

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

**Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev,
L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva**

**EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI VA
MATEMATIK STATISTIKA**

5140100 – Matematika va informatika

5140100 – Matematika

Toshkent-2007

Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika. Pedagogika oliy ta'lim muassasalari talabalari uchun darslik. Sh.Q. Farmonov, R.M.Turgunbayev, L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva., Toshkent, 2007

Darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalari "Matematika va informatika" bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasidagi "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" fanining amaldagi dasturi asosida yozilgan. Unda fan bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumot va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan. Bob oxirida o'z-o'zini tekshirish uchun savollar berilgan, hamda nazariy ma'lumotlarni o'zlashtirish uchun test topshiriqlari berilgan. Mazkur darslikdan matematika va informatika, mexanika, fizika va astronomiya hamda iqtisodiyot yo'nalishlarining talabalari, shuningdek, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikani mustaqil o'rganuvchilar ham foydalanishi mumkin.

Учебник написан на основе действующей программы по теории вероятностей и математической статистике для студентов-бакалавров педагогических вузов. В нем рассмотрены теоретические вопросы по основным разделам программы и приведены соответствующие примеры с решениями. В конце каждой главы даны вопросы для самопроверки, примеры и задачи, а также тестовые задания. Данный учебник может быть использован студентами других вузов, а также для самостоятельного изучения теории вероятностей и математической статистики.

The text-book is written on the base of the acting programm on probability theory and mathematical statistics for bachelor students of higher pedagogical institutions. In the text-book, theoretical questions on the basic sections of the programm are considered and corresponding examples are given with solutions. At the end of each section, questions for self-examination, examples and problems, and also test tasks are given. This text-book can be used for students of others higher institutions and for independent studying of probability theory and mathematical statistics.

Taqrizchilar: O.Sh. Sharipov – fizika-matematika fanlari doktori
M.M. Xushvaktov – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Akademik Sa'di Xasanovich
Sirojiddinovning unutilmas
yorqin xotirasiga bag'ishlanadi

S O ' Z B O S H I

Ushbu qo'llanma hozirgi zamon "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" kursining Respublikamiz universitetlari va pedagogika institutlari matematika, tadbqiqiy matematika, informatika mutaxassisliklari bo'yicha qabul qilingan o'quv dasturlari asosida yozilgan. Bundan tashqari qo'llanmadan mazkur kurs bo'yicha qo'shimcha mashg'ulotlar, talabalar bilan mustaqil ta'lim dasrlarini o'tkazishda foydalanish mumkin. Shu maqsadda kitobda keltirilgan hamma teoremlar matematika nuqtai nazaridan qa'tiy isbotlari bilan ta'minlangan. Ular bilan tanishish o'quvchiga hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida qo'llaniladigan metodlar haqida to'la ma'lumot beradi. Aytilgan fikrning ahamiyatliligi shundaki, ehtimollik nazariyasi matematik fan sifatida bevosita tabiiy va ijtimoiy jarayonlarning modellarini o'rganadi. O'z navbatida esa, bu modellar asosiy tushuncha sifatida qabul qilingan "Elementar hodisalar" tushunchasi orqali ifodalanadi.

Qo'llanmada keltirilgan ma'lumotlarni tushunish uchun o'quvchidan kombinatorikaga tegishli dastlabki tushunchalar va birinchi, ikkinchi kurslarda o'qitiladigan matematik analiz elementlari bilan tanish bo'lish talab etiladi.

Ushbu darslik mualliflarning ko'p yillar davomida Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universitetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan.

Ushbu kitobning yozilishida Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universitetining «Matematik analiz» kafedrasining o'qituvchilarining maslahatlaridan foydalanildi. Mualliflar mazkur kafedra a'zolariga, shuningdek, fizika-matematika fanlari doktori O.Sh.Sharipovga, fizika-matematika fanlari

nomzodi J.B.Azimovga va texnik xodimlar N.I.Akromova va N.Sh.Mamanovalarga chuqur minnatdorchilik izhor qiladilar.

Albatta har qanday yozilgan kitob mualliflarning tanlangan predmetga bo'lgan shaxsiy munosabatlarini ko'proq aks ettiradi. Shuning uchun ham taklif qilinayotgan darslik kamchiliklardan xolis deb bo'lmaydi. Biz mutaxassislar va oddiy o'qituvchilar tomonidan darslikga bildiriladigan tanqidiy fikrlarni kutib qolamiz.

Manzil: Toshkent sh. Yusuf Xos Hojib ko'chasi 103 – uy.

Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti,
fizika-matematika fakulteti, “Matematik analiz” kafedrası.

Mualliflar

KIRISH

Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida ro‘y berishi yoki ro‘y bermaganligi noaniq bo‘lgan voqealarning modellarini (voqealarning o‘zini emas) o‘rganadi. Boshqacha qilib aytganda, ehtimolliklar nazariyasida shunday tajribalar modellarini o‘rganiladiki, bu tajribalarning natijalarini oldindan aniqlab bo‘lmaydi. Masalan, tanga tashlanganda uni gerb yoki raqam tomoni bilan tushishi, ob-havoni oldindan aytib berish, ishlab turgan agregatning yana qancha ishlashi, ommaviy ishlab chiqarilgan mahsulotning nosozlik qismi, elektr signallarini uzatishda halaqit beruvchi vaziyatlar yuzaga kelishi-bularning hammasini ehtimolliklar nazariyasining qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan predmetlar deb qaralishi mumkin.

Ehtimolliklar nazariyasining qo‘llash yoki qo‘llash mumkinmasligi, o‘rganilayotgan tajriba uchun “stoxastik turg‘unlik” xossasi o‘rinli bo‘lishiga bog‘liq. Oxirgi tushuncha esa, o‘z navbatida, o‘rganilayotgan tajribaning bir xil sharoitda ko‘p marta kuzatish (o‘tkazish) imkoniyati bilan bog‘liq (sanab o‘tilgan misollarga e‘tibor bering) kuzatish qiyin bo‘lgan tajribalarni esa ehtimolliklar nazariyasi yordamida deyarli o‘rganib bo‘lmaydi. Lekin, aytib o‘tilgan fikrlarni “stoxastik turg‘unlik” ning ta‘rifi sifatida qabul qilib bo‘lmaydi. Aslida esa, bu tushunchaga ehtimolliklar nazariyasi fundamental natijalaridan biri-katta sonlar qonuni orqali kelish mumkin. Buning uchun quyidagi tushunchalarni keltirish bilan chegaralanib qolamiz.

Bizning ongimizda biror hodisaning ehtimolligi (“ro‘y berishlik darajasi”) bir xil tipdagi tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p marta takrorlanganda bu hodisaning ro‘y berish chastotasiga bog‘liq. Buni ko‘p marta foydalaniladigan “tanga tashlash” misolida namoyon etamiz. Aytaylik, tanga n marta tashlansin, m_n – “gerb” ro‘y berishining nisbiy chastotasi bo‘lsin, ya‘ni n_g deb tanga n marta tashlanganda uni “gerb” tomoni bilan tushgan soni belgilansa,

$$m_n = \frac{n_g}{n}.$$

Intuitiv ravishda tushunarli (tajribalar esa buni isbotlaydi), agar tangani oldingi tashlanganlarning natijalariga bog‘liq qilmasdan tashlasak, katta n lar uchun m_n chastota $1/2$ ga yaqin bo‘ladi, ya’ni $n \rightarrow \infty$ da

$$m_n \rightarrow \frac{1}{2} \quad (*)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Masalan XVIII asrda yashagan mashhur tabiatshunos Byuffon tangani 4040 marta tashlab, unda “gerb” tomoni 2048 marta tushganini kuzatgan. Bu holda $m_n = \frac{n_g}{n} \approx 0,508$. Mashhur ingliz statist olimi K.Pirson tangani 24000 marta tashlab, “gerb” tomoni 12012 marta kuzatilganligini aniqlagan. Bu holda $m_n \approx 0,5005$ (bu ma’lumotlar B.V.Gnedenkoning “Kurs teorii veroyatnostey” (Moskva,1969) kitobidan olindi). Aytilganlardan kelib chiqadiki, tanga tashlanganda uni “gerb” tomoni bilan tushish ehtimolligini $1/2$ soni bilan tenglashtirish mumkin.

Lekin bu mulohazalarda quyidagi prinsipial qiyinchiliklar yuzaga keladi: keltirilgan fikrlarni odatdagi matematik tushunchalar orqali asoslab bo‘lmaydi, chunki, birinchidan tajribalarning bog‘liqsizligini qat’iy ta’rifini berish qiyin. Ikkinchidan, m_n oddiy ma’nodagi miqdor bo‘lmasdan, u har xil tajribalar seriyalarida har xil qiymatlarni qabul qiladi (xattoki har qanday n uchun $m_n=1$ bo‘lishligini ya’ni tangatashlanganda doimo uni “gerb” tomoni bilan tushishini inkor etib bo‘lmaydi). Demak, (*) munosabatni sonli ketma-ketliklarning limiti tushunchasi doirasida asoslab bo‘lmaydi, chunki m_n – oddiy ma’nodagi miqdor emas, u “tasodifiy miqdor” bo‘ladi. Bulardan tashqari, aslida biz cheksiz $\{m_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikka ega bo‘lmasdan, bu ketma-ketlikning chekli sondagi chastotalari elementlari bilan ish ko‘rishimizga to‘g‘ri keladi.

Eslatib o‘tilgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun hozirgi zamon matematikasida qabul qilinganidek, “tasodifiy hodisalar” va ularning “ehtimolliklari” uchun aksiomatik modellar tuzish kerak bo‘ladi. Bu muammolar XX asrning mashhur matematigi A.N.Kolmogorov tomonidan taklif qilingan “ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari” sistemasini kiritilishi bilan hal etildi.

Mazkur darslikning oxirida hozirgi zamon “Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika”ning matematik fan sifatida shakllanish tarixidan lavhalar va bu fan bo‘yicha O‘zbekistonda dunyoga mashxur maktab yaratilganligi haqidagi ma’lumotlar berilgan.

I-BOB. EHTIMOLLIKLAR FAZOSI

1.1-§. Elementar hodisalar fazosi.

Hodisalar va ular ustida amallar

Elementar hodisalar fazosi – ehtimolliklar nazariyasi uchun asosiy tushuncha bo‘lib, unga ta’rif berilmaydi. Formal nuqtai nazardan bu ixtiyoriy to‘plam hisoblanib, uning elementlari o‘rganilayotgan tajribaning “bo‘linmaydigan” va bir vaqtda ro‘y bermaydigan natijalardan iborat bo‘ladi. Elementar hodisalar fazosi Ω harfi bilan belgilanib, uning elementlarini (elementar hodisalarini) ω harfi bilan ifodalaymiz. Tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi.

Tasodifiy hodisalarini, odatda, lotin alfavitining bosh harflari A, B, C, \dots lar bilan belgilanadi.

Misollar. 1) Tanga tashlash tajribasi uchun $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ikkita elementar hodisadan iborat va bu yerda ω_1 – tanganing “gerb” tomoni tushish hodisasi, ω_2 – tanganing “raqam” tomoni tushish hodisasi (tanga “qirra tomoni bilan tushadi” degan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa hisoblanadi). Bu hol uchun Ω to‘planning elementlari soni $|\Omega| = 2$.

2) Shoshqoltosh (yoqlari birdan oltigacha raqamlangan bir jinsli o‘yin kubigi) tashlash tajribasi uchun

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

va bu yerda ω_i – kubikning i raqam bilan belgilangan tomoni bilan tushish hodisasi. Bu misol uchun $|\Omega| = 6$.

3) Tangani ikki marta tashlash (yoki ikkita tangani birdaniga tashlash) tajribasi uchun

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{GG, GR, RG, RR\}.$$

Bu yerda GG – tangani ikki marta ham “gerb” tomoni bilan tushish hodisasi, RG – birinchi marta “raqam” tomoni, ikkinchi marta esa “gerb” tomoni

bilan tushish hodisasi va qolgan GR , RR hodisalar shularga o'xshash hodisalar bo'ladi. Bu holda $|\Omega| = 4$ va GR , RG hodisalar bir-biridan farq qiladi.

4) Tajriba 2-chi misoldagi o'yin kubigini 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda elementar hodisalar ushbu ko'rinishga ega:

$$\omega_{ij} = (i, j), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Bunda ω_{ij} hodisa kubikni birinchi tashlashda i raqamli yoq, ikkinchi tashlashda j raqamli yoq tushganligini bildiradi.

Bu tajribada elementar hodisalar fazosi Ω :

$$\Omega = \{\omega_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 6\}.$$

Elementar hodisalar soni $|\Omega| = 6^2 = 36$.

5) Tajriba biror A hodisani n marta kuzatishdan iborat bo'lsin (yoki A hodisa ustida n marta tajriba o'tkazilsin). Har bir o'tkazilgan tajribaning natijasi A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligidan iborat bo'lsin. Agar tajriba natijasida A hodisa kuzatilsa, uni "yutuq" deb, ro'y bermasa "yutqiziq" (yutuq emas) deb hisoblaymiz. Masalan, tangani bir necha marta tashlashdan iborat tajribani ko'rsak, uni "gerb" tomoni bilan tushishini "yutuq" deb, "raqam" tomoni bilan tushishini esa "yutqiziq" deb tushunish mumkin. Agar shartli ravishda "yutuq"ni 1, "yutqiziq"ni 0 deb olsak, o'rganilayotgan tajriba uchun har bir elementar hodisa

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$$

bo'lib, u n ta 1 va 0 lardan iborat ketma-ketlik bo'ladi. Masalan, $n = 4$ bo'lganda $\omega = 1001$ elementar hodisa birinchi va to'rtinchi tajribalarda "yutuq" bo'lganini, ikkinchi va uchinchi tajribalarda "yutqiziq" bo'lganini bildiradi. Bu holda hamma elementar hodisalar soni

$$|\Omega| = 2^n,$$

chunki har bir ω ni ikkilik sanoq sistemasidagi n -qiymatli son deb tushunish mumkin.

6) Tajriba nuqtani $[0;1]$ segmentga tasodifiy ravishda tashlashdan iborat bo'lsin.

Bu holda elementar hodisa ω sifatida $[0;1]$ segmentning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin. Bu tajribada Ω elementar hodisalar fazosi $[0;1]$ to'plamdan iborat.

Aytib o'tganlarimizni yakunlab, bunday xulosa qilishimiz mumkin: har qanday tajriba ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar to'plami bilan bog'liq va bu hodisalar to'plami chekli, sanoqli va xatto kontinuum quvvatga ega bo'lishi mumkin.

Elementar hodisalar fazosi Ω ning ixtiyoriy A qism to'plami ($A \subset \Omega$) *tasodifiy hodisa* deyiladi va A hodisa ro'y berdi deganda shu A to'plamga kirgan biror elementar hodisaning ro'y berishi tushiniladi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* (Ω) deyiladi, chunki hamma elementar hodisalar Ω ni tashkil qiladi.

Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan hodisa* deyiladi va \emptyset bilan belgilanadi.

Shunday qilib har qanday A tasodifiy hodisa elementar hodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'ladi va A ga kiradigan ω larning birortasi ro'y bersa ($\omega \in A$), A hodisa ro'y beradi.

Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro'y bermasa, A hodisa ro'y bermaydi va u holda A hodisaga teskari hodisa (uni \bar{A} orqali belgilaymiz) ro'y bergan deb hisoblanadi.

A va \bar{A} o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Misollar.

1. A hodisa 3-chi misoldagi tajribada gerb va raqam tushishdan iborat bo'lsin. Bu holda $A = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Bu hodisaga qarama-qarshi hodisa:

$$\bar{A} = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

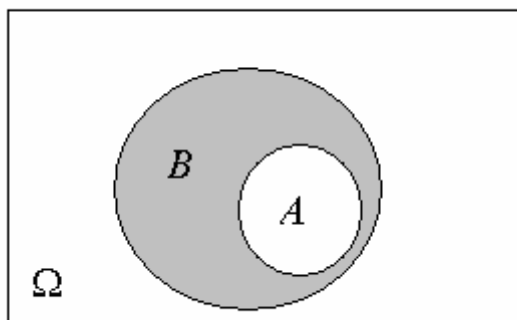
2. B hodisa 3-chi misoldagi tajribada hech bo'lmaganda bir marta gerb tushishdan iborat bo'lsin. Bu holda

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Bu hodisaga qarama-qarshi hodisa: $\bar{B} = \{\omega_4\}$.

Endi tasodifiy hodisalar ustida amallarni ko‘rib chiqaylik.

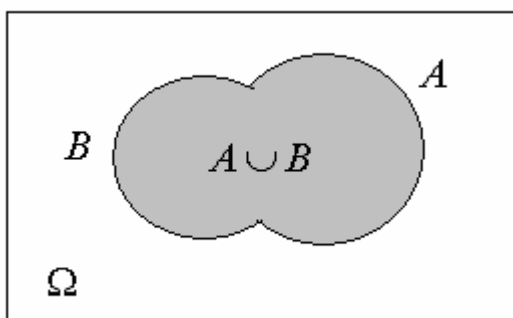
1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo‘lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi (1-rasm).



1-rasm

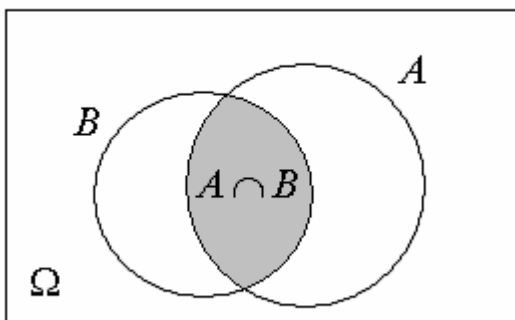
2. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya'ni A hodisa B ni ergashtirsa, va aksincha, B hodisa A ni ergashtirsa, A va B hodisalar teng deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

3. A va B tasodifiy hodisalarning yig'indisi deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalarning kamida bittasi ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cup B$ (yoki $C = A + B$) kabi belgilanadi (2-rasm).



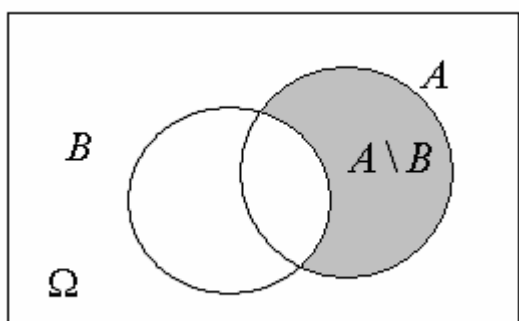
2-rasm.

4. A va B tasodifiy hodisalarni ko'paytmasi deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalarning bir paytda ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cap B$ (ëku $C = A \cdot B$) kabi belgilanadi (3-rasm).



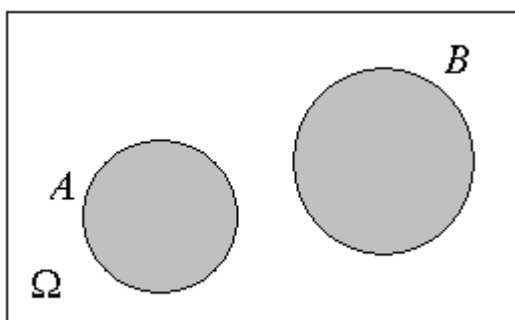
3-rasm

5. A va B tasodifiy hodisalarni *ayirmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi va $C = A \setminus B$ (ëku $C = A - B$) kabi belgilanadi (4-rasm).



4-rasm

6. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, A va B hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi (5-rasm).



5-rasm

7. Agar $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) va $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ bo'lsa, u holda A_1, A_2, \dots, A_n lar hodisalar to'la guruxini tashkil etadi deyiladi.

1.2-§. Diskret elementar hodisalar fazosi.

Ehtimollikning klassik ta'rifi

Diskret elementar hodisalar fazosi – bu chekli yoki sanoqli elementar hodisalardan iborat to'plam, ya'ni

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

Oldingi paragrafda ko'rib o'tilgan 1-5 misollarda elementar hodisalar fazosi Ω chekli bo'lib, 2, 6, 4, 36 va 2^n elementdan iborat edi.

Endi tajriba natijasida ro'y beradigan elementar hodisalar soni sanoqli bo'lgan hol uchun misollarni ko'ramiz.

1) Tajriba telefon stansiyasiga tushgan “chaqiriqlarni” o'rganishdan iborat bo'lsin. Bu yerda “telefon stansiyasi”, “chaqiriq” so'zlarini keng ma'noda tushunish mumkin. Masalan, abonentni telefon stansiyaga ulash, savdo magaziniga xaridorlar murojaati, elektron hisoblash mashinasining biror bloki orqali o'tadigan informatsion signallar, registratsiya qilingan kosmik zarrachalar va hakovolar. Agar bir vaqt birligi (sekund, minut, soat, yil) davomida tushadigan “chaqiriqlar” soni bilan qiziqsak, bu tajriba uchun elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

bo'lib, bu yerda ω_i – i ta “chaqiriq” tushish elementar hodisasini bildiradi. Umumiy “chaqiriqlar” soni hohlagancha bo'lishini hisobga olib, bu tajribani modellashtirishda Ω ni sanoqli to'plam va $|\Omega| = \infty$ deb hisoblash maqsadga muvofiq bo'ladi.

2) Tajriba tangani birinchi bor raqam tushguncha tashlashdan iborat bo'lsin.

$\omega_1 = \{R\}$ – birinchi tashlashdayoq raqam tushish hodisasi.

$\omega_2 = \{GR\}$ – birinchi tashlashda gerb, ikkinchi tashlashda raqam tushish hodisasi.

$\omega_3 = \{GGR\}$ – birinchi va ikkinchi tashlashda gerb, uchinchisida raqam tushish hodisasi.

.....
 $\omega_i = \left\{ \underbrace{GGG \dots G}_{i-1} R \right\}$ – birinchi, ikkinchi va hakozi $i-1$ ta tashlashda gerb, i -

tashlashda raqam tushish hodisasi. Bu holda $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ bo‘ladi va elementar hodisalar soni sanoqli ekanligini ko‘rish mumkin.

Ω fazo to‘plam sifatida har xil strukturada bo‘lishi mumkin.

1-ta’rif. Agar Ω to‘plamda aniqlangan $P(\omega)$ funksiya uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$0 \leq P(\omega) \leq 1, \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1,$$

u *ehtimolliklar taqsimoti deyiladi.*

Ixtiyoriy A hodisaning ($A \subset \Omega$) *hodisa ehtimolligi* deb quyidagi songa aytiladi:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Masalan, tajriba simmetrik tangani bir marta tashlashdan iborat bo‘lsin.

Bu holda elementar hodisalar

$\omega_1 = \{G\}$ – gerb tushish hodisasi;

$\omega_2 = \{R\}$ – raqam tushish hodisasi.

Ularning ehtimolliklari quyidagiga teng:

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2}; \quad P(\omega_2) = \frac{1}{2}.$$

Amalga oshishi bir xil imkoniyatli bo‘lgan hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Teng imkoniyatlilik shuni bildiradiki, A_1, A_2, \dots, A_n hodisalarning ro‘y berishda hech biri qolganlariga nisbatan biror ob’ektiv ustunlikka ega emas.

Masalan, o‘yin kubigining simmetrik bir jinsliligidan 1,2,3,4,5,6 ochkolardan istalganining chiqishi teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin.

2-ta'rif (*ehtimollikning klassik ta'rif*). Ω elementar hodisalar fazosi chekli va barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lsin, ya'ni

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

A hodisaning *ehtimolligi* deb, tajribaning A ga qulaylik beruvchi natijalari sonini ularning barcha natijalari soniga nisbatiga aytiladi va

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

bilan aniqlanadi.

Bu yerda $n(A)$ – A ga tegishli elementlar soni.

Klassik ta'rif bo'yicha aniqlangan ehtimollik xossalari.

1. Muqarrar hodisaning ehtimolligi 1 ga teng.

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Mumkin bo'lmagan hodisalarning ehtimolligi 0 ga teng.

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Tasodifiy hodisaning ehtimolligi musbat son bo'lib, 0 va 1 orasida bo'ladi.

$$0 \leq n(A) \leq n \text{ ekanligidan } 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

Ehtimollikni topishga doir masalalarni yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o'ynaydi, shuni e'tiborga olib kombinatorikaning ba'zi formulalari ustida to'xtalib o'tamiz.

O'rin almashtirishlar deb, n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalarga aytiladi. Ularning soni $P_n = n!$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$.

1-misol. 5, 6, 7 raqamlaridan nechta uch xonali son hosil qilish mumkin?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

O'rinlashtirishlar deb, n ta turli elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarda, elementlari yoki ularning tartibi bilan farq qilishiga aytiladi.

Ularning soni $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.

2-misol. 5,6,7,8 raqamlaridan nechta 2 xonali son hosil qilish mumkin?

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Gruppalashlar deb, bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarga aytiladi.

Ularning soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.

m ta elementdan iborat bo'lgan har bir gruppalash mumkin bo'lgan hamma o'rin almashtirishlardan so'ng $P_m = m!$ ta, n ta elementdan m tadan olib tuzilgan gruppalashlarning hammasi esa C_n^m ta bo'lgani uchun barcha o'rinlashtirishlarning umumiy soni A_n^m ,

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

bo'ladi. Bundan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad \text{yoki} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}. \quad (1)$$

(1) tenglikning o'ng tomonini $(n-m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-m)$ ga ko'paytirib va bo'lib, grupplashlar formulasini boshqacha, chunonchi

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu formulada m sonini $n-m$ bilan almashtirsak, u vaqtda

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (3)$$

hosil bo'ladi.

(1) va (3) formulalarning o'ng tomonlari o'zaro bir-biriga teng, demak, ularning chap tomonlari ham teng, ya'ni

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (4)$$

$m=n$ bo'lsin, u vaqtda (2), (3) va (4) formulalardan mos ravishda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1 \quad \text{va} \quad C_n^n = C_n^0.$$

3-misol. Yashikdagi 10 ta detalni 2 tadan qilib nechta usulda olish mumkin?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Endi klassik ta'rifga tushadigan bir qancha misollarni ko'rib o'tamiz.

4-misol. Yashikda o'lchamlari va og'irligi bir xil bo'lgan uchta ko'k, sakkizta qizil va to'qqizta oq shar bo'lib, sharlar yaxshilab aralashirilgan. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar tanlab olingan. Tanlangan sharning yoki ko'k, yoki qizil, yoki oq chiqish ehtimolliklarini toping.

Yechish. Istalgan sharning chiqishini teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin bo'lganligidan, jami $n = 3 + 8 + 9 = 20$ ta elementar hodisaga egamiz. A, B, C orqali mos ravishda ko'k, qizil va oq shar chiqishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. Ehtimollikning klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A) = \frac{3}{20} = 0,15;$$

$$P(B) = \frac{8}{20} = 0,4;$$

$$P(C) = \frac{9}{20} = 0,45;$$

5-misol. Ikkita o'yin kubigi tashlanganda tushgan ochkolar ko'paytmasi 12 ga teng bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish. Ikkita o'yin kubigini tashlanganda har birida 1, yoki 2, yoki 3, yoki 4, yoki 5, yoki 6 ochko tushishi mumkin. Bir o'yin kubigining har bir yog'ini boshqasining har bir yog'i bilan kombinatsiyasini olish mumkin. Mumkin bo'lgan hamma kombinatsiyalarni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin

(“birinchi” o‘yin kubigida tushgan ochkolar soni birinchi qilib, “ikkinchi” o‘yin kubigida tushgan ochkolar soni esa ikkinchi qilib yozilgan):

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	<u>62</u>
13	23	33	<u>43</u>	53	63
14	24	<u>34</u>	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	<u>26</u>	36	46	56	66

$A = \{\text{tushgan ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng bo‘lish hodisasi}\}$.

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, ikkita o‘yin kubigi tashlanganda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan teng imkoniyatli hodisalar $6 \cdot 6 = 36$ ga teng. Ular orasida faqat 4ta holatda (ular jadvalda tagiga chizib ko‘rsatilgan) ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng. Ehtimollikning klassik ta‘rifiga ko‘ra

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

6-misol. Beshta bir xil kartochkaga T, K, O, B, I harflari yozilgan. Kartochkalarni tasodifiy joylashtirilganda “KITOB” so‘zi hosil bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. Ko‘rsatilgan beshta harfning beshtadan mumkin bo‘lgan joylashishlari soni, ya‘ni tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha hollari soni 5 tadan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soniga teng, ya‘ni

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Shu o‘rin almashtirishlarning faqat bittasida “KITOB” so‘zi hosil bo‘ladi.

$A = \{\text{“KITOB” so‘zi hosil bo‘lish hodisasi}\}$

Ehtimollikning klassik ta‘rifiga ko‘ra

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

1.3-§. Ehtimollikning geometrik va statistik ta'riflari

Klassik sxemaga tushmaydigan, ya'ni mumkin bo'lgan hollari cheksiz bo'la oladigan yana bir modelni keltiramiz.

Biror D soha berilgan bo'lib, uning qism ostisi D_1 coha bo'lsin. Agar D sohaga tavakkaliga nuqta tashlanayotgan bo'lsa, shu nuqtaning D_1 ga tushish ehtimolligi qancha bo'ladi? – degan savol o'rinli bo'ladi. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, “ D sohaga tavakkaliga nuqta tashlanayapti” – deyilganda biz quyidagini tushunamiz: tashlanayotgan nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkin va D ning biror qism ostisiga nuqta tushishi ehtimolligi shu qism o'lchovi (uzunlik, yuza va hakoza)ga proporsional bo'lib, uning joylashishiga va shakliga bog'liq emas.

Demak, yuqorida ta'kidlanganlarni umumlashtirib, ehtimollikning quyidagi ta'rifini keltirishimiz mumkin:

Ta'rif. D sohaga tavakkaliga tashlanayotgan nuqtaning uning qism ostisi D_1 ga tushib qolish ehtimolligi

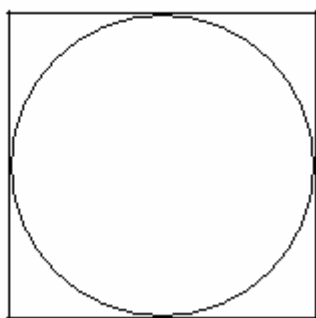
$$P(D_1) = \frac{\text{mes}\{D_1\}}{\text{mes}\{D\}}$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda *mes* (messung –o'lchov) orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

Odatda bu ta'rif ehtimollikning *geometrik ta'rifi* deb yuritiladi.

1-misol. Tomoni 4 ga teng bo'lgan kvadratga aylana ichki chizilgan. Tasodifiy ravishda kvadratning ichiga tashlangan nuqta aylana ichiga tushish ehtimolligini toping (6-rasm).



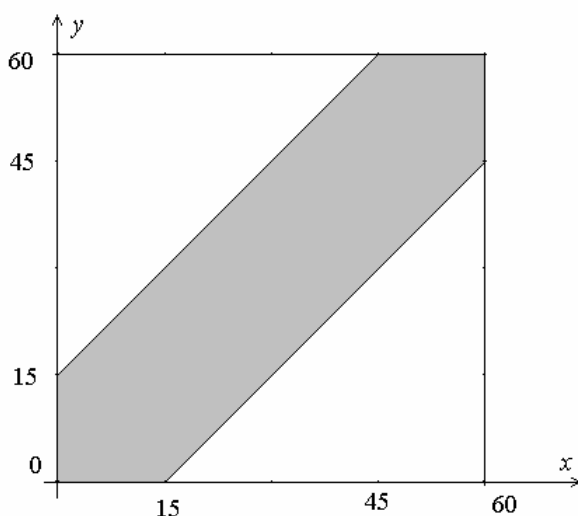
6-rasm

Yechish. D – tomoni 4 ga teng bo‘lgan kvadrat. D_1 – kvadratga ichki chizilgan 2 radiusli aylana. D va D_1 shakllar tekislikda qaralayotganligi uchun o‘lchov sifatida yuza olinadi. U holda

$$P(D_1) = \frac{mes\{D_1\}}{mes\{D\}} = \frac{yuza\{D_1\}}{yuza\{D\}} = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

2-misol. Ikki do‘st soat 9 bilan 10 orasida uchrashmoqchi bo‘lishdi. Birinchi kelgan kishi do‘stini 15 minut davomida kutishi avvaldan shartlashib olindi. Agar bu vaqt mobaynida do‘sti kelmasa, u ketishi mumkin. Agar ular soat 9 bilan 10 orasidagi ixtiyoriy paytda kelishlari mumkin bo‘lib, kelish paytlari ko‘rsatilgan vaqt mobaynida tasodifiy bo‘lsa va o‘zaro kelishib olingan bo‘lmasa, bu ikki do‘stning uchrashish ehtimolligi qanchaga teng?

Yechish. Birinchi kishining kelish vaqt momenti x , ikkinchisniki esa y bo‘lsin. Ularning uchrashishlari uchun $|x - y| \leq 15$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. x va y larni tekislikdagi Dekart koordinatalari sifatida tasvirlaymiz va masshtab birligi deb minutlarni olamiz. Ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar tomonlari 60 bo‘lgan kvadrat nuqtalaridan va uchrashishga qulaylik tug‘diruvchi imkoniyatlar shtrixlangan soha nuqtalaridan iborat (7-rasm). Demak, ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko‘ra, izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan soha yuzasini kvadrat yuzaga bo‘lgan nisbatiga teng: $P = \frac{7}{16}$.



7-rasm

Ehtimollikning klassik ta'rif formulasi dan tajribalar natijalari faqat teng imkoniyatli bo'lgandagina foydalanish mumkin. Ammo amaliyotda esa mumkin bo'lgan hollar teng imkoniyatli bo'lavermasligini yoki bizni qiziqtirayotgan hodisa uchun qulaylik yaratuvchi hollarni aniqlab bo'lmashini ko'rishimiz mumkin. Bunday hollarda tajribani muayyan sharoitda bog'liqsiz ravishda ko'p marta takrorlab, hodisa nisbiy takrorlanishini kuzatib, uning ehtimolligini taqriban aniqlash mumkin bo'ladi.

Tasodifiy hodisa A ning nisbiy chastotasi deb shu hodisaning ro'y bergan tajribalar soni $n(A)$ ning o'tkazilgan tajribalar umumiy soni n ga nisbatiga aytiladi. Tajribalar soni yetarlicha katta $n \rightarrow \infty$ bo'lganida ko'p hodisalarning nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi. Bu qonuniyat XVIII asr boshlarida Yakob Bernulli tomonidan aniqlangan. Unga asosan bog'liq bo'lmagan tajribalar soni cheksiz ortib borganida ($n \rightarrow \infty$) muqarrarlikka yaqin ishonch bilan hodisaning nisbiy chastotasi uning ro'y berish ehtimolligiga yetarlicha yaqin bo'lishi tasdiqlanadi. Bu qonuniyat o'z navbatida ehtimollikning *statistik ta'rif* deb ataladi.

$$\text{Demak, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \text{ yoki yetarlicha katta } n \text{ lar uchun } \frac{n(A)}{n} \approx P(A).$$

Boshqacha qilib aytganda, $P(A)$ sifatida taqriban $\frac{n(A)}{n}$ ni olish mumkin ekan.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Bizni $\{Gerb\} = G$ tushish hodisasi qiziqtirayotgan bo'lsin. Klassik ta'rifga asosan $P(G) = \frac{1}{2}$. Shu natijaga statistik ta'rif bilan ham kelishimiz mumkin. Shu boisdan biz Byuffon va Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasini quyidagi 1-jadvalda keltiramiz. Jadvaldan ko'rinadiki, n ortgani sari $\frac{n(G)}{n}$ soni $\frac{1}{2}$ ga yaqinlashar ekan. Ammo statistik ta'rifning ham amaliyotda noqulaylik tomonlari bor. U tajribalarning soni orttirilishini talab qiladi. Bu esa amaliyotda ko'p vaqt va harajatlarni talab qilishi mumkin.

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, $n(G)$	Nisbiy takrorlanish $\frac{n(G)}{n}$
Byuffon	4040	2048	0,5080
K.Pirson	12000	6019	0,5016
K.Pirson	24000	12012	0,5005

1.4-§. Ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari

Natijalarini oldindan aytib berish mumkin bo'lmagan tajribalarni matematik modellarini ko'rish uchun birinchi navbatda elementar hodisalar fazosi tushunchasi kerak bo'ladi (elementar hodisa tushunchasi boshlang'ich (asosiy) tushuncha sifatida qabul qilinib unga ta'rif berilmaydi). Bu fazo sifatida ixtiyoriy Ω to'plam qabul qilinib, uning elementlari ω lar ($\omega \in \Omega$) elementar hodisalar deb e'lon qilinadi va bizni qiziqtiradigan harqanday natijalar shu elementar hodisalar bilan ifodalanadi.

Odatda eng sodda tajribalarda biz chekli sondagi elementar hodisalar bilan ish ko'ramiz. Masalan, tanga tashlash tajribasi uchun $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ ikki elementar hodisa – tanganing G (gerb) tomoni yoki R (raqam) tomoni bilan tushish hodisalaridan iborat ekanligi bizga ma'lum. Kub tashlash tajribasida esa Ω 6 ta elementar hodisadan iborat. Lekin tanga va kub tashlash shunday tajribalar bilan bog'liqliki, ular uchun chekli sondagi elementar hodisalar bilan chegaralanib bo'lmaydi. Masalan, 1.2-§ dagi misolni olsak, ya'ni tangani birinchi marta R (gerb) tomoni bilan tushishiga qadar tashlash tajribasini ko'rsak, bu tajribaning elementar hodisalari $R, GR, \dots, GG\dots GR$ ketma-ketliklar ko'rinishida bo'lib, ularning soni cheksiz va ular bir-biridan farq qiladi. Tabiiyki, bu tajribani chekli sondagi elementar hodisalar (natijalar) fazosi bilan ifoda etib bo'lmaydi.

Umuman Ω to'plami chekli yoki sanoqli (diskret) bo'lgan holda uning ixtiyoriy qismi (to'plam ostisi) tasodifiy hodisa sifatida qabul qilinadi. Masalan, Ω to'plam n ta elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ lardan iborat bo'lsa, bu fazo (to'plam) bilan bog'liq

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \dots, \{\omega_{n-1}, \omega_n\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

2^n ta tasodifiy hodisalar sistemasi yuzaga keladi.

Yuqorida, 1.2-§ da elementar hodisalar to'plami Ω diskret bo'lgan holda ixtiyoriy tasodifiy hodisa sifatida Ω to'plamning ixtiyoriy qismini olish kerakligini eslatib o'tgan edik, demak \mathfrak{F} hodisalar sistemasi

$$\mathfrak{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}.$$

\mathfrak{F} sistemada esa ehtimollik $P(\cdot)$ konstruktiv ravishda

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

tenglik bilan aniqlangan edi.

Lekin har qanday tajriba uchun hamma mumkin bo'lgan natijalari (elementar hodisalari) sanoqli bo'lmagan tajribalarni oson tassavur qilish mumkin. Masalan, $[t_1, t_2]$ oraliqda tasodifiy nuqtani tanlash tajribasini (ixtiyoriy kishining temperaturasini o'lchashni) ko'rsak, bu tajribaning natijalari kontinuum to'plamni tashkil qiladi, chunki $[t_1, t_2]$ oraliqni ixtiyoriy nuqtasi elementar hodisa sifatida qabul qilinishi mumkin ($\Omega = [t_1, t_2]$). Bu holda Ω ning ixtiyoriy qismini (to'plam ostisini) tasodifiy hodisa deb tushunsak, qo'shimcha chalkashliklar yuzaga keladi va shu sababga ko'ra, hodisalar sifatida Ω ning maxsus to'plam ostilari sinfini ajratib olish bilan bog'lik ehtiyoj yuzaga keladi. Umuman aytganda Ω ixtiyoriy to'plam bo'lganda, u bilan bog'liq hodisalar sistemasini tuzish, Ω diskret bo'lganda uning har qanday qismini hodisa deb tushunish imkoniyatini saqlab qolish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Aytaylik elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to'plam bo'lib, \mathfrak{F} esa Ω ning qism to'plamlaridan tashkil topgan sistema bo'lsin.

1-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, \mathfrak{F} sistema algebra tashkil qiladi deymiz:

$$A_1: \Omega \in \mathfrak{F};$$

$$A_2: \text{Agar } A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \text{ bo'lsa, } A \cup B \in \mathfrak{F}, A \cap B \in \mathfrak{F} \text{ bo'ladi};$$

$$A_3: \text{Agar } A \in \mathfrak{F} \text{ bo'lsa, } \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{F} \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki, A_2 da keltirilgan ikkita munosabatdan bittasini talab qilinishi yetarli bo'ladi, chunki ikkinchisi A_3 ni hisobga olgan holda doim bajariladi.

\mathfrak{F} algebrani ba'zi hollarda halqa deb ham qabul qilinadi, chunki \mathfrak{F} da qo'shish va ko'paytirish amallari mavjudki (to'plamlar nazariyasi ma'nosida), ularga nisbatan \mathfrak{F} yopiq sistema bo'ladi. \mathfrak{F} algebra birlik elementga ega bo'lgan halqa deb tushunilishi mumkin, chunki $\Omega \in \mathfrak{F}$ ekanligidan har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $A\Omega = \Omega A = A$ tenglik o'rinli.

2-Ta'rif. To'plamlar sistemasi \mathfrak{F} σ -algebra tashkil qiladi deymiz, agar ushbu xossa ixtiyoriy to'plamlar ketma-ketligi uchun bajarilsa:

$$A'_2. \text{ Agar har qanday } n \text{ uchun } A_n \in \mathfrak{F} \text{ bo'lsa, u holda}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F} \text{ bo'ladi.}$$

Qayd qilib o'tamizki, A_2 xossadagi kabi A'_2 da ham keltirilgan 2 ta munosabatdan bittasini bajarilishi yetarli, chunki (ikkilik prinsipi)

$$\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n}$$

tenglik o'rinli. \mathfrak{F} – σ -algebra, σ -halqa yoki hodisalarning Borel maydoni deb ham yuritiladi.

Keltirilganlardan kelib chiqadiki, algebra chekli sonda bajariladigan to'plamlarni qo'shish, ko'paytirish, to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallariga nisbatan yopiq bo'lgan to'plamlar sistemasi bo'lar ekan. σ -algebra esa bu amallarni sanoqli sonda bajarilishiga nisbatan yopiq sistemadir.

Har qanday algebra σ -algebra bo'lmaydi. Masalan, $[0,1]$ kesmadagi chekli intervallardan tashkil topgan to'plamlar sistemasi algebra bo'ladi, lekin σ -algebra bo'lmaydi.

Agar Ω to'plam va uning to'plamlaridan tuzilgan algebra yoki σ -algebra \mathfrak{F} berilgan bo'lsa, (Ω, \mathfrak{F}) *o'lchovli fazo* deyiladi. O'lchovli fazo tushunchasi, to'plamlar nazariyasi, o'lchovlar nazariyasi va ehtimolliklar nazariyasida juda muhimdir. Quyidagi teoremaga asoslanib, o'lchovli (Ω, \mathfrak{F}) fazolarni o'rganishda \mathfrak{F} sistema σ -algebra tashkil qilgan holni qo'rish bilan chegaralanib qolish yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Ω to'plamning ixtiyoriy qismini ω -to'plamlar deb ataymiz.

Teorema. \mathfrak{F}_0 ixtiyoriy ω -to'plamlar sistemasi bo'lsin. U holda ω -to'plamlarning shundek σ -algebrasi \mathfrak{F} mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

I. $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$;

II. Agar \mathfrak{F}_1 ω -to'plamlarning σ -algebrasi bo'lib, $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$.

I va II hossalardan kelib chiqadiki, har qanday ω -to'plamlarning sistemasi uchun uni qoplovchi (o'z ichiga oluvchi) minimal σ -algebra \mathfrak{F} mavjud bo'lar ekan. Kelgusida bu σ -algebrani \mathfrak{F}_0 sistema hosil qilgan σ -algebra deymiz va $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{F}_0)$ deb belgilaymiz. σ -algebraning ta'rifidan kelib chiqadiki, $\sigma(\mathfrak{F}_0)$ ning ixtiyoriy ω -to'plami (hodisasi) A , shu \mathfrak{F}_0 sistemasining elementlaridan sanoqli sonda \cup , \cap va to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallari orqali hosil bo'lgan to'plamlardan iborat bo'ladi.

Teoremaning isboti sodda va konstruktiv xarakterga ega. Haqiqatan ham, σ -algebraning ta'rifidan ixtiyoriy sondagi σ -algebralarning ko'paytmasi yana σ -algebra bo'lishi kelib chiqadi. O'z-o'zidan tushunarliki, Ω to'plamning hamma to'plamostilaridan tuzilgan sistema σ -algebra tashkil qiladi va u \mathfrak{F}_{\max} – maksimal

σ -algebra deyiladi. Demak hech bo‘lmaganda bitta σ -algebra (\mathfrak{F}_{\max}) borki, ω -to‘plamlarning ixtiyoriy sistemasi $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{\max}$ bo‘ladi. Oxiridan ko‘rinadiki \mathfrak{F} bo‘sh to‘plam emas va u berilgan \mathfrak{F}_0 sistemani o‘z ichiga oluvchi hamma σ -algebralarning ko‘paytmasidan iborat deb tushunish mumkin (o‘quvchiga mashq sifatida, agar Ω to‘plam sanoqli bo‘lsa, $(\Omega, \mathfrak{F}_{\max})$ asosiy o‘lchovli fazo bo‘lishini tekshirishni taklif etamiz). Keltirilgan mulohazalardan $\sigma(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{F}$ ni II banddagi xossasi kelib chiqadi.

Aytaylik, $\Omega = \mathbb{R}$ – haqiqiy sonlar to‘plami va \mathfrak{F}_0 – barcha intervallar sistemasi bo‘lsin. U holda $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{F}_0)$ Borel σ -algebrasi deyiladi va \mathfrak{B} intervallarni o‘z ichiga oluvchi hamma σ -algebralarning ko‘paytmasi bo‘ladi (\mathfrak{F} hamma intervallarni o‘z ichiga oluvchi minimal σ -algebra). Borel σ -algebrasi \mathfrak{F} ni intervallar ustida sanoqli sonda qo‘shish, ko‘paytirish va to‘ldiruvchi to‘plamlarga o‘tish amallari orqali hosil bo‘lgan to‘plamlar sistemasi deb qarash mumkin va bunday to‘plamlar Borel to‘plamlari deyiladi. Masalan, (a, b) intervallar bilan bir vaqtda bir nuqtali to‘plamlar $\{a\}$ va $(a, b], [a, b], [a, b)$ (a va b lar chekli yoki cheksiz qiymatlarni qabul qilish mumkin) ko‘rinishidagi to‘plam Borel to‘plamlari bo‘ladi, chunki ular uchun

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right), \quad (a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n} \right)$$

munosabatlar o‘rinli.

Ochiq va yopiq to‘plamlarning strukturasidan foydalanib aytishimiz mumkinki, agar \mathfrak{F}_0 \mathbb{R} dagi yoki ochiq, yoki yopiq to‘plamlar sistemasi bo‘lsa, $\sigma(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{B}$ (Borel σ -algebrasi) bo‘ladi va $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ o‘lchovli fazo bo‘ladi. Aytib o‘tilganlardan ko‘rinadiki, Borel σ -algebrasi \mathfrak{B} to‘g‘ri chiziqda juda ham boy to‘plamlar sistemasini tashkil qiladi (Borel to‘plami bo‘lmaydigan to‘plamlarga misol keltirish qiyin).

Agar n -o'lchovli Evklid fazosi \mathbb{R}^n ni ko'rsak, undagi Borel to'plamlari sistemasi \mathfrak{B}^n n -o'lchovli to'g'ri to'rtburchaklar (intervallar), sferalar sistemasi hosil qilgan σ -algebradan iborat bo'ladi.

Umuman ehtimolliklar bilan bog'liq biror masalani yechishda unga mos kelgan tajriba uchun (Ω, \mathfrak{F}) o'lchovli fazoni qabul qilish kerak. Bunda Ω ko'rilayotgan tajribaning elementar hodisalar (natijalar) to'plami, \mathfrak{F} shu tajriba bilan bog'liq hodisalar σ -algebrasi. \mathfrak{F} ga kirmaydigan Ω ning barcha to'plamostilari hodisalar hisoblanmaydilar. Ko'pincha \mathfrak{F} sifatida konkret ma'noga ega bo'lgan to'plamlar sistemasi hosil qilgan σ -algebra qabul qilinadi.

Umuman, agar

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

va har xil i va j lar uchun $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ω -to'plamlar sistemasi Ω to'plaminihg bo'linishi deyiladi.

Ko'p hollarda

$$\mathfrak{F} = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$$

deb olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu yerda qanday bo'laklash sistemasini qabul qilish qo'yilgan masalaning ma'nosiga bog'liq.

Endi (Ω, \mathfrak{F}) o'lchovli fazoda ehtimollik tushunchasi qanday kiritilganini eslatib o'tamiz.

3-ta'rif. (Ω, \mathfrak{F}) o'lchovli fazodagi ehtimollik $P(\cdot)$, \mathfrak{F} σ -algebraning to'plamlarida aniqlangan sonli funksiya bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

P_1 : Har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $P(A) \geq 0$.

P_2 : $P(\Omega) = 1$.

P_3 : Agar \mathfrak{F} ga tegishli hodisalar ketma-ketligi $\{A_n, n \geq 1\}$ uchun $A_i \cdot A_j = A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) bo'lsa,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

P_3 xossa ehtimollikning σ -additivlik xossasi deyiladi.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uchlik *ehtimollik fazosi* deyiladi.

Ehtimollik P o'lchovli (Ω, \mathfrak{F}) fazodagi taqsimot yoki yana soddaroq ravishda, Ω dagi taqsimot deb ham yuritiladi.

Shunday qilib, ehtimollik fazosi berilgan deganda, o'lchovli fazoda sanoqli additiv, manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va hamma elementlar hodisalar to'plamida 1 ga teng bo'lgan o'lchovni berish tushuniladi.

\mathfrak{F} σ -algebrani va unda P ehtimollikni aniqlaydigan $A_1, A'_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ aksiomalar birgalikda hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etadi va ular XX-asrning mashhur matematigi A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan.

Mantiqiy nuqtai nazardan, keltirilgan aksiomalar to'la bo'lmagan, qarama-qarshiliksiz aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimollik fazosini ko'rish tasodifiy tajribalarning matematik modelini tuzishda asosiy rol o'ynaydi.

Umuman «Ehtimollik o'zi nima?» deb ataladigan munozara ancha katta tarixga ega. Bu tushuncha o'rganilayotgan hodisaning bevosita zarurligi va tasodifiyligi bilan bog'liq, faqatgina matematika nuqtai nazaridan emas, balki falsafaviy xarakterdagi qiyinchiliklarga ham olib keladi. Bu munozaraning yuzaga kelishi va rivojlanishi mashhur matematiklar E.Borel, R.Fon Mizes, S.N. Bernshteyn, A.N.Kolmogorovlar nomi bilan bog'liq. Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ni aniqlovchi Kolmogorov aksiomalari “ehtimollikning” matematik ma'nosini “sabab va zaruriyat” kabi falsafiy tushunchalardan ajratib turadi.

1.5-§. Ehtimollikning xossalari

Quyida biz ehtimollikning juda ko'p qo'llaniladigan xossalari keltiramiz.

1. $P(\emptyset)=0$.

Isbot: Bu natija $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ tenglikdan va 2, 3 aksiomalardan kelib chiqadi:

$$P(\emptyset \cup \Omega) = P(\Omega),$$

$$P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\Omega),$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

$$2. P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Isbot: Bu xossaning isboti uchun $A \cup \bar{A} = \Omega$ va $A \cap \bar{A} = \emptyset$ tengliklardan foydalanamiz. Haqiqatan ham, bu tengliklarga asosan

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega),$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

$$3. \text{ Agar } A \subset B \text{ bo'lsa, u holda } P(A) \leq P(B).$$

Isbot: Ravshanki, $B = A \cup \bar{A}B$ va

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$$

tenglik o'rinli. Bunda $P(\bar{A}B) \geq 0$ ekanligini e'tiborga olsak, isbotlash talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi.

$$4. 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Isbot: Bu xossaning isboti 3-xossadan va 1, 2 aksiomalardan kelib chiqadi.

$$5. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Isbot: Quyidagi $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$ tenglikni yozish mumkin,

demak

$$P(A \cup B) = P(A) + P([B \setminus (A \cap B)]) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$6. P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Isbot: 5-xossadan kelib chiqadi.

1. Ixtiyoriy A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar uchun

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

tenglik bajariladi. Bu munosabat Bul formulasi deyiladi.

Isbot: Matematik induksiya metodi bo'yicha isbotlaymiz. $k = 2$ uchun bu xossa o'rinli, chunki 5-xossa bo'yicha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Faraz qilaylik, $k = n - 1$ uchun bu xossa o'rinli bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy A_1, A_2, \dots, A_{n-1} hodisa uchun

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

tenglik bajariladi. U holda $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ belgilashni kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(A_n B).$$

Endi

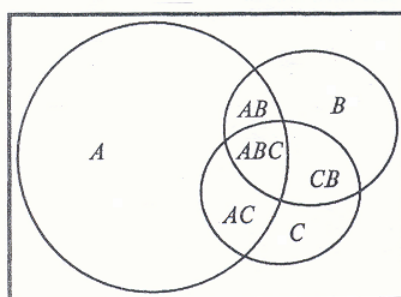
$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \quad \text{va} \quad P(A_n B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i A_n)\right)$$

munosabatlardan $k = n$ uchun xossaning bajarilishi kelib chiqadi.

Uchta hodisa uchun Bul formulasi quyidagi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

ko'rinishda bo'lib, uni ushbu diagramma (8-rasm) orqali izohlash mumkin:



8-rasm

1.6-§. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi

Misollardan boshlaylik. Tajribamiz simmetrik tangani 3 marta tashlashdan iborat bo'lsin. "Gerb" tomoni bir marta tushish ehtimolligi klassik sxemada $\frac{3}{8}$ ga teng. (Elementar hodisalar umumiy soni sakkizta; uchta elementar hodisadan (GRR), (RGR), (RRG) birortasi ro'y berishi mumkin.) Bu hodisani A orqali belgilaylik. Endi biz B hodisa $B = \{\text{tanga «Gerb» tomoni bilan toq marta tushadi}\}$ ro'y berganligi haqida qo'shimcha ma'lumotga ega bo'laylik. Bu qo'shimcha ma'lumot A hodisaning ehtimolligiga qanday ta'sir qiladi? B hodisa 4 ta elementar hodisadan iborat, A hodisa esa 3 ta B hodisaga tegishli elementar hodisadan iborat. Tabiiyki, endi A hodisaning yangi ehtimolligi $\frac{3}{4}$ ga teng deb olish to'g'ri bo'ladi.

Bu yangi ehtimollik – shartli ehtimollik bo'lib, u A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan sharti ostidagi ehtimollikni bildiradi.

Yana bir misol. Natijalari n ta bo'lgan klassik sxemani ko'raylik. Agar A hodisa r ta elementar hodisadan, B hodisa m ta elementar hodisadan, AB hodisa esa k ta elementar hodisadan iborat bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan misolda yuritilgan fikrlar asosida A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan sharti ostidagi ehtimolligini

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

deb qabul qilinadi.

Endi umumiyroq ta'rifga o'tish mumkin. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimollik fazosi berilgan bo'lib, A va B ixtiyoriy hodisalar bo'lsin ($A, B \in \mathfrak{F}$).

1-ta'rif. A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan sharti ostidagi ehtimolligi deb, $P(B) > 0$ bo'lgan holda $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ formula bilan aniqlanadigan ehtimollikga aytamiz.

Shartli ehtimolliklar quyidagi hossalarga ega:

$$P(B/B) = 1, P(\Omega/B) = 1;$$

$$P(\emptyset/B) = 0;$$

agar $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda $P(A/B) = 1$;

agar $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A_1 \cap A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$.

Yuqoridagi xossalari shartli ehtimollikning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

Keltirilgan xossalardan kelib chiqadiki, $P_B(\cdot) = P(\cdot/B)$ ehtimollik (B, \mathfrak{F}_B, P_B) fazoda aniqlangan ehtimollik bo'lib, bu yerda

$$\mathfrak{F}_B = \mathfrak{F} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathfrak{F}\}.$$

(B, \mathfrak{F}_B, P_B) ehtimollik fazosini birlamchi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ fazoning "qisqartirilgan" varianti deb tushuniladi.

Shartli ehtimolliklar hodisalarning quyidagi bog'liqsizlik tushunchasini oydinlashtiradi.

2-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ tenglik bajarilsa, A va B o'zaro bog'liq bo'magan (bog'liqsiz) hodisalar deyiladi. Aks holda bu hodisalar bog'liq deyiladi.

Bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

1) A va B hodisalar o'zaro bog'liqsiz bo'lishi uchun $P(A/B) = P(B)$ tenglik bajarilishi yetarli va zaruriy shartdir.

2) Agar A va B o'zaro bog'liqsiz hodisalar bo'lsa, u holda \bar{A} va B , A va \bar{B} hamda \bar{A} va \bar{B} hodisalar ham mos ravishda o'zaro bog'liqsiz bo'ladi.

Keltirilgan da'volarni \bar{A} va B hodisalar uchun isbotlash yetarlidir. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B) &= P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(B). \end{aligned}$$

3) A va B_1 hamda A va B_2 hodisalar o'zaro bog'liqsiz bo'lib, B_1 va B_2 birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsin ($B_1 B_2 = \emptyset$). U holda A va $B_1 \cup B_2$ o'zaro bog'liqsiz hodisalar bo'ladi.

Bu fakti ushbu

$$P(A(B_1 \cup B_2)) = P(AB_1 \cup AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) = \\ = P(A)(P(B_1) + P(B_2)) = P(A) \cdot P(B_1 \cup B_2).$$

tengliklar isbotlaydi.

Shartli ehtimollikning ta'rifidan quyidagi

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B), \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Bu tengliklar yordamida ikkita bog'liq bo'lgan hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligini hisoblash mumkin. Bu ehtimollik hodisalardan birining ehtimolligini ikkinchisining birinchisi ro'y berdi degan shart ostidagi ehtimolligiga ko'paytmasiga teng.

Demak, biz amalda bog'liq bo'lgan hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasini keltirdik.

Bu teoremani quyidagicha umumlashtirish mumkin. Bir qancha bog'liq bo'lgan hodisalarning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligi uchun

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$$

formula o'rinli. Ravshanki, o'ng tomondagi ko'paytma mumkin bo'lgan ko'paytmalardan birinasidir xolos.

O'zaro bog'liqsiz hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi 2-ta'rifdan bevosita kelib chiqadi va u quyidagicha:

Ikkita bog'liqsiz hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Natija. O'zaro bog'liq bo'lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

3-ta'rif. Agar A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar berilgan bo'lib, ixtiyoriy k ($2 \leq k \leq n$) va $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi butun sonlar uchun

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

tengliklar sistemasi o‘rinli bo‘lsa, A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar birgalikda *o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan (bog‘liqsiz) hodisalar* deyiladi. Aks holda bu hodisalarga *birgalikda bog‘liq* deb aytiladi.

Hodisalarning juft-jufti bilan bog‘liqsizligidan ularning birgalikda bog‘liqsizligi kelib chiqmaydi. Bunga quyidagi Bernshteyn misolini keltirish mumkin.

Misol. Tajriba tekislikka tetraedrni tashlashdan iborat bo‘lsin. Tetraedrning birinchi tomoni ko‘k, ikkinchi tomoni yashil, uchinchi tomoni qizil, to‘rtinchi tomoni esa har uchala rangga, ya’ni ko‘k, yashil va qizil ranglarga bo‘yalgan bo‘lsin.

A hodisa tetraedrning tekislikka ko‘k rangli tomoni bilan tushish, B hodisa tekislikka yashil rangli tomoni bilan tushish, C hodisa esa tekislikka qizil rangli tomoni bilan tushish hodisalari bo‘lsin. Tushunarliki, agar tetraedr tekislikka to‘rtinchi tomoni (har uchala rangga bo‘yalgan tomoni) bilan tushsa, u holda A, B va C hodisalar uchulasi bir vaqtda sodir bo‘ladi. Bu hodisalarning ehtimolliklarini klassik ta’rif yordamida hisoblaymiz:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Endi

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)$$

bo‘lganligi uchun bu hodisalar juft-jufti bilan o‘zaro bog‘liqsiz hodisalardir. Endi ularning uchulasini ko‘paytmasini ko‘ramiz. Tushunarliki, $P(ABC) = \frac{1}{4}$. Ammo

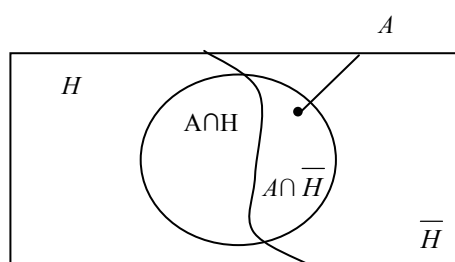
$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8} \neq P(ABC)$. Demak, A, B, C hodisalar birgalikda bog‘liqsiz bo‘lmas ekan.

1.7-§. To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

Oddiy holdan boshlaylik. A va H ixtiyoriy hodisalar bo‘lsin. A hodisaning ehtimolligi A va H hodisalar o‘zaro qanday munosabatda bo‘lishidan qat’iy nazar hamma vaqt A va H , hamda A va \bar{H} hodisalarning bir vaqtda ro‘y berish ehtimolliklari yig‘indisiga teng:

$$P(A) = P(AH) + P(A\bar{H}).$$

Buni quyidagi Venn diagrammasida ifodalaymiz: (9-rasm).



9-rasm

A hodisani qismlarga ajratish H va \bar{H} hodisalarga bog‘liq. H va \bar{H} hodisalar – A hodisani ikkita o‘zaro birgalikda bo‘lmagan qism to‘plamlarga ajratish usuli.

A hodisa yoki H hodisa bilan yoki \bar{H} hodisa bilan ro‘y berishi mumkin, ammo ikkalasi bilan bir vaqtda ro‘y bermaydi.

Endi murakkabroq holga o‘tamiz.

Faraz qilaylik, A hodisa n ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan H_1, H_2, \dots, H_n hodisalarning bittasi bilangina ro‘y beradigan bo‘lib,

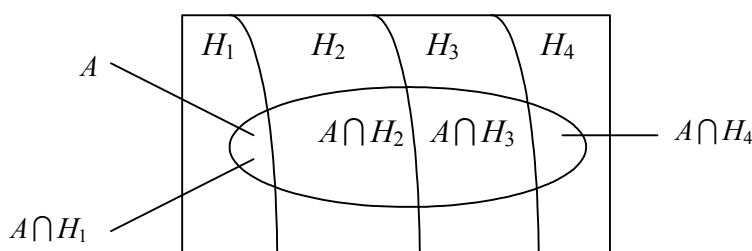
$$\left(H_i H_j = \emptyset, i \neq j; A \subset \bigcup_{j=1}^n H_j \right), P(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n \text{ bo‘lsin.}$$

H_1, H_2, \dots, H_n hodisalarning qaysi biri ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagani uchun ular gipotezalar deb ataladi.

Bu holda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi quyidagi *to'la ehtimollik* deb nomlanuvchi formuladan topiladi:

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(H_j) \cdot P(A/H_j).$$

Isbot. Keltirilgan shartlardan $A = \bigcup_{j=1}^n H_j A$ tenglik kelib chiqadi.



10-rasm

A hodisa to'rtta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan H_1, H_2, H_3, H_4 hodisalarning bittasi bilangina ro'y beradi.

$H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmaydi, chunki H_1, H_2, \dots, H_n hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas. Shuning uchun

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1 A \cup H_2 A \cup \dots \cup H_n A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots + P(H_n A) = \\ &= \sum_{j=1}^n P(H_j A). \end{aligned}$$

Har qanday j uchun ($j=1, 2, \dots, n$) H_j va A bog'liq bo'lgan hodisalardir. Bu hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasini qo'llab to'la ehtimollik formulasiga kelamiz:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

1-masala. O'qituvchi nazoratga 15 ta bilet tayyorlagan. Biletida ikkita savol bo'lib, savollar takrorlanmaydi. Nazorat topshirish uchun o'zining biletidagi ikkita savolga yoki bo'lmasa o'z biletining bitta savoliga va bitta qo'shimcha savolga

javob berish yetarli. Agar talaba 20 ta savolga javob bilsa, uning nazoratni topshirish ehtimolligini toping.

Yechish. Bizda A hodisa quyidagicha: $A = \{\text{talaba nazoratni topshiradi}\}$. Bu hodisa quyidagi H_1 yoki H_2 hodisa bilan bir vaqtda ro'y berishi mumkin:

$H_1 = \{\text{talaba biletdagi ikkita savolning javobini biladi}\}$,

$H_2 = \{\text{talaba biletdagi ikkita savoldan bittasining javobini biladi}\}$.

Bu hodisalar to'la guruxni tashkil qilmaydi, chunki $H_3 = \{\text{talaba biletdagi ikkita savolga javob bilmaydi}\}$ hodisasi ham mavjud va $P(A/H_3)$ shartli ehtimollik nolga teng bo'ladi.

H_1 va H_2 gipotezalar ehtimolliklarni topamiz. Masalaning shartiga ko'ra

$$P(H_1) = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2} = \frac{38}{87}, \quad P(H_2) = \frac{C_{20}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^2} = \frac{40}{87}.$$

Endi shartli ehtimolliklarni topamiz. Tushunarliki, H_1 hodisa ro'y bersa talaba nazoratni topshiradi va $P(A/H_1)$ ehtimolligi 1 ga teng. H_2 hodisa ro'y bergan holda talaba qolgan 28 ta savoldan 19 gasiga javob biladi va u nazorat topshirish uchun qo'shimcha savolning javobini bilishi kerak. Shuning uchun $P(A/H_2) = \frac{19}{28}$ bo'ladi.

A hodisaning ehtimolligi to'la ehtimollik formulasidan topamiz:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{38}{87} \cdot 1 + \frac{40}{87} \cdot \frac{19}{28} = \frac{152}{203} \approx 0,75.$$

Endi bu misoldan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz:

2-masala. Guruxda 20 ta talaba bo'lib, ulardan 4 tasi "a'lo", 6 tasi "yaxshi" va 10 tasi "qoniqarli" o'qiydigan talaba bo'lsin. Nazoratga tayyorlangan 15 ta biletda 2 tadan savol bo'lib, savollar takrorlanmaydi. Nazorat topshirish uchun yoki o'zining biletidagi 2 ta savolga yoki bo'lmasa o'z biletining 1 ta savoliga va 1 ta qo'shimcha savolga javob berish yetarli. "A'lo" o'qiydigan talaba hamma 30 ta savolga javob biladi, "yaxshi" o'qiydigan talaba 20 ta savolga, "qoniqarli" o'qiydigan talaba esa 15 ta savolga javob bera oladi. Tavakkaliga tanlangan talabaning nazorat topshirish ehtimolligini toping.

Yechish. Bizda A hodisa quyidagicha:

$A = \{\text{tavakkaliga tanlangan talaba nazoratni topshiradi}\}$

Gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$H_1 = \{\text{tavakkaliga tanlangan talaba – “a’lochi”}\},$

$H_2 = \{\text{tavakkaliga tanlangan talaba yaxshi o’qiydi}\},$

$H_3 = \{\text{tavakkaliga tanlangan talaba qoniqarli o’qiydi}\}.$

Masalaning shartiga ko’ra $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,3$ va $P(H_3) = 0,5$ bo’ladi.

Endi $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $P(A/H_3)$ shartli ehtimolliklarni topamiz.

Tushunarliki, $P(A/H_1) = 1$, chunki a’lochi talaba hamma savolga javob biladi.

1-masalaga ko’ra yaxshi o’qiydigan talaba nazoratni topshirish ehtimolligi, ya’ni $P(A/H_2)$ sharti ehtimolligi $P(A/H_2) = \frac{152}{203}$.

Xuddi shunday $P(A/H_3)$ shartli ehtimollik, ya’ni qoniqarli o’qiydigan talaba nazoratni topshirishi ehtimolligini topamiz:

$$P(A/H_3) = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2} \cdot 1 + \frac{C_{15}^1 \cdot C_{15}^1}{C_{30}^2} \cdot \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

To’la ehtimollik formulasi bo’yicha A hodisaning $P(A)$ ehtimolligini topamiz:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = \\ &= 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot \frac{152}{203} + 0,5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{228}{1015} + \frac{1}{4} = \frac{2739}{4060} \approx 0,67. \end{aligned}$$

Endi biz to’la ehtimollik formulasidan foydalanib, Bayes formulasini keltirib chiqaramiz. A va H_1, H_2, \dots, H_n hodisalar paragraf boshidagi shartlarni qanoatlantirsin. Agar A hodisa ro’y bersa, u holda H_m gipotezaning shartli ehtimolligi quyidagi Bayes formulasidan topiladi:

$$P(H_m/A) = \frac{P(H_m) \cdot P(A/H_m)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)},$$

bu yerda $m = 1, 2, \dots, n$.

Bu formulani quyidagi shartli ehtimollik ta'rifidan keltirib chiqarish mumkin:

$$P(H_m / A) = \frac{P(H_m A)}{P(A)}.$$

Bog'liq hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasidan foydalanib oxirgi kasrning suratini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$P(H_m A) = P(H_m) \cdot P(A / H_m).$$

Bu kasrning maxrajidagi A hodisaning $P(A)$ ehtimolligi to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

$P(H_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ehtimolliklar *a priori* (sinovdan oldingi) ehtimolliklar, $P(A / H_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – *a posterior* (sinovdan keyingi) ehtimolliklar deyiladi.

3-masala. Uchta mergan nishonga bittadan o'q uzadi. Birinchi merganning o'qi nishonga 0,6 ehtimollik bilan, ikkinchi merganning o'qi nishonga 0,8 ehtimollik bilan, uchinchi merganning o'qi esa 0,3 ehtimollik bilan tegadi. Uchala mergan o'q uzgandan so'ng nishonga ikkita o'q tekkanligi ma'lum bo'lsa, birinchi merganning o'qi nishonga tegish ehtimolligini toping.

Yechish. Tajriba o'tkazishdan oldin quyidagi gipotezalarni qo'yamiz.

$B_1 = \{\text{birinchi mergan otgan o'q nishonga tegadi}\},$

$B_2 = \{\text{birinchi mergan otgan o'q nishonga tegmadi}\}.$

Bu gipotezalarning ehtimolliklari

$$P(B_1) = 0,6, \quad P(B_2) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

A hodisa quyidagicha bo'ladi:

$$A = \{\text{uchta otilgan o'qdan ikkitasi nishonga tegdi}\}.$$

Bu hodisani B_1 va B_2 gipotezalar ostidagi shartli ehtimolliklarini topamiz. B_1 hodisa ro'y berganda qolgan ikkita mergan ichidan faqat bittasining o'qi nishonga tegadi. Shuning uchun

$$P(A/B_1) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,72.$$

Tushunarliki, $P(A/B_2)$ shartli ehtimollik $0,8 \cdot 0,3$ ko'paytmasiga, ya'ni $0,24$ ga teng.

Endi so'ralgan $P(B_1/A)$ ehtimollikni Bayes formulasi bo'yicha topamiz:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,72}{0,6 \cdot 0,72 + 0,4 \cdot 0,24} = \frac{27}{33}$$

O'z-o'zini tekshirish savollari

1. Ehtimolliklar nazariyasida «hodisa» deyilganda nimani tushuniladi?
2. Ehtimolliklar nazariyasini kelib chiqishi tarixini qisqacha gapirib bering.

3. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi?
4. Tasodifiy hodisalar deb nimaga aytiladi? Tasodifiy hodisalar qanday belgilanadi?

5. Elementar hodisa nima va u qanday belgilanadi?
6. Elementar hodisalarga misollar keltiring.
7. Muqarrar hodisa nima va u qanday belgilanadi?
8. Mumkin bo'lmagan hodisa nima va u qanday belgilanadi?
9. O'zaro qarama-qarshi hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?

Qarama-qarshi hodisalarga misollar keltiring.

10. Qachon A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va u qanday belgilanadi?
11. Teng hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
12. A va B hodisalarning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
13. A va B hodisalar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
14. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
15. Hodisalarning to'la guruxi deb nimaga aytiladi?
16. Kombinatorikaning asosiy formulalarini aytib bering.

17. Ehtimollikning klassik ta'rifini aytib bering.
18. Klassik ehtimollikning asosiy xossalari qanday?
19. Biror A hodisaning ma'lum ehtimolligi bo'yicha \bar{A} qarama-qarshi hodisaning ehtimolligi qanday topiladi?
20. Qanday hodisalar bog'liq hodisalar deyiladi?
21. Qanday hodisalar bog'liqsiz hodisalar deyiladi?
22. Shartli ehtimollik nima?
23. "To'la ehtimollik" nima? To'la ehtimollik formulasi qaysi hollarda tadbiq qilinadi?
24. Bayes formulasi nimaga xizmat qiladi? U qaysi hollarda tadbiq qilinishi mumkin?
25. Nima uchun ehtimollikning klassik ta'rifi yetarli emas?
26. Ehtimollikning geometrik ta'rifi nima? Uning qo'llanishiga doir misollar keltiring.
27. Ehtimollikning statistik ta'rifi nima? Fizikadan va tabiatshunoslikning boshqa sohalaridan statistik qonuniyatlarga misollar keltiring.
28. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi?
29. Algebra deb nimaga aytiladi?
30. σ -algebra deb nimaga aytiladi?
31. Kolmogorov aksiomalarini aytib bering.

Misol va masalalar

1) O'yin kubigi ikki marta tashlanadi. Quyidagi hodisalarni aniqlang: $A = \{\text{tushgan raqamlar yig'indisi 10 ga teng}\}$; $B = \{\text{kamida bir marta 6 raqam tushdi}\}$. A , B va AB hodisalarning ehtimolliklarini toping.

$$\text{Javob: } A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\},$$

$$B = \{(i, 6), (6, i); i, i_2 = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 6), (2, 6), \dots, (6, 6), (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 5)\};$$

$$AB = \{(4, 6), (6, 4)\}; \quad P(A) = \frac{1}{12}; \quad P(B) = \frac{11}{36}; \quad P(AB) = \frac{1}{18}.$$

2) Idishda 4 ta qora va 6 ta oq shar bor. Qaytarishsiz sxemada tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Elementar hodisalar fazosini quring va har bitta elementar hodisa ehtimolligini toping.

Javob: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}; \omega_1 = \{\text{oq, oq, oq}\},$
 $\omega_2 = \{\text{oq, oq, qora}\}, \omega_3 = \{\text{oq, qora, oq}\}, \omega_4 = \{\text{qora, oq, oq}\}, \omega_5 = \{\text{oq, qora, qora}\},$
 $\omega_6 = \{\text{qora, oq, qora}\}, \omega_7 = \{\text{qora, qora, oq}\}, \omega_8 = \{\text{qora, qora, qora}\};$
 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{6}, P(\omega_5) = P(\omega_6) = P(\omega_7) = \frac{1}{10}, P(\omega_8) = \frac{1}{30}.$

3) O'yin kubigi birinchi bor "olti" raqam tushguncha tashlanadi. Elementar hodisalar fazosini quring. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

$A = \{\text{"olti" birinchi ikki tashlashda tushdi}\}; B = \{\text{tashlashlar soni toq bo'lgan}\}.$

Javob: $\Omega = \{(i_1, \dots, i_{k-1}, 6) : i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k \geq 1\};$

$A = \{(6), (i_1, 6) : i_1 = \overline{1, 5}\}, P(A) = \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{11}{36};$

$B = \{(i_1, \dots, i_{2k}, 6) : i_j = \overline{1, 5}, j = \overline{1, 2k}, k \geq 1\}, P(B) = \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6^3} + 5^4 \cdot \frac{1}{6^5} + \dots = \frac{6}{11}.$

4) Idishda 3 ta oq va 2 ta qora shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olindi. Bu sharlar har xil rangda bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{8}.$

5) Idishda 4 ta oq va 6 ta qora shar bor. Idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, keyin u idishga qaytariladi. So'ng idishdan tasodifan yana bitta shar olinadi. Olingan sharlar: 1) har xil rangda, 2) bir xil rangda bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: 1) 0,48; 2) 0,52.

6) O'yin kubigi bir marta tashlanadi. Agar tushgan raqam toq ekanligi ma'lum bo'lsa, bu raqamning tub ekanligi ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } \frac{2}{3}.$$

7) (Kavaler de Mere masalasi). Uchta o'yin kubigi tashlanadi. Quyidagi hodisalardan qaysining ehtimolligi ko'proq: $A = \{\text{tushgan raqamlar yig'indisi 11 ga teng}\}$; $B = \{\text{tushgan raqamlar yig'indisi 12 ga teng}\}$?

$$\text{Javob: } P(A) = \frac{27}{216} > P(B) = \frac{25}{216}.$$

8) Uch olim bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ma'lum bir fizik kattalikni tekshirib, o'lchov natijalarni yozib bormoqdalar. Birinchi olimning o'lchov natijasida xatoga yo'l qo'yish ehtimolligi 0,1 ga, ikkinchisi uchun 0,15 ga, uchinchisi uchun esa 0,2 ga teng. Bir martadan o'lchaganda hech bo'lmaganda bitta olimning xatoga yo'l qo'yish ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } 0,388.$$

9) Strategik ahamiyatga ega ko'priknin buzilishi uchun unga bitta bomba tushishi kifoya. Agar ko'priikka unga tegish ehtimolligi mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo'lgan to'rtta bomba tashlangan bo'lsa, ko'priknin buzilish ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } 0,9496$$

10) Statistika ma'lumotlar bo'yicha matematika fakulteti talabalarining 60 foizi sport bilan shug'ullanadi, 40 foizi ilmiy ish bilan faol shug'ullanadi va 20 foizi ham sport ham ilmiy ish bilan shug'ullanadi. Fakultet ro'yxatlaridan tavakkaliga bitta talaba tanlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping: $A = \{\text{tanlangan talaba qayd etilgan mashg'ulotlarning kamida bittasi bilan shug'ullanadi}\}$; $B = \{\text{tanlangan talaba faqat sport bilan shug'ullanadi}\}$; $C = \{\text{tanlangan talaba faqat bitta mashg'ulot bilan shug'ullanadi}\}$.

Javob: $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$.

11) Ro'yxatdagi 100 ta talabadan 50 tasi nemis tili, 40 tasi fransuz tili va 35 tasi ingliz tilini biladilar. Ingliz va fransuz tilini 20 ta talaba, ingliz va nemis tilini – 8 ta, hamda fransuz va nemis tilini – 10 tasi biladi. Hamma uch tilni 5ta talaba biladi. Ro'yxatdan tavakkaliga bitta talaba olingan. Quyidagi hodisalarni qaraymiz: $D = \{\text{tanlangan talaba nemis tilini biladi}\}$, $E = \{\text{tanlangan talaba ingliz tilini biladi}\}$, $F = \{\text{tanlangan talaba fransuz tilini biladi}\}$. 1) Barcha bog'liqsiz hodisalar juftliklarini toping. 2) D , E va F hodisalar o'zaro bog'liqsizmi?

Javob: 1) E va F , 2) yo'q.

12) 4 ta bir xil idish bor. Uchta idishning har birida 2 ta oq va 1 ta qora shar, to'rtinchisida esa 1 ta qora va 1 ta oq shar bor. Tavakkaliga olingan idishdan tasodifan shar olinadi. Bu shar oq bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{8}$.

13) 4 ta bir hil idish bor. Uchta idishning har birida 2 ta oq va 1 ta qora shar, to'rtinchisida esa 2 ta qora va 2 ta oq shar bor. Tavakkaliga olingan idishdan tasodifan shar olindi. Agar bu shar qora bo'lsa, to'rtinchi idishdan olingan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{1}{3}$.

14) Ikkita mergan o'q uzishmoqda. 10 marta o'q uzishda birinchi mergan 5 marta nishonga tekkizadi, ikkinchi mergan esa 8 ta marta tekkiza oladi. Navbat aniqlash uchun ular tanga tashlaydi. Kuzatuvchi esa otish qoidasini bilib, lekin kim o'q uzishni bilmaydi. U o'q nishonga tekkanligini ko'rdi. Bu o'qni birinchi mergan otgan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{13}$.

15) Ikki mergan bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda nishonga qarab bir martadan o‘q otishdi. Nishonga tekkizish ehtimolligi birinchisi uchun 0,8; ikkinchisi uchun esa 0,4 ga teng. O‘q uzishlardan so‘ng nishonga bitta o‘q tekkani aniqlangan bo‘lsa, uni birinchi mergan tekkizganligining ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{2}{3}$.

I-bob bo‘yicha test topshiriqlari

1. Bitta o‘yin kubigi tashlanadi. Kubikning tushgan yoqlaridagi ochkolar juft son bo‘lish ehtimolligini toping.

- a) $3/7$
- b) $1/6$
- c) $1/2$
- d) $1/3$

2. Ikkita o‘yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig‘indisi 6 ga teng bo‘lishi ehtimolligini toping.

- A) $1/36$
- B) $5/6$
- C) $5/36$
- D) $1/5$

3. Ikkita o‘yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig‘indisi 5 ga teng bo‘lishi ehtimolligini toping.

- A) $4/36$
- B) $1/36$

- C) 4/6
- D) 5/36

4. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi 6 ga ko'paytmasi 5 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

- A) 1/36
- B) 2/5
- C) 5/6
- D) 1/18

5. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga ko'paytmasi 12 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

- A) 2/36
- B) 1/16
- C) 1/36
- D) 6/5

6. Quyidagi xodisaning ehtimolligi qaysi ta'rifga to'g'ri keladi?

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad |A| - \text{hodisaning ro'y berishiga qulaylik ko'rsatuvchi elementar}$$

natijalar soni; $|\Omega|$ – tajribaning mumkin bo'lgan elementar natijalarining jami soni.

- A) Klassik ta'rifga
- B) Statistik ta'rifga
- C) Nisbiy chastota ta'rifga
- D) Geometrik ta'rifga.

7. Tanga bir marta tashlanadi. "Gerb"li tomon tushish ehtimolligini toping.

- A) 1/3
- B) 1

- C) 2
- D) 0,5

8. Tanga ikki marta tashlanadi. Ikki marta “Raqam”li tomon tushish ehtimolligini toping.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $\frac{2}{4}$
- D) 1

9. Tanga ikki marta tashlanadi. Hech bo‘lmaganda bir marta “Raqam”li tomon tushish ehtimolligini toping.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) $\frac{2}{4}$
- C) 1
- D) $\frac{1}{4}$

10. Tomoni 2 ga teng kvadratga aylana ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanaga tushish ehtimolligini toping.

- A) $\frac{\pi}{4}$
- B) $\frac{\pi}{2}$
- C) $\frac{\pi}{3}$
- D) $\frac{\pi}{6}$

11. Guruxda 12 ta talaba bo‘lib, ulardan 8 tasi a’lochi. Ro‘yxat bo‘yicha tavakkaliga 9 ta talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 ta a’lochi talaba bo‘lish ehtimolligini toping.

- A) $\frac{14}{55}$
- B) $\frac{5}{55}$
- C) $\frac{5}{12}$

D) $5/9$

12. Yashikda 50 ta bir xil detal bor, ulardan 45 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 1 ta detal olinadi. Olingan detal bo‘yalmagan bo‘lish ehtimolligini toping.

A) 0,5

B) 0,1

C) 0,4

D) 0,9

13. Qopda 45 ta qora va 5 ta oq shar bor. Tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan shar oq bo‘lish ehtimolligini toping.

A) 0,5

B) 0,3

C) 0,1

D) 0,2

14. Yashikda 50 ta bir xil detal bor, ulardan 45 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 1 ta detal olinadi. Olingan detal bo‘yalgan bo‘lish ehtimolligini toping.

A) 0,5

B) 0,1

C) 0,4

D) 0,9

17. Oltita bir xil kartochkaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: *a, l, m, p, c, o* Kartochkalar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta kartochkada “*olma*” so‘zini o‘qish mumkinligi ehtimolligini toping.

A) $1/300$

B) $1/360$

C) $1/60$

D) 4/6

18. Quyidagi keltirilgan formulalardan qaysi biri to'la ehtimollik formulasi?

A) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

B) $P(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|}$

C) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)$

D) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i/A)P(B)$

19. Quyidagi keltirilgan formulalardan qaysi biri Bayes formulasi?

A) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

B) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)$

C) $P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A/B_k)}$

D) $P(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|}$

20. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning tushgan tomonlaridagi ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga kubiklardan hech bo'lmaganda bittasining tomonida olti ochko chiqish ehtimolligini toping.

A) 1/36

B) 5/36

C) 1/6

D) 1/18

21. 21 ta standart 10 ta nostandart detal solingan yashikni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgan biroq qanday detal yo'qolgani ma'lum emas. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan detal standart detal bo'lib chiqdi: nostandart detal yo'qolgan bo'lish ehtimolligini toping.

- A) $1/3$
- B) $2/3$
- C) $1/6$
- D) $1/5$

22. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning tomonlarida chiqqan ochkolar yig'indisi ettiga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

- A) $1/3$
- B) $2/3$
- C) $1/7$
- D) $1/6$

23. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning tomonlarida chiqqan ochkolar yig'indisi ettiga teng bo'lmaslik ehtimolligini toping.

- A) $1/3$
- B) $2/3$
- C) $1/7$
- D) $5/6$

24. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig'indisi sakkizga, ayirmasi esa to'rtga teng bo'lish ehtimolligini toping.

- A) $1/3$
- B) $2/5$
- C) $1/18$
- D) $1/36$

25. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Chiqqan ochkolar ayirmasi to'rtga tengligi ma'lum bo'lib, ularning yig'indisi sakkizga teng bo'lish ehtimolligini toping.

- A) $1/3$
- B) $1/2$
- C) $1/18$
- D) $1/36$

26. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning tomonlarida chiqqan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi esa to'rtga teng bo'lish ehtimolligini toping.

- A) $1/4$
- B) $1/2$
- C) $1/18$
- D) $1/36$

27. Tanga ikki marta tashlanadi. Hech bo'lmaganda bir marta „gerbli“ tomon tushish ehtimolligini toping.

- A) $1/4$
- B) $1/3$
- C) $3/4$
- D) $1/36$

28. Qutida nomerlangan oltita bir xil kubik bor. Hamma kubiklar tavakkaliga bittalab olinadi. Olingan kubiklarning nomerlari ortib borish tartibida chiqish ehtimolligini toping.

- A) $1/720$
- B) $1/6$
- C) $3/4$

D) $1/36$

29. Yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga detal oladi. Olingan detalning bo'yalgan bo'lishi ehtimolligini toping.

A) $1/2$

B) $1/20$

C) 1

D) $1/12$

30. Yashikda 100 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz. Tavvakalliga 4ta detal olingan. Olingan detallarda yaroqsiz detallar bo'lmasligi ehtimolligini toping.

A) C_{90}^4 / C_{100}^4

B) C_{91}^4 / C_{101}^4

C) C_{10}^4 / C_{100}^4

D) C_{10}^3 / C_{100}^4

31. Yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga detal oladi. Olingan detallarning bo'yalmagan bo'lish ehtimolligini toping.

A) $1/2$

B) $1/20$

C) 1

D) $1/12$

32. Yashikda 100 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz. Tavvakalliga 4 ta detal olingan. Olingan detallarda yaroqli detallar bo'lmasligi ehtimolligini toping.

A) C_{90}^4 / C_{100}^4

B) C_{91}^4 / C_{101}^4

C) C_{10}^4 / C_{100}^4

D) C_{10}^3 / C_{100}^4

33. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolligini toping.

A) C_3^2 / C_5^3

B) C_3^1 / C_5^2

C) C_{10}^4 / C_5^4

D) C_3^1 / C_5^4

34. Abonent, telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolligini toping.

A) $1/720$

B) $1/10$

C) $1/9$

D) $1/120$

35. 10 detaldan iborat partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa 3 ta standart detal bo'lish ehtimolligini toping.

A) $C_8^3 \cdot C_2^1 / C_{10}^4$

B) C_8^2 / C_{10}^3

C) $C_8^2 \cdot C_2^1 / C_{10}^4$

D) C_{10}^3 / C_{10}^4

36. 12 detaldan iborat partiyada 6 ta standart detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa 2 ta standart detal bo'lish ehtimolligini toping.

A) $C_6^2 \cdot C_6^1 / C_{12}^3$

B) C_8^2 / C_{12}^3

C) $C_8^2 \cdot C_2^1 / C_{12}^4$

D) C_{10}^3 / C_{12}^4

37. Sexda 15 erkak va 5 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 8 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 erkak bo'lish ehtimolligini toping.

A) $C_{15}^3 \cdot C_5^5 / C_{20}^8$

B) C_{15}^2 / C_{20}^7

C) $C_8^2 \cdot C_2^1 / C_{20}^7$

D) C_{15}^7 / C_{20}^8

38. Omborda 15 ta disk bor bo'lib, ularning 10 tasi Nukus shahrida tayyorlangan. Tavakkaliga olingan 5 ta disk orasida 3 tasi Nukus shahrida tayyorlangan bo'lish ehtimolligini toping.

A) $C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{15}^5$

B) C_{15}^2 / C_{15}^5

C) $C_8^2 \cdot C_2^1 / C_{15}^7$

D) C_{15}^7 / C_{15}^5

39. Guruxda 32 ta talaba bo'lib, ulardan 4 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 ta a'lochi talaba bo'lish ehtimolligini toping.

- A) $C_4^3 \cdot C_{28}^6 / C_{32}^9$
- B) C_{15}^2 / C_{12}^9
- C) $C_8^5 \cdot C_4^4 / C_{12}^9$
- D) C_{15}^7 / C_{12}^9

40. Guruxda 30 ta talaba bo‘lib, ulardan 8 tasi a’lochi. Ro‘yxat bo‘yicha tavakkaliga 7 talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 ta a’lochi talaba bo‘lish ehtimolligini toping.

- A) $C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{12}^9$
- B) C_{15}^2 / C_{12}^9
- C) $C_8^5 \cdot C_{22}^2 / C_{30}^7$
- D) C_{15}^7 / C_{12}^9

41. Omborda 15 ta disk bor bo‘lib, ularning 10 tasi Samarqand shahrida tayyorlangan. Tavakkaliga olingan 5 ta disk orasida 3 tasi Samarqand shahrida tayyorlangan bo‘lish ehtimolligini toping.

- A) $C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{15}^5$
- B) C_{15}^2 / C_{15}^5
- C) $C_8^2 \cdot C_2^1 / C_{15}^7$
- D) C_{15}^7 / C_{15}^5

42. Qutida 5 ta bir xil buyum bo‘lib, ularning 3 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 2ta buyum olingan. Ikkita buyum orasida bitta bo‘yalgan buyum bo‘lish ehtimolligini toping.

- A) $C_1^1 \cdot C_5^1 / C_5^2$
- B) C_{15}^2 / C_5^2
- C) $C_3^1 \cdot C_2^1 / C_5^2$

D) C_{15}^7 / C_5^2

43. Qutida 5 ta bir xil buyum bo‘lib, ularning 3 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 2ta buyum olingan. Ikkita buyum orasida xech bo‘lmaganda bitta bo‘yalgan buyum bo‘lish ehtimolligini toping.

A) 0,3

B) 0,4

C) 0,2

D) 0,9

44. Uzunligi 20 sm bo‘lgan L kesmaga uzunligi 10 sm bo‘lgan l kesma joylashtirilgan. Katta kesmaga tavakkaliga qo‘yilgan nuqtaning kichik kesmaga ham tushish ehtimolligini toping.

A) $1/2$

B) $1/20$

C) $1/10$

D) 0,25

45. Radiusi 10 bo‘lgan doiraga radiusi 5 bo‘lgan kichik doira joylashtiriladi. Katta doiraga tashlangan nuqtaning kichik doiraga ham tushish ehtimolligini toping.

A) 0,8

B) 0,1

C) 0,21

D) 0,25

46. Avariya yuz berganligi haqida signal berish uchun ikkita erkli ishlaydigan signalizator o‘rnatilgan. Avariya yuz berganida signalizator ishlay boshlash ehtimolligi birinchisi uchun 0,95 ga, ikkinchisi uchun 0,9 ga teng. Avariya yuz berganida faqat bitta signalizator ishlay boshlash ehtimolligini toping.

- A) 0,94
- B) 0,14
- C) 0,21
- D) 0,9

47. Ikkita to'pdan bir yo'la o'q uzishda nishonga bitta o'q tegish ehtimolligi 0,38 ga teng. Agar ikkinchi to'pdan bitta otishda o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng bo'lsa, bu ehtimollikni birinchi to'p uchun toping.

- A) 0,3
- B) 0,7
- C) 0,21
- D) 0,9

48. Texnik nazorat bo'limi buyumlarning standartga muvofiqligini tekshiradi. Buyumning standartga muvofiq bo'lish ehtimolligi 0,9ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi standartga muvofiq bo'lish ehtimolligini toping.

- A) 0,432
- B) 0,18
- C) 0,729
- D) 0,9

49. Buyumlar partiyasidan tovarshunos oliy nav buyumlarni ajratmoqda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy nav bo'lish ehtimolligi 0,8 ga teng. Tekshirilgan 3 ta buyumdan faqat ikkitasi oliy nav bo'lish ehtimolligini toping.

- A) 0,384
- B) 0,064
- C) 0,084
- D) 0,8

50. O'yin kubigi bir marta tashlanganda, 2 raqami tushish ehtimolligi nechaga teng?

- A) 0,5
- B) $1/6$
- C) 1
- D) 0

51. Ikkita o'yin kubigi tashlanganda tushgan raqamlar yig'indisi kamida 10 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

- A) $1/12$
- B) $5/36$
- C) $1/6$
- D) $1/9$

52. Qutida 10 ta shar bor, ulardan 6 tasi oq va 4 tasi qora. Qutidan tasodifiy ravishda bir shar olinadi. Bu shar oq bo'lishining ehtimolligini toping.

- A) 0,6
- B) 1
- C) 0,4
- D) 0,5

53. Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratga aylana ichki chizilgan. Tasodifiy ravishda kvadratning ichiga tashlangan nuqta aylana ichiga tushish ehtimolligini toping.

- A) $1/45$
- B) $\pi/4$
- C) $\pi/2$
- D) $\pi/8$

54. Penalda 10 ta qora va 5 ta ko'k qalam bor. Tasodifiy ravishda 2 ta qalam olindi. Ular har xil rangda bo'lish ehtimolligini toping.

A) $\frac{10}{21}$

B) $\frac{11}{21}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{7}$

55. Biror fizik kattalikni bir marta o'lchashda berilgan aniqlikdan ortiq xatoga yo'l qo'yish ehtimolligi 0,3 ga teng. Uchta bog'liqsiz o'lchash o'tkazilgan. Bulardan faqat bittasida yo'l qo'yilgan xato berilgan aniqlikdan ortiq bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,559

B) 1/2

C) 0,009

D) 0,441

56. Basketbolchining to'pni to'rga tushirish ehtimolligi 0,6 ga teng. U to'pni 4 marta tashlagan. To'pning to'rga rosa 2 marta tushishi ehtimolligini toping.

A) 0,36

B) 0,64

C) 0,3456

D) 0,6544

57. Ikki xil detallar to'plami bor. Birinchi to'plamdagi detallarning standart bo'lish ehtimolligi 0,9 ga, ikkinchisidiki esa 0,7 ga teng. Tavakkaliga tanlangan to'plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo'lish ehtimolligini toping.

- A) 0,8
- B) 0,85
- C) 0,9
- D) 0,75

58. Stol ustida 1-zavodda ishlab chiqarilgan 18 ta, 2-zavodda ishlab chiqarilgan 20 ta va 3-zavodda ishlab chiqarilgan 12 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning sifatli bo'lish ehtimolligi 0,6 ga, 2- va 3-zavodlar uchun bu ehtimolliklar mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tasodifiy ravishda olingan detalning sifatli bo'lish ehtimolligini toping.

- A) 0,756
- B) 0,78
- C) 0,562
- D) 0,64

II-BOB. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALARI

2.1-§. Tasodifiy miqdorlar. Ta'rif va misollar

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ixtiyoriy ehtimollik fazosi bo'lsin.

1-ta'rif. *Tasodifiy miqdor* deb, elementar hodisalar fazosi Ω ni haqiqiy sonlar to'plami \mathbb{R} ga akslantiruvchi $\xi = \xi(\omega)$ o'lchovli funksiyaga aytiladi, ya'ni shu funksiya uchun ixtiyoriy B Borel to'plamining $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ proobrazi \mathfrak{F} σ -algebraning elementi bo'ladi.

Bu holda ξ funksiya (Ω, \mathfrak{F}) ni $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ga o'lchovli akslantiradi deyiladi:

$$\xi : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

Bu yerda \mathfrak{B} orqali to'g'ri chiziqdagi Borel to'plamlari σ -algebrasi belgilangan.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1) Tanga tashlanganda Ω elementar hodisalar fazosi ikkita elementdan iborat: $\omega_1 = \{\text{gerb}\}$ va $\omega_2 = \{\text{raqam}\}$. $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlash mumkin. $\xi(\omega_1) = 1$, agar ω_1 elementar hodisa ro'y bersa va $\xi(\omega_2) = 0$, agar ω_2 elementar hodisa ro'y bersa. Haqiqatan, $\xi(\omega)$ o'lchovli funksiya bo'ladi. \mathfrak{F} σ -algebrasi 4ta elementdan iborat bo'ladi, ya'ni $\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset, \omega_1, \omega_2\}$ va

agar $0, 1 \notin B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \emptyset$ bo'ladi;

agar $0 \notin B$ va $1 \in B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \omega_1$ bo'ladi;

agar $0 \in B$ va $1 \notin B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \omega_2$ bo'ladi;

agar $0, 1 \in B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \Omega$ bo'ladi.

Demak, to'rt holda ham $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$.

2) O'yin kubigi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu miqdor 1, 2, 3, 4, 5, 6 qiymatlarni qabul qiladi.

3) Tanga birinchi marta gerb tomoni bilan tushguncha tanganing tashlashlar soni (1, 2, 3, ...) barcha natural sonlar to'plamidan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdordir.

4) $\xi = \xi(\omega)$ – koordinatalar boshidan $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ kvadrat ichiga tashlangan nuqtagacha bo'lgan t masofa ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu holda $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ va $\{(x,y): x^2 + y^2 < t\}$ ko'rinishidagi to'plamlar o'lchovli bo'ladi.

5) Berilgan guruxdagi darsga kelgan talabalar soni noldan to guruxdagi umumiy soniga teng bo'lgunga qadar butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.

6) n ta bog'liq bo'lmagan sinovda A hodisaning yuz berishlari soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu tasodifiy miqdor n ta sinov natijasida $0,1,2,\dots,n$ qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin.

7) Elektron lampaning ishlash vaqti ham tasodifiy miqdordir.

Yuqorida keltirilgan misollarda tasodifiy miqdorlar chekli, sanoqli yoki cheksiz qiymatlarni qabul qilish mumkin edi.

Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarni chekli yoki sanoqli ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi (1-3, 5, 6 misollar).

Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor *uzluksiz tasodifiy miqdor* deyiladi (4, 7 misollar).

Kelgusida biz bu ta'riflarni biroz oydinlashtiramiz.

2.2-§. Tasodifiy miqdorning taqsimoti va taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyasining xossalari

Tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy B Borel to'plami ($B \in \mathfrak{B}$) uchun

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Demak, ξ tasodifiy miqdor $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ o'lchovli fazoda $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ ehtimollikni aniqlaydi va $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P_\xi)$ ehtimollik fazosini hosil qiladi.

1-ta'rif. $\{P_\xi(B), B \in \mathfrak{B}\}$ ehtimolliklar ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi.

Agar B to'plam sifatida $(-\infty, x)$ oraliqni olsak, bu holda biz haqiqiy o'qda aniqlangan $F_\xi(x) = P_\xi\{(-\infty, x)\} = P(\omega : \xi(\omega) < x) = P(\xi < x)$ funksiyaga ega bo'lamiz.

2-ta'rif. $F_\xi(x)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Kelgusida, agar tushunmovchiliklar keltirib chiqarmasa, $F_\xi(x)$ ni $F(x)$ kabi yozamiz.

Quyida ko'rish mumkinki, tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uning taqsimotini to'laligicha aniqlaydi va shu sababli taqsimot o'rniga ko'p hollarda taqsimot funksiyasi ishlatiladi.

1-misol. ξ tasodifiy miqdor 1 va 0 qiymatlarni mos ravishda p va q ehtimolliklar bilan qabul qilsin ($p+q=1$), ya'ni $p = P(\xi = 1)$ va $q = P(\xi = 0)$. Bu holda uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ q, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } x > 1 \end{cases}$$

bo'ladi.

2-misol. $[a, b]$ kesmaga ($[a, b] \subset \mathbb{R}$) tasodifan nuqta tashlanmoqda, ya'ni $[a, b]$ ga tegishli qaysidir to'plamga nuqtaning tushish ehtimolligi bu to'plamning Lebeg o'lchoviga proporsional bo'lsin. Bu misol uchun $\Omega = [a, b]$ va \mathfrak{F} esa $[a, b]$

dagi Borel to'plamostilaridan iborat σ -algebradir. ξ tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi(\omega) = \omega, \quad \omega \in [a, b],$$

ya'ni ξ tasodifiy miqdor tashlangan nuqtaning $[a, b]$ dagi qiymatiga teng bo'lib, o'lchovli funksiya bo'ladi. Agar $x < a$ bo'lsa, $F(x) = P(\xi < x) = 0$ bo'ladi. Endi $x \in [a, b]$ bo'lsin. U holda $(\xi < x)$ hodisa ro'y berganda nuqta $[a, x)$ intervalga tushadi. Bu intervalga tushish ehtimolligi uning uzunligiga proporsional, ya'ni

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Agar $x > b$ bo'lsa, $F(x) = 1$ bo'ladi.

Demak, $F(x)$ taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{agar } a < x \leq b, \\ 1, & \text{agar } x > b. \end{cases}$$

Yuqoridagi taqsimot funksiyasi bilan aniqlangan ξ tasodifiy miqdor $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan deb ataladi.

Endi taqsimot funksiyasi xossalarini keltiramiz. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. U holda $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

F1. agar $x_1 \leq x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1) \leq F(x_2)$ (*monotonlik xossasi*);

F2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (*chegaralanganlik xossasi*);

F3. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ (*chapdan uzluksizlik xossasi*).

Isboti. $x_1 \leq x_2$ uchun $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}$ bo'lganligi sababli F1 xossasi ehtimollikning 3) xossasidan (1.3-§ ga qarang) bevosita kelib chiqadi.

F2 xossani isbotlash uchun quyidagi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni kiritamiz: $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik bo'lib, $x_n \rightarrow -\infty$ va $\{y_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik bo'lib, $y_n \rightarrow +\infty$ bo'lsin. $A_n = \{\xi < x_n\}$, $B_n = \{\xi < y_n\}$ to'plamlarni

kiritamiz. $x_n \downarrow -\infty$ ekanidan A_n to'plamlar ketma-ketligi monoton kamayadi va $\cap A_n = \emptyset$ bo'ladi. Ehtimollikning uzluksizlik aksiomasiga binoan $n \rightarrow \infty$ da $P(A_n) \rightarrow 0$. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$. Bundan va $F(x)$ funksiya monotonligidan $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\{y_n\}$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da $+\infty$ ga monoton yaqinlashganligi uchun B_n to'plamlar ketma-ketligi ham o'suvchi bo'lib, $\cup B_n = \Omega$ bo'ladi, binobarin, ehtimollikning xossasiga asosan $n \rightarrow \infty$ da $P(B_n) \rightarrow 1$ bo'ladi. Bundan, xuddi avvalgidek, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ munosabatlar kelib chiqadi.

F3 xossani isbotlash uchun $A = \{\xi < x_0\}$, $A_n = \{\xi < x_n\}$ hodisalarni kiritamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, $\cup A_n = A$ bo'ladi. Binobarin, $P(A_n) \rightarrow P(A)$. Bundan $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ tenglik kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, agar taqsimot funksiyasini $F(x) = P(\xi \leq x)$ deb olsak, u holda u o'ngdan uzluksizlik xossasiga ega bo'lar edi.

Ammo, yuqoridagidek tanlangan $F(x)$ o'ngdan uzluksiz bo'la olmaydi, chunki uzluksizlik aksiomasiga ko'ra

$$\begin{aligned} F(x+0) - F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq \xi < x + \frac{1}{n}\right) = \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \xi \in \left[x, x + \frac{1}{n} \right] \right\}\right) = P(\xi = x). \end{aligned}$$

Bu esa, o'z navbatida, $F(x)$ ning uzluksiz bo'lishi uchun ixtiyoriy x lar uchun $P(\xi = x) = 0$ shart bajarilishi zarur va yetarli ekanini ko'rsatadi.

Keltirilgan munosabatlardan quyidagi :

$$P(x \leq \xi \leq y) = P_{\xi}([x, y]) = F(y+0) - F(x)$$

tenglik ham kelib chiqadi.

Quyidagi teorema berilgan taqsimot funksiyaga mos tasodifiy miqdor mavjudligini ko'rsatadi. Biz uni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $F(x)$ funksiya F_1, F_2 va F_3 xossalarga ega bo'lsa, u holda shunday $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimollik fazosi va unda aniqlangan ξ tasodifiy miqdor mavjud bo'lib, $F_\xi(x) = F(x)$ bo'ladi.

Endi ko'p uchraydigan taqsimotlarga misollar keltiramiz.

3-misol. ξ tasodifiy miqdor "birlik" (xos) taqsimotga ega deyiladi, agar biror a haqiqiy son uchun $P(\xi = a) = 1$ bo'lsa. Bu taqsimot uchun taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a, \\ 1, & \text{agar } x > a. \end{cases}$$

4-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 < p < 1$, $0 \leq k \leq n$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sum_{k < x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & \text{agar } 0 < x \leq n, \\ 1, & \text{agar } x > n. \end{cases}$$

5-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sum_{m < x} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, & \text{agar } x > 0. \end{cases}$$

6-misol. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda $\sigma > 0$, $-\infty < a < \infty$ – o‘zgarmas sonlar. Agar $a = 0$, $\sigma = 1$ bo‘lsa, bunday taqsimlangan tasodifiy miqdor standart normal taqsimotga ega deyiladi va uning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

bo‘ladi. Ushbu $\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglikni tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Bundan a va σ lar mos ravishda taqsimotning “siljishi” va “masshtabi” parametrlari ma’nolariga ega bo‘lishligi kelib chiqadi.

7-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor 1, 2, ... qiymatlarni

$$P(\xi = k) = (1-p)p^{k-1}, \quad p \in (0,1), \quad k = 1, 2, \dots$$

ehtimolligiklar bilan qabul qilsa, uni geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sum_{k < x} (1-p)p^{k-1}, & \text{agar } x > 0. \end{cases}$$

2.3-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

Ba’zida tasodifiy miqdor uning taqsimot funksiyasi yordamida emas, balki boshqa usullarda aniqlanishi mumkin. Aniq qoidalar orqali tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini topish imkoniyatini beruvchi har qanday xarakteristika tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi. Biror ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni sifatida $x_1 \leq \xi < x_2$ tengsizlik ehtimolligini aniqlovchi $P\{x_1, x_2\}$ interval funksiyani olishimiz mumkin. Haqiqatan ham, agar $P\{x_1, x_2\}$ ma’lum bo‘lsa, u holda taqsimot funksiyasini

$$F(x) = P\{-\infty, x\}$$

formula orqali topishimiz mumkin. O‘z navbatida, $F(x)$ yordamida ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $P\{x_1, x_2\}$ funksiyani topishimiz mumkin:

$$P\{x_1, x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Tasodifiy miqdorlar orasidan chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiladiganlarini ajratib olamiz. Bunday tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Musbat ehtimolliklar bilan x_1, x_2, x_3, \dots qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorni to‘laligicha xarakterlash uchun $p_k = P\{\xi = x_k\}$ ehtimolliklarni bilish yetarli, ya’ni p_k ehtimolliklarni barchasi yordamida $F(x)$ taqsimot funksiyasini quyidagi tenglik yordamida topish mumkin:

$$F(x) = \sum p_k,$$

bu yerda yig‘indi $x_k < x$ bo‘lgan indekslar uchun hisoblanadi.

Ixtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uzilishga ega va ξ ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan x qiymatlarida sakrash orqali o‘sib boradi. $F(x)$ taqsimot funksiyaning x nuqtadagi sakrash miqdori $F(x+0) - F(x)$ ayirmaga teng.

Agar ξ tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo‘lgan ikkita qiymati interval bilan ajratilgan va bu intervalda ξ tasodifiy miqdor boshqa qiymati bo‘lmasa, u holda bu intervalda $F(x)$ taqsimot funksiya o‘zgarmas bo‘ladi. Chekli sondagi qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning grafiqi zinapoya ko‘rinishidagi qamaymaydigan to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

Diskret taqsimot qonunini jadval ko‘rinishida berish qulay bo‘ladi.

Qiymatlar	x_1	x_2	x_3	...
Ehtimolliklar	p_1	p_2	p_3	...

Bu yerda yuqorida aytib o‘tilganidek, $p_k = P\{\xi = x_k\} \geq 0$, $\sum p_k = 1$.

Endi tasodifiy miqdorlarning yana bir muhim tipini – uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Bu tipga taqsimoti $P_\xi(B)$ ni ixtiyoriy Borel to‘plami B uchun quyida keltirilgan ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorlar kiradi:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B f(x) dx,$$

bu yerda $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

$P_\xi(B)$ *absolyut uzluksiz taqsimot* deyiladi.

O‘lchovlarning davom ettirishning yagonaligi teoremasidan, yuqorida keltirilgan absolyut uzluksizlik ta’rifi barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

ko‘rinishiga ekvivalent ekanligini aniqlash qiyin emas. Bunday xossaga ega bo‘lgan taqsimot funksiyasi absolyut uzluksiz deb ataladi.

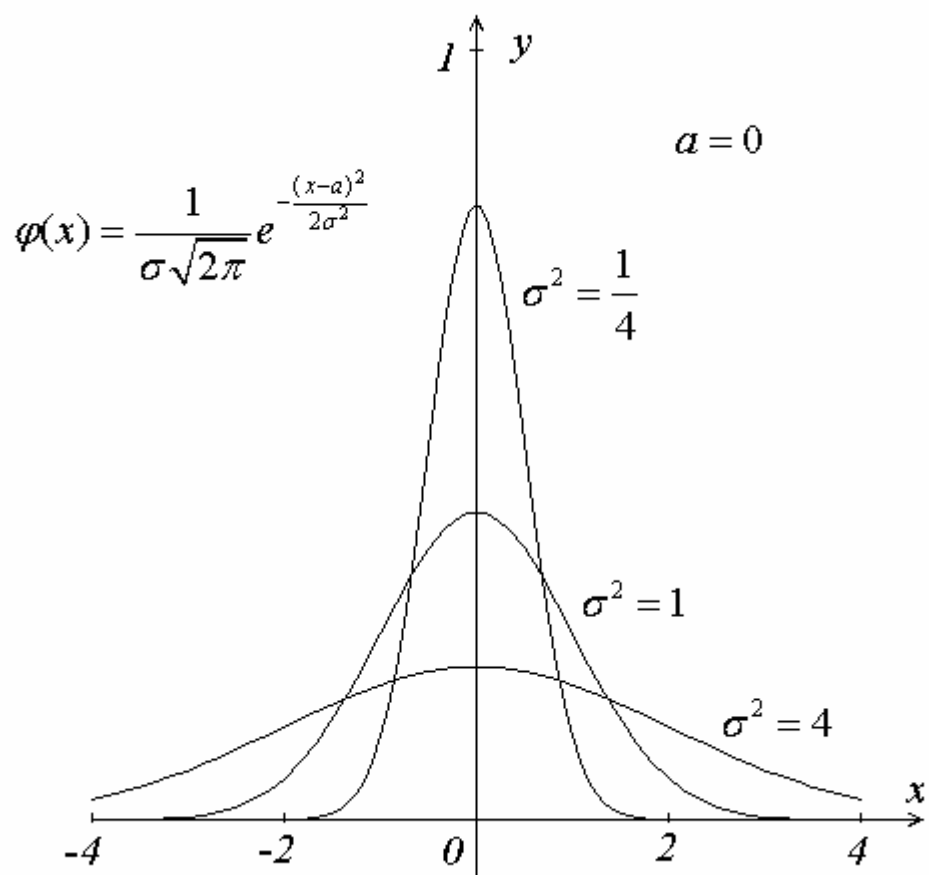
$f(x)$ funksiya yuqoridagi tengliklardan aniqlanadi va *taqsimot zichligi* (*zichlik funksiyasi*) deb ataladi. Bu funksiya uchun $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ tenglik o‘rinli.

Masalan, (a, σ^2) parametrli normal qonun uchun zichlik funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$\varphi(x)$ zichlik funksiyasi $x = a$ nuqtada eng katta qiymatiga erishadi va uning grafigi $x = a$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu funksiya uchun Ox o‘q gorizontaal asimptota, $x = a \pm \sigma$ nuqtalar bu funksiyaning bukilish nuqtalari bo‘ladi. Zichlik funksiyasining grafigiga σ parametrning ta’sirini ko‘rsatish maqsadida 10-rasmda $\varphi(x)$ ning $a=0$ va 1) $\sigma^2 = \frac{1}{4}$, 2) $\sigma^2 = 1$, 3) $\sigma^2 = 4$ bo‘lgan hollardagi grafiklarini ko‘rsatamiz.

Agar $a \neq 0$ bo'lsa ham zichlik funksiyasi grafigi xuddi shunday ko'rinishga ega, faqat a ning ishorasiga qarab o'ngga ($a > 0$) yoki chapga ($a < 0$) surilgan bo'ladi.



10-Rasm

Zichlik funksiyasiga ega bo'lmagan uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham mavjud.

Bunday tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalariga *singulyar taqsimot funksiyalari* deyiladi. Singulyar taqsimot funksiya uzluksiz, barcha o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'planning Lebeg o'lchovi 0 ga teng, ya'ni deyarli barcha nuqtalarda $F'(x) = 0$ bo'lib, $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ tenglik o'rinli.

Taqsimot funksiyalarining mumkin bo'lgan tiplari haqida boshqa to'xtalmay, haqiqatda taqsimot funksiyalar yuqorida keltirilgan uchta tip bilan chegaralanishi haqidagi mulohaza bilan kifoyalanamiz. Aniqroq aytganda, ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasini

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $c_i \geq 0$, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, $F_1(x)$ – diskret taqsimot funksiya, $F_2(x)$ – absolyut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ esa singulyar taqsimot funksiya.

2.4-§. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimollik fazosida $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Har bir $\omega \in \Omega$ ga bu tasodifiy miqdorlar n -o‘lchovli vektor $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ ni mos qo‘yadi. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar orqali berilgan $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish *tasodifiy vektor* yoki *ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdor* deyiladi.

$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishni (Ω, \mathfrak{F}) ni $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ fazoga o‘lchovli akslantirish sifatida qarash mumkin, bu yerda \mathfrak{B}^n – \mathbb{R}^n dagi Borel to‘plamlari σ -algebrasi. Shuning uchun ixtiyoriy Borel to‘plami B uchun ξ vektorning taqsimoti deb ataluvchi $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ funksiya aniqlangan.

$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$ funksiya $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deb ataladi.

Tasodifiy vektor taqsimot funksiyasining ba’zi xossalarini keltiramiz:

$$FF1. \lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

$$FF2. \lim_{x_n \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Limitlar oxirgi argument bo‘yicha olinganligi katta ahamiyatga ega emas, chunki tasodifiy miqdorlarni har doim qayta nomerlash mumkin.

$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ taqsimot funksiyasi $P_\xi(B)$ taqsimotni bir qiymatli aniqlashini ko‘rish qiyin emas.

Xuddi bir o'lchovli holga o'xshab, agar tasodifiy vektor komponentalari ko'pi bilan sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda tasodifiy vektorlarning taqsimoti diskret tipga tegishli deymiz.

Agarda ixtiyoriy $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel to'plami uchun

$$P_{\xi}(B) = P(\xi \in B) = \int_B f(x) dx$$

bo'lsa, bu yerda $f(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$, u holda tasodifiy vektorlarning taqsimoti

absolyut uzluksiz tipga tegishli deymiz.

Bu ta'rifni unga ekvivalent bo'lgan

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

ko'rinishga almashtirish mumkin.

Yuqoridagi $f(x)$ funksiya ξ taqsimotning zichligi (zichlik funksiyasi) yoki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ birgalikdagi taqsimotning zichligi deyiladi. Uning uchun deyarli hamma yerda

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ehtimolliklar nazariyasining muhim tushunchasi bo'lgan hodisalarning bog'liqsizligi o'z ma'nosini tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlab qoladi. Hodisalar bog'liqsizligiga mos ravishda quyidagini aytish mumkin: Agarda to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy B_1, \dots, B_n Borel to'plamlari uchun

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \dots P(\xi_n \in B_n)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deyiladi.

Buni taqsimot funksiyalari tilida quyidagicha aytish mumkin:

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun ixtiyoriy x_i larda

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda $F_{\xi_i}(x_i) - \xi_i$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidir.

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar mos ravishda $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ taqsimot zichliklariga ega bo‘lsalar, u holda n o‘lchovli $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy miqdor $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$ ko‘paytma bilan ifodalanadigan taqsimot zichligiga ega bo‘ladi.

Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning taqsimotlariga misollar keltiramiz.

1-misol. Polinomial taqsimot. Agar ξ m -o‘lchovli diskret tasodifiy vektor uchun $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, $k_i \in Z$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ bo‘lib

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = P(\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}, \quad (1)$$

$p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ bo‘lsa, u holda ξ vektor $(n; p_1, p_2, \dots, p_m) = (n; p)$ parametrli polinomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy vektor va $P(k; n, p_1, p_2, \dots, p_m) = p_k$ ehtimolliklarga esa $(n; p_1, p_2, \dots, p_m)$ parametrli *polinomial taqsimot* deyiladi. (1) tenglikning o‘ng tomoni $(p_1 + p_2 + \dots + p_m)^n$ polinomning p_1, p_2, \dots, p_m sonlarning darajalari bo‘yicha yoyilmasini umumiy holdan iborat bo‘lgani sababli, yuqoridagi taqsimotni polinomial taqsimot deb atalishi tabiiydir.

Agar $m = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$ bo‘lsa, (1) polinomial taqsimot (n, p) -parametrli binomial taqsimotga aylanadi.

2-misol (Ko‘p o‘lchovli normal taqsimot). $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ – n -o‘lchovli vektor va $R = \|r_{ij}\|$ birorta $n \times n$ o‘lchovli, musbat aniqlangan, simmetrik matritsa bo‘lsin. R musbat aniqlangan matritsa bo‘lgani uchun, uning teskari matritsasi $R^{-1} = A = \|a_{ij}\|$ mavjud.

Zichlik funksiyasi

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\}$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – n -o‘lchovli tasodifiy vektor ($\bar{m}; R$) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy vektor deyiladi. Bu yerda $|A| = \det A$ orqali A matritsaning determinanti belgilangan.

Xususan 2-o‘lchovli va parametrlari (\bar{m}, R) bo‘lgan normal taqsimotni ko‘raylik. Buning uchun $m = (m_1, m_2)$ sonli vektor va

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad -1 < r < 1$$

simmetrik va musbat aniqlangan 2x2-o‘lchovli matritsani ko‘ramiz. R matritsani determinanti

$$|R| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)$$

bo‘lgani uchun

$$A = R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix}$$

va A matritsani determinanti

$$|A| = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)}$$

bo‘ladi. Bu holda $\varphi_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ zichlik funksiya

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &= \varphi_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Diskret tasodifiy miqdor nima? Misollar keltiring.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor nima? Misollar keltiring.
3. Ehtimollikning taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
4. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb nimaga aytiladi?
5. Taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini aytib bering.
6. Taqsimot funksiyasini ham diskret, ham uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ta’riflash mumkinmi yoki faqat diskret yoki faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ta’riflash mumkinmi?
7. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deb nimaga aytiladi? Bu funksiyaning ehtimoliy ma’nosi qanday?
8. Diskret tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiyani ta’riflash mumkinmi?
9. Zichlik funksiyasining asosiy xossalarini aytib bering.
10. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bilan taqsimot funksiyasi o‘zaro qanday bog‘langan?
11. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor uzluksiz yoki diskret bo‘la oladimi?
12. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar deb nimaga aytiladi?
13. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar deb nimaga aytiladi?

Misol va masalalar

1) Qutida bir xil o‘lchamli 7 ta shar bo‘lib, 4 tasi oq, qolganlari esa qora rangda. Sharlar bir-xil o‘lchamdadir. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. ξ diskret tasodifiy miqdor – olingan oq sharlar soni bo‘lsa, ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$\begin{array}{l} \text{Javob: } \xi: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \text{P:} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{12}{35} \quad \frac{18}{35} \quad \frac{4}{35} \end{array}$$

2) ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\begin{array}{l} \xi: \quad 2 \quad 4 \quad 6 \\ \text{P:} \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5 \end{array}$$

$\eta = 4\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$\begin{array}{l} \text{Javob: } \xi: \quad 8 \quad 16 \quad 24 \\ \text{P:} \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5 \end{array}$$

3) ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\begin{array}{l} \xi: \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \\ \text{P:} \quad 0,2 \quad 0,7 \quad 0,1 \end{array}$$

$\eta = \sin \xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$\begin{array}{l} \text{Javob: } \xi: \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \\ \text{P:} \quad 0,2 \quad 0,7 \quad 0,1 \end{array}$$

4) ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2, \\ 0,3, & \text{agar } 2 < x \leq 3, \\ 0,5, & \text{agar } 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{agar } x > 4. \end{cases}$$

$\{1 \leq \xi \leq 3\}$ hodisaning ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } P(1 \leq \xi \leq 3) = 0,5.$$

5) ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ x^2, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

4 ta bog'liq bo'lmagan tajriba natijasida ξ uzluksiz tasodifiy miqdor rosa 3 marta (0,25;0,75) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } P_4(3) = 0,25.$$

6) ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi butun Ox o'qida

$$f(x) = \frac{2C}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. O'zgarmas C parametrni toping.

$$\text{Javob: } C = \frac{1}{\pi}.$$

7) Bir soat ($0 \leq t \leq 1$, t birligi soatlarda hisoblangan vaqt) ichida bekatga faqat bitta avtobus kelib to'xtaydi. Vaqtning $t=0$ momentida bekatga kelgan yo'lovchining avtobusni 10 minutdan ortiq kutmaslik ehtimolligi qanday?

$$\text{Javob: } \frac{1}{6}.$$

8) Avtobuslar 5 minut oraliq bilan qatnaydilar. Bekatda avtobus kutish vaqti ξ tekis taqsimlangan deb, $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

$$\text{Javob: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 0,2x, & \text{agar } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{agar } x > 5. \end{cases}$$

9) ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ bx, & \text{agar } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{agar } x > 2. \end{cases}$$

b ni aniqlang.

Javob: $b=0,5$.

10) Televizorning buzilmay ishlash ehtimolligi ushbu ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan:

$$f(x) = 0,002e^{-0,002t} \quad (t > 0)$$

Televizorning 1000 soat buzilmay ishlashi ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } P(1000) = e^{-2} \approx 0,1359.$$

11) 10 tadan iborat kartochkalar to'plami berilgan. 10 ta bir xil kartochkada 0, 1, ..., 9 raqamlar yozilgan. Bitta kartochka olinib, u kartochkalar to'plamiga qaytariladi. Keyin yana bitta kartochka olinadi. ξ tasodifiy miqdor – birinchi kartochkada raqam va η tasodifiy miqdor – ikkinchi kartochkada raqam bo'lib, $\zeta = \xi + \eta$ bo'lsin. ξ , η va ζ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini toping. $P(\zeta \leq 2)$ hodisa ehtimolligini toping.

Javob:

$$P(\xi = i) = 0,1, \quad i = 0, 1, \dots, 9;$$

$$P(\eta = i) = 0,1, \quad i = 0, 1, \dots, 9;$$

$$P(\zeta = i) = 0,01, \quad i = 0, 18; \quad P(\zeta = i) = 0,02, \quad i = 1, 17;$$

$$P(\zeta = i) = 0,03, \quad i = 2, 16; \quad P(\zeta = i) = 0,04, \quad i = 3, 15;$$

$$P(\zeta = i) = 0,05, \quad i = 4, 14; \quad P(\zeta = i) = 0,06, \quad i = 5, 13,$$

$$P(\zeta = i) = 0,07, \quad i = 6, 12; \quad P(\zeta = i) = 0,08, \quad i = 7, 11;$$

$$P(\zeta = i) = 0,09, \quad i = 8, 10; \quad P(\zeta = i) = 0,1, \quad i = 9;$$

$$P(\zeta \leq 2) = 0,06.$$

II-bob bo'yicha test topshiriqlari

1. ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu

$$\begin{array}{ccc} \xi & -1 & 3 & 5 \\ P & 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{array}$$

taqsimot qonuni bilan berilgan. Uning taqsimot funksiyasini toping.

$$A) F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,2, & -1 < x \leq 3, \\ 0,7, & 3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

$$B) F(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 0,3, & x = 4, \\ 0,4, & x = 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

$$C) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0,3, & 1 < x < 4, \\ 0,4, & 4 < x < 8, \\ 1, & x \geq 8. \end{cases}$$

$$D) F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,1, & 1 \leq x < 4, \\ 0,2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 0,4, & 4 < x \leq 8. \end{cases}$$

2. Qutida 10 ta shar bor. Ular orasida 8 ta oq shar, qolganlari qora shar. Tavakkaliga 2 ta shar olingan. Olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

$$A) \begin{array}{ccc} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ P: & \frac{1}{45} & \frac{16}{45} & \frac{28}{45} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{B) } \xi: & \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ P: & \quad 9/16 \quad 6/16 \quad 1/16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C) } \xi: & \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ P: & \quad 3/6 \quad 2/6 \quad 1/6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D) } \xi: & \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ P: & \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \end{aligned}$$

3. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

$$\begin{aligned} \xi: & \quad -2 \quad 1 \quad 4 \\ P: & \quad 0,5 \quad 0,35 \quad 0,15 \end{aligned}$$

Uning taqsimot funksiyasini toping.

$$\text{A) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -2 \text{ bo'lsa,} \\ 0,5, & \text{agar } -2 < x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0,85, & \text{agar } 1 < x \leq 4 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 4 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$$\text{B) } F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1, \\ 0,3; & 1 < x < 4, \\ 0,4; & 4 < x < 8, \\ 1; & x \geq 8. \end{cases}$$

$$\text{C) } F(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 0,3, & x = 4, \\ 0,4, & x = 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

$$D) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1, \\ 0,1; & 1 \leq x < 4, \\ 0,2; & 1 \leq x \leq 4, \\ 0,4; & 4 < x \leq 8. \end{cases}$$

4. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasiga ega:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{x}{2}, & \text{agar } 2 < x \leq 4 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 4 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ushbu $P(3 < \xi < 3,5)$ ehtimollik qiymatini toping.

A) 0,25

B) 0,27

C) 0,32

D) 0,31

6. ξ diskret tasodifiy miqdor – tangani ikki marta tashlashda “raqamli” tomon tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

A) ξ : 0 1 2

P : $\frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{4}$

B) ξ : 0 1 1

P : $\frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

C) ξ : 0 1 2

P : $\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$

D) ξ : 0 1 2

P : $\frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

7. Ikkita o'yin kubigi bir vaqtda 2 marta tashlanadi. X diskret tasodifiy miqdor ikkita o'yin kubigida toq ochkolar tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

A) $X: 0 \quad 1 \quad 2$

$P: 1/6 \quad 1/6 \quad 1/6$

B) $X: 0 \quad 1 \quad 2$

$P: 9/16 \quad 6/16 \quad 1/16$

C) $X: 0 \quad 1 \quad 2$

$P: 3/6 \quad 2/6 \quad 1/6$

D) $X: 0 \quad 1 \quad 2$

$P: 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$

8. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, & -1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Tajriba natijasida ξ tasodifiy miqdorning (0;2) intervaldagi ehtimolligini aniqlang.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) 1

9. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan

$$\begin{array}{l} \xi: \quad 1 \quad 4 \quad 8 \\ P: \quad 0,3 \quad 0,1 \quad 0,6 \end{array}$$

ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

$$A) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1, \\ 0,3; & 1 < x \leq 4, \\ 0,4; & 4 < x \leq 8, \\ 1; & x > 8, \end{cases}$$

$$B) F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1, \\ 0,3; & 1 < x < 4, \\ 0,4; & 4 < x < 8, \\ 1; & x \geq 8. \end{cases}$$

$$C) F(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 0,3, & x = 4, \\ 0,4, & x = 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

$$D) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1, \\ 0,1; & 1 \leq x < 4, \\ 0,2; & 1 \leq x \leq 4, \\ 0,4; & 4 < x \leq 8. \end{cases}$$

10. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2, & -3 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Shu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)$ ni toping.

$$\text{A) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{2}{9}(x+3), & -3 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{B) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, & -3 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{C) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2, & -3 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{D) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{9}(x+2), & -3 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

11. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\xi: \quad -6 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$P: \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,6 \quad 0,2$$

Taqsimot funksiyasini toping.

$$\text{A) } F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -6, \\ 0,1; & -6 < x \leq 8, \\ 0,2; & 8 < x \leq 9, \\ 0,8; & 9 < x \leq 10, \\ 1; & x > 10. \end{cases}$$

$$\text{B) } F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -6, \\ 0,1; & -6 < x \leq 8, \\ 0,1; & 8 < x \leq 9, \\ 0,6; & 9 < x \leq 10, \\ 0,2; & x > 10. \end{cases}$$

$$\text{C) } F(x) = \begin{cases} 0; & x = 6, \\ 0,1; & x = 8, \\ 0,2; & x = 9, \\ 0,6; & x = 10, \\ 1; & x > 10. \end{cases}$$

$$\text{D) } F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -6, \\ 0,1; & -6 < x \leq 8, \\ 0,2; & 8 < x \leq 9, \\ 1; & x > 10. \end{cases}$$

III-BOB. BOG‘LIQ BO‘LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI

3.1-§. Bernulli sxemasi. Binomial taqsimot

Ehtimolliklar nazariyasida Bernulli sxemasi deganda, o‘zaro bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligi tushuniladi va har bir tajriba natijasida biror A hodisaning ro‘y berishi yoki bermasligi kuzatiladi. Bu hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $p = P(A)$ tajriba tartibiga bog‘liq bo‘lmaydi.

Bernulli sxemasini umumiyroq qilib quyidagicha ham kiritish mumkin. Aytaylik, 2 ta $\{0,1\}$ elementlardan iborat bo‘lgan bosh to‘plamdan qaytariladigan sxema bo‘yicha hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanmalar olaylik va bu tanlanmalar to‘plamini Ω deb belgilaylik. Ω ning ixtiyoriy elementi

$$\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$$

bo‘lib, ω_i 0 yoki 1 ga teng bo‘ladi.

Barcha tanlanmalar soni $|\Omega| = 2^n$ va Ω da quyidagi manfiy bo‘lmagan $P(\omega)$ funksiyani aniqlaylik. Agar ω tanlanmada k ta 1 bo‘lsa,

$$P(\omega) = p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1.$$

Bu $P(\cdot)$ funksiyani ehtimollik taqsimoti bo‘lishi uchun

$$P(\Omega) = 1$$

shart bajarilishi lozim. Haqiqatan ham, k ta 1 elementni tanlanmadagi n ta joyga C_n^k ta usul bilan joylashtirish mumkin. Demak, k ta 1 ni o‘ziga oluvchi tanlanmalar soni ham mana shu C_n^k ga teng, ya’ni

$$\Omega_k = \{\omega : \omega \text{ da } k \text{ ta } 1 \text{ bor}\}$$

deb olsak,

$$P_n(k) = P(\Omega_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Endi $P_n(k)$ lar ehtimollik taqsimoti bolishligi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=0}^n P(\Omega_k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

(1) formula orqali aniqlangan $P_n(k)$ ehtimolliklar *binomial taqsimot* deyiladi va bu taqsimotni quyidagicha tushunish mumkin. Aytaylik n ta bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi davomida biror A hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligi kuzatilsin va bitta tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $p = P(A)$ tajribalar nomeriga bog'lik bo'lmasin. Agar tajriba natijasida A hodisa ro'y bersa bu holatni "yutuq" deb tushunsak (aks holda "yutqiziq" va uning ehtimolligi $P(\bar{A}) = 1 - p$), $P_n(k)$ n ta tajribada "yutuqlar" soni k ga teng bo'lishi ehtimolligi bo'ladi.

Endi $P_n(k)$ binomial taqsimotni k ga nisbatan qanday o'zgarishini o'rganaylik. Buning uchun quyidagi nisbatni ko'ramiz:

$$R_n(k) = \frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k+1}{k} = \frac{p}{1-p} \left(\frac{n+1}{k} - 1 \right).$$

Bu nisbat k o'sgan sari kamayadi va $\frac{k}{n+1} < p$ bo'lsa, u 1 dan katta,

$\frac{k}{n+1} > p$ bo'lsa, 1 dan kichik bo'ladi. Demak, $P_n(k)$ ehtimollik oldin k o'sganida

monoton ravishda o'sadi, keyin esa $\frac{k}{n+1} > p$ bo'lganida esa kamayadi va $P_n(k)$

$$k = k_0 = [np + p]$$

bo'lganda maksimal qiymatga erishadi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, n ta tajribada k_0 marta "yutuq" bo'lishi ehtimolligi qolgan $P_n(k)$ lardan katta bo'ladi, ya'ni

$$\max_{0 \leq k \leq n} P_n(k) = P_n(k_0)$$

munosabat o'rinli.

Bernulli sxemasida "yutuqlar" soni k dan katta bo'lmaslik ehtimolligi

$$Q_n(k) = \sum_{j=0}^k P_n(j)$$

tenglik bilan aniqlanadi va uni $R_n(k)$ nisbat orqali baholash mumkin. Haqiqatan ham, $k < p(n+1)$ bo'lganda

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= P_n(k) \left(1 + \frac{1}{R_n(k)} + \frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)} + \dots \right) \leq \\ &\leq P_n(k) \frac{R_n(k)}{R_n(k)-1} = P_n(k) \frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k}. \end{aligned}$$

Ko'rish qiyin emaski, $Q_n(k)$ uchun keltirilgan baho n va k larning katta qiymatlarida, $\frac{k}{np}$ qiymat esa 1 dan farq qilganda deyarli aniq bo'ladi, chunki bu holda

$$1 + \frac{1}{R_n(k)} + \frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)} + \dots$$

yig'indi

$$\sum_{j=0}^{\infty} R_n^{-j}(k) = \frac{R_n(k)}{R_n(k)-1}$$

geometrik progressiya yig'indisidan kam farq qiladi. Demak, quyidagi taqribiy

$$Q_n(k) \approx P_n(k) \frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k} \quad (2)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Masalan, $n = 30$, $p = 0,7$, $k = 16$ bo'lsin. Bu holda $np = 21$ bo'lib, (1) formula bilan hisoblashlar ko'rsatadiki, $P_n(k) = P_{30}(16) \approx 0,023$. Berilgan qiymatlar uchun

$$\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k} = \frac{15 \cdot 0,7}{5,7} \approx 1,84.$$

Demak, (2) munosabatning o'ng tomoni

$$0,023 \cdot 1,84 \approx 0,042.$$

Berilgan n, p, k larning qiymatlarida $Q_n(k)$ ni bevosita hisoblasak, 10^{-3} tartibdagi aniqlik bilan 0,040 qiymatni hosil qilamiz.

Bernulli sxemasi bilan bog‘liq bo‘lgan “tasodifiy joylashtirishlarga” taalluqli quyidagi masalani ko‘raylik.

Faraz qilaylik, 1-chi, 2-chi, ..., n -chi deb belgilangan n ta yacheykalarga N ta zarracha tashlansin (solinsin). Har bir zarracha n ta yacheykalardan hohlagan bittasiga tushishi mumkinligidan N ta zarrachani n ta yacheykalarga tashlashlarni n^N ta usul bilan joylashtirishi mumkin. Zarrachalarning yacheykalarga joylashishini n ta elementdan iborat bosh to‘plamdan hajmi N ga teng bo‘lgan qaytariladigan sxema bo‘yicha olingan tanlanmalar deb qabul qilish mumkin. U holda tanlanmalardan har biri $\frac{1}{n^N}$ ehtimollikga ega bo‘ladi. Keltirilgan zarrachalarni yacheykalarga “joylashish” (“tushish”) sxemasi uchun i -chi yacheykaga k ta zarracha tushish ehtimolligini topaylik. i -chi yacheykaga tushmagan $N - k$ ta zarracha qolgan $n - 1$ yacheykalarga $(n - 1)^{N-k}$ ta usul bilan joylashadi. N ta zarrachadan i -chi yacheykaga tushmagan $N - k$ ta zarrachalar C_N^{N-k} ta usul bilan tashlanadi. Demak, klassik sxema bo‘yicha topilishi kerak bo‘lgan ehtimollik

$$C_N^{N-k} \cdot \frac{(n-1)^{N-k}}{n^N} = C_N^{N-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-k} = C_N^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-k}. \quad (3)$$

Bu yerda $C_n^k = C_n^{n-k}$ formuladan foydalanildi va (3) dan ko‘rinadiki, bu ehtimollik $p = \frac{1}{n}$ bo‘lgan Bernulli sxemasidagi $P_N(k)$ ehtimollik bilan ustma-ust tushadi.

3.2-§. Muavr – Laplas lokal va integral teoremlari

Binomal taqsimot formulasidan ko‘rinadiki, tajribalar soni n etarlicha katta bo‘lganida $P_n(m)$ ehtimolliklarni hisoblashda qiyinchiliklar yuzaga keladi.

Shuning uchun ham $P_n(m)$ ga nisbatan sodda ko‘rinishdagi asimptotik formulalarni zarurati yuzaga keladi. Bu masalani $p = q = \frac{1}{2}$ bo‘lgan holda Muavr, umumiy holda ($p \neq q$) esa Laplas hal qilganlar. Ular isbotlagan ikkita asimptotik formulalar quyidagi Muavr-Laplas teoremasi ko‘rinishida keltiriladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi.

Agar n ta bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p ($0 < p < 1$) bo‘lsa, u holda m ning ushbu

$$\frac{|m - np|}{\sqrt{npq}} < c \quad (c\text{-o‘zgarmas son})$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun tekis ravishda

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

tenglik bajariladi.

Isboti. Teoremani analiz kursidan ma’lum bo‘lgan ushbu

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} e^{\theta_n}, \quad |\theta_n| \leq \frac{1}{12n}$$

Stirling formulasidan foydalanib isbotlaymiz. Agar

$$x = x_{m,n,p} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

belgilashni kiritsak, u holda

$$m = np + x\sqrt{npq} = np \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \quad (1)$$

va

$$n - m = nq - x\sqrt{npq} = nq \left(1 - x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \quad (2)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. (1) va (2) tengliklardan ko‘rinadiki, $n \rightarrow \infty$ da va $|x| \leq c$ shart bajarilganida m , $n-m$ cheksizlikka intiladi. Shu sababli, $(n-m)!$ va $m!$ sonlar

uchun Stirling formulasini qo'llashimiz mumkin va binomial formulani quyidagicha yoza olamiz:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} e^{\theta_{n,m}}$$

Bu yerda

$$|\theta_{n,m}| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} \right). \quad (3)$$

(1), (2) va (3) munosabatlardan ushbu tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|\theta_{n,m}| \leq \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}} \right). \quad (4)$$

Bundan ko'rinadiki, $|x| < c$ bo'lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da $e^{\theta_{n,m}} \rightarrow 1$. Natijada (4) ga asosan katta n lar uchun

$$e^{\theta_{n,m}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5)$$

ifodani hosil qilamiz. Teorema shartiga asosan $x\sqrt{\frac{q}{np}}$ va $x\sqrt{\frac{p}{nq}}$ miqdorlar n ning yetarlicha katta qiymatlarida istalganicha kichik bo'ladi.

Shu sababli $\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$ va $\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$ ifodalarni darajali qatorga yoyib,

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{qx^2}{np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2} \frac{px^2}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarga asosan

$$\ln \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^n (n-m)^{n-m}} = \ln \left(\frac{np}{m} \right)^m + \ln \left(\frac{nq}{n-m} \right)^{n-m} = -m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} =$$

$$\begin{aligned}
& -\left(np + x\sqrt{npq}\right) \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \left(nq - x\sqrt{npq} \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right) = -\left(np + x\sqrt{npq}\right) \cdot \\
& \cdot \left[x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{np} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] - \left(np - x\sqrt{npq}\right) \left[-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{px^2}{nq} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] = \\
& = -\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Natijada (6) dan $e^{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ni e'tiborga olgan holda

$$\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} = e^{-\frac{x^2}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bevosita ishonch hosil qilish mumkinki,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Shuning uchun (1), (2) tengliklarga asosan

$$\frac{1}{2\pi m(n-m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}} = \frac{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2\pi npq}}. \quad (8)$$

Demak, yetarlicha katta n lar uchun (4), (5), (7), (8) ifodalardan teoremaning o'rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning x argument musbat qiymatlariga mos tuzilgan

qiymatlari jadvali mavjud (1-ilova). $\varphi(x)$ funsiyaning juftligidan bu jadvaldan argumentning manfiy qiymatlari uchun ham foydalaniladi.

1-misol. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajribada bu hodisalarning rosa 80 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

Yechish. $n=400$; $m=80$; $p=0,2$; $q=0,8$.

Yuqoridagi teoremadan foydalanamiz:

$$P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{1}{8} \varphi(x),$$

bunda $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$ jadvaldan $\varphi(0) = 0,3989$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$P_{400}(80) \approx \frac{0,3989}{8} = 0,04986.$$

Muavr-Laplasning integral teoremasi

Agar A hodisaning n ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning m_1 dan m_2 tagacha ro'y berish ehtimolligi $P(m_1 \leq m \leq m_2)$ taqriban quyidagicha hisoblanadi:

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

2-misol. Ixtiyoriy olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimolligi 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan yaroqsizlari soni 70 tadan 130 tagacha bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish. $p=0,2$; $q=0,8$; $n=400$; $m_1=70$; $m_2=130$.

U holda

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -\frac{10}{8} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 \cdot 0,2}{8} = \frac{55}{8} = 6,25.$$

jadvaldan $\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,39435$, $\Phi(6,25) = 0,5$, chunki $x > 5$ da $\Phi(x) = 0,5$.

Demak, $P_{400}(70,130) \approx \Phi(6,25) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,39435 = 0,89435$.

3.3-§. Lokal limit teorema

Ehtimolliklar nazariyasida diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari uchun isbotlangan limit teoremlar *lokal teoremlar* deyiladi.

Kelgusida quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: agar ikkita ketma-ketlik

$\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ uchun $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ bo'lsa, bu munosabatni

$$a_n \sim b_n$$

ko'rinishda belgilaymiz (bu ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi).

O'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

berilgan bo'lsin. Agar bu ketma-ketlikning elementlari bir hil taqsimlangan va

$$\xi_k = \begin{cases} 1 \text{ ehtimolligi } p, \\ 0 \text{ ehtimolligi } 1-p, \end{cases} \quad 0 < p < 1$$

bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik *Bernulli sxemasini tashkil qiladi*, deymiz.

Haqiqatan ham, ξ_k Bernulli sxemasidagi k -chi tajribaning natijasiga mos keladi.

Agar $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ deb belgilansa, S_n tasodifiy miqdor Bernulli sxemasini

biror A xodisaning ro'y berishlar sonini ifodalab, uning taqsimoti

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

binomial taqsimot bo'ladi. Bizga ma'lumki, (1) formuladan n larning katta

qiymatlari uchun foydalanish qo'shimcha noqulayliklarni keltirib chiqaradi.

Shuning uchun ham $P(S_n = k)$ ehtimollikning $n \rightarrow \infty$ dagi asimptotikasini topish

zaruriyati yuzaga keladi. Shu maqsadda

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}, \quad 0 < x < 1$$

funksiyani kiritamiz.

1-teorema. Agar $n \rightarrow \infty, n-k \rightarrow \infty$ bo'lsa,

$$P(S_n = k) = P\left(\frac{S_n}{n} = p^*\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp\{-nH(p^*)\}$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu yerda $p^* = \frac{k}{n}$.

Isbot. Analiz kursidan Stirling formulasi deb ataluvchi quyidagi munosabat ma'lum:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bu formuladan foydalanib quyidagi ekvivalent munosabatlarni yozamiz:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi p^*(1-p^*)}} \exp\left\{-k \ln \frac{k}{n} - (n-k) \ln \frac{n-k}{n}\right\} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\{k \ln p + (n-k) \ln(1-p)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp\{-n[p^* \ln p^* + (1-p^*) \ln(1-p^*)]\} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\{-n[p^* \ln p - (1-p^*) \ln(1-p)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp\{-nH(p^*)\}. \end{aligned}$$

1-teorema isbot bo'ldi.

$H(x)$ funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekanligini ko'rish qiyin emas. Xususan,

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p}, \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

O'z-o'zidan ko'rinadiki, $H(p) = H'(p) = 0$ va $p^* - p \rightarrow 0$ bo'lganda quyidagi yoyilma o'rinli bo'ladi:

$$H(p^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) (p^* - p)^2 + O(|p^* - p|^3), \quad q = 1 - p.$$

Bu yoyilmadan 1-teoremaga asosan kelib chiqadiki, $p^* \square p$ va $n(p^* - p)^3 \rightarrow 0$ bo'lsa

$$P(S_n = k) \square \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{n}{2pq} (p^* - p)^2 \right\}.$$

Agar $\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ bo'lsa oxirgi ekvivalentlik

munosabatidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $z = n(p^* - p) = k - np = o(n^{2/3})$ bo'lsa,

$$P(S_n = k) = P(S_n - np = z) \square \varphi(z\Delta) \cdot \Delta. \quad (2)$$

Keltirilgan (2) ekvivalentlik munosabatini *Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi* deb ham ataladi. Bu formula $p^* \approx p$ bo'lganda $\{S_n < m\}$ ko'rinishidagi hodisalarning ehtimolligini baholashga imkon beradi. Agar p^* tub ma'noda p dan farq qilsa, bu ehtimollikni oldingi 3.1-§ da keltirilgan natijalardan foydalanib baholash mumkin.

Misol. Aytaylik toq sondagi $n = 2m + 1$ hay'at a'zolaridan har biri boshqalarga bog'liq bo'lmagan holda $p = 0,7$ ehtimollik bilan to'g'ri qaror qabul qiladi. Ko'pchilik ovoz bilan qabul qilingan qarorning to'g'ri bo'lishining ehtimolligini 0,99 dan kam bo'lmasligini ta'minlaydigan hay'at a'zolarining minimal soni topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor $\xi_k = 1$ deymiz, agar k -chi hay'at a'zosi to'g'ri qaror qabul qilsa, aksincha $\xi_k = 0$ deymiz, agar k -chi hay'at a'zosi noto'g'ri qaror qabul qilsa. Masalaning ma'nosi bo'yicha bizni n ning shundek toq qiymatlari

¹ Asimptotik analizda ko'p qullaniladigan belgilashlarni eslatib o'tamiz: agar $b(x) > 0$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 0$ bo'lsa, $x \rightarrow x_0$ da $a(x) = o(b(x))$ deymiz; agar $\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|a(x)|}{b(x)} < \infty$ bo'lsa, $a(x) = O(b(x))$ deymiz.

qiziqtiradiki, ular uchun $P(S_n \leq m) \leq 0,01$ bo'lishi kerak. Tushunarliki, qabul qilingan qarorning aniqligiga n ning katta qiymatlarida erishish mumkin. Oldingi 3.1-§ da keltirilgan natijalarga asosan,

$$Q_n(m) = P(S_n \leq m) \approx \frac{m+1-m}{(n+1)p-m} P(S_n = m) \approx \frac{p}{2p-1} P(S_n = m).$$

Biz ko'rayotgan masalada $p^* \approx \frac{1}{2}$, $H\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 4p(1-p)$, $H'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1-p}{p}$. Bularni hisobga olgan holda, $P(S_n = m)$ ehtimollikni 1-teorema yordamida baholaymiz:

$$\begin{aligned} P(S_n \leq m) &\approx \frac{p}{2p-1} \sqrt{\frac{2}{np}} \exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right\} \approx \\ &\approx \frac{p}{2p-1} \sqrt{\frac{2}{np}} \exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} H'\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{2p(1-p)}}{(2p-1)\sqrt{\pi n}} \left(\sqrt{4p(1-p)}\right)^n \approx 0,915 \frac{1}{\sqrt{n}} (0,84)^{n/2} = a(n). \end{aligned}$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, $a(n)$ monoton kamayuvchi funksiya va

$$a(n) = 0,01$$

tenglamaning yechimi $n=33$ bo'ladi. Bu javobga aniq formulalardan va kompyuterdan foydalanib ham kelish mumkin.

Endi $P(S_n = k)$ ehtimollikni 1-teoremaga asolanib baholashdagi yuzaga keladigan xatoliklarni o'rganishga o'tamiz. Buning uchun Stirling formulasidagi qoldiq hadning quyidagi bahosidan foydalanamiz:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} e^{\theta_n}, \quad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

(V. Feller. Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya. Moskva, 1984. T.1, 66-bet.).

2-Teorema. Quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp\{-nH(p^*) + \theta(k, n)\}.$$

Bu yerda

$$\theta(k, n) = |\theta(n) - \theta(k)\theta(n-k)| < \frac{1}{12k} + \frac{1}{12(n-k)} = \frac{1}{12np^*(1-p^*)}.$$

Bu teoremadan foydalanib Muavr-Laplasning lokal teoremasidagi qoldiq hadning bahosini ham topish mumkin, ya'ni (2) munosabatni aniqlashtirish mumkin. Buni quyidagi teorema ko'rinishida keltiramiz.

3-teorema. Quyidagi

$$|p^* - p| \leq \frac{1}{2} \min(p, q)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha k lar uchun

$$P(S_n = k) = \varphi(2)\Delta(1 + \varepsilon(k, n)) \quad (3)$$

va

$$1 + \varepsilon(k, n) = \exp\left\{\theta\left[\frac{|z|^3}{3}\Delta^4 + \left(|z| + \frac{1}{6}\right)\Delta^2\right]\right\}, \quad |\theta| < 1.$$

Agar $x \rightarrow 0$ da $e^x - 1 = O(x)$ ekanligini hisobga olsak, u holda (3) munosabatning qoldiq hadi qanday tartibda 0 ga intilish tartibini topish mumkin.

3.4-§. Puasson teoremasi

Yuqorida $P(S_n = k)$ ehtimolliklar uchun aniq baholar keltirildi. Ulardan ko'rinadiki, agar p va $q = 1 - p$ lar musbat bo'lib fiksirlanganida npq miqdor katta qiymatlar qabul qilsa, Muavr-Laplas teoremasi bu ehtimolliklar uchun eng yaxshi approksimatsion ifodalar beradi. Lekin, masalan, $p = 0,001$ va $n = 1000$ bo'lsa $np = 1$ va n katta son bo'lishiga qaramasdan Muavr-Laplas teoremasidan foydalanib bo'lmaydi. Bu holda $P(S_n = k)$ ehtimolliklarni Puasson taqsimoti orqali approksimatsiyalash qulay bo'lar ekan.

Har qanday B to'plam uchun parametri λ bo'lgan Puasson taqsimoti

$$\Pi_{\lambda}(B) = \sum_{0 \leq k \in B} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

tenglik bilan aniqlanishini eslatib o'tamiz.

1-teorema. To'g'ri chiziqdagi har qanday B to'plam uchun

$$|P(S_n \in B) - \Pi_{\lambda}(B)| \leq \frac{\lambda^2}{n}, \quad \lambda = np.$$

Bu teoremaning isbotini ehtimolliklar nazariyasida ko'p ishlatiladigan "bitta ehtimolliklar fazosi" metodini qo'llagan holda keltiramiz. Bu metodning asosida tasodifiy miqdor S_n berilgan ehtimollik fazosida, S_n ga yaqin bo'lgan shundak S_n^* tasodifiy miqdor aniqlaniladiki, bu tasodifiy miqdor $\Pi_{\lambda}(\cdot)$ Puasson taqsimotga ega bo'ladi.

Quyida biz bu metod yordamida

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar har xil taqsimlangan holda (bir jinsli bo'lmagan Bernulli sxemasi) 1-teorema o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Bu holda Bernulli tajribalari sxemasida har bir tajribada 1 ning paydo bo'lish ehtimolligi p tajribaning nomeriga bog'liq bo'ladi.

Oldindagidek, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{ehtimolligi } p_j, \\ 0 & \text{ehtimolligi } 1 - p_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, va $\lambda = ES_n = \sum_{j=1}^n p_j$ bo'lsin.

2-teorema. Har qanday B to'plam uchun

$$|P(S_n \in B) - \Pi_{\lambda}(B)| \leq \sum_{j=1}^n p_j^2.$$

Bu teorema isbotini keltirishdan oldin Puasson taqsimotining quyidagi xossasini isbotlaymiz.

Lemma. Agar η_1 va η_2 miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib, η_1 parametri λ_1 , η_2 esa parametri λ_2 bo‘lgan Puasson taqsimotlariga ega bo‘lsalar, $\eta_1 + \eta_2$ yig‘indi parametri $\lambda_1 + \lambda_2$ bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega bo‘ladi.

Isbot. To‘la ehtimollik formulasiga asosan

$$\begin{aligned} P(\eta_1 + \eta_2 = k) &= \sum_{j=0}^k P(\eta_1 = j, \eta_2 = k - j) = \sum_{j=0}^k P(\eta_1 = j)P(\eta_2 = k - j) = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{\lambda_1^j e^{-\lambda_1}}{j!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-j} e^{-\lambda_2}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Lemma isbot bo‘ldi.

2-teoremaning isboti. Faraz qilaylik

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

– bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lsin.

Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ da quyidagi tasodifiy miqdorlarni aniqlaymiz:

$$\xi_j(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \omega_j < 1 - p_j, \\ 1, & \text{agar } \omega_j \geq 1 - p_j, \end{cases} \quad 0 \leq p_j \leq 1,$$

$$\xi_j^*(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \omega_j < e^{-p_j}, \\ k \geq 1, & \text{agar } \omega_j \in [\pi_k, \pi_{k-1}], \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

va bu yerda $\pi_k = \sum_{m=0}^k e^{-p_j} \frac{(p_j)^m}{m!}$, $k = 0, 1, \dots$

Bevosita ishonish mumkinki, $\xi_j(\omega)$ lar bog‘liqsiz va parametri p_j bo‘lgan Bernulli taqsimotiga, $\xi_j^*(\omega)$ lar ham bog‘liqsiz bo‘lib, parametri p_j bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega bo‘ladilar. Yana bevosita tekshirib ko‘rish mumkinki, $1 - p_j \leq e^{-p_j}$ tengsizlik o‘rinli ekanligidan

$$\{\omega : \xi_j(\omega) \neq \xi_j^*(\omega)\} = \{\omega : \omega_j \in [1 - p_j, e^{-p_j}]\} \cup \{\omega : \omega_j \in [e^{-p_j} + p_j e^{-p_j}, 1]\}.$$

Bu oxirgi tenglikka asosan ($1 - e^{-x} \leq x$, $0 \leq x \leq 1$)

$$P(\xi_j \neq \xi_j^*) = (e^{-p_j} - 1 + p_j) + (1 - e^{-p_j} - p_j e^{-p_j}) = p_j (1 - e^{-p_j}) \leq p_j^2$$

$$(1 - e^{-x} \leq x, 0 \leq x \leq 1).$$

To'la ehtimollik formulasidan foydalanib va oxirgi tengliksizni hisobga olib quyidagi munosabatlarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned} P(S_n \in B) &= P(S_n \in B, S_n = S_n^*) + P(S_n \in B, S_n \neq S_n^*) = \\ &= P(S_n^* \in B) - P(S_n^* \in B, S_n \neq S_n^*) + P(S_n \in B, S_n \neq S_n^*), \\ |P(S_n \in B) - P(S_n^* \in B)| &\leq |P(S_n^* \in B, S_n \neq S_n^*) - P(S_n \in B, S_n \neq S_n^*)| \leq \\ &\leq P(S_n \neq S_n^*) \leq \sum_{j=1}^n p_j^2. \end{aligned} \quad (*)$$

Lemmaga asosan S_n^* tasodifiy miqdor parametri $\lambda = \sum_{j=1}^n p_j$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladi, ya'ni

$$P(S_n^* \in B) = \Pi_\lambda(B).$$

2-teoremaning isboti (*) munosabatning birinchi va oxirgisidan kelib chiqadi. Agar har qanday j uchun $p_j = p$ bo'lsa, $\lambda = np$ va 1-teorema o'rinli bo'ladi.

ξ_k tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan holga qaytamiz. 1-teoremadan foydalanish uchun, ya'ni $P(S_n = k)$ taqsimotni $\Pi_\lambda(\cdot)$ bilan approksimatsiyalash uchun masalani boshqacharoq qo'yishiga to'g'ri keladi, chunki np miqdor n o'sib borganda chegaralangan qolishi uchun $p = P(\xi_k = 1)$ ehtimollik 0 ga intilishi kerak. Buni esa fiksirlangan

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ta'minlash mumkin emas. Shuning uchun Puasson teoremasi holida seriyalar tashkil qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'rish zarur bo'ladi:

$\xi_1^{(1)}$	1-seriya
$\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}$	2-seriya

$\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}$	3-seriya
...
$\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$	n -seriya

Bu yerda yuqoridagi indeks seriya nomerini, quyi indeks esa tasodifiy miqdorning seriyadagi nomerini anglatadi.

Faraz qilaylik, n -chi seriyadagi $\xi_k^{(n)}$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, har qanday k uchun

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{ehtimolligi } p_n, \\ 0 & \text{ehtimolligi } 1 - p_n \end{cases}$$

bo'lsin. Endi $S_n = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}$ tasodifiy miqdorlar taqsimoti va $P_n(m) = P(S_n = m)$ ehtimolligi uchun quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

3-teorema. Agar $n \rightarrow \infty$ da $p_n \rightarrow 0$ shart bajarilsa, u holda

$$P_n(m) - \frac{(np_n)^m}{m!} e^{-np_n} \rightarrow 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. $a_n = np_n$ deb belgilaymiz va

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m q_n^{n-m}, \quad q_n = 1 - p_n$$

formuladan $p_n = \frac{a_n}{n}$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

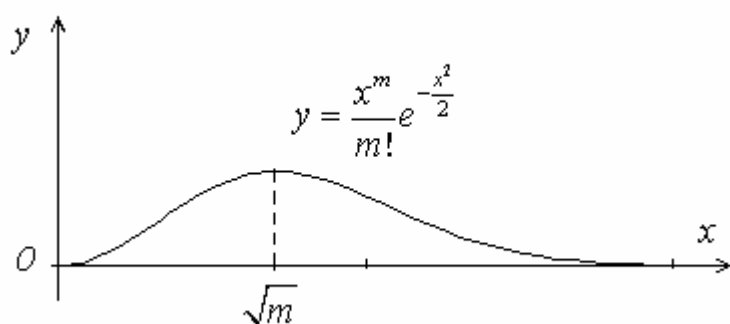
$$\begin{aligned} P_n(m) &= C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{a_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{n^m} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Aytaylik, m tayinlangan (fiksirlangan) bo'lsin. Quyidagi ikki holni ko'rib chiqamiz:

1-hol. a_n – chegaralanmagan, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da $a_n \rightarrow \infty$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $0 \leq x \leq 1$ uchun $1 - x < e^{-x}$ ekanini va (1) ni hisobga olsak,

$$I = \left| P_n(m) - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| \leq P_n(m) + \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \leq \frac{a_n^m}{m!} e^{-\frac{n-m}{n} a_n} + \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \quad (2)$$

munosabat hosil bo'ladi.



11-rasm

Endi $y = \frac{x^m}{m!} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyani qaraymiz (11-rasm). Agar $x = 0$ bo'lsa, u holda $y = 0$

va $x \rightarrow \infty$ da esa $y \rightarrow 0$. y eng katta qiymatiga $x = \sqrt{m}$ da erishadi. Bu funksiyaning grafigi yuqorida keltirilgan. Natijada ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday A_ε son topiladiki, yetarlicha katta n ($n > \sqrt{m}$) lar uchun $a_n > A_\varepsilon$ bo'lganida

$$\frac{a_n^m}{m!} e^{-\frac{n-m}{n} a_n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

bo'ladi. Demak, (2) va (3) dan $I < \varepsilon$ ekani kelib chiqadi.

2-hol: a_n – chegaralangan bo'lsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ topiladiki, $n > n_0(\varepsilon)$ bo'lganida ushbu tengsizliklar bajariladi:

$$\left| \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n - e^{-a_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\left| \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu tengsizliklardan va (1) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} \left| P_n(m) - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| &= \left| \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m} \cdot \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| = \\ &= \left| \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m} \cdot \left[\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n - e^{-a_n} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) e^{-a_n}}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m} + \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| \leq \\ &\leq \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n} \cdot \left| \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n - e^{-a_n} \right| + \\ &\quad + \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \cdot \left| \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Puasson teoremasi A hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimolligi nolga teng bo‘lganida ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Bu holda $a_n = 0$ bo‘ladi.

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ifodani kiritaylik. $P(m)$ miqdorlar $\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$ tenglikni qanoatlantirishini ko'rish

qiyin emas. Haqiqatan ham, $\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^a = 1$.

Hosil qilingan ehtimolliklar taqsimoti *Puasson qonuni* deyiladi.

Misol. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,001 ga teng. Agar 5000 ta o'q otiladigan bo'lsa, ikkita va undan ortiq o'qning nishonga tegish ehtimolligini toping.

Yechish. Nishonga tekkan o'qlar sonini μ_n desak, izlanayotgan ehtimollik $P(\mu_n \geq 2)$ dan iborat bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(\mu_n \geq 2) = \sum_{m=2}^n P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1).$$

$a_n = n \cdot p = 5000 \cdot 0,001 = 5$ ekanini e'tiborga olsak, $P_n(0)$, $P_n(1)$ ehtimolliklar Puasson formulasi yordamida osongina topiladi:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = e^{-5},$$

$$P_{5000}(1) = \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = 5e^{-5},$$

u holda $P(\mu_{5000} \geq 2) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0,9596$.

$P_{5000}(m)$ ehtimollik $m = 4$ va $m = 5$ bo'lganida ushbu maksimum qiymatga erishadi:

$$P_{5000}(4) = P_{5000}(5) \approx 0,1755.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi deganda nimani tushunasiz?
2. Bernulli sxemasini tushuntirib bering.
3. Binomial taqsimot formulasini yozing va unga doir misollar keltiring.

4. Muavr-Laplasning lokal teoremasi nimadan iborat?
5. Muavr-Laplasning lokal teoremasi tadbqiqiga misol keltiring.
6. Muavr-Laplasning integral teoremasi nimadan iborat?
7. Muavr-Laplasning integral teoremasi qanday ahamiyatga ega? U qanday masalalarga tadbqiq qilinadi?
8. Lokal va integral teoremlar tadbqiq qilinadigan masalalar orasidagi farq nimalardan iborat?
9. Puasson teoremasini aytib bering.
10. Muavr-Laplas teoremasining shartlari Puasson teoremasining shartlaridan nima bilan farq qiladi?
11. Ehtimolliklar nazariyasining asimptotik formulalari qanday maqsadlarga xizmat qiladi?
12. Nima uchun Puasson qonuni kam yuz beruvchi hodisalar qonuni deb ataladi?

Misol va masalalar

1. Biror mergan uchun bitta o'q uzishda nishonga tegishi ehtimolligi 0,8 ga teng va o'q uzish tartibiga bog'liq emas. 5 marta o'q uzilganida nishonga rosa 2 marta tegish ehtimolligini toping.

Javob: 0,0512.

2. Tajriba 3 ta o'yin kubigini tashlashdan iborat bo'lsin. 5 ta bog'liqsiz tajribada 2 marta 3 ta bir raqami tushish ehtimolligini toping.

Javob: 0,00021137.

3. Zavod omborga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo'lda shikastlanish ehtimolligi 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo'lda

- A) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimoliligini;
- B) 3 tadan ko'p bo'lmagani shikastlanishi ehtimolligini;
- C) 3 tadan ko'pi shikastlanish ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,06313; B) 0,981; C) 0,019.

4. Do‘kon 1000 shisha ma‘danli suv oldi. Tashib keltirishda 1 ta shishaning sinib qolishi ehtimolligini 0,003 ga teng. Do‘konga keltirilgan shisha idishlarning:

- A) rosa 2 tasi;
- B) 2 tadan kami;
- C) 2 tadan ko‘pi;
- D) hech bo‘lmaganda bittasi singan bo‘lishi ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,224; B) 0,1992; C) 0,5768; D) 0,95.

5. Uzunligi 15 sm bo‘lgan AB kesma C nuqta bilan 2:1 nisbatda bo‘lingan. Bu kesmaga tavakaliga 4 ta nuqta tashlanadi. Ulardan ikkitasi C nuqtada chaproqqa, ikkitasi o‘ngroqqa tushishi ehtimolligini toping (nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesma uzunligiga proporsional va uning joylashishiga bog‘liq emas deb faraz qilinadi).

Javob: 8/27.

6. Ishchi ayol 300 ta urchuqqa xizmat ko‘rsatadi. τ vaqt oralig‘ida har bir urchuqda yigirilayotgan ipning uzilish ehtimolligi 0,005 ga teng. Uzilishlarning eng katta ehtimollik sonini va bu sonning ehtimollikini toping.

Javob: 0,2.

7. Ayrim o‘q uzishda o‘qning nishonga tegish ehtimolligi 0,63 ga teng. Nishonga kamida 10 ta o‘qni 0,9 ga teng ehtimollik bilan tekkizish uchun nechta o‘q o‘zish kerak bo‘ladi?

Javob: $n \geq 20$.

8. t vaqt ichida bitta kondensatorning ishdan chiqishi ehtimolligi 0,2 ga teng. t vaqt ichida 100 ta bir-biriga bog‘liqsiz ishlovchi kondensatordan:

- A) kamida 20 tasi ishdan chiqishi;

B) 28 tadan kami ishdan chiqishi;

C) 14 tadan 28 tagachasining ishdan chiqish ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,55; B) 0,98; C) 0,9.

9. O'yin kubigi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta ko'pi bilan 5 marta tushishi ehtimolligini toping.

Javob: 0,488.

10. Kesma 4 ta teng bo'lakka bo'lingan. Kesмага 8 ta nuqta tavakaliga tashlangan. Kesmaning to'rtta bo'lagining har biriga ikkitadan nuqta tushish ehtimolligini toping. Nuqtaning kesмага tushish ehtimolligi kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning kamayishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

$$\text{Javob: } P = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

III-bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Tanga 5 marta tashlanadi. "Gerbli" tomoni ikki martadan kam tushish ehtimolligini toping.

A) $P_5(0)+P_5(1)$

B) $P_5(5)+P_5(0)$

C) $P_5(1)$

D) $P_5(0)$

2. Tanga 5 marta tashlanadi. "Gerbli" tomoni ikki marta tushish ehtimolligini toping.

A) $P_5(0)+P_5(1)$

B) $1-(P_5(0)+P_5(1))$

C) $1-(P_5(5)+P_5(0))$

D) $P_5(2)$

3. Oilada 5 farzand bor. Bu bolalar orasida ikkita o'g'il bola bo'lish ehtimolligini toping. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolligini 0,51 ga teng deb oling.

- A) 0,48
- B) 0,31
- C) 0,51
- D) 0,5

4. Oilada 5 farzand bor. Bu bolalar orasida ko'pi bilan ikki o'g'il bola bo'lish ehtimolligini toping. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolligini 0,51 ga teng deb oling.

- B) 0,51
- C) 0,2
- D) 0,48
- E) 1

5. Hodisaning 25 ta bog'liqsiz tajribaning har birida ro'y berish ehtimolligi $p=0,8$ ga teng. Hodisaning kamida 11 marta va ko'pi bilan 23 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

- A) 0,9331
- B) 0,2321
- C) 0,4831
- D) 1

6. O'yin kubigi 20 marta tashlab ko'rilayotgan bo'lsin. Bir raqamli tomonining tushishining eng ehtimolli sonini toping.

- A) Eng ehtimolli son 3 bo'ladi.
- B) Eng ehtimolli son 4 bo'ladi.
- C) Eng ehtimolli son 1 bo'ladi.

D) Eng ehtimolli son 2 bo'ladi.

7. Hodisaning 676 ta bog'liqsiz tajribaning har birida ro'y berish ehtimolligi 0,9 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlanishi absolyut qiymati 0,03 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolligini toping.

A) 0,9906

B) 0,9331

C) 0,2321

D) 0,4831

8. Hodisaning bog'liqsiz tajribalarning har birida ro'y berish ehtimolligi $p = 0,75$ ga teng. Hodisa ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,03 dan ortiq bo'lmasligini 0,4972 ehtimollik bilan kutish mumkin bo'lishi uchun o'tkazilishi lozim bo'lgan tajribalar soni n ni toping.

A) 93

B) 91

C) 92

D) 94

9. O'yin kubigi uch marta tashlanadi. Bunda ikki marta 6 ochko tushish hodisasining ehtimolligini toping.

A) $P_3(2) = \frac{5}{72}$

B) $P_3(2) = \frac{4}{72}$

C) $P_3(2) = \frac{5}{70}$

D) $P_3(2) = \frac{3}{71}$

10. Hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi $p=0,7$ ga teng. Bu hodisa ro‘y berishining eng ehtimolli soni $\mu_0 = 35$ ga teng bo‘lishi uchun nechta bog‘liqsiz tajriba o‘tkazilishi kerak?

A) $49 < n < 50$

B) $48 < n < 50$

C) $47 < n < 50$

D) $46 < n < 50$

11. Tangani 400 marta tashlash tajribasi o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bunda gerbli tomonining 200 marta tushishi hodisasi ehtimolligini toping.

A) $P_{400}(200) = 0,0397$

B) $P_{400}(200) = 0,0337$

C) $P_{400}(200) = 0,0377$

D) $P_{200}(400) = 0,0397$

12. Tangani 8 marta tashlanadi. Bunda “gerbli” tomoni bilan 6 marta tushishi hodisasining ehtimolligini toping.

A) $\frac{7}{64}$

B) $\frac{6}{73}$

C) $\frac{9}{74}$

D) $\frac{5}{64}$

13. Ixtiyoriy olingan detalning nostandart chiqish hodisasi ehtimolligi $p=0,4$ ga teng. Tasodifan olingan 2400 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining 1000 tadan 1060 tagacha bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

A) $P_{2400}(1000,1060)=0,0484$

B) $P_{2400}(960,1060)=0,0484$

C) $P_{2400}(960,1060)=0,0472$

D) $P_{2400}(960,1000)=0,0484$

14. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng. 100 ta o‘q uzilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolligini toping.

A) $P_{100}(25) = 0,0397$

B) $P_{100}(75) = 0,04565$

C) $P_{400}(20) = 0,0377$

D) $P_{100}(75) = 0,4565$

15. O‘g‘il bola tug‘ilish ehtimolligi 0,51ga teng. Tug‘ilgan 100ta chaqaloqning 50 tasi o‘g‘il bola bo‘lish ehtimolligini toping.

A) $P_{100}(25) = 0,0397$

B) $P_{10}(50) = 0,04565$

C) $P_{100}(50) = 0,0782$

D) $P_{100}(50) = 0,4565$

16. Tanga $2N$ marta tashlanadi (N – katta son). “Gerbli” tomon rosa N marta tushish ehtimolligini toping.

A) $P_{2N}(N) = 0,5642/\sqrt{N}$

B) $P_N(2N) = 0,5642/\sqrt{N}$

C) $P_{2N}(N) = 0,5642$

D) $P_{2N}(N) = 0,5642/N$

17. Hodisaning bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida ro‘y berish ehtimolligi 0,8 ga teng. Hodisaning kamida 75 marta ro‘y berishini 0,9 ehtimollik bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun nechta tajriba o‘tkazish lozim?

A) 93

B) 91

C)100

D) 101

18. p ta tajribaning har birida ijobiy natija olish ehtimolligi 0,9 ga teng. Kamida 150 ta tajribada ijobiy natija olinishini 0,98 ehtimollik bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish lozim?

A)107

B) 177

C)100

D) 101

IV-BOB. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

4.1-§. Stiltes integrali

Ehtimolliklar nazariyasining ko'p masalalari to'g'ri chiziqda aniqlangan funksiyalar uchun integral tushunchasini umumlashtirishni taqozo qiladi.

Biz bu paragrafda oddiy Riman integralining umumlashgan varianti Stiltes integralining ta'rifini keltiramiz. Stiltes integralining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Faraz qilaylik, chekli (a, b) intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya va shu intervalda aniqlangan kamaymaydigan, variatsiyasi chegaralangan $F(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun $F(x)$ chapdan uzluksiz bo'lsin deb faraz qilamiz. (a, b) intervalni $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ nuqtalar yordamida quyidagicha

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

n ta bo'lakka bo'lamiz va ushbu

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \quad (1)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yerda \bar{x}_i nuqta (x_{i-1}, x_i) intervalga tegishli ixtiyoriy nuqtadir. Endi, bo'linish nuqtalarini sonini shunday orttiramizki, maksimal uzunlikka ega bo'lgan xususiy intervallarning uzunligi nolga intilsin. Agar shu holda I_n yig'indi

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

chekli limitga intilsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ integrallovchi funksiya bo'yicha olingan *Stiltes integrali* deyiladi va

$$I = \int_a^b f(x) dF(x)$$

kabi belgilanadi.

Integral chegaralari cheksiz bo'ladigan Stiltesning xosmas integrali ham odatdagicha aniqlanadi:

Ixtiyoriy $[a, b]$ chekli oraliqda Stiltes integrali olinadi hamda a va b sonlar ixtiyoriy ravishda $-\infty$ va $+\infty$ ga intilganida

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dF(x)$$

limit mavjud bo'lsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ funksiya bo'yicha $(-\infty; +\infty)$ oraliqda olingan Stiltes integrali deyiladi va

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x)$$

kabi belgilanadi.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, (1) yig'indining limiti integrallash oraliqlari chekli bo'lganda ham, cheksiz bo'lganda ham mavjudligini isbotlash qiyin emas. Ba'zi hollarda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lganda ham Stiltes integrali mavjud bo'ladi.

Bunday integrallarni qarash ehtimolliklar nazariyasi uchun (matematik kutilma, dispersiya, momentlar va boshqalarni o'rganishda) muhim ahamiyatga egadir.

Bundan keyin hamma yerda $|f(x)|$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud bo'lgandagina $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud deb qaraymiz.

Ehtimolliklar nazariyasining maqsadlarini e'tiborga olib, Stiltes integralining ta'rifini $f(x)$ funksiya chekli yoki sanoqli sonda uzilish nuqtalariga ega bo'lgan hol uchun kengaytirish muhimdir.

Har qanday chegaralangan hamda chekli yoki sanoqli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya variatsiyasi chegaralangan ixtiyoriy integrallovchi funksiya bo'yicha integrallanuvchidir. Bu holda uzilish nuqtalarini intervalning bo'linish nuqtalari sifatida olishga to'g'ri keladi. Shuningdek, integral

chegaralarini ko'rsatishda bu chegara integrallash oralig'iga tegishli bo'lishi yoki tegishli bo'lmasligini ko'rsatish muhimdir. Haqiqatdan ham, Stiltes integralining ta'rifidan quyidagiga ega bo'lamiz. ($a-0$ simvol a ni integrallash oralig'iga tegishli bo'lishi, $a+0$ simvol esa a ni integrallash oralig'idan chiqarib tashlanganligini bildiradi):

$$\begin{aligned} \int_{a-0}^b f(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \lim_{x_1 \rightarrow x_0=a} f(\tilde{x}_1) F(x_1) - F(x_0) = \\ &= \int_{a+0}^b f(x) dF(x) + f(a) [F(a+0) - F(a)]. \end{aligned}$$

Shunday qilib, agar $f(a) \neq 0$ va $F(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada sakrashga ega bo'lsa, u holda

$$\int_{a-0}^b f(x) dF(x) - \int_{a+0}^b f(x) dF(x) = f(a) [F(a+0) - F(a)].$$

Bu ifoda shuni ko'rsatadiki, bitta nuqtaga keltiriladigan oraliq bo'yicha olingan Stiltes integrali noldan farqli natija berishi mumkin.

Keyingi yozuvlarimizda, agar alohida ko'rsatma berilmagan bo'lsa, oraliqning oxirgi nuqtasini integrallash oralig'idan chiqarib tashlaymiz, boshlanish nuqtasini esa integrallash oralig'iga kiritilishini kelishib olamiz. Bu shart quyidagi tenglikni yozishga imkon beradi:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

Xaqiqatdan ham, ta'rifga asosan,

$$\int_a^b dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a),$$

chunki $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz bo'lgani uchun $F(b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon)$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar $F(x)$ funksiya $p(x)$ hosilaga ega va uning integralidan iborat bo'lsa, u holda chekli orttirmalar formulasiga asosan

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

munosabatni yozamiz, bunda $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) p(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'lib, Stiltes integrali oddiy integralga keltiriladi. Agar $F(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada sakrashga ega bo'lsa, oraliqlarni bo'lishni shunday tanlaymizki, $x_k < c < x_{k+1}$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^k f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \right. \\ &+ \left. f(c) [F(x_{k+1}) - F(x_k)] \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k+2}^n f(\bar{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\ &= \int_a^b f(x) dF(x) + \int_{c+0}^b f(x) dF(x) + f(c) [F(c+0) - F(c)] \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz. Xususiyl holda $F(x)$ funksiyaning sakrashlari $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ nuqtalarda bo'lsa, u holda Stiltes integrali qator ko'rinishida ifodalanadi:

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n) [F(c_n + 0) - F(c_n)].$$

Stiltes integrali quyidagi xossalarga ega:

1) $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ bo'lganda

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) dF(x), \quad [a = c_0, b = c_{n+1}];$$

$$2) \int_a^b c f(x) dF(x) = c \int_a^b f(x) dF(x);$$

$$3) \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) dF(x) = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x) dF(x);$$

4) $f \geq 0$ va $a < b$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x) dF(x) \geq 0$;

5) Agar $F_1(x)$, $F_2(x)$ lar o'zgarishi (variatsiyasi) chegaralangan monoton funksiyalar va c_1, c_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) d[c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)] = c_1 \int_a^b f(x) dF_1(x) + c_2 \int_a^b f(x) dF_2(x)$$

bo'ladi;

6) Agar $F(x) = \int_c^x g(u) dG(u)$, c – o'zgarmas son, $g(u)$ – uzluksiz

funksiya, $G(u)$ – chegaralangan variatsiyali kamaymaydigan funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) g(x) dG(x)$$

bo'ladi.

4.2-§. Matematik kutilma, uning ehtimollik ma'nosi va xossalari

Tasodifiy miqdor haqida to'liq ma'lumotni uning taqsimot funksiyasi yordamida olish mumkinligi bizga ma'lum. Haqiqatan ham taqsimot funksiya tasodifiy miqdorning qaysi qiymatlarni qanday ehtimolliklar bilan qabul qilishini aniqlashga imkon beradi. Lekin ba'zi hollarda tasodifiy miqdor haqida kamroq ma'lumotlarni bilish ham etarli bo'ladi. Ehtimolliklar nazariyasi va uning amaliyotdagi tadbirlarida tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari orqali ma'lum qoidalar asosida topiladigan ba'zi o'zgarmas sonlar muhim rol o'ynaydilar. Bunday sonlar orasida tasodifiy miqdorlarning umumiy miqdoriy xarakteristikalarini bilish uchun matematik kutilma, dispersiya va turli tartibdagi momentlar juda muhimdir.

Tasodifiy miqdorning biz dastlab tanishadigan asosiy sonli xarakteristikasi uning matematik kutilmasidir.

ξ diskret tasodifiy miqdor $\{x_k\}$ qiymatlarni $\{p_k\}$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin. Unda,

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

1-ta'rif. ξ diskret tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* deb ushbu

$$E\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksiz bo'lishi ham mumkin. Bu holda $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ va matematik kutilmani ta'riflash uchun

$$E\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (1)$$

qatordan foydalaniladi. Matematik kutilma mavjud bo'lishi uchun (1) qatorni absolyut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

Ba'zi misollarni qarab chiqamiz.

1-misol. A hodisaning ro'yi berish ehtimolligi p ga teng bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'yi berish sonining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro'yi berish sonini ξ deb belgilaylik. U holda

$$\begin{array}{l} \xi: 0 \quad 1 \\ P: q \quad p' \end{array}$$

bu erda $p + q = 1$ va 1-ta'rifga asosan, $E\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

2-misol. (n, p) parametrli binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish: ξ orqali A hodisaning n ta bog'liqsiz tajribalarda ro'y berish sonini belgilasak, $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ tenglik o'rinli ekani bizga ma'lum. Matematik kutilma ta'rifiga ko'ra

$$E\xi = \sum_{k=1}^n k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(q + p)^{n-1} = n \cdot p.$$

3-misol. Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish: $P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ tenglik o'rinli ekani bizga ma'lum.

Uning taqsimot qonunini ushbu jadval ko'rinishida yozamiz.

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$...

Matematik kutilmasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} E\xi &= 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots + m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} + \dots = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Qavs ichidagi qator e^λ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasidir. Shuning uchun matematik kutilma $E\xi = \lambda$. Shunday qilib, biz Puasson taqsimot qonuniga kirgan λ parametrning ehtimolliiy ma'nosini topdik: λ parametr tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga teng.

ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, ushbu

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (2)$$

integralga (agar bu integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa) aytiladi.

4-misol. (a, σ^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ta'rifga asosan

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + a = a \end{aligned}$$

Demak, (a, σ^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a parametrga teng ekan.

5-misol. ν parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan τ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$E\tau = \int_0^{\infty} x\nu e^{-\nu x} dx = \frac{1}{\nu}.$$

6-misol. $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi quyidagicha topiladi:

$$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}.$$

3-ta'rif. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ kabi aniqlanadi.

Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi hamma vaqt ham mavjud bo'lavermasligini eslatib o'tamiz. Masalan, tasodifiy miqdor Koshi qonuni bilan taqsimlangan bo'lsin, uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad |x| \leq \infty,$$

ko'rinishda bo'ladi va integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

mavjud bo'lmaydi.

Matematik kutilmaning ehtimollik ma'nosi

ξ tasodifiy miqdor ustida n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazilgan bo'lsin. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

$$\begin{aligned} \xi &: x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \\ n &: n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k \end{aligned}$$

Yuqori satrda ξ miqdorning kuzatilgan qiymatlari, pastki satrda esa mos qiymatlarning chastotalari ko'rsatilgan, ya'ni n_1 son n_1 ta tajribada ξ miqdor x_1 ga teng qiymat qabul qilinganligini bildiradi va hakoza.

\bar{X} orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda,

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n},$$

yoki

$$\bar{X} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n} = x_1 \cdot p_1^* + x_2 \cdot p_2^* + \dots + x_k p_k^*.$$

Bu yerda $p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*$ – mos ravishda x_1, x_2, \dots, x_k qiymatlarning nisbiy chastotalari. Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda $p_1^* \approx p_1, \dots, p_k^* \approx p_k$ bo'ladi. Shuning uchun $\bar{X} \approx E\xi$, ya'ni ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o'ziga teng.

Isbot: c o'zgarmas sonni faqat bitta c qiymatni 1 ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun $Ec = c \cdot 1 = c$

2-xossa. $|E\xi| \leq E|\xi|$ tengsizlik o'rinli.

Bu xossaning isboti matematik kutilmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

3-xossa. $E\xi$, $E\eta$ va $E(\xi + \eta)$ larning ixtiyoriy ikkitasi mavjud bo'lsa, u holda ushbu $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Isbotni diskret hol uchun keltiramiz. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, ehtimolliklar bilan, η tasodifiy miqdor esa $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$, qiymatlarni mos ravishda $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$, ehtimolliklar bilan qabul qilsin, u holda $\xi + \eta$ yig'indining qabul qiladigan qiymatlari $\{x_k + y_l\}$ ($k = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$) ko'rinishdagi sonlardan iborat.

$p_{k,l}$ orqali ξ ning x_k va η ning y_l qiymatlarni qabul qilish ehtimolligini belgilaymiz. U holda to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} (x_k + y_l) p_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} p_{k,l} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} y_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,l} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k + \sum_{l=1}^{\infty} y_l q_l = E\xi + E\eta. \end{aligned}$$

1-natija. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$E\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n E\xi_k.$$

4-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutilma ishorasidan tashqariga chiqarib yozish mumkin: $Ec\xi = cE\xi$, $c = const$.

Isbot. Isbotni diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun alohida-alohida keltiramiz.

1-ta'rifdan va (1) dan foydalanib, diskret tasodifiy miqdor uchun ushbu

$$E(c\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} cx_i p_i = c \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = cE\xi$$

natijani hosil qilamiz.

(2) formulaga asosan uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ushbu

$$E(c\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} cxp(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = cE\xi.$$

5-xossa. ξ va η tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasin. Agar $E\xi$ va $E\eta$ mavjud bo‘lsa, u holda $E\xi\eta$ mavjud bo‘ladi va $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Isbot. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ehtimolliklar bilan, η tasodifiy miqdor $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin.

ξ va η tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsizligidan $\xi \cdot \eta$ tasodifiy miqdor $x_i \cdot y_j$ ko‘rinishdagi qiymatlarni $p_i q_j$ ehtimollik bilan qabul qiladi, natijada

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{i,j} x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \\ &= \sum_i x_i p_i \left(\sum_j y_j q_j \right) = E\xi E\eta. \end{aligned}$$

teoremaning teskarisi doim ham to‘g‘ri emas, ya‘ni $E\xi\eta = E\xi E\eta$ dan ξ va η ning o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi kelib chiqmaydi.

6-xossa. Agar $\alpha \leq \xi \leq \beta$ bo‘lsa, $\alpha \leq E\xi \leq \beta$.

7-xossa. Agar nomanfiy ξ tasodifiy miqdor uchun $E\xi = 0$ bo‘lsa, u holda $\xi = 0$ tenglik 1 ehtimollik bilan bajariladi.

Yuqoridagi 6 va 7 xossalarni isbotini talabalarga havola qilamiz.

4.3-§. Dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanish.

Dispersiyaning xossalari

Oldingi paragrafda biz tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymatini xarakterlovchi sonli xarakteristikalaridan biri - matematik kutilma bilan tanishdik. Biroq tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymatinigina bilish bilan uning qiymatlarining qanday joylashganligini ko‘z oldimizga keltira olmaymiz. Masalan, +1 va -1 qiymatlarning har birini 0,5 ga teng ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor uchun ham +100 va -100 qiymatlarning har birini xuddi shunday ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor uchun ham matematik kutilma

bir xil va nolga teng, shunga qaramasdan bu miqdorlar qiymatlarining umumiy matematik kutilmaga nisbatan tarqoqligi har xildir.

Tasodifiy miqdorning uning o'rtacha qiymatidan chetlanishini xarakterlash, ya'ni bu miqdor qiymatlarining tarqoqligini xarakterlash uchun uning boshqa sonli xarakteristikasi – dispersiyasi kiritiladi.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2. \quad (1)$$

Agar ξ tasodifiy miqdor x_k qiymatlarni mos p_k ehtimolliklar bilan qabul qilsa, $\eta = (\xi - E\xi)^2$ tasodifiy miqdor $(x_k - E\xi)^2$ qiymatlarni ham p_k ehtimolliklar bilan qabul qiladi va shu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

$$E\eta = D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E\xi)^2 p_k \quad (2)$$

formula o'rinli bo'ladi.

ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini ushbu formula bilan hisoblash qulaydir:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \quad (3)$$

Haqiqatan ham, matematik kutilmaning xossalaridan foydalanib, (3) ni isbotlash mumkin:

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = \\ &= E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + E(E\xi)^2 = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2. \end{aligned}$$

1-misol. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga teng bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonining dispersiyasini toping.

Yechish. Tasodifiy miqdorni quyidagicha kiritib

$$\xi = \begin{cases} 0, & q = 1 - p \text{ ehtimollik bilan,} \\ 1, & p \text{ ehtimollik bilan,} \end{cases}$$

$E\xi = p$ ekanini e'tiborga olsak, (2) ga asosan

$$\begin{aligned} D\xi &= (0 - E\xi)^2 \cdot q + (1 - E\xi)^2 p = p^2 q + (1 - p)^2 p = \\ &= p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = p \cdot q. \end{aligned}$$

2-misol. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. 4.1-§ ning, 2-misoliga ko'ra $E\xi = np$ edi. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ tenglikka asosan

$$\begin{aligned} D\xi &= \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = np \left[(n-1)p \sum_{k=1}^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \right] - (np)^2 = np((n-1)p + 1) - (np)^2 = npq. \end{aligned}$$

3-misol. Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Shu bobdagi 4.1-§ ning, 3-misoliga asosan $E\xi = \lambda$; (3) tenglikka asosan

$$D\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2. \quad (4)$$

Bu qatorning yig'indisini hisoblaymiz,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right] = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

Buni (4) munosabatga qo'ysak, $D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Demak, Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi teng ekan.

Endi uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasining ta'rifini beramiz. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif: Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb quyidagi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 p(x) dx$$

integralning qiymatiga aytiladi.

4-misol. (a, σ^2) -parametrlı normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. $E\xi = a$ ekanini e'tiborga olgan holda

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma} = z$ almashtirishni kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Hosil bo'lgan integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$D\xi = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2.$$

Demak, (a, σ^2) -parametrlı normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi σ^2 teng ekan.

5-misol. ν parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan τ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. 4.2-§ dagi 5-misolda hisoblangan $E\tau = \frac{1}{\nu}$ ni e'tiborga olib, (3)

formuladan foydalanaylik. Bu holda

$$D\tau = \nu \int_0^{\infty} x^2 e^{-\nu x} dx - \frac{1}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2}.$$

6-misol. $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. $E\xi = \frac{a+b}{2}$ ekanini hisobga olsak,

$$D\xi = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilmasi orasidagi ayirmaning – farqning kvadratiga bog‘liq ekaniga e‘tibor beraylik. Bu farq qanchalik katta bo‘lsa, dispersiyaning qiymati ham shuncha katta va aksinchadir. Shuning uchun dispersiya qiymatini qaralayotgan tasodifiy miqdor qiymatlarining ularning o‘rta qiymatiga nisbatan tarqoqlik xarakteristikasi deb qarash mumkin.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas sonning dispersiyasi 0 ga teng.

Isbot. 1- ta‘rifga asosan

$$Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = E0 = 0.$$

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor o‘zgarmas songa ko‘paytirilsa, u holda o‘zgarmas sonni kvadratga oshirib, dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin, ya‘ni

$$Dc\xi = c^2 D\xi.$$

Isbot. Dispersiyasining ta‘rifi bo‘yicha

$$D(c\xi) = E(c\xi - Ec\xi)^2 = E(c\xi - cE\xi)^2 = c^2 E(\xi - E\xi)^2 = c^2 D\xi.$$

3-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Isbot. Ta‘rifga asosan

$$D(\xi + \eta) = E((\xi + \eta) - E(\xi + \eta))^2.$$

Matematik kutilmaning xossasidan foydalansak,

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= E((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + \\ &+ E(\eta - E\eta)^2 = D\xi + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + D\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Endi $\xi - E\xi$ va $\eta - E\eta$ tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsizligini hisobga olsak, u holda

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi - E\xi) \cdot E(\eta - E\eta) = 0 \text{ bo‘ladi.}$$

Buni e'tiborga olsak, (5) formuladagi 3-xossaning isboti kelib chiqadi.

Natija. Chekli sondagi o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n D \xi_k .$$

Bu natijaning isboti talabalarga havola qilinadi.

Ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma = \sqrt{D\xi} .$$

O'rtacha kvadratik chetlanish σ amaliyot masalalarida ko'p ishlatiladi.

4.4-§. Yuqori tartibli momentlar

Tasodifiy miqdorlarning boshqa sonli xarakteristikalariga ham to'xtalib o'tamiz. Bunday xarakteristikalar sifatida ko'p hollarda yuqori tartibli momentlar ishlatiladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa,

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = E\xi^k, \quad k \geq 0$$

integral tasodifiy miqdorning *k-tartibli momenti* yoki *k-tartibli boshlang'ich momenti* deyiladi. Tushunarliki, agar

$$E|\xi|^k = \beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa, *k-tartibli m_k moment mavjud bo'ladi* ($|m_k| \leq \beta_k$). Ehtimolliklar nazariyasida m_k momentning mavjudligini β_k *k-tartibli absolyut moment mavjud bo'lgan hol bilan tenglashtiriladi.*

Agar ξ tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi $F(x)$ diskret tipda bo'lib, uning uzilish nuqtalari

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlikni tashkil qilsa, u holda Stiltes integralining xossasiga ko'ra k -tartibli moment

$$m_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k P_n$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$P_n = F(x_n + 0) - F_n(x_n - 0) = F(x_n + 0) - F(x_n) = P(\xi = x_n)$$

bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k P_n < \infty$$

qator yaqinlashadi deb faraz qilinadi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ uzulksiz tipda bo'lib, $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo'lsa ($F'(x) = f(x)$), u holda Stiltes integralining xossasiga asosan

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad k \geq 0$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu holda esa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) dx < \infty$$

integral yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Nolinchi tartibdagi moment doim mavjud va

$$m_0 = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Birinchi tartibli moment

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = E\xi$$

ξ tasodifiy miqdorning o'rta qiymati yoki matematik kutilmasi bo'ladi. Agar c o'zgarmas son bo'lsa,

$$E(\xi - c)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^k dF(x)$$

integralga ξ tasodifiy miqdorning c ga nisbatan k -tartibli momenti deyiladi.

Matematik kutilmaga nisbatan momentlar

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k dF(x) = E(\xi - E\xi)^k$$

ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli markaziy momentlari deb ataladi.

Bu yerda $(x - m_1)^k$ ifodani Nyuton binomi formulasi bilan ochib chiqib

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = m_2 - m_1^2,$$

$$\alpha_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^2,$$

$$\alpha_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

.....

formulalarni hosil qilamiz. Ular k -tartibli momentlar m_k larni markaziy momentlar

α_k bilan bog'laydilar. O'zgarmas c ga nisbatan ikkinchi tartibli moment uchun

$$E(\xi - c)^2 = E[(\xi - m_1) + (m_1 - c)]^2 = \alpha_2 + (m_1 - c)^2 \geq \alpha_2$$

munosabatga ega bo'lamiz va undan

$$\alpha_2 = \min_c E(\xi - c)^2 = E(\xi - m_1)^2 \quad (*)$$

tenglikni olamiz. Ma'lumki, bu moment tasodifiy miqdor ξ ning dispersiyasi deb ataladi va ξ uchun asosiy sonli xarakteristikalaridan hisoblanadi. Isbot etilgan (*) munosabatni ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin.

Agar $E\xi = 0$ bo'lsa, markaziy moment boshlang'ich momentga teng bo'ladi.

ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli markaziy absolyut momenti deb

$$E|\xi - E\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E\xi|^k dF(x)$$

ifodaga aytiladi.

Xususan, agar $E\xi = 0$ bo'lsa, k -tartibli markaziy absolyut moment k -tartibli boshlang'ich absolyut moment bilan ustma-ust tushadi.

Quyida momentlarga doir ba'zi muhim tengsizliklarni ko'rib chiqamiz.

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

Ikkinchi tartibli momentga ega ixtiyoriy ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2} \cdot \sqrt{E\eta^2}.$$

Isbot. Ma’lumki, $|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ hamda $E\xi^2$ va $E\eta^2$ momentlar chekliligidan $E|\xi\eta| < \infty$ ekani kelib chiqadi. x va y o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan musbat aniqlangan ushbu

$$E(x|\xi| + y|\eta|)^2 = x^2 E\xi^2 + 2xyE(|\xi| \cdot |\eta|) + y^2 E\eta^2$$

kvadratik formaning diskriminanti

$$(2E(|\xi\eta|))^2 - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$$

bundan esa (1) tengsizlikning o‘rinlili ekani kelib chiqadi.

Gyolder tengsizligi

Aytaylik, 1 ehtimollik bilan $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ va p, q sonlar uchun $p > 1, q > 1$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsin.

Agar $E\xi^p < \infty$ va $E\eta^q < \infty$ bo‘lsa, u holda

$$E\xi\eta \leq (E\xi^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E\eta^q)^{\frac{1}{q}}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Gyolder tengsizligida $p=q=2$ deb olinsa, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Ko‘p hollarda berilgan ξ tasodifiy miqdorning chiziqli kombinatsiyalari bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi, ularning yuqori tartibli momentlari uchun

$$E(a\xi + b)^k = a^k m_k + C_k^1 a^{k-1} b m_{k-1} + \dots + b^k$$

formulani isbot etish mumkin.

Endi yuqori tartibli ($k \geq 2$) absolyut momentlar – β_k larga tegishli quyidagi hossani isbotlaylik. Buning uchun u va v o‘zgaruvchilarga nisbatan

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u|x|^{\frac{k-1}{2}} + v|x|^{\frac{k+1}{2}}]^2 dF(x) = \beta_{k-1} n^2 + 2\beta_k uv + \beta_{k+1} v^2 \geq 0$$

manfiy bo‘lmagan kvadratlik formani ko‘raylik. Bu kvadratlik formaning determinantini hisoblab,

$$\beta_k^{2k} \leq \beta_{k-1}^k \cdot \beta_{k+1}^k$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikda navbati bilan $k = 1, 2, \dots$ deb hisoblansa,

$$\beta_1^2 \leq \beta_2, \quad \beta_2^4 \leq \beta_1^2 \beta_3^2, \quad \beta_3^6 \leq \beta_2^3 \cdot \beta_4^3 \dots$$

Hosil bo‘lgan tengsizliklarni o‘zaro ko‘paytirsak,

$$\beta_k^{k+1} \leq \beta_{k+1}^k \quad k = 1, 2, \dots$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Oxirigidan esa

$$\beta_k^{\frac{1}{k}} \leq \beta_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ekanligi kelib chiqadi. Xususan,

$$\beta_1 \leq \beta_2^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_2^{\frac{1}{2}} \leq \beta_3^{\frac{1}{3}}, \dots$$

va bu tengsizliklar Lyapunov tengsizliklari deb ataladi.

Ixtiyoriy taqsimot funksiya $F(x)$ ning hamma tartibdagi momentlari

$$m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$$

mavjud bo‘lsin. Bu momentlar $F(x)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydi degan masalani qo‘yamiz. Bu masala matematik analizdagi “momentlar problemi” deb ataladigan umumiy masala bilan bog‘liq va uning yechimidan quyidagi natija kelib chiqadi. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{n!} r^n < \infty$$

qator biror $r > 0$ uchun yaqinlashsa, $F(x)$ funksiya $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ momentlarga ega bo‘lgan yagona funksiya bo‘ladi.

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi (ikkinchi tartibli markaziy momenti) bu miqdor qiymatlarining o‘rta qiymat atrofida qanday tarqoqlik bilan joylashganligini xarakterlaydi. Shundan kelib chiqib, yuqori tartibdagi momentlarning ehtimollik ma’nolari haqida to‘xtab o‘tamiz.

Agar $F(x)$ simmetrik taqsimot funksiyasi (ya'ni ξ simmetrik tasodifiy miqdor) bo'lsa, uning hamma toq tartibdagi momentlari 0 ga teng bo'ladi (albatta shu momentlar mavjud bo'lganda). Bunga bu taqsimot uchun

$$F(-x) = 1 - F(x) \quad x > 0$$

tenglik o'rinli ekanligidan ishonch hosil qilish mumkin. Demak, hamma 0 ga teng bo'lmagan toq tartibdagi momentlarni taqsimotning asimmetriklik xarakteristikasi sifatida qabul qilish mumkin. Shu ma'noda eng sodda asimmetriklik xarakteristikasi bo'lib, berilgan taqsimot funksiyasining 3-tartibli momenti hisoblanadi. Masshtab bir jinsligini hisobga olgan holda

$$\gamma = \frac{\alpha_3}{\sigma^3}, \quad \sigma^2 = D\xi$$

ifodani taqsimotning asimmetriklik koeffitsienti deb qabul qilinadi. Juft tartibli (dispersiyaga nisbatan yuqori tartibli) momentlarga ehtimollik ma'nosi berish mumkin. Masalan,

$$\gamma_e = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3$$

ifoda $F(x)$ taqsimotning eksess koeffitsienti deb atalib, u $F(x)$ ning "markaz" (o'rta qiymat) atrofidagi "silliqlik" darajasini xarakterlaydi.

Berilgan taqsimotning momentlari mavjudligini tekshirib ko'rish qiyin bo'lmaydi, chunki bu masala "chap qoldiq" $F(-x)$ va "o'ng qoldiq" $(1 - F(x))$ ning $x \rightarrow \infty$ dagi asimptotikalariga bog'liq. Masalan,

$$\begin{aligned} F(-x) &= O(x^{-k}), \\ 1 - F(x) &= O(x^{-k}), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

bo'lsa, bu taqsimot uchun $\nu < k$ tartibdagi hamma momentlar mavjud bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifini bering.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifini bering.

3. Matematik kutilmaning ehtimollik ma'nosini aytib bering.
4. Matematik kutilmaning asosiy xossalarini aytib bering.
5. Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarini topishga misollar keltiring.
6. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb nimaga aytiladi? Uning vazifasi nimadan iborat?
7. Dispersiyaning asosiy xossalarini aytib bering.
8. O'rtacha kvadratik chetlanish deb nimaga aytiladi?
9. Dispersiyaning hisoblash formulasini yozing.
10. Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi nimaga teng?
11. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.
12. ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli boshlang'ich momenti deb nimaga aytiladi?
13. ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli markaziy momenti deb nimaga aytiladi?
14. ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli absolyut momenti deb nimaga aytiladi?
15. ξ tasodifiy miqdorning k -tartibli markaziy absolyut momenti deb nimaga aytiladi?
16. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.
17. Gyolder tengsizligini yozing.

Misol va masalalar

- 1) Agar $E\xi = 3$, $D\xi = 16$ ekanligi ma'lum bo'lsa, normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

$$\text{Javob: } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

2) ξ uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{agar } x \geq 0. \end{cases}$$

$E\xi$ ni toping.

$$\text{Javob: } E\xi = 0,2.$$

3) Taqsimot funksiyasi $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$ ($x > 0$) bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotga ega ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

$$\text{Javob: } D\xi = 100.$$

4) Qopda 7 ta olma bo'lib, ularning to'rttasi oq, qolganlari qizil. Qopdan tavakkaliga 3 ta olma olinadi. ξ - olingan oq olmalar soni. $E\xi$ ni toping.

$$\text{Javob: } E\xi = 1\frac{5}{7}.$$

5) Ushbu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\xi: \quad -1 \quad 2 \quad 3$$

$$P: \quad 0,3 \quad 0,2 \quad 0,5$$

matematik kutilmasini toping.

$$\text{Javob: } E\xi = 1,6.$$

6) ξ tasodifiy miqdor $[0;1]$ kesmada $f(x) = 3x^2$ zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu kesmadan tashqarida $f(x) = 0$. Matematik kutilmasini toping.

$$\text{Javob: } E\xi = 0,75.$$

7) ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ : 2 3 5
P: 0,1 0,4 0,5

Ikkinchi tartibli boshlang'ich momentini toping.

Javob: 16,5.

8) ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ : 1 2 4
P: 0,1 0,3 0,6

Dispersiyani toping.

Javob: 1,29

9) ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ : 1 3
P: 0,4 0,6

Uchinchi tartibli boshlang'ich momentini toping.

Javob: 16,6.

10) Partiyadagi 100 ta mahsulotning 10 tasi nosoz. Tekshirish uchun partiyadan 5 ta mahsulot tasodifiy ravishda tanlab olinadi. Tanlanmadagi nosoz mahsulotlarning matematik kutilmasini toping.

Javob: $E\xi=0,5$.

IV-bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

ξ : 0 1 3
P: 1/6 2/3 1/6

- A) $4/3$
- B) $1/3$
- C) 1
- D) $7/6$

2. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

$$\xi: -4 \quad 6 \quad 10$$

$$P: 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5$$

- A) 3
- B) $0,8$
- C) 6
- D) $1/6$

3. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

$$\xi: 0,21 \quad 0,54 \quad 0,61$$

$$P: 0,1 \quad 0,5 \quad 0,4$$

- A) 5
- B) $0,5$
- C) $0,535$
- D) $0,631$

4. Agar ξ va η ning matematik kutilmasi ma'lum bo'lsa, δ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping: $\delta = \xi + 2\eta$, $E\xi = 5$, $E\eta = 3$.

- A) 10
- B) 11
- C) 30
- D) 12

5. Agar X va Y ning matematik kutilmasi ma'lum bo'lsa, Z tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping. $Z = X + 2Y$, $E(X) = 5$, $E(Y) = 3$

- A) 10

- B) 11
- C) 30
- D) 12

6. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\begin{array}{l} \xi: -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ P: 0,2 \quad 0,1 \quad 0,3 \quad 0,4 \end{array}$$

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

- A) 0,9
- B) 0,4
- C) 0,5
- D) 0,3

7. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

$$\begin{array}{l} \xi: -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ P: 0,2 \quad 0,1 \quad 0,3 \quad 0,4 \end{array}$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

- A) 1,29
- B) 0,3
- C) 0,9
- D) 0.29

8. ξ diskret tasodifiy miqdor 3 ta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiladi: $x_1=4$ ni $p_1=0,5$ ehtimollik bilan, $x_2=6$ ni $p_2=0,3$ ehtimollik bilan va x_3 ni p_3 ehtimollik bilan. $M\xi = 8$ ni bilgan holda x_3 ni va p_3 ni toping.

- A) $x_3 = 29$ $p_3 = 0,2$
- B) $x_3 = 21$ $p_3 = 0,2$
- C) $x_3 = 20$ $p_3 = 0,5$
- D) $x_3 = 30$ $p_3 = 0,3$

9. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий

микдорнинг математик кутилмасини топинг:

X	-4	6	10
-----	----	---	----

P	0.2	0.2	0.6
-----	-----	-----	-----

A) 6

B) 6,4

C) 6,3

D) 7

10. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий

микдорнинг квадратик четланиши топинг:

X	1	2	3	4	5
-----	---	---	---	---	---

P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
-----	-----	-----	-----	-----	-----

A) 1,2

B) 1,23

C) 1,1357

D) 11,357

V BOB. BOG‘LIQ BO‘LMAGAN TASODIFIY

MIQDORLAR KETMA-KETLIGI. LIMIT TEOREMALAR

§ 5.1. Chebishev tengsizligi. Katta sonlar qonuni

“Katta sonlar qonuni” (turg‘unlik xossasi) keng ma’noda katta sondagi tasodifiy hodisalar ta’sirining o‘rtacha natijasi amalda tasodifiy bo‘lmay qolishini va yetarlicha aniqlikda aytish mumkinligini anglatadi.

Tor ma’noda esa “katta sonlar qonuni” deganda ko‘p sondagi kuzatishlar natijasida o‘rtacha xarakteristikalarining biror doimiy kattaliklarga yaqinlashishini ta’kidlaydigan teoremlar guruhi tushuniladi.

Faraz qilaylik, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar shunday sonlar ketma-ketligi $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Katta sonlar qonunini isbotlashda quyidagi Chebishev tengsizligi keng qo‘llaniladi. Biz uning qo‘llanilishini Chebishev teoremasida keltiramiz.

1-teorema. (Chebishev tengsizligi). Chekli dispersiyaga ega bo‘lgan ξ tasodifiy miqdor va $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Isbot. ξ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz, $f(x)$ uning zichlik funksiyasi bo‘lsin. U holda uning dispersiyasi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f(x) dx$$

bo‘ladi. Oxirgi integralni ikkiga ajratamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f(x) dx = \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x) dx + \int_{|x - E\xi| < \varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x) dx.$$

Bu tenglikdan quyidagi

$$D\xi \geq \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x) dx$$

tengsizlik kelib chiqadi. Integral ostidagi $(x - E\xi)$ ni ε ga almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$D\xi \geq \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon).$$

Bu yerdan esa absolyut uzluksiz tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligi kelib chiqadi. Endi ξ tasodifiy miqdor diskret bo‘lib, $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin. U holda uning dispersiyasi

$$D\xi = \sum_k (x_k - E\xi)^2 p_k$$

bo‘ladi.

Bunday tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligini quyidagicha isbotlaymiz. $A_i = \{i : |x_i - E\xi| \geq \varepsilon\}$ va $\bar{A}_i = \{i : |x_i - E\xi| < \varepsilon\}$ hodisalarni kiritsak, u holda

$$D\xi \geq \sum_{i \in A_i} (x_i - E\xi)^2 p_i \geq \varepsilon^2 \sum_{i \in A_i} p_i = \varepsilon^2 P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon)$$

bo‘lib, Chebishev tengsizligining o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Eslatma. Chebishev tengsizligini quyidagi

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin, ya’ni ξ tasodifiy miqdor o‘zining $E\xi$ matematik kutilmasidan chetlashishining absolyut qiymati musbat ε dan kichik bo‘lish ehtimolligi $1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ dan kichik emas.

Misol. Matematik kutilmasi a va dispersiyasi σ^2 bo‘lgan ξ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin. ξ tasodifiy miqdor o‘zining matematik kutilmasidan 3σ ga chetlanish ehtimolligini yuqoridan baholang.

Yechish. Chebishev tengsizligida $\varepsilon = 3\sigma$ deb olamiz. U holda

$$P(|\xi - a| \geq 3\sigma) \leq \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

bo‘ladi. Yuqorida keltirilgan tengsizlikni matematik statistikada 3σ qoidasi deyiladi.

Endi katta sonlar qonuniga o‘tamiz.

2-teorema. (*Chebishev formasidagi katta sonlar qonuni*). Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan bog‘liq bo‘lmagan bo‘lib, ularning dispersiyalari o‘zgarimas C son bilan tekis chegaralangan ($D\xi_i \leq C$ ixtiyoriy i uchun, $i = 1, 2, \dots$) bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

ya’ni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

Isbot. $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 1, 2, \dots$ tasodifiy miqdorlarni kiritamiz. Teorema shartiga ko‘ra, tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilmasi va dispersiyasini xossalariiga asosan quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$E\eta_n = E\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i,$$

$$D\eta_n = D\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i \leq \frac{C}{n}.$$

Endi Chebishev tengsizligini η_n tasodifiy miqdorga tadbiiq qilib,

$$(|\eta_n - E\eta_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Demak, Chebishev teoremasiga ko‘ra, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan bog‘liqsiz va dispersiyalari tekis chegaralangan bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar o‘rta arifmetigi n ortgani bilan bu tasodifiy miqdorlar o‘rta qiymatlarining o‘rta arifmetigiga istalgancha yaqin bo‘lar ekan.

Keyingi teorema Bernulli teoremasi deyiladi.

n ta bog‘liqsiz tajribalar o‘tkazilgan bo‘lib, ularning har birida A hodisaning ehtimolligi o‘zgarmas p soniga teng bo‘lsin.

3-teorema (Bernulli teoremasi). Bog‘liqsiz tajribalar soni n ortishi bilan A hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ uning ro‘y berish ehtimolligi p ga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Teorema shartlari bajarilganda va n chekli bo‘lganda $\frac{m}{n}$ tasodifiy miqdor uchun

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = p \text{ va } D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$$

bo‘ladi. U holda $\frac{m}{n}$ tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad (*)$$

va bu tengsizlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi (n cheksizlikka intilganda ixtiyoriy kichkina ε uchun $\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ nolga intilib, $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$ ehtimollik birga intiladi).

Bernulli teoremasi ko'rsatadiki, tajribalar soni n etarlicha katta bo'lganda, hodisaning ro'y berishining nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ o'zining tasodifiylik ma'nosini yo'qatadi va berilgan hodisaning ehtimolligi o'zgarmas son p ga yaqinlashadi. Bu esa tasodifiy tajribalar uchun muqararlik prinsipini ifoda etadi.

1-misol. Mahsulotlar partiyasini nosozlikka tekshirish uchun 1000 mahsulot tanlab olingan. Agar har 10000 ta mahsulotga o'rtacha 500 ta nosoz mahsulot to'g'ri kelsa, olingan tanlanma orqali topilgan nosoz mahsulotlar ulushi absolyut qiymat bo'yicha mahsulotlar partiyasining nosozlik ulushidan 0,01 dan kichik farqqa ega bo'lish ehtimolligini baholang.

Yechish. Masalaning shartlari bo'yicha bog'liqsiz tajribalar soni $n=1000$, $p = \frac{500}{10000} = 0,05$, $q = 1 - 0,05 = 0,95$, $\varepsilon = 0,01$ va $\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,01\right\}$ hodisaning ehtimolligini baholash kerak.

(*) formula bo'yicha

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,05 \cdot 0,95}{1000 \cdot 0,0001} = 0,527$$

bo'ladi. Demak, tanlanmadagi nosozliklar ulushi (nosozlikning ro'y berishining nisbiy chastotasi) mahsulotlar partiyasidagi nosozliklar ulushi (nosozlik ehtimolligi) 0,01 dan kichik farqlanishining ehtimolligi 0,527 dan kichik bo'lmas ekan.

§ 5.2. Markaziy limit teorema

1. Masalaning qo'yilishi

Ko'p hollarda tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimot qonunlarini aniqlashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarning yig'indisi $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ berilgan bo'lsin va har bir $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ tasodifiy miqdor "0" va "1" qiymatlarni mos ravishda q va p ehtimolliklar bilan ($p+q=1$) qabul qilsin. U holda S_n tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lib, uning matematik kutilishi np , dispersiyasi esa npq ga teng bo'ladi. S_n tasodifiy miqdor $0, 1, \dots, n$ qiymatlarni qabul qila oladi va demak n ning ortishi bilan S_n tasodifiy miqdorning qiymatlari istalgancha katta son bo'lishi mumkin, shuning uchun S_n tasodifiy miqdor o'rniga $\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$ tasodifiy miqdorni ko'rish maqsadga muvofiqdir. Bu ifodada A_n, B_n

lar n ga bog'liq bo'lgan sonlar ($B_n > 0$).

Xususan, A_n va B_n larni $A_n = ES_n = np$, $B_n = DS_n = npq$ ko'rinishida tanlansa, u holda Muavr-Laplasning integral teoremasini quyidagicha bayon etish mumkin: agar $0 < p < 1$ bo'lsa, $n \rightarrow \infty$ da ixtiyoriy $a, b \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$P \left\{ a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Tabiiy savol tug'iladi: (1) munosabat ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli bo'ladimi?, (1) o'rinli bo'lishi uchun S_n dagi qo'shiluvchilarning taqsimot funksiyalariga qanday shartlar qo'yish kerak?

Bu masalalarni hal qilishda P.L.Chebishev va uning shogirdlari A.A.Markov, A.M.Lyapunovlarning xizmatlari kattadir. Ularning tadqiqotlari shuni ko'rsatadiki, qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlarga juda ham umumiy shartlar qo'yish mumkin ekan. Bu shartlarning ma'nosi ayrim olingan qo'shiluvchining umumiy yig'indiga sezilmaydigan ta'sir ko'rsatishini ta'minlashdir.

Misol. Tajriba sizot suvlarning chuqurligini (er yuzasidan) o'lchashdan iborat bo'lsin. Albatta o'lchash natijasida yo'l qo'yiladigan xatolar juda ko'p faktorlarga bog'liq. Bu faktorlarning har biri ma'lum xatoga olib kelishi mumkin. Lekin, o'lchashlar soni yetarlicha katta bo'lib, ular bir xil sharoitda olib borilsa, o'lchashda kuzatilayotgan xatolik tasodifiy miqdor bo'lib, juda ko'p sondagi, kattaligi jihatidan sezilarsiz va o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy xatolar yig'indisidan iborat bo'ladi. o'lchashlar natijasida bu xatolarning birgalikdagi ta'siri sezilarli bo'ladi, shuning uchun ham tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini topish katta ahamiyatga egadir.

Ta'rif. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar shunday $\{A_n\}, \{B_n\}, B_n > 0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lsaki, $n \rightarrow \infty$ da

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat $\forall x \in (-\infty, \infty)$ da bajarilsa, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli deyiladi. Bu holda

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

tasodifiy miqdor $n \rightarrow \infty$ da asimptotik *normal taqsimlangan* deyiladi.

2. Matematik kutilmasi a va dispersiyasi σ^2 bo'lgan bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Umumiylikka zarar keltirmasdan $a = 0, \sigma^2 = 1$ deymiz. Quyidagi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad \eta_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

1-teorema. Yuqorida keltirilgan $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P\{\eta_n < x\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat ixtiyoriy x ($x \in R$) da bajariladi.

3. Bog'liq bo'lmagan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $E\xi_k = a_k$, $D\xi_k = \sigma_k^2$ bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

$$\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}, \quad F_k(x) = P(\xi_k < x).$$

2-teorema. Ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \quad (L)$$

bo'lsa, $\{\xi_n\}$ uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

(L) shart Lindeberg sharti deyiladi. Lindeberg shartining bajarilishi ixtiyoriy k da $\frac{1}{B_n}(\xi_k - a_k)$ qo'shiluvchilarning tekis ravishda kichikligini ta'minlaydi.

Haqiqatan ham,

$$P(|\xi_k - a_k| > \tau B_n) = \int_{|x-a_k| > \tau B_n} dF_k(x) \leq \frac{1}{(\tau B_n)^2} \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x)$$

ekanligini e'tiborga olinsa,

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - a_k| > \tau B_n\right\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^n (|\xi_k - a_k| > \tau B_n)\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n P(|\xi_k - a_k| > \tau B_n) \leq \frac{1}{\tau^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x)$$

Agar Lindeberg sharti bajarilsa, u holda oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni, $\tau > 0$ son har qanday bo'lganda ham $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Xususan, agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimlangan bo'lsa, u holda 2-teoremadan 1-teorema kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bu holda $B_n^2 = \sigma^2 \cdot n$, $0 < \sigma^2 < \infty$ va $n \rightarrow \infty$ da ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x-a| > \tau \sigma \sqrt{n}} (x - a)^2 dF(x) \rightarrow 0.$$

Endi yuqoridagi $\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$ ketma-ketlik asimptotik normal bo'lishi uchun

yetarli bo'lgan boshqa shartlarni ham ko'rsatish mumkin. Misol uchun Lyapunov shartini qaraylik. Bu shart Lindeberg shartiga ko'ra nisbatan ko'proq talablar qo'ysa ham, ba'zi hollarda bu shartni tekshirish oson bo'ladi.

Aytaylik, biror $\delta > 0$ son uchun

$$c_k^{2+\delta} = E|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$$

mavjud bo'lsin va

$$C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^n c_k^{2+\delta}$$

deylik.

3-teorema (A.M.Lyapunov). Agar $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{C_n}{B_n} \rightarrow 0$$

shart bajarilsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$P(\eta_n < x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x) \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat $\forall x \in (-\infty, \infty)$ da bajariladi.

Isboti. Lyapunov sharti bajarilganda Lindeberg sharti o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. $|x - a_k| \geq \tau B_n$ tengsizlikdan ushbu $\frac{|x - a_k|}{\tau B_n} \geq 1$ ni hosil qilamiz, u holda

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) &\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\tau B_n)^\delta} \int_{|x-a_k| > \tau B_n} |x - a_k|^{2+\delta} dF_k(x) \leq \\ &\leq \frac{C_n^{2+\delta}}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} = \frac{1}{\tau^\delta} \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^{2+\delta} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ da, bu esa teoremani isbotlaydi.

Misol. Quyidagi bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremaning o'rinliliği tekshirilsin:

$$P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\frac{1}{2}}.$$

Yechish. Lyapunov shartini tekshiramiz:

$$E\xi_k = 0; D\xi_k = k^{\frac{3}{2}} = \sigma_k^2; c_k^3 = k^{\frac{5}{2}}.$$

Ushbu $\alpha > -1$ bo'lganda o'rinli bo'ladigan

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \approx \int_1^n x^\alpha dx \approx \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$$

munosabatni tekshirishni o'quvchiga mashq sifatida beramiz. Bu munosabatdan foydallanib,

$$B_n^2 \approx A_1 n^{\frac{5}{2}}, C_n^3 = \sum_{k=1}^n k^{\frac{5}{2}} \approx A_2 n^{\frac{7}{2}}$$

ni aniqlaymiz, bu yerda A_1 va A_2 absolyut o'zgarmas sonlar.

Demak,

$$\frac{C_n^3}{B_n^3} = \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3 \sim \frac{A_2 n^{\frac{7}{2}}}{A_1 n^{\frac{15}{4}}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Shunday qilib Lyapunov sharti bajariladi va markaziy limit teorema o'rinli ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Katta sonlar qonunining mohiyati nimadan iborat?
2. Chebishev tengsizligini yozing. Uni isbotlang.
3. Chebishev formasidagi katta sonlar qonuni nimadan iborat?
4. Chebishev teoremasini aytib bering. Uni isbotlang.
5. Bernulli teoremasini aytib bering. Uni isbotlang.
6. Markaziy limit teoremaning mazmuni nimadan iborat?
7. Ehtimolliklar nazariyasining limit teoremalari qanday ahamiyatga ega?
8. Lyapunovning markaziy limit teoremasi nimadan iborat?

Misol va masalalar

1. ξ tasodifiy miqdor ushbu $E\xi = 1$, $D\xi = 0,04$ xarakteristikalariga ega. $A = \{0,5 \leq \xi < 1,5\}$, $B = \{0,75 \leq \xi < 1,35\}$, $C = \{\xi < 2\}$ hodisalar ehtimolligini quyidan baholang.

Javob: $P(A) \geq 0,84$ $P(B) \geq 0,36$ $P(C) \geq 0,96$.

2. Biror tayin joyda 1 yildagi quyoshli kunlar soni X , o'rtacha qiymati 100 kun va o'rtacha kvadratik chetlanishi 20 kun bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. Quyidagi hodisalar ehtimolliklarini yuqoridan baholang: $A = \{X \geq 150\}$, $B = \{X \geq 200\}$

Javob: $P(A) \leq 0,16$, $P(B) \leq 0,04$.

3. ξ_1, ξ_2, \dots bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $\xi_n \sim \sqrt{n}$, 0 va $-\sqrt{n}$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n}$, $1 - \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ ehtimolliklar bilan qabul qilinadi.

Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni bajariladimi?

Javob: bajariladi.

4. ξ_1, ξ_2, \dots bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $\xi_n \sim n$, 0 va n qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n^2}$, $1 - \frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

Javob: ha.

5. ξ_1, ξ_2, \dots bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $\xi_n \sim n$, 0, n qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

Javob: yo‘q.

6. ξ_1, ξ_2, \dots matematik kutilmalari 0 va dispersiyalari chekli bo‘lgan bog‘liqsiz va bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin. Ixtiyoriy haqiqiy son x uchun quyidagi $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n < x)$ limit yoki 0 yoki 1 yoki $\frac{1}{2}$ ga teng ekanligini isbotlang. Ushbu vaziyatlar bajariladigan shartlarni ko‘rsating.

Javob: 0 agar $E\xi_1 > 0$; 1 agar $E\xi_1 < 0$; $1/2$ agar $E\xi_1 = 0$.

7. ξ_1, ξ_2, \dots matematik kutilmalari 0 va dispersiyalari chekli bo‘lgan bog‘liqsiz va bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin, $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}$ bo‘lsa $D\xi_i$ ni toping.

Javob: $D\xi_i = \frac{1}{\sqrt{x}}$; bu yerda x soni $\Phi(x) = \frac{2}{3}$ tenglamaning yechimi.

8. ξ_1, ξ_2, \dots bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin, $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Agar ξ_n tasodifiy miqdor $[a_n - 1, a_n + 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lib, a_1, a_2, \dots haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun $\sum a_i = A < \infty$ bo‘lsa, u holda $\sum a_i = A < \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(0 < \frac{\eta_n}{\sqrt{n}} < 1\right)$ ni toping.

Javob: $\Phi(\sqrt{3}) - \frac{1}{3}$.

V-bob bo‘yicha test topshiriqlari

1. Diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X 0,1 0,3

P 0,4 0,6

Chebyshev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < 0,2$ ning ehtimolligini baholang.

- A) 0,76
- B) 0,73
- C) 0,9
- D) 0,29

2. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli $E\xi$ matematik kutilmaga, σ o'rtta kvadrat chetlanishga ega bo'lsa, $|\xi - E\xi| < 3\sigma$ hodisa ehtimolligini baholang.

- A) $\frac{8}{9}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) 1
- D) $\frac{7}{6}$

3. O'zaro bog'liq bo'lmagan 1000 tajribaning har birida biror A hodisa 0,5 ehtimollik bilan ro'y bersin. Agar A hodisaning ro'y berishlar soni X bo'lsa, $P(350 \leq X \leq 650)$ ehtimolligini baholang.

- A) $P(350 \leq X \leq 650) > 0,989$
- B) $P(340 \leq X \leq 660) > 0,989$
- C) $P(350 \leq X \leq 650) < 0,989$
- D) $P(350 \leq X \leq 650) \leq 0,989$

4. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n\}$ uchun $E\xi = 0$, $D\xi_n = n^\alpha$, $\alpha = const$, $\alpha < 1$ berilgan. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

- A) O'rinli.
- B) O'rinli emas.
- C) O'rinli bo'lishi ham, bo'lmashligi ham mumkin.

D) $\alpha = const, \alpha < \frac{1}{2}$ bo'lganda o'rinli, qolgan hollarda o'rinli emas.

5. O'zaro bog'liq bo'lmagan 500 ta tajribaning har birida biror A hodisa $p=0,2$ ehtimollik bilan ro'y bersin. Bu tajribalarda A hodisaning ro'y berishlar soni ξ bo'lsa, $P(50 \leq \xi \leq 150)$ ehtimolligini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

A) $P(50 \leq \xi \leq 150) > 0,968$

B) $P(50 \leq \xi \leq 150) < 0,058$

C) $P(50 \leq \xi \leq 150) = 0,968$

D) $P(50 \leq \xi \leq 150) > 0,968$

6. Ushbu munosabat ma'lum:

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 0,36; \quad DX = 0,25. \quad \varepsilon \text{ sonini toping.}$$

A) 0,625

B) 0,73

C) 0,325

D) 0,295

7. O'zaro bog'liqsiz ξ_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$P\{\xi_n = n^\alpha\} = P\{\xi_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2n^\beta}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^\beta}$$

ko'rinishdagi taqsimot qonuni bilan berilgan. α va β ning qanday qiymatida bu ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi?

A) $0 \leq \beta < 1, \quad 2\alpha > \beta - 1$

B) $\beta < 1, \quad 2\alpha > \beta - 1$

C) $0 \leq \beta < 1, \quad 2\alpha \leq \beta - 1$

D) $0 \leq \beta \leq 1, \quad 2\alpha \leq \beta - 1$

8. ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right)$ ni toping.

- A) (0,1) parametrli normal taqsimot
- B) $(0, \lambda)$ parametrli normal taqsimot
- C) λ parametrli puasson taqsimot
- D) $(1, \lambda)$ parametrli normal taqsimot

9. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ξ tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi ikkilangan o'rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo'lmasligi ehtimolligini baholang.

- A) $P(|\xi - E\xi| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$
- B) $P(|\xi - E\xi| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{9}$
- C) $P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{4}$
- D) $P(|\xi - E\xi| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2}$

10. Agar $D\xi = 0,004$ bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < 0,2$ ning ehtimolligini baholang.

- A) 0,6
- B) 0,7
- C) 0,9
- D) 0,2

11. $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 0,9$ va berilgan. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ε ning qiymatini toping.

- A) $\varepsilon=0,3$
- B) $\varepsilon=0,7$
- C) $\varepsilon=0,9$
- D) $\varepsilon=0,2$

12. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $1/4$ ga teng. Agar 800 ta tajriba o'tkaziladigan bo'lsa, A hodisaning ro'y berish soni ξ ning 150 dan 250 gacha bo'lgan oraliqda yotish ehtimolligini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

- A) 0,64
- B) 0,72
- C) 0,94
- D) 0,25

13. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - M\xi| < 0,2$ hodisa ehtimolligini baholang.

- A) 0,64
- B) 0,72
- C) 0,94
- D) 0,25

14. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < \sqrt{0,4}$ bo'lish ehtimolligini baholang.

- A) 0,909
- B) 0,723
- C) 0,942
- D) 0,251

VI-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

6.1-§. Matematik statistika asosiy masalalari

Statistika soʻzi lotincha soʻzdan olingan boʻlib, holat, vaziyat degan maʼnoni anglatadi.

Statistika tabiatda va jamiyatda boʻladigan ommaviy hodisalarni oʻrganadi. Statistika fani qonuniyatlarni aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarni tasvirlash, toʻplash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini oʻrganadi.

Matematik statistika esa ommaviy iqtisodiy va ijtimoiy hodisalarni tahlil etish uchun matematik apparat quradi.

Matematik statistikaning vazifasi statistik maʼlumotlarni toʻplash, ularni taxlil qilish va shu asosda baʼzi bir xulosalarni chiqarishdan iborat.

Endi matematik statistikaning asosiy masalalari bilan tanishib chiqamiz:

1. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor ustida n ta oʻzaro bogʻliq boʻlmagan tajribalar oʻtkazib, x_1, x_2, \dots, x_n qiymatlarni olgan boʻlaylik. x_1, x_2, \dots, x_n lar boʻyicha ξ tasodifiy miqdorning noʻmalum $F(x)$ taqsimot funksiyasini baholash matematik statistikaning vazifalaridan biridir.

Matematik statistikaning ushbu masalani yechish bilan shugʻullanuvchi boʻlimi noparametrik baholash nazariyasi deb ataladi.

2. ξ tasodifiy miqdor k ta nomaʼlum parametrga bogʻliq maʼlum koʻrinishdagi taqsimot funksiyaga ega boʻlsin. ξ tasodifiy miqdor ustidagi kuzatishlarga asosanib, bu nomaʼlum parametrlarni baholash matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistikada bu masalani yechish bilan shugʻulanuvchi boʻlim parametrik baholash nazariyasi deyiladi.

3. Kuzatilayotgan miqdorlarning taqsimot qonunlari, baʼzi xarakteristikalari xaqidagi har qanday farazlarni “statistik gipotezalar” deb ataladi.

Faraz qilaylik, ba'zi mulohazalarga asoslanib, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini $F(x)$ deb hisoblash mumkin bo'lsin, shu $F(x)$ funksiya haqiqatdan ham ξ ning taqsimot funksiyasimi yoki yo'qmi degan savol statistik gipoteza hisoblanadi.

U yoki bu gipotezani tekshirish uchun kuzatishlar orqali yoki maxsus tajribalar o'tkazish yo'li bilan ma'lumotlar olib, ularni qilingan gipotezaga muvofiq nazariy jihatdan kuzatilayotgan ma'lumotlar bilan taqqoslab ko'rish kerak. Agar olingan ma'lumotlar haqiqatdan ham nazariy jihatdan kutilgan ma'lumotlar bilan mos kelsa, u vaqtda bu fakt o'sha gipotezaning to'g'riligiga ishonch hosil qilish bilan, uni qabul qilish uchun asos bo'lishi mumkin. Agar olingan ma'lumotlar nazariy jihatdan kutilayotgan ma'lumotga yetarlicha to'g'ri kelmasa u holda qilingan gipotezani qabul qilishga asos bo'lmaydi.

Umuman, kuzatish natijalari bilan nazariy jihatdan kutiladigan natija orasidagi farq turlicha bo'lishi mumkin. Shu farqni statistik baholash natijasida u yoki bu gipotezani ma'lum ehtimollik bilan qabul qilish mumkin, ya'ni shu farq katta bo'lsa gipoteza qabul qilinmaydi, aks holda qabul qilinadi, albatta bu farq qancha bo'lganda gipotezani qabul qilish mumkinligi masalaning quyilishiga bog'liq bo'ladi.

Matematik statistikaning bu masalani yechish bilan shug'ullanuvchi bo'limi statistik gipotezalar nazariyasi deyiladi.

6.2-§. Bosh va tanlanma to'plam

Statistika amaliyotida shunday to'plamlar tez-tez uchrab turadiki, ularning har birini o'rganish mumkin bo'lmaydi. Bunday to'plamlar jamiyat hayotida (turmushimizda ham), tabiatda ham keng tarqalgan.

Masalan, O'zbekiston fuqarolarining bo'yi yoki og'irligini aniqlamoqchi bo'lsak, har bir kishini tekshirish imkoniyatiga ega bo'lmaymiz, chunki buning uchun ko'p mablag' va vaqt sarflash lozim bo'ladi. Bunday hollarda tekshiruvchi uchun eng yaxshi yo'l soni cheklangan birliklarni shunday ustalik bilan

tekshirishki, ular umumiy o'rganilayotgan to'plam haqida amaliy jihatdan yetarli darajada aniqlikda ko'zlangan axborotlarni olish imkoniyatini bersin.

Statistik analiz qilish uchun tasodifiy tanlab olingan to'plam *tanlanma to'plam* deyiladi.

Tanlanma qaysi to'plamdan olingan bo'lsa, bu to'plam *bosh to'plam* deyiladi.

Bosh to'plam yoki tanlanma to'plamning hajmi deb, bu to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi.

Masalan, agar 10000 ta detalning sifatini tekshirish uchun 100 ta detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N=10000$ va tanlamaning hajmi $n=100$ da teng bo'ladi.

Bosh to'plam hajmini N , tanlanma to'plam hajmini n bilan belgilaymiz.

Agar bosh to'plamdan tanlanma to'plam ajratib olib, bu to'plam ustida kuzatish olib borilgandan so'ng, bu tanlanma to'plam keyingi tanlashdan oldin yana bosh to'plamga qaytarilsa, bunday tanlash usuli takroriy tanlanma deyiladi.

Agar bosh tanlanmadan tanlanma to'plam ajratilib, bu to'plam ustida kuzatish olib borilgandan so'ng bosh to'plamga qaytarilmasa, bunday tanlash usuli takroriy bo'lmagan tanlanma deyiladi.

Amaliyotda ko'pincha takroriy bo'lmagan tanlab olish usulidan foydalaniladi. Albatta, bu ikkala tanlab olish usulida ham tanlanma to'plam bosh to'plamning barcha xususiyatlarini saqlagan holda olinishi kerak, ya'ni tanlanma to'plam bosh to'plamga "o'xshash" bo'lishini ta'minlaydigan qilib tanlash lozim.

Agar tanlanma to'plam bosh to'plamni deyarli barcha xususiyatlarini uzida saqlasa, u holda bunday tanlanma reprezentativ (vakolatli) tanlanma deyiladi.

Reprezentativ tanlanma hosil qilish uchun biz tanlanmani tasodifiy qilib tuzamiz. Tanlab olish usuli bosh to'plamning bizni qiziqtiradigan belgisiga xech qanday ta'sir qilmaydi va bosh to'plamning har bir elementi tanlanmada bir xil imkoniyat bilan qatnashishi ta'minlanadi. Agar tanlanma to'plam reprezentativligini saqlamasa, u holda tanlanma to'plam ustida chiqarilgan xulosani bosh to'plamga tadbiiq qilish noto'g'ri xulosaga olib kelishi mumkin.

6.3-§. Empirik taqsimot funksiya. Poligon. Gistogramma

Biror ξ tasodifiy miqdor ustida n marta kuzatish o'tkazib,

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

natijalar olingan bo'lsin, u holda biz tanlanma to'plamga ega bo'lamiz. Tajribalar bir xil sharoitda, bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda o'tkazilgan deb faraz qilinadi. Ma'lumki, tajriba natijalari (1) ya'ni 1-tajriba natijasi x_1 (1-o'rinda yozilgan), 2-tajriba natijasi x_2 (2-o'rinda yozilgan), ..., n -tajriba natijasi x_n (n -o'rinda yozilgan) bo'lib, ular son qiymatlari bo'yicha tartibsiz joylashgan bo'lishi mumkin.

Agar tanlanma to'plam qiymatlar bo'yicha o'sish (yoki kamayish) tartibida

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^* \quad (\text{yoki } x_n^* \geq x_{n-1}^* \geq \dots \geq x_2^* \geq x_1^*)$$

kabi joylashtirilsa,

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

variatsion qator deyiladi.

(1) to'plamdagi $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ lar *variantalar* deyiladi.

Agar tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, x_2 varianta n_2 marta, ..., x_k varianta n_k marta (bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) kuzatilgan bo'lsa, u holda

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

sonlar *chastotalar*,

$$w_i = \frac{n_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

sonlar esa *nisbiy chastotalar* deyiladi. Ravshanki,

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$$

bo'ladi.

Tanlanmaning *statistik yoki empirik taqsimoti* deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\left(\begin{array}{l} x_i : x_1, x_2, \dots, x_k \\ n_i : n_1, n_2, \dots, n_k \end{array} \right) \text{ yoki } \left(\begin{array}{l} x_i : x_1, x_2, \dots, x_k \\ w_i : w_1, w_2, \dots, w_k \end{array} \right).$$

1-misol. Tanlanma chastotlarining empirik taqsimoti berilgan:

$$\begin{array}{l} x_i : -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ n_i : 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \end{array}$$

Nisbiy chastotalarni toping.

Yechish. $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

$$w_1 = \frac{2}{20} = 0,1; \quad w_2 = \frac{4}{20} = 0,2; \quad w_3 = \frac{6}{20} = 0,3; \quad w_4 = \frac{8}{20} = 0,4.$$

$$\begin{array}{l} x_i : -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ w_i : 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \end{array}$$

Shu bilan birga $0,1+0,2+0,3+0,4=1$.

Ta'rif. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi deb x ning har bir qiymati uchun quyidagicha aniqlangan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bunda n_x – x qiymatdan kichik bo‘lgan variantalar soni; n – tanlamaning hajmi.

Tanlamaning empirik funksiyasidan farqli bosh to‘plam uchun aniqlangan ushbu $F(x)$ funksiya nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyani baholash uchun ishlatiladi.

Empirik taqsimot funksiyaning xossalari

1. $0 \leq F_n^*(x) \leq 1$;
2. $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;
3. Agar x_1 – eng kichik varianta va x_k – eng katta varianta bo‘lsa, u holda

$$F_n^*(x) = 0, \text{ agar } x \leq x_1 \text{ bo'lsa,}$$

$$F_n^*(x) = 1, \text{ agar } x > x_k \text{ bo'lsa.}$$

bo'ldi.

2-misol. Quyidagi empirik taqsimot berilgan:

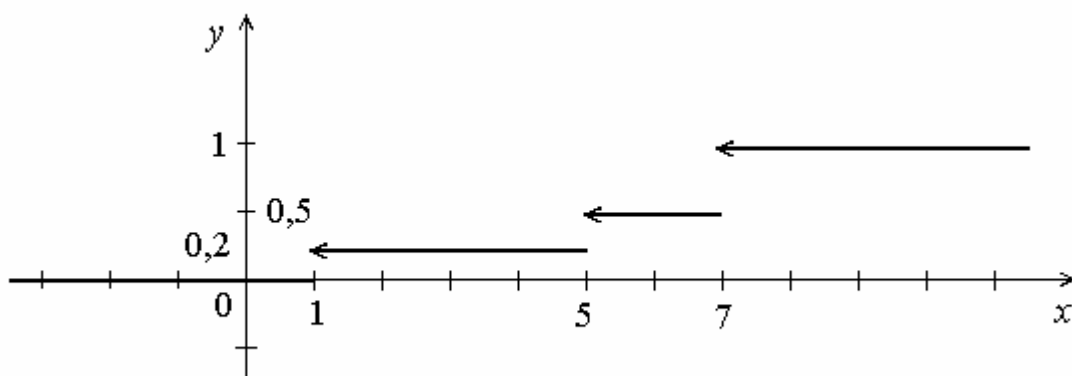
$$\begin{array}{l} x_i : 1 \quad 5 \quad 7 \\ n_i : 12 \quad 18 \quad 30 \end{array}$$

Empirik taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. $n = 12 + 18 + 30 = 60$ – tanlanmaning hajmi. Eng kichik varianta $x_1 = 1$, demak $x \leq 1$ lar uchun $F_{60}^*(x) = 0$. $x \leq 5$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni birgina $x_1 = 1$ va u varianta 12 marta kuzatilgan, demak $1 < x \leq 5$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2$. $x \leq 7$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni ikkita: $x_1 = 1$ va $x_2 = 5$, ular $12 + 18 = 30$ marta kuzatilgan, demak, $5 < x \leq 7$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5$. $x_3 = 7$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 7$ larda $F_{60}^*(x) = 1$.

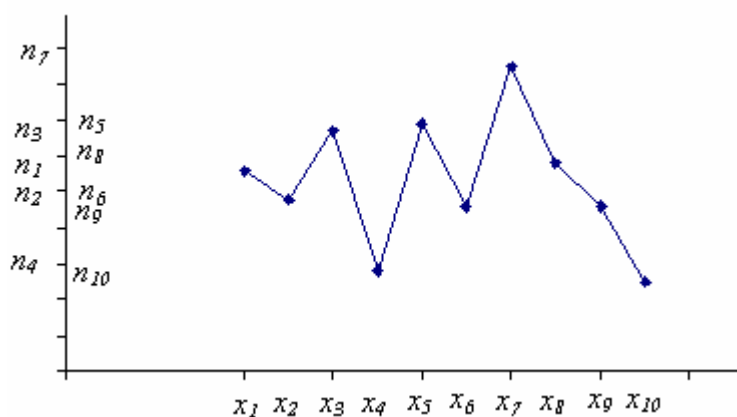
Demak, izlanayotgan empirik taqsimot funksiyasi va uning grafigi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F_{60}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,2, & 1 < x \leq 5, \\ 0,5, & 5 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$



Tanlamaning grafik usulda tasvirlash uchun poligon va gistogrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Chastotalar poligonini qurish uchun absissalar o'qida x_i variantalar qiymatlari va ordinatalari o'qida ularga mos kelgan chastotalar n_i qiymatlari belgilanadi. Koordinatalari (x_i, n_i) juftliklardan iborat nuqtalar kesmalar bilan tutashtiriladi.



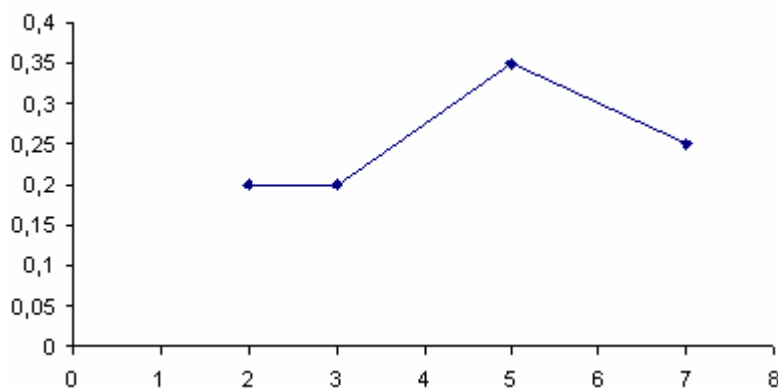
Nisbiy chastotalar poligoni deb koordinatalari $(x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_k; w_k)$ bo'lgan nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

3-misol. Ushbu empirik taqsimotning nisbiy chastotalar poligonini yasang:

$$x_i : 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7$$

$$w_i : 0,2 \quad 0,2 \quad 0,35 \quad 0,25$$

Yechish. xOy koordinatalar tekisligida koordinatalari $(x_i; w_i)$ bo'lgan M_i nuqtalarni belgilaymiz va ularni kesmalar bilan tutashtiramiz. Nisbiy chastotalar poligoni ushbu yo'l bilan hosil qilingan siniq chiziqdan iborat.



Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajm katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzluksiz xarakterga ega bo'lsa gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$, $i=1,2,\dots,k$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa

$$\frac{w_i}{h} = \frac{n_i}{nh}, \quad i=1,2,\dots,k$$

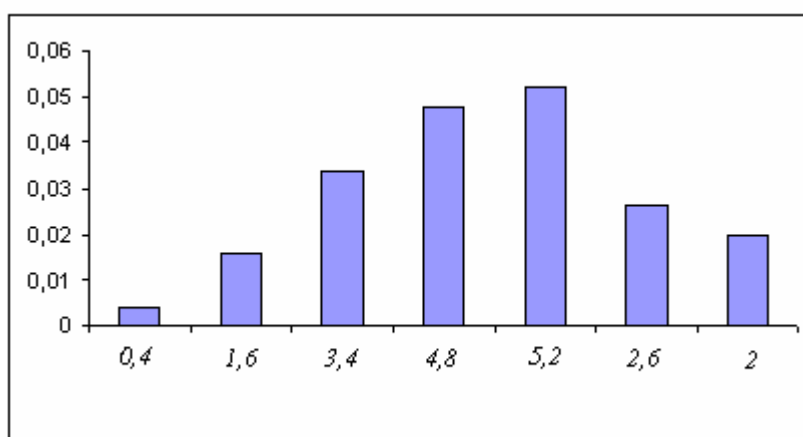
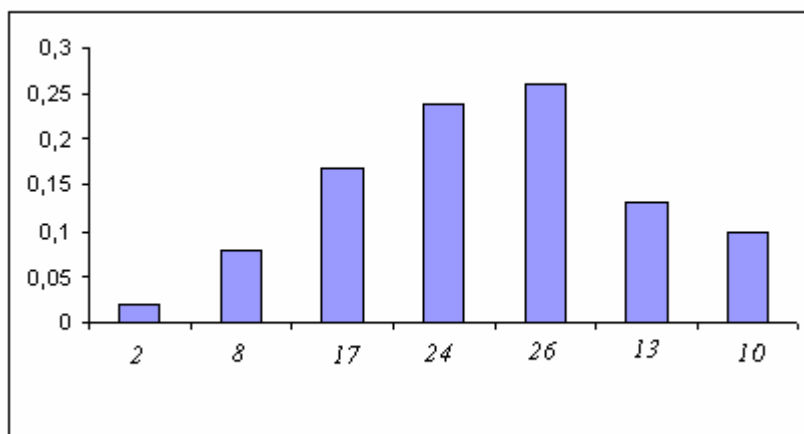
dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

4-misol. Ushbu tanlanmaning chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

Δi	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
n_i	2	8	17	24	26	13	10
w_i	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,1

Yechish. $h=5$

Δi	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
$\frac{n_i}{h}$	0,4	1,6	3,4	4,8	5,2	2,6	2
$\frac{w_i}{h}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,020



Berilgan tanlanmalar asosida chastotalarning gistogrammasi va nisbiy chastotalarning gistogrammasini hosil qilamiz.

6.4-§. Statistika baholar va uning xossalari. Nuqtaviy baholar

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri baholash masalasidir.

Aytaylik, bosh to'planning biror miqdoriy ko'rsatkichini baholash talab qilinsin. Nazariy mulohazalardan bu baholanayotgan ko'rsatkichning qanday taqsimotga ega ekanligi ma'lum bo'lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatuvchi ixtiyorida bosh to'plamdan olingan n ta kuzatish natijasi x_1, x_2, \dots, x_n , ya'ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma'lumot bo'lmaydi (bu x_1, x_2, \dots, x_n miqdorlarni o'zaro bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz). Nazariy taqsimot noma'lum parametrining bahosini topish uchun kuzatish

natijalarning shunday funksiyasini topish kerakki, bu funksiya baholanadigan parametrning taqribiy qiymatini bersin.

Nazariy taqsimot noma'lum parametrining *statistikasi* deb kuzatish natijalarining (tanlanma elementlarining) $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ixtiyoriy funksiyasiga aytiladi.

Masalan, taqsimot matematik kutilmasini baholash uchun *tanlanmaning o'rta qiymati*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

xizmat qiladi.

Eslatma. Statistika – bu baholanadigan parametrning funksiyasi emas, balki kuzatish natijalarining funksiyasidir. Statistika, odatda, noma'lum parametrni baholashga xizmat qiladi (shu sababli uni “baho” deb ham atashadi), shu sababli ham u noma'lum parametrnga bog'liq bo'lishi mumkin emas.

Albatta, statistika tanlanmaning “ixtiyoriy” funksiyasi emas, balki “o'lchovli” funksiyasidir (ya'ni \mathbb{R} dagi ixtiyoriy Borel to'plamining proobrazi \mathbb{R} dagi yana Borel to'plami bo'ladigan Borel funksiyasi). Ammo biz qaraydigan statistikalar odatda o'lchovli funksiya bo'ladi, shu sababli har safar statistika o'lchovli funksiya ekanligini ta'kidlab o'tirmaymiz.

Statistik baholar baholanayotgan parametrnga “yaxshi” yaqinlashishi uchun ular ayrim shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi.

Faraz qilaylik, nazariy taqsimotning noma'lum θ parametrining statistik bahosi $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bo'lsin.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrnga teng bo'lgan statistika *siljimagan baho* deyiladi ($E\theta^* = \theta$ tenglikning o'rinli bo'lishidan θ^* ning siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi).

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrnga teng bo'lmagan statistika *siljigan baho* deyiladi ($E\theta^* \neq \theta$ bo'lsa, undan θ^* bahoning siljigan ekanligi kelib chiqadi).

Demak, taklif etilgan statistikaning siljimaganligini tekshirish uchun uning matematik kutilmasini hisoblash kerak bo‘ladi.

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko‘rilganda bahoga asoslilik talabi qo‘yiladi. Agar kuzatishlar sonini cheksiz orttirilganda $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika baholanayotgan θ parametrga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashsa, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun ushbu

$$P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda θ^* statistika θ parametrning *asosli bahosi* deyiladi.

Siljimaganlik – bu bahoning fiksirlangan n dagi xossasi bo‘lib, u bu bahodan sistematik ravishda foydalanishda vujudga keladigan “o‘rtacha” hatoning bo‘lmasligini anglatadi.

Asoslilik xossasi ma’lumotlar miqdori kattalashganda baholar ketma-ketligining noma’lum parametrga yaqinlashishini anglatadi. Ravshanki, agar statistika bu xossaga ega bo‘lmasa, u holda bu statistika baho sifatida umuman “asossiz” bo‘ladi.

Baholanayotgan parametr uchun bir nechta baho taklif etish mumkin. U holda ularning ichidan “eng yaxshisini” tanlash masalasi kelib chiqadi. Tabiiyki, statistik baho dispersiyasining kichik bo‘lishini ta’minlashga harakat qilishimiz kerak. Shu maqsadda effektiv baho tushunchasini kiritamiz. θ parametr uchun θ_1^* va θ_2^* baholar taklif etilgan deb faraz qilaylik. $E\theta_1^* = \theta$ va $E\theta_2^* = \theta$ bo‘lsin (ya’ni, θ_1^* va θ_2^* siljimagan baholar bo‘lsin). Agar $E(\theta_1^* - \theta) < E(\theta_2^* - \theta)$ bo‘lsa, u vaqtda θ_1^* baho θ_2^* bahoga qaralganda *effektivroq* deyiladi. Berilgan n hajmli tanlanma to‘plamdagi eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan siljimagan statistika *effektiv baho* deyiladi, ya’ni bunday baho uchun dispersiya aniq quyi chegara $\inf_{\theta_i^*} E(\theta_i^* - \theta)^2$ ga erishadi.

Umuman aytganda, effektiv baho mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Tanlamaning hajmi n orttirilganda matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga yaqinlashidigan statistika *asimptotik siljimagan* baho deyiladi. ($\lim_{n \rightarrow \infty} E\theta^* = \theta$ bo'lganda θ^* statistika θ noma'lum parametr uchun asimptomik siljimagan baho bo'ladi).

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2}{\inf_{\theta_i^*} E(\theta_i^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2} = 1$$

bo'lsa, θ^* baho *asimptotik effektiv* bahosi deyiladi.

Statistik baholar ikki xil – nuqtaviy va intervalli bo'ladi.

Bitta miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *nuqtaviy baho* deyiladi.

Baholanayotgan parametрни qoplaydigan intervalning chegaralarini bildiruvchi ikki miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *intervalli baho* deyiladi.

Endi ba'zi statistik baholar va ularning xossalarini keltiramiz.

ξ tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari, ya'ni tanlanma x_1, x_2, \dots, x_n bo'lsin. Tanlamaning o'rta qiymati \bar{x} bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan va asosli baho bo'ladi, chunki $E\bar{x} = E\xi$ hamda katta sonlar qonuniga asosan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P(|\bar{x} - E\xi| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Xususan, agar ξ normal taqsimlangan bo'lsa, u holda \bar{x} qiymati $E\xi$ uchun effektiv baho bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Tanlanma dispersiya

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

bosh to'plam dispersiyasining siljigan bahosi bo'ladi, chunki $ED_T = \frac{n-1}{n} D\xi$.

Haqiqatan ham, quyidagi tengliklarni

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - E\xi - (\bar{x} - E\xi)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x} - E\xi) \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi) + \frac{n}{n} (\bar{x} - E\xi)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x} - E\xi) (\bar{x} - E\xi) n + (\bar{x} - E\xi)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi) - (\bar{x} - E\xi)^2$$

va

$$E(\bar{x} - E\xi)^2 = D\bar{x} = \frac{1}{n} D\xi$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$ED_T = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi)^2 - E(\bar{x} - E\xi)^2 = D\xi - \frac{1}{n} D\xi = \frac{n-1}{n} D\xi$$

bo'ladi.

Shu sababli, bo'sh to'plam dispersiyasi $D\xi$ uchun quyidagi "tuzatilgan" dispersiya

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

siljimagan baho bo'ladi, chunki $ES^2 = D\xi$.

Tanlanma dispersiyasining $n \rightarrow \infty$ da $D\xi$ uchun asosli baho ekanligini ko'rsatish mumkin.

Tanlanma dispersiyasini hisoblaganda quyidagi formuladan foydalanish qulay:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Tanlanma dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ tanlanmaning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb ataladi.

Tanlanmaning "tuzatilgan" dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$ tanlanmaning "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanishi deb ataladi.

Empirik taqsimot funksiyasi $F_n^*(x)$ taqsimot funksiya $F(x) = P(\xi < x)$ uchun siljimagani va asosli baho bo'ladi.

§ 6.5. Intervall baholash. Ishonchlilik intervallari

Oldingi paragrafda ko'rib chiqilgan baholarning hammasi nuqtaviy baholar edi. Agar tanlanmaning hajmi kichik bo'lsa, u holda nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan sezilarli farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi kichik bo'lganida bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholardan foydalanish o'rinliroqdir.

Avvalgidek, $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistik baho θ noma'lum parametrning bahosi bo'lsin. Tushunarliki, $|\theta^* - \theta|$ ayirma qanchalik kichkina bo'lsa, θ^* statistik baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Statistik metodlar θ^* baho $|\theta^* - \theta| < \delta$ tengsizlikni albatta qanoatlantiradi deb tasdiqlashga to'la imkon bermaydi, shu sababli bu tengsizlik amalga oshishi mumkin bo'lgan ehtimollik haqida gapirish mumkin. Agar $|\theta^* - \theta| < \delta$ tengsizlik γ ehtimollik bilan o'rinli, ya'ni $P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$ bo'lsa, u holda γ ehtimollik θ parametr θ^* statistik bahosining *ishonchlilik ehtimolligi* deyiladi. Odatda bahoning ishonchlilik ehtimolligi oldidan berilgan bo'ladi va birga yaqin qilib olinadi, masalan:

$$0,9; \quad 0,95; \quad 0,99; \quad 0,999.$$

Faraz qilaylik, $P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$ bajarilgan bo'lsin, u holda bu ifoda

$$P(|\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta|) = \gamma$$

bilan teng kuchlidir, ya'ni $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ oraliqning θ noma'lum parametrni o'z ichiga olish ehtimolligi γ ga teng.

Noma'lum θ parametrni berilgan γ ishonchlilik ehtimolligi bilan o'z ichiga olgan $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ oraliq *ishonchlilik intervali* deyiladi.

Ishonchlilik intervalini topishga doir misol tariqasida quyidagi masalani ko‘ramiz.

ξ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrlar bilan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, ya’ni

$$P(\xi \in B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\xi \in B} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Bu taqsimotning a parametri uchun σ^2 bo‘lgan holda ishonchlilik intervalini topamiz.

a noma’lum parametrning bphosi sifatida

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ni olamiz, bu yerda x_1, x_2, \dots, x_n – tanlanmaning variantalari – (a, σ^2) parametrlar bilan normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning bog‘liqsiz kuzatish natijalaridan iborat. Demak, bu holda

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ parametrlar bilan normal taqsimlangan bo‘ladi. Shuning uchun

$$P\left(\frac{|\bar{x} - a|}{\sigma/\sqrt{n}} < \delta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-u^2/2} du.$$

Ishonchlilik ehtimolligi γ berilsa, normal qonun jadvali (ilovadagi 2-jadval) dan δ_γ ni shunday tanlaymizki,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} e^{-u^2/2} du = 2\Phi_0(\delta_\gamma)$$

bo‘lsin, bu yerda

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du \text{ – Laplas funksiyasi. U holda}$$

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta_\gamma, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta_\gamma \right)$$

oraliq a parametr uchun ishonchlilik ehtimolligi γ bo'lgan ishonchlilik intervali bo'ladi, ya'ni

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta_\gamma < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta_\gamma \right) = P\left(\frac{|\bar{x} - a|}{\sigma/\sqrt{n}} < \delta \right) = \gamma.$$

§ 6.6. Statistika gipotezalar nazariyasi elementlari

Tajribada kuzatiladigan tasodifiy miqdorning taqsimoti haqida aytiladigan har qanday taxminga *statistik gipoteza* deyiladi. Bunday taxminlarni nazariy mulohazalar yoki boshqa kuzatuvlarning statistik tahliliga asoslanib aytish mumkin.

Masalan asli qiymati « a » noma'lum bo'lgan fizik kattalikni o'lchash tajribasini ko'raylik. Tajriba natijalariga bir qancha tasodifiy faktorlar ta'sir qiladi (o'lchash asbobining aniqligi, muhit harorati, va h.q.). Shuning uchun k – o'lchash natijasi (kuzatuv) $X_k = a + \varepsilon_k$ ko'rinishda bo'lib bu yerda ε_k o'lchashda yo'l qo'yiladigan tasodifiy xatolikdir. Odatda, yuqorida aytilgan tasodifiy ta'sirlarni inobatga olgan holda, ε_k ko'p sondagi har biri juda katta bo'lmagan tasodifiy xatolar yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. Shuning uchun markaziy limit teorema asosida X_k ni taqriban normal taqsimotga ega degan taxminni ayta olamiz.

Aniqlanishi kerak bo'lgan noaniqlik haqida aytilgan va tekshirilishi lozim bo'lgan gipotezaga *asosiy gipoteza* (odatda uni nolinch gipoteza deb atalib, H_0 bilan belgilanadi) deyiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirish deganda biz shunday qoidani tuzishimiz kerakki, bu qoidaga binoan tanlanma natijalariga asoslanib asosiy gipoteza H_0 ni yo qabul qilishimiz yoki rad etishimiz kerak.

Asosiy gipoteza H_0 ni qabul yoki rad etuvchi qoidaga *statistik kriteriy* deyiladi. Bunday qoidalarni (kriteriyalarni) ishlab chiqish va ularni optimallashtirish usullarini aniqlash statistik gipotezalar nazariyasining masalalaridir.

Asosiy gipotezadan farqli bo'lgan har qanday statistik gipotezaga *alternativ (qarshi)* gipoteza deyiladi.

Agar statistik gipoteza noma'lumni bir qiymatli aniqlasa, bunday gipotezaga *sodda gipoteza* deyiladi. Aks holda u *murakkab gipoteza* deyiladi.

Statistik gipotezaga misollar keltiraylik.

1-masala (*taqsimot haqida gipoteza*). Faraz qilaylikni taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ noma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ξ ustida hajmi n bo'lgan kuzatuvlar olib borilgan bo'lsin. Tekshirilishi lozim bo'lgan gipoteza $H_0: F_\xi(x) = F(x)$, bu yerda $F(x)$ to'la to'kis berilgan (ma'lum) yoki $H_0: F_\xi \in \mathfrak{F}$, bu yerda \mathfrak{F} – berilgan taqsimot funksiyalar oilasi. Bu holda, odatda \mathfrak{F} parametrik taqsimot funksiyalar oilasi bo'ladi: $\mathfrak{F} = \{F(\cdot, \theta), \theta \in H\}$. Misol uchun $\mathfrak{F} = \{\Pi(\theta): \theta \in (0, \infty)\}$, $\Pi(\theta)$ – parametri θ bo'lgan Puasson taqsimot funksiyasi. Keltirilgan gipotezaga *taqsimot ko'rinishi haqida* gipoteza deyiladi.

2-masala (*bir jinslilik gipotezasi*). Natijalari $(x_{i1}, \dots, x_{in_i})$, $i = 1, \dots, k$ bo'lgan k ta bog'liqsiz kuzatuvlar seriyalari o'tkazilgan bo'lsin. Bu kuzatuvlar bitta tasodifiy miqdor ustida olib borilganligiga asos bormi, ya'ni kuzatuvlar taqsimoti seriyadan seriyaga o'zgarmaydimi? Bunday bo'lsa, bu tanlanmalar birjinsli deyiladi. Agar $F_l(x)$ deb l -seriyada kuzatilgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini belgilasak, *birjinslilik* bo'lgan asosiy gipoteza $H_0: F_1(x) = \dots = F_k(x)$ ko'rinishda bo'ladi.

3-masala (*bog'liqsizlik gipotezasi*). Tajribada (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy vektor kuzatilib, uning taqsimot funksiyasi $F_{(X,Y)}(u, v)$ noma'lum bo'lsin. Agar X, Y larni bog'liqsiz deyishga asos mavjud bo'lsa, asosiy gipoteza

$H_0 : F_{(X,Y)}(u,v) = F_X(u)F_Y(v)$ ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $F_X(u)$, $F_Y(v)$ – mos ravishda X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari.

Tabiiyki bu keltirilgan misollar amaliyotda uchraydigan barcha hollarni o‘z ichiga olmaydi. Xususan, talaygina hollarda noaniqlik taqsimot funksiya bog‘liq bo‘lgan parametrda (yoki parametrlarda) bo‘ladi, ya’ni parametr noma’lum (masalan, bosh to‘plamni o‘rta qiymati yoki dispersiya va h.k.). Statistik gipoteza shu parametr ma’lum qiymatga tengligidan ($H_0 : \theta = \theta_0$) yoki berilgan sonli to‘plamga tegishligidan ($H_0 : \theta \in \Theta$) iborat bo‘ladi. Bunday gipotezalarga *parametrik gipotezalar* deyiladi.

Kriteriylar

Faraz qilaylik, X_1, \dots, X_n kuzatuvlar olib borilgan tasodifiy miqdor X dagi mavjud bo‘lgan noaniqlik haqida H_0 gipoteza qilingan bo‘lsin. Bu gipotezani tekshirish quyidagi qadamlarda amalga oshiriladi. Avvalo empirik ma’lumotlarni (tanlanmani) H_0 gipotezadagidan farqini xarakterlovchi statistika $T = T(X_1, \dots, X_n)$ tanlanadi. Odatda bunday statistika manfiy bo‘lmaydi va uning taqsimotini H_0 da aniq yoki taxminan topish mumkin bo‘ladi. Xususan, agar H_0 murakkab bo‘lsa, T ning taqsimoti H_0 ni tashkil etuvchi barcha gipotezalar uchun bir xil bo‘ladi.

Faraz qilaylik, bunday statistika $T = T(X_1, \dots, X_n)$ tanlangan bo‘lib, uning qabul qiladigan qiymatlari to‘plami J , ya’ni $J = \{t : t = T(X_1, \dots, X_n), x_1, \dots, x_n \in \Psi\}$, bu yerda Ψ – kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Oldindan yetarlicha kichik $\alpha > 0$ olib, J ni shunday qismi $J_{1\alpha}$ ($J_{1\alpha} \subset J$) ni ajratamizki, agar asosiy gipoteza H_0 o‘rinli bo‘lsa $T(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha}$ hodisaning ehtimolligi (bunday ehtimollikni $P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\}$ ko‘rinishda yozamiz) α dan katta bo‘lmasin:

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\} \leq \alpha.$$

Bunda H_0 ni tekshirish qoidasi quyidagicha bo‘ladi. Faraz qilaylikki, n ta tajriba o‘tkazilib x_1, \dots, x_n natijalar olindi va $T(X_1, \dots, X_n)$ statistikani mos qiymati $t = T(x_1, \dots, x_n)$ bo‘lsin.

Agar $t \in J_{1\alpha}$ bo‘lsa, u holda H_0 gipotezada ehtimolligi kichik (α) bo‘lgan hodisa ro‘y bergan bo‘lib H_0 gipoteza rad etilishi kerak (chunki tajribalar natijalari uni tasdiqlamadi). Aks holda, ya’ni agar $t \notin J_{1\alpha}$ bo‘lsa H_0 gipotezani qabul qilishga asos bor, chunki tajriba natijalari uni tasdiqlayapti.

Shuni aytish kerakki, $t \notin J_{1\alpha}$ (ya’ni $t \in J \setminus J_{1\alpha}$) bo‘lsa, albatta H_0 ni qabul qilish kerak degan qat’iy fikr aytilmaydi, faqatgina shu konkret tajribalar natijalari H_0 ni tasdiqlayapti va uni qabul qilishga asos bor deyiladi, xolos.

Aytilgan qoidada $T(X_1, \dots, X_n)$ statistikaga *kriteriy statistikasi*, $J_{1\alpha}$ ga *kritik to‘plam*, α ga *muhimlilik darajasi* deyiladi.

Bunda ikki turdagi xatoga yo‘l quyilishi mumkin:

Aslida asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganda uni rad etishdan hosil bo‘lgan xato, ya’ni aslida H_0 to‘g‘ri, lekin $t = T(x_1, \dots, x_n) \in J_{1\alpha}$ bo‘ldi. Bunday xatoga *birinchi turdagi xato* deyiladi. Demak birinchi turdagi xato ehtimolligi α dan oshmasligi kerak. Ikkinchisi – aslida asosiy gipoteza H_0 noto‘g‘ri bo‘lganda uni qabul qilishdan hosil bo‘lgan xato, ya’ni aslida H_0 noto‘g‘ri, ammo tajriba natijalari x_1, \dots, x_n da $t = T(x_1, \dots, x_n) \notin J_{1\alpha}$ bo‘ldi va H_0 qabul qilindi. Bunday xatoga *ikkinchi turdagi xato* deyiladi. Odatda bu xatoliklarga yo‘l qo‘yish ehtimolliklariga mos ravishda *birinchi va ikkinchi turdagi xatolik ehtimolliklari* deyiladi.

Asosiy gipoteza H_0 dan faqli bo‘lgan har qanday H_1 gipotezaga *qarshi (alternativ) gipoteza* deyiladi, va $P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H_1\}$ ehtimollikka *kriteriy quvvati* deyiladi. Umuman $P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H\} = W(H)$ ehtimollikka gipoteza H ni funksiyasi sifatida kriteriyning quvvat funksiyasi deyiladi va $H = H_1$ da

$W(H_1)$ aslida asosiy gipotezani noto‘g‘ri bo‘lganda uni rad etish ehtimolligini beradi.

Kriteriyni “yaxshi” xususiyatlaridan biri siljimaganlik xossasidir. Bu xossa

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\} \leq \alpha$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Kritik to‘plam $J_{1\alpha}$ ni ko‘rinishiga qarab kriteriy uch turga bo‘linadi:

agar $J_{1\alpha} = \{t : t > C_\alpha\}$ bo‘lsa *o‘ng tomonlama*, $J_{1\alpha} = \{t : t < C_\alpha\}$ bo‘lsa *chap tomonlama*, $J_{1\alpha} = \{t : C_{1\alpha} < t < C_{2\alpha}\}$ bo‘lsa *ikki tomonlama* kriteriy deyiladi. $C_\alpha, C_{i\alpha}$ larga kritik nuqtalar deyiladi.

Shuni aytish kerakki, kritik nuqtani aniqlash uchun, yuqorida aytilganga ko‘ra

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\} = \alpha$$

tenglamani yechish kerak (aniqlik uchun o‘ng tomonli kriteriyni ko‘ramiz). Buning uchun esa o‘z navbatida kriteriy statistikasining taqsimot funksiyasini bilish kerak. Ammo amaliyotda ko‘p hollarda statistikaning taqsimotini aniqlab bo‘lmaydi. Shuning uchun statistika taqsimoti uchun limit teoremlardan foydalaniladi, ya’ni ma’lum shartlarda $P\{T(X_1, \dots, X_n) > C_\alpha / H_0\} \approx \Phi(C_\alpha)$ ekanligi ko‘rsatiladi, bunda $\Phi(x)$ ma’lum funksiya (unga jadvallar va kompyuterda mos dasturlar mavjud). Kritik nuqta $\Phi(C_\alpha) = \alpha$ tenglamaning yechimi sifatida olinadi.

K. Pirsonning xi-kvadrat kriteriysi

Faraz qilaylik, kuzatilayotgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ noma’lum bo‘lsin. Asosiy gipoteza: $H_0 : F_\xi(x) = F(x)$ bo‘lsin, bu yerda $F(x)$ to‘la to‘kis ma’lum taqsimot funksiya, demak H_0 – sodda gipoteza. Tasodifiy miqdor ξ ni qiymatlar to‘plamini \mathcal{A} orqali belgilaylik. \mathcal{A} ni k ta kesishmaydigan qismlar (oraliq)lar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ ga bo‘lamiz:

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^k \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \cap \varepsilon_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

ν_i deb ε_i oraliqqa tushgan kuzatuvlar sonini belgilaymiz, ya'ni X_1, \dots, X_n tanlanmadan ε_i oraliqqa tegishli bo'lganlar soni. ν_i ga ε_i *oralik chastotasi*, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ *chastotalar vektori* deyiladi. Chastotalar vektori ν tanlanma vektor X_1, \dots, X_n orqali bir qiymatli aniqlanadi va $\nu_1 + \dots + \nu_k = n$ bo'ladi.

Asosiy gipoteza H_0 o'rinli degan shart ostida ixtiyoriy kuzatuvni ε_i oraliqdan olingan bo'lish shartli ehtimolligini P_{i0} orqali belgilaylik:

$$P_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Kriteriy statistikasi sifatida

$$X_n^2 = \sum_{m=1}^k \frac{(\nu_m - nP_{m0})^2}{nP_{m0}}$$

olinadi.

Ehtimollikni statistik ta'rifiga ko'ra (yoki katta sonlar qonunining Bernulli formasiga ko'ra) agar H_0 o'rinli bo'lsa ν_i/n nisbiy chastota P_{i0} ehtimollikga yaqin bo'lishi kerak. Demak, agar H_0 o'rinli bo'lsa, X_n^2 statistika katta bo'lmasligi kerak. Shunday qilib Pirsonning χ^2 kriteriyasi X_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza H_0 ni rad etadi, ya'ni kritik to'plam o'ng tomonli bo'lib $J_{1\alpha} = \{t : t > C_\alpha\}$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema (Pirson). Agar $0 < P_{i0} < 1$ bo'lsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n^2 < t / H_0\} = P\{\chi^2(k-1) < t\},$$

bu yerda $\chi^2(k-1)$ – ozodlik darajasi $k-1$ bo'lgan tasodifiy miqdor:

$$P\{\chi^2(k-1) < t\} = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^t x^{\frac{k-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad (1)$$

Amaliyotda bu teoremani $n \geq 50$, $\nu_i \geq 5$ bo'lganda qo'llash mumkin. Bunda kritik nuqta C_α ni berilgan α orqali $P\{\chi^2(k-1) > C_\alpha\} = \alpha$ tenglamani yechimi sifatida olinadi ((1) uchun jadvallar mavjud).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matematik statistikaning asosiy masalalarini aytib bering.
2. Bosh to'plam nima?
3. Tanlanma to'plamga ta'rif bering.
4. Tanlanmaning qanday turlarini bilasiz?
5. Variatsion qator deb nimaga aytiladi?
6. Variatsion qatorga misol keltiring.
7. Empirik taqsimot funksiyasi deb nimaga aytiladi?
8. Empirik taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini ayting.
9. Empirik taqsimot funksiyasining asosiy xossalari qanday?
10. Poligon va gistogramma qanday quriladi?
11. Statistika bahoga ta'rif bering.
12. Statistika bahoning asosiy xossalarini ayting.
13. Nuqtaviy bahoga ta'rif bering.
14. Ishonchlilik intervaliga ta'rif bering.
15. Kriteriy tushunchasiga ta'rif bering.
16. Gipotezalarni tekshirish nimadan iborat?
17. K. Pirsonning xi-kvadrat kriteriysini aytib bering.
18. Gipotezalarni statistik tekshirishda qanday xatolarga yo'l qo'yish mumkin?

Misol va masalalar

1) Quyidagi tanlanma uchun variatsion qator va statistik taqsimotini yozing: 5, 7, 4, 3, 5, 10, 7, 4, 5, 7, 7, 9, 9, 10, 3, 5, 4, 7, 5, 10.

Javob: Variatsion qator:

3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 10

Statistik taqsimot:	x_i :	3	4	5	7	9	10
	n_i :	2	3	5	5	2	3

2) Yuqorida berilgan tanlanma uchun empirik taqsimot funksiyasini toping.

Javob:

$$F_{20}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 0,1, & 3 < x \leq 4, \\ 0,25, & 4 < x \leq 5, \\ 0,5, & 5 < x \leq 7, \\ 0,75, & 7 < x \leq 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

3) Quyidagi tanlanma uchun statistik taqsimotni yozing va chastotalar poligonini chizing: 1, 5, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 7, 5, 4, 7, 3, 4, 5, 1, 1, 3, 7, 4, 5, 5, 4, 1, 3, 5, 4, 7, 5, 1, 4, 5, 3, 1, 4, 7, 1, 4, 3, 5, 1, 4, 5, 5, 7, 3, 1, 3, 4, 5.

4) 5, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 6, 9, 7, 10, 5, 6, 10, 7, 4, 4, 5, 4, 7, 5, 4, 6, 6, 5, 6, 10, 6, 5, 5 tanlanma berilgan bo'lsin. Tanlanmaning statistik taqsimoti, tanlanma o'rta qiymati va tanlanma dispersiyasini toping.

Javob:

Statistik taqsimot:	x_i :	4	5	6	7	9	10
	n_i :	6	9	8	3	3	1

$$\bar{x} = 5,9, D_T = 0,29.$$

5) x_1, x_2, \dots, x_n tanlanma berilgan bo'lsin. Tanlanma o'rta qiymati uchun quyidagi

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

tenglik bajarilishini isbotlang.

6) Tanlanmaning statistik taqsimoti quyidagicha bo'lsin:

$$x_i : x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k$$

$$n_i : n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k$$

Tanlanma dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i - \bar{x}^2$$

formula o'rinli ekanligini ko'rsating.

7) Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini tuzing.

interval	interval chastotalari
1–5	10
5–9	20
9–13	28
13–17	12
17–21	20
21–23	10

8) x_1, x_2, \dots, x_n tanlanma berilgan. Bosh to'planning matematik kutilmasi m ning bahosi sifatida $\tilde{m}_1 = x_1$ statistik baho taklif qilingan. Bu bahoning siljimaganligi va asosliligini tekshiring.

9) Bosh to'plam λ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lib, bu to'plam bo'yicha tanlanma tuzilgan bo'lsin. λ parametr uchun tanlanma o'rta qiymati siljimagan va asosli baho bo'lishini ko'rsating.

10) Bir xil sharoitda n ta bog'liqsiz tajribalar o'tkazilganda A hodisa k marta ro'y berdi. A hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi $h = \frac{k}{n}$ bu hodisaning bitta tajribada ro'y berishi ehtimolligi $p = P(A)$ uchun siljimagan va asosli baho bo'lishini ko'rsating.

VI-bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Bosh to'plamdan $n=60$ hajmli tanlanma olingan:

$$x_i \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 26$$

$$n_i \quad 8 \quad 40 \quad 10 \quad 2$$

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

A) $\bar{x}_m = 4$

B) $\bar{x}_m = 2$

C) $\bar{x}_m = 3$

D) $\bar{x}_m = 5$

2. Bosh to'plamdan $n=50$ hajmli tanlanma olingan:

$$x_i \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 10$$

$$n_i \quad 16 \quad 12 \quad 8 \quad 14$$

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

A) $\bar{x}_m = 5,76$

B) $\bar{x}_m = 2,74$

C) $\bar{x}_m = 3,76$

D) $\bar{x}_m = 4,75$

3. $n=20$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymatini toping:

$$x_i \quad 2560 \quad 2600 \quad 2620 \quad 2650 \quad 2700$$

$$n_i \quad 2 \quad 3 \quad 10 \quad 4 \quad 1$$

- A) $\overline{x_m} = 2621$
- B) $\overline{x_m} = 2742$
- C) $\overline{x_m} = 3761$
- D) $\overline{x_m} = 4275$

4. $n=41$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh dispersiyaning $D_t=3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

- A) $S^2=3,075$
- B) $S^2=3,751$
- C) $S^2=2,075$
- D) $S^2=3,775$

5. $n=51$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh dispersiyaning $D_t=5$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

- A) $S^2=5,1$
- B) $S^2=3,7$
- C) $S^2=2,3$
- D) $S^2=3,4$

6. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

- A) 12603
- B) 12506
- C) 12535
- D) 12326

7. $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

$$x_i \quad 0,01 \quad 0,04 \quad 0,08$$

$$n_i \quad 5 \quad 3 \quad 8$$

- A) 0,0007
- B) 0,0006
- C) 0,0005
- D) 0,0003

8. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

$$x_i: \quad 340 \quad 360 \quad 375 \quad 380$$

$$n_i: \quad 20 \quad 50 \quad 18 \quad 12$$

- A) 167,29
- B) 162,56
- C) 165,35
- D) 156,26

10. $n=50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

$$x_i: \quad 0,1 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,8$$

$$n_i: \quad 5 \quad 15 \quad 20 \quad 10$$

- A) 0,32
- B) 0,36
- C) 0,52
- D) 0,33

11. Bosh to'planning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum a matematik kutilmasini 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik

intervalini toping. Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=5$, tanlanma o'rtacha qiymat $\bar{x}=14$ va tanlanma hajmi $n=25$ berilgan.

A) $12,04 < a < 16,96$

B) $12,14 < a < 16,56$

C) $12,34 < a < 16,46$

D) $12,54 < a < 16,76$

12. Ko'p sondagi elektr lampalar partiyasidan olingan tanlanmada 100 ta lampa bor. Tanlanmadagi lampaning o'rtacha yonish davomiyligi 1000 soatga teng bo'lib chiqdi. Lampaning o'rtacha yonish davomiyligining o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=40$ soat ekanligi ma'lum. Jami partiyadagi lampaning o'rtacha yonish davomiyligi a ni 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

A) $992,16 < a < 1007,84$

B) $992,14 < a < 1007,56$

C) $994,34 < a < 1007,46$

D) $994,54 < a < 1007,76$

13. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to'plamni a matematik kutilmasining tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha 0,975 ishonchlilik bilan bahosining aniqligi $\delta=0,3$ ga teng bo'lsin. Normal taqsimlangan bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum: $\sigma=1,2$

A) $n=81$

B) $n=80$

C) $n=82$

D) $n=83$

14. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to'plamni a matematik kutilmasining tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha bahosining aniqligi

0,925 ishonchlilik bilan 0,2 ga teng bo'lsin. Bosh to'planning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum: $\sigma=1,5$.

A) $n=178$

B) $n=189$

C) $n=179$

D) $n=183$

Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida yuzaga kelish tarixidan lavhalar

Ehtimolliklar nazariyasi fan sifatida shakllanishini bu sohaning yirik mutaxassislari, akademiklar A.N.Kolmogorov, B.V.Gnedenko, Yu.V.Proxorov, S.X.Sirojiddinov, A.N.Shiryayevlar, asosan quyidagi bosqichlarga bo‘ladilar:

1. Qadimgi davr (ehtimolliklar nazariyasi yuzaga kelishigacha o‘tgan davr).
2. Birinchi bosqich (XVII-XVIII asr boshi).
3. Ikkinchi bosqich (XVIII-XIX asr boshi).
4. Uchinchi bosqich (XIX asr ikkinchi yarimi).
5. To‘rtinchi bosqich (XX asr boshi va o‘rtasi).

Qadimgi davr

Tasodifiylik to‘g‘risidagi birinchi tassavurlar (kishi taqdiriga oid munosabatlar, faslning issiq yoki sovuq kelishi, janjalli masalalar natijalarining oldindan ayta bilish, sayyoralar harakatlarining holatlari – munajimlik va boshqalar) asrlar boshiga borib taqaladi. Bu tassavurlar ilmiy jihatdan asoslanganligiga o‘tgan davrda inson aqli tomonidan inkor etib bo‘lmaydigan holatlarga tegishli bo‘lib, ularga oxirgi bir necha asrlar davomidagina ilmiy ma’no berildi xolos.

Birinchi tasodifiyliklar asboblari – qimor o‘yinlari oshiqqlari haqida ko‘pgina arxeologik ma’lumotlar mavjud. Ularga moslanib bu oshiqqlar qadimgi Misrning birinchi sulolasi davrida (eramizdan 3500 yil ilgari) qadimgi Yunon va Rim imperiyalarida qimor o‘yinlari uchun asbob bo‘lib, xizmat qilganini aytib o‘tish mumkin. Masalan Rim imperatorlari Avgust (63 yil eramizga qadar –14 yil yangi era) va Klavdiy (10 yil eramizga qadar – 54 yil yangi era) “oshiq” o‘yining eng ashadiy muxlislari bo‘lgan.

Qimor o‘yinlaridan tashqari, foydali va ziyonli imkoniyatlar bilan bog‘liq bo‘lgan tasodifiyotlar savdo-sotiq, sug‘urta (straxovanie) sohalarida qadimgi tarix davrlarda yuzaga kelgan.

Masalan qadimgi Bobil (Vavilon) davlatchiligiga oid yozuvlarda eramizdan 4-3 ming oldin sug‘urta uchun kontrakt (kelishuv) asosiy xujjat bo‘lib hisoblangan. Bu yozuvlarning ko‘pchiligi dengiz orqali yuk tashish moslamalariga tegishli bo‘lgan. Sug‘urtaning kontrakt formalari finikiylar orqali yunonlarga, rimliklarga, hindularga o‘tgan.

Ular qadimgi Rim imperiyasi davlat va madaniyat kodekslarida, Vizantiya imperiyasi qonunlarida o‘z akslarini topgan. Masalan Rim imperiyasi davrida Yuriy Ulpian (Ulpian) (eramizdan 220 yil oldin) kishi hayoti sug‘urtasiga oid xatolarni o‘rganib, birinchi marta “o‘lim jadvalini” tuzgan.

Italiya shaharlari-Respublikalari (Rim, Venetsiya, Genuya, Piza, Florensiya) gullab yashnagan davrda sug‘urta faoliyati bilan bog‘liq statistik ma‘lumotlarni yig‘ish va o‘rganish zaruriyati yuzaga kelgan. Tarixiy ma‘lumotlardan ma‘lumki, kishi hayoti sug‘urtasi haqidagi kuni aniq belgilangan kontrakt 1347 yilda Genuyada manfaatdor shaxslar tomonidan tuzilgan.

G‘arbiy Evropa “Uyg‘onish” davrida (XIV asr oxiri – XVII asr boshi) aytib o‘tilgan shahar-Respublikalar ijtimoiy va madaniy hayotda ro‘y bergan ulkan islohatlarda muhim rol o‘ynadilar. Xususan shu davrda falsafiy ilmlarda “ehtimollik” tushunchasi shakllana boshlagandi. Bu jarayonda italyan matematiklari Luki Pacholi (1445-1517), Ch.Kalkanini (1479-1541), N.Tartali (1500-1557) va boshqalarning faoliyati sezilarli iz qoldirdi.

Qimor o‘yinlarida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan imkoniyatlarni matematik nuqtai nazardan tahlil qilish bilan birinchilar qatorida shug‘ullangan mashhur ixtirochi Dj. Kardano (1501-1576) bo‘lgan. Ma‘lumki, uning texnika sohasida “Kardan val” ni ixtiro qilishi va matematikada esa uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun topgan “Kardano formulalari”, uni fan tarixida o‘chmas iz qoldirganini bildiradi. Dj. Kardano vafotidan keyin bosilgan “Qimor o‘yinlari haqidagi kitob” asari bu o‘yinning ishqibozlari uchun ajoyib qo‘llanma bo‘lib

xizmat qilgan. Bu asrlarda kombinatorika g'oyalaridan foydalanilgan va bemalol aytish mumkinki u ehtimollikning hozirgi zamonda ishlatiladigan "klassik" ta'rifiga juda yaqin bo'lgan.

1. *Birinchi bosqich* (XVII asr – XVIII asr boshi).

Juda ko'pchilik matematiklar fikricha (xususan mashhur fransuz matematigi P.Laplas) hozirgi zamon "ehtimolliklar nazariyasi"ning yuzaga kelishi XVII asrda yashab ijod qilgan taniqli fransuz matematiklari B.Paskal (1623-1662) va P.Ferma (1601-1665) orasida olib borilgan "ehtimolliklar hisobi" nomi bilan mashhur bo'lgan yozilmalardan boshlanadi. Bu yozilmalar esa o'sha davrda taniqli shaxs Anton Gotvaud (kavaler de Mere, yozuvchi, targ'ibotchi, 1607-1684) tomonidan Bl. Paskalga qo'yilgan ba'zi savollarga asoslangan. Xususan, bu savollardan birida ma'lum bir sabablar bilan qimor o'yini to'xtatilsa, yutuqlarni qanday taqsim etish kerakligi masalasi qo'yiladi. Oxirgi jumlaning quyidagicha konkretlashtirish mumkin. Aytaylik, A va V o'yinchilar kelishib olishdiki, kim birinchi bo'lib 5 ta partiyada g'olib bo'lsa, unga hamma o'yin stavkasi (bahosi) beriladi. Masalan, 1984 yilda shaxmat bo'yicha jahon chempionligi uchun o'tkazilgan Karpov-Kasparov matchida kim birinchi bo'lib 6 ta partiyani yutsa chempion deb e'lon qilinishiga kelishib olingan. Bunda durrang natijalar hisobga olinmaydi va partiyalar soni chegaralanmaydi.

Faraz qilaylik, o'yin ba'zi sabablariga ko'ra majburiy ravishda, A o'yinchi 4 ta yutuqqa, V o'yinchi esa 3 ta yutuqqa ega bo'lgan holda to'xtatildi. (Eslatib o'tilgan Karpov-Kasparov matchida 48 partiyadan so'ng Karpov 5 ta, Kasparov 3 ta yutuqqa ega bo'lgan holatda Jahon Shaxmat Federatsiyasi tomonidan to'xtatilgan). To'xtatilgan o'yinda umumiy stavkani qanday nisbatda bo'linishi kerakligi haqidagi savol bilan kavaler de Mere matematik Bl. Paskalga murojaat qilgani "tabiiy" variantlardan biri sifatida 2:1 nisbati qabul qilinishi mumkin. Haqiqatan ham o'yin davom ettirilsa qolgan partiyalarda A o'yinchi 1 marta yutishi yetarli bo'ladi, B o'yinchi esa 2 marta yutishi kerak bo'ladi. Bundan 2:1 nisbatga kelamiz, ya'ni A o'yinchi umumiy yutuqning $2/3$ qismini, B esa $1/3$ qismini olishi kerak.

Lekin yutilgan partiyalar sonini hisobga olgan holda 4:3 nisbat ham “tabiiy” deb hisoblanishi mumkin. Eslatib o‘tilgan yozishmalarda Bl. Paskal va P.Ferma keltirilgan har ikki nisbat ham noto‘g‘ri bo‘lganligini, aslida 3:1 nisbat haqqoniy ekanligini isbotlab berilgan.

Kavaler de Merening savollariga bog‘liq bo‘lgan ikkinchi bir masala quyidagicha qo‘yiladi: olti qirrali o‘yin kubigini 4 marta tashlaganda hech bo‘lmaganda 1 ta 6 raqam tushishi yoki 2 o‘yin kubigini 24 marta tashlaganda (6,6) juftlikni hech bo‘lmaganda 1 marta yuzaga kelishi haqiqatga yaqinmi?

Bu savolga ham Paskal va Ferma to‘g‘ri javob topishgan. Birinchi kombinatsiya ikkinchisiga nisbatan haqiqatga yaqin chunki birinchi kombinatsiya yuzaga kelish ehtimolligi

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,516,$$

ikkinchi kombinatsiya uchun esa ehtimollik

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$$

keltirilgan javoblarni olishda Paskal Ferma qo‘yilgan masalalarni kombinatorikaga oid mulohazalar bilan yechishgan va bunda binomial koeffitsientlardan tashkil topgan “Paskal uchburchagi” o‘zining amaliy tadbiqini topgan.

1657 yilda fanning ko‘p sohalarida mashhur olim bo‘lgan X.Gyuygensning (1629-1695) “Qimor o‘yinlaridagi hisoblar haqida” kitobi bosmadan chiqqan va u “ehtimollik hisobi” bo‘yicha birinchi manbaa bo‘lib xizmat qilgan. Bu kitobda ehtimollik tushunchasining fundamental ta’rifi va ehtimolliklarni hisoblash prinsiplari, ehtimolliklarni qo‘shish va ko‘paytirish formulalari keltirilgan. X.Gyuygensning kitobi uzoq vaqt davomida “Elementar ehtimolliklar nazariyasi” bo‘yicha asosiy qo‘llanma bo‘lgan.

Eslatib o‘tilgan davrda “ehtimolliklar nazariyasi”ning fan sifatida shakllanishida ensiklopedik olim Yakob Bernullining (1654-1705) roli juda ahamiyatli bo‘lgan. Uning tomonidan hozirgi zamon “ehtimolliklar nazariyasi” ning klassik ta’rifi kiritilgan. Tabiatni matematik metodlar bilan o‘rganishda juda

ham muhim va Ya.Bernulli nomi bilan bog‘langan “Katta sonlar qonuni” ehtimolliklar nazariyasining amaliyotdagi qo‘llanmalari asosida yotadi. Bu qonun ehtimolliklar nazariyasining birinchi limit teoremlaridan hisoblanib, u Ya.Bernulli vafotidan so‘ng 1713 yilda “Farazlar san’ati” kitobida (jiyani N.Bernulli qatnashuvida) chop etilgan. Buyuk rus matematiklaridan A.A.Markovning (1856-1921) e’tirof etishi bo‘yicha Ya.Bernulli o‘zining 1704 yil 20 aprelda mashhur olim G.Leybnitsga (1646-1716) yozgan xatida “katta sonlar haqidagi teorema” unga ancha oldin ma’lum bo‘lganligini eslatib o‘tadi (qiziqligi shundaki, “katta sonlar qonuni” ilmiy termin sifatida 1835 yilda Puasson tomonidan keltirilgan).

Mashhur Bernullilar sulolasidan bo‘lgan Daniil Bernulli (1667-1748) ehtimolliklar nazariyasida “Peterburg paradoksi” deb ataluvchi muammoni hal qilgani bilan o‘z nomini abadiylashtirgan (u ko‘p yillar davomida Sankt-Peterburg shahrida yashab ijod qilgan). Bu paradoksni hal qilish jarayonida tasodifiy sonlarning asosiy sonli xarakteristikasi sifatida “ahloqiy kutilma” tushunchasidan foydalangan. Qayd qilib o‘tish zarurki, “Peterburg paradoksi” hozirgi zamon “Moliya va sug‘urta matematikasining” birinchi fundamental modellaridan hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasining yuzaga kelishining ilk davrida tabiatshunoslikni “matematikalashtirish” jarayoniga juda mos keladi. Aynan shu davrda matematikada uzluksizlik, cheksiz katta va kichik miqdorlar konsepsiyalari shakllana boshladi. Shu davrga kelib I.Nyuton (1642-1727) va G.Leybnits bu konsepsiyalarga asoslangan holda differensial va integral hisobni yaratdilar. Ma’lumki o‘rganilayotgan dinamik sistemaning hozirgi holatga nisbatan kelgusidagi evolyutsiyasi differensial tenglamalar orqali o‘rganiladi. Lekin deterministik xarakterga ega bo‘lmagan sistemalarni o‘rganish uchun differensial tenglamalar nazariyasi yetarli bo‘lmaydi. Tabiatshunoslikda ehtimolliklar nazariyasi nodeterministik sistemalarni o‘rganishda juda ham muhim bo‘lib, uning qo‘llanishlari tajribalarni cheksiz marta takrorlash imkoniyatlari (tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga o‘tish) bilan bog‘liq bo‘ladi.

2. *Ikkinchi bosqich* (XVIII asr-XIX asr boshi).

Bu davrda ehtimolliklar nazariyasini mustaqil fan sifatida rivojlantirish P.-R. Monmor (1678-1719), A.Muavr (1667-1754), T.Bayes (1702-1761), P.S.Laplas ((1749-1827), K.Gauss (1777-1855), S.Puasson (1741-1840) kabi mashhur matematiklarning ijodida namoyon bo'ldi.

Yuqorida keltirilgan (1-punkt) farqlardan kelib chiqadiki, birinchi bosqich asosan falsafiy xarakterga ega bo'lib, ehtimolliklar nazariyasining predmeti va metodlari shakllanmagan edi. Ikkinchi bosqich davomida bu fan konkret matematika sifatida o'zining analitik metodlarini yaratib, uni matematik analiz elementlari bilan boyitib bordi. Bu bosqichda ehtimollik tushunchasi asosida amaliy sohalarda hisoblash usullarini rivojlantirish zaruriyati yuzaga keladi.

Aynan shu davrda ehtimolliklar nazariyasi "qimor o'yinlari" kabi tor soha doirasidan chiqib, astronomik kuzatishlar, harbiy sohada ("O'q otish nazariyasi") va tajriba o'tkazishlar bilan bog'liq bo'lgan boshqa amaliy yo'nalishlarda tadqiq etila boshladi. Masalan, ehtimollik–statistik metodlar asosida "xatoliklar nazariyasi" yuzaga keldi.

Yuqoridagi nomlari keltirilgan taniqli matematiklardan Monmor va Muavrlar ijodlarida Ya.Bernullining "ehtimolliklarni hisoblash" traktati chuqur iz qoldirgan. Monmorning "Tasodifiy o'yinlarning analizi tajribalari" (1708 y.) kitobida turli o'yinlar uchun ro'y berish mumkin bo'lgan imkoniyatlarni hisoblash metodlari takomillashtirilgan.

A.Muavr o'zining ikki kitobida ("Hodisalar doktrinasi", 1718 y., "Analitik metodlar", 1730 y.) ehtimollik nazariyasi uchun muhim bo'lgan "hodisalarning bog'liqsizligi", "matematik kutilma", "shartli ehtimolliklar" tushunchalarini chuqur tahlil etgan. Lekin, Muavr matematikada binomial taqsimot uchun normal approksimatsiya mavjud ekanligini isbotlagan teoremasi bilan mashhurdir. Bu teorema haqida quyida to'xtalamiz.

Hech shubhasiz aytish mumkinki, ehtimolliklar nazariyasi taraqqiyoti uchun mazkur bosqichda P.Laplas monumental shaxs hisoblanadi. Uning 1812 yilda chop etilgan "Analitik ehtimollik nazariyasi" kitobi XIX asr davomida ehtimolliklar

nazariyasi bo'yicha asosiy darslik bo'lgan. U bundan tashqari ehtimollik tushunchasining falsafiy asoslariga, bevosita ehtimolliklarni hisoblashga, ehtimolliklar nazariyasini astronomiyada, mexanika va matematik analiz masalalarida tadbirlariga oid bir nechta asarlar yozgan. P.Laplas binomial taqsimotni normal qonun orqali yaqinlashtirish (approksimatsiyalash) haqidagi yuqorida eslatib o'tilgan Muavr teoremasini umumlashtirib qolmasdan, uning yangi analitik isbotini topdi. Bu teorema Muavr-Laplas nomi bilan atalib, XIX asr matematikasida sharaflı mavq'elarga ega bo'ldi. Muavr-Laplas teoremasining nazariy va amaliy ahamiyatini oydinroq yoritish maqsadida uning hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasidagi ifodasini keltiramiz.

O'zaro bog'liqsiz va bir xil Bernulli qonuni bilan taqsimlangan

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'ramiz, ya'ni har qanday j uchun

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & p \text{ ehtimollik bilan,} \\ 0 & 1-p \text{ ehtimollik bilan,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

bo'lsin. Agar

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

deb belgilasak, $P(S_n = k)$ ehtimollik quyidagi ma'noga ega. Aytaylik, Bernulli sxemasida n ta takroriy tajribalar o'tkazilib, har bir tajribada biror A hodisaning ro'y berish yoki bermasligi kuzatilsin. Bu holda n ta tajribada (kuzatishda) A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolligi

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Bu formulada $p = P(A)$ – har bir tajribada A hodisaning ro'y berish, $q = 1 - p$ – ro'y bermaslik ehtimolliklaridir.

Agar biz $p = P(A)$ ehtimollik berilgan deb hisoblasak, $P(S_n = k)$ ehtimolliklarni topish ehtimolliklar nazariyasining masalasi bo'ladi. Agar r ehtimollik noma'lum bo'lsa, uni A hodisa ustidan kuzatishlar (tajribalar) o'tkazish orqali aniqlashga to'g'ri keladi, ya'ni oldingi masalaga nisbatan teskari bo'lgan masala yuzaga keladi. Aytilgan ma'nodagi teskari masalalar matematik

statistikaning asosiy predmeti bo‘ladi. O‘z-o‘zidan tushunarlik $\frac{S_n}{n}$ miqdor A hodisaning n ta tajribada qanchalik ko‘p ro‘y berishlarini xarakterlaydi va uni A hodisaning chastotasi deyiladi.

Ya.Bernulli tomonidan isbotlangan va ehtimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuni deb ataluvchi limit teorema quyidagidan iborat.

1-teorema. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Bu teoremaning ma‘nosi yetarli darajadagi katta n lar uchun $\frac{S_n}{n} \approx p$ bo‘ladi degan xulosadan iborat.

Muavr-Laplas teoremasi (2) limit munosabatdagi ehtimollikni baholash imkoniyatini beradi va u quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Har qanday $a < b$ haqiqiy sonlar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (3)$$

Bu tenglamaning simmetrik hol uchun ($p=q=1/2$) Muavr va ixtiyoriy $0 < p \leq 1$ uchun Laplas isbotlagan. Limit munosabat (3) ning o‘ng tomoni $\Phi(b) - \Phi(a)$ ko‘rinishda yozish mumkin va bunda $\Phi(\cdot)$ standart normal taqsimot funksiyasi bo‘lib

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (4)$$

Muavr-Laplas teoremasining tadbiqui sifatida quyidagi misolni ko‘rish mumkin.

Rasmiy statistik ma‘lumotlarga asosan o‘g‘il bola tug‘ilish ehtimolligi o‘zgaras $p=0,512$ ga teng. Aytaylik, 10^4 bola tug‘ildi. Shu tug‘ilgan bolalardan o‘g‘il bolalar soni qiz bolalar sonidan 200 ko‘p bo‘lish ehtimolligi topilsin.

Qo‘yilgan masala bog‘liqsiz tajribalar Bernulli sxemasi doirasida quyidagicha yechiladi. Faraz qilaylik mumkin 10^4 bog‘liqsiz tajribalar ketma-

ketligi bor ($n=10^4$) va undagi har bir tajribaning natijasi o'g'il yoki qiz bola tug'ilishidan iborat bo'ladi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ξ_j larni quyidagicha keltiramiz: $\xi_j = 1$, agar j -nchi tug'ilgan bola o'g'il bo'lsa, $\xi_j = 0$, agar u qiz bola bo'lsa. U holda

$$S_n = \sum_{j=1}^{10^4} \xi_j$$

miqdor ro'yxatdan o'tgan o'g'il bolalar sonini belgilaydi. Bu holda

$$npq \approx 0,25 \cdot 10^4.$$

Topilishi kerak bo'lgan ehtimollik 2-teoremaga asosan

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 5100) &= 1 - P(S_n < 5100) = 1 - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{5100 - 5120}{\sqrt{2500}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{20}{50}\right) = 1 - \Phi(-0,4) \approx 0,66. \end{aligned}$$

Eslatib o'tamizki, $\Phi(x)$ funksiyaning sonli qiymatlaridan foydalanish uchun ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yozilgan deyarli hamma qo'llanmalarda bu funksiya sonli jadvali keltiriladi.

Agar

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formulani hisobga olsak, topilgan ehtimollikni (1) formula orqali hisoblash deyarli mumkin emasligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham

$$P(S_n \geq 5100) = \sum_{\{k:k \geq 5100\}} \frac{(10^4)!}{(10^4 - k)!k!} p^k q^{n-k}$$

tenglik o'rinli bo'lib, yig'indi ostidagi qo'shiluvchilarni deyarli hisoblab bo'lmaydi.

Alohida qayd qilib o'tish kerak bo'ladiki, Muavr-Laplas teoremasi (1) formuladagi binomial taqsimot parametrlari n va p lar, $np \rightarrow \infty$ munosabatda bo'lganda (xususan p fiksirlangan holda) samarali natijalar beradi. Agar $p = p(n)$

bo‘lib va $n \rightarrow \infty$ da $np \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$) asimptotik munosabat bajarilsa, Muavr-Laplas teoremasi o‘rniga Puasson teoremasini ishlatishga to‘g‘ri keladi.

Muavr-Laplas teoremasidan tasodifiy miqdorlarni qo‘shish nazariyasi boshlandi degan fikrni oldinga sursak, hech ham xato qilmagan bo‘lamiz. Uning umumlashgan variantlari “ehtimolliklar nazariyasining markaziy limit teoremlari” nomi bilan hozirgi zamon matematikasining fundamental va praktik jihatdan juda muhim yo‘nalishini tashkil qiladi (termin mashhur matematik D.Poya (1887-1985) tomonidan taklif qilingan).

Shu davr davomida Bernulli tomonidan ilgari surilgan va “ehtimollikning klassik ta’rifini” asoslaydigan “teng imkoniyatlilik” prinsipidan chetlanish g‘oyalari ham yuzaga keldi. Buning natijasida klassik sxemalarga mos kelmaydigan “noklassik taqsimotlar” mavjud bo‘lishi va ular nazariya va amaliyotda muhim rol o‘ynashi kashf etildi. Masalan, (4) formula bilan aniqlanadigan normal taqsimot, Puasson taqsimotlari shular jumlasidandir (eslatib o‘tamizki butun va manfiy bo‘lmagan qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega deyiladi, agar

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

bo‘lsa. Tushunarliki ehtimollikning klassik ta’rifi darajasida bu taqsimotni aniqlab bo‘lmaydi).

“Noklassik taqsimotlar”ni boshqa misoli sifatida “geometrik ehtimolliklarni” keltirish mumkin. Bu ehtimolliklar birinchi bor mashhur naturalist I.Nyutonda uchraydi (1665 y.). Bu ehtimolliklar Byuffonning “ignalarni tasodifiy tashlash” nomi bilan mashhur masalasida uchraydi. Teng imkoniyatli bo‘lmagan taqsimotlar 1763 yilda topilgan Bayes formulasi va unga bog‘liq bo‘lgan “to‘la ehtimollik” formulalarini asosini tashkil qiladi va ular “klassik sxemaning” juda tor ekanligini isbotlaydi. Bu formulalar kelgusida matematik statistika masalalarida yangi yo‘nalish – Bayes metodlarini yuzaga keltirdi.

Lekin aytib o‘tilgan taraqqiyotlar (shu davrda erishilgan) ehtimollik nazariyasini mustaqil fan darajasiga ko‘tara olmadilar, chunki bu davrda bu fan

nazariya uchun umumiy (abstrakt) konstruksiyalar yo‘q edi. Ikkinchidan esa, shu davrda qo‘llanilgan metodlar qimor o‘yinlari, xatolik nazariyasi, sodda sug‘urta, demografiyaning konkret masalalarini yechish doirasida chegaralanib qolgan edi.

3. *Uchinchi bosqich* (XIX asr ikkinchi yarmi)

XIX asr ikkinchi yarmidan boshlab Sankt-Peterburg ehtimolliklar nazariyasining umumiy muammolari bo‘yicha olib borilayotgan ilmiy tadqiqot ishlarining markaziga aylandi. P.L.Chebichev (1821-1894), A.A.Markov (1856-1921), A.M.Lyapunov (1857-1918) va boshqa rus matematiklari ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematika fani sifatida rivojlanishiga katta hissa qo‘shdilar. Aynan shu olimlarning tadqiqotlari natijasida ehtimolliklar nazariyasi “klassik sxema” doirasidan chiqdi. Masalan, P.L.Chebichev tasodifiy miqdorlar, matematik kutilma tushunchalarini juda erkin his qilganini sezish qiyin emas.

Bu davrgacha kashf qilingan katta sonlar qonuni, Muavr-Laplas teoremasi faqat 2 ta qiymat qabul qiladigan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga tegishli edi xolos (Bernulli sxemasi). P.L.Chebichev bu teoremalarning tadbiq doiralarini kengaytirdi. Masalan, u katta sonlar qonunini biror o‘zgarmas son bilan tekis chegaralangan bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun o‘rinli ekanligini isbot etdi. Uning o‘quvchisi A.A.Markov bu tadqiqotni davom ettirib, katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘lishi uchun kerak bo‘lagan yetarli va zaruriy shartlarni topdi. Bu tadqiqotlar davomida matematikaning boshqa sohalarida ham muhim ahamiyatga ega bo‘lgan Chebichev, Chebichev-Markov tengsizliklari isbot etildi.

Katta sonlar qonunidan so‘ng P.L.Chebichev yuqorida keltirilgan Muavr-Laplas teoremasining umumiy ko‘rinishi – markaziy limit teoremaning juda keng tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari sinfi uchun o‘rinli bo‘lish muammolari bilan shug‘ullandi. Bu tadqiqotlarda P.L.Chebichev markaziy limit teoremaning o‘rinli bo‘lishida ko‘p qo‘llaniladigan “momentlar metodi”ni ishlab chiqdi. Bu metod A.A.Markovning ishlaridan takomillashtirildi.

Ma’lumki, “momentlar metodi”ni qo‘llanilishi qo‘shiluvchi bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun hamma tartibdagi momentlar mavjud bo‘lishligini

taqozo qiladi. P.L.Chebichevning topshiriqlaridan biri A.M. Lyapunov o‘zi asos solgan analitik metod – xarakteristik funksiyalar metodini qo‘llab, markaziy limit teorema o‘rinli bo‘lishi uchun qo‘shiluvchi bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlarning atigi $2 + \delta$ ($\delta > 0$) tartibdagi momentlari mavjudligi yetarli ekanligini isbotladi. Eslatib o‘tamizki A.M.Lyapunov ehtimolliklar nazariyasidan tashqari matematika va mexanikaning boshqa sohalarida ham juda sermahsul ish qilgan. Masalan, u hozirgi zamon fanidagi “turg‘unlik nazariyasiga” asos solganini eslatib o‘tish yetarli bo‘ladi.

Bu davr oxirida A.A.Markov tomonidan bog‘liqsiz bo‘lmagan, ya’ni bog‘liqli bo‘lgan tasodifiy miqdorlar sxemasini kiritilganni va o‘rganilganni ehtimolliklar nazariyasida butunlay yangi konsepsiyasini yuzaga keltirdi. Bu sxema “Markov prinsipi” deb ataldigan qoidaga bo‘ysunib, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ifoda etadigan fizik sistemaning “kelgusidagi” evolyutsiyasi faqat uning hozirgi holatiga bog‘liq bo‘lishini taqozo qiladi. Pirovardida bu sxema tasodifiy miqdorlarning “Markov zanjirlari” nomini oldi va Markovning o‘zi ikki qiymatli “zanjirlar” uchun ergodik teorema (katta sonlar qonuning qat’iy formasi) va markaziy limit teoremasi (Mauvr-Laplas teoremasining umumlashgani) o‘rinli ekanligini isbotladi. A.A.Markovning bu ishlarida hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining “Markov tasodifiy jarayonlari” yo‘nalishiga asos bo‘ldi.

Umuman, xulosa qilib aytish mumkinki, P.L.Chebichev, A.A.Markov A.M.Lyapunovlarning yuqorida qisqacha izoxlangan ishlari (“Peterburg maktabi”) ehtimollik nazariyasining keyingi davrlardagi rivojlanishiga mustahkam poydevor bo‘lib xizmat qildi.

XIX asrning ikkinchi yarmida g‘arbiy Evropada ham ehtimolliklar nazariyasiga qiziqish keskin yuksaldi. Bu qiziqishning asosiy sabablari, bu nazariyaning sof matematika tushunchalari orqali, statistik fizika va endigina ro‘yobga chiqayotgan matematik statistika masalalari bilan uzviy ravishda bog‘liqligi bor ekanligida bo‘ldi. Shu davrda ko‘pchilik matematiklarga ehtimolliklar nazariyasi mustaqil fan sifatida rivojlanish uchun uni “klassik

asoslardan” (ya’ni elementar hodisalar soni chekli va ularning teng imkoniyatligi) qutilishi kerakligi tushunarli bo’ldi.

Aynan shu davrda sof matematikaning o’zida ham “ehtimollik” tushunchasi bilan bog’liq bo’lgan ulkan o’zgarishlar ro’y berdi. Masalan, ehtimolliklar nazariyasidan juda yirik bo’lgan sonlar nazariyasida ehtimolliklar taqsimotlari bilan bog’liq metodlarni qo’llash orqali qiyin masalalar hal qilindi. 1880 yilda mashhur matematika A.Puankare (1854-1912) “Uch jism harakati” haqidagi qiyin mexanik masalalarni yechishda tasodifiy xarakterda bo’lgan dinamik sistemalarini “qaytalanish” xossalaridan foydalandi. Shu davrda “tasodifiy tanlash” kabi tushunchalarga murojaat ko’payib bordi. Masalan, A.Puankare 1886 yilda chop etgan “Ehtimolliklar nazariyasi” kitobida “[0,1] oraliqdan tasodifiy ravishda tanlangan nuqtaning ratsional songa mos kelishligi qanday ehtimolliklar ro’y beradi” kabi masalalarga ko’p to’xtagan. 1888 yilda astronom X.Gyulden (1841-1896) tomonidan yozilgan maqolada, A.Puankare qo’yg’an bu masala, sayyoralarning harakatlarining “turg’unlik bo’lishi yoki bo’lmasligi” bilan bog’liq ekanligini ko’rsatib o’tilgan.

“Ehtimolliklar taqsimoti” tushunchalari va ular bilan bo’lgan metodlar XIX asrning ikkinchi yarmida klassik fizikada va statistik mexanikada keng qo’llanay boshladi. Masalan, zarrachalarning molekulyar harakati uchun “Maksvell taqsimoti” (J.Maksvell (1831-1879) mashhur ingliz fizigi), L.Bolsman (1844-1906) tomonidan “o’zgaruvchi o’rta qiymatlar” va “ergodik” prinsiplarini kashf etilganini eslatib o’tish yetarli bo’ladi. Ehtimolliklar nazariyasi va uning metodlarini shu davrdagi rivojlanishga 1827 yilda “Braun xarakati” (R.Braun (1773-1858) ingliz botanigi) nomi bilan atalgan tasodifiy jarayonlarni ochilganligi sezilarli ravishda ta’sir etdi. Bu “harakat”ning matematik asoslari keyinroq mashhur fizik A.Eynshteyn (1879-1955) va uning shogirdi M.Smonuxovskiy ishalrida keltirildi. Braun jarayonlari (“harakatlari”) A.Bekkeren (1852-1908) tomonidan kashf etilgan jismlarning radioaktivlik xossalarini o’rganishda muhim rol o’ynadi. 1900 yilda esa L.Bashale (1870-1946) “aksiyalarning qiymatini” matematik usul bilan aniqlashdi. “Braun jarayonlari” dan foydalandi (Eslatib o’tish

mumkinki hozirgi zamon moliya matematikasiga L.Bashalening shu ishlari asos bo'ldi).

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, yuqorida keltirilgan va muhim praktik ahamiyatga ega bo'lgan tasodifiy jarayonlarning mohiyatini "klassik" konsepsiyaga asoslangan ehtimolliklar nazariyasi orqali tushuntirib berish mumkin bo'lmaydigan vaziyat yuzaga keldi. Aynan shu davr oxirida sof matematikada to'plamlar nazariyasini va u bilan bog'liq ravishda "o'lchamlar nazariyasi" shakl topa boshladi. Bu yangi nazariyalar yuqorida keltirilgan va ehtimolliklar nazariyasini "boshi berk" ko'chaga olib kirgan vaziyatini bartaraf etishda muhim omil bo'lib hizmat qildi. Bunda mashhur fransuz matematigi E.Borel (1871-1956) tomonidan "o'lchovli to'plamlar", "to'plamlarning o'lchovi" tushunchalari kiritilishi muhim ahamiyat kasb etdi. To'plamlarning "Borel o'lchovlari" matematikada muhim bo'lgan uzunlik, yuza, hajm tushunchalarini beqiyos umumlashtiradi. E.Borelning bu ishlarida tajribalarning elementar natijalari ixtiyoriy to'plam tashkil etishni hisobga olgan holda bu tajribaning matematik modelini qurish mumkinligiga asos solindi. Xususan, bu modellar berilgan tajribaning cheksiz marta davom ettirish mumkinligi hollari uchun ham mos keladi. Matematik nuqtai nazaridan ohirgi xulosada to'plamlar ustida sanoqli sondagi birlashtirish (qo'shish) va umumlashtirish (ko'paytirish), pirovardida esa, limitga o'tish amallarini bajarish kerakligi e'tirof etiladi. Aytilganlardan tushunarliki, E.Borelning ishlarida ehtimolliklar nazariyasi uchun butunlay yangi konseptual –falsafiy asos solindi. Ayni paytda bular XIX asrning oxirlarida isbotlangan "kuchaytirilgan katta sonlar qonuni" haqidagi teoremda namoyon bo'ldi. Bu teorema ma'lum xossani qanoatlantiradigan haqiqiy sonlar "ko'pligi yoki ozligi" haqida tassavvur hosil qilish imkonini beradi va uni quyidagicha izohlash mumkin:

Aytaylik, haqiqiy son $\omega \in [0,1]$ bo'lib,

$$\omega = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

bu sonning ikkilik sanoq sistemasidagi yoyilmasi bo'lsin. Ya'ni har qanday n uchun $\alpha_n = 0$ yoki 1 . Agar $v_n(\omega)$ deb birinchi $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ qismida 1 ning takrorlanishi chastotasini belgilasak, u holda

$$\left\{ \omega : v_n(\omega) \rightarrow \frac{1}{2} \right\}, \quad n \rightarrow \infty$$

to'planning "Borel o'lchovi" 1 ga teng bo'ladi yoki aksincha bu xossani qanoatlantirmaydigan ω larni to'plam uchun bu "o'lchov" 0 ga teng bo'ladi. Bu teorema hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida "Borelning kuchaytirilgan sonlar qonuni" nomi bilan atalib yuqorida keltirilgan Bernullining katta sonlar qonuni tubdan kuchaytirildi. Haqiqatan ham Bernulli teoremasi har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{ \omega : \left| v_n(\omega) - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

ekanligini e'tirof etsak, Borel teoremasi esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{ \omega : \sup_{m \geq n} \left| v_m(\omega) - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

ekanligini tasdiqlaydi.

Mashhur fransuz matematigi A. Lebeg (1875-1941) yuqorida izohlangan E. Borelning ishlarini davom ettirib, haqiqiy funksiyalar nazariyasida o'lchovli fazolar tushunchasini kiritib, ularda yangi integral hisobini ixtiro qildi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, Borelning o'lchovlar nazariyasi va Lebegning abstrakt integral nazariyasi kelgusida ehtimollik tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan matematik modellarni o'rganishda konseptual baza bo'lib hizmat qildi.

5. *To'rtinchi bosqich* (XX asr boshi va o'rtasi)

XIX asr oxiriga kelib ehtimolliklar nazariyasining sof matematika bilan munosabatlari aniq tus oldi. Bu esa ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematik fan sifatida aksiomatik asosda qayta qurish problemalarini yuzaga keltirdi. Bu problemalar mashhur nemis matematigi D. Gilbert (1862-1943) 1900 yil 8 avgust kuni II-jaxon matematiklarining Parijda o'tgan kongressida qilgan dokladida o'z aksini topdi. Qiziqligi shundaki bu olamshumul dokladda D. Gilbert ehtimollik

nazariyasini fizika fanlar qatoriga qo'yib, uni sof matematik nuqtai nazardan asoslash zarurligini uqtirib o'tdi.

Ehtimolliklar nazariyasini matematik fan sifatida shakllanishining to'rtinchi bosqichi – uni logika asosida mustaqil fan ko'rinishini olish davri hisoblanadi.

D.Gilbert ma'ruzadan ko'p vaqt o'tmasdan ehtimolliklar nazariyasini to'plamlar nazariyasi va o'lchovlar nazariyasi asosida "matematikalashtirish" harakatlari boshlandi. Lekin bu harakatlarning ko'pchiligini muvafaqqiyatli deb bo'lmaydi.

XX asrning o'rtalariga kelib, 1933 yilda mashhur matematik A.N.Kolmogorov (1903-1987) tomonidan taklif qilingan askiomalar sistemasi hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etganligini e'tirof etildi. A.N.Kolmogorov taklif qilgan konsepsiya sodda va bir vaqtni o'zida mukammal xarakterga ega. U

$$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

ehtimollik fazosi tushunchasiga asoslanadi. Bu yerda Ω – ixtiyoriy to'plam bo'lib, uning elementlari ω lar ($\omega \in \Omega$) elementar hodisalar sifatida qabul qilinadi. \mathfrak{F} esa Ω bilan bog'liq hodisalar σ -algebrasi. \mathfrak{F} -sistema σ -algebra tashkil qilish shartlari (aksiomalari) va (Ω, \mathfrak{F}) o'lchovli fazoda $P(\cdot)$ ehtimollik o'lchovi bo'lish shartlari (aksiomalari) birgalikda Kolmogorov aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. Natijalarni oldindan aytish mumkin bo'lmagan tajribalar uchun ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ matematik asosda bo'lib xizmat qiladi (ushbu kitobning § 1.4 ga qarang).

O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fani

Yuqorida keltirilgan ehtimolliklar nazariyasining shakllanishi va rivojlanishi to'rtinchi davrida (XX asrning 30 yillaridan boshlab) O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika sohasida butun dunyoga tanilgan ilmiy maktab yaratildi. Bu maktabning asoschilari, shu sohaning yirik namoyondalari

akademiklar Vsevolod Ivanovich Romanovskiy (1879-1954), Toshmuxammad Alievich Sarimsoqov (1915-1995), Sa'di Xasanovich Sirojiddinov (1920-1988) edilar. Quyida biz bu buyuk allomalar faoliyati haqida qisqa bo'lsa ham ma'lumotlar berishga harakat qilamiz.

V.I.Romanovskiy 1879 yil 5 dekabrda Qozog'istonning Verniy (hozirgi Olma-ota) shahrida tug'ildi. Uning yoshlik yillaridayoq Romanovskiylar oilasi Toshkentga ko'chib kelgan edi. U o'rta maktabni (aniqrog'i o'sha paytdagi real bilim yurtini) bitirgandan so'ng Sankt-Peterburg Universitetining fizika-matematika fakultetiga o'qishga kiradi. Universitetda unga mashhur rus matematigi Andrey Andreevich Markov (1856-1921) ustozlik qilgan. 1904 yilda V.I.Romanovskiy universitetni a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng uni professorlik lavozimiga tayyorlash uchun magistraturaga qabul qilingan (A.A.Markov rahbarligida). V.I.Romanovskiyning ilmiy va pedagogik faoliyati Sankt-Peterburg Universitetida privant-dotsentlik lavozimidan boshlangan. (1906 y). Keyinchalik u Varshavadagi rus Universitetida, Rostovning Don Universitetida ishlagandan so'ng 1917 yili Toshkentga qaytib keladi va mahalliy gimnaziyalarda matematika va fizikadan darslar beradi. 1918 yilda Toshkentda bir guruh o'zbek ziyolilarining tashabbusi bilan hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti ochildi va tez orada V.I.Romanovskiy bu o'quv maskanda faoliyat ko'rsata boshladi.

V.I.Romanovskiy ko'p qirrali olim bo'lgan. Masalan, uning birinchi dissertatsiyasi mexanikada ko'p uchraydigan differensial tenglamalarni integrallash masalalariga bag'ishlangan. Lekin u uchun ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika asosiy mutaxassislik bo'lgan desak, xato qilmaymiz. U o'zining ustozlari A.A.Markov tomonidan kiritilgan "tasodifiy miqdorlarni zanjir arqoni" bog'liq bo'lishligi tushunchasini umumlashtirdi va aniqlashtirdi. V.I.Romanovskiy XX asr boshida R.Frobuonis tomonidan yaratilgan manfiy bo'lmagan matritsalar nazariyasini kengaytirib, uni Markov zanjirlariga tadbiiq etdi. Bu ishlar hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida "Romanovskiyning matritsa metodlari" nomi bilan o'z mavqega ega bo'ldi.

V.I.Romanovskiy haqli ravishda “Matematik statistika” mustaqil matematik fan sifatida shakllanishiga asos solgan olimlardan biri hisoblanadi. Bu fikrning isbotini bu sohada birinchi bo‘lib rus tilida 1938 yilda Moskvada chop etilgan “Matematicheskaya statistika” kitobi (monografiya, 803 bet) V.I.Romanovskiy tomonidan yozilganligida ham ko‘rish mumkin. Ayniqsa bu kitob Matematik statistika “soxta fan” deb hisoblanib, quvg‘in ostiga olingan paytda chop etilganini hisobga olsak, bu olimning g‘oyaviy jihatdan mustahkam mavqeni tonlaganligini inkor etib bo‘lmaydi. Aytib o‘tilganlar qatorida “Markov zanjirlari” bo‘yicha yozilgan birinchi monografik asar ham V.I.Romanovskiy qalamiga tegishli ekanligini eslatib o‘tish kerak bo‘ladi. (Дискретные цепи Маркова. Москва 1949, 507 bet).

V.I.Romanovskiy matematik statistika metodlarini bevosita ishlab chiqarishda (texnikada, qishloq xo‘jaligida) qo‘llash masalalariga juda e‘tibor qilgan va bu sohadagi ishlarni tartibga keltirib 1947 yilda «Primineniya matematicheskoy statistiki v o‘pymnom dele» deb atalgan kitob-tavsiyanomani yozgan.

V.I.Romanovskiy sermaxsul ijodiy shaxs bo‘lishi bilan bir qatorda mashhur pedagog ham bo‘lgan. U ko‘p yillar davomida talabalar uchun matematika va mexanikaning turli sohalari bo‘yicha ma‘ruzalar o‘qigan, aspirant va yosh olimlarning ilmiy ishlariga rahbarlik qilgan. Mashhur akademik olimlar T.N.Qori-Niyoziy, T.A.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinovlar bu buyuk olimning shogirdlari bo‘lganlar.

Akademik Toshmuxammad Alievich Sarimsoqov 1915 yil 7 sentyabrida Andijon viloyatining Shahrixon shahrida tug‘ilgan. Bolalik va o‘smirlik yillari Qo‘qon shahrida o‘tgan. T.A.Sarimsoqovning ilmiy faoliyati O‘rta Osiyo Davlat Universitetida (hozirgi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti) boshlangan. Dastlabki davrlarda u ehtimolliklar nazariyasini matematik analiz masalalaridagi tadbirlari bilan shug‘ullangan. Masalan, analizda ko‘p uchraydigan maxsus ko‘phadlarning ildizlarini “tarqoq yoki zich” taqsimlanish hollari T.A.Sarimsoqov tomonidan mukammal o‘rganilgan. Keyingi navbatlarda esa

ustozi V.I.Romanovskiyning Markov zanjirlarini matritsa usuli bilan o'rganish metodlarini kengaytirib umumlashtirishni va ularni holatlari cheksiz (sanoqli yoki kontinium) to'plamni tashkil qilgan tasodifiy Markov jarayonlarini o'rganishga tadbirlari haqidagi problemalar T.A.Sarimsoqov uchun asosiy ilmiy mavzu bo'lgan. Holatlari uzluksiz to'plam $((a,b)$ oraliq) bo'lgan Markov zanjirlari uchun ehtimolliklar nazariyasining asosiy limit teoremlari – markaziy limit teorema va takroriy logarifm qonunlari o'rinli bo'lgan muammolari T.A.Sarimsoqov tomonidan ilk bor o'rganilgan. Bu problemalarni yechish jarayonida XX asrning birinchi yarmida L.Fredholm yaratgan integral tenglamalar nazariyasini ehtimollik nazariyasi uchun o'ziga xos ko'rinishda talqin etish mumkinligi isbotlandi. Pirovardida esa bu ilmiy tadqiqotlar holatlari kontinium to'plamlar bo'lgan Markov jarayonlari o'rganish uchun “integral tenglamalar metodi”ni yuzaga keltirishga olib keldi. Aytib o'tilgan ilmiy natijalar T.A.Sarimsoqovning 1954 yilda Moskvada chop etilgan “Основы теории Марковских процессов” monografiyasida qayd etildi. Bu monografiya va muallifning taniqli ilmiy jurnallaridagi qator materiallari Markov jarayonlarini o'rganish va ularning tadbiriq etish sohalarida yangi istiqbollik yo'nalishlar ochilishiga olib keldi.

O'tgan asrning 60-nci yillaridan boshlab T.A.Sarimsoqov rahbarligida Toshkentda abstrakt fazolarda ehtimolliklar taqsimoti tushunchalari bilan bog'liq bo'lgan yangi matematik ob'ektlarni o'rganish ishlari boshlandi. Bu yo'nalishda hozirgi zamon funksional analizi uchun muhim bo'lgan “topologik yarim maydonlar” nazariyasi yaratildi. Bu yangi ob'ektlar uchun o'ziga xos yaqinlashish tushunchalari va ularga mos keladigan integrallash amallari kiritildi. Oldingi ehtimolliklar nazariyasidan farqli ravishda bu ehtimolliklar fazolarida elementar hodisa, tasodifiy miqdor kabi so'zlarga aniq ma'no beradigan fizik tushunchalar topish imkoniyati yuzaga keldi. Nazariy fizikaning konkret masalalarida uchraydigan jarayonlarning Gilbert fazolari uchun “kvant ehtimolliklar” matematik modellari mukammal o'rganildi. Eslatib o'tilgan tadqiqotlar asosida 1985 yilda T.A.Sarimsoqovning fundamental “Введение в квантовую теорию вероятностей” (Toshkent, Fan, 307 b.) monografiyasi yaratildi.

O'zbekistonda "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" maktabining yuzaga kelishida akademik Sa'di Xasanovich Sirojiddinovning faoliyati beqiyos hisoblanadi. S.X.Sirojiddinov 1920 yil 10 may Qo'qon shaxrida tug'ilgan. 1942 yilda O'rta Osiyo Davlat Universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng 1945 yilgacha harbiy injener-sinoptik vazifasida ishlagan. 1947 yilda V.I.Romanovski rahbarligida "Многомерные полиномы Эрмита" nomli kandidatlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Bu dissertatsiyada Ermit ko'phadlarining Matematik statistikadagi tadbirlariga bog'liq masalalar yechilgan. 1948 yilda Toshkentda akademiklar A.A.Kolmogorov, V.I.Romanovskiylarning tashabbusi bilan ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha xalqaro anjuman o'tkazilgan. Bu anjuman paytida yosh olim S.X.Sirojiddinov mashhur matematik A.N.Kolmogorov diqqatiga sazovor ilmiy ma'ruza qilgan. Anjuman oxirida A.N.Kolmogorov unga doktorantura bo'yicha ilmiy rahbar bo'lishga rozilik bergan. Shunday qilib, S.X.Sirojiddinov 1949-1952 yillar davomida Moskvadagi matematika bo'yicha dunyoga mashhur ilmiy markaz – V.A.Steklov nomidagi Matematika Institutida akademik A.N.Kolmogorov rahbarligida doktorant bo'lgan. 1953 yilda shu institutning Ilmiy Kengashida "Пределные теоремы для однородных цепей Маркова" mavzusidagi doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Bu himoyaning juda muvafaqqiyatli o'tganini mazkur dissertatsiya bo'yicha akademiklar Yu.V.Linnik, B.V.Gnedenko, M.V. Smirnovlar opponetlik vazifasini bajarganliklarida ham ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham bu dissertatsiyaning birinchi bo'lib bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremasidagi qoldiq hadning nolga intilishi tartibi birjinsli Markov zanjirlari uchun ham bir xil bo'lishligi isbot etilgan.

Bundan tashqari oddiy Markov zanjirlari A.N.Kolmogorov tomonidan isbotlangan ko'p o'lchovli lokal teoremaning qoldiq hadining asimptotik yoyilmasi topildi. Bu natijalarni olish jarayonida S.X.Sirojiddinov stoxastik matritsalarini spektral nazariyasini kashf etdi va uni analitik metod-xarakteristik funksiyalar metodi bilan moslashtirdi.

1953-1957 yillar davomida S.X.Sirojiddinov ustozi A.N.Kolmogorovning tavsiyasi Moskva Davlat Universitetida professorlik lavozimida ishladi. Bu davrda u tayyor sanoat mahsulot sifatini statistik usullar bilan nazorat qilish, diskret taqsimotlarning o'rtqa qiymatlari uchun «siljimaydigan» statistik baholar topish masalalari bilan shug'ullandi. Ayniqsa, uzluksiz (vaqt bo'yicha) Markov zanjirlari sxemasi bo'yicha bog'liq bo'lgan miqdorlar yig'indilarining taqsimotlari absolyut uzluksiz komponentaga ega bo'lishi haqidagi S.X.Sirojiddinov tomonidan isbotlangan teorema mutaxassislarda katta qiziqish uyg'otdi. (Bu teorema 1958 yil Edenburg shahrida bo'lib o'tgan matematiklarning halqaro kongresida S.X.Sirojiddinovning ma'ruzasida keltirilgan). Moskva Davlat Universitetida ishlagan paytlarda S.X.Sirojiddinov ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yosh mutaxassislar tayyorlashga juda katta e'tibor bergan. O'zlarining ilmiy ishlari shuhrat qozongan professorlar S.A.Ayvazyan, M.L.Meshalkinlar uning shogirdlari bo'lganlar.

S.X.Sirojiddinovning Toshkentga qaytib kelgandan keyingi ilmiy va jamoatchilik faoliyati O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Matematika instituti, Toshkent Davlat Universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) bilan bog'liqdir. Shaxsan uning tashabbusi bilan O'zbekistonda ehtimollik nazariyasi va matematik statistikaning eng zamonaviy yo'nalishlari bo'yicha ilmiy tadqiqot ishlari boshlandi. Bular qatorida birinchi navbatda o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'yish nazariyasi, tasodifiy jarayonlar (xususan tarmoqlanuvchi jarayonlar, ommaviy xizmat ko'rsatish sxemalari, statsionar jarayonlarning ekstremal masalalari), statistik baholarning asimptotik xossalari kabi yo'nalishlarni sanab o'tish kerak bo'ladi.

Akademik S.X.Sirojiddinov O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yetuk mutaxassislar tayyorlash sohasida ham jonbozlik ko'rsatgan. Uning bevosita rahbarligida 60 tadan ko'p nomzodlik, 10 tadan ko'p doktorlik dissertatsiyalari himoya qilingan. Bulardan tashqari ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha mutaxassislarning Xalqaro Bernulli jamiyatining I-kongressi Toshkentda (1986 y) o'tkazilganligi va

bu anjumanda S.X.Sirojiddinov tashkiliy qo‘mita raisi bo‘lganligi avlodlar tarixida o‘chmas xotira bo‘lib qoladi.

Ilovalar

1-jadval

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ funksiyaning qiymatlari}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3604	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	1874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2466	2444
1,0	2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2056	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1466	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0308	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0170	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ funksiyaning qiymatlari}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49890	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49915	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998
	$x =$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5				
	$\Phi(x) =$	0,499979	0,499986	0,499991	0,499995	0,499997				
	$x =$	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0				
	$\Phi(x) =$	0,499998	0,4999987	0,4999992	0,4999995	0,4999997				

$$P_k(a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \text{ ning qiymatlari (Puasson taqsimoti)}$$

$k \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0283	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031

$k \backslash a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0004
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1660	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0034	0216	0595	1044	137?	1490	1396	1171	0901
8	0000	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0000	0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0000	0000	0008	0062	0161	0413	0710	0993	1186	1251
11	0600	0000	0000	0019	0082	0077	0452	0722	0970	1137
12	0000	0000	0000	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0946
13	0000	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Боровков Теория вероятностей М.: Наука 1999 г.
2. Расулов А.С., Раимова Г.М., Саримсакова Х.Қ. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т. 2005 й.
3. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т. 1977 й.
4. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Т. 1977 й.
5. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков . Сборник задач по теории вероятностей М.: Наука, 1999 г.
6. Сирожиддинов С.Х., Маматов М.М. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т. 1972 й.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999 г.
8. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Эҳтимоллар назарияси асослари. Т. 1978 й.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1999 г.
10. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей Москва 2003г.

Mundarija

Soʻz boshi	3
Kirish	5
I-BOB. EHTIMOLLIKLAR FAZOSI	8
1.1-§. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar va ular ustida amallar	8
1.2-§. Diskret elementar hodisalar fazosi. Ehtimollikning klassik taʼrifi	13
1.3-§. Ehtimollikning geometrik va statistik taʼriflari	19
1.4-§. Ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari	22
1.5-§. Ehtimollikning xossalari	28
1.6-§. Shartli ehtimollik. Hodisalar bogʻliqsizligi	31
1.7-§. Toʻla ehtimollik va Bayes formulalari	35
Oʻz-oʻzini tekshirish savollari	40
Misol va masalalar	41
I-bob boʻyicha test topshiriqlari	45
II-BOB. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALARI	61
2.1-§. Tasodifiy miqdorlar. Taʼrif va misollar	61
2.2-§. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi	62
2.3-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi	67
2.4-§. Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlar	71
Oʻz-oʻzini tekshirish savollari	75
Misol va masalalar	75
II-bob boʻyicha test topshiriqlari	79
III-BOB. BOGʻLIQ BOʻLMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI	86
3.1-§. Bernulli sxemasi. Binomial taqsimot	86
3.2-§. Muavr – Laplasning lokal va integral teoremlari	89
3.3-§. Lokal limit teorema	94
3.4-§. Puasson teoremasi	98
Oʻz-oʻzini tekshirish savollari	105

Misol va masalalar	106
III-bob bo'yicha test topshiriqlari	108
IV-BOB. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI	114
4.1-§. Stiltes integrali	114
4.2-§. Matematik kutilma, uning ehtimollik ma'nosi va xossalari	118
4.3-§. Dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish. Dispersiyaning xossalari	124
4.4-§. Yuqori tartibli momentlar	128
O'z-o'zini tekshirish savollari	134
Misol va masalalar	135
IV-bob bo'yicha test topshiriqlari	137
V-BOB. BOG'LIQ BO'LMAGAN TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI. LIMIT TEOREMALAR	141
5.1-§. Chebishev tengsizligi. Katta sonlar qonuni	141
5.2-§. Markaziy limit teorema	146
O'z-o'zini tekshirish savollari	150
Misol va masalalar	151
V-bob bo'yicha test topshiriqlari	152
VI-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI	158
6.1-§. Matematik statistikaning asosiy masalalari	158
6.2-§. Bosh va tanlanma to'plam	159
6.3-§. Empirik taqsimot funksiya. Poligon va gistogramma	161
6.4-§. Statistika baholar va uning xossalari. Nuqtaviy baholar	166
6.5-§. Intervalli baholash. Ishonchlilik intervallari	171
6.6-§. Statistika gipotezalar nazariyasi elementlari	173
O'z-o'zini tekshirish savollari	179
Misol va masalalar	179
VI-bo'yicha test topshiriqlari	182
Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida yuzaga kelish tarixidan lavhalar	187

Ilovalar	209
Foydalanilgan adabiyotlar	214
Mundarija	215

Содержание

Предисловие	3
Введение	5
Глава I. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО	8
§ 1.1. Пространство элементарных событий. События. Операции над событиями	8
§ 1.2. Дискретное пространство элементарных событий. Классическое определение вероятности	13
§ 1.3. Геометрическое и статистическое определения вероятности	19
§ 1.4. Аксиомы теории вероятностей	22
§ 1.5. Свойства вероятности	28
§ 1.6. Условная вероятность. Независимость событий	31
§ 1.7. Формула полной вероятности. Формула Байеса	35
Вопросы для самопроверки	40
Примеры и задачи	41
Тесты по главе I	45
Глава II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	61
§ 2.1. Случайные величины. Определения и примеры	61
§ 2.2. Закон распределения и функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения	62
§ 2.3. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция плотности случайной величины	67
§ 2.4. Многомерные случайные величины	71
Вопросы для самопроверки	75
Примеры и задачи	75
Тесты по главе II	79
Глава III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ	86
§ 3.1. Схема Бернулли. Биномиальное распределение	86

§ 3.2. Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа	89
§ 3.3. Локальная предельная теорема	94
§ 3.4. Теорема Пуассона	98
Вопросы для самопроверки	105
Примеры и задачи	106
Тесты по главе III	108
Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	114
§ 4.1. Интеграл Стильеса	114
§ 4.2. Математическое ожидание, его вероятностный смысл и свойства	118
§ 4.3. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение.	124
Свойства дисперсии	
§ 4.4. Моменты высших порядков	128
Вопросы для самопроверки	134
Примеры и задачи	135
Тесты по главе IV	137
Глава V. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ	141
§ 5.1. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева	141
§ 5.2. Центральная предельная теорема	146
Вопросы для самопроверки	150
Примеры и задачи	151
Тесты по главе V	152
Глава VI. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	158
§ 6.1. Основные задачи математической статистики	158
§ 6.2. Генеральная и выборочная совокупности	159
§ 6.3. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма	161
§ 6.4. Статистические оценки и их свойства. Точечные оценки	166
§ 6.5. Интервальное оценивание. Доверительные интервалы	171
§ 6.6. Элементы теории статистических гипотез	173

Вопросы для самопроверки	179
Примеры и задачи	179
Тесты по главе VI	182
Очерк по истории становления теории вероятностей как математической науки	187
Приложение	209
Список использованной литературы	214
Содержание	215

Contents

Preface	3
Introduction	5
Chapter I. PROBABILITY SPACE	8
1.1. Space of elementary events. Events. Operations over events	8
1.2. Discrete space of elementary events. Classical definition of probability	13
1.3. Geometrical and statistical definitions of probability	19
1.4. Axioms of probability theory	22
1.5. Properties of probability	28
1.6. Conditional probability. Independence of events	31
1.7. The formula of total probability. The Bayes formula	35
Questions for self-examination	40
Examples and problems	41
Tests by Chapter I	45
Chapter II. RANDOM VARIABLES AND DISTRIBUTION FUNCTIONS	61
2.1. Random variables. Definitions and examples	61
2.2. Distribution and distribution function of the random variable. Properties of distribution function	62
2.3. Discrete and continuous random variables.	67
Density function of random variable	
2.4. Multidimensional random variables	71
Questions for self-examination	75
Examples and problems	75
Tests by Chapter II	79
Chapter III. SEQUENCE OF INDEPENDENT EXPERIMENTS	86
3.1. The Bernoulli scheme. Binomial distribution	86
3.2. The local and integral Moivre-Laplace theorems	89
3.3. The local limit theorem	94
3.4. The Poisson theorem	98

Questions for self-examination	105
Examples and problems	106
Tests by Chapter III	108
Chapter IV. NUMERICAL CHARACTERISTICS OF RANDOM VARIABLES	114
4.1. The Stieltjes integral	114
4.2. Mathematical expectation, its probabilistic sense and properties	118
4.3. Variance and mean square deviation. Variance properties	124
4.4. Moments of higher orders	128
Questions for self-examination	134
Questions for self-examination	135
Tests by Chapter IV	137
Chapter V. SEQUENCE OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES. LIMIT THEOREMS	141
5.1. The Chebyshev inequality. The law of large numbers in the Chebyshev form	141
5.2. Central Limit Theorem	146
Questions for self-examination	150
Examples and problems	151
Tests by Chapter V	152
Chapter VI. ELEMENTS OF MATHEMATICAL STATISTICS	158
6.1. Basic problems of mathematical statistics	158
6.2. General and sample population	159
6.3. Empirical distribution function. Polygon and histogram	161
6.4. Statistical estimates and their properties. Point estimates	166
6.5. Interval estimation. Confidence intervals	171
6.6. Elements of the theory of statistical hypotheses	173
Questions for self-examination	179
Examples and problems	179
Tests by Chapter VI	182

Sketch by the history of probability theory	187
Application	209
Literature	214
Contents	215