теплоносителя может быть изменена только в источнике. Таким образом, закрытая неизолированная гидравлическая цепь работает как циркуляционная многоконтурная цепь. Аналогом такой системы могут быть системы теплоснабжения, известные под названием "одноконтурных", если предположить, что подпитка, предназначенная для ликвидации потерь воды в системе за счет утечек, равна нулю или пренебрежительно мала. Под контуром здесь понимается замкнутый путь: источник–теплообменник–источник. В теплообменнике происходит отбор энергии как на обогрев, так и на горячее водоснабжение.

Открытая система обменивается с окружающей средой массой. Многоконтурные гидравлические цепи с множеством источников, в которых для регулирования температуры требуются значительные объемы подпитки, открытые системы теплоснабжения, где разбор на горячее водоснабжение берется из системы, системы водоснабжения и газоснабжающие системы – все это открытые гидравлические цепи. В формальном описании это свойство выражается в неоднородности линейных уравнений первого закона Кирхгофа (неоднородности ограничений). Понятно, что множество открытых цепей значительно шире множества закрытых.

В этой связи конкретизировался взгляд на правые части линейной системы уравнений закона сохранения массы в узлах гидравлической цепи, так как до сих пор в теории гидравлических цепей правые части рассматривались как известные постоянные величины, что в определенной мере препятствовало решению задач регулирования и приводило к подмене их задачами наладки.

При анализе измерений разбора воды, например, по часам суток, несмотря на скудость данных, делается вывод о явной стохастичности параметра, который должен входить в правые части линейных ограничений. Это значит, что система ограничений становится не просто неоднородной, но и вероятностной, что создает дополнительные неудобства при ее численной реализации. Поэтому и проводился анализ с целью упрощения формальной записи правых частей. В первую очередь осуществлялась проверка на стационарность и эргодичность. Если бы эти свойства отражались в результатах измерений, то было бы справедливо с достаточной точностью принять правые части как некоторые известные постоянные (осредненные значения по пространству реализаций и пространству случайных событий). Но анализ показывает, что для реальной системы эти свойства не соблюдаются, и их невозможно интерпретировать постоянными величинами, так как это приводит к неадекватности модели и большим вычислительным ошибкам и может исказить даже качественную картину потокораспределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов Н.Н.* Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды / Н.Н. Абрамов. – М.: Стройиздат, 1972. – 288 с.
2. *Абрамова Х.Я.* Об анализе предельных режимов газоснабжающих систем при планировании топливоснабжения экономического района / Х.Я. Абрамова, А.П. Меренков, В.Я. Хасилев // Изв. АН ЛатвССР. Физ. и техн. науки. – 1979. – № 2. – С. 86–93.
3. *Абрамова Х.Я.* Разработка и применение методов оценки предельных режимов газоснабжающих систем при планировании и управлении топливоснабжением района: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Х.Я. Абрамова. – Иркутск, 1979. – 20 с.
4. *Автоматизация* проектирования многоконтурных систем с использованием программно-вычислительного комплекса ДИСНА / А.П. Меренков [и др.] // Электрон. моделирование. – 1987. – Т. 9, № 3. – С. 49–53.
5. *Агроскин И.И.* Гидравлика / И.И. Агроскин, Г.Т. Дмитриев, Ф.И. Пикалов. – М.; Л.: Энергия, 1964. – 352 с.
6. *Айзерман М.А.* Классическая механика / М.А. Айзерман. – М.: Физматгиз, 1974. – 368 с.
7. *Альтшуль А.Д.* Гидравлические потери на трение в трубопроводах / А.Д. Альтшуль. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 256 с.
8. *Альтшуль А.Д.* Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, Л.С. Животинский, Л.П. Иванов. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.
9. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. Статика. Динамика точки / П. Аппель. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика / П. Аппель. – М.: Физматгиз, 1960. – 487 с.
11. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы к теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
12. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
13. *Балышев О.А.* Исследование тепловых режимов скважин и промысловых газопроводов в северных условиях методами математического моделирования: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / О.А. Балышев. – М., 1974. – 24 с.
14. *Балышев О.А.* Нестационарные модели гидравлических систем с сосредоточенными параметрами: Препр. СЭИ СО РАН / О.А. Балышев, С.Ю. Баринова. – Иркутск, 1995. – 84 с.
15. *Балышев О.А.* Альтернативные описания динамики систем централизованного снабжения: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, Э.А. Таиров, П.А. Соколов. – Иркутск, 1998. – 22 с.
16. *Балышев О.А.* Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты) / О.А. Балышев, Э.А. Таиров. – Новосибирск: Наука, 1998. – 164 с.
17. *Балышев О.А.* Дискретное оценивание параметров гидравлической цепи / О.А. Балышев, Э.И. Таиров // Методы оптимизации и их приложения: Тр. XI Междунар. Байкальской шк.-семин. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1998. – С. 115–119.

18. *Балышев О.А.* Математические модели динамических процессов в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев. – Иркутск, 1998. – 40 с.
19. *Балышев О.А.* Нестационарные модели в теории гидравлических цепей: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / О.А. Балышев. – Иркутск, 1998. – 49 с.
20. *Балышев О.А.* Гидравлические цепи с регулируемыми параметрами (постановка задачи и математические модели): Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, С.П. Епифанов, С.О. Балышев. – Иркутск, 1999. – 54 с.
21. *Балышев О.А.* Оптимизация режимов работы систем централизованного снабжения / О.А. Балышев, М.С. Нечаева // Средства математического моделирования: Тр. 2-й Междунар. конф. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. – С. 84–93.
22. *Балышев О.А.* Задачи регулирования в гидравлических цепях (обобщенные математические модели) / О.А. Балышев, С.О. Балышев // Изв. РАН. Энергетика. – 2000. – № 6. – С. 98–107.
23. *Балышев О.А.* Модели нестационарного потокораспределения в многоконтурных гидравлических цепях / О.А. Балышев // Докл. РАН. – 2000. – Т. 72, № 3. – С. 330–332.
24. *Балышев О.А.* Система алгебро-дифференциальных уравнений индекса 2, моделирующая динамическое потокораспределение / О.А. Балышев, М.С. Нечаева // Дифференциальные уравнения и приложения: Тр. 3-й Междунар. конф. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 2000. – С. 257–261.
25. *Балышев О.А.* Элементы теории динамических гидравлических цепей: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, Э.А. Таиров, С.О. Балышев. – Иркутск, 2000. – 36 с.
26. *Балышев О.А.* Линейные и нелинейные динамические цепи: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев. – Иркутск, 2001. – 71 с.
27. *Балышев О.А.* Реакции гидравлической цепи на возмущения внутренних параметров: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, Э.А. Таиров, С.О. Балышев. – Иркутск, 2001. – 52 с.
28. *Балышев О.А.* Связь уравнений движения Лагранжа с гидравлическими цепями: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев. – Иркутск, 2001. – 36 с.
29. *Балышев О.А.* Экспериментальные аспекты теории динамических гидравлических цепей / О.А. Балышев, Э.А. Таиров, С.О. Балышев // Изв. РАН. Энергетика. – 2002. – № 2. – С. 136–148.
30. *Балышев О.А.* О выборе замыкающих соотношений при моделировании нестационарного потокораспределения в гидравлических цепях / О.А. Балышев, Б.М. Каганович // Изв. РАН. Энергетика. – 2003. – № 5. – С. 116–120.
31. *Балышев О.А.* Термодинамические аспекты гидравлических цепей и экстремальные модели динамического потокораспределения: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, С.О. Балышев. – Иркутск, 2003. – 70 с.
32. *Балышев О.А.* Уравнения Н.Е. Жуковского и гидравлические цепи: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев. – Иркутск, 2003. – 27 с.
33. *Балышев О.А.* Нелинейные гидравлические цепи / О.А. Балышев, С.О. Балышев // Докл. РАН. – 2004. – Т. 397, № 5. – С. 606–609.
34. *Балышев О.А.* Структурное управление динамическим потокораспределением: Препр. ИСЭМ СО РАН / О.А. Балышев, С.О. Балышев. – Иркутск, 2004. – 36 с.
35. *Балышев О.А.* К вопросу о структурном управлении динамическим потокораспределением / О.А. Балышев, С.О. Балышев // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 10. – С. 24–41.

36. *Балышев О.А.* О возможности структурного управления в циркуляционной закрытой гидравлической цепи / О.А. Балышев, С.О. Балышев // Изв. РАН. Энергетика. – 2006. – № 6. – С. 113–124.
37. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
38. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Т. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
39. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Т. 2 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
40. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье / С. Бохнер. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.
41. *Бояринцев Ю.Е.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1996. – 261 с.
42. *Бояринцев Ю.Е.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
43. *Винер Н.* Преобразования Фурье в комплексной области / Н. Винер, Р. Пэли. – М.: Наука, 1964. – 268 с.
44. *Вольперт А.И.* Дифференциальные уравнения на графах / А.И. Вольперт // Мат. сб. – 1972. – Т. 88 (130), № 4 (8). – С. 578–588.
45. *Газовая* динамика / Х.А. Рахматулин [и др.]. – М.: Высш. шк., 1965. – 725 с.
46. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Гостехиздат, 1954. – 411 с.
47. *Горская Н.И.* О задаче автоматического выделения поврежденного участка в тепловых сетях / Н.И. Горская // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1973. – № 4. – С. 140–147.
48. *Горская Н.И.* Разработка метода выделения аварийных ситуаций в трубопроводных системах и его применения (на примере систем теплоснабжения): Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Н.И. Горская. – Иркутск, 1977. – 22 с.
49. *Громов Б.Н.* Расчет нестационарных гидравлических режимов тепловых водяных сетей на ЭЦВМ / Б.Н. Громов, В.Г. Сидлер // Теплоэнергетика. – 1973. – № 3. – С. 65–69.
50. *Гудзовский А.В.* К расчету гидравлических сетей / А.В. Гудзовский // Докл. РАН. – 1998. – Т. 358, № 6. – С. 765–767.
51. *Гудсон Р.Е.* Обзор методов моделирования переходных процессов в гидравлических сетях / Р.Е. Гудсон, Р.Г. Леонард // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теорет. основы инж. расчетов. – 1973. – № 2. – С. 236–241.
52. *Жуковский Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский // Бюл. Политехн. о-ва. – 1899. – № 5. – 47 с.
53. *Жуковский Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский. – М.: Гостехиздат, 1949. – 223 с.
54. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
55. *Избаш С.В.* Основы гидравлики / С.В. Избаш. – М.: Госстройиздат, 1952. – 423 с.
56. *Каганович Б.М.* Оптимизация расширяющихся и реконструируемых тепловых сетей. Алгоритм и программа расчетов для БЭСМ-2М / Б.М. Каганович, С.В. Сумароков, Л.А. Сирик; СЭИ СО РАН. – Иркутск, 1968. – 168 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 310-68.

57. *Каганович Б.М.* Оптимизация тепловых сетей с учетом динамики их развития / Б.М. Каганович // Изв. АН СССР. Техн. науки. – 1968. – № 3. – С. 75–80.
58. *Каганович Б.М.* О выборе диаметров труб развивающихся и реконструируемых тепловых сетей / Б.М. Каганович, Л.А. Сирик // Теплоэнергетика. – 1969. – № 3. – С. 65–68.
59. *Каганович Б.М.* Методика расчета центрального регулирования при совместной работе источников / Б.М. Каганович, В.Я. Хасилев // Теплоэнергетика. – 1970. – № 10. – С. 78–80.
60. *Каганович Б.М.* Методы оптимизации тепловых сетей при совместной работе ТЭЦ и котельных: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Б.М. Каганович. – М., 1971. – 25 с.
61. *Каганович Б.М.* Алгоритм определения показателей надежности теплоснабжения потребителей при анализе оптимальных проектов вариантов развития теплофикационных систем / Б.М. Каганович, Е.В. Сеннова // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1976. – Вып. 12. – С. 50–58.
62. *Каганович Б.М.* Дискретная оптимизация тепловых сетей / Б.М. Каганович. – Новосибирск: Наука, 1978. – 88 с.
63. *Каганович Б.М.* Термодинамика цепей: Препр. ИСЭМ СО РАН / Б.М. Каганович. – Иркутск, 1993. – 35 с.
64. *Каганович Б.М.* Равновесная термодинамика и математическое программирование / Б.М. Каганович, С.П. Филиппов. – Новосибирск: Наука, 1995. – 236 с.
65. *Каганович Б.М.* Элементы теории гетерогенных гидравлических цепей / Б.М. Каганович, А.П. Меренков, О.А. Балышев. – Новосибирск: Наука, 1997. – 119 с.
66. *Каганович Б.М.* Равновесия в открытых системах: Препр. ИСЭМ СО РАН / Б.М. Каганович, О.А. Балышев, С.П. Филиппов. – Иркутск, 2001. – 37 с.
67. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
68. *Кендалл М.* Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Кендалл, А. Стюарт. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
69. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 631 с.
70. *Кошелев А.А.* Исследование нестационарных режимов в системах теплоснабжения с использованием гидроинтегратора и ЭВМ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.А. Кошелев. – М., 1966. – 34 с.
71. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. 1 / Ж. Лагранж. – М.; Л.: ГОНТИ, 1938. – 348 с.
72. *Ландау Л.Д.* Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 203 с.
73. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
74. *Лурье А.И.* Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 825 с.
75. *Мартин К.С.* Современное состояние теории переходных гидравлических процессов / К.С. Мартин // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теорет. основы инж. расчетов. – 1973. – № 2. – С. 209–229.
76. *Математический* расходомер и его применение в тепловых сетях / А.П. Меренков [и др.] // Теплоэнергетика. – 1971. – № 1. – С. 70–72.
77. *Математическое* моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения / А.П. Меренков [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1992. – 407 с.

78. *Математическое* моделирование потокораспределения в транспортных гидравлических системах с переменной структурой / А.М. Кутепов [и др.] // Докл. РАН. 1996. – Т. 350, № 5. – С. 653–654.
79. *Математическое* описание системы многопрофильных каналов и методы их оптимизации / А.П. Меренков [и др.] // Гидротехн. стр-во. – 1983. – № 4. – С. 33–35.
80. *Меерович Э.А.* Геометрическая теория электрических цепей / Э.А. Меерович // Электричество. – 1947. – № 2. – С. 30–39.
81. *Меренков А.П.* Применение ЭВМ для оптимизации разветвленных тепловых сетей / А.П. Меренков // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1963. – № 4. – С. 531–538.
82. *Меренков А.П.* Расчет разветвленных тепловых сетей на основе их оптимизации с использованием ЭВМ / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев // Изв. АН СССР. Техн. науки. – 1963. – № 10, вып. 3. – С. 42–48.
83. *Меренков А.П.* Решение общей задачи линейного программирования модифицированным симплексным методом / А.П. Меренков. – М.: ГИПРОТИС Госстроя СССР, 1965. – 75 с.
84. *Меренков А.П.* Методы и средства для управления эксплуатацией и развитием трубопроводных систем / А.П. Меренков, К.С. Светлов, В.Я. Хасилев // Оптимизация и управление в больших системах энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1970. – Т. 1. – С. 60–80.
85. *Меренков А.П.* Обратные задачи потокораспределения в гидравлических цепях / А.П. Меренков, В.Г. Сидлер // Тр. IV Всесоюз. зимней школы по мат. программированию и смежным вопросам. – М.: МИСИ, 1972. – С. 8–14.
86. *Меренков А.П.* Дифференциация методов расчета гидравлических цепей / А.П. Меренков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – № 5. – С. 1237–1248.
87. *Меренков А.П.* Об одном классе смешанных систем уравнений и методике их решения / А.П. Меренков, Л.Е. Сидлер // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1973. – Вып. 2. – С. 98–105.
88. *Меренков А.П.* Идентификация трубопроводных систем / А.П. Меренков, В.Г. Сидлер // Фактор неопределенности при принятии оптимальных решений в больших системах энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1974. – Т. 3. – С. 149–162.
89. *Меренков А.П.* Математические модели и методы для анализа и оптимального проектирования трубопроводных систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.П. Меренков. – Новосибирск, 1974. – 34 с.
90. *Меренков А.П.* О вычислительной системе для оптимального проектирования трубопроводных систем / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев, А.В. Храмов // Проблемы повышения эффективности БЭСМ-6. – Иркутск: ВЦ, СЭИ СО АН СССР, 1975. – С. 185–191.
91. *Меренков А.П.* Гидравлические цепи с регулируемыми параметрами и их применение для описания и расчета многониточных нефтепроводов / А.П. Меренков, А.А. Морев, В.Я. Хасилев // Системы энергетики – тенденции развития и методы управления. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1980. – Т. 1. – С. 193–204.
92. *Меренков А.П.* Об эффективности нагруженного резервирования в многониточных системах нефтепроводов / А.П. Меренков, А.А. Морев, В.Я. Хасилев // Нефт. хоз-во. – 1980. – № 6. – С. 48–52.
93. *Меренков А.П.* Обобщение электротехнических методов на гидравлические цепи / А.П. Меренков, В.Г. Сидлер, М.К. Такайшвили // Электрон. моделирование. – 1982. – № 2. – С. 3–12.

94. *Меренков А.П.* Расчет и оптимизация режимов работы многониточных нефтепроводов при кольцевых схемах эксплуатации / А.П. Меренков, А.А. Морев, Н.Н. Новицкий // Трубопроводный транспорт газа: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. – Уфа: Уфим. нефтяной ин-т, 1982. – С. 64–66.
95. *Меренков А.П.* Оптимизация теплоснабжающих систем с учетом надежности при проектировании / А.П. Меренков, Е.В. Сеннова // Надежность и качество. – 1984. – № 2. – С. 39–43.
96. *Меренков А.П.* Развитие методов исследования и обеспечения надежности теплоснабжающих систем / А.П. Меренков, Е.В. Сеннова // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1984. – № 2. – С. 58–65.
97. *Меренков А.П.* Теория гидравлических цепей / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. – М.: Наука, 1985. – 278 с.
98. *Меренков А.П.* О развитии теории гидравлических цепей для моделирования больших трубопроводных и гидравлических систем / А.П. Меренков, В.Г. Сидлер // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1987. – № 5. – С. 146–153.
99. *Меренкова Н.Н.* Математические модели для оптимизации трассировки и структуры трубопроводных систем / Н.Н. Меренкова // Вопросы прикладной математики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1977. – С. 145–158.
100. *Меренкова Н.Н.* Разработка и применение математических моделей для оптимизации производительностей источников и конфигурации гидравлических сетей на основе их избыточных схем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Н.Н. Меренкова. – Новосибирск, 1980. – 22 с.
101. *Меренкова Н.Н.* Схемно-структурная оптимизация систем централизованного теплоснабжения / Н.Н. Меренкова, Е.В. Сеннова, В.А. Стенников // Электрон. моделирование. – 1982. – № 6. – С. 76–82.
102. *Методы* и алгоритмы расчета тепловых сетей / В.Я. Хасилев [и др.]. – М.: Энергия, 1978. – 176 с.
103. *Методы* и программы расчета гидравлических цепей с сосредоточенными, регулируемыми и распределенными параметрами / А.П. Меренков [и др.] // Тр. IV Всемир. семин. по комплексам программ математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. – С. 40–52.
104. *Методы* схемно-структурной и схемно-параметрической оптимизации разветвленных и многоконтурных систем / А.П. Меренков [и др.] // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. Всесоюз. конф. – Киев: Наук. думка, 1981. – Ч. 2. – С. 63–66.
105. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 697 с.
106. *Морев А.А.* Расчет многониточных нефтепроводов при смешении разносортных нефтей / А.А. Морев // Нефт. хоз-во. – 1978. – № 2. – С. 43–46.
107. *Морев А.А.* Методы расчета режимов систем многониточных нефтепроводов как гидравлических цепей с регулируемыми параметрами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.А. Морев. – М., 1982. – 22 с.
108. *Морев А.А.* Системная идентификация многониточных нефтепроводов / А.А. Морев, В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий // Трансп. и хранение нефти и нефтепродуктов. – 1982. – № 11. – С. 6–7.
109. *Мостков М.А.* Расчеты гидравлического удара / М.А. Мостков, А.А. Башкиров. – М.: Госэнергоиздат, 1952. – 127 с.
110. *Назначение* и общая характеристика вычислительной системы СОСНА / А.П. Меренков [и др.] // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования: Тез. докл. 4-го симпоз. – М.: ЦЭМИ АН СССР, 1976. – С. 15–16.

111. *Некрасова О.А.* Выбор наивыгоднейшей трассировки трубопроводных сетей. Алгоритмы и программы / О.А. Некрасова, С.В. Сумароков, В.Я. Хасилев; СЭИ СО РАН. – Иркутск, 1969. – 73 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1488-69.
112. *Некрасова О.А.* Оптимальная трассировка трубопроводных сетей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / О.А. Некрасова. – М., 1970. – 16 с.
113. *Некрасова О.А.* Оптимальное дерево трубопроводной сети / О.А. Некрасова, В.Я. Хасилев // Экономика и мат. методы. – 1970. – № 3. – С. 427–432.
114. *Новицкий Н.Н.* Разработка и применение методов идентификации трубопроводных систем как гидравлических цепей с переменными параметрами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Н.Н. Новицкий. – Иркутск, 1986. – 25 с.
115. *Новицкий Н.Н.* Оценивание параметров трубопроводных систем методом приведенной линеаризации / Н.Н. Новицкий // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1990. – № 6. – С. 146–153.
116. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. – М.: Наука, 1989. – 688 с.
117. *О методах* гидравлических испытаний водяных тепловых сетей / К.С. Светлов [и др.] // Электр. станции. – 1971. – № 11. – С. 39–41.
118. *О проблеме* надежности систем теплоснабжения с нагруженным резервированием / В.Я. Хасилев [и др.] // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1976. – № 1. – С. 146–153.
119. *Об автоматизированных* системах программ для расчета гидравлических режимов трубопроводных сетей / А.П. Меренков [и др.] // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1973. – № 3. – С. 126–131.
120. *Об эффективности* нагруженного резервирования в тепловых сетях / В.Я. Хасилев [и др.] // Теплоэнергетика. – 1974. – № 7. – С. 66–71.
121. *Оптимальный* синтез многоконтурных систем с нагруженным резервированием / А.П. Меренков [и др.] // Системы энергетики – тенденции развития и методы управления. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1980. – Т. 1. – С. 180–192.
122. *Оптимизация* расширяемых и реконструируемых разветвленных тепловых сетей с несколькими источниками / Б.М. Каганович [и др.]; СЭИ СО РАН. – Иркутск, 1969. – 91 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1037-69.
123. *Отнес Р.* Прикладной анализ временных рядов / Р. Отнес, Л. Эноксон. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
124. *Ощепкова Т.Б.* Метод многоконтурной оптимизации и его приложения / Т.Б. Ощепкова, С.В. Сумароков // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. Всесоюз. совещ. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. – С. 68–70.
125. *Ощепкова Т.Б.* Оптимизация разветвленных и многоконтурных трубопроводных систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Т.Б. Ощепкова. – Новосибирск, 1983. – 22 с.
126. *Павловский Н.Н.* Гидравлический справочник / Н.Н. Павловский. – М.; Л.: Энергоиздат, 1937. – 890 с.
127. *Повышение* эффективности методов расчета и комплексной оптимизации теплоснабжающих систем / А.П. Меренков [и др.] // Пятая Междунар. конф. по централизованному теплоснабжению. – М.; Киев: Информэнерго, 1982. – Вып. 2. – С. 80–95.
128. *Применение* теории и методов расчета гидравлических цепей к системам с неизотермическим течением газа / А.П. Меренков [и др.] // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1971. – № 6. – С. 129–138.
129. *Проблемы* Гильберта: Сб. науч. ст. / Ред. П.С. Александров. – М.: Наука, 1969. – 237 с.

130. *Проектирование* групповых водопроводов с применением методов дискретной оптимизации / С.В. Сумароков [и др.] // Науч. тр. Всесоюз. Объединения Союзводпроект. – 1983. – № 56. – С. 62–68.
131. *Пэнлеве П.* Лекции о трении / П. Пэнлеве. – М.: Гостехиздат, 1954. – 316 с.
132. *Рабинович Е.З.* Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.
133. *Расчет* сложных тепловых сетей / Б.М. Каганович [и др.] // Водоснабжение и сан. техника. – 1974. – № 4. – С. 18–19.
134. *Романовский П.И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа / П.И. Романовский. – М.: Наука, 1964. – 303 с.
135. *Самарский А.А.* Об одной разностной схеме повышенного порядка точности для уравнений параболического типа с несколькими пространственными переменными / А.А. Самарский, В.Б. Андреев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 6. – С. 1006–1013.
136. *Самарский А.А.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А.А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.
137. *Самарский А.А.* Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
138. *Светлов К.С.* О применении ЭЦВМ для расчета воздухообмена и аэрации зданий / К.С. Светлов // Методы математического моделирования в энергетике. – Иркутск, 1966. – С. 362–369.
139. *Светлов К.С.* Расчет воздухообмена в многоэтажных зданиях с использованием ЭВМ / К.С. Светлов // Водоснабжение и сан. техника. – 1966. – № 11. – С. 28–31.
140. *Светлов К.С.* Исследование воздухообмена в зданиях с использованием ЭВМ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / К.С. Светлов. – М., 1967. – 14 с.
141. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1 / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
142. *Сеннова Е.В.* Методика анализа надежности развивающихся систем теплоснабжения: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Е.В. Сеннова. – Новосибирск, 1975. – 28 с.
143. *Сеннова Е.В.* О нормативах надежности в теплофикационных системах / Е.В. Сеннова // Изв. вузов. Энергетика. – 1975. – № 4. – С. 110–116.
144. *Сеннова Е.В.* Выбор показателей надежности для решения задач оптимального проектирования теплофикационных систем / Е.В. Сеннова // Методические вопросы исследования надежности систем энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1979. – Вып. 11. – С. 134–141.
145. *Сеннова Е.В.* Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем / Е.В. Сеннова, В.Г. Сидлер. – Новосибирск: Наука, 1987. – 221 с.
146. *Сеннова Е.В.* Оптимизация реконструкции теплоснабжающих систем на современном этапе их развития / Е.В. Сеннова, В.А. Стенников, Т.Б. Ощепкова // Математическое моделирование трубопроводных систем. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1988. – С. 99–109.
147. *Сеннова Е.В.* Оптимизация развития и реконструкции теплоснабжающих систем с учетом надежности: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / Е.В. Сеннова. – Иркутск, 1990. – 50 с.
148. *Сеннова Е.В.* Об оптимальном проектировании развиваемых и реконструируемых теплоснабжающих систем / Е.В. Сеннова, В.А. Стенников // Теплоэнергетика. – 1994. – № 9. – С. 26–30.

149. *Сидлер В.Г.* О статистическом подходе к эквивалентированию трубопроводных сетей / В.Г. Сидлер // Вопросы оценивания и идентификации в энергетических системах. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1974. – С. 173–178.
150. *Сидлер В.Г.* Линейная и нелинейная модели для оценивания параметров гидравлических сетей / В.Г. Сидлер // Вопросы прикладной математики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1977. – С. 159–167.
151. *Сидлер В.Г.* Разработка и применение методов идентификации параметров гидравлических сетей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / В.Г. Сидлер. – Томск, 1977. – 20 с.
152. *Сидлер В.Г.* Идентификация трубопроводных систем как гидравлических цепей с переменными параметрами / В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1984. – № 4. – С. 155–162.
153. *Сидлер В.Г.* Задачи и методы системной идентификации трубопроводных систем / В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий, В.В. Шлафман // Математическое моделирование трубопроводных систем. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1988. – С. 177–186.
154. *Сидлер В.Г.* Математическая модель для исследования режимов функционирования систем теплоснабжения / В.Г. Сидлер, З.И. Шалагинова // Современные проблемы системных исследований в энергетике. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1990. – С. 106–115.
155. *Скрипник В.Ф.* Типовые программы для расчета сложных гидравлических цепей / В.Ф. Скрипник, М.К. Такайшвили, Н.П. Толмачева // Методы мат. моделирования и использования ЭВМ в энергетике: Тез. докл. науч. сессии. – Иркутск, 1963. – С. 101–104.
156. *Сумароков С.В.* Вопросы оптимального размещения аккумулирующих емкостей в развивающихся системах коммунального водоснабжения: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / С.В. Сумароков. – М., 1973. – 26 с.
157. *Сумароков С.В.* Построение надежной схемы в общей задаче оптимального проектирования трубопроводных сетей с нагруженным резервированием / С.В. Сумароков, А.В. Храмов // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1974. – Вып. 12. – С. 163–171.
158. *Сумароков С.В.* Применение динамического программирования для оптимального проектирования расширяемых и реконструируемых разветвленных водопроводов / С.В. Сумароков // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1975. – № 11. – С. 126–129.
159. *Сумароков С.В.* Метод решения многоэкстремальной сетевой задачи / С.В. Сумароков // Экономика и мат. методы. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 1016–1018.
160. *Сумароков С.В.* Методика оптимизации реконструкции водопроводной сети / С.В. Сумароков, Н.Н. Меренкова // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1976. – № 3. – С. 128–132.
161. *Сумароков С.В.* Об одном методе решения многоэкстремальной задачи оптимизации многоконтурных гидравлических цепей / С.В. Сумароков, А.В. Храмов // Методы оптимизации и исследование операций (прикладная математика). – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1976. – С. 157–167.
162. *Сумароков С.В.* Вопросы оптимального синтеза систем водоснабжения с учетом надежности / С.В. Сумароков, А.В. Храмов // Вопросы надежности систем водоснабжения. – М.: МИСИ, 1978. – С. 36–44.
163. *Сумароков С.В.* О применении методов гидравлических цепей для оптимального проектирования каналов переброски вод / С.В. Сумароков, В.Р. Чупин // Систе-

мы энергетики – тенденции развития и методы управления. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1980. – Т. 1. – С. 216–223.

164. *Сумароков С.В.* Математическое моделирование систем водоснабжения / С.В. Сумароков. – Новосибирск: Наука, 1983. – 167 с.
165. *Сумароков С.В.* Учет динамики развития в задачах проектирования водопроводных сетей и открытых каналов / С.В. Сумароков, В.Р. Чупин // Водные ресурсы бассейна Байкала и Ангары. Предсказание, рациональное использование и охрана: Тез. докл. Всесоюз. науч.-практ. совещ. – Иркутск, 1983. – С. 50–53.
166. *Сумароков С.В.* Модификация алгоритма построения последовательности планов для выбора оптимальной конфигурации трубопроводных сетей / С.В. Сумароков // Электрон. моделирование. – 1984. – № 6. – С. 94–96.
167. *Сумароков С.В.* О математическом моделировании современных водоснабжающих систем / С.В. Сумароков, В.Р. Чупин // Математическое моделирование трубопроводных систем. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1988. – С. 114–127.
168. *Такайшвили М.К.* Методы расчета аварийных режимов, надежности и резервирования тепловых сетей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / М.К. Такайшвили. – Новосибирск, 1971. – 32 с.
169. *Такайшвили М.К.* Об основных положениях методики расчета надежности и резервирования тепловых сетей / М.К. Такайшвили, В.Я. Хасилев // Теплоэнергетика. – 1972. – № 4. – С. 14–19.
170. *Тер Хаар Д.* Основы Гамильтоновой механики / Д. тер Хаар. – М.: Наука, 1974. – 223 с.
171. *Толмачева Н.И.* Программа расчета многокольцевых гидравлических сетей увязочным методом / Н.И. Толмачева, В.Я. Хасилев. – М.: ГИПРОТИС Госстроя СССР, 1965. – Вып. 1–4. – 21 с.
172. *Троицкий В.Б.* Выбор оптимального главного положения каналов с учетом устройства водохранилищ / В.Б. Троицкий, В.Р. Чупин // Вод. ресурсы. – 1985. – № 1. – С. 181–184.
173. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – 527 с.
174. *Хасилев В.Я.* Анализ конфигурации несимметричных тепловых сетей и его применение к выбору мощности систем централизованного теплоснабжения / В.Я. Хасилев // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1945. – № 10–11. – С. 1105–1114.
175. *Хасилев В.Я.* Обобщенные зависимости для технико-экономических расчетов тепловых и других сетей / В.Я. Хасилев // Теплоэнергетика. – 1957. – № 1. – С. 28–32.
176. *Хасилев В.Я.* Гидравлический режим индивидуального регулирования теплофицированных зданий / В.Я. Хасилев // Тр. МИНХ. – М., 1959. – Вып. 15, ч. 2.
177. *Хасилев В.Я.* Линейные и линеаризованные преобразования схем гидравлических цепей / В.Я. Хасилев // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1964. – № 2. – С. 231–243.
178. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей / В.Я. Хасилев // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1964. – № 1. – С. 69–88.
179. *Хасилев В.Я.* Вопросы математического моделирования и оптимизации гидравлических систем с применением ЭЦВМ / В.Я. Хасилев // Методы математического моделирования в энергетике. – Иркутск: Вост.-Сиб. кн. изд-во, 1966. – С. 343–348.
180. *Хасилев В.Я.* Гравитационные гидравлические цепи с распределенными параметрами и методика их расчета / В.Я. Хасилев // Там же. – С. 349–362.

181. *Хасилев В.Я.* О выборе диаметров труб разветвленных тепловых сетей с использованием ЭВМ / В.Я. Хасилев, А.П. Меренков, С.В. Сумароков // Теплоэнергетика. – 1966. – № 6. – С. 60–65.
182. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / В.Я. Хасилев. – Новосибирск, 1966. – 98 с.
183. *Хасилев В.Я.* Метод контурных расходов для расчета гидравлических цепей / В.Я. Хасилев, К.С. Светлов, М.К. Такайшвили; СЭИ СО РАН. – Иркутск, 1968. – 110 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 339-68.
184. *Хасилев В.Я.* О применении математических методов при проектировании и эксплуатации трубопроводных систем / В.Я. Хасилев // Изв. АН СССР. Энергетика и трансп. – 1971. – № 2. – С. 18–27.
185. *Хасилев В.Я.* О методе оптимизации резервируемых систем водоснабжения с учетом критериев и параметров надежности / В.Я. Хасилев // Проблемы надежности систем водоснабжения. – М.: МИСИ, 1973. – С. 16–29.
186. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1973. – 967 с.
187. *Храмов А.В.* Программно-вычислительный комплекс СОСНА как инструмент для реализации и исследования алгоритмов оптимального синтеза многоконтурных гидравлических систем / А.В. Храмов // Пакеты прикладных программ. Методы, разработки. – Новосибирск: Наука, 1981. – С. 174–182.
188. *Храмов А.В.* Оптимальный синтез многоконтурных систем с нагруженным резервированием: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.В. Храмов. – Новосибирск, 1983. – 24 с.
189. *Чарный И.А.* Основы газовой динамики / И.А. Чарный. – М.: Гостехиздат, 1964. – 200 с.
190. *Челомей С.В.* Параметрические резонансы в трубопроводах, нагруженных переменной осевой силой при протекании через них пульсирующей жидкости / С.В. Челомей, Г.А. Щеглов // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364, № 1. – С. 57–60.
191. *Чистяков В.Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 324 с.
192. *Чупин В.Р.* Методы схемно-структурной оптимизации систем многопрофильных каналов / В.Р. Чупин // Численные методы оптимизации и их приложения. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1981. – С. 160–174.
193. *Чупин В.Р.* Оптимизация структуры и параметров системы магистральных каналов по критерию максимума общей экономической эффективности / В.Р. Чупин // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1987. – № 12. – С. 78–82.
194. *Шифринсон Б.Л.* Рациональная трассировка теплопроводов / Б.Л. Шифринсон, В.Я. Хасилев // Строит. промышленность. – 1944. – № 2–3. – С. 21–24.
195. *Яблонский В.С.* Краткий курс технической гидромеханики / В.С. Яблонский. – М.: Физматгиз, 1961. – 355 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тематический план выпуска
изданий СО РАН на 2013 г.

Научное издание

Балышев Олег Анатольевич
Балышев Сергей Олегович

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОНТУРНЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Утверждено к печати Ученым советом
Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Редактор *М.А. Трашкеева*
Художественный редактор *Н.Ф. Суранова*
Оформление обложки *Л.Н. Ким*
Корректор *В.В. Борисова*
Компьютерная верстка *Н.М. Райзвих*

Подписано в печать 26.10.12. Формат 70×100 1/16. Гарнитура PetersburgC. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 17,74. Уч.-изд. л. 15,8. Тираж 200 экз. Заказ № 5.1135

Академическое издательство "Гео", 630055, Новосибирск, ул. Мусы Джалиля, 3/1
Тел./факс: (383) 328-31-13, http://www.izdatgeo.ru
Отпечатано в ООО "Печатный дом-Новосибирск"
630084, Новосибирск, ул. Лазарева, 33/1, тел.: (383) 271-01-30