O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUXANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«Amaliy va nazariy mexanika» kafedrasi

«N A Z A R I Y M E X A N I K A» FANIDAN MA‘RUZALAR MATNI TO'PLAMI
(Statika, kinematika)

QARSHI - 2006

Mualliflar: **dots. S.I.Mamatov**
dots. B.Donaev
ass. Sh.O.Xudaynazarov

Taqrizchilar: **QDU «Nazariy va amaliy mexanika» kafedrasi mudiri, dots. Y.Bobojonov**
QMII «Fizika va oliy matematika» kafedrasi dots. T. Aliqulov

Ma‘ruza matni institut Uslubiy Kengashida muhokama qilinib, kupaytirib foydalanishga tavsiya etilgan.

Annotatsiya

Ushbu ma‘ruzalar to’plami 36 soatlik o'quv dasturi asosida yozilgan. Ma‘ruzalar to`plami «Nazariy mexanika» fanining «Statika» va «Kinematika» bo`limlariga taalluqli bo`lib, aloxida mavzular bo`yicha reja, nazariy qism, nazorat savollari ketma – ketligida yoritib berilgan.

SHuniningdek, ma‘ruzalar to`plamida mavzular bo`yicha olingan nazariy bilimlarni misol va masalalar yechishga tadbiq etishga xam katta e‘tibor berilgan. Bunda masalaning qo`yilishi, xisobiy sxemalar, yechilish tartibi sodda va tushunarli tarzda yoritilib, olingan natijalarga izoxlar berilgan. Maxsus ( (yulduzcha) belgisi qo`yilgan mavzular talabaning mustaqil o`zlashtirishi uchun keltirilgan.

Ma‘ruza matni to`plami bakalavriatning «Agroinjeneriya», «Fermer xo`jaliklarini tashkil etish va uning texnik servisi», «Kasb ta‘limi (agroinjeneriya), «Kasb ta‘limi (elektroenergetika)» «Neft va gaz ishi», «Issiqlik energetikasi», «Elektroenergetika» yo`nalishlari talabalari uchun mo`ljallangan.

Аннотация

Данный сборник лекций составлен на основе учебной программы в объёме 36 часов. Сборник лекций относится к разделам «Статика» и «Кинематика» предмета «Теоретической механики» и по каждей теме дана последовательность плана лекций, теоретической части, вопросов самопроверки.

В сборники лекций уделено также большое внимание применению приобретенных по темам теоретических знаний в решении примеров и задач. Доступно и понятно освещены постановка задачи, расчётные схемы, порядок решения, прокомментированы полученные результаты. Темы, предусмотренные для самостоятельного изучения студентами, отмечены специальным знаком * (звёздочка).

Сборник текстов лекций предназначен для студентов бакалавриата по направлениям «Агроинженерия», «Организация и техническое облуживание фермерских хозяйств, «Профессиональное образование (агроинженерия)», «Профессиональное образование (электроэнергетика)», «Нефть и газовое дело», «Теплоэнергетика», «Электроэнергетика».

Annotation

This collection of lectures is compiled on the base of the teachig programme for 36 hours.

Collection of lectures belongs to the parts of the theoritical mechanics «Statics» and «Kinematics», and there are given plan of lektures, theoritical parts and questions for test for all themes.

A great allention to the employment of acquired thritical knowledge forsolving tasks and examples is also given in the collektion of lectures.

Composition ofb tasks, calculation scheme, order of solving is clearly explained and obtained results is commented.

Themes for independent work of students is marted with special marks.

Collection of lectures is intende for the students of Backelor’s in the clirection of “Agroingeneering”, “Organisation and technical service of the Farm” “Professional education (agroingeneering)”, “Professional education (electrical ingeneering)”, “Oil and Gas”, “Heat ingeneering”, “Electrical ingeneering”.

1-MA‘RUZA.
Kirish. Nazariy mexanikaning rivojlanish tarixi. Statikaning asosiy tushuncha va qoidalari. Statika aksiomalari.

REJA:

1. Kirish. Nazariy mexanikaning rivojlanish tarixi.
2. Mexanikaning rivojlanishiga O`zbekiston hududida yashagan ulug` mutafakkirlarning qo`shgan hissalari.
3. Mexanikaning rivojlanishiga o`zbek olimlarining qo`shgan hissalari.
4. Statikaning asosiy tushuncha va qoidalari.
5. Statika aksiomalari.

Adabiyotlar: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

Tayanch iboralar: mexanik harakat, klassik mexanika, moddiy nuqta, (absolyut qattiq jism) statika, kuch, kuchning jismga ta‘sirini xarakterlovchi faktorlar, teng ta‘sir etuvchi kuch, ekvivalent kuch, muvozanatlashgan kuch, statika aksiomalari.

1.1. Kirish. Nazariy mexanikaning rivojlanish tarixi.

Hozirgi zamon texnikasi injenerlar oldiga material jismlarning mexanik harakati va mexanik o`zaro ta‘sirlarini o`rganish bilan bog`liq juda ko`p masalalarni qo`yadi.

Mexanik harakat deb moddiy jismlarning fazoda vaqtga bog`liq ravishda bir-biriga nisbatan vaziyatini o`zgartirishiga aytiladi. Mexanik o`zaro ta‘sir deganda moddiy jismlarning bir-biriga ko`rsatadigan ta‘sirida bu jismlar harakatlarining o`zgarishi yoki bo`lmasa ular shaklllarining o`zgarishi (deformatsiyalanishi) tushuniladi. Bu ta‘sirlarning asosiy miqdoriy o`lchami sifatida kuch deb ataluvchi kattalik qabul qilingan. Tabiatda mexanik harakatlarga misol qilib, osmon jismlarining harakati, Yer qobig`ining tebranishi, havo va dengiz oqimlari, molekulalarning issiqlik harakatlari va boshqalar, texnikada esa, Yer sirti va suvda harakatlanuvchi turli xil transport vositalari va uchuvchi apparatlar, mashina, mexanizm va dvigatellar qismlarining harakatlari, suyuqlik va gazlarning oqimi va boshqa shunga o`xshash harakatlarni ko`rsatish mumkin.

Mexanik o`zaro ta‘sirlarga butun olam tortilish qonuni asosida moddiy jismlarning o`zaro tortishishi, suyuqlik va gaz zarralarining bir-biriga o`zaro ta‘sirlari va boshqalarni misol qilib ko`rsatish mumkin.

Moddiy jismlarning mexanik harakatlari va o`zaro ta'sirlari haqidagi fanga mexanika deyiladi.. Qarab chiqiladigan mexanikaning muammo doirasi juda keng. Bu fannning rivojlanishi natijasida bir qator yangi fanlar paydo bo`ldi. Bularga nazariy mexanika, elastiklik nazariyasi, plastiklik nazariyasi, gidromexanika, aeromexanika, suyuqlik va gazlar mexanikasi shuningdek amaliy mexanika deb ataluvchi fanning bo`limlari – materiallar qarshiligi, mexanizm va mashinalar nazariyasi, mashina detallari shuningdek juda ko`p injenerlik fanlarini ko`rsatish mumkin.

Mexanikaning asosida klassik mexanika qonunlari (yoki Nyuton qonunlari) yotadi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog`liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog`liq bo`lmagan o`zgarmas miqdor deb qaraladi.

Mexanikada abstrakt tushunchalaridan keng foydalaniladi. Masalan, jismning deformatsiyalanishini e`tiborga olinmasa ularni absolyut qattiq jism, shakli va o`lchamlari e'tiborga olinmasa, moddiy nuqta deb qaraladi. Jismning barcha xossalari birdaniga e'tiborga olinsa hech qanday mexanik xodisani nazariy va amaliy jixatdan tekshirib bo`lmaydi, shu bilan birga, yechilishi juda oson bo`lgan har qanday masala haddan tashqari murakkablashtirib yuboriladi.

Nazariy mexanika fanining injenerlik bilimidagi roli va ahamiyati shundan iboratki, u hozirgi zamon texnikasining juda ko`p sohalarining ilmiy ba`zasi bo`lib hisoblanadi. Shu bilan birga tabiat haqidagi, ya'ni tabiiy fan bo`lgan mexanika qonunlari va usullari bizni o`rab olgan olamni bir qator muhim hodisalarini o`rganish va tushuntirishda muhim rol o`ynaydi.

Mexanika masalalarini qarab chiqishda, uni statika, kinematika va dinamika qismlariga bo`lish qabul qilingan.

Mexanika eng qadimgi fanlardan biri. Bizgacha yetib kelgan mexanikaga doir dastlabki qo`lyozma va ilmiy maqolalar qadimgi Misr va Gretsiya olimlariga ta'luqli. Qadimgi saqlanib qolgan kitoblarda turli xil statika masalalariga doir izlanishlar uchraydi.

Birinchi navbatda qadimgi Gretsiyaning buyuk filosofi Aristotel (384-322 yy. e.o.) asarlarini ko`rsatish mumkin. "Mexanika"* so`zini ham dastlab Aristotel fanga kiritgan.

Aristotel o`zining asarlarida richag va boshqa oddiy mashinalar muvozanati va harakatiga oid umumiy fikrlarni yozadi. U o`zining nazariy hulosalarini hech qanday tajriba bilan tekshirib ko`rmagan. U jismga ta'sir

* «Mexanika» so`zi grekchadan tarjima qilinganda «inshat», «mashina» degan ma`nolarni bildiradi.

etuvchi kuchlarni o`zgarmas deb qaragan. Shu bilan birga Aristotel o`z zamonasida aytgan tezliklarini qo`shish haqidagi teorema va havo og`irlikka ega degan fikrlari to`g`ri.

Qadimgi grek olimlaridan yana biri mashhur olim Arximed (287-212 yy. e.o) bo`lib, u birinchi bo`lib mexanika muommolarini o`rganishda matematika usullaridan foydalanadi.

Arximed jismlarning muvozanati va og`irlik markazi, richagning muvozanati haqidagi qonun, qattiq jism statikasining asosiy prinsiplari hamda suyuqliklarning muvozanati haqidagi nazariyaga asos soladi.

1.2. Mexanikaning rivojlanishida O`zbekiston hududida yashagan ulug` mutafakkirlarning ilmiy ishlari ham muhim o`rinni egallaydi. Abu Rayxon Beruniy (973-1018), Abu Ali ibn Sino (980-1037), Ulug`bek Muhammad Tarag`ay (1394-1449) kabi mutafakkirlar ana shular jumlasidandir. Beruniy va ibn Sino asarlarida mexanik harakat hamda planetalarning harakati haqida ajoyib fikrlar bayon qilingan.

Ibn Sino jism holatini o`zgarishi harakatni yuzaga keltiradi deb ko`rsatadi, jismlarning fazodagi harakati (mexanik harakat) esa harakatlarning xususiy holidir.

Ulug`bek planetalar harakatini katta aniqlikda hisoblagan.

Mexanika Uyg`onish davrida – XV asrning birinchi o`n yilligida Italiyada, keyinchalik boshqa davlatlarda tez rivojlandi.

Mashhur italiyalik rassom, matematik, mexanik va injener Leonardo do Vinchi (1452-1519) mexanizmlar nazariyasini, mashinalardagi ishqalanishlarni, quvurlarda suvning harakatini va qiya tekislikda jismlarning harakatini o`rgangan.

Fanda revolyutsion to`ntarish qilgan polyak olimi N. Koopernik (1473-1543) hisoblanadi. U olam tuzilishining geliotsentrik sistemasini beradi. Bu sistemaga ko`ra markazida Quyosh uning atrofida planetalar, shuningdek Yer ham aylanadi.

Dinamikaga fan sifatida italiyalik olim Galileo Galiley (1564-1642) asos solgan. U inersiya qonunini kashf etib jismning qiya tekislikdagi harakatini o`rgangan, jismlarining erkin tushish qonunini kashf qilgan.

Mexanikaning asosiy qonunlarini mashxur ingliz matematigi va mexanigi Isaak Nyuton (1643-1727) kashf qilgan. 1687 yilda bosilib chiqqan «Natural falsafaning matematik printsiplari» degan kitobida I. Nyuton klassik mexanika qonunlarini to`liq sistemasini beradi.

Nyuton mexanikaning ikkita asosiy qonunlarini ta‘sir va aks ta‘sir konuni va butun olam tortishish qonunini kashf etdi.

XVIII asrga kelib, tez sur‘atlar bilan mexanikaning analitik usuli, ya‘ni differensial va integral hisoblash usullari rivojlana boshlaydi.

Nuqta va qattiq jism dinamikasi masalalarini avval differensial tenglamalarini tuzib keyin ularni integrallash yo`li bilan yechish usullarini buyuk matematik va mexanik L. Eyler (1707-1783) tomonidan ishlab chiqildi.

1743 yilda fransuz olimi J. Dalamber (1717-1783) bog`lanishdagi mexanik sistemalarga ta‘luqli masalalarni Dalamber prinsipi deb ataluvchi prinsip asosida yechish usulini berdi.

Fransuz olimi J. L. Lagranj (1736-1813) o`zining “Analitik mexanika” (1788) nomli asarida mexanika masalalarini mumkin bo`lgan ko`chish prinsipini qo`llash yordamida yechish usulini beradi.

XIX asrga kelib, mashinasozlik tez sur‘atlar bilan rivojlana boshlaydi. Natijada kinematika mexanikadan aloxida bo`lim bo’lib ajralib chiqadi. Hozirgi paytda mashina va mexanizmlarning harakatlarini o`rganishda kinematika asosiy o`rinni egallaydi.

Mexanika fanini rivojlanishiga katta hissa qo`shgan rus olimlaridan materiya va harakatning chambarchas bog`liqligini aniqlagan M. V. Lomonosov (1711-1765), analitik mexanika sohasida ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan M. V. Ostrogradskiy (1801-1862), mashina va mexanizmlar nazariyasiga asos solgan P. L. Chebishev (1821-1891), raketa nazariyasi va suyuq yoqilg`i bilan ishlaydigan raketa dvigateli nazariyasiga asos solgan K.E.Tsialkovskiy (1857-1935), o`zgaruvchan massali jismlarning harakatini o`rgangan I. V. Meshcherskiy (1859-1935), Yerning sun‘iy yo`ldoshlarini yaratgan va uchirgan S.P. Korolyov (1906-1966), aerogidrodinamika, tebranishlar nazariyasi va kosmonavtika sohalarida tadqiqotlar qilgan M. V. Keldish (1911-1978) larning ishlari muhim ahamiyatiga ega.

1.3. Mexanika fanining rivojlanishiga o`zbek olimlaridan: iplar mexanikasi va inshootlarning seysmik mustahkamligi nazariyasiga oid qator ilmiy ishlarning muallifi M. T. O`rozboev (1906-1971), inshootlar zaminini hisoblashda va ularni loyihalashda, kema zirhi mustahkamligini aniqlashda qo`llaniladigan “Raxmatulin to`lqinlari” nomini olgan to`lqinlar nazariyasini kashf qilgan X. A. Raxmatulin (1900-1988), tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmlash, avtomatik boshqarish sistemalarini yaratish sohasida ilmiy ishlar qilgan V.K. Qobulov (1921 yilda tug`ilgan) larning ulkan hissalari muhim ahamiyatga ega.

www.qmii.uz/e-lib

I.4. Statikaning asosiy tushuncha va qoidalari.

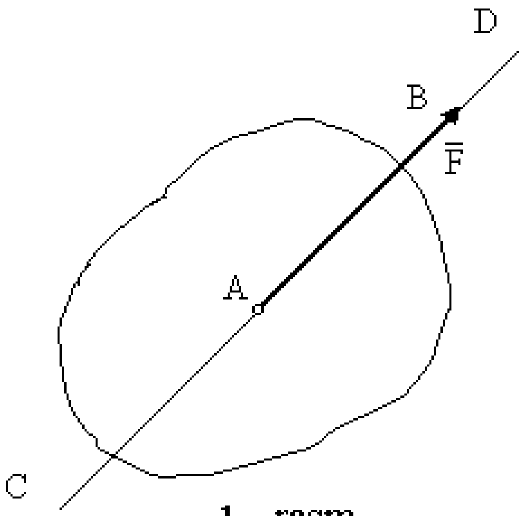
Kuchlar haqida umumiy bilim beruvchi, kuchlar ta'siridagi jismlarning muvozanatini o`rganuvchi mexanikaning bir bo`limiga statika deyiladi.
Jismlarning muvozanati deganda, ularning boshqa jismlarga, masalan Yerga nisbatan tinch holati tushuniladi.
Tabiatda uchraydigan barcha qattiq jismlar, tashqi ta'sir natijasida katta yoki kichik miqdorda o`z formasini o`zgartiradi (deformatsialanadi). Deformatsiya kattaligi jismlarning materiali, ularning geometrik formasi va o`lchamiga hamda ta'sir etuvchi kuchning kattaligiga bog`liq. Turli xil inshoot va konstruksiyalar mustahkamligini ta'minlash uchun ularning materiali va o`lchamlari shunday tanlanadiki, tashqi ta'sirdan hosil bo`ladigan deformatsiya juda ham kichik bo`lsin. Shu sababli qattiq jismlarning muvozanat shartlarini o`rganishda ularning juda kichik deformatsiyalarini e'tiborga olmasa ham bo`ladi, ya'ni ularni absolyut qattiq jism deb qaraladi. Absolyut qattiq jism deb shunday qattiq jismga aytiladiki, uning istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa doimo o`zgarishsiz qoladi. Bundan keyin statika masalalarini yechishda barcha jismlarni absolyut qattiq jism deb qaraladi yoki qisqa qilib qattiq jism deb ataladi.

Mexanikaning asosiy tushunchalaridan yana biri moddiy nuqta tushunchasidir. O`lchamlari e'tiborga olinmaydigan massasi bir nuqtada to`plangan jismga moddiy nuqta deyiladi. Har qanday jismni moddiy nuqtalar to`plamidan tashkil topgan deb qarash mumkin.
Berilgan jismning muvozanat holati yoki harakati uning boshqa jismlar bilan mexanik o`zaro ta'sir harakteriga bog`liq bo`ladi.

Moddiy jismlar o`zaro ta'sirining miqdoriy o`lchoviga kuch deyiladi.
Mexanikada o`rganiladigan kattaliklar ikkiga bo`linadi: skalyar va vektor kattaliklar. Faqat miqdorga ega bo`lgan kattaliklarga skalyar kattaliklar deyiladi. Miqdordan tashqari fazodagi yo`nalishi bilan ham harakterlanadigan kattaliklarga vektor kattaliklar deyiladi.

Skalyar kattaliklarga masofa, massa, vaqtni, vektor kattaliklarga esa tezlik, tezlanish va x.k.z. larni misol qilib ko`rsatish mumkin.
Kuch-vektor kattalik. Kuchning jismga ko`rsatadigan ta'siri:
1) kuch qo`yilgan nuqta, 2) kuchning yo`nalishi, 3) kuchning miqdori (moduli) bilan xarakterlanadi.

Kuchning moduli kuchni tanlangan o`lchov birligi bilan solishtirish orqali topiladi. Kuchning asosiy o`lchov birligi Halqaro o`lchov birliklar sistemasida (SI) 1 Nyuton (1 N) qabul qilingan. U boshqa o`lchov birliklarda ham o`lchanadi. Masalan, 1 kilonyuton (1 kN=1000 N), 1 kilogramm kuch (1 kg). Kuch dinamometr asbobi yordamida o`lchanadi. Kuchlar boshqa vektor kattaliklar kabi ustida chiziqcha chizilgan harf bilan (masalan $\overline{F}$), kuch moduli esa -$|\overline{F}|$ belgi yoki ustida chizig`i bo`lmagan harf F bilan belgilash qabul qilingan. Kuch chizmaga yo`nalishli kesma bilan ifodalanadi (1-rasm). Kesmaning uzunligi belgilangan masshtabda kuchning modulini, kesmaning yo`nalishi kuchning yo`nalishini ifodalaydi. A nuqta kuchning qo`yilish nuqtasi (boshi), *B* nuqta kuchning uchi deyiladi. Kuch yo'nalgan *CD* chiziqqa kuchning ta'sir chizig`i deyiladi.



1- rasm

Agar jismga bir nechta $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bunday kuchlar to`plamiga kuchlar sistemasi deyiladi va $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ deb belgilanadi.

Ta'sir etayotgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasini boshqa biror $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ... \overline{P}_n)$ kuchlar sistemasi bilan almashtirilganda jismning muvozanat holati o`zgarmasa, bunday kuchlar sistemasiga ekvivalent kuchlar sistemasi deyiladi va quyidagicha yoziladi. $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \infty \ (\overline{P}_1, \overline{P}_2, ... \overline{P}_n)$

Agar kuchlar sistemasi bitta kuch bilan almashtirilganda jism holati o`zgarmasa, bu kuch berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi va quyidagicha belgilanadi. $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \infty \ \overline{R}$

Kuchlar sistemasi ta'sirida jism muvozanatda (tinch holatda) bo`lsa, bunday kuchlar sistemasiga muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi deyiladi $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \infty$ O.

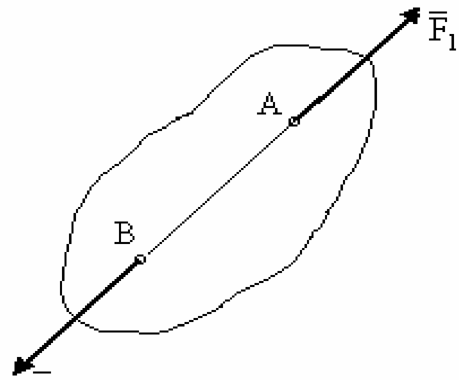
Statika masalalari geometrik shakllar yasash yo`li bilan (geometrik usul) va sonli hisoblash (analitik usul) yordamida yechiladi.

1.5. Statika aksiomalari.

Statika matematik isbotsiz, kundalik tajriba natijasida tasdiqlanadigan bir necha aksiomaga asoslangan.

1-aksioma. Erkin absolyut qattiq jismga qo`yilgan ikkita kuch muvozanatda bo`lishi uchun faqat va faqat, bu kuchlar miqdor jihatidan teng, yo`nalish jihatdan kuchlar qo`yilgan nuqtalardan o`tuvchi to`gri chiziq bo`ylab qarama–qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi lozim.

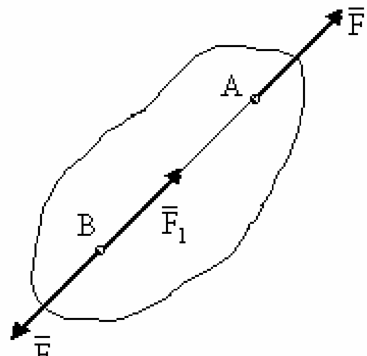
Bunday kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'ladi. Bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan sistema yoki nolli sistema deyiladi: $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2\right)\infty O$ (2-rasm)



2- rasm

2-aksioma. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga muvozanatlashgan sistema qo'shilsa yoki undan ayrilsa, sistemaning jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.

Natija. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab, jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilganda, kuchning qattiq jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.



3-rasm

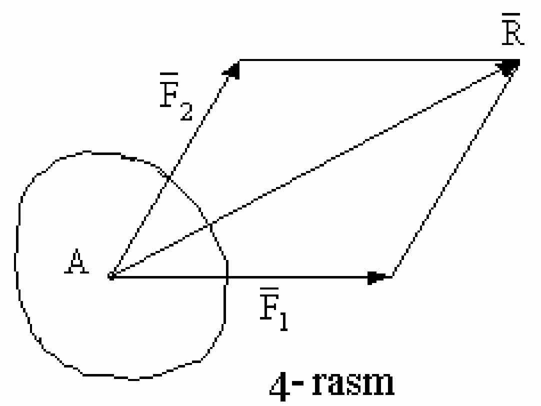
Isboti. Qattiq jismning biror *A* nuqtasiga $\overline{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin (3-rasm). Bu kuch ta'sir chizig'idan ixtiyoriy *B* nuqta olamiz. Bu nuqtaga muvozanatlashgan $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2\right)$ sistemani keltirib qo'yamiz. Bunda $\overline{F}_1=\overline{F}$ va $\overline{F}_2=-\overline{F}$ shart bajarilsin.

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi ta'sirida jismning holati o'zgarmaydi.

Chunki $\left(\overline{F}\,,\overline{F}_2\right)$ sistema muvozanatlashgan sistemani tashkil etadi. Muvozanatlashgan sistemani tashlab yuboramiz. Natijada jism *B* nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}_1$kuch ta'sirida qoladi. Shartga ko'ra esa $\overline{F}_1=\overline{F}$ demak, jismning holati o'zgarmaydi. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuch sirpanuvchi vektorni ifodalaydi.

3-aksioma (parallelogramm aksiomasi). Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi, shu kuchlarga qurilgan parallelogrammning kuchlar qo'yilgan nuqtasidan o'tuvchi dioganaliga teng.

$\overline{F}_1, \overline{F}_2$ vektorlar asosida qurilgan parallelogrammning dioganaliga teng $\overline{R}$ vektor $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ vektorlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi (4-rasm)

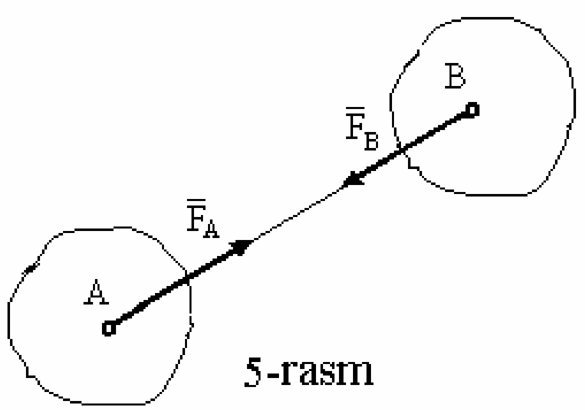


4-rasm

Kuchlarning teng ta'sir etuvchisi bilan kuchlarning geometrik yig'indisi alohida–alohida tushunchalar bo'lib hisoblanadi. Ularni bir-biri bilan almashtirib yubormaslik kerak. Kuchlar teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmasligi mumkin, lekin geometrik yig'indiga ega bo'ladi.

4-aksioma (Nyutonnitng uchinchi qonuni). Har qanday muvozanatdagi ikkita jism bir – biri bilan miqdor jihatidan teng bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir etadi.

Bu qonun mexanikaning asosiy qonunlaridan biri bo'lib hisoblanadi. *A* jism *B* jismga qandaydir $\overline{F}_A$ kuch bilan ta'sir etsa, B jism ham A jismga shu kuchga miqdor jihatdan teng, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama – qarshi yo'nalgan $\overline{F}_A = -\overline{F}_B$ kuch bilan ta'sir etadi (5-rasm). Shuni e'tirof etish kerakki, $\overline{F}_A, \overline{F}_B$ kuchlar turli jismlarga qo'yilgan bo'lganligi uchun ular muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etmaydi.



5-rasm

5-aksioma. Kuchlar sistemasi ta'siridagi deformatsiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.

Bu qonun jismlarning qotish prinsipi deyiladi. Zanjirning zvenolari bir-biriga payvandlanganda, uning muvozanati buzilmaydi. Chunki muvozanatda bo'lgan jism qotishdan oldin va qotgandan keyin ham bir xil kuchlar sistemasi ta'sirida bo'ladi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Nazariy mexanika fani nimani o'rgatadi?
2. Mexanik harakat deb nimaga aytiladi?
3. «Mexanika» so'zi kim tomonidan fanga kiritilgan?
4. «Mexanika» so'zi qanday ma'noni bildiradi?
5. Nazariy mexanika faninin rivojlanishiga ulkan hissa qo'shgan qanday olimlarni bilasiz?
6. Mexanikaning rivojlanishiga hissa qo'shgan O'zbekiston hududida yashagan sharq olimlaridan kimlarni bilasiz?
7. Mexanikaning rivojlanishiga hissa qo'shgan qaysi o'zbek olimlarini bilasiz?
8. Nazariy mexanika necha qismga bo'lib o'rganiladi?
9. Moddiy nuqta deb nimaga aytiladi?
10. Absolyut qattiq jism deb nimaga aytiladi?
11. Kuch deb nimaga aytiladi?
12. Statika deb nimaga aytiladi?
13. Kuchning jismga ta'siri qanday faktorlar bilan aniqlanadi?

2-MA'RUZA
BOG'LANISHLAR VA BOG'LANISH REAKSIYALARI. KESISHUVCHI KUCHLARNI GEOMETRIK USULDA QO'SHISH. KUCHNING O'QDAGI VA TEKISLIKDAGI PROEKSIYASI. KUCHNING ANALITIK USULDA BERILISHI. KUCHLARNI ANALITIK USULDA QO'SHISH.

REJA:
1. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari.
2. Kesishuvchi kuchlarni geometrik usulda qo'shish.
3. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proeksiyasi.
4. Kuchni analitik usulda berilishi.
5. Kuchlarni analitik usulda qo'shish.

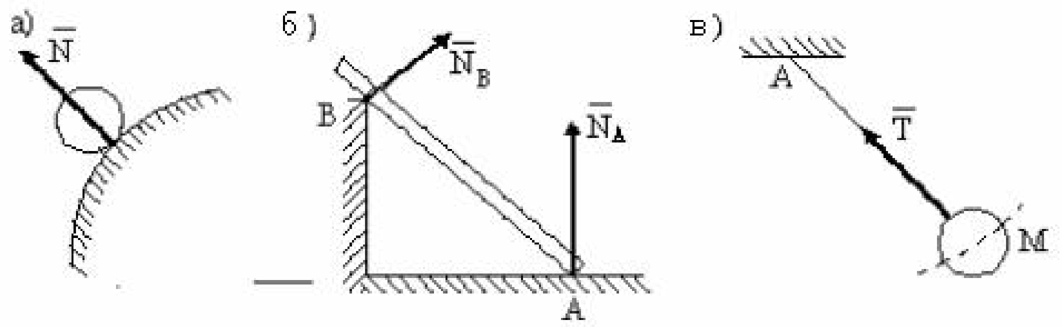
Adabiyotlar: 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10.

Tayanch iboralar: erkin jism, bog'langan jism, bog'lanish reaksiya kuchi, silliq sirt, silindrik sharnirli bog'lanish, sferik sharnirli bog'lanish, ip, sterjen, kesishuvchi kuchlar sistemasi, kuchlar uchburchagi, kuchlar parallelogrammi, kuchning o'qdagi proeksiyasi, kuchning tekislikdagi proeksiyasi, kuchning analitik usulda berish, kuchni analitik usulda qo'shish.

2.1. BOG'LANISH VA BOG'LANISH REAKSIYALARI.

Tabiatdagi barcha jismlarni, ikkiga ajratish mumkin: 1) erkin, 2) bog'langan jismlar. Jism fazoda istalgan tomonga harakatlana olsa, bunday jism erkin jism deyiladi. Masalan, fazodagi havo shari. Jismning harakati biror sabab bilan cheklangan bo'lsa, bu jism bog'langan jism deyiladi. Jismning harakat yo'nalishiga qo'yilgan barcha jismlar (to'siqlar) bog'lanishlar deyiladi.

Bog'langan jismlarga misol qilib, stol ustiga qo'yilgan yuk, shipga osilgan qandil va boshqalarni keltirishimiz mumkin. Yuk uchun bog'lanish



6-rasm

stol, qandil uchun bog'lanish zanjir hisoblanadi.

Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'siriga bog'lanish reaksiya kuchi yoki qisqacha bog'lanish reaksiyasi deyiladi. Bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi yo'nalishda cheklangan bo'lsa, bog'lanish reaksiya kuchi shu yo'nalishga teskari yo'nalgan bo'ladi.

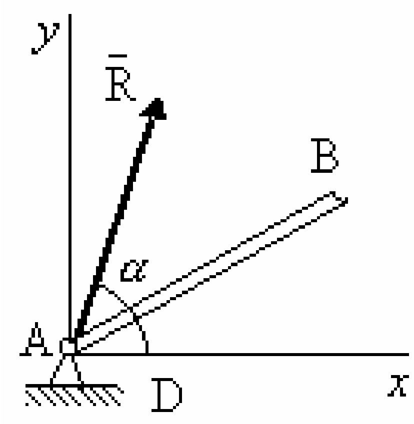
Mexanika masalalarini yechishda, bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishlarini to'g'ri aniqlash juda muhim rol o'ynaydi. Bog'lanishlarning asosiy turlari bilan tanishamiz.

1. Silliq sirt yoki tayanch. Ishqalanish e'tiborga olinmaydigan sirtga silliq sirt deyiladi.

Sirt bilan jism orasida ishqalanish bo'lmaganda jism sirt bilan biror nuqtada tayanib turgan bo'lsa, silliq sirt jismni sirtni shu nuqtasiga o'tkazilgan normal bo'yicha harakatini cheklaydi. Shu sababli silliq sirtning reaksiya kuchi $\overline{N}$ sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi (6-rasm, a). To'sin A nuqtada polga, B nuqtada vertikal devorga tayangan bo'lsa (6-rasm,б), polning $\overline{N}_A$ va vertikal devorning $\overline{N}_B$ reaksiya kuchlari A va B nuqtalarga o'tkazilgan perpendikulyar bo'yicha yo'naladi.

2. Arqon, ip. M shar egiluvchan, cho'zilmaydigan ip yordamida biror A nutqaga osib qo'yilgan bo'lsa, u holda ipning bog'lanish reaksiya kuchi $\overline{R}$ ip bo'ylab osilish nuqtasi tomonga yo'nalgan bo'ladi (6-rasm, в).

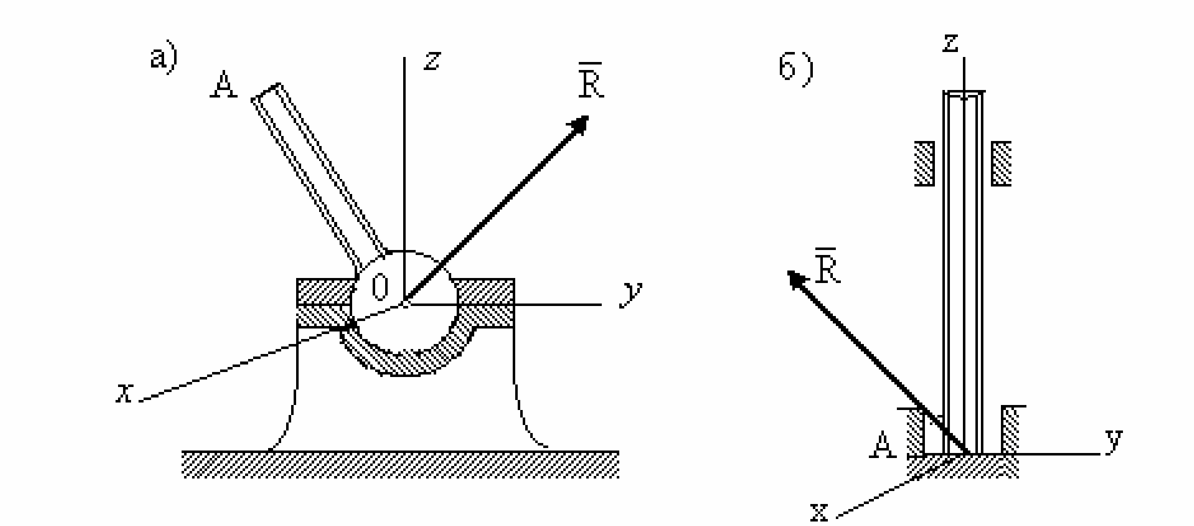
3. Silindrik sharnirli bog'lanishlar. Umumiy o'q yoki nuqta atrofida aylana oladigan ikkita jism orasidagi bog'lanishga sharnir deyiladi. AB jism shunday sharnir yordamida qo'zg'almas D tayanchga mahkamlangan bo'lsin (7-rasm). U holda jismning A uchi sharnir o'qiga perpendikulyar biron – bir yo'nalishda siljiy olmaydi. Demak, silindrik sharnirning $\overline{R}$ reaksiya kuchi sharnir o'qiga perpendikulyar tekislikda istalgan yo'nalishga ega bo'lishi mumkin.



7-rasm

Masala yechishda $\overline{R}$ reaksiya kuchini aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikda yotuvchi x va y o'qlarga parallel yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratib, jismning muvozanat shartidan topiladi.

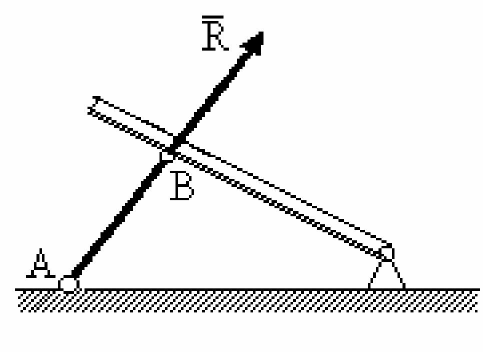
4. Sferik sharnir va to'g'on tegi (podpyatnik). AO sterjen O nuqtada sferik sharnir vositasida berkitilgan bo'lsa, bu sterjen O nuqtadan o'tuvchi har qanday o'q atrofida faqat aylana oladi (8-rasm, a).



8-rasm

Sferik sharnirning $\overline{R}$ reaksiya kuchi O nuqtadan o'tadi, lekin qaysi tomonga yo'nalishini oldindan aytib bo'lmaydi. Sferik sharnirning reaksiya kuchini tanlab olingan koordinata o'qlariga parallel yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratib, ularni jismning muvozanat shartlaridan aniqlanadi. To’g`on tegining $\overline{R}$ bog’lanish reaksiya kuchi ham fazoda istalgan tomonga yo’nalgan bo’lishi mumkin (8-rasm, б).

5. Vaznsiz sterjen vositasidagi sharnirli bog’lanish. O’z og’irligi hisobga olinmaydigan, uchlaridan boshqa nuqtalariga hech qanday kuch qo’yilmagan sterjenlarga vaznsiz sterjenlar deyiladi. Jism uchlari sharnirli biriktirilgan ingichka sterjenlar vositasida mahkamlangan bo’lsin (9-rasm).

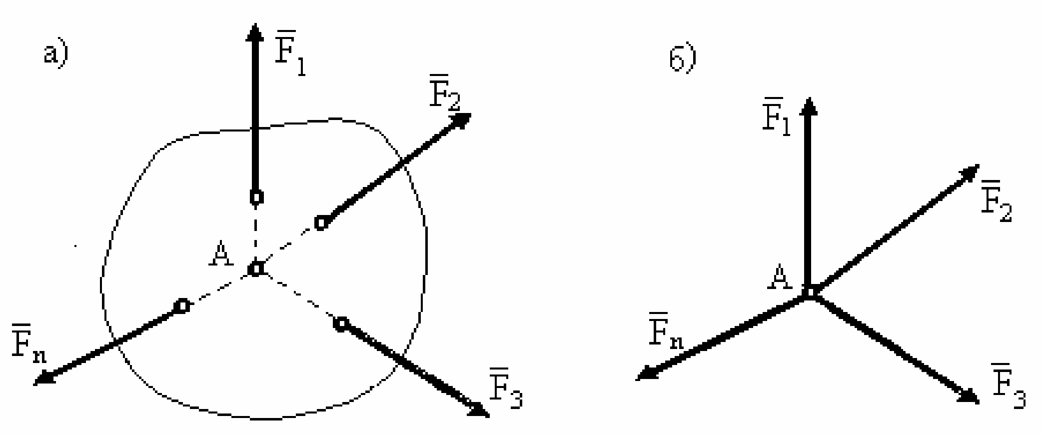


9- rasm

U holda sterjenning A va B nuqtalariga qo’yilgan ikkita kuch ta‘sir qiladi; muvozanatda bo’lganda bu kuchlar bir to’g’ri chiziq bo’ylab, ya‘ni AB bo’ylab yo’naladi. Ta‘sir va aks ta‘sir qonuniga ko’ra sterjen ham jismga AB bo’ylab yo’nalgan kuch bilan ta‘sir qiladi. Demak, reaksiya kuchi sterjen o’qi bo’ylab yo’nalgan bo’ladi.

2.2. Kesishuvchi kuchlarni geometrik usulda qo’shish.

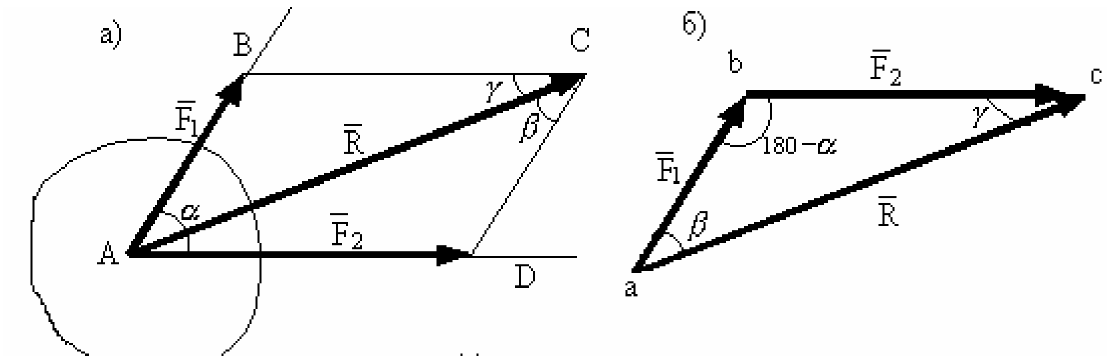
Ta‘sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasiga kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi.



10- rasm

Kuchlarni ularning ta‘sir chiziqlari bo’ylab ko’chirish mumkin bo’lganligi tufayli, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kesishuvchi kuchlar sistemasi (10-rasm,a) kuchlarning ta‘sir chiziqlari kesishgan A nuqtaga qo’yilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo’ladi. (10-rasm, б)

Mexanikaning juda ko'p masalalarini yechish vektorlarni qo'shish, xususan kuchlarni qo'shish usullariga bog'liq. Kuchlar sistemasining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan kattalikni, bundan keyin berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataymiz.



11- rasm

Ikkita kuchni qo'shish. Ikkita kuchlarning geometrik yig'indisi $\bar{R}$, paralellogram qoidasi (11-rasm, a) yoki kuchlar uchburchagini qurish usuli bilan topiladi (11-rasm, б).

Kuchlar uchburchagini qurish uchun ixtiyoriy a nuqtaga kuchlardan birini ifodalovchi vektorni qo'yish lozim. Bu vektorning uchiga ikkinchi kuchni ifodalovchi vektor keltirib qo'yiladi. Birinchi vektorning boshi bilan ikkinchi vektorning uchini tutashtirib, $\bar{R}$ ni ifodalovchi vektorni hosil qilamiz. Agar kuchlar orasidagi burchak α bo'lsa, $\bar{R}$ kuchning moduli kosinuslar teoremasidan topiladi: $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 cos\alpha}$ (1)

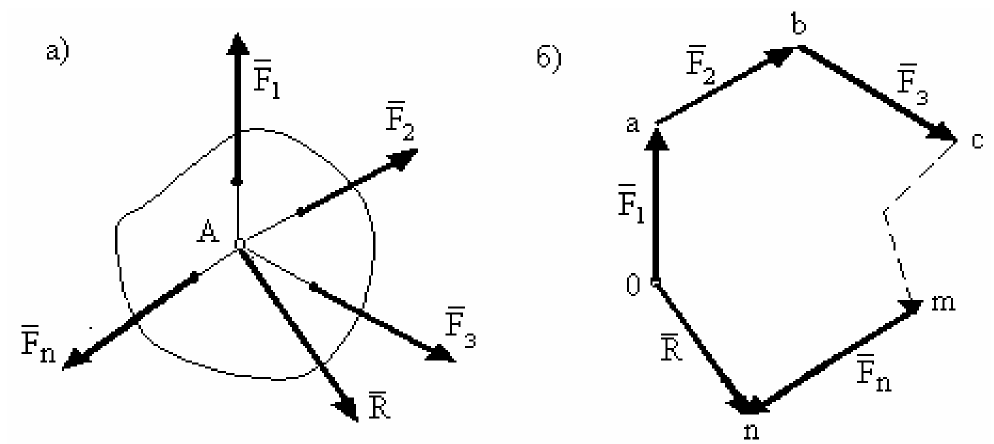
bu yerda $cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

Qo'shiluvchi vektorlar bilan $\bar{R}$ orasidagi $\alpha, \beta\ va\,\varphi$ burchaklar sinuslar teoremasidan topiladi:

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

Bu yerda $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$

Kuchlar sistemasini qo'shish. Istalgan kuchlar sistemasining

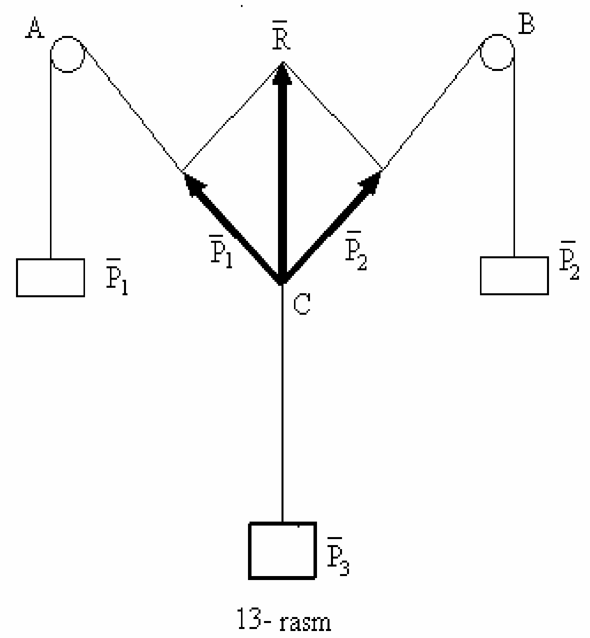


12- rasm

geometrik yig'indisi (bosh vektori) parallelogram qoidasi asosida kuchlarni ketma–ket qo'shib, yoki bo'lmasa kuchlar ko'pburchagi qurib topiladi. Kuchlar ko'pburchagini qurish usuli bir muncha oson va qo'lay hisoblanadi. Bu usul bilan $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasining (12-rasm, a) bosh vektorini topish uchun ixtiyoriy O nuqta tanlab, bu nuqtaga $\overline{F}_1$ kuchni yo'nalishi bo'yicha keltirib qo'yamiz. $\overline{F}_1$ kuchining uchiga, $\overline{F}_2$ kuchni , $\overline{F}_2$ kuchni uchiga $\overline{F}_3$ kuchni keltirib qo'yamiz va hokazo. $\overline{F}_1$ kuchning boshi bilan $\overline{F}_n$ kuchning uchini tutashtirib, kuchlar sistemasining geometrik yig'indisi $\overline{R}$ vektorni hosil qilamiz (12-rasm, б)

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n, \text{ yoki } \overline{R} = \sum \overline{F}_К \qquad (3)$$

Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng va shu kuchlar ta'sir chiziqlarning kesishgan nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi.



13- rasm

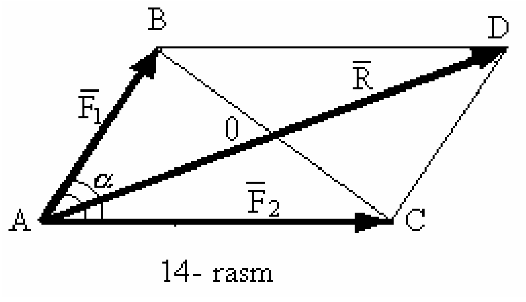
1-masala. Uchta ip S tugunda bog'langan (13-rasm). Ulardan ikkitasi A va B bloklar orqali o'tkazilib uchlariga P_1=3H va P_2=5H yuklar osilgan. Uchinchi ipning uchiga esa og'irligi P_3 bo'lgan yuk osilgan, bunda $\angle ACB = 60^0$ Agar sistema muvozanatda bo'lsa P_3 yukning og'irligi topilsin.

Yechish. S tugunda uchta kuch ta'sir qiladi: CA yo'nalish bo'yicha $\overline{P}_1$kuch, CB yo'nalish bo'yicha $\overline{P}_2$, kuch va vertikal pastga yo`nalgan $\overline{P}_3$ kuch. $\overline{P}_1$ va $\overline{P}_2$ kuchlarni qo'shib ularning teng ta'sir etuvchisi R kuch $\overline{R}$ (1) formula bo'yicha aniqlanadi.

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 cos60^0} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{9 + 25 + 15} = \sqrt{49} = 7\text{H}$$

$\overline{R}$ kuch $\overline{P}_3$ kuch bilan muvozanatlashgani uchun

$$P_3 = R = 7H$$



14- rasm

2-masala. Kattaligi o'zaro teng va α burchak hosil qilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra kattaligi

(moduli) teng bo'lgani uchun ($F_1=F_2=F$) bu kuchlar asosida qurilgan parallelogram ABDC rombdan iborat. Rombning diagonali burchakni teng ikkiga bo'ladi. Rombning ikkinchi diagonali BC ni o'tkazamiz.

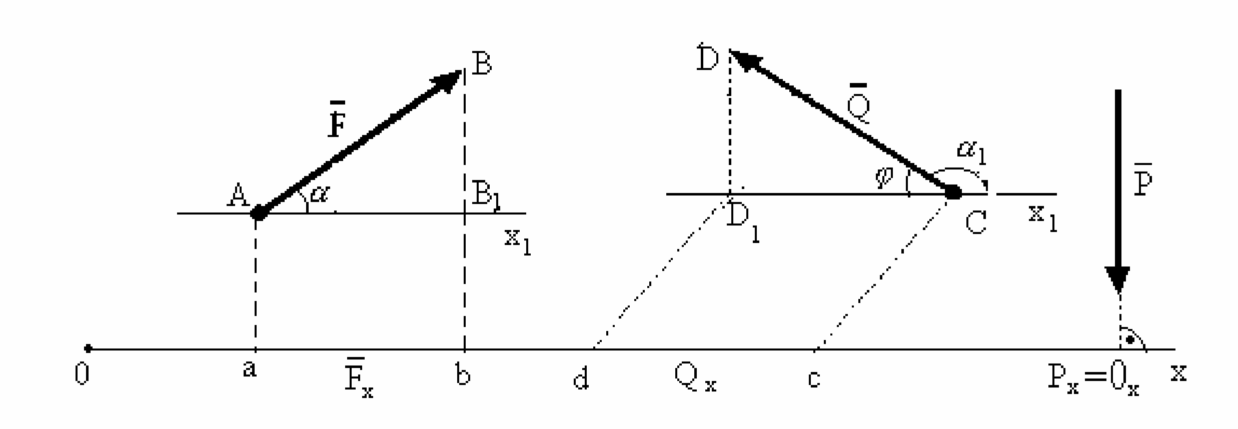
Hosil bo'lgan to'g'ri burchakli AOC uchburchakdan $OA = AC\cos\frac{\alpha}{2}$ ekanligini aniqlaymiz:

bu yerda $OA = \frac{1}{2}AD = \frac{R}{2}$ va $AC = F$

demak, $\frac{R}{2} = F\cos\frac{\alpha}{2}$, bunda $R = 2F\cos\frac{\alpha}{2}$

2.3. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proeksiyasi.

Statika masalalarini yechishni analitik (hisoblash) usuliga o'tamiz. Bu usul kuchning o'qdagi proeksiyasi tushunchasiga asoslanadi. Kuchning o'qdagi preksiyasi deb, kuch modulini kuch bilan o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmaga teng algebraik kattalikka aytiladi.



15 -rasm

Agar kuch bilan o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak o'tkir bo'lsa, proeksiya musbat, agar o'tmas burchak bo'lsa, proeksiya manfiy ishorada bo'ladi. Kuch o'qqa perpendikulyar bo'lsa, kuchning o'qdagi proeksiyasi nolga teng.

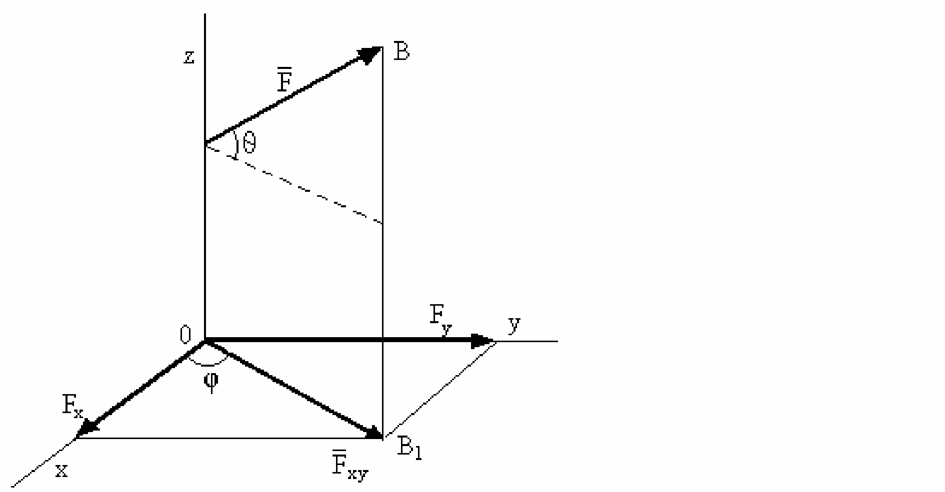
F kuchning o'qdagi proeksiyasini F_x bilan belgilaymiz. U holda 15-rasmga ko'ra quyidagini yozamiz.

$F_X = AB_1 = ав$, $Q_x = - CD_1 = - cd$

15-rasmdan ko'rinadiki $F_x = F\ cos\alpha$,

$$Q_x = -Q\cos\varphi = Q\cos\alpha_1, \quad P_x = O \qquad (4)$$

$\overline{F}$ kuchning Oxy tekislikdagi proeksiyasi deb, $\overline{F}$ kuchning boshi va uchining shu tekislikdagi proeksiyalarini tutashtiruvchi yo'nalishli $\overline{F}_{xy} = \overline{O}\overline{B}_1$, kesmaga aytiladi



16- rasm

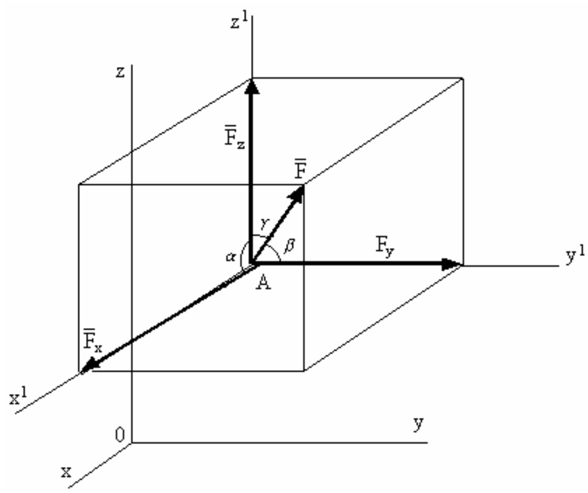
(16-rasm). $\overline{F}$kuchning tekislikdagi proeksiyasi o'qdagi proeksiyasidan farq qiladi. Kuchning tekislikdagi proeksiyasi vektor kattalik bo'lib, u miqdorga ega bo'lishdan tashqari yo'nalishga ham ega. $\overline{F}$ kuchning tekislikdagi proeksiyasining moduli. $F_{xy} = F\cos\theta$ bu yerda θ - $\overline{F}$ kuch bilan o'qning tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchak. Ko'pgina hollarda kuchning o'qdagi proeksiyasini topish uchun avval uning tekislikdagi proeksiyasini aniqlab, keyin kuchning tekislikdagi proeksiyasini shu tekislikda yotgan o'qlarga proeksiyalash kerak. 16-rasmga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$F_x = F_{xy} \cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi, \quad F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi \quad (5)$$

2.4. Kuchni analitik usulda aniqlash.

Kuchni analitik usulda aniqlash uchun, avvalo kuchning fazodagi yo'nalishini aniqlash maqsadida Oxyz koordinatalar sistemasini tanlash lozim.

Agar F kuchning moduli va koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α, β va γ burchaklar ma'lum bo'lsa, $\overline{F}$ kuchni ifodalovchi vektorni yasash mumkin (17-rasm). Mexanika masalalarini yechishda, kuchni uning koordinata o'qlaridagi F_x, F_y, F_z,



17-rasm

proeksiyalari orqali aniqlash qulayroqdir. Kuchning o'qdagi proeksiyalari berilgan bo'lsa, kuchning moduli va kuchni o'qlar bilan tashkil qilgan burchaklari quyidagi formulalar orqali aniqlanadi.

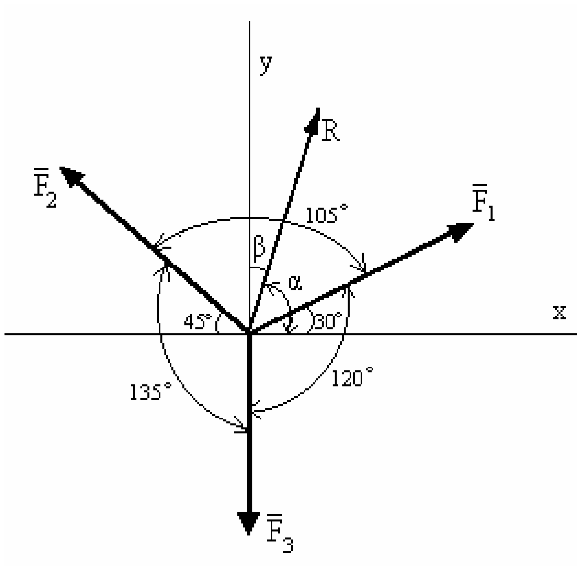
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (6)$$

$$\sin\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \sin\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \sin\beta = \frac{F_2}{F}$$

2.5. Kuchlarni analitik usulda qo'shish.

Kuchlarni analitik usulda qo'shish uchun quyidagi teoremani ko'rib chiqamiz.

Teorema: Teng ta'sir etuvchining biror o'qdagi proeksiyasi, qo'shiluvchi kuchlarning shu o'qdagi proeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng.



18- rasm

Bu teoremaga ko'ra $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, kuchlarning geometrik yig'indisi $\overline{R}$ bo'lsa, y holda $\overline{R} = \Sigma \overline{F}_K$ yoki

$$R_X = \Sigma F_{KX}, R_Y = \Sigma F_{KY}, R_Z = \Sigma F_{KZ} \qquad (7)$$

R_X, R_Y, R_Z, larni bilgan holda (7) formulagi ko'ra

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_X}{R}, \ \cos\beta = \frac{R_Y}{R}, \ \cos\gamma = \frac{R_Z}{R} \qquad (8)$$

(7) va (8) formulalar yordamida kuchlar analitik usulda qo'shiladi.

3- masala. Jismning A nuqtasiga bir tekislikda yotuvchi va bir– biri bilan 105^0, 135^0 va 120^0 burchak ostida uchta kuch qo'yilgan bo'lib, ularning modullari F_1=18H, F_2=24H, F_3=30H ga teng. Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisining kattaligi va yo'nalishini aniqlang (18-rasm).

Yechish. Berilgan kuchlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini aniqlaymiz.

$$F_{1X} = F_1 \cos 30^0 = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$F_{2X} = -F_2 \cos 45^0 = -24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -12\sqrt{2}$$

$$F_{3X} = 0$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 30^0 = 18 \cdot 0{,}5 = 9$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45^0 = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$F_{3y} = -F_3 = -30$$

(8) formulaga ko'ra

$$R_X = F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} = 9\sqrt{3} - 12\sqrt{2} = 15{,}588 - 16{,}968 = -1{,}380$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 9 + 12\sqrt{2} - 30 \quad = 9 + 16{,}968 - 30 = -4{,}032$$

(9) formulaga ko'ra

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} = \sqrt{(-1{,}38)^2 + (-4{,}032)^2} = 4{,}262H$$

$$\cos\alpha = \frac{R_X}{R} = \frac{-1{,}38}{4{,}262} = -0{,}323, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{-4{,}032}{4{,}262} = -0{,}946$$

Aniqlangan α va β burchaklarga ko'ra rasmda teng ta'sir etuvchini ko'rsatamiz;

$$\arccos(-0{,}323) = \alpha, \quad \alpha = 71^0$$

$$\arccos(-0{,}946) = \beta\ , \quad \beta = 19^0$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Erkin jism deb qanday jismga aytiladi?
2. Bog'langan jism deb qanday jismga aytiladi?
3. Bog'lanish deb nimaga aytiladi?
4. Bog'lanishlarning qanday turlarini bilasiz?
5. Bog'lanish reaksiyasi deb nimaga aytiladi?
6. Kesishuvchi kuchlar deb qanday kuchlarga aytiladi?
7. Kuchning o'qdagi proeksiyasi deb nimaga aytiladi?
8. Kuchning tekislikdagi proeksiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Kuch moduli analitik usulda qanday topiladi?
10. Kuchlar analitik usulda qanday qo'shiladi?
11. Kuchning o'qdagi proeksiyasi qachon nolga teng bo'ladi?

3-MA'RUZA.
UCH KUCH MUVOZANATI HAQIDA TEOREMA. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI. KUCHNING MARKAZ (NUQTA) GA NISBATAN MOMENTI

REJA:

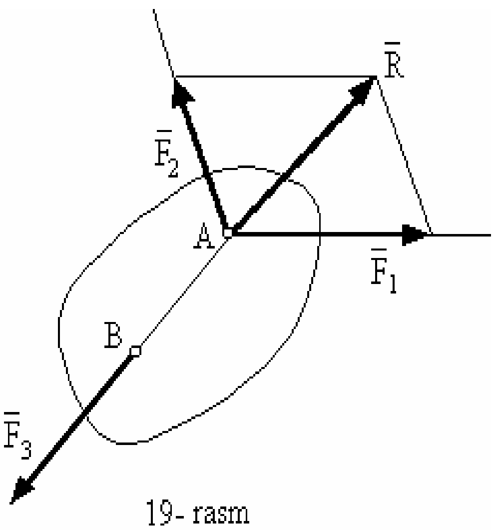
3.1 Uch kuch muvozanati haqida teorema.
3.2 Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.
3.3 Kuchning markaz (nuqta) ga nisbatan momenti.
3.4 Kesishuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi.

Adabiyotlar: 1, 2, 4, 8, 9, 11, 12, 13

Tayanch iboralar: uch kuch, kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanating geometrik sharti, kesishuvchi kuchlar sistemasi, muvozanatining analitik sharti, kuch momenti, kuch yelkasi, kuch momentining mexanik ma'nosi, teng ta'sir etuvchining momenti.

3.1. Uch kuchning muvozanati haqida teorema.

Statika masalalarini yechishda quyidagi teoremadan foydalanish qulaydir. Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch ta'sirida jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.



19- rasm

Isboti. Teoremani isbotlash uchun qattiq jismga ta'sir etuvchi $\bar{F}_1$ $\bar{F}_2$ *va* $\bar{F}_3$ kuchlarni ko'rib chiqamiz. Shartga ko'ra bu kuchlar bir tekislikda yotadi va o'zaro parallel emas. Ularning ta'sir chiziqlari A nuqtada kesishadi.
$\bar{F}_1$ va $\bar{F}_2$ kuchlarni o'zlarining ta'sir chiziqlari bo'ylab A nuqtaga ko'chiramiz va ularni teng ta'sir etuvchisi $\bar{R}$ bilan almashtiramiz natijada parallelogram aksiomasiga ko'ra jism ikkita: A nuqtaga qo'yilgan $\bar{R}$ va *B* nuqtada qo'yilgan $\bar{F}_3$ kuch ta'sirida qoladi. 1-aksiomaga ko'ra $\bar{R}$ va $\bar{F}_3$ kuchlarning miqdorlari teng, yo'nalishi esa bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama – qarshi tomonga yo'nalgandagina ular muvozanatlashadi. Demak,

$\overline{F}_3$ kuchning ta'sir chizig'i ham A nuqtadan o'tadi (19-rasm). Biz shuni isbotlashimiz kerak edi.

3.2. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati.

1. Qattiq jismga qo'yilgan kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi, demak bosh vektori nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Kuchlar sistemasining muvozanati geometrik va analitik ko'rinishda bo'ladi.

Muvozanatning geometrik sharti. Bizga ma'lumki kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}$, shu kuchlar sistemasi asosida qurilgan kuchlar ko'pburchagining yopuvchi tomoni (12–rasm, b ga qarang) demak, $\overline{R}$ nolga teng bo'lishi uchun kuchlar ko'pburchagida oxirgi kuchning uchi, birinchi kuchning boshi bilan ustma-ust tushishi kerak.

Demak, kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun shu kuchlar asosida qurilgan ko'pburchak yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Muvozanatning analitik sharti. Kesishuvchi kuchlar sistemasining bosh vektori quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_y^2 + R_Z^2}$$

R=0 bo'lishi uchun $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$ bo'lishi lozim.

yoki

$$\sum F_{KX} = 0, \ \sum F_{Ky} = 0, \ \sum F_{KZ} = 0 \qquad (9)$$

Bu kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir.

Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar jismga ta'sir etuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasi bir tekislikda yotsa (9) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

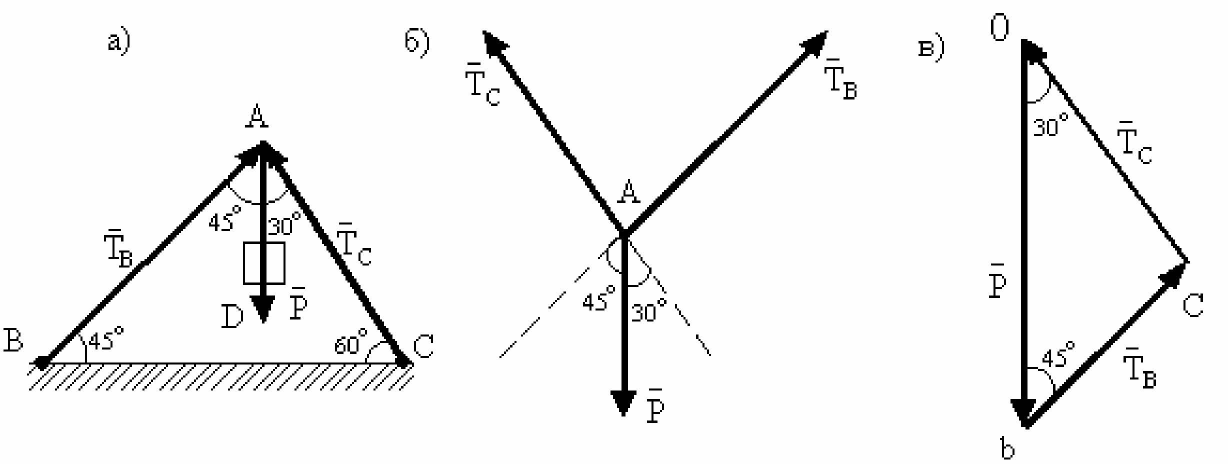
$$\sum F_{KX} = 0, \ \sum F_{Ky} = 0, \qquad (10)$$

Statika masalalarini yechish.

Istalgan masalani yechish uchun, qanday jism (yoki qaysi jismlarning) muvozanati va topiladigan kattaliklar aniqlanadi. Masalani yechish jarayoni quyidagi tartibda olib boriladi:

1. Muvozanati ko'rib chiqiladigan jism (yoki jismlar) tanlanadi.

2. Muvozanati qarab chiqiladigan jism (yoki jismlar) orqali koordinata o'qlari o'tkaziladi.



20- rasm

3. Muvozanati ko'rib chiqiladigan jism tanlangandan keyin jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar va bog'lanish reaksiyalari chizmada ko'rsatiladi.

4. Jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga mos muvozanat tenglamalari tuziladi.

5. Masalani yechish jarayonida masalaga tegishli rasm juda aniq chizilishi lozim. Tenglamalarni yechib, noma'lum kuchlar aniqlanadi. Masalani to'g'ri yoki noto'g'ri yechilgani tekshirib ko'riladi.

4 – masala. Ikkita absolyut qattiq AV va AS sterjenlar uchlari A nuqtada bir–biriga sharnir vositasida mahkamlangan. Sterjenlarining ikkinchi uchlari polning B va C nuqtalariga sharnir yordamida biriktirilgan. Bunda sterjenlar pol bilan tegishlicha 45^0 va 60^0 burchak hosil qiladi.(20-rasm, a). A sharnirga og'irligi P=100H bo'lgan D yuk cho'zilmaydigan ip yordamida osib qo'yilgan. AC va BC sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. Sterjenlarning og'irligi e'tiborga olinmasin.

Yechish. D yukning og'irlik kuchi $\overline{P}$ ni vertikal pastga qaratib yo'naltiramiz. Yukning $\overline{P}$ og'irlik kuchi ta'sirida AB va AC sterjenlarda hosil bo'lgan zo'riqishlarni tegishlicha $\overline{T}_B$ va $\overline{T}_C$ deb belgilaymiz. Natijada A sharnirga sterjenlarda hosil bo'ladigan $\overline{T}_B, \overline{T}_C$ zo'riqishlar va D yukning $\overline{P}$ og'irlik kuchi qo'yilgan. Bu kuchlarni rasmda ko'rsatamiz (20-rasm, б). Noma'lum bo'lgan zo'riqishlarni topish uchun geometrik va analitik usullardan foydalanamiz:

1). Geometrik usul. A sharnir muvozanatda bo'lishi uchun sharnirga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo`lishi lozim. Demak, A sharnirga $\overline{P}, \overline{T}_B$ va $\overline{T}_C$ kuchlar qo'yilgan.

Kuchlar uchburchagini (20-rasm, в) yasash uchun ixtiyoriy O nuqta tanlaymiz. O nuqtaga D yukning $\overline{P}$ og'irlik kuchini o'z-o'ziga parallel ko'chiramiz. P kuchning uchiga AB sterjenning zo'riqishi $\overline{T}_B$, uning uchiga esa AC sterjenning zo'riqishi $\overline{T}_C$ ni o'ziga parallel qilib ko'chiramiz. Natijada *Oab* kuchlar uchburchagi hosil bo'ladi. Bu uchburchakda

$\angle CAD = \angle cOb = 30^0$ va $\angle Obc = \angle BAD = 45^0$

bunda $\angle bcO = 105^0$

Sinuslar teoremasiga ko'ra quyidagini yozamiz:

$$\frac{T_B}{\sin 30^0} = \frac{T_C}{\sin 45^0} = \frac{P}{\sin 105^0}$$

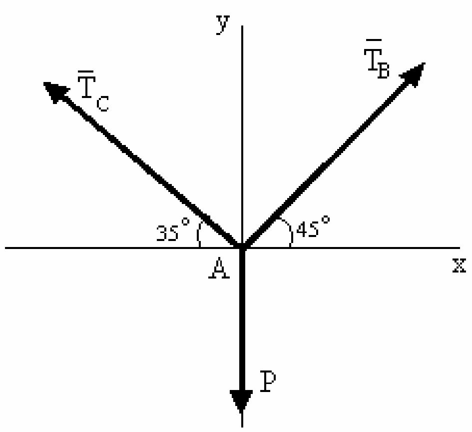
bu yerda, $\sin 105 = \sin\left(90^0 + 15\right) = \cos 15^0$

$$T_B = P\frac{\sin 30^0}{\cos 15^0} = 100\frac{0{,}5}{0{,}9659} = 51{,}8H, \qquad T_C = P\frac{\sin 45^0}{\cos 15^0} = 100\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}9659} = 73{,}2H$$

2). Analitik usul. Ta'sir etuvchi kuchlar bir tekislikda yotganligi uchun tekislikdagi kesishuvchi kuchlar muvozanat tenglamalaridan foydalanamiz. Avvalo koordinata o'qlarini o'tkazamiz. Koordinata markazi qilib A nuqtani olamiz. x o'qini gorizontal qilib, y o'qini esa unga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz (21-rasm). Masalani analitik usulda yechish uchun (10) tenglamadan foydalanamiz:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad T_B\cos 45^0 - T_C\cos 30^0 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0 \qquad T_B\sin 45^0 + T_C\sin 30^0 - P = 0 \qquad (2)$$



21- rasm

(1) tenglikdan $\quad T_B = T_C\dfrac{\cos 30^0}{\cos 45^0}$

Bu tenglikni (2) ga qo'yamiz.

$$T_C\frac{\cos 30^0}{\cos 45^0}\cdot\sin 45^0 + T_C\sin 30^0 - P = 0$$

yoki

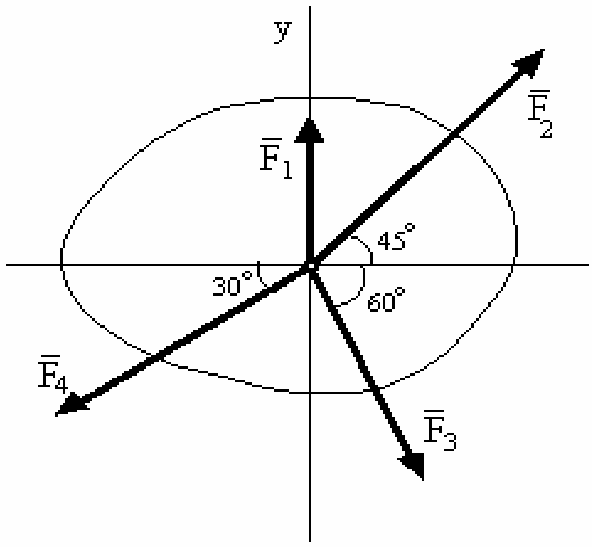
$$T_C\cos 30^0 + T_C\sin 30^0 - P = 0$$

$$T_C = \frac{P}{\cos 30^0 + \sin 30^0} = \frac{100}{0{,}866 + 0{,}5} = 73{,}2H;$$

$$T_B = 73{,}2\frac{0{,}.866}{0{,}7} = 51{,}8H;$$

5- masala. Tekislikdagi qattiq jismning qandaydir O nuqtasiga to'rtta $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \overline{F}_3$ va $\overline{F}_4$ kuchlar qo'yilgan. O nuqtaga beshinchi $\overline{F}_5$ kuch qo'yilganda qattiq jismning muvozanati o'zgarmasin. $\overline{F}_5$ kuchning moduli va yo'nalishini aniqlang ?

F_1=2 кН, F_2=F_3=4 кН, F_4=6кН deb oling (22-rasm).



22- rasm

Yechish: Masalani analitik usulda yechamiz. O nuqtani koordinata boshi qilib, x,y o'qlarini o'tkazamiz. Muvozanat tenglamalarining koordinata o'qlaridagi proeksiyalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum F_{KX} = 0; \quad F_2 cos45^0 + F_3 \cos 60^0 - F_4 \cos 30^0 + F_{5X} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad F_1 + F_2 \sin 45^0 - F_3 \sin 60^0 - F_4 \sin 30^0 + F_{5y} = 0 \qquad (2)$$

$$(1)\text{-dan} \quad 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{5X} = 0$$

$$\text{bundan} \quad 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} + F_{5X} = 0$$

$$\text{yoki} \quad F_{5x} = 3\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{2} = 3 \cdot 1{,}73 - 2 - 2 \cdot 1{,}41 = 0{,}37 \text{ кН}$$

$$F_{5X} = 0{,}37 \text{ кН}$$

$$(2)\text{-dan} \quad 2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} + F_{5y} = 0$$

$$\text{bundan} \quad 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + F_{5y} = 0$$

$$\text{yoki} \quad F_{5y} = 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{2} = 1{,}64 \text{ кН}$$

$$F_{5y} = 1{,}64 \text{ кН}$$

$\overline{F}_5$ kuchning modulini topamiz:

$$F_5 = \sqrt{F_{5X}^2 + F_{5y}^2} = \sqrt{0{,}37^2 + 1{,}64^2} = 1{,}68 кН .$$

$\overline{F}_5$ kuchning yo'nalishini aniqlaymiz:

$$\cos(x,^\wedge \overline{F}_5) = \frac{F_{5x}}{F} = \frac{0{,}37}{1{,}68} = 0{,}22, \quad \cos(y,^\wedge \overline{F}_5) = \frac{F_{5y}}{F_5} = \frac{1{,}64}{1{,}68} = 0{,}98$$

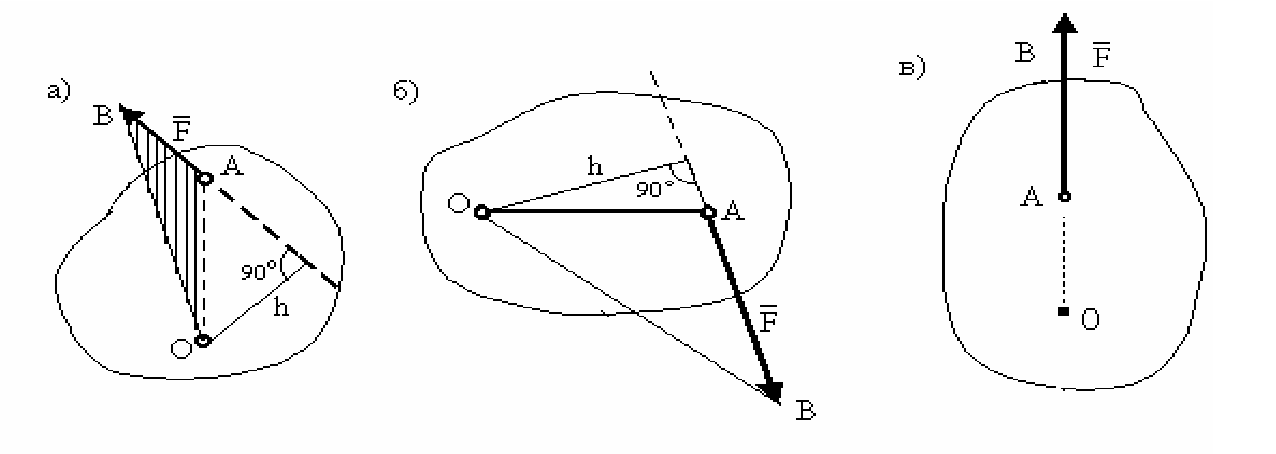
$$bundan \ (x,^\wedge \overline{F}_5) \approx 77^0; \quad (y,^\wedge \overline{F}_5) \approx 13^0$$

3.3. Kuchning markaz (nuqta) ga nisbatan momenti.

Tajribalar ko'rsatadiki, kuch ta'sirida qattiq jism faqat ilgarilanma harakatlanib qolmasdan, qandaydir markaz (nuqta) atrofida aylanma harakat qilish ham mumkin. Kuchning aylantirish effektini uning momenti harakterlaydi.

1. Qattiq jismning A nuqtasiga $\overline{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin. $\overline{F}$ kuch qattiq jismni qandaydir O markaz atrofida aylantiradi. O markazdan $\overline{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikulyarga kuch yelkasi deyiladi va h harfi bilan belgilanadi. (23-rasm, a). Kuch jismni O markaz atrofida aylantirish effekti quyidagilarga bog'liq bo'ladi:
1) $\overline{F}$ kuchning moduli va kuch yelkasi h ning uzunligiga; 2) O markaz va $\overline{F}$ kuch orqali o'tuvchi OAB aylanish tekisligining egallagan holatiga;
3) tekislikdagi aylanish yo'nalishiga;
jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar bir tekislikda yotadi deb olamiz. U holda jismga ta'sir etuvchi kuchlarning aylantirish tekisligi umumiy bo'ladi.

Tekislikda aylanish yo'nalishini biror belgi orqali aniqlab olish mumkin. Kuch momenti haqidagi tushunchani kiritamiz. Kuchning O markazga nisbatan momenti deb, mos ishorada olingan kuch modulini



23- rasm

kuch yelkasiga bo'lgan ko'paytmasiga aytiladi. $\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan momenti (bundan keyin qisqagina kuch momenti deb ataymiz) ni $m_o(\overline{F})$ yoki $M_o(\overline{F})$ bilan belgilaymiz. Demak,

$$m_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h \qquad (11)$$

Agar kuch jismni O markaz atrofida soat mili harakati yo’nalishiga teskari yo’nalishda aylantirsa, kuch momenti musbat (23-rasm,a), agar kuch jismni O markaz atrofida soat mili harakati yo’nalishi bo’yicha aylantirsa kuch momenti manfiy ishorada olinadi (23-rasm,б).

Kuch momenti Nyuton metr (1Nm) da, shuningdek, kilogramm metr (1Kgm) larda o’lchanadi. Kuch momenti quyidagi hossalarga ega:

Jismga qo’yilgan kuchni o’zining ta‘sir chizig’i bo’ylab jismning istalgan nuqtasiga ko’chirilsa, kuch momenti o’zgarmaydi; 2) agar jismga kuch ta‘sir etmasa (kuch nolga teng), yoki moment markazi kuchning ta‘sir chizig’ida yotgan bo’lsa (elka nolga teng) kuch momenti nolga teng bo’ladi (23-rasm,в); 3) kuch momenti son jihatdan OAB uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng (23-rasm, a), ya‘ni:

$$m_0\left(\overline{F}\right)=2S_{\Delta OAB} \qquad (12)$$

Haqiqatdan ham uchburchak OAB ning yuzasi.

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot h \text{ bundan } 2S_{\Delta OAB}=AB\cdot h$$

AB asos bo’ylab $\overline{F}$ kuch qo’yilgan, shunga ko’ra

$$2S_{\Delta OAB}=F\cdot h$$

(11)formula bilan solishtirsak

$$m_0\left(\overline{F}\right)=2S_{\Delta OAB}$$

kelib chiqadi.

3.4. Teng ta‘sir etuvchining momenti haqida Varin’on teoremasi.

Teorema: Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta‘sir etuvchisining biror nuqtaga nisbatan momenti, qo’shiluvchi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig’indisiga teng.

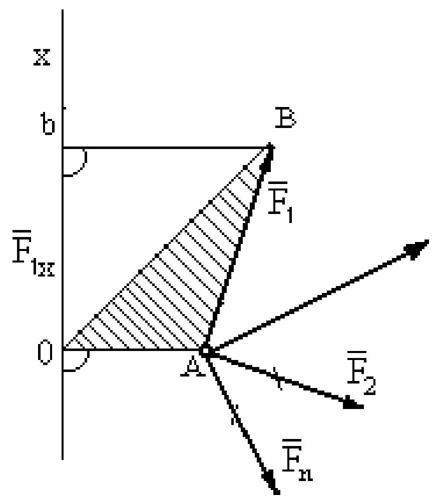
Isbot: Ta‘sir chiziqlari A nuqtada kesishuvchi $\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_n$ kuchlar sistemasini qarab chiqamiz (24-rasm). Tekislikdan ixtiyoriy O nuqta olib, bu nuqtadan OA ga perpendikulyar qilib *Ox* o’qini o’tkazamiz. Kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan momentlari tegishlicha $m_0\left(\overline{F_1}\right)$, $m_0\left(\overline{F_2}\right)$ va x.k. bilan belgilanadi.(12) formulaga ko’ra

$$m_0\left(\overline{F_1}\right) = 2S_{\Delta OAB}$$

Rasmga ko'ra $2S_{\Delta AOB1} = OA \cdot F_{1X}$,
Bu yerda $\overline{F}_{1x}$,- $\overline{F}_1$ kuchning OX o'qidagi proeksiyasi, shunga ko'ra

$$m_0(F_1) = OA \cdot F_{1X}$$

Shu usul yordamida qolgan kuchlarning momentlarini ham aniqlash mumkin. $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini $\overline{R}$ bilan belgilaymiz.
Bu yerda $\overline{R} = \sum \overline{F}_K$ Uning x o'qdagi proeksiyasi $R_X = \sum F_{KX}$. Tenglikning har ikkala tomoniga OA ni ko'paytiramiz.



24- rasm

$$OA \cdot R_X = \sum(OA \cdot F_{KX})$$

(12) formulaga ko'ra

$$m_0(\overline{R}) = \sum m_0(\overline{F}_K) \qquad (13)$$

Bu Varin'on teoremasining matematik ifodasi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Tekislikdagi o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch qachon muvozanatda bo'ladi?
2. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik sharti qanday ifodalanadi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik sharti qanday ifodalanadi?
4. Kuch momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuch yelkasi deb nimaga aytiladi?
6. Kuch momenti qachon nolga teng bo'ladi?
7. Kuch momentining mexanik ma'nosi nima?
8. Kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi qanday ifodalanadi?
9. Kuch momenti qanday hossalarga ega?
10. Kuch momentining ishorasi qanday aniqlanadi?

4 – MA‘RUZA
JUFT KUCH. JUFT KUCH MOMENTI. JUFTLARNING EKVIVALENTLIGI HAQIDA TEOREMA. TEKISLIKDAGI JUFTLARNI QO’SHISH.

REJA:

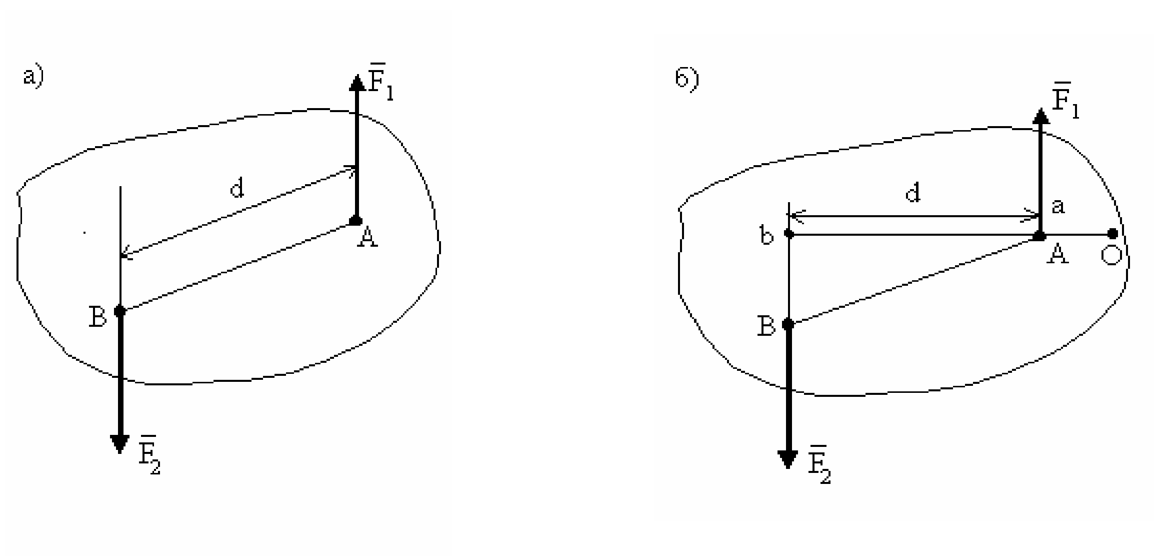
1. Juft kuch. Juft kuch momenti.
2. Juftlarning ekvivalentligi haqida teorema.
3. Tekislikdagi juftlarni qo’shish.
4. Tekislikdagi juftlarning muvozanat sharti.

Adabiyotlar: 3, 4, 8, 9, 11, 12

Tayanch iboralar: juft kuch, juft kuch momenti, juft yelkasi, juftning jismga ko’rsatilgan ta‘siri, juftlar ekvivalentligi.

4.1. Juft kuch. Juft kuch momenti.

Miqdorlari teng, parallel va qarama-qarshi tomonga yo’nalgan ikkita kuchdan iborat sistemaga juft kuch deyiladi. (25-rasm, a) Juft kuch $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ ko’rinishida belgilanadi. $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ kuchlarga juftning tashkil etuvchilari deyiladi. Juftni tashkil etuvchilarining ta‘sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofaga juftining yelkasi deyiladi va u, *d* harfi bilan belgilanadi. Juftning ta‘sir chiziqlari orqali o’tuvchi tekislikka, juftning ta‘sir tekisligi deyiladi.



25- rasm

Juftni tashkil etuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. Juft kuchlar teng ta'sir etuviga ega emas.

Haqiqatdan ham $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ juft qandaydir $\overline{Q}$ teng ta'sir etuvchiga ega bo'lsin. Teng ta'sir etuvchi $\overline{Q} \neq 0$ bo'lsin. U holda qattiq jism $\overline{F}_1 \overline{F}_2$ va $\overline{Q}$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lishi kerak. Lekin bu mumkin emas, chunki $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0$, $Q \neq 0$ bo'lgani uchun $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{Q} \neq 0$. Shunday qilib juftni bitta kuch bilan almashtirib bo'lmaydi. Demak, juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega emas.

Jismga qo'yilgan juftning aylantirish effekti: 1) juft kuchning moduli va yelkasining uzunligiga, 2) juft ta'sir tekisligining holatiga, 3) shu tekislikdagi aylanish yo'nalishiga bog'liq bo'ladi. Bu effektni xarakterlash uchun juft kuch momenti tushunchasi kiritiladi.

Juft kuch momenti deb mos ishora bilan olingan juftni tashkil etuvchi kuchlardan birining miqdorini juft yelkasi uzunligiga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi. Juft momenti m yoki M bilan belgilanadi.

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 \cdot d \qquad (14)$$

Agar juft jismni soat mili harakati yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirsa, juft momenti musbat, agar soat mili yo'nalishi bo'ylab aylantirsa juft momenti manfiy ishorada olinadi. Juft momenti ham xuddi kuch momenti kabi bir xil o'lchov birliklarda o'lchanadi.

Teorema. Juftni tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligida ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi juft momentiga teng.

Isbot. $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ juftning ta'sir tekisligidan ixtiyoriy O nuqtani olamiz (25-rasm,б). Natijada quyidagini aniqlaymiz:

$$m_0(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot Oa, \ m_0(\overline{F}_2) = F_2 \cdot Ob.$$

bu tengliklarni qo'shamiz va $\overline{F}_1 = \overline{F}_2$, $Ob - Oa = d$ ekanligini e'tiborga olamiz.

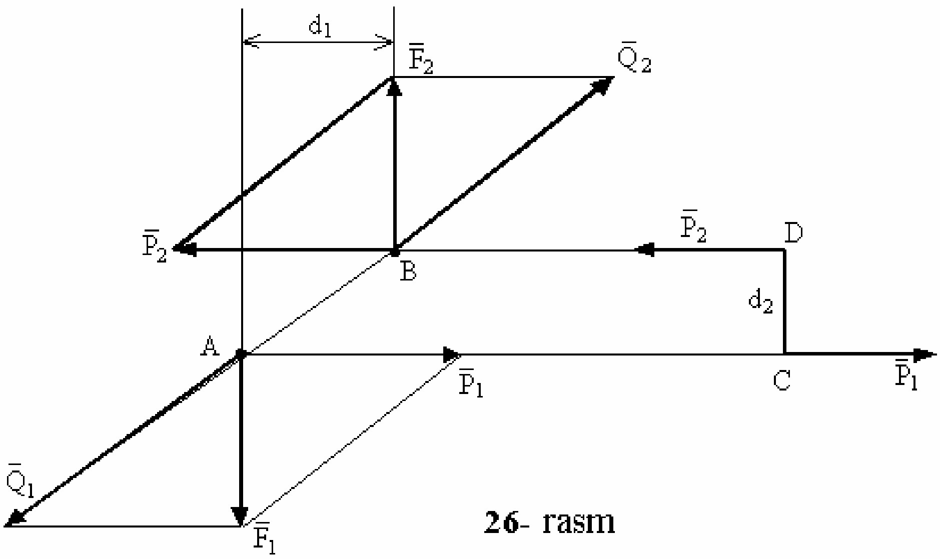
$$m_0(\overline{F}_1) + m_0(F_2) = -F_1 Oa + F_2 Ob = -F_1 Oa + F_2(d + Oa) = -F_1 Oa + F_2 d + F_2 Oa = F_2 d = m$$

$$\text{demak, } m_0(\overline{F}_1) + m_2(\overline{F}_2) = m$$

4.2. Ekvivalent juftlar haqida teorema.

Teorema. Qattiq jismga qo'yilgan juftning ta'sirini o'zgartirmay, shu juftning ta'sir tekisligida yotuvchi, momenti berilgan juftning momentiga teng istalgan juft bilan almashtirish mumkin.

Isbot. Qattiq jismga yelkasi d_1 bo'lgan $(\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ juft qo'yilgan bo'lsin.



26- rasm

Bu juftning ta'sir tekisligidan ikkita ixtiyoriy C,D nuqtalar olamiz.

C va D nuqtalardan to'g'ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to'g'ri chiziqlar $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning ta'sir chiziqlari bilan kesishadi. Kesishishda hosil bo'lgan nuqtalarni tegishlicha A va B deb belgilaymiz va $(\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ juftlarni shu nuqtalarga keltirib qo'yamiz (26-rasm).

AC va BD to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani d_2 bilan belgilaymiz. $\overline{F}_1$ kuchni AB va AC yo'nalishlarda $\overline{P}_1$ va $\overline{Q}_1$, $\overline{F}_2$ kuchni AB va BD yo'nalishlarda $\overline{P}_2$ va $\overline{Q}_2$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bunda quyidagi shart bajarilsin: $\overline{P}_1=-\overline{P}_2$ va $\overline{Q}_1=-\overline{Q}_2$. Rasmdan ko'rinadiki $\overline{Q}_1$ va $\overline{Q}_2$, kuchlar miqdor jihatdan teng bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan: $(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2)\ \infty\ 0$, sistemani tashkil etgani uchun ularni tashlab yuboramiz. Natijada qattiq jism yelkasi d_2 bo'lgan $(\overline{P}_1,\overline{P}_2)$ juft ta'sirida qoladi.

$(\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ juft $(\overline{P}_1,\overline{P}_2)$ juft bilan almashtirildi. $(\overline{P}_1,\overline{P}_2)$ juftni o'zining ta'sir tekislikdagi C va D nuqtalarga ko'chirish mumkin.

Endi biz $(\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ va $(\overline{P}_1,\overline{P}_2)$ juftlarining momentlari tengligini isbotlaymiz.

$\overline{F_1}$ kuch $\overline{P_1}$ va $\overline{Q_1}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi,shunga ko'ra quyidagini yozamiz.

$$\overline{F_1} = \overline{P_1} + \overline{Q_1}$$

Varin'on teoremasiga ko'ra, bu kuchlarning B nuqtaga nisbatan momentlari.

$$m_B(\overline{F_1}) = m_B(\overline{P_1}) + m_B(\overline{Q_1})$$

$$m_B(\overline{F_1}) = F_1 \cdot d_1, \quad m_B(\overline{P_1}) = P_1 \cdot d_2, \quad m_B(\overline{Q_1}) = O;$$

Bularni o'rniga qo'ysak

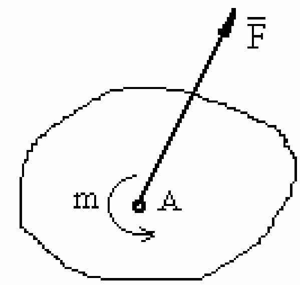
$$F_1 d_1 = P d_2$$

Demak, juftlarning momentlari o'zaro teng ekan. Teorema isbotlandi. Isbotlangan teoremadan juftlarning quyidagi hossalari kelib chiqadi:

1) juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'zining ta'sir tekisligida istalgan joyga ko'chirish mumkin.

2) juftning momentini o'zgartirmay, uning tashkil etuvchilari va yelkasi o'zgartirilsa, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Texnik chizmalarda juft kuch ko'rsatilmaydi, balki uning aylanish yo'nalishi ko'rsatiladi.



27-rasm

Masalan, 27-rasmda, qattiq jismning A nuqtasiga $\overline{F}$ kuch momenti m ga teng bo'lgan juft qo'yilganligi ko'rsatilgan.

Juft kuchning yana bir kerakli hossaga ega ekanligini isbotlash mumkin (isbotini tushirib qoldiramiz).

3) Juft kuchni qattiq jismga ko'rsatadigan ta'sirini o'zgartirmay, bir tekislikdan unga parallel bo'lgan istalgan boshqa bir tekislikka ko'chirish mumkin.

4.3 Tekislikdagi juftlarni qo'shish. Tekislikdagi juftlarning muvozanati.

Teorema. Bir tekislikda yotuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot. Bir tekislikda yotuvchi bir nechta, aniqroq bo'lishi uchun uchta juft berilgan bo'lsin (ular rasmda ko'rsatilmagan). Ularning momentlari tegishlicha m_1 ,m_2 va m_3 bo'lsin. Juftlarning ekvivalentligi haqidagi teoremaga asosan, uchta juftni momentlarini o'zgartirmay ularni umumiy AB=d yelkaga keltiramiz (28-rasm). A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni alohida-alohida qo'shib, A nuqtada $\overline{R}$ va B nuqtada $\overline{R}^1$ kuchlarni hosil qilamiz. Bunda $\overline{R} = \overline{F}_1 - \overline{F}_2 + \overline{F}_3$, $\overline{R}^1 = \overline{F}_1^1 - \overline{F}_2^1 + \overline{F}_3^1$. Natijada juftlar sistemasi yelkasi AB=d $(\overline{R}, \overline{R}^1)$ teng ta'sir etuvchi juftga keltiriladi. Uning momenti

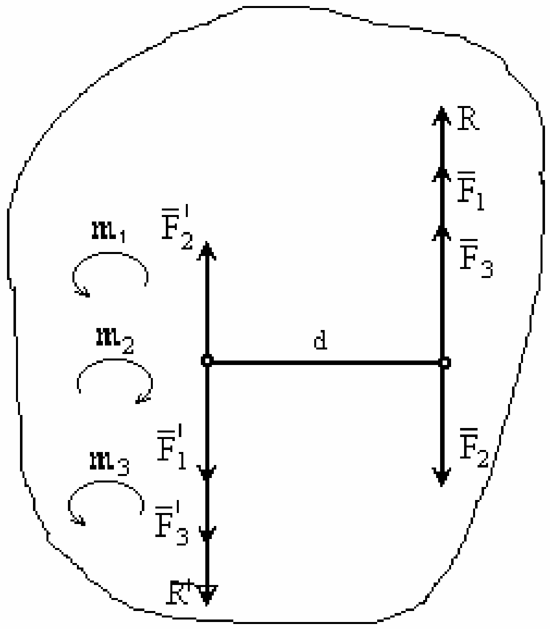
M=Rd=F_1d-F_2d+F_3d=m_1-m_2+m_3

Uchta juft uchun teorema isbotlandi. Agar juftlar sistemasi momentlari $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ bo'lgan n ta juftlardan iborat bo'lsa, ular momenti.

$$M = \sum m_K \qquad (15)$$

bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'ladi.

Isbotlangan teoremadan ko'rinadiki, tekislikdagi juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.



28- rasm

$$\sum m_K = O \qquad (16)$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
2. Juft teng ta'sir etuvchiga ega bo'ladimi?
3. Juft momenti deb nimaga aytiladi?
4. Juft yelkasining ta'rifini aytib bering?
5. Juftlarning ekvivalentligi haqidagi teoremani isbotlang?
6. Tekislikdagi juftlar qanday qo'shiladi?
7. Tekislikdagi juftlarning muvozanat shartini aytib bering?

5-MA'RUZA
KUCHNI O'ZIGA PARALLEL KO'CHIRISH HAQIDA LEMMA. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASINI BERILGAN MARKAZGA KELTIRISH. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANAT SHARTLARI.

REJA:
5.1. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma.
5.2. Tekislikdagi kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish.
5.3. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.
5.4. Parallel kuchlarning muvozanat shartlari.
5.5. Statik aniq, statik aniqmas masalalar.
5.6. Bir tekis taqsimlangan kuchlar.

Adabiyotlar: 1, 4, 8, 9, 12, 13

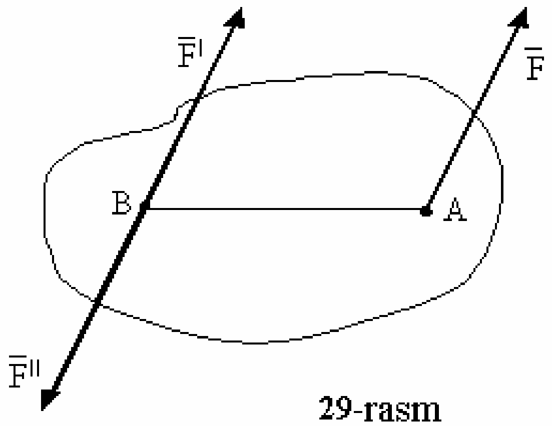
Tayanch iboralar: Puanso lemmasi, qo'shilgan juft, bosh vektor, bosh moment, muvozanatning asosiy formasi, muvozanatning birinchi formasi, muvozanatning ikkinchi formasi, parallel kuchlar muvozanat sharti, statik aniq masala, statik aniqmas masala.

5.1. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma.

Qattiq jism biror kuch ta'sirida muvozanatda bo'lganda shu kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilsa, jismning muvozanati o'zgarmaydi. Kuch jismning boshqa bir nuqtasiga ko'chirilsa, jismning muvozanati albatta o'zgaradi.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uni o'ziga parallel ravishda bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish masalasi 1804 yilda fransuz olimi L.Puanso tomonidan isbotlangan quyidagi lemma bilan ifodalanadi.

Lemma. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchni jismga ko'rsatadigan ta'sirini o'zgartirmay jismning istalgan boshqa nuqtasiga ko'chirilganda, momenti ko'chirilayotgan kuchni ko'chirish markaziga nisbatan momentiga teng bo'lgan juftni qo'shib olish lozim.



29-rasm

Isbot. Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\overline{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin (29-rasm). Agar qattiq jismning istalgan biror B nuqtasiga muvozanatlashuvchi $(\overline{F}', \overline{F}'')$ cistemani qo'ysak, $\overline{F}$ kuchining ta'siri o'zgarmaydi.

Bunda:

$\overline{F}' = \overline{F}, \overline{F}'' = -\overline{F}$ bo'lsin.

Natijada qattiq jism $\overline{F}, \overline{F}'$ va $\overline{F}''$ kuchlar sistemasi ta'sirida qoladi. Bu kuchlar sistemasi B nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}'$ kuchga va $(\overline{F}, \overline{F}'')$ juftga ekvivalent bo'ladi. $(\overline{F}, \overline{F}'')$ juftning momenti, $\overline{F}$ kuchning B nuqtaga nisbatan momentiga tengligi juftlar nazariyasidan ma'lum ya'ni, $m = m_B(\overline{F})$.

Shunday qilib, A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$ kuchni B nuqtaga keltirishda $(\overline{F}, \overline{F}'')$ juftni qo'shib olish kerak ekan. $(\overline{F}, \overline{F}'')$ juftga qo'shilgan juft deyiladi.

5.2. Kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish.

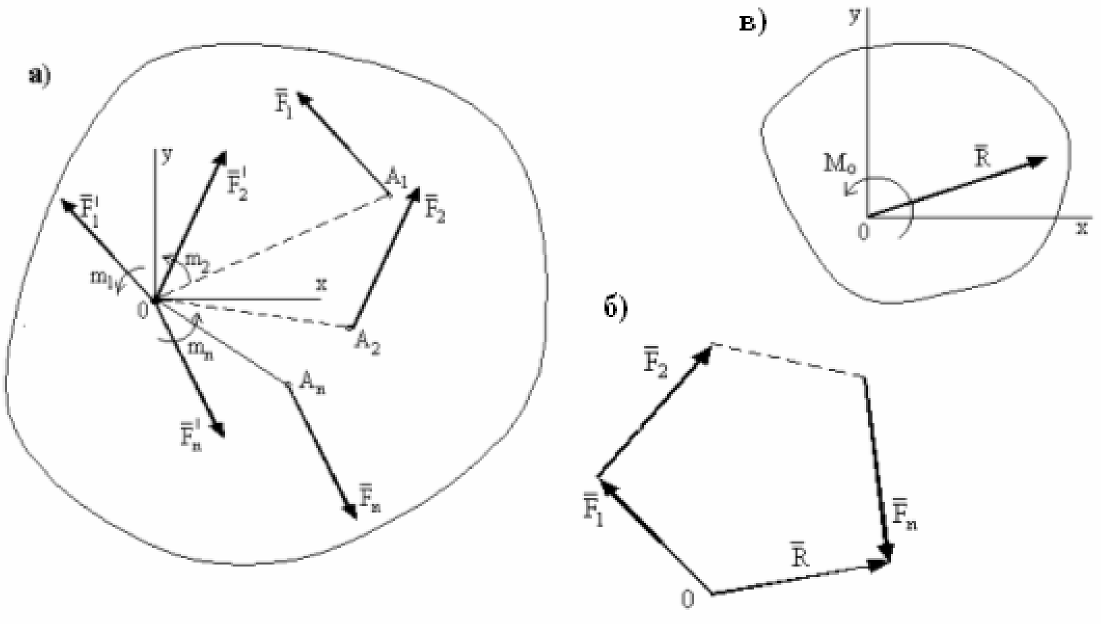
Qattiq jismga bir tekislikda yotuvchi $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsin. Shu tekislikdan ixtiyoriy O nuqta tanlab, bu nuqtani keltirish markazi deb ataymiz. 5,1 da isbotlangan teoremaga asosan berilgan kuchlar sistemasini O nuqtaga keltiramiz. Kuchlarni keltirishda bittadan juft qo'shib olinadi, (30-rasm, a). Natijada jismga uning O nuqtasiga qo'yilgan

$$\overline{F}_1^1 = \overline{F}_1, \overline{F}_2^1 = \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n^1 = \overline{F}_n \qquad (17)$$

kuchlar sistemasi va momentlari:

$$m_1 = m_0(\overline{F}_1), \quad m_2 = m_0(\overline{F}_2), \quad ... \; m_n = m_0(\overline{F}_n) \quad (18)$$

bo'lgan juftlar ta'sir qila boshlaydi.



30-rasm

O nuqtaga keltirilgan kuchlar ularni geometrik yig'indisi bo'lgan bitta $\overline{R} = \sum \overline{F}_K$ kuch bilan almashtiriladi (30-rasm,б), (17) ga ko'ra:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_K \qquad (19)$$

Juftlarni qo'shish teoremasiga ko'ra, barcha juftlar ham bitta juft bilan almashtiriladi. Bu juftning momenti $M_0 = \sum m_K$ yoki (18) ga ko'ra

$$M_0 = \sum m_0\left(\overline{F}_к\right) \qquad (20)$$

Kuchlar sistemasining geometrik yig'indisiga teng kattalik $\overline{R}$- kuchlar sistemasining bosh vektori, juftlar momentlarining algebraik yig'indisi M_0- kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deyiladi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida, bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor $\overline{R}$ ga teng bitta kuchga hamda momenti bosh moment M_0 ga teng bitta juftga ekvivalent bo'ladi (30-rasm, в).

Shuni qayd qilish kerakki, bu yerda $\overline{R}$, kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'la olmaydi, chunki u kuchlar sistemasini juft bilan birgalikda almashtirayapti.

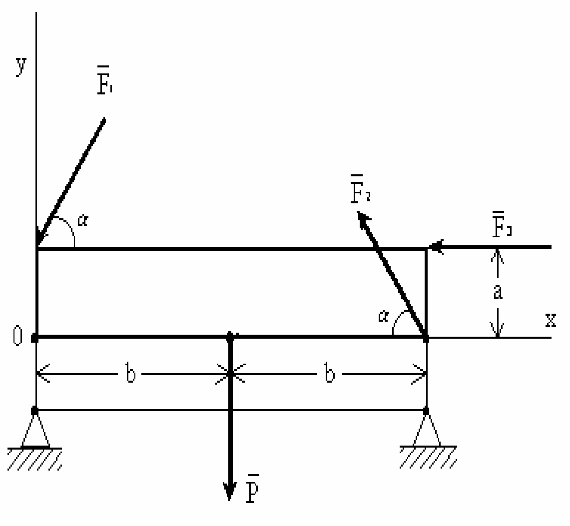
Oxirida ikkita xususiy holni ko'rib chiqamiz:

1) agar $\overline{R}$=0; $M_o \neq o$ bo'lsa, berilgan kuchlar sistemasi momenti M_0 ga teng bo'lgan bitta juftga keltiriladi. Bu holda M_0 O markazni tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi.
2) agar $\overline{R} \neq 0$, $\mathrm{M_o} = 0$ bo'lsa, berilgan kuchlar sistemasi O markazga qo'yilgan teng ta'sir etuvchisiga teng bo'lgan bitta $\overline{R}$ kuchga keltiriladi.

6-масаla Rasmda ko'rsatilgan $\overline{P}, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ va $\overline{\mathrm{F}}_3$ kuchlar sistemasini O markazga keltiring (31-rasm).

$P = 30\text{H},\ \mathrm{F}_1 = F_2 = F_3 = F = 20H,\ \mathrm{a} = 0{,}3\text{м}, \mathrm{b} = 0{,}5\text{м},\ \alpha = 60^0$ deb oling.

Yechish. Bizning vazifamiz berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}$ ni aniqlashdan iborat. Buning uchun uning x va y o'qlaridagi proeksiyalarini va O markazga nisbatan M_0 bosh momentini aniqlaymiz. Oxy koordinata sistemasini 31-rasmda ko'rsatilgandek o'tkazamiz.



31-rasm

U holda R ning x va y o'qlaridagi proeksiyalari va O markazga nisbatan bosh momenti quyidagicha aniqlanadi.

$$R_X = \Sigma F_{KX} = -F_1 \cos 60^0 - F_2 \cos 60^0 - F_3 = -20 \cdot \frac{1}{2} - 20\frac{1}{2} - 20 = -40H$$

$$\mathrm{R_Y} = \Sigma F_{KY} = -F_1 \sin 60^0 + F_2 \sin 60^0 - P = -20\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\frac{\sqrt{3}}{2} - 30 = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 30 = -30H$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_y^2} = \sqrt{(-40)^2 + (-30)^2} = \sqrt{1600 + 900} = 50H$$

$$M_0 = \Sigma m_o(\overline{F}_K) = F_1 \cos 60^0 \cdot a - P \cdot b + F_2 \sin 60^0 \cdot 2b + F_3 \cdot a = 20\frac{1}{2} \cdot 0{,}3 - 30 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}5 =$$

$$= 3 - 15 + 17{,}3 + 6 = 11{,}3H \cdot м$$

Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasini O markazga keltirilganda, O markazga qo'yilgan $\overline{R}$=50H kuchga va momenti M_o=11,3Nm bo'lgan juftga keltirilar ekan.

5.3. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi ta'sirida jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning bosh vektori $\overline{R}$ va bosh momenti M_0 alohida- alohida nolga teng bo'lishi kerak.

$$\overline{R}=0\,; \quad M_0=0 \qquad (21)$$

(21) tenglik muvozanatning zaruriy sharti bo'lib hisoblanadi. Chunki, agar ulardan biri bajarilmasa, jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga $(\overline{R}\neq 0)$, yoki bo'lmasa juftga $(M_0\neq 0)$ keltiriladi, lekin muvozanatda bo'lmaydi. Shu bilan birgalikda (20) muvozanatning yetarli sharti bo'lib ham hisoblanadi. Chunki $\overline{R}=0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bosh moment M_0 ga teng juftga keltiriladi, lekin $M_0=0$ bo'lgani uchun kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Endi biz (21) tenglikdan kelib chiqadigan tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatning analitik shartlarini aniqlaymiz. Ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1. Muvozanatning asosiy formasi (21) tenglikda $\overline{R}=0$ bo'lishi uchun uning x va y o'qlardagi proeksiyalari alohida–alohida nolga teng bo'lishi lozim.

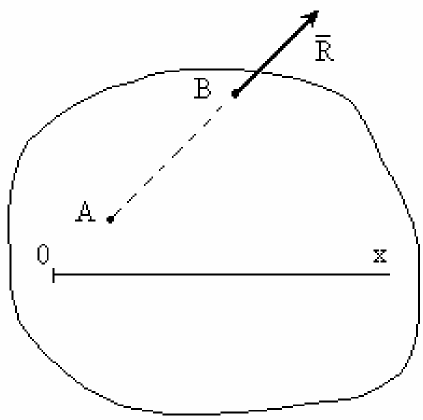
$$R_x=0;\ \mathrm{R_y}=0;\ \text{ va } \mathrm{M_0}=0$$

o'z navbatida $R_x=\sum F_{\kappa x};\ \mathrm{R_y}=\sum F_{\kappa y}$. Demak tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bir vaqtning o'zida

$$\sum F_{\kappa x}=0;\quad \sum F_{\kappa y}=0;\quad \sum \mathrm{m_0}\left(\overline{F}_\kappa\right)=0 \qquad (22)$$

shart bajarilishi lozim.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining yig'indilari va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.



32- rasm

2. Muvozanat shartining ikkinchi formasi. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi ikkita nuqtasining har biriga nisbatan momentlarining yig'indisi va mazkur nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qdagi proeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum m_A(\bar{F}_\kappa)=0; \quad \sum m_B(\bar{F}_\kappa)=0; \quad \sum F_{\kappa x}=0; \qquad (23)$$

Kuchlar sistemasi muvozanatining zarurligi bevosita (23) dan kelib chiqadi. Chunki (23) dan birortasi bajarilmasa, ya‘ni $\bar{R}\neq 0$ yoki $m_A\neq 0$ $(m_B\neq 0)$ bo’lsa muvozanat bo’lmaydi. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining yetarlisini isbotlaymiz. Tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun (23) da faqat birinchi ikkita sharti bajarilsa, ya‘ni $m_A=0$ va $m_B=0$ bo’lsa , kuchlar sistemasi muvozanatda bo’lmay A va B nuqtalardan o’tuvchi teng ta‘sir etuvchi $\bar{R}$ ga keltiriladi (32-rasm). (23) ning uchinchi shartiga ko’ra $R_x=\sum F_{\kappa x}=0$. x o’q AB ga perpendikulyar bo’lmagani uchun oxirgi tenglik faqat $\bar{R}$=0 bo’lgandagina bajariladi, ya‘ni kuchlar sistemasi muvozanatda bo’ladi.

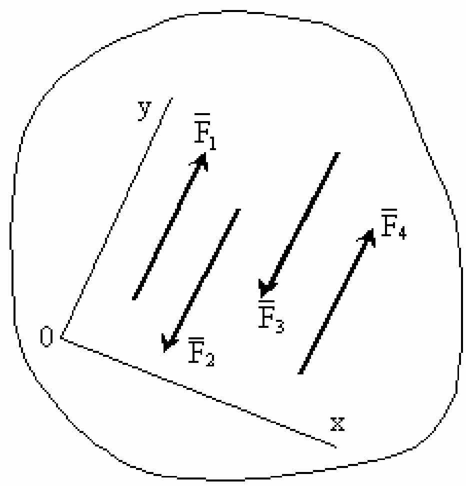
3. Muvozanat shartining uchinchi formasi (uchta momentlar tenglamasi). Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo’lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to’g’ri chiziqda yotmagan uchta nuqtasining har biriga nisbatan momentlarning yig’indisi alohida-alohida nolga teng bo’lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum m_A(\bar{F}_\kappa)=0, \quad \sum m_B(\bar{F}_\kappa)=0, \quad \sum m_C(\bar{F}_\kappa)=0; \qquad (24)$$

Bu shartlarning zarurligi xuddi oldingi holdagidek isbotlanadi. (24) shartlar sistema muvozanatda bo’lishining yetarli ekanligini teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi. (24) shartlar bajarilishiga qaramay, kuchlar sistemasi muvozanatda bo’lmasligi uchun berilgan sistemaning teng ta‘sir etuvchisi bir vaqtning o’zida A,B,C nuqtalardan o’tishi lozim. Bunday bo’lishi mumkin emas, chunki A,B,C nuqtalar bir to’g’ri chiziqda yotmaydi. (24) shartlar bajarilsa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo’ladi

5.4. Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari .

Jismga ta‘sir etuvchi kuchlar sistemasi o’zaro parallel kuchlardan iborat bo’lsa, Ox o’qini kuchlar sistemasiga perpendikulyar qilib, Oy o’qini esa kuchlar sistemasiga parallel qilib yo’naltiramiz (33-rasm). U holda har bitta kuchning x o’qidagi proeksiyasi nolga teng bo’lganligi uchun shartning birinchi tenglamasi ayniyatga 0=0 aylanadi va tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari quyidagicha bo’ladi.



33-rasm

$$\sum F_{\kappa y}=0, \quad \sum m_0(\bar{F}_k)=0 \qquad (25)$$

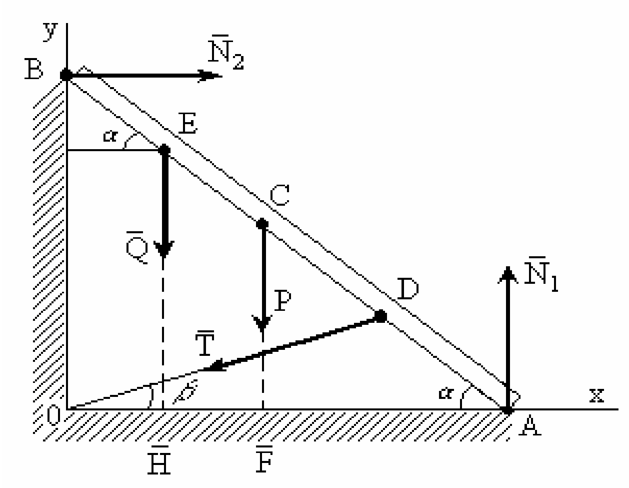
(23) muvozanat shartidan parallel kuchlar muvozanatining boshqa formasi hosil bo'ladi.

$\sum m_A(\overline{F}_\kappa)=0, \quad \sum m_B(\overline{F}_\kappa)=0; \qquad (26)$

Masalalar yechish.

7- masala. Uzunligi 2 *a,* og'irligi P ga teng AB zinapoya silliq gorizontal pol va silliq vertikal devorga tayanib turadi; Uning E nuqtasida og'irligi Q bo'lgan odam turibdi. Zinapoya sirg'anib ketmasligi uchun OD ip yordamida bog'lab qo'yilgan. Zinapoya va ipning pol bilan tashkil qilgan burchaklari tegishlicha α, β. BE=b bo'lsa, A va B tayanchlardagi reaksiyalarni aniqlang. Zinapoyaning og'irlik markazi uning o'rtasidagi S nuqtada deb oling, (34-rasm).

Yechish: Tayanch reaksiyalarini tegishli $\overline{N}_1$ va $\overline{N}_2$ deb belgilab, ularni tayanch nuqtalariga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz. Ipda hosil bo'lgan reaksiya kuchi $\overline{T}$ taranglik kuchidan iborat bo'lib, u ip bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Odam va zinapoyaning og'irlik kuchlari $\overline{Q}$ va $\overline{P}$ larni vertikal pastga tomon, koordinata o'qlarini OA va OB to'g'ri chiziq



34- rasm

bo'yicha yo'naltiramiz. Endi muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{\kappa x}=0; \qquad N_2 - T\cos\beta = 0 \quad (1')$$
$$\sum F_{\kappa y}=0; \qquad -Q-P-T\sin\beta + N_1 = 0 \quad (2')$$
$$\sum m_0(\overline{F}_\kappa)=0; \quad -N_2\cdot OB - Q\cdot OH - P\cdot OF + N_1\cdot OA = 0 \quad (3')$$

Avval quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$OB = AB\sin\alpha = 2a\sin\alpha$; $\quad \mathrm{OH} = \mathrm{b}\cos\alpha$

$\mathrm{OF} = \mathrm{AB}/2 \cdot \cos\alpha = \frac{2\mathrm{a}}{2} cos\alpha = \mathrm{a}\cos\alpha$, $\mathrm{OA} = \mathrm{AB}\cos\alpha = 2\mathrm{a}\cos\alpha$

bularni o'rniga qo'yamiz.

$\sum F_{\kappa x} = 0; \qquad \mathrm{N}_2 - T\cos\beta = 0 \quad (1)$

$\sum F_{\kappa y} = 0; \qquad -\mathrm{Q} - \mathrm{P} - \mathrm{T}\sin\beta + \mathrm{N}_1 = 0 \quad (2)$

$\sum m_0(\overline{F}_\kappa) = 0; \quad -\mathrm{N}_2 2a\sin\alpha - Qb\cos\alpha - Pa\cos\alpha + N_1 2a\cos\alpha = 0 \quad (3)$

(1) tenglikdan

$$N_2 = T\cos\beta$$

(2) tenglikdan $N_1 = T\sin\beta + P + Q$

N_1 va N_2 larning qiymatlarini (3) tenglikka keltirib qo'yamiz.

$-T\cos\beta\, 2a\sin\alpha - Q\text{в}\cos\alpha - \mathrm{P}a\cos\alpha + (\mathrm{T}\sin\beta + \mathrm{P} + \mathrm{Q})2a\cos\alpha = 0$ yoki

$T \cdot 2a\sin\beta\cos\alpha + \mathrm{P}2a\cos\alpha + Q\,2a\cos\alpha - T2a\sin\alpha\cos\beta - Q\text{в}\cos\alpha - Pa\cos\alpha = 0$

$$2a\cos\alpha(T\sin\beta + P + \mathrm{Q}) - T2a\cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha(Q\text{в} + \mathrm{Pa}) = 0$$

bundan $-2aT\sin(\alpha - \beta) + Pa\cos\alpha + \mathrm{Q}(2\mathrm{a} - \mathrm{b})\cos\alpha = 0$

yoki $-2a\,\mathrm{T}\sin(\alpha - \beta) + [Pa + Q(2a - b)]\cos\alpha = 0$

$$T = \frac{[Pa + (2a - b)Q]\cos\alpha}{2a\sin(\alpha - \beta)} = \left[\frac{Pa + (2a - b)}{2a}Q\right]\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = \left(\frac{P}{2} + \frac{2a - b}{2a}Q\right)\frac{cos\,\alpha}{\sin(\alpha - \beta)};$$

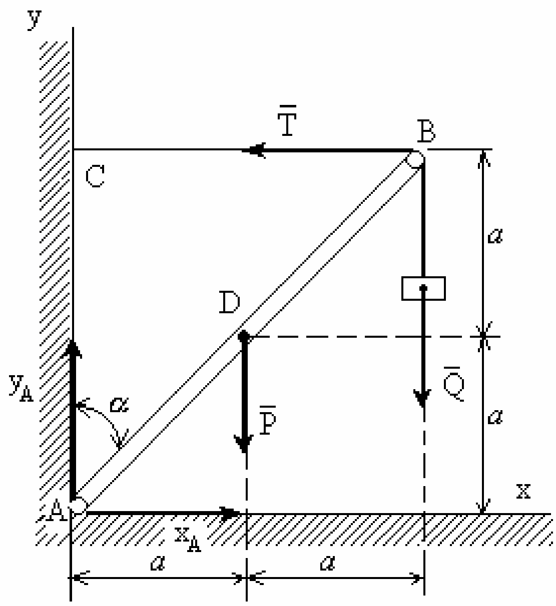
Endi N_1 va N_2 larni aniqlaymiz.

$$N_1 = T\sin\beta + P + Q = \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \left(\frac{\mathrm{P}}{2} + \frac{2a - b}{2a}Q\right)\frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$N_2 = \left(\frac{P}{2} + \frac{2a - b}{2a}Q\right)\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)};$$

8-masala. A sharnir atrofida aylana oladigan, uzunligi 2a va og'irligi P ga teng bo'lgan ko'tarish kranining AB tirsagi BC zanjir yordamida gorizontal holatda muvozanat holatida ushlab turiladi. Tirgakning B uchiga og'irligi Q bo'lgan yuk osilgan. Agar tirgak bilan vertikal orasidagi burchak α ga teng bo'lsa, zanjirning taranglik kuchi va A sharnirning reaksiyalarini aniqlang (35-rasm).

Yechish: Koordinata boshi qilib A nuqtani olamiz va Ax, Ay o'qlarini o'tkazamiz. Zanjirda hosil bo'ladigan bog'lanish reaksiya kuchi, zanjirning taranglik kuchiga teng bo'lib zanjir bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.



35-rasm

A sharnirning reaksiya kuchining yo'nalishi bizga ma'lum bo'lmagani uchun, uni x_A va y_A tashkil etuvchilarga ajratib topamiz. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{KX}=0 \qquad x_A-T=0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{KY}=0 \qquad Y_A-P-Q=0 \qquad (2)$$

$$\sum m_A(F_K)=0 \qquad -aP\sin\alpha-2aQ\sin\alpha+2aT\cos\alpha=0 \qquad (3)$$

R_A ni Pifagor teoremasiga ko'ra aniqlaymiz.

$$(1)dan \quad x_A=T \qquad (2)dan \quad y_A=P+Q$$

$$(3)\text{dan} \quad T=\frac{aP\sin\alpha+2aQ\sin\alpha}{2a\cos\alpha}=\frac{(P+2Q)\cdot a\sin\alpha}{2a\cos\alpha}=\left(\frac{P}{2}+Q\right)tg\alpha$$

$$T=\left(\frac{P}{2}+Q\right)\cdot tg\alpha; \quad x_A=\left(\frac{P}{2}+Q\right)\cdot tg\alpha; \quad y_A=P+Q$$

$$R_A=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{\left[\left(\frac{P}{2}+Q\right)\cdot tg\alpha\right]^2+(P+Q)^2}=\sqrt{\left(\frac{P}{2}+Q\right)^2\cdot tg^2\alpha+(P+Q)^2}$$

9 – masala.

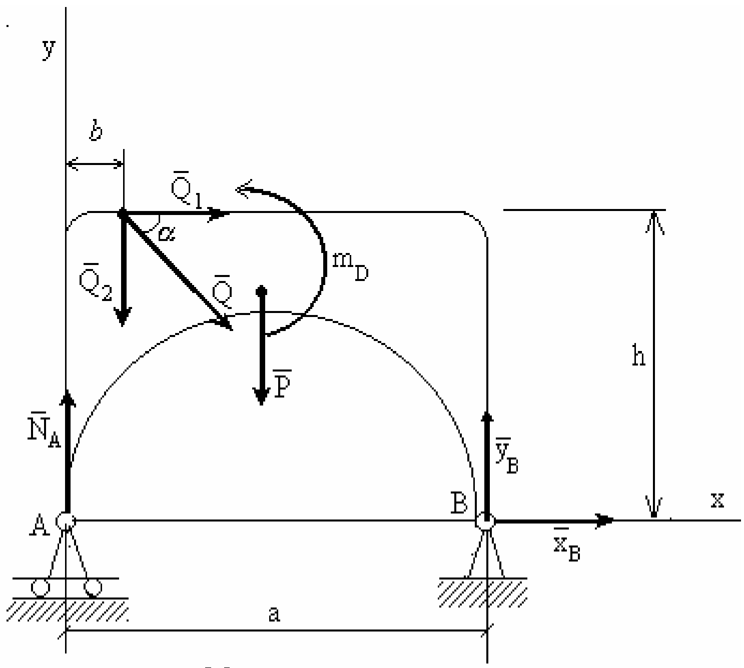
Simmetrik arkani D nuqtasiga qo'yilgan Q = 40 кН va momenti m_D =120 кН м ga teng bo'lgan juftga keltiriladigan kuchlar sistemasi qo'yilgan. Arkaning og'irligi P=80 кН

Arkaning A va B tayanch reaksiyalarini aniqlang.

AB=Q=10м, b=2м, h=3м, α=60^0,

deb oling.

Berilgan:
AB=a=10 м, b=2 м
h=3 м
$\alpha = 60^0$
Q=40 KN
m_D=120 Nм
P=80 KN
Topish kerak
N_A-? Y_B-?. X_B-?
Yechish:



36-rasm

Arkaning muvozanatini yaxlit holda qarab chiqamiz. Unga aktiv kuchlar $\bar{P}$ va $\bar{Q}$ shuningdek reaksiya kuchlari $\bar{N}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ ta'sir qiladi (B sharnirli tayanch ikkita A qo'zg'aluvchan tayanchning bitta reaksiya kuchlari) (36-rasm). Bu masalani yechishda (23) muvozanat shartidan foydalanish qulaydir. Q kuchdan moment olish uchun uni ikkita Q_1 va Q_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz, ularning moduli
$Q_1 = Q\cos\alpha, Q_2 = Q\sin\alpha$
muvozanat tenglamasi (23) ga ko'ra:

$$\sum m_A(F_K) = 0; \quad -Q\,\text{cco}\,\alpha\cdot h - Q\sin\alpha b + m_D - P\frac{a}{2} + Y_B\cdot a = 0 \qquad (1)$$

$$\sum m_B(F\kappa) = 0; \; P\frac{a}{2} + m_D - Q\cos\alpha\cdot h + Q\sin\alpha(a-b) - N_A\cdot a = 0 \qquad (2)$$

$$\sum Fkx = 0; \quad Q\cos\alpha + x_B = 0 \qquad (3)$$

Tenglamalarni hisoblaymiz.

$$(3)\,\partial a\mu \;\; x_B = -Q\cos 60^{)} = -40\cdot\frac{1}{2} = -20\kappa H$$

$$(2)\,\partial a\text{н}\;\; N_A = \frac{P\frac{a}{2} + m_D - Q\cos 60^0\cdot h + Q\sin 60^0(a-b)}{a} = \frac{400+120-60+27{,}68}{10} = 73{,}7\kappa H$$

$$(1)\,\partial a\mu \;\; y_B = \frac{h\cdot Q\cos 60^0 + b\cdot Q\sin 60^0 - m_D + P\frac{a}{2}}{a} = \frac{60+69{,}2-120+400}{10} = 40{,}9\kappa H$$

x_B ning qiymati manfiy ishorada kelib chiqdi. Demak, x_B reaksiya kuchi chizmada ko'rsatilgan tomonga teskari yo'nalgan ekan. B tayanchning to'la reaksiyasining moduli

$R_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$ formuladan aniqlanadi

$R_B = \sqrt{(-20)^2 + (40,.9)^2} \approx 45,5\kappa H$

Masalani to'g'ri yoki noto'g'ri yechilganini tekshirib ko'rish kerak. Buning uchun Ay o'qidagi proeksiya tenglamasini tuzamiz:

$\sum F_{KY} = 0;\ N_A + y_B - P - Q\sin\alpha = 0$ (4)

hisoblaymiz.

$$73{,}7 + 40{,}9 - 80 - 40\frac{\sqrt{3}}{2} = 0;\ 114{,}6 - 114{,}6 = 0;\ 0 = 0$$

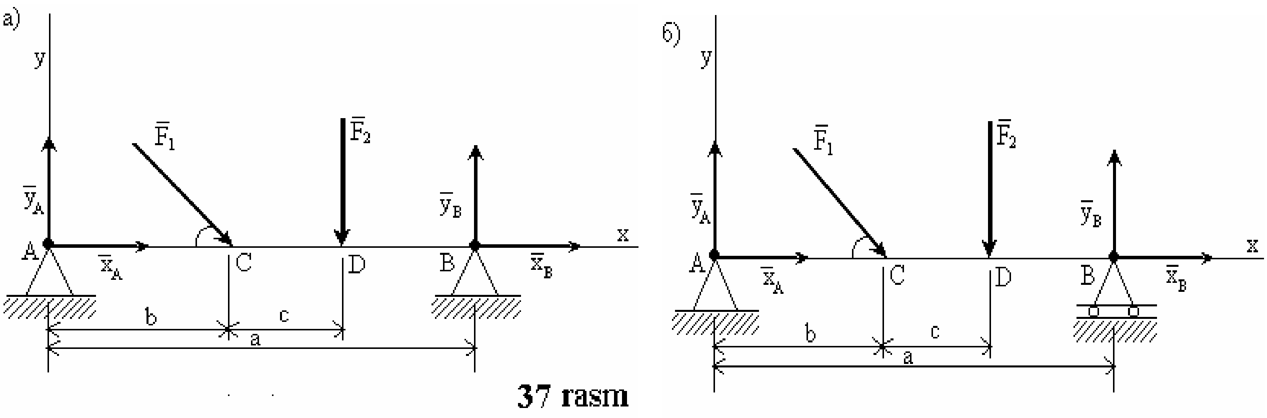
Demak masala to'g'ri yechilgan.

Shuni qayd qilish kerakki, bunday usulda tekshirishda kuchlarning o'qlardagi proeksiyalari yoki kuchlarning momentlarini aniqlashda yo'l qo'yilgan xatoliklarni aniqlab bo'lmaydi. Shunga ko'ra, qo'shimcha ravishda D markazga nisbatan momentlar tenglamasini tuzish kerak.

5.5 Statik aniq va statik aniqmas masalalar.

Berilgan masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalar soniga teng bo'lsa, statik aniq masala deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan masalalar statik aniq masalalar edi.

Noma'lumlar soni muvozanat tenglamalar sonidan ortiqcha bo'lsa, bunday masala statik aniqmas masala deyiladi.



37 rasm

Ikkala uchi qo'zg'almas silindrik sharnirli tayanchga biriktirilgan AB to'sin berilgan bo'lsin (37-rasm, a). To'sinni C nuqtasiga α burchak ostida $\bar{F}_1$ va D nuqtasigacha perpendikulyar yo'nalgan $\bar{F}_2$ kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsin. A va B tayanchlar silindrik sharnirli qo'zg'almas tayanchlar bo'lgani uchun ularning reaksiya kuchlarini $\bar{x}_A, \bar{y}_A$ va $\bar{x}_B, \bar{y}_B$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu kuchlar tekislikdagi kuchlarni tashkil etadi. Demak muvozanat tenglamalari uchta bo'ladi. Shu sababli masala statik aniqmas masala.

Masalani statik aniq bo'lishi uchun tayanchlardan birini (masalan, B tayanchni) qo'zg'aluvchan silindrik sharnirli tayanch bilan almashtirish mumkin (37-rasm,б).

B tayanchning reaksiya kuchi bitta $\bar{y}_B$ dan iborat bo'ladi. Endi tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'ladi. Masala statik aniq masalaga aylandi.

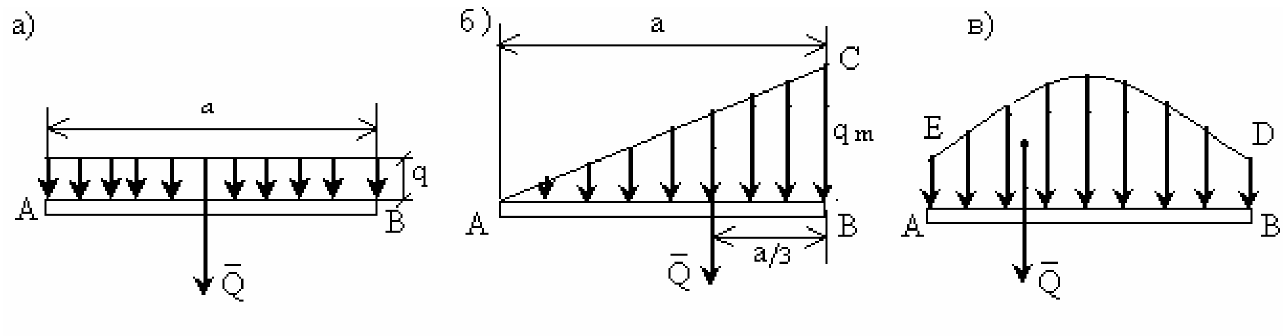
Nazariy mexanikada statik aniq masalalar yechiladi. Statik aniqmas masalalar materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi fanlarida yechiladi.

5.6. Bir tekis taqsimlangan kuchlar.

Muhandislik hisoblashlarida u yoki bu qonuniyat asosida sirt bo'ylab taqsimlangan kuchlar ko'plab uchraydi. Bir tekislikda taqsimlangan kuchlar qo'yilgan eng sodda misollarni ko'rib chiqamiz.

Bir tekis taqsimlangan kuchlarni xarakterlovchi kattalik, uning intensivligi, ya'ni uzunlik birligiga to'g'ri kelgan taqsimlangan kuch bo'lib hisoblanadi. Intensivlik $\frac{Nyuton}{metr}\left(1\frac{N}{м}\right)$ larda o'lchanadi va q harfi bilan belgilanadi.

1) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (38-rasm, a)



38-rasm

Bunday kuchlarning intensivligi qo'zg'almas kattalik bo'ladi. Masalalar echishda bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisi $\bar{Q}$ bilan almashtiriladi. Uning moduli quyidagi formula bilan aniqlanadi.

bu yerda: a – kuch taqsimlangan masofa;

$$Q = aq \quad (27)$$

Teng ta'sir etuvchi $\overline{Q}$ AB kesmaning o'rtasiga qo'yiladi.

2) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha chiziqli qonun bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (38-rasm,б).

Bunday kuchlarga misol tariqasida to'g'onga beradigan suvning bosim kuchini ko'rsatish mumkin. Suvning bosim kuchi to'g'on balandligi bo'yicha: eng pastda maksimal qiymatga, suv sirtida esa nolga teng bo'ladi. Bunday kuchlar uchun tekis taqsimlangan kuchlarning intensivligi o'zgaruvchan kattalik bo'lib noldan maksimal qiymatga q_m gacha o'zgaradi. Bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$, bir jinsli uchburchak shakldagi plastinkaning og'irlik kuchi kabi topiladi. Bir jinsli uchburchak plastinkaning og'irligi uning yuzasiga proporsional bo'lib, moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$Q = 0{,}5 \cdot a \cdot q_m \qquad (28)$$

Teng ta'sir etuvchi $\overline{Q}$ kuch ABC uchburchakning BC tomonidan $\frac{a}{3}$ masofada qo'yilgan bo'ladi.

3) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha ixtiyoriy qonun asosida taqsimlangan kuchlar (38-rasm, в).

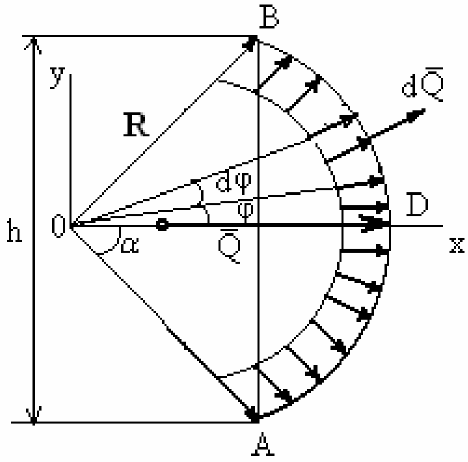
Bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$ miqdor jixatidan mos masshtabda o'lchangan ABCD shakl yuzasiga teng hamda berilgan yuzaning og'irlik markaziga qo'yiladi. (yuzaning og'irlik markazi 10.3 da aniqlanadi).

Bu holga metro va boshqa yer osti inshootlariga tuproqning ta'sir kuchi misol bo'la oladi.

4) Aylana yoyi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (39-rasm). Bunday kuchlarga silindrik shakldagi idish ichidagi suyuqlikning idish devoriga beradigan gidrostatik bosimi misol bo'la oladi.

Yoyning radiusi R, $\angle BOD = \angle AOD = \alpha$, bu yerda OD – simmetriya o'qi bo'lib x o'qini shu o'q bo'ylab yo'naltiramiz.

Yoyga ta'sir etuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$ simmetriya ya'ni O_x o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bunda Q_x=Q. Q ning modulini aniqlash uchun yoydan ds yoy elementini ajratib olamiz, uning holati φ



39-rasm

burchak orqali uzunligi esa $dS = Rd\varphi$ yordamida aniqlanadi. Elementar ds yoyga ta‘sir etuvchi kuch dQ=qdS=$qRd\varphi, Ox$ o’qdagi proeksiyasi $dQ_X = dQ \cdot \cos\varphi = qR\cos\varphi \cdot d\varphi$ ga teng.

У holda $Q_X = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_X = qR\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = 2qR\sin\alpha$ 39-rasmdan ko’rinadiki $R\sin\alpha = \frac{AB}{2}$, shuningdek $Q_X = Q$ bo’lgani uchun

$$Q = q \cdot h \qquad (29)$$

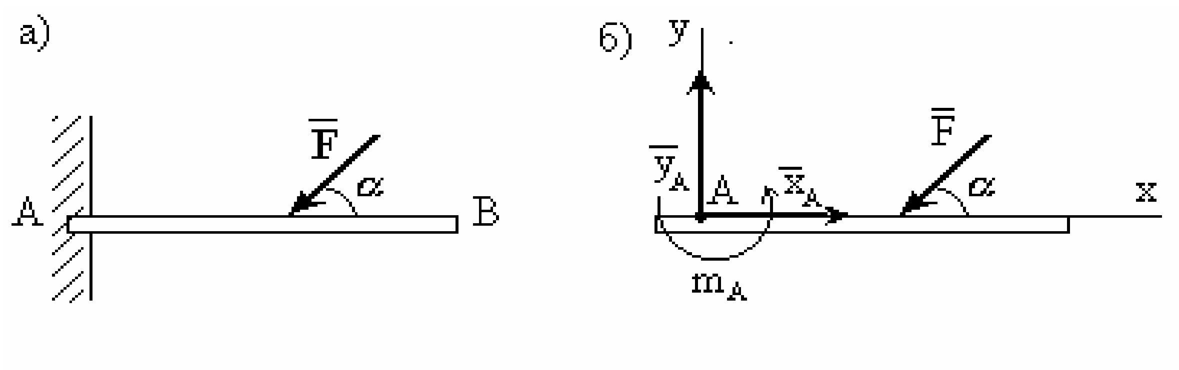
bu yerda h-AB yoyni tortib turuvchi vatar.

5) Devorga qisib mahkamlangan balkaga ta‘sir etuvchi taqsimlangan kuchlar.

AB to’sinning AC qismi devorga qisib mahkamlangan bo’lsin (40-rasm,a). Bino balkonlarining asosi devorga xuddi shunday biriktiriladi. To’sinning devorga kirib turgan qismiga ta‘sir etuvchi taqsimlangan reaksiya kuchlarini A nuqtaga keltirish natijasida bu kuchlarni shu nuqtaga qo’yilgan bitta $\bar{R}_A$ kuch va momenti m_A noma‘lum juft bilan almashtirish mumkin.

$\bar{R}_A$ ning yo’nalishi aniq bo’lmagani uchun uni $\bar{x}_A, y_A$ tashkil etuvchilarga ajratiladi.

Shunday qilib devorga qisib mahkamlangan to’sinning devorga qisilgan qismidagi reaksiya kuchi oldindan noma‘lum uchta $\bar{x}_A, y_A, m_A$ lardan iborat bo’ladi (40 – rasm, б).

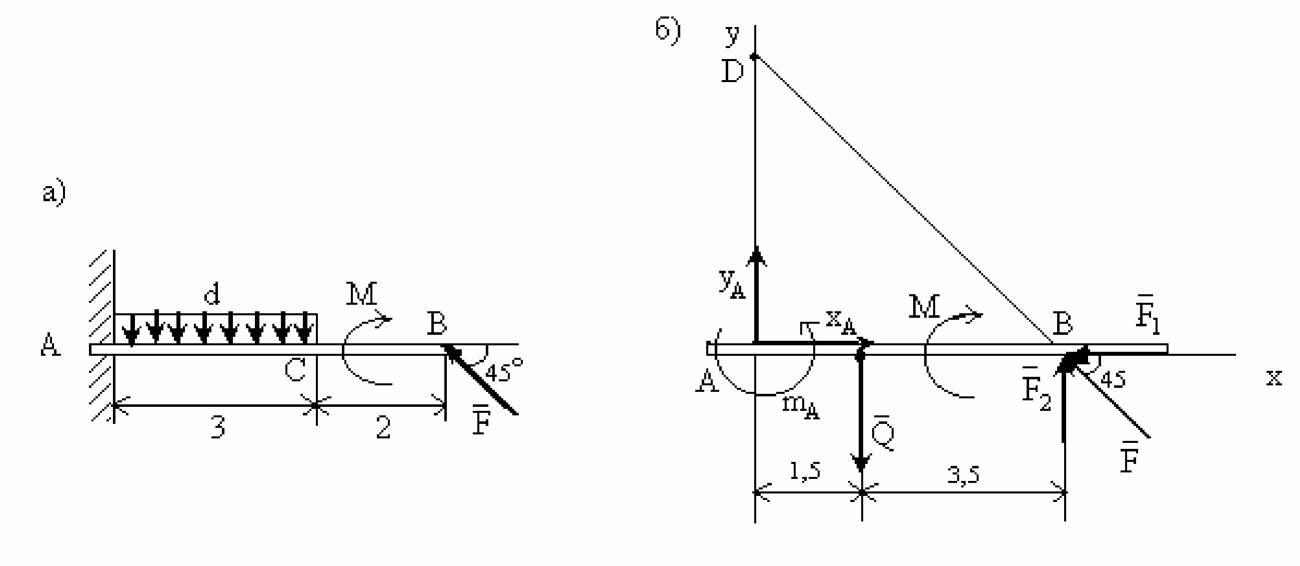


40 – rasm

10-masala. AB to’sin A nuqtada devorga qisib mahkamlangan (41-rasm,a). Agar F=4 кN, M=2 кNм, q=1,5 кN/m bo’lsa, A tayanchdagi reaksiya kuchlari aniqlansin.

Yechish. Birinchi navbatda A nuqtani koordinata boshi qilib koordinata o’qlarini o’tkazamiz.

To'singa ta'sir etuvchi kuchlarni rasmda ko'rsatamiz (41-rasm,б). To'sinning AC qismga qo'yilgan bir tekis taqsimlangan kuchni teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$ bilan almashtiramiz. $\overline{Q}$ kuch AC kesmaning o'rtasiga qo'yiladi. To'sinning B uchiga qo'yilgan $\overline{F}$ kuchni $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ tashkil etuvchilarga ajratamiz va momenti M bo'lgan juftni qo`yamiz. To'sin devorga qisib mahkamlangani uchun bog'lanish reaksiya kuchlari $\overline{x}_A, \overline{y}_A$ va momenti m_A bo'lgan reaksiya jufti bilan almashtiriladi.



41 – rasm.

To'singa ta'sir etuvchi kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasidan iborat bo'lgani uchun, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining asosiy formasidan foydalanamiz:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad x_A - F_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad y_A - Q + F_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_A(F_K) = 0; \qquad m_A - Q\cdot 1{,}5 - M + F_2\cdot 5 = 0 \qquad (3)$$

bu yerda $F_1 = F\cos 45^0,\ \ F_2 = F\sin 45: \quad Q = q\cdot 3 = 1{,}5\cdot 3 = 4{,}5\ кН$

$$(1) \quad dan \quad x_A = F\cos 45^0 = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot 1{,}41 = 2{,}82кН$$

$$(2) \quad dan \quad y_A = Q - F\sin 45^0 = 4{,}5 - 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}5 - 2{,}82 = 1{,}68кН$$

$$(3) \quad dan \quad m_A = Q\cdot 1{,}5 + M - F\sin 45^0\cdot 5 = 4{,}5\cdot 1{,}5 + 2 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5 = 6{,}75 + 2 - 14{,}1 = -5{,}35\ кНм$$

m_A rasmda ko'rsatilgan yo'nalishga teskari yo'nalgan ekan.

Ikkinchi usul. y_a va F kuchlarning ta'sir chiziqlarini davom ettiramiz. Ular qandaydir D nuqtada kesishadi (41 – rasm,б).Tekislikdagi kuchlar muvozanati shartining (24) dan foydalanamiz:

$\sum m_A(\overline{F}_K)=0;\quad m_A - Q\cdot 1{,}5 - M + F_2\cdot 5 = 0 \qquad (4)$

$\sum m_B(F_K)=0;\quad - M + Q\cdot 3{,}5 + m_A - y_A\cdot 5 = 0 \qquad (5)$

$\sum m_D(F_K)=0;\quad + m_A - Q\cdot 1{,}5 - M + x_A AD = 0 \qquad (6)$

Rasmdan ko'rinadiki Δ АВД teng yonli uchburchak, chunki $\alpha = 45^0$. Shunga ko'ra AB=AD=5м

(4) dan $M_A = Q\cdot 1{,}5 + M - F\sin 45^0 5 = 4{,}5\cdot 1{,}5 + 2 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5 = -5{,}35 кНм$

(5) dan $y_A = \frac{-m = Q\cdot 3{,}5 + m_A}{5} = \frac{-2 - 4{,}5\cdot 3{,}5 + (-5{,}.35)}{5} = \frac{-2 + 15{,}75 - 5{,}35}{5} = 1{,}68 кНм$

(6) dan $x_A = \frac{M + Q\cdot 1{,}5 - m_A}{AD} = \frac{2 + 4{,}5\cdot 1{,}5 + 5{,}35}{5} = 2{,}82 кН.$

Aniqlangan natijalarning to'g'riligiga ikkala usulda ham bir xil natija olinganligidan ham ishonch hosil qilish mumkin.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kuchni parallel ko'chirishga oid lemmani aytib bering?
2. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma qachon va kim tomonidan isbotlangan?
3. Kuchlar sistemasini biror markazga keltirish tartibini tushuntirib bering?
4. Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasini biror markazga keltirsak, nima sodir bo'ladi?
5. Kuchlar sistemasining bosh vektori deb nimaga aytiladi?
6. Kuchlar sistemasining bosh momenti deb nimaga aytiladi?
7. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining zaruriy va yetarli sharti qanday ifodalanadi?
8. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining asosiy formasi qanday ifodalanadi?
9. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanati shartining ikkinchi formasi qanday ifodalanadi?
10. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanat shartining uchinchi formasi qanday ifodalanadi?
11. Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari qanday ifodalanadi?
12. Statik aniq masala deb nimaga aytiladi?
13. Statik aniqmas masala deb nimaga aytiladi?

6-MA'RUZA

FERMA HAQIDA TUSHUNCHA. FERMA STERJENLARIDAGI ZO'RIQISHLARNI HISOBLASH. RITTER USULI. MAKSVELL – KREMON DIAGRAMMASI

REJA:

6.1. Ferma haqida tushuncha, fermalarni hisoblash.
6.2. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash.
6.3. Ritter usuli.
6.4. Maksvell-Kremon diagrammasi.

Adabiyotlar: 1, 2, 4, 8, 9, 12, 13

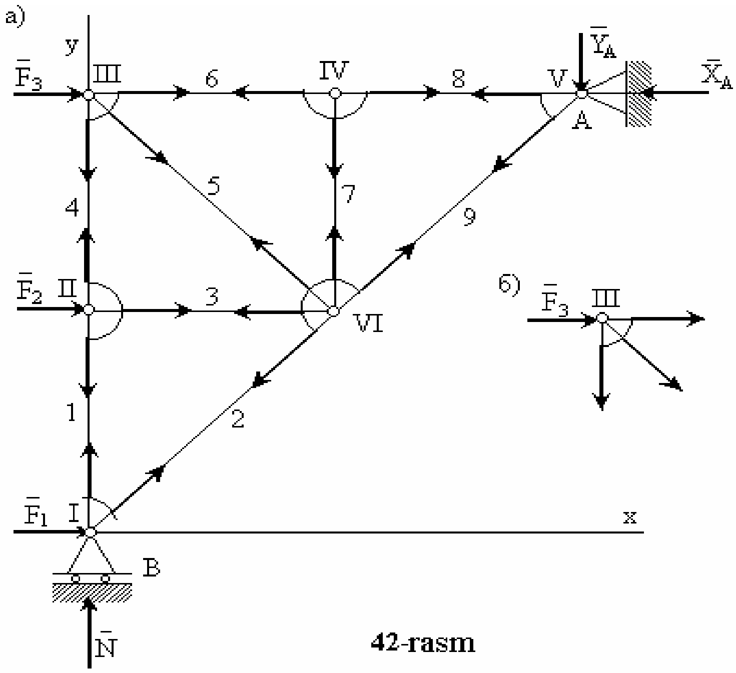
Tayanch iboralar: ferma, sterjen, tugun, zo'riqish, tugunlarni kesish usuli, Ritter usuli. Maksvell – Kremon diagrammasi.

6.1. Fermalarni hisoblash. Ferma haqida tushuncha.

To'g'ri chiziqli sterjenlarning uchlarini sharnirlar yordamida biriktirishda hosil bo'lgan konstruksiyaga ferma deyiladi. Sterjenlarning uchlarini tutashtirishda hosil bo'lgan nuqtaga tugun deb ataladi. Agar fermaning barcha sterjenlari bitta tekislikda yotgan bo'lsa, bunday fermaga tekislikdagi ferma deyiladi. Fermani hisoblashda tugunlardagi ishqalanishlar va sterjenlarning og'irliklari tugunlarga taqsimlab chiqiladi. U holda fermaning har bir sterjeni uchiga qo'yilgan va sterjen bo'ylab yo'nalgan 2 tadan kuch ta'sir etadi. Sharnirlarga qo'yilgan kuchlar ta'siridan fermaning sterjenlari faqat cho'zilishi yoki siqilishi mumkin. Sterjenlar soni κ bilan, tugunlar soni n orasida quyidagi bog'lanish bor:

$$\kappa = 2n - 3 \qquad (30)$$

Haqiqatdan ham 3 ta sterjendan tashkil topgan qo'zg'almas ABD uchburchakda 3 ta tugun mavjud. Navbatdagi tugun bilan tutashtirish uchun 2 ta sterjen zarur. Demak qolgan barcha $(n-3)$ tugunlar uchun $2(n-3)$ sterjenlar zarur bo'ladi. Natijada fermada sterjenlar soni $\kappa = 3 + 2(n-3) = 2n - 3$ bo'lishi zarur.



42-rasm

Sterjenlar soni bundan kam bo'lsa ferma mustahkam bo'lmaydi, aksincha sterjenlar soni bundan ko'p bo'lsa ferma statik noaniq bo'ladi. Ferma muvozanatini hisoblash deganda tayanch reaksiyalari va sterjenlardagi zo'riqishlarni hisoblash tushuniladi. Tayanch reaksiyalari bizga ma'lum bo'lgan statikaning muvozanat tenglamalari yordamida aniqlanadi. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni hisoblashning bir necha usullari mavjud.

6.2. Tugunlarni kesish usuli.

Fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, tugunlarni kesish usulidan foydalanish eng qulay hisoblanadi. Fermaning tugunlarini rim raqamlari bilan, sterjenlarni esa arab raqami bilan belgilaymiz. Bu usuldagi hisoblashni quyidagi misol yordamida tushuntiramiz.

Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat fermani ko'rib chiqamiz (42-rasm). Fermaga *x* o'qiga parallel yo'nalgan F_1, F_2, F_3 kuchlar qo'yilgan bo'lib, ular quyidagiga teng bo'lsin:

$$F_1 = F_2 = F_3 = 20\kappa N$$

Bu fermada tugunlar soni 6 ta, sterjenlar soni 9 ta, ya'ni $\kappa = 9,\ \ n = 6.$

Ferma uchun muvozanat tenglamalarini tuzib tayanch reaksiya kuchlarini aniqlaymiz. Bu reaksiya kuchlari (42-rasm) da ko'rsatilgandek yo'nalgan va son jihatidan quyidagiga teng.

$\sum F_{KX} = 0; \quad F_1 + F_2 + F_3 - x_A = 0 \qquad (1)$

$\sum F_{KY} = 0; \quad N - y_A = 0 \qquad (2)$

$\sum m_B(F_K) = 0; \quad -F_2 a - F_3 \cdot 2a - y_A \cdot 2a + x_A \cdot 2a = 0 \quad (3)$

(1)- dan $\quad x_A = F_1 + F_2 + F_3 = 20 + 20 + 20 = 60kN$

(2)- dan $\quad y_A = N$

(3)- dan $\quad -F_2 - 2F + 2x_A = 2y_A$

$$y_A = \frac{2x_A - 3F}{2} = \frac{2 \cdot 60 - 3 \cdot 20}{2} = 30 \ \kappa N$$

Demak; $x_A = 60\kappa N \qquad y_A = N = 30\kappa N$

Sterjenlardagi zo’riqishlarni aniqlashga o’tamiz. Sterjenlardagi zo’riqishni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini (30) formula yordamida tekshirib ko’ramiz. 1-sterjendagi zo’riqishni S_1, ikkinchidagisini S_2 va h.k. deb belgilaymiz.

Kesishni shunday tugundan boshlash kerakki, bu tugunda noma‘lum zo’riqishlar soni ikkitadan ortiq bo’lmasin.

1 tugunni kesamiz. 1 tugunga $\overline{F}_1, \overline{N}$-bog’lanish reaksiya kuchi va 1-2-sterjenlardagi $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ zo’riqishlar qo’yilgan. Har bir tugunda kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$\sum F_{KX} = 0; \quad F_1 + S_2 \cos 45^0 = 0;$

$\sum F_{KY} = 0; \quad N + S_1 + S_2 \sin 45^0 = 0$

Bundan

$$S_2 = -F\sqrt{2} = -28{,}2\kappa N; \qquad S_1 = -N - S_2 \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -10\kappa N$$

Endi S_1 zo’riqishni bilgan holda II tugunga o’tamiz.

$\sum F_{KX} = 0; \quad S_3 + F_2 = 0;$

$\sum F_{KY} = 0; \quad S_4 - S_1 = 0$

Bundan

$S_3 = -F_2 = -20\kappa N \qquad S_4 = S_1 = -10\kappa N$

S_4 zo’riqish aniqlangandan so’ng shu usul bilan avval III tugun uchun keyin IV tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Bu tenglamalardan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 14{,}1 \ \kappa N, \qquad S_6 = -S_8 = -30 \ kN \ S_7 = 0$$

S_9 zo’riqishni aniqlash uchun V tugunda kesishuvchi kuchlarni By o’qiga proeksiyalab, kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$y_A + S_9 \cos 45^0 = 0,$ bunda $S_9 = -3\sqrt{2} = -42{,}3\kappa N$

V tugun uchun ikkinchi va VI tugun uchun ikkita muvozanat tenglamalarini tekshirish tenglamalari kabi tuzamiz.

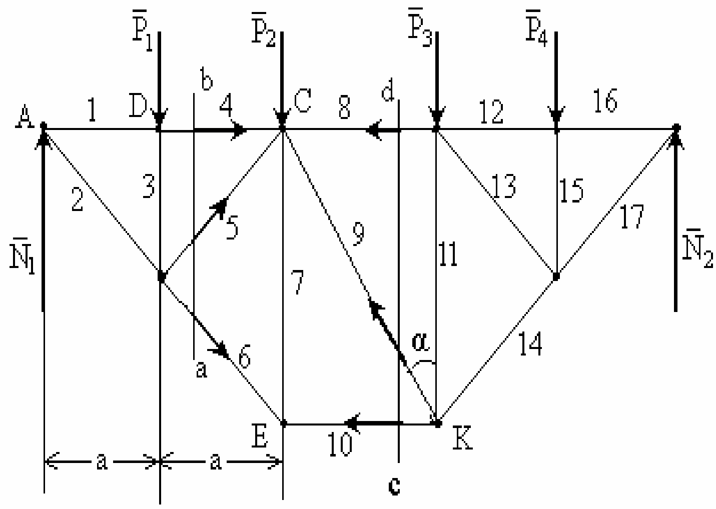
Zo’riqishlarning ishoralaridan ko’rinadiki, 5-sterjen cho’zilgan, qolgan sterjenlar esa qisilgan; 7 sterjenga kuch qo’yilmagan (nolinchi sterjen) «musbat» ishora sterjenni cho'zilishini, «manfiy» ishora esa sterjenning qisilishini ko'rsatadi.

Hisoblash paytida tugundagi no'malumlar soni ikkitadan ortiq bo'lsa, Ritter usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

6.3. Ritter usuli.

Fermaning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarini aniqlash lozim bo'lsa, u holda Ritter (1826-1906) tomonidan kashf qilingan analitik usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ritter usulining mohiyati shundan iboratki, fermani biror *a-b* kontur bilan fikran qirqib, ikki qismga ajratiladi va ajratilgan biror qismning muvozanati tekshiriladi. (43-rasm) Fermaning kesilgan bir qismini fikran tashlab yuborib, ikkinchi qismga ko'rsatadigan ta'sirini sterjenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan almashtiramiz.

Fermaning ajratilgan qismi uchun tekislikdagi kuchlarning muvozanat tenglamalari tuzilib, sterjenlarning noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi.



43-rasm

Misol. 43-rasmdagi fermaning 6-sterjendagi zo'riqish aniqlansin. Fermaga ta'sir etuvchi vertikal ta'sir etuvchi kuchlar $\overline{P}_1 = \overline{P}_2 = \overline{P}_3 = \overline{P}_4 = 20\kappa N$, tayanch reaksiyalari $\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = 40\kappa N$. Fermaning 4,5,6, sterjenlarini *a,b* kesma bilan kesib, chap qismining muvozanatini ko'rib chiqamiz. Chap qismdagi sterjenlarga ta'sir etuvchi kuchlarni o'ng qismdagi kuchlarga almashtiramiz. 6-sterjendagi $\overline{S}_b$ zo'riqishini aniqlash uchun, 4 va 5 sterjenlar kesishuvchi *C* markazga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. Shuningdek $AD = DC = a$ va $BC \perp BE$ ekanligini e'tirof etamiz.

$$\sum m_C\left(\overline{F}_K\right) = -N_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + S_b \cdot CB = 0$$

Shartda ko'rsatilishicha, $\angle ABC = 90^0$ ва $CB = a\sqrt{2}$ u holda

$$S_b = 30\sqrt{2} = 42{,}3\kappa N$$

4 va 5 sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash uchun 5 va 6 sterjenlar kesishuvchi V nuqtani va A nuqtani moment markazi qilib momentlar tenglamasini tuzish lozim.

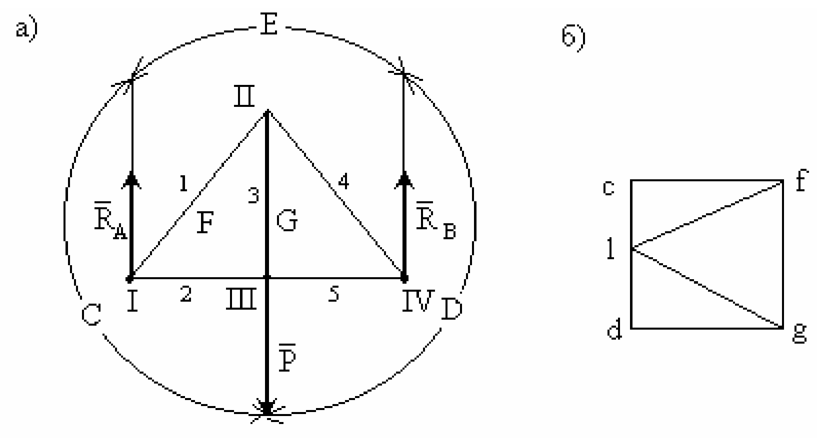
9-sterjendagi zo'riqishni aniqlash uchun fermaning 8,9, va 10 sterjenlarini ds kesma bilan kesib o'ng qismining muvozanatini ko'rib chiqamiz. 8 va 10 sterjenlarga perpendikulyar yo'nalgan o'qqa nisbatan proeksiya tenglamasini tuzamiz.

$$S_9 \cos\alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0$$

Bu tenglamadan S_9 aniqlanadi.

6.4. Maksvell-Kremon diagrammasi.

Tugunlarni kesish usulida har bir sterjenning reaksiya kuchini kuch ko'pburchaklarida ikki martadan tasvirlashga to'g'ri keladi. Bu kamchilik D.K.Maksvell (1831-1879) va L.Kremon (1831-1879) diagrammasida bartaraf qilinadi. Bu diagrammani quyidagicha yasaymiz (44-rasm,a).



44 – rasm.

Tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlarni ferma konturining tashqarisida tasvirlaymiz va bu kuchlar bilan chegaralangan ichki sohalarini S,D,E, ferma sterjenlari bilan chegaralangan sohalarni F, G bilan belgilaymiz. Kuch ko'pburchagini ko'rishda fermani yoki tugunni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tish qoidasiga amal qilamiz. Bunday aylanib o'tishda kuchning boshi va uchini kuch chegaralab turgan sohalarda mos kichik harflar bilan belgilaymiz. Masalan, $\bar{P}$ kuchni

$\overline{cd}, \overline{R}_B$ ni $\overline{de}, \overline{R}_A$ ni $\overline{ec}$; III tugunga qo'yilgan kuchlarni $\overline{cd}, \overline{dg}, \overline{gf}, \overline{fc}$ bilan belgilaymiz.

Dastlab tashqi kuchlar ko'pburchagini quramiz. Ko'riladigan kuch ko'pburchaklarida kuchlarning uchiga yo'nalish qo'ymasak ham bo'ladi, chunki sohalarni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tish qoidasi kuchning boshi va uchini bir qiymatli aniqlaydi. Tashqi kuchlarni ularni yo'nalishiga mos ravishda ma'lum masshtabda fermani soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tishda uchraydigan tartibda qo'ya boramiz va **cdec** ni olamiz; tashqi kuchlar parallel bo'lgani uchun kuchlar ko'pburchagi bir chiziqda yotadi (44-rasm,б). Bu kuchlar ta'sirida ferma muvozanatda bo'lgani uchun mazkur ko'pburchak yopiq bo'ladi.

Endi tugunni kesish usulidan foydalanamiz.1 tugunni ma'lum kuch dan boshlab soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tamiz, $\overline{ec}$ kuch shaklida tasvirlangan, shu sababli kuch ko'pburchagida 1 tugunga ta'sir etuvchi $\overline{cf}$ va $\overline{fe}$ kuchlarni qurish kifoya. Buning uchun e nuqtadan 1 sterjenga va C nuqtadan 2 sterjenga parallel chiziqlar o'tkazamiz; bu chiziqlarning kesishgan nuqtasi f nuqtani ifodalaydi. $\overline{cf}$ kuch 1 tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgan, shu sababli 2 sterjen cho'ziladi; $\overline{fe}$ kuch I tugun tomon yo'nalgan shu sababli I sterjen siqiladi.

II tugunni EFGE tartibda soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tamiz. f nuqtada 3 sterjenga parallel, e nuqtada 4 sterjenga parallel chiziqlar o'tkazamiz: ularning kesishgan nuqtasi g nuqtani ifodalaydi; $\overline{fg}$ kuch II tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgani uchun 3 sterjen cho'ziladi; $\overline{ge}$ kuch II tugunga yo'nalgani tufayli 4 sterjen siqiladi.

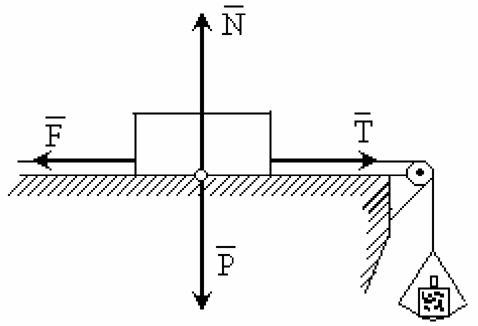
III tugunni CDGFC tartibda aylanib o'tib, 5 sterjenga mos $\overline{dg}$ reaksiya kuchini aniqlaymiz. Buning uchun d va g nuqtalarni birlashtiramiz. $\overline{dg}$ kuch III tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgani uchun 5 sterjen cho'ziladi. Shu tartibda yasalgan (44-rasm,б) dagi figura Maksvell–Kremon diagrammasi deyiladi. Kuch uchun qabul qilingan masshtabdan foydalanib, sterjenlarning reaksiya kuchlarini topish mumkin.

Ishqalanish. Sirpanishdagi ishqalanish.

Bog'lanishdagi jismlarning biri ikkinchisiga nisbatan siljiganda ularning bir-biriga tegib turgan sirtlarida hosil bo'ladigan qarshilik kuchi ishqalanish kuchi deyiladi. Ishqalanish asosan ikki turga bo'linadi:
1) sirpanish ishqalanish; 2) dumalash ishqalanish.

Bir jismning ikkinchi jism ustida sirpanishi natijasida hosil bo'ladigan ishqalanish sirpanishdagi ishqalanish deyiladi. Og'irligi P ga teng jism gorizontal sirtga qo'yilgan bo'lsin (45-rasm)

Jismni blok orqali o'tkazilgan ipga bog'laymiz. Agar sirt ideal silliq bo'lsa, jism og'irlik kuchi $\overline{P}$ va sirtning normal reaksiya kuchi $\overline{N}$ ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Bu kuchlar vertikal kuchlardan iborat bo'lgani uchun ipning ikkinchi uchiga juda kichik tosh qo'ysak, jism harakatlanishi kerak. Lekin ikkinchi uchiga ma'lum miqdorda tosh qo'ymaguncha jism harakatlanmaydi, chunki stol yuzasi va jismning stolga tegib turgan yuzasi absolyut silliq bo'lmagani uchun ipning tortilish kuchi $\overline{T}$ ga miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgani $\overline{F}$ ishqalanish kuchi hosil bo'ladi. ⊥kuchning qiymati orta borib, ma'lum miqdorga yetganda jism siljish oldida turadi, bu holda ishqalanish kuchi $\overline{F} = \overline{F}_{\max}$ maksimal qiymatga erishadi.



45-rasm

Bu kuchga maksimal statik ishqalanish kuchi deyiladi. Shundan so'ng pallaga oz miqdorda tosh qo'ysak ham, jism sirpana boshlaydi. Jism harakatlanganda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchiga dinamik ishqalanish kuchi deyiladi. Statik ishqalanish kuchi $\overline{F}$ noldan to maksimal ishqalanish kuchigacha o'zgaradi:

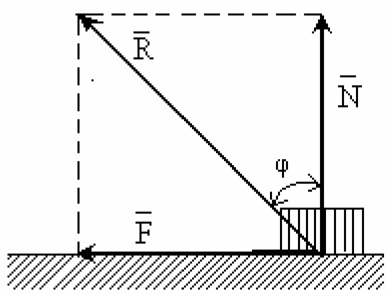
$$O \le \overline{F} \le \overline{F}_{\max} \qquad (31)$$

Tajribalardan ko'rinadiki, g'adir-budir sirtning to'liq reaksiya kuchi normal reaksiya kuchi va ishqalanish kuchlariga qurilgan to'g'ri to'rtburchakning diagonaliga teng (45-rasm).

$\overline{R} = \overline{F} + \overline{N}$

Tajribalarning ko'rsatilishicha, sirpanishdagi ishqalanish Amonton-Kulon qonuni bilan ifodalanadi:

Tinch holatdagi maksimal ishqalanish kuchi jismning tayanch tekisligiga ko'rsatadigan normal bosimiga proporsionaldir.



46-rasm

$$\overline{F}_{max} = f\overline{N} \qquad (32)$$

bu yerda: f-sirpanish ishqalanish koeffisienti.

Agar biror sirtga tayanib turgan jism sirpanish oldida bo'lsa, ishqalanish kuchi maksimal qiymatga erishadi.

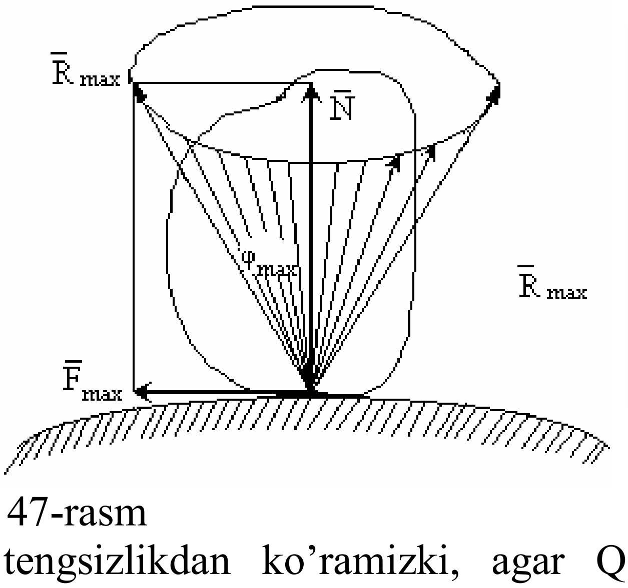
$$\overline{R}_{max} = \overline{N} + \overline{F}_{max} \qquad (33)$$

Maksimal to'liq reaksiya kuchi $\overline{R}_{max}$ ning normal reaksiya kuchi $\overline{N}$ bilan tashkil qilgan burchagi φ_{max} ishqalanish burchagi deyiladi (46-rasm).

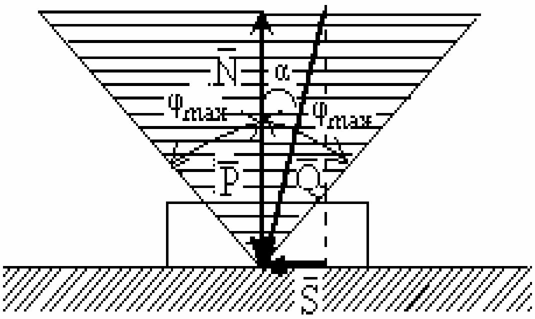
$$tg\varphi_{max} = \frac{F_{max}}{N} = f \qquad (34)$$

Jismni siljituvchi aktiv kuchlar turli yo'nalishda ta'sir etishi mumkin. Turli yo'nalishdagi siljituvchi kuchlarga mos bo'lgan barcha $\overline{R}_{max}$ to'liq reaksiya kuchlarning geometrik o'rni konus sirtidan iborat bo'ladi. Bu konus ishqalanish konusi deb ataladi (47-rasm). Gorizontal tekislikda tinch holda yotuvchi jismga tekislikka o'tkazilgan normal bilan α burchak tashkil etuvchi $\overline{Q}$ kuch ta'sir etsin (48-rasm). $\overline{Q}$ kuchni normal reaksiya kuchi bilan muvozanatlashuvchi P va jismni siljitishga intiluvchi $S = Q\sin\alpha$ ikkita tashkil etuvchiga ajratamiz. Jismni siljitish uchun S kuchning moduli, maksimal ishqalanish kuchi $F_{max} = fN = fQ\cos\alpha$ dan katta bo'lishi kerak:

$$Q\sin\alpha \geq fQ\cos\alpha \quad \text{yoki} \quad \mathrm{f} = tg\varphi \leq \mathrm{tg}\alpha \quad \text{bundan} \quad \alpha \geq \varphi_{max} \qquad (35)$$



47-rasm

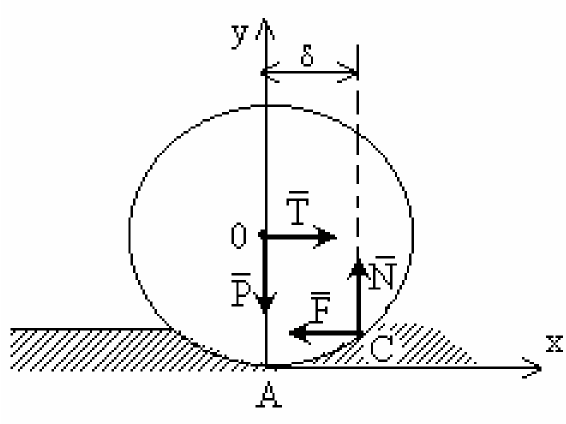


48 – rasm.

(35) tengsizlikdan ko'ramizki, agar Q kuch tekislikka o'tkazilgan normalga φ_{max} burchakdan kichik burchak ostida ta'sir etsa, u holda bu kuch har qancha katta bo'lsa ham jism tinch holatda qoladi.

Dumalashdagi ishqalanish.

Og'irligi P va radiusi R ga teng silindr gorizantal tekislikda yotgan bo'lsin (49-rasm). Silindrning markaziga $\overline{T}$ kuch qo'yilgan. Silindr va tekislikning deformatsiyalanishi natijasida ishqalanish bitta nuqtada hosil bo'lmay, ikki jismning bir-biriga tegib turgan ezilgan yuzasida hosil bo'ladi va $\overline{N}$ normal reaksiya kuchi hamda $\overline{F}$ ishqalanish kuchi O nuqtadan o'tuvchi vertikaldan δ masofada yotuvchi C nuqtaga qo'yiladi (49-rasm).



49-rasm

Silindrning muvozanat tenglamalarini tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining asosiy shartiga ko'ra quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$\sum F_{KX} = 0; \qquad T - F = 0$

$\sum F_{Ky} = 0; \qquad N - P = 0$

$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0; \qquad N \cdot \delta - T \cdot R = 0$

bundan

$$F=T, \qquad N=P, \qquad N\delta=T \cdot R \qquad (36)$$

munosabatlarni olamiz. Shunday qilib, silindrning dumalashi oldidan unga momentlari teng, aylanish yo'nalishlari qarama – qarshi bo'lgan ($\overline{T},\overline{F}$) va ($\overline{P},\overline{N}$) juftlar ta'sir qiladi. Silindrning dumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi ($\overline{P},\overline{N}$) juftga dumalashdagi ishqalanish jufti, bu juftning momentiga dumalashdagi ishqalanish momenti deyiladi. Dumalashdagi ishqalanish momentining maksimal qiymati normal bosimga proporsional bo'ladi:

$$M_{\max} = \delta \cdot N$$

bunda δ - dumalashdagi ishqalanish koeffisenti bo'lib, uzunlik birligida o'lchanadi. (35) ning uchinchisidan

$$T = \frac{\delta}{R} \cdot N \qquad (37)$$

Bu formuladagi $\frac{\delta}{R}$ kattalik ko'pchilik materiallar uchun sirpanish ishqalanish koeffisenti f dan ancha kichik bo'ladi. Shuning uchun bunday jismlarni sirpantirishdan ko'ra dumalatish uchun kam kuch sarflanadi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Ferma deb nimaga aytiladi?
2. Tugun deb nimaga aytiladi?
3. Geometrik o'zgarmas ferma deganda nimani tushunasiz?
4.Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
5. Qachon tugunlarni kesish usulidan foydalaniladi?
6. Ritter usulidan qachon foydalaniladi?
7. Maksvell – Kremon diagrammasidan qachon foydalaniladi?
8. Sterjenlar soni bilan tugunlar soni orasida qanday bog'lanish bor?

7-MA'RUZA
FAZOVIY KUCHLAR SISTEMASI. KUCHNING MARKAZ (NUQTA) GA NISBATAN MOMENTI-VEKTOR. KUCHNING O'QQA NISBATAN MOMENTI. KUCHNING KOORDINATA O'QLARIGA NISBATAN MOMENTLARINING ANALITIK IFODASI.

REJA:

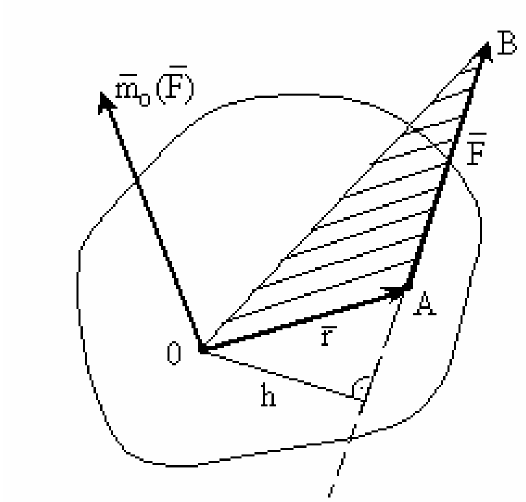
7.1. Kuchning markazga nisbatan momenti-vektor.
7.2. Kuchning o'qqa nisbatan momenti.
7.3. Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi.
7.4. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishi.

Adabiyotlar: 1, 4, 9, 12, 13

Tayanch iboralar:fazoviy kuchlar sistemasi, kuch momenti-vektor, kuchning o'qqa nisbatan momenti, kuchning o'qlarga nisbatan momentlari, Varin'on teoremasi.

7.1 Kuchning markazga nisbatan momenti-vektor.

$\overline{F}$ kuchning O markaz atrofida aylantirish effekti; 1) moment moduliga, ya'ni kuchning yelkaga bo'lgan ko'paytma F·h ning kattaligiga, 2) O markaz va $\overline{F}$ kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan OAB aylanish tekisligiga; 3) shu tekislikda aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi. Jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar va O markaz bitta tekislikda yotgan bo'lsa, har gal OAB aylanish tekisligini aniqlashga ehtiyoj qolmaydi. Bu holda kuch momenti $\pm F \cdot h$ ga teng skalyar kattalik bilan aniqlanadi. Ko'paytma oldidagi $\pm$ ishora jismning markaz atrofida aylanish yo'nalishini ko'rsatadi. Jismga fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, har bir kuchning aylantirish tekisligini alohida ko'rsatishga to'g'ri keladi. Aylanish tekisligining fazodagi holatini va aylanish yo'nalishini mazkur tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar vektor bilan aniqlash mumkin. Agar bu vektorning modulini kuchning momenti moduliga teng va uning yo'nalishini kuchning aylantirish yo'nalishini ifodalaydigan tarzda tanlab olsak, bunday vektor yordamida kuchning O nuqtaga nisbatan momentini xarakterlovchi har uchala faktorni ham aniqlash mumkin.



50-rasm

Shu sababli $\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan moment–vektorini O markazga qo'yilgan va bu markaz hamda kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektor bilan tasvirlaymiz. $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektorning yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan qaraganimizda kuch jismni O markaz atrofida soat mili harakati yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsin. Shunday qilib $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektor bir vaqtning o'zida, moment modulini, turli kuchlar uchun OAB aylantirish tekisligini va shu tekislikda aylanish yo'nalishini xarakterlaydi. $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektor moment markaziga qo'yiladi.

$\overline{OA}$ va $\overline{F}$ vektorlarning $\overline{OA} \times \overline{F}$ vektorial ko'paytmasini ko'rib chiqamiz (50-rasm). Ta'rifga ko'ra*

---

* $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning $\overline{a} \times \overline{b}$ vektorial ko'paytmasi deb, $\overline{c}$ vektorga aytiladi, uning moduli $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar asosida qurilgan parallelogrammning yuzasiga teng va shu yuzaga perpendikulyar, uning uchidan qaralganda $\overline{a}$ vektorni $\overline{b}$ vektor ustiga eng qisqa burchakka burib tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda burish lozim.

$$\left|\overline{O}A \cdot F\right| = 2S_{\Delta OAB};$$

$\overline{m}_0(\overline{F})$ vektorning moduli ham $2S_{\Delta OAB}$ ga teng.
Shunga ko'ra

$$\left|\overline{O}A \cdot \overline{F}\right| = 2S_{\Delta OAB} = \left|\overline{m}_0(\overline{F})\right|$$

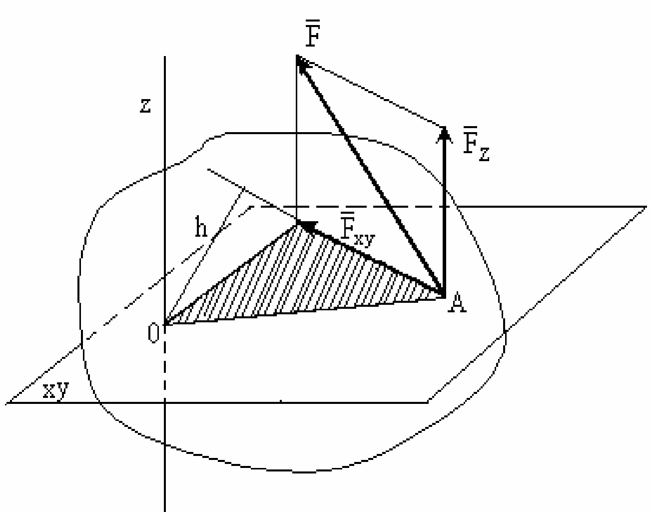
OAB tekislikka perpendikulyar $\overline{O}A \times \overline{F}$ vektor shunday yo'nalganki uning uchidan qaralganda $\overline{OA}$ vektorni $\overline{F}$ vektor ustiga (ular bir nuqtada qo'yilganda) tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Demak, $\overline{O}A \times \overline{F}$ va $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektorlar miqdorlari teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab bir tomonga yo'nalgan ekan. Shu bilan birga ularning o'lchov birliklari ham bir xil ekanligi ko'rinib turibdi. Bundan

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{OA} \times \overline{F} \text{ yoki } \overline{m}_0(F) = \overline{r} \times \overline{F} \qquad (38)$$

bu yerda $\overline{r} = \overline{OA}$ A nuqtaning O markazga nisbatan radius - vektori.

Demak, kuchning markazga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, kuch qo'yilgan nuqtaning moment markaziga nisbatan radius vektori bilan shu kuchning vektorial ko'paytmasiga teng.

7.2 Kuchning o'qqa nisbatan momenti.



51-rasm

Fazodagi kuchlar sistemasining jismga ta'sirini o'rganishda kuchning markazga nisbatan momenti bilan birga kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti, kuch ta'sirida jismni berilgan o'q atrofida aylantirish effektini harakterlaydi. Vertikal yo'nalgan z o'q atrofida aylana oladigan qattiq jism berilgan bo'lsin (51-rasm). Qattiq jismni A nuqtasiga $\overline{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin. A nuqta orqali o'tuvchi z o'qqa perpendikulyar xy tekisligini o'tkazamiz va $\overline{F}$ kuchni z o'qqa parallel bo'lgan $\overline{F}_z$ va xu tekisligida yotuvchi $\overline{F}_{xy}$ ($\overline{F}_{xy}$ bir vaqtning o'zida $\overline{F}$ kuchning $x^t\, y$ tekisligidagi proeksiyasi hisoblanadi) tashkil etuvchilarga ajratamiz.

z o'qqa parallel yo'nalgan $\overline{F}_z$ tashkil etuvchi, jismni o'q atrofida aylantira olmaydi (u jismni z o'qi bo'ylab siljitishi mumkin). $\overline{F}$ kuchning z o'q atrofida aylantirish effekti shu o'q atrofida $\overline{F}_{xy}$ tashkil etuvchining aylantirish effekti bilan bir xil bo'ladi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb uning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proeksiyasining o'q bilan mazkur tekislik kesishgan nuqtasiga nisbatan momentiga aytiladi. $\overline{F}$ kuchning z o'qqa nisbatan momenti $m_z(\overline{F})$ bilan belgilanadi; ta'rifga ko'ra

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F}_{xy}) \qquad (39)$$

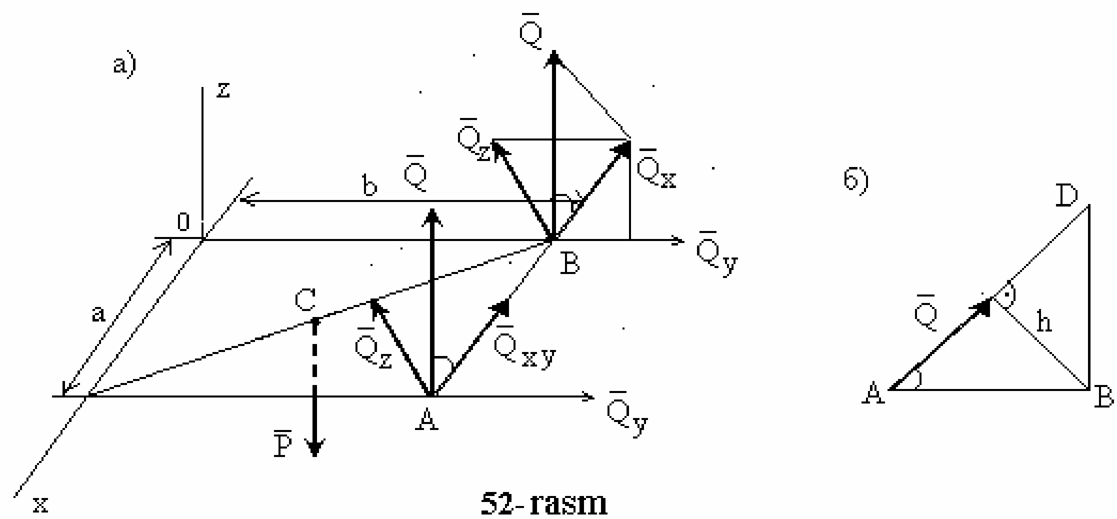
yoki $$m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (40)$$

Kuchning o'qqa nisbatan momenti skalyar kattalik bo'lib, o'qning musbat uchidan qaraganda kuchning o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proeksiyasi jismni o'q atrofida soat mili harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuch momenti musbat, aks holda manfiy ishora bilan olinadi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti quyidagi xususiy hollarga ega.

1) Agar kuch o'qqa parallel yo'nalgan bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng ($\overline{F}_{xy}$=0 bo'lgani uchun)

2) Kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi. (h=0 bo'lgani uchun).



52-rasm

3) Kuch o'qqa perpendikulyar yo'nalgan bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti kuch moduli $\overline{F}$ ni kuchdan o'qqacha bo'lgan masofaga bo'lgan ko'paytmaga teng.

11-masala. (52-rasm a) da tasvirlangan gorizantal plitaga ta‘sir etuvchi $\overline{P}$ va $\overline{Q}$ kuchlarning *x, y* va *z* o’qlarga nisbatan momentlarini aniqlang?

Yechish. 1. Plitaning $\overline{P}$ og’irlik kuchi vertikal pastga yo’nalgan. *y z* o’qqa parallel, *x* va *y* o’qlarga perpendikulyar. Bu o’qlardan $\overline{P}$ kuchgacha bo’lgan masofa tegishlicha $\frac{b}{2}$ va $\frac{a}{2}$. U holda quyidagini yozamiz.

$$m_X\left(\overline{P}\right) = -P\frac{b}{2}; \qquad m_y\left[\overline{P}\right] = P\frac{a}{2}; \qquad m_\chi\left(\overline{P}\right) = 0;$$

2. Q kuchning yz tekisligidagi proeksiyasi $Q_{yz} = Q\sin\alpha$, Q_{yz} ning *x* o’qiga nisbatan momenti $m_x\left(\overline{Q}\right) = bQ\sin\alpha$ $\overline{Q}$ kuch ABD tekisligida yotganligi uchun u, *y* o’qiga perpendikulyar bo’lib u o’qni B nuqtada kesib o’tadi. U holda Q_{xz}=Q, Yelka h=a sinα (52-rasm б ga ko’ra). Demak. $m_y\left(\overline{Q}\right) = -Qa\sin\alpha$ $\overline{Q}$ kuchning *xy* tekislikdagi proeksiyasi Q_{xy}; $Q_{xy} = Q\cos\alpha$. z o’qqa nisbatan yelkasi b ga teng

$$m_Z\left(\overline{Q}\right) = bQ\cos\alpha$$

7.3 Kuchning o’qlarga nisbatan momentlari uchun Varin’on teoremasi.

Agar 3.4 dagi (15) vektor ifodaning har ikkala tomonini O nuqtadan o’tuvchi *z* o’qqa proeksiyalasak quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$m_Z\left(\overline{R}\right) = \sum m_Z\left(\overline{F}_K\right) \qquad (41)$$

Demak, teng ta‘sir etuvchining momenti haqidagi Varin’on teoremasi istalgan o’qqa nisbatan momentlar uchun o’rinlidir. Kuchning koordinata o’qlariga nisbatan momentlarini aniqlashda Varin’on teoremasi juda qulaydir. Buning uchun kuchni koordinata o’qlariga nisbatan tashkil etuvchilarga ajratish yoki shu o’qlarga proeksiyalash lozim.

7.4 Kuchning koordinatalar o’qlarga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishi.

Koordinatalari *x, y, z* bo’lgan nuqtaga qo’yilgan $\overline{F}$ kuchni $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ tashkil etuvchilarga ajratamiz (53- rasm). U holda Varin’on teoremasiga ko’ra quyidagini yozamiz:

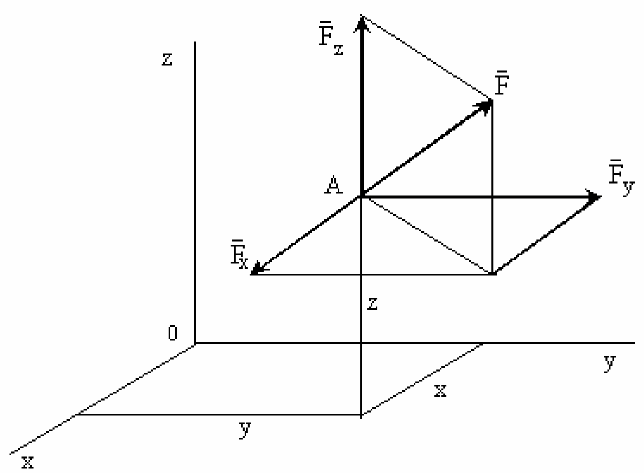
$$m_x\left(\overline{F}\right) = m_x\left(\overline{F}_x\right) + m_x\left(\overline{F}_y\right) + m_x\left(\overline{F}_z\right)$$

$\overline{F}_X$ tashkil etuvchi x o'qiga parallel $\overline{F}_y$ va $\overline{F}_z$ tashkil etuvchilar esa ularga perpendikulyar bo'lgani uchun

$m_X(F_X) = 0;\quad m_X(\overline{F}_y) = -z \cdot F_y;\quad m_X(\overline{F}_Z) = yF_Z$

natijada quyidagini hosil qilamiz

$$m_X(\overline{F}) = yF_Z - zF_y$$



53 - rasm

huddi shu usulda $\overline{F}$ kuchni qolgan *y* va *z* o'qlarga nisbatan momentlari aniqlanadi.

Demak

$$\begin{aligned} m_X(\overline{F}) &= yF_Z - zF_y \\ m_y(\overline{F}) &= zF_X - xF_Z \qquad (42) \\ m_Z(\overline{F}) &= xF_y - yF_X \end{aligned}$$

(42) formula kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasidir.

(42) ning chap tomoni $\overline{m}_0 = (\overline{F})$ vektorning koordinata o'qlardagi proeksiyalari bo'lgani uchun, shu tengliklar yordamida $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektorning modulini aniqlash mumkin.

$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = \sqrt{[m_X(\overline{F})]^2 + [m_y(\overline{F})]^2 + [m_Z(\overline{F})]^2} \qquad (43)$$

Nazorat savollari:

1. Fazoviy kuchlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning markazga nisbatan momenti qanday kattalik?
3. Kuchning markazga nisbatan moment-vektori nimaga teng?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qanday hossalarga ega?
6. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday aniqlanadi?
7. Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi qanday ifodalanadi?
8. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qanday hollarda nolga teng bo'ladi?
9. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishini keltirib chiqaring.

8-MA'RUZA
KUCHNING O`QQA NISBATAN MOMENTI BILAN SHU O`QDAGI NUQTAGA NISBATAN MOMENTI ORASIDAGI BOG`LANISH. JUFT KUCH MOMENTI-VEKTOR. FA'ZODAGI JUFTLARNI QO`SHISH. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASINI BERILGAN MARKAZGA KELTIRISH. FAZOVIY KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANAT SHARTLARI.

REJA:

8.1 Kuchning o`qqa nisbatan momenti bilan shu o`qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog`lanish.
8.2 Juft kuch momenti-vektor.
8.3. Fa'zodagi juftlarni qo`shish.
8.4 Fa'zodagi kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish.
8.5 Fa'zoviy kuchlar sistemasinining muvozanat shartlari.

Adabiyotlar: 1, 4, 9, 12, 13.

Tayanch iboralar: juft kuch, erkin vektor, fa'zodagi juftlarni qo`shish haqida teorema, keltirish markazi, kuchlar sistemasi bosh vektori, kuchlar sistemasining bosh momenti, vektorli invariant, skalyar invariant.

8.1. Kuchning o`qqa nisbatan momenti bilan shu o`qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog`lanish.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan kuchning shu nuqtadan o'tuvchi o`qqa nisbatan momenti orasidagi bog`lanishni keltirib chiqaramiz (54-rasm).

3.3 va 7.2 da ko`rsatilganga ko`ra

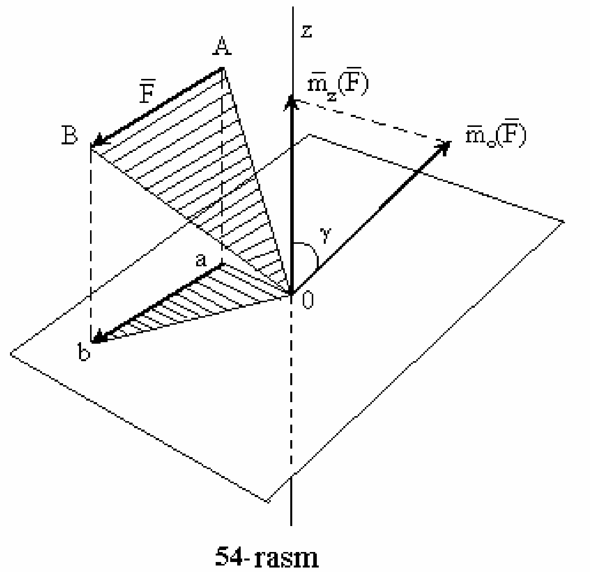
$$M_0\left(\overline{F}\right) = 2S_{\Delta OAB}$$

$$m_Z\left(\overline{F}\right) = 2S_{\Delta Oa\text{в}}$$

Shunga ko'ra:

$$S_{\Delta Oa\text{в}} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos\gamma$$

Tenglikning har ikkala tomonini 2 ga ko`paytiramiz.



54-rasm

$2S_{\Delta Oa\text{в}} = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos\gamma$

bu yerda

$2S_{\Delta Oa\text{в}} = m_z(F), \qquad 2S_{\Delta OAB} = m_0(\overline{F})$

bularni e'tiborga olsak tenglik quyidagi ko`rinishini oladi.

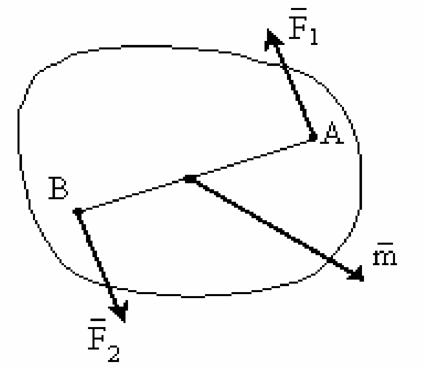
$m_z(\overline{F}) = [\overline{m}_0(\overline{F})]\cos\gamma$

yoki '

$$m_z(\overline{F}) = [\overline{m}_0(\overline{F})]z \qquad (44)$$

Kuchning o`qqa nisbatan momenti uning shu o`qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan moment vektorining shu o`qdagi proeksiyasiga teng.

8.2. Juft kuch momenti – vektor.



55-rasm

Juft kuchning jismga ko`rsatadigan ta'siri:
1) juft momenti moduli; 2) juftning ta'sir tekisligi, tekislikdagi aylanish yo'nalishi bilan harakterlanadi. Bir tekislikda yotmagan juftlarni ko'rib chiqilayotganida har bir juft uchun yuqoridagi uchta elementning har–birini ko'rsatish lozim. Qayd etilgan uchta faktorni aniqlashda juft momenti u yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan vektor bilan belgilab olinadi. U $\overline{m}$ yoki $\overline{M}$ harfi bilan belgilanadi. Juft momenti vektorining moduli (belgilangan masshtabda) juft momenti moduliga, ya'ni juftni tashkil etuvchilaridan birini juft yelkasi uzunligiga ko`paytmasiga teng hamda juftning ta'sir tekisligiga perpendikulyar yo`nalgan bo`lib, uning uchidan qaraganda, juft jismni soat mili aylanishiga teskari yo`nalishda aylantirsin (55-rasm).

Juft kuch moment vektori kuchning markazga nisbatan moment vektoridan farq qilib, uni jismni istalgan nuqtasiga qo`yish mumkin (bunday vektorga erkin vektor deyiladi).

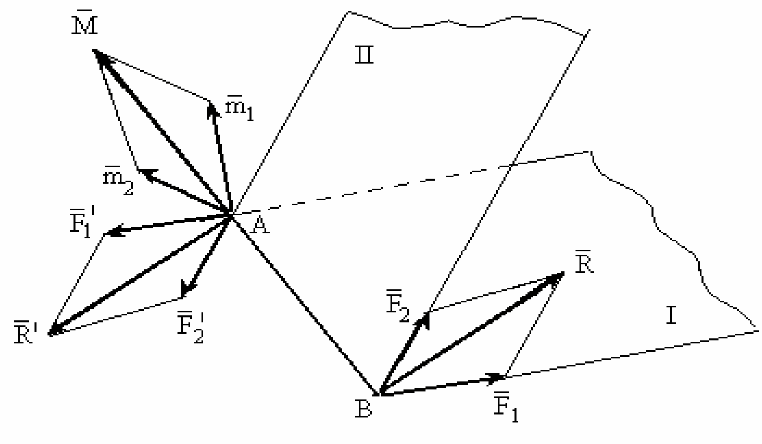
Haqiqatdan ham vektor berilgan bo`lsa juftni o`zini aniqlash mumkin. Vektorga perpendikulyar tekislik o`tkaziladi, bu tekislik juftning ta'sir tekisligi bo`lib hisoblanadi, vektorning uzunligi juftning moduliga teng, vektorning yo`nalishiga qarab juftni aylanish yo`nalishi aniqlanadi.

Bizga ma'lumki juft momentining moduli juftni kuchlaridan birini ikkinchi kuch qo`yilgan nuqtasiga nisbatan momentiga teng (55-rasm). Demak,

$$m = m_A(\overline{F}_2) = m_B(\overline{F}_1)$$

8.3. Fazodagi juftlarni qo`shish.

Teorema. Absolyut qattiq jismga qo`yilgan juftlar sistemasi bitta juftga



56-rasm

ekvivalent bo`lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarning geometrik yig`indisiga teng.

Isbot. Avvalo I va II tekisliklarda yotgan momentlari $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ bo`lgan juftlarni qo`shamiz. Ikkala tekislik kesishgan AB=d kesmani olib, berilgan juftlarni o`z tekisligida umumiy d yelkaga keltiramiz (56-rasm).
4.2 da isbotlangan juftlarning xossalariga asosan A va B nuqtalarga momenti $\overline{m}_1$ ga teng bo`lgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^1)$ va momenti $\overline{m}_2$ bo`lgan $(\overline{F}_2, \overline{F}_1^2)$ juftlarni keltirib qo`yamiz. Bunda $m_1 = F_1 d_1$, $m_2 = F_2 d$ shart bajarilsin. A va B nuqtalarda qo`yilgan kuchlarni qo`shib haqiqatdan ham $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^1)$ va $(\overline{F}_2, \overline{F}_2^1)$ juftlar bitta $(\overline{R}, \overline{R}^1)$ juftga ekvivalent ekanligiga ishonch hosil qilamiz Bu juftning momenti $\overline{M}$ ni aniqlaymiz.

$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2;\ \overline{R}^1 = \overline{F}_1^1 + \overline{F}_2^1$

Bu juftning moment vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{R} = \overline{AB} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2) = (\overline{AB} \times \overline{F}_1) + (\overline{AB} \times \overline{F}_2)$$

bu yerda $\overline{AB} \times \overline{F}_1 = \overline{m}_1, \quad \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{m}_2$

Shunday qilib,

$$\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 \qquad (45)$$

$\overline{M}$ vektor $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ vektorlar asosida qurilgan parallelogramning dioganaliga teng. Teorema ikkita juft uchun isbotlandi.

Agar qattiq jismga momentlari $\overline{m}_1, \overline{m}_2 ..., \overline{m}_n$ bo`lgan n ta juft ta'sir etayotgan bo`lsa, (46) formulani qo`llab ularni birin-ketin qo`shib chiqilsa, bu juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent ekanligi aniqlanadi. Bu juftning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig`indisiga teng.

$$\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + ... + \overline{m}_n = \sum \overline{m}_K \quad (46)$$

$\overline{M}$ vektor juftlar momentlari vektorlari asosida qurilgan ko`pburchakning yopuvchi tomoni bo`lib hisoblanadi.

Agar qo`shiluvchi vektorlar bir tekislikda yotmagan bo`lsa, hisoblashni analitik usulda olib borish kerak. Koordinata o`qlarini o`tkazib yig`indi vektorning o`qdagi proeksiyasi haqidagi teoremaga asosan (46) dan quyidagini yozamiz.

$$M_X = \sum m_{KX}; \; M_y = \sum m_{KY}; \; M_Z = \sum m_{KZ} \quad (47)$$

(47) ga asosan $\overline{M}$ vektorni ko`rish mumkin, uning moduli

$$M = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}$$

Yuqorida olingan natijalarga asoslanib, qattiq jismga ta‘sir etuvchi juftlar sistemasining muvozanat shartlari osongina topiladi. Juftlar sistemasi muvozanatda bo`lishi uchun $\overline{M}$=0 yoki

$$\sum \overline{m}_к = 0$$

shart bajarilishi kerak, qattiq jismga ta‘sir etuvchi juftlar momenti vektorlaridan qurilgan ko`pburchak yopiq bo`lishi kerak. Endi muvozanatning analitk shartini aniqlaymiz. M=0 bo`lishi uchun $M_X$ =0, $M_Y$ =0, $M_Z$ =0 bo`lishi lozim, u holda (47) ga ko`ra quyidagini yozamiz.

$$\sum m_{kx} = 0; \quad \sum m_{ky} = 0, \quad \sum m_{kz} = 0; \qquad (48)$$

8.4. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlarni berilgan markazga keltirish.

Qattiq jismga ixtiyoriy yo`nalgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ fazoviy kuchlar sistemasi ta‘sir etayotgan bo`lsin (57-rasm). Ixtiyoriy O nuqta tanlab, uni keltirish markazi deb ataymiz.

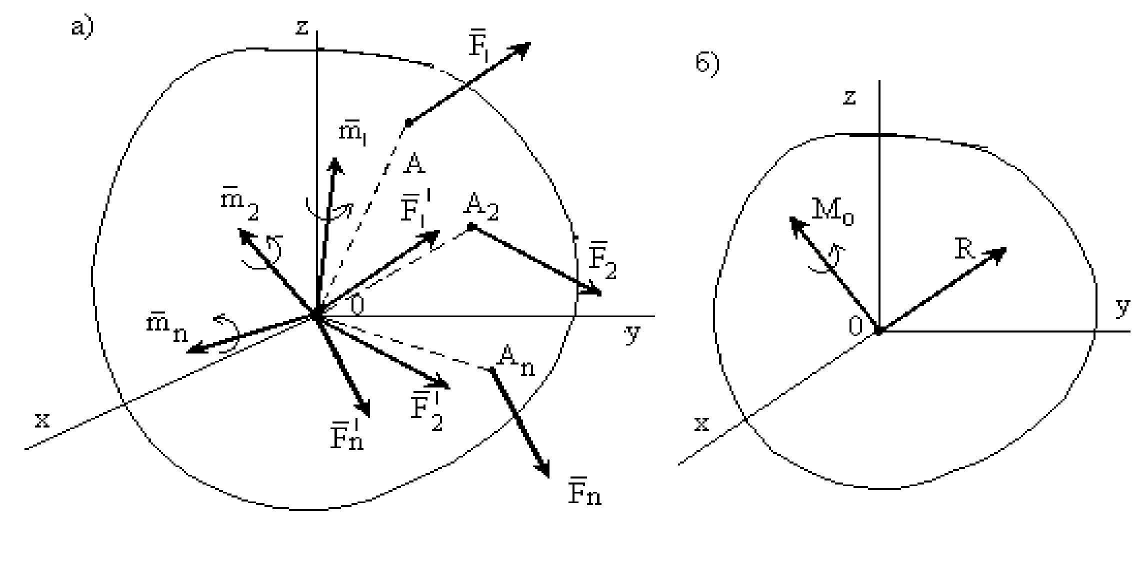
Puanso lemmasini qo’llab berilgan kuchlarni shu O markazga keltiramiz. Bunda keltirilayotgan kuchlarga mos juftlarni qo`shib olamiz. Natijada qattiq jismga

$$\overline{F}_1^1 = \overline{F}_1, \overline{F}_2^1 = \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n^1 = \overline{F}_n \qquad (49)$$

Kuchlar sistemasi va momentlari

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1), \; \overline{m}_2 = \overline{m}_0(\overline{F}_2), ..., \; \overline{m}_n = \overline{m}_0(\overline{F}_n) \qquad (50)$$

bo`lgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{11}), (\overline{F}_2, \overline{F}_2^{11}), ..., (\overline{F}_n \overline{F}_n^{11})$ qo`shilgan juftlar sistemasi ta'sir qila boshlaydi, aniqlik uchun rasmda n=3 ta kuch ko`rsatilgan.



57 - rasm

O nuqtaga qo`yilgan $\overline{F}_1^1 = \overline{F}_1, \overline{F}_2^1, ....., \overline{F}_n^1$ kuchlarni geometrik qo`shib ularning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}^1$ kuchni hosil qilamiz.

$\overline{R}^1 = \sum \overline{F}_K^1$ yoki $\overline{R} = \sum \overline{F}_K$ (51)

Kuchlarni O nuqtaga keltirishda qo`shib olingan juftlar moment vektorlarini geometrik usulda qo`shamiz. Natijada juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo`ladi. Bu juftning momenti $\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_K$, yoki

$$\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_K) \qquad (52)$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi kabi, bu yerda ham $\overline{R}$ barcha fazoviy kuchlar sistemasining geometrik yigindisi bo`lib sistemaning bosh vektori, $\overline{M}_0$ kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan momentlarning geometrik yigindisi bo`lib, kuchlar sistemasining shu O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi.

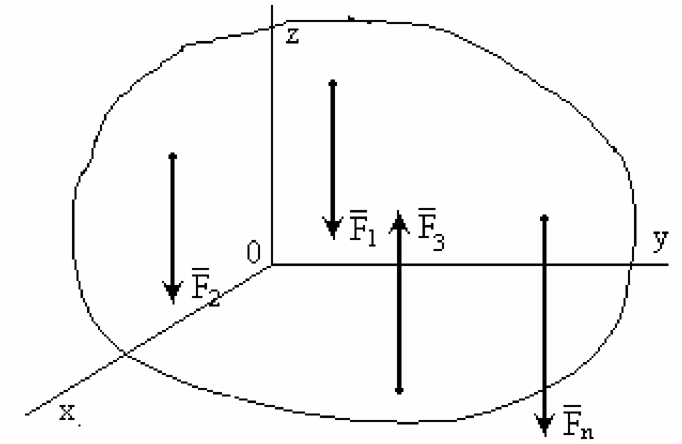
Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbotladik; fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo`yilgan bosh vektor $\overline{R}$ ga teng bitta kuch bilan momenti $\overline{M}_0$ ga teng bitta juftga ekvivalent bo`ladi (57-rasm,б). Ko`pincha $\overline{R}$ va $\overline{M}_0$ vektorlar analitik usulda ya'ni ularning o`qlardagi proeksiyalari orqali aniqlanadi, ya'ni

$$R_x = \sum F_{\kappa x}, \quad R_y = \sum F_{\kappa y}, \; R_z = \sum F_{\kappa я}; \qquad (53)$$

$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_\kappa), \quad M_y = \sum m_y(\overline{F}_\kappa), \quad M_z = \sum m_z(\overline{F}_\kappa); \qquad (54)$$

8.5. Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.

Fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining zaruriy va yetarli sharti $\overline{R} = 0, \overline{M}_0 = 0$ tengliklar bilan ifodalanadi (8.4 ga qarang). $\overline{R}$ va $\overline{M}_0$ vektorlar faqat va faqat $R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$ va $M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$ shart bajarilganda nolga teng bo`ladi.



58 -rasm

O`z navbatida

$$R_X = \sum F_{KX}; \quad R_y = \sum F_{Ky}; \quad R_z = \sum F_{Kz}$$
$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_K), \quad M_y = \sum m_y(\overline{F}_K), \quad M_z = \sum m_z(\overline{F}_K) \qquad (55)$$

U holda quyidagini yozamiz.

$$\sum F_{KX} = 0, \quad \sum F_{KY} = 0, \quad \sum F_{Kz} = 0$$
$$\sum m_x(F_\kappa) = 0, \quad \sum m_y(F_\kappa) = 0, \quad \sum m_z(F_K) = 0 \qquad (56)$$

Bu tenglamalar fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlarini ifodalaydi.

Fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatda bo`lishi uchun, kuchlar sistemasining koordinata o`qlaridagi proektsiyalarining yig`indisi va shu o`qlarga nisbatan momentlarining yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va yetarlidir. (56) tengliklar sistemasi qattiq jismga ta‘sir etuvchi istalgan fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi.

Parallel kuchlar bo`lgan hol. Agar jismga ta‘sir etuvchi kuchlar parallel kuchlardan iborat bo`lsa, koordinata sistemasini shunday tanlash lozimki, o`qlardan biri masalan, z o’qi kuchlarga parallel yo`nalgan bo`lsin (58-rasm). Bunday holda kuchlarning x, va u

o`qlardagi proektsiyalari va z o'qqa nisbatan momentlari nolga teng bo`ladi (56) tenglamalar sistemasi quyidagi ko`rinishni oladi.

$$\sum F_{\kappa z} = 0; \quad \sum m_x\left(\overline{F}_\kappa\right) = 0, \;\; \sum m_y\left(\overline{F}_\kappa\right) = 0 \qquad (57)$$

Qolgan tenglamalar ayniyatga aylanadi.

Shunday qilib, fazoviy parallel kuchlar sistemasi muvozanatda bo`lishi uchun barcha kuchlarning parallel o`qdagi proektsiyalarining yigindisi va qolgan ikki o`qqa nisbatan momentlarining yigindisi nolga teng bo`lishi zarur va yetarlidir.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kuchning o`qqa nisbatan momenti bilan shu o`qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog`lanish qanday ifodalanadi?
2. Qachon juft kuch momenti- vektor deb olinadi?
3. Fazodagi juftlarni qo`shishda qanday teoremadan foydalanamiz?
4. Qattiq jismga ta'sir etuvchi fazodagi juftlar sistemasi muvozanatining analitik sharti qanday ifodalanadi?
5. Fazodagi ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish natijasida qanday natijaga erishamiz?
6. Bosh vektor deb nimaga aytiladi?
7. Bosh moment deb nimaga aytiladi?
8. Fazodagi juftlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti qanday formulalar bilan aniqlanadi?

9-MA‘RUZA.
FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASINING INVARIANTLARI. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASINI DINAMIK VINTGA KELTIRISH. MARKAZIY O’Q TENGLAMASI.

REJA:

9.1. Fazodagi kuchlar sistemasining invariantlari.
9.2. Fazodagi kuchlar sistemasining dinamik vintga keltirish.
9.3. Markaziy o’q tenglamasi.

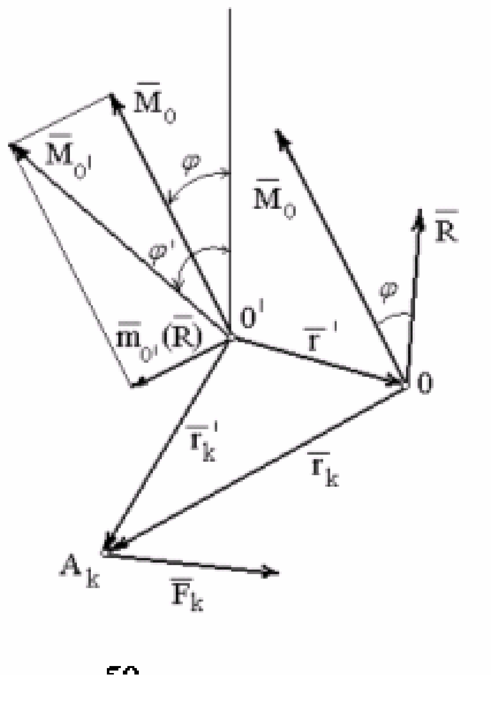
Adabiyotlar: 4, 8, 9, 12

9.1 Fazodagi kuchlar sistemasining invariantlari .

Berilgan kuchlar sistemasini unga ekvivalent bo`lgan sistema bilan almashtirishda o`zgarmay qoladigan vektor yoki skalyar kattalik kuchlar sistemasining invarianti deyiladi.

Kuchlar sistemasining bosh momenti $\overline{\mathrm{M}}_0 = \Sigma \overline{m}_0\left(\overline{F}_л\right)$ esa, keltirish markaziga nisbatan invariant xossasiga ega emas, chunki keltirish markazi o`zgarsa kuchlar sistemasining shu markazga nisbatan bosh momenti ham o`zgaradi.

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar sistemasini qandaydir O markazga keltirilganda shu O markazga qo`yilgan kuchlar sistemasining $\overline{R} = \overline{R}'$ bosh vektorga hamda momenti O markazga nisbatan $\overline{\mathrm{M}}_0 = \Sigma \overline{m}_0\left(\overline{F}_л\right)$ bosh momentga teng bo’lgan juftga ega bo`lamiz. Endi biz keltirish markazi qilib O' nuqtani olaylik.



$\overline{F}_k$ kuch A_k nuqtaga qo`yilgan bo`lsin. A_k nuqtaning O markazga nisbatan radius – vektori $\overline{r}_k, O'$ markazga nisbatan radius – vektori $\bar{r}'$ bo`lsin. U holda hosil bo`lgan $A_k OO'$ uchburchakdan $\bar{r}_k' = \bar{r}' + \bar{r}_k$ ni yozamiz. bu yerda: $\overline{OO'} = \bar{r}'$ deb belgilanadi. $\bar{F}_k$ kuchni O va O' markazga nisbatan momentlari (38) formulaga ko`ra quyidagi ko`rinishda bo`ladi.

$$m_0(\bar{F}_k) = \bar{r}_k' \times \bar{F}_k$$

$$m_0(\bar{F}_k) = \bar{r}_k' \times \bar{F}_k = (\bar{r}' + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{F}_л + \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$

Kuchlar sistemasining yangi O' keltirish markaziga nisbatan bosh momenti quyidagi ko`rinishda bo`ladi.

$$\text{M}_{0'} = \Sigma m_{0'}(\bar{F}_k) = \Sigma(\bar{r}' + \bar{F}_k) + \Sigma \bar{m}_0(\bar{F}_k) = \Sigma(\bar{r}' \times \bar{F}_k) + \overline{\text{M}}_0 \quad (58)$$

yoki

$$\Sigma(\bar{r}' \times \bar{F}_k) = \bar{r}' \times \Sigma \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{R}.$$

(38) ga ko`ra quyidagini hosil qilamiz.

$$\bar{m}_{0'}(\bar{R}) = \bar{r}' \times \bar{R}$$

u holda yuqoridagi tenglik quyidagi ko`rinishni oladi.

$$\overline{\text{M}}_{0'} = \overline{\text{M}}_0 + \bar{m}_{0'}(\bar{R}) \qquad (59)$$

yoki $\overline{\text{M}}_{0'} - \overline{\text{M}}_0 = \bar{m}_{0'}(\bar{R})$

keltirish markazini o`zgartirish natijasida bosh momentining o`zgarishi, avvalgi keltirish markazi O ga qo'yilgan kuchlar sistemasi bosh vektori $\bar{R}$ ning yangi keltirish markazi O' ga nisbatan momentiga teng.

$\bar{m}_{0'}(\bar{R}) \perp \bar{R}$ bo`lganligi uchun $\bar{m}_{0'}(\bar{R})$ vektorning $\bar{R}$ yo`nalgan to`g`ri chiziqdagi proeksiyasi nolga teng bo`lganligi uchun (59) ning shu yo`nalishdagi proeksiyasini quyidagi ko`rinishni oladi.

$$\text{M}_{0'} \cos\varphi' = \text{M}_0 \cos\varphi$$

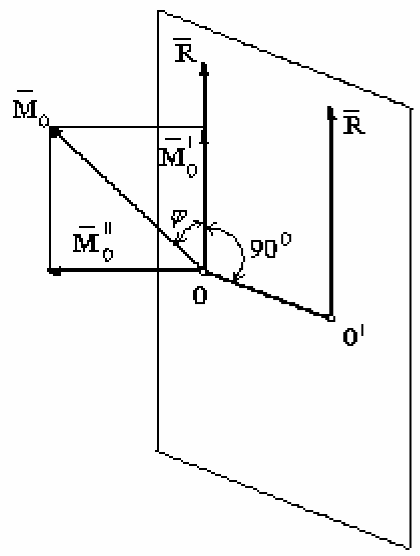
Bu yerda $\varphi' = \overline{\text{R}}\hat{,} \overline{\text{M}}_{0'}$

va $\varphi = \overline{\text{R}}\hat{,} \overline{\text{M}}_0$

Shunday qilib, kuchlar sistemasi bosh vektorining bosh momentga skalyar ko`paytmasi yoki bosh momentning bosh vektordagi proeksiyasi kuchlar sistemasining skalyar invarianti deyiladi.

9.2. Kuchlar sistemasining dinamik vintga keltirish

Berilgan kuchlar sistemasini qandaydir O markazga keltirilganda, biz bosh vektor $\overline{R}$ va bosh moment $\overline{M}_0$ ga ega bo`lamiz. Bosh vektor $\overline{R}$ bilan bosh moment $\overline{M}_0$ vektorlari orasidagi $\varphi$ burchak istalgan qiymatga ega bo`lishi mumkin. Biz $\varphi \neq 90^0$ bo`lgan holni ko`rib chiqamiz.

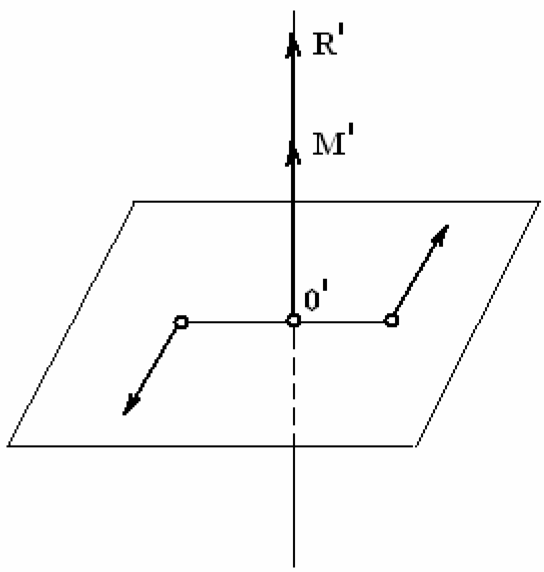


60-rasm

Bosh moment $\overline{M}_0$ ni bosh vektor $\overline{R}$ bo`ylab yo`nalgan $\overline{M}'_0$ va unga perpendikulyar yo`nalgan M''_0 tashkil etuvchilarga ajratamiz (60- rasm)

$$M'_0 = |M_0 \cos\varphi|$$

Agar $\varphi \langle 90^0$ bo`lsa $\overline{M}'_0$ vektor $\overline{R}$ vektorning ustiga tushadi va bir tomonga yo`nalgan bo`ladi. Agar $\varphi \rangle 90^0$ bo`lsa, bu vektorlar qarama–qarshi tomonga yo`nalgan bo`ladi. Kuchlar sistemasi bosh momentining bosh vektor yo`nalgan o`qdagi proeksiyasi o`zgarmas kattalik bo'lib, keltirish markaziga bog'liq bo`lmaydi. Demak M'_0 vektor keltirish markaziga nisbatan invariantdir.



61-rasm

$\overline{M}'_0 \perp \overline{R}$ bo`lgani uchun, u holda $(\overline{R}, \overline{M}''_0)$ sistema $O'$ markaz orqali o`tuvchi bitta $\overline{R}$ kuchga keltiriladi. OO' masofa esa quyidagicha topiladi.

$$OO' = \frac{M''_0}{R} = \frac{M_0 \sin\varphi}{R} \qquad (60)$$

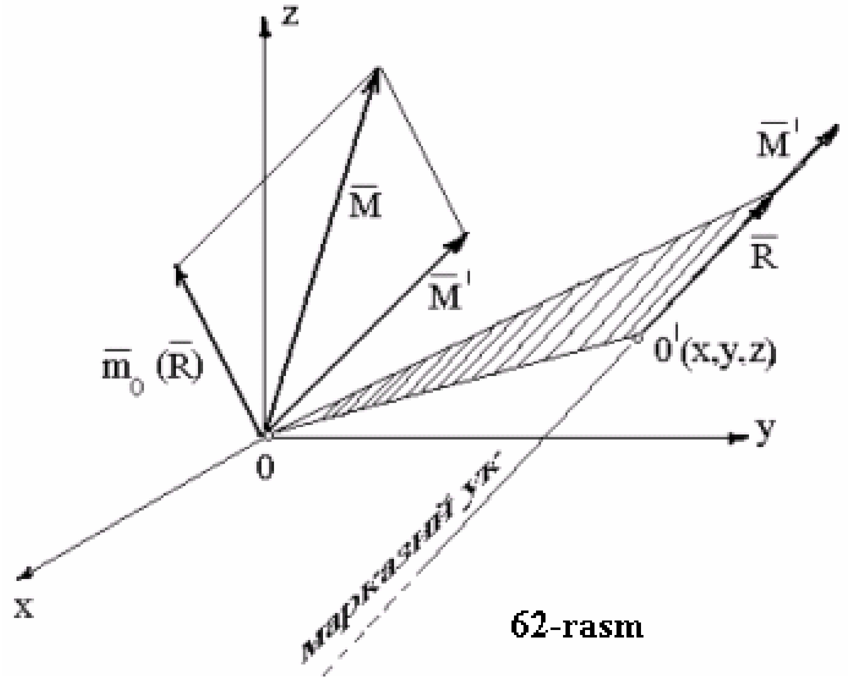
natijada O' markazga qo`yilgan $\overline{R}$ kuchga va bu kuchga parallel yo`nalgan momenti $\overline{M}'_0 = \overline{M}'$ juftga ega bo`lamiz. $\overline{M}'_0$ vektor erkin vektor bo`lgani uchun uni O' markazga keltiramiz. Natijada 61-rasm da ko`rsatilgan dinamik vintga ega bo`lamiz.

Bitta kuch va shu kuchga perpendikulyar tekiskilda yotuvchi juftdan tashkil topgan sistemaga dinamik vint deyiladi.

9.3. Markaziiy o`q tenglamasi.

Fazoda O' nuqtani shunday tanlash kerakki, berilgan kuchlar sistemasi shu nuqtada dinamik vintni tashkil etsin, ya‘ni bosh vektor $\overline{R}$ bilan bosh moment $\overline{M}'$ bir to`g’ri chiziq bo`ylab yo`nalsin. Bu to`g’ri chiziq berilgan kuchlar sistemasining markaziy o`qi deyiladi.

Markaziy o`q tenglamasini keltirib chiqamiz. Markaziy o`q ustida yotuvchi ixtiyoriy O' nuqta olamiz va berilgan kuchlar sistemasini O nuqtadan O' nuqtaga ko`chiramiz (62-rasm).



62-rasm

U holda (59) ga ko`ra quyidagini yozamiz.

$$\overline{M}_0 = \overline{M}' + \overline{m}_0(\overline{R})$$

Tenglikni kordinata o`qlariga proeksiyalaymiz.

$$M_{0x} = M'_x + m_x(R)$$

$$M_{0y} = M'_y + m_{oy}(R)$$

$$M_{oz} = M'_z + m_z(R)$$

yoki

$$M'_X = M_{oX} - m_X(R)$$

$$M'_Y = M_{OY} - m_y(R)$$

$$M'_z = M_{oz} - m_z(R)$$

(42) formulaga ko`ra quyidagilarni yozamiz.

$$m_x(R) = yR_z - zR_y$$
$$m_y(R) = zR_x - xR_z$$
$$m_z(R) = xR_y - yR_x$$

Yuqoridagini o`rniga qo`yamiz.

$$M'_x = M_{ox} - (yR_z - zR_y)$$
$$M'_y = M_{oy} - (zR_x - xR_z)$$
$$M'_z = M_{oz} - (xR_y - yR_x)$$

$\overline{M}'$ va $\overline{R}$ vektorlar bir to`g'ri chiziq bo`ylab yo`nalgani uchun ularni koordinata o`qlaridagi proeksiyalari proporsionaldir.

$$\frac{M'_x}{R_x} = \frac{M'_y}{R_y} = \frac{M'_z}{R_z} \qquad (63)$$

yoki

$$\frac{M_{ox} - (yRz - zRy)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zRx - xRz)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xRy - yRx)}{R_z} \qquad (64)$$

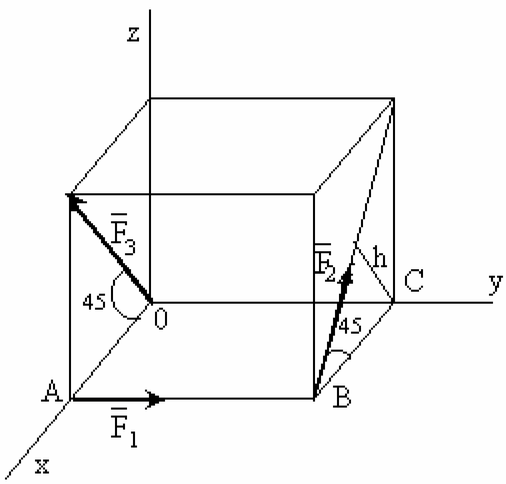
Bu markaziy o'q tenglamasi.

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalar qilib chiqamiz.

1. Agar $\overline{R} \neq 0 \; va \; \overline{R} \cdot \overline{M}_0 \neq 0$ bo`lsa, kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi.

2. Agar $\overline{R} \neq 0 \; va \; \overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$ bo`lsa, kuchlar sistemasi teng tasir etuvchiga keltiriladi.

3. Agar $\overline{R} = 0$ ва $\overline{M}_0 \neq 0$ bo`lsa, kuchlar sistemasi bitta juftga keltiriladi, bunday holda bosh moment keltirish markaziga bog'liq bo`lmaydi.



63 - rasm

12- masala. 63-rasmda ko'rsatilgan fazoviy kuchlar sistemasining *x* ,*y*, va *z* o'qlarga va O nuqtaga nisbatan bosh momentlarini aniqlang. $\overline{F}_1$ kuch kubning qirrasi bo'ylab, $\overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlar yon tomoni dioganali bo'ylab yo'nalgan, kub tomoni $a = 2м,\ F_1 = 10кН,\ F_2 = F_3 = 12\sqrt{2}кN$

Yechish. Kuchlar sistemasining o'qlarga nisbatan bosh momenti, kuchlar sistemasining har bir o'qlarga nisbatan momentlarining yig'indisiga teng,

ya'ni

$$M_x = \sum m_x\left(\overline{F}_K\right),\ M_y = \sum m_y\left(\overline{F}_K\right),\ M_z = \sum m_z\left(\overline{F}_K\right)$$

yoki,

$$M_X = m_X\left(\overline{F}_1\right) + m_X\left(\overline{F}_2\right) + m_X\left(\overline{F}_3\right);$$
$$M_y = m_y\left(\overline{F}_1\right) + m_y\left(F_2\right) + m_y\left(F_3\right);$$
$$M_Z = m_Z\left(\overline{F}_1\right) + m_Z\left(\overline{F}_3\right) + m_Z\left(F_3\right);$$

hisoblaymiz.

$$M_X = O + F_2 \sin 45^0 \cdot a = 12\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 24кN$$
$$M_Y = -F_2 \sin 45^0 \cdot a = -24кN$$
$$M_Z = F_1 \cdot a + F_2 \cdot \cos 45^0 \cdot a = 10 \cdot 2 + 24 = 44кN$$

Kuchlarni barchasining ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishadi.Kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momentini aniqlaymiz.

$$M_0 = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{24^2 + (-24)^2 + 44^2} = 55{,}5кN$$

yo'naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos\left(x, \wedge \overline{M}_0\right) = \frac{M_x}{M_0} = \frac{24}{55{,}5} = 0{,}43;$$

$$\cos\left(y, \wedge \overline{M}_0\right) = \frac{M_y}{M_0} = \frac{-24}{55{,}5} = -0{,}43;$$

$$\cos\left(Z, \wedge \overline{M}_0\right) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{44}{55{,}5} = 0{,}79;$$

Demak,

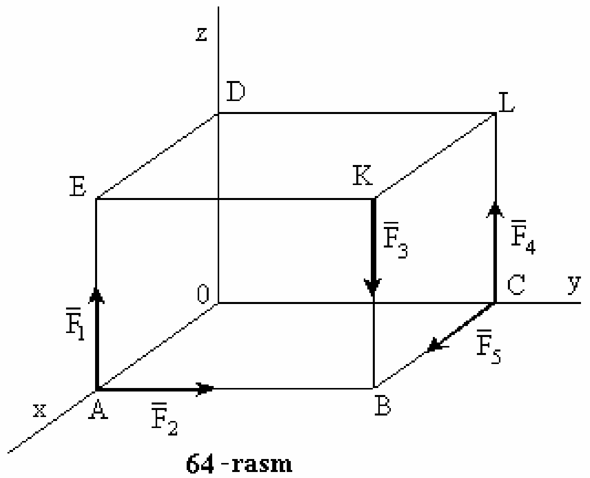
$$\left(x, \wedge \overline{M}_0\right) = 63^0,\ \left(y, \wedge \overline{M}_0\right) = 115^0,\ \left(z, \wedge \overline{M}_0\right) = 38^0$$

burchak ostida yo'nalgan.

13-masala. To'g'ri burchakli OABCDEKL parallelepipedning A,K va C uchlariga qo'yilgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ va F_5 kuchlar sistemasini sodda holga keltiring (64-rasm).

$F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F,$

$F_2 = 2F, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{a}, \quad \mathrm{OA} = \frac{\mathrm{a}}{2}.$



64-rasm

Yeshish. Keltirish markazi qilib koordinata boshi O nuqtani olamiz. Kuchlar sistemasining bosh vektori R ni aniqlaymiz. Buni uchun kuchlar sistemasini *x,y,z* o'qlarga nisbatan bosh vektorining R_x , R_y, R_z , proeksiyalarini aniqlab olamiz.

$$R_x = \sum F_{kx} = F_5 \;; \quad R_y = \sum F_{ky} = F_2 \;;$$
$$R_z = \sum F_{kz} = F_1 - F_3 + F_4 = F$$

Qiymatlarini o'rniga qo'yamiz:

$$R_X = F, \quad R_Y = 2F, \quad R_Z = F$$

Kuchlar sistemasi bosh vektorning modulini aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{F^2 + 4F^2 + F^2} = F\sqrt{6}$$

Kuchlar sistemasining *x,y* va *z* o'qlarga nisbatan bosh momentlarini aniqlaymiz.

$$M_x = \sum m_x\left(\overline{F}_K\right) = -F_3 \cdot a + F_4 \cdot a,$$
$$M_y = \sum m_y\left(\overline{F}_K\right) = F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_3 \frac{a}{2},$$
$$M_z = \sum m_z\left(\overline{F}_K\right) = F_2 \cdot \frac{a}{2} - F_5 \cdot a$$

Hisoblaymiz:

$$M_x = -F \cdot a + F \cdot a = 0; \quad M_y = -F\frac{a}{2} + F \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad M_z = 2F\frac{a}{2} - Fa = 0$$

$$M_x = 0, \; M_y = 0, \; M_z = 0.$$

Demak kuchlar sistemasining O markazga nisbatan bosh momenti $\overline{M}_0 = 0$ ekan. Kuchlar sistemasining bosh momenti nolga teng bo’lsa, kuchlar sistemasi teng ta‘sir etuvchiga keltiriladi.

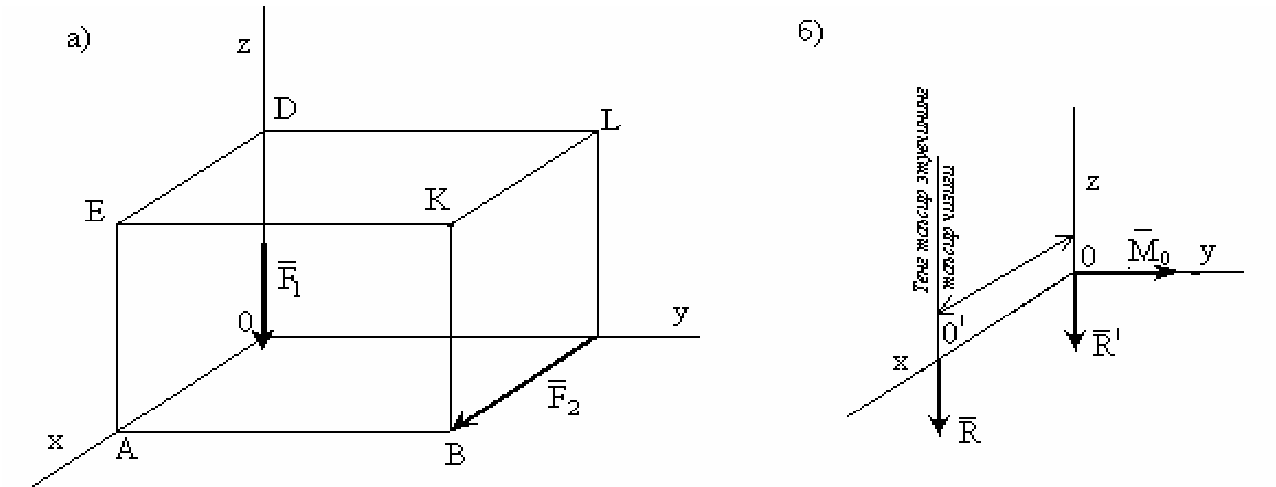
$$\overline{R} = F\sqrt{6}$$

Teng ta‘sir etuvchining ta‘sir chizig’i

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z}$$ dan aniqlanadi, ya‘ni

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

14-masala. (65-rasm, a) da tasvirlangan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlardan iborat sistemani sodda holga keltiring.



65 -rasm

$$F_1 = F_2 = F, \quad OA = \frac{a}{2}$$

Yechish. Keltirish markazi qilib O nuqtani olamiz. *x,y,z,* koordinata o’qlarini kub qirralari bo’ylab yo’naltiramiz. Kuchlar sistemasi bosh vektori $\overline{R}$ ning *x,y,z,* koordinata o’qlaridagi R_x, R_y, va R_z proeksiyalarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx} = F_2 \\ R_y &= \sum F_{ky} = 0 \qquad (1) \\ R_z &= \sum F_{kz} = -F_1 \end{aligned}$$

Hisoblashni bajaramiz.

$$R_x = F,\ R_y = 0, \quad R_z = -F \qquad (2)$$

Shunday qilib bosh vektor

$$\overline{R} = F\overline{i} - F\overline{k} \qquad (3)$$

Uning moduli.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{F^2 + 0 + (-F)^2} = F\sqrt{2}; \qquad (4)$$

Kuchlar sistemasining *x,y,z* o'qlarga nisbatan bosh momentlarini aniqlaymiz.

$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_K) = 0, \quad M_y = \sum m_y(\overline{F}_K) = 0, \quad M_z = \sum m_z(F_K) = -F_2 \cdot a \qquad (5)$$

shartga ko'ra $|\overline{F}_2| = F$ bo'lgani uchun

$$M_x = 0, \quad M_y = 0,. \quad M_z = -F \cdot a \qquad (6)$$

Shunday qilib bosh moment

$$\overline{M}_0 = -F \cdot a \cdot \overline{k} \qquad (7)$$

Uning moduli

$$M_0 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{0 + 0 + (-Fa)^2} = Fa; \qquad (8)$$

$\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisi $\overline{R} = F\overline{i} - F\overline{k}$ ga va momenti O markazga nisbatan bosh momentga, ya'ni $\overline{M}_0 = -Fa\overline{k}$ teng juftga keltirilar ekan. Bundan ko'rinadiki, $\overline{R}$ va $\overline{M}_0$ vektorlar o'zaro perpendikulyar emas. Demak, ular dinamika vintga keladi.

Endi markaziy o'q tenglamasini chiqaramiz.

$$\frac{M_x \cdot yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_X}{R_z}$$

O'rniga qo'yib hisoblaymiz.

$$\frac{0 - y(-F) + zF}{F} = \frac{0 - z \cdot F + x(-F)}{0} = \frac{-F \cdot a - x \cdot 0 + y \cdot F}{-F}$$

$$\frac{y \cdot F + z \cdot F}{F} = \frac{-zF - xF}{0} = \frac{F \cdot \frac{a}{2} - y \cdot F}{F} \quad \frac{y + z}{1} = \frac{-z - x}{0} = \frac{\frac{a}{2} - y}{1}$$

$$y = \frac{a}{2}; \quad z = x$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kuchlar sistemasining vektorli invarianti deb nimaga aytiladi?
2. Keltirish markazining o’zgarishi nuqtaning radius–vektoriga qanday ta’sir ko’rsatadi?
3. Fazodagi kuchlar sistemasining skalyar invarianti deb nimaga aytiladi?
4. Dinamik vint nima?
5. Qachon kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi?
6. Dinamik vint o’qi deb qanday chiziqqa aytiladi?
7. Vint parametri nima uchun va qanday aniqlanadi?
8. Dinamik vint ta’siridagi jism qanday harakatda bo’ladi?
9. Fazodagi qanday chiziqqa kuchlar sistemasining markaziy o’qi deyiladi?
10. Kuchlar sistemasining markaziy o’q tenglamasini keltirib chiqaring.

10-MA‘RUZA.
PARALLEL KUCHLAR MARKAZI. QATTIQ JISMNING OG’IRLIK MARKAZI. BIR JINSLI JISMLARNING OG’IRLIK MARKAZI KOORDINATALARI. JISMNING OG’IRLIK MARKAZINI ANIQLASH USULLARI.

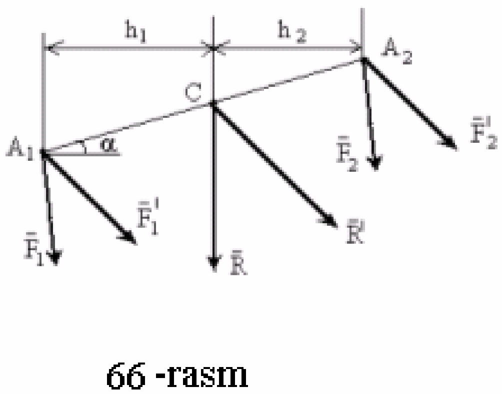
REJA:
10.1 Ikkita parallel kuchning markazi. Parallel kuchlar markazi.
10.2 Qattiq jismning og’irlik markazi.
10.3 Bir jinsli jismlarning og’irlik markazi koordinatalari.
10.4 Jismning og’irlik markazini aniqlash usullari.
10.5 Ayrim bir jinsli jismlarning og’irlik markazlari.

Adabiyotlar: 1, 2, 4, 8, 12.

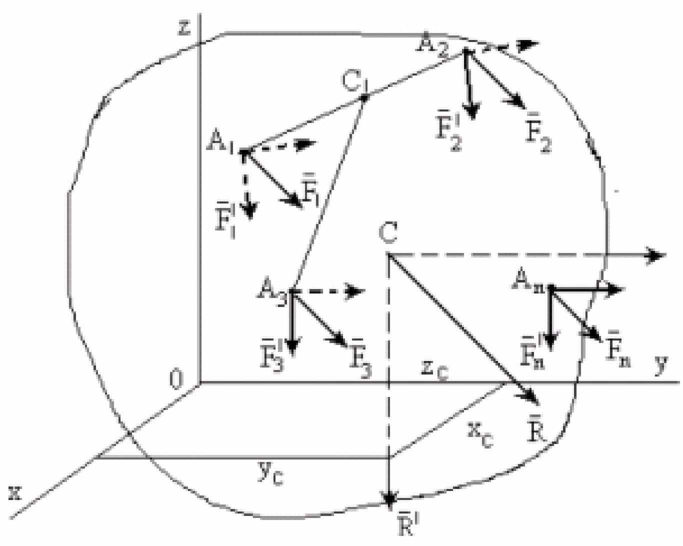
Tayanch iboralar: parallel kuchlar markazi, og’irlik markazi, og’irlik markazi koordinatalari, hajmning og’irlik markazi, yuzaning og’irlik markazi, chiziqning og’irlik markazi, simmetriya usuli, bo’laklash usuli, manfiy yuza (hajm) usuli, tajriba usuli.

10.1 Parallel kuchlar markazi.

Mexanikaning ayrim masalalarini yechishda xususan jismlarning og’irliklari markazlari holatini aniqlashda parallel kuchlar markazi haqidagi tushunchadan foydalaniladi. Avvalo tekislikdagi ikkita parallel



66 -rasm



67 -rasm

kuchlar markazini aniqlaymiz. Qattiq jismning A_1 va A_2 nuqtalariga o'zaro parallel $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin (66-rasm). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ ga teng va qo'shiluvchi kuchlarga parallel, ta'sir chizig'i esa A_1 , A_2 kesmada yotuvchi C nuqtadan o'tadi.

C nuqtaning o'rnini Varin'on teoremasidan foydalanib topamiz.

$m_c(\overline{R}) = m_C(\overline{F}_1) + m_C(\overline{F}_2)$ yoki $O = F_1 h_1 - F_2 h_2 = F_1 A_1 C \cos\alpha - F_2 A_2 C\cos\alpha$

bundan $F_1 \cdot A_1C = F_2 \cdot A_2C$ (65)

Agar $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni A_1 va A_2 nuqtalar atrofida biror α burchakka bursak , $\overline{F}_1'$ va $\overline{F}_2'$ parallel kuchlarga ega bo'lamiz. Bu kuchlar ham A_1 va A_2 nuqtalarga qo'yilgan bo'lib, momentlari $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlar momentlariga teng bo'ladi. F_1^1 va F_2^1 kuchlar uchun ham (66) tenglik o'rinli, ularning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}^1$ ning ta'sir chizig'i ham C nuqtadan o'tadi. Bu nuqtaga $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ parallel kuchlar markazi deyiladi.

Endi qattiq jismning A_1 , A_2 .... A_n nuqtalariga qo'yilgan bir tomonga yo'nalgan o'zaro parallel $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2 \ldots \overline{F}_n$ kuchlar sistemasini ko'rib chiqamiz. Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}$ bo'lib, uning moduli

$$R = \sum F_K \qquad (66)$$

formula yordamida topiladi.

Agar kuchlar sistemasining har birini qo'yilish nuqtasi atrofida bir tomonga va bir xil burchakka bursak, qattiq jismga ta'sir etuvchi boshqa bir parallel kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (67-rasm) (rasmda shtrix chiziq orqali ko'rsatilgan). Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining moduli, avvalgi kuchlar sistemasining moduliga teng. Hosil bo'lgan barcha kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i faqat c nuqtadan o'tishini ko'rsatamiz. Avval $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni o'zaro (65) formula yordamida qo'shamiz. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1$ ning ta'sir chizig'i c_1 nuqtadan o'tishini hamda $F_1 A_1 c_1 = F_2 A_2 c_2$ tenglikni qanoatlantirishini aniqlaymiz. Endi $\overline{R}_1$ va $\overline{F}_3$ kuchlarni qo'shamiz $\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ ga teng edi. Demak $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_2 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ ning ta'sir chizig'i c_1 A_3 kesmada yotuvchi C_2 nuqtadan o'tishini aniqlaymiz. Shu usulda qolgan kuchlarni ham qo'shamiz va ta'sir chizig'i doimo C nuqtadan o'tuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}$ ga ega bo'lamiz. S nuqtaga parallel kuchlar markazi deyiladi.

Endi parallel kuchlar markazi C nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Qattiq jism orqali Oxyz koordinata sistemasini o'tkazamiz. U holda kuchlar qo'yilgan nuqtalarning koordinatalarini $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z), ..., A_n(x_n, y_n, z_n)$, ko'rinishda yozamiz. Kuchlar sistemasini qo'yilish nuqtalari atrofida z o'qiga parallel joylashadigan qilib burib $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2' \ldots, \overline{F}_n$ kuchlar sistemasini hosil qilamiz. Varin'on teoremasini qo'llab kuchlar sistemasini y o'qiga nisbatan momentlarini aniqlaymiz.

$$m_y(\overline{R}') = \sum m_y(\overline{F}_\kappa') \qquad (67)$$

67 – rasmdan $m_y(\overline{R}^1) = R \cdot x_c$ ekanligini topamiz, bunda $\overline{R}^1 = R$, yoki $m_y(\overline{F}_1^1) = F_1^1 x_1$ $m_y(\overline{F}_2^1) = F_2^1 x_2$ va hakoza . Bularni (67) tenglikka keltirib qo'ysak

$$R \cdot x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + ... + F_n x_n = \sum F_\kappa \cdot x_\kappa$$

Bundan

$$x_c = \frac{\sum F_\kappa \cdot x_\kappa}{R}$$

Shu usulda y_c va z_C larni aniqlab olamiz. Buning uchun kuchlar sistemasining Ox o'qiga nisbatan momentlarini olamiz z_C ni aniqlash uchun barcha kuchlarni Oy o'qiga parallel yo'naladigan qilib Ox o'qiga nisbatan momentlarini topamiz.

$-Rz_c = -F_1 z_1 + (-F_2 z_2) + ... + (-F_n z_n)$ bu tenglikdan z_C ni aniqlaymiz.

Natijada quyidagicha parallel kuchlar markazi koordinatalari uchun formulalarni hosil qilamiz.

$$x_c = \frac{1}{R}\sum F_\kappa \cdot x_\kappa, \qquad y_c = \frac{1}{R}\sum F_\kappa \cdot y_\kappa, \qquad y_c = \frac{1}{R}\sum F_\kappa z_\kappa \qquad (68)$$

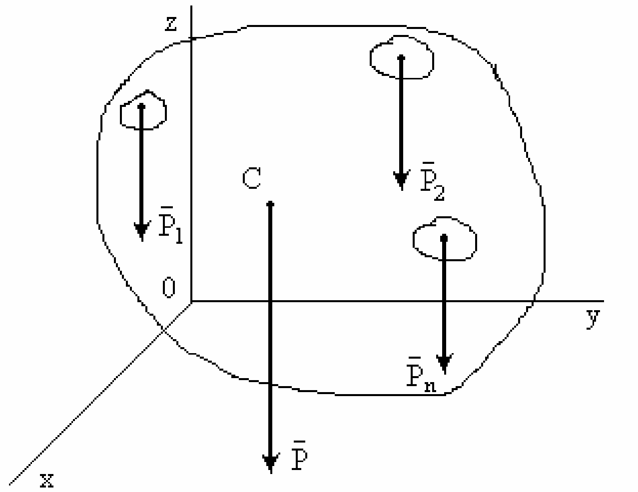
10.2. Qattiq jismning og'irlik markazi.

Har qanday qattiq jismni juda kichik bo'lakchalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin (67 – rasm). Yer sirtiga yaqin bo'lgan bo'lakchalarni Yer o'ziga tortishi tufayli, har bir bo'lakchaga vertikal pastga yo'nalgan kuchlar ta'sir etadi. Bu kuchlarga og'irlik kuchlari deyiladi. Jismning o'lchami Yerning o'lchamidan juda kichik bo'lgani uchun, bo'lakchalarning og'irlik kuchlarini parallel kuchlardan iborat deb qarash mumkin. Bo'lakchalarning og'irlik kuchlarini tegishlicha $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ desak, ularning teng ta'sir etuvchisining moduli.

$P = \sum p_k$ (69)

formula orqali aniqlanadi.

Qattiq jismni istalgan burchakka burganda bo'lakchalarga ta'sir etuvchi kuchlarning faqatgina yo'nalishi o'zgaradi qo'yilish nuqtasi esa o'zgarmaydi. Bo'lakchalar og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{P}$ kuchning qo'yilish nuqtasi C ga 10.1 ga asosan qattiq jismning og'irlik markazi, $\overline{P}$ kuchga esa og'irlik kuchi deyiladi.



68-rasm

Qattiq jismning istalgan holatida bo'lakchalar og'irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i o'tadigan va qattiq jism bilan chambarchas bog'liq bo'lgan nuqtaga, qattiq jismning og'irlik markazi deyiladi.

Qattiq jism og'irlik markazi koordinatalari, parallel kuchlar markazi koordinatalari (69) kabi topiladi: ya'ni

$$x_c = \frac{1}{P}\sum p_к \cdot x_к,\ y_c = \frac{1}{P}\sum p_к \cdot y_к,\ z_c = \frac{1}{P}\sum p_к \cdot z_к \qquad (71)$$

bu yerda x_k, y_k, z_k - qattiq jism bo'lakchasi og'irlik kuchi qo'yilgan nuqtasining koordinatalari.

10.3. Bir jinsli jismlar og'irlik markazi koordinatalari.

Bir xil moddadan tashkil topgan jismlarga bir jinsli jism deyiladi.

Og'irligi P ga teng jism V hajmga ega bo'lsin. Agar birlik hajmga to'g'ri kelgan og'irlikni γ bilan belgilasak, bir jinsli jism istalgan bo'lakchasining og'irligi $p_к$, shu bo'lakcha hajmi $v_к$ ga proporsianal bo'ladi, ya'ni $p_к = \gamma V_к$, y holda jismning og'irligi P, jism hajmi V ga proporsianal , ya'ni $P = \gamma V$

P va $p_к$ larning qiymatlarini (70) ga qo'yib hajmga ega bo'lgan qattiq jism og'irlik markazi, koordinatalarini aniqlash formulalarini hosil qilamiz.

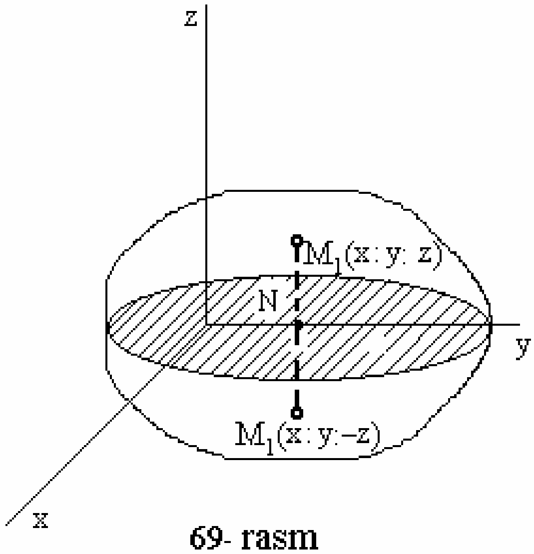
$$x_C = \frac{1}{V}\sum v_K \cdot x_K,\ y_C = \frac{1}{V}\sum v_K \cdot y_K,\ z_C = \frac{1}{V}\sum v_K \cdot z_K \qquad (71)$$

Agar jism bir jinsli yupqa, yassi plastinkadan iborat bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formuladan topiladi.

$$x_c = \frac{1}{S}\sum s_\kappa \cdot x_k,\ y_c = \frac{1}{S}\sum s_\kappa \cdot y_\kappa \qquad (72)$$

bu yerda S-plastinka yuzasi; s_κ-bitta bo'lakchaning yuzasi.

Xuddi shu usul yordamida chiziqning og'irlik markazi koordinatalarini hosil qilish mumkin.



69- rasm

$$x_c = \frac{1}{L}\sum l_{;\kappa} \cdot x_\kappa, \qquad y_c = \frac{1}{L}\sum l_\kappa \cdot y_\kappa, \qquad z_c = \frac{1}{L}\sum l_\kappa \cdot z_\kappa \qquad (73)$$

bu yerda L-chiziqning uzunligi, l_κ –bo'lakchaning uzunligi.

(73) formulalar yordamida o'zgarmas ko'ndalang kesimli ingichka simning og'irlik markazini aniqlash mumkin.

10.4. Jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash usullari.

Endi biz jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash usullariga o'tamiz.

1. Simmetriya usuli. Agar bir jinsli jism simmetriya o'qi yoki simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, uning og`irlik markazi simmetriya o'qida yoki simmetriya tekisligida yotadi. 69-rasmda simmetriya tekisligiga ega bo'lgan jism tasvirlangan. *x* va *y* o'qlarini simmetriya tekislikligida joylashtiramiz, z o'qni esa tekislikka perpendikulyar qilib yo'naltiramiz.

Jismdan *xOy* tekisligiga simmetrik joylashgan ikkita M_1, M_1^1 nuqtalarini olamiz. Nuqtalar yonida hajmi ΔV_κ hajmchalarni ajratamiz. M_1, M_1^1 nuqtalar *xOy* tekisligiga o'tkazilgan perpendikulyarlarda va bu tekislikdan bir xil masofa uzoqlikda yotadi, ya'ni $M_1\mathrm{N} = M_1^1\mathrm{N}$ (69-rasm). Demak bu nuqtalarning z_1 va z_1^1 koordinatalari o'zaro teng va teskari ishoraga ega. $z_K\Delta V_\kappa$ ko'paytmalarni qo'shib chiqsak $\sum z_\kappa \Delta V_\kappa = 0$ kelib chiqadi. Jism og'irlik markazi z_c (71) ko'ra aniqlanadi.

$$z_c = \frac{\sum z_\kappa \cdot \Delta V_\kappa}{V} = 0$$

Shunday qilib, simmetriya tekisligiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya tekisligida yotadi.

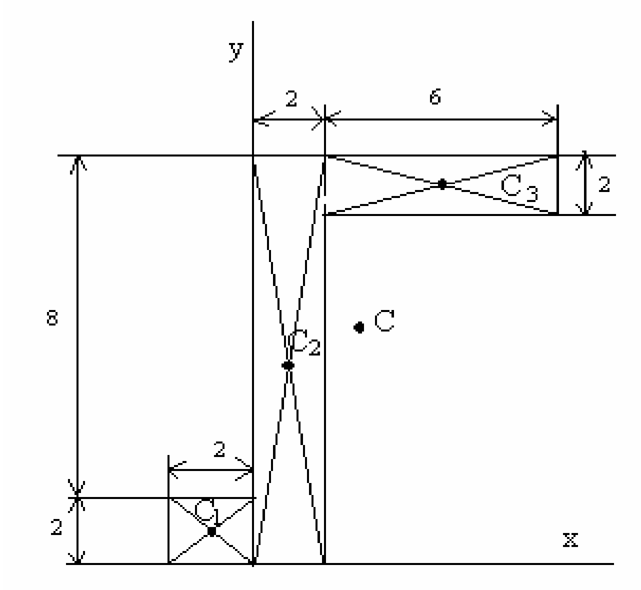
Xuddi shuningdek, simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida bo'lishligini ham isbotlash mumkin.

2. Bo'laklarga ajratish usuli. Ba'zida jismni shunday bo'laklarga bo'lish mumkinki, bu bo'laklarning og'irlik markazi oldindan ma'lum bo'ladi. Bunday jismlarning og'irlik markazi (70)-(73) formulalar yordamida aniqlanadi.

15-masala. 70-rasmda tasvirlangan bir jinsli plastinkaning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlang. O'lchamlar santimetrlarda berilgan.

Yeshish. x,y o'qlarini o'tkazamiz. Plastinkani 3 ta to'g'ri to'rt burchakdan iborat yuzaga ajratamiz. Har bir bo'lakchaning koordinatalari va yuzasini aniqlaymiz.

№	1	2	3
$x_к$	-1	1	5
$y_к$	1	5	9
$s_к$	4	20	12



70-rasm

Plastinkaning to'liq yuzasi

$s = s_1 + s_2 + s_3 = 4 + 20 + 12 = 36 см^2$

(72) formuladan foydalanib plastinka og'irlik markazi koordinatalarini aniqlaymiz.

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{s} = \frac{(-1)\cdot 4 + 1\cdot 20 + 5\cdot 12}{36} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} \approx 2{,}1 см$$

$$y_C = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{s} = \frac{1\cdot 4 + 5\cdot 20 + 4\cdot 12}{36} = \frac{4 + 100 + 108}{36} \approx 5{,}9 см$$

Plastinkaning og'irlik markazi rasmda ko'rsatilgan bo'lib, u plastinkadan tashqarida ekan.

3. Manfiy yuza usuli. Bu usul bo'laklarga bo'lib ajratish usulining xususiy holidir.

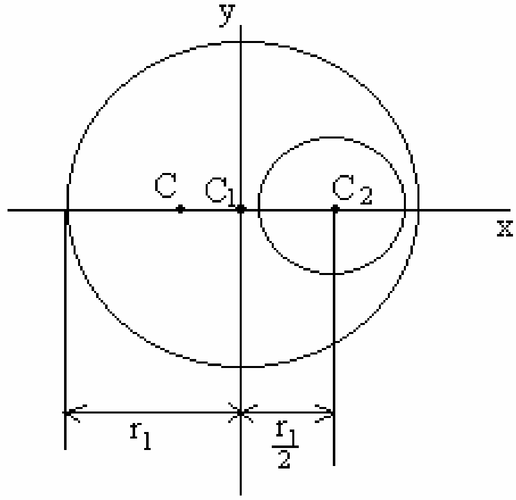
Bu usul bir qismi qirqib olib tashlangan jismlarda qo'llaniladi. Jismning og'irlik markazini aniqlashda (72) formuladan foydalaniladi.

16-masala Radiusi $r_2 = \frac{r_1}{2}$ doiraviy kesimga ega bo'lgan bir jinsli radiusi r_1 bo'lgan diskning og'irlik markazini aniqlang (71-rasm).

Yechish: Masalani yechish uchun koordinata o'qlarini o'tkazamiz. Diskning og'irlik markazi C_1 C_2 chiziqda yotadi chunki bu chiziq simmetriya o'qi bo'lib hisoblaymiz, x_c koordinatani aniqlash uchun diskni to'ldiramiz, keyin esa to'liq disk yuzasidan qirqib tashlangan doira yuzasini ayirib tashlaymiz. Bunda qirqib tashlangan doira yuzasi manfiy ishorada olinadi.

$$s_1 = \Pi r_1^2; \qquad s_2 = \Pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 = \frac{\Pi r_1^2}{4}$$

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{r_1}{2}; \ y_C = 0$$



71 - rasm

Bularni keltirib (72) formulaga qo'yamiz.

$$x_C = \frac{x_1 s_1 - x_2 s_2}{s_1 - s_2} = \frac{0 - \frac{r_1}{2} \cdot \frac{\Pi r_1^2}{4}}{\Pi r_1^2 - \frac{\Pi r_1^2}{4}} = -\frac{r_1}{6}$$

Aniqlangan C og'irlik markazi C_1 og'irlik markazidan chap tomonda yotadi.

4. Integrallash usuli. Agar jismni og'irlik markazining holati aniq bo'lgan bo'lakchalarga ajratish mumkin bo'lmasa, jism juda kichik ΔV hajmga ega bo'lgan bo'lakchalarga ajratiladi.

Bo'lakchalar uchun (71) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$x_c = \frac{1}{V}\sum x_к \cdot \Delta v_К; \ y_c = \frac{1}{V}\sum y_к \cdot \Delta v_к; \quad z_c = \frac{1}{V}\sum z_к \cdot \Delta v_к \qquad (74)$$

Jismning bo'laklar sonini orttirib borib (71) dagi yig'indilarda $n \to \infty$, $\Delta V_r \to 0$, bo'lganda limitga o'tsak, hajmga ega bo'lgan jism og'irlik markazi uchun quyidagi integralli ifodalarni hosil qilamiz.

$$x_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} x dv, \quad y_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} y dv \qquad z_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} z dv \qquad (75)$$

Xuddi shuningdek yuzaga ega bo'lgan plastinka va chiziqning og'irlik markazlari quyidagicha aniqlanadi.

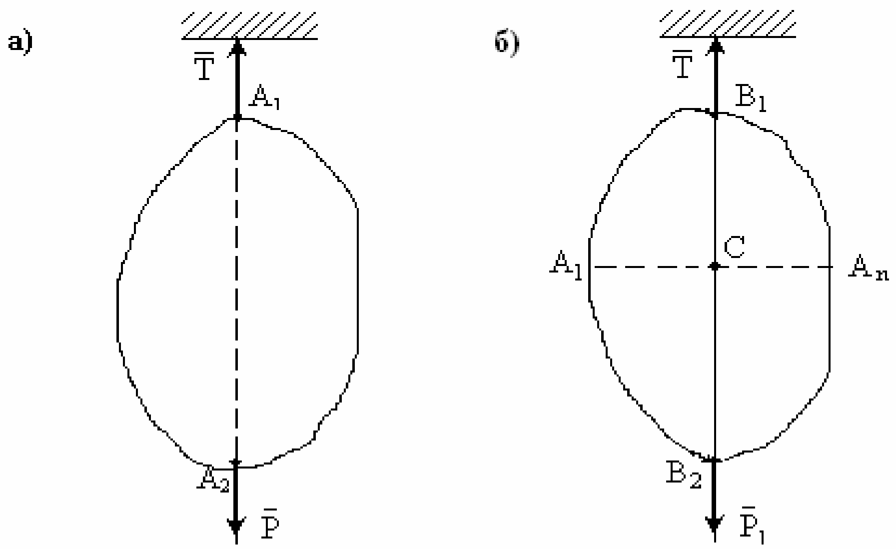
$$x_C = \frac{1}{s}\int\limits_{(S)} x ds, \quad y_C = \frac{1}{s}\int\limits_{(S)} y ds \qquad (76)$$

va $$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl, \quad y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl, \quad z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl \qquad (77)$$

5. Tajriba usuli. Bir jinsli bo'lmagan murakkab shaklli jismlarning og'irlik markazini aniqlashda quyidagi tajriba usullaridan foydalaniladi.

5.1. Ipga osish usuli.

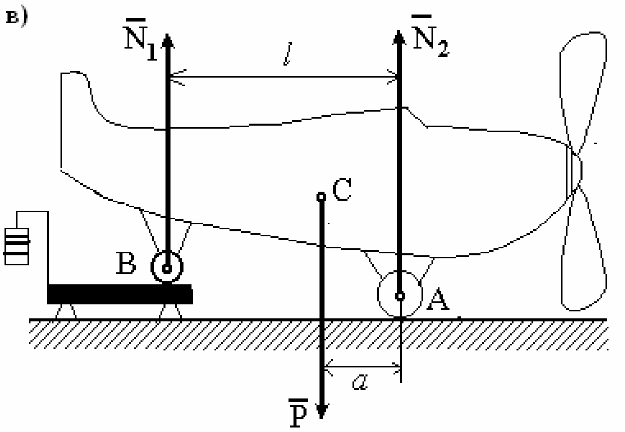
Tajriba usullaridan biri ipga osish usuli shundan iboratki jismning ixtiyoriy A, nuqtasidan ipga osamiz. Jism ipning taranglik va og'irlik kuchlari ta'sirida muvozanatda bo'ladi. (72-rasm,a). Ipning yo'nalishini davom ettirib, jismda og'irlik kuchining ta'sir chizig'ini A_1 A_2 bilan belgilaymiz. Shu tarzda jismning B_1 nuqtasidan osib, og'irlik kuchining ta'sir



72-rasm.

chizig`i B_1 B_2 ni aniqlaymiz (72-rasm,б) natijada A_1 A_2 va B_1 B_2 chiziqlarning kesishgan nuqtasi C berilgan jismning og'irlik markazi bo'lib hisoblanadi.

5.2. Tarozida tortish usuli. Osish mumkin bo'lmagan jismlarning og'irlik markazlari tortish usuli bilan aniqlanadi.



72- rasm

Misol. Agar AB= l berilgan bo'lsa samolyot og'irlik markazining bitta koordinatasi a. ni tortish usuli bilan aniqlashni ko'rsatamiz Samolyotning B g'ildiragini taroziga qo'yib, g'ildirakning taroziga beradigan bosim kuchni aniqlaymiz. Bu bosim kuchi tarozi tomonidan samolyotga beradigan $\bar{N}_1$ reaksiya kuchiga teng (72 – rasm, в), shu usulda $\bar{N}_2$ reaksiya kuchini ham aniqlaymiz. C nuqtani moment markazi qilib kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlab nolga tenglashtiramiz, ya'ni

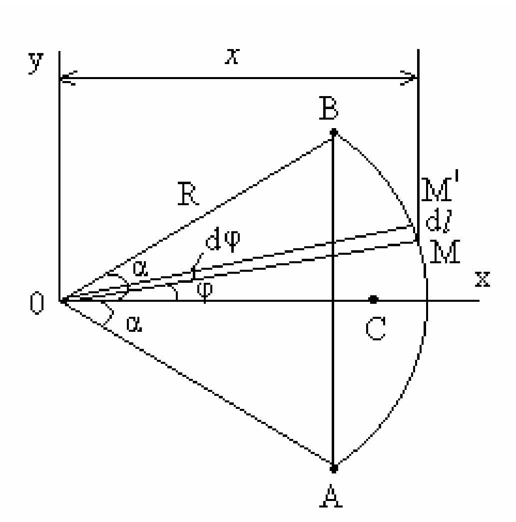
$$-N_1(l-a)+N_2a=0$$

bundan $$\alpha=\frac{lN_1}{N_1+N_2}$$

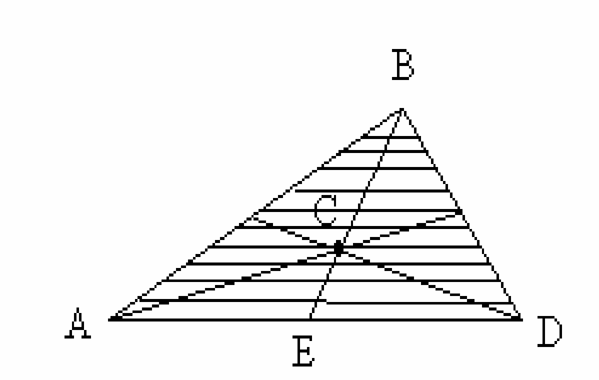
bu yerda $N_1+N_2=P$ - samolyotning og'irligi.

10.5. Ayrim bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari.

1. ***Aylana yoyining og'irlik markazi***. Markaziy burchagi AOB=2α, radiusi R bo'lgan AB yoyning og'irlik markazini aniqlaymiz.



73-rasm



74-rasm

Koordinata boshi qilib O nuqtani olib x va y o'qlarini o'tkazamiz (73-rasm) Aylana yoyi x o'qiga simmitrik bo'lgani uchun uning og'irlik markazi x o'qi ustida yotadi (y_c=0). Og'irlik markazining x_c koordinatasini (73) formuladan foydalanib aniqlaymiz. Buning uchun AB yoydan uzunligi dl=R$d\varphi$ bo'lgan MM[1] bo'lagini olamiz. MM[1] bo'lakchaning x koordinatasi $x = R\cos\varphi$ x va dl ning qiymatini (73) ga qo'yib quyidagini hosil qilamiz.

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B xdl = \frac{R^2}{L}\int_\alpha^\alpha \cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha$$

bu yerda L –uzunligi R·2α ga teng bo'lgan $\overset{\cup}{AB}$ yoyning uzunligi, u holda

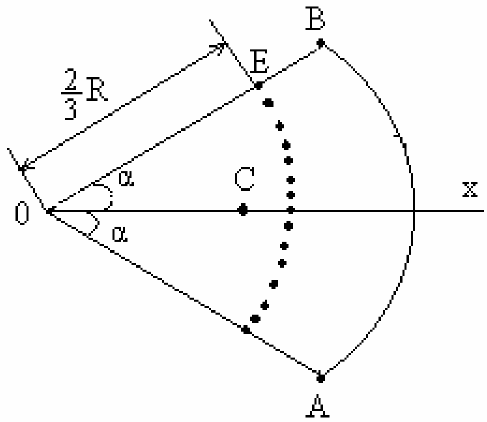
$$x_C = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (78)$$

Shunday qilib, aylana yoyning og'irlik markazi O nuqtadan x_c masofada simmetriya o'qida yotar ekan.

2. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi. ABD uchburchakni AD tomonga parallel bo'lgan kichik bo'laklarga ajratamiz (74-rasm). Bu bo'laklarning og'irlik markazi BE medianada yotadi. Qolgan ikkita mediana uchun ham olingan natija xuddi shunday bo'ladi. Demak, uchburchak yuzasining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtada yotadi, ya'ni

$$CE = \frac{1}{3}BE \qquad (79)$$

3. Doira sektori yuzasi og'irlik markazi. Radiusi R markaziy burchagi 2 α ga teng doira sektori yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun x o'qini sektor yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz (75-rasm). OAB sektor yuzasini fikran bir qancha elementar sektorlarga bo'lib chiqamiz. Har bir elementar sektorning balandligi R ga teng uchburchak deb qarasak, uning og'irlik markazi $\frac{2}{3}R$ masofada yotadi. Demak, doira sektorining og'irlik markazi O markazdan $\frac{2}{3}R$ ga teng aylana



75-rasm

yoyining og'irlik markazi bilan ustma – ust tushadi (78) ga asosan

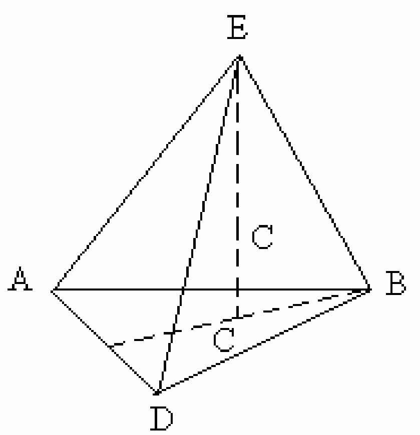
$$x_C = \frac{2}{3}\ \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (80)$$

yarim doira uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ekanligini nazarda tutsak.

$$x_C = \frac{4}{3\pi}R = 0{,}424R \qquad (81)$$

ga teng bo'ladi.

4. Piramida hajmining og'irlik markazi (yoki konus). Piramidaning og'irlik markazi C_1E chiziq ustida yotadi (76 rasm). E-piramida uchi, C_1-piramida asosining og'irlik markazi, u holda



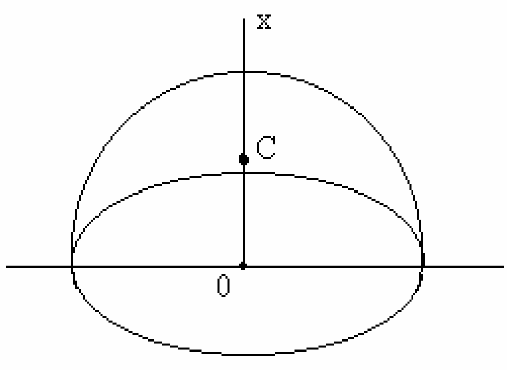
76 rasm

$$CC_1 = \frac{1}{4}EC_1 \qquad (82)$$

Bu tenglama barcha ko'pburchakli piramidalar va konus uchun o'rinli.

5. Yarim shar hajmining og'irlik markazi.

Yarim sharnirning og'irlik markazi C nuqta Ox (simmetriya o'qi) o'qi ustida yotadi.



77 rasm

$$x_C = OC = \frac{3}{8}R \qquad (83)$$

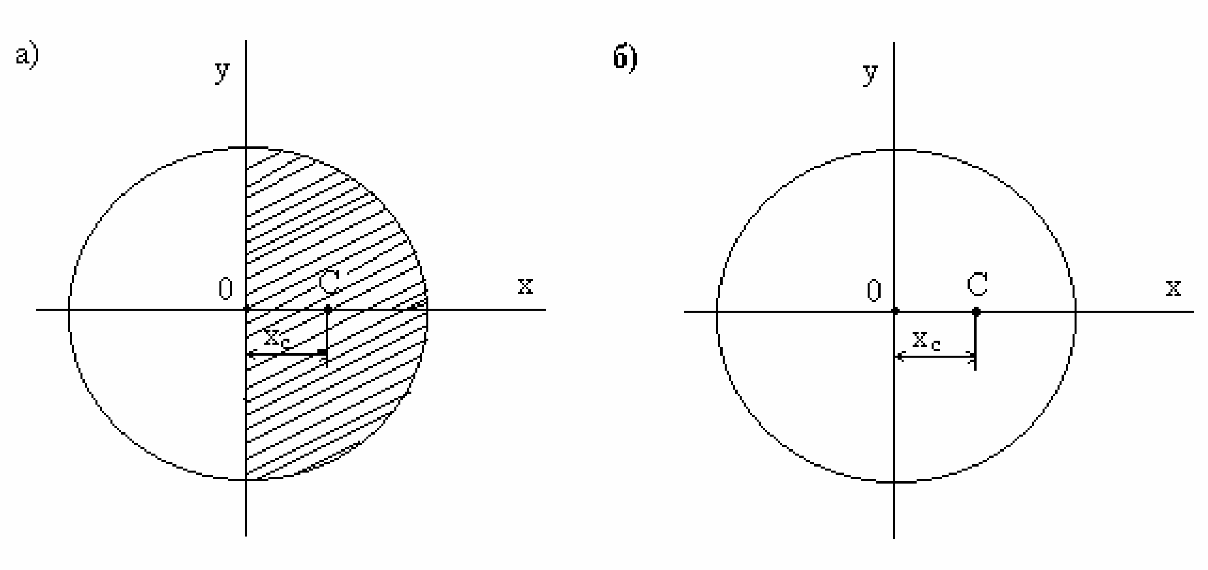
bu yerda: R – yarim sharning radiusi.

17-masala. Yarim doira va yarim aylana og'irlik markazlarini aniqlang.

Yechish. x o'qini yarim doiraning simmetriya o'qi bo'ylab, y o'qini esa diametri bo'ylab yo'naltiramiz (78-rasm, a). Yarim doira y o'qi atrofida aylantirilganda shar hosil bo'ladi, uning hajmi.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Yarim aylananing og'irlik markazini topish uchun x o'qini uning simmetriya o'qi bo'ylab, y o'qini diametri bo'ylab yo'naltiramiz (78-rasm,б). Yarim aylananing og'irlik markazi x o'qi ustida yotadi. Yarim aylanani y o'q atrofida aylantirisak shar sirti hosil bo'ladi. Uning yuzasi $S = 4\pi R^2$ Yarim aylana uzunligi $L = \pi R$, u holda. yarim aylananing og'irlik markazi quyidagicha topiladi.



78-rasm

Formula yordamida aniqlanadi. U holda yarim doiraning og'irlik markazi

$$x_C = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4}{3\pi} R = 0{,}424\text{R}$$

$$x_C = \frac{\text{S}}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\pi R} = \frac{2}{\pi} R \approx 0{,}6366\text{R}$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Ikkita paralllel kuchning markazi qanday usulda topiladi?
2. Parallel kuchlar markazining koordinatalari qanday formulalarda ifodalanadi?
3. Qattiq jismning og'irlik markazi koordinatalari qanday ifodalanadi?
4. Bir jinsli jismlar (hajm, yuza, chiziq) larning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash formulalari qanday ifodalanadi?
5. Og'irlik markazini aniqlashning simmetriya usuli?
6. Og'irlik markazini aniqlashning bo'laklarga bo'lish usuli?
7. Og'irlik markazini aniqlashning manfiy yuza (hajm) usuli?
8. Og'irlik markazini aniqlashning tajriba usuli?
9. Og'irlik markazini aniqlashning integrallash usuli?
10. Aylana yoyining og'irlik markazi qanday topiladi?
11. Uchburchak yuzasi og'irlik markazi qanday topiladi?
12. Doiraviy sektor yuzasi og'irlik markazi qanday topiladi?
13. Yarim shar hajmining og'irlik markazi qanday topiladi?

11 – MA‘RUZA

KINEMATIKANING ASOSIY TUSHUNCHA VA QOIDALARI. NUQTA HARAKATINING BERILISH USULLARI. HARAKAT VEKTOR USULDA BERILGANDA NUQTANING TEZLIGI. HARAKAT VEKTOR USULDA BERILGANDA NUQTANING TEZLANISHI.

REJA:

11.1 Kinematikaning asosiy tushuncha va qoyidalari.
11.2 Nuqta harakatining berilish usullari.
11.3 Harakat vektor usulda berilganda nuqtani tezligi.
11.4 Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezlanishi.

Adabiyotlar: 4, 8, 9, 12

Tayanch iboralar: kinematika, fazo, vaqt, harakat, metr, soniya (sekund), ko’chish, kinematikaning asosiy masalasi, vektor usuli, koordinatalar usuli, tabiiy usul, tezlik, tezlanish.

11.1. Kinematikaning asosiy tushuncha va qoyidalari.

Jismlarning harakatini ularga ta‘sir etuvchi kuchlar va inertligini (massasini) e‘tiborga olmay, sof geometrik nuqtai nazardan o’rganuvchi nazariy mexanikaning bir qismiga kinematika deyiladi.

Kinematika so`zi yunoncha «kinema» so`zidan olingan bo`lib, harakat ma‘nosini anglatadi. Jismning vaqtga bog’liq ravishda fazoda boshqa jismlarga nisbatan vaziyatini o’zgartirishiga mexanik harakat deyiladi.

Harakat tushunchasi fazo, vaqt* va jism (nuqta) tushunchalari bilan chambarchas bog`liq. Vaqtning turli momentlarida harakatlanuvchi jism (yoki nuqta) ning boshqa jismlarga nisbatan holatini aniqlash uchun sanoq sistemasi tanlanadi. Sanoq sistemasini shartli ravishda qo’zg`almas deb olish yoki harakatdagi jismga biriktirilgan deb qarash mumkin.

* Mexanikada vaqt barcha sanoq sistemalari uchun bir xilda o’tadi va absolyut deb hisoblanadi. Vaqtning o’lchov birligi qilib 1 soniya (1s) qabul qilingan.

Jismning fazoda qiladigan harakati vaqt o`tishi bilan sodir bo'ladi. Mexanikada fazo uch o'lchovli Yevklid fazosi deb qaraladi. Undagi barcha o'lchashlar Yevklid geometriyasi usullari asosida olib boriladi. Uzunlik o'lchov birligi qilib 1 m olingan.

Vaqt uzluksiz o'zgaruvchan va skalyar kattalik. Kinematika masalalarida t vaqt mustaqil o'zgaruvchan (argument) deb qabul qilinadi. Qolgan boshqa o'zgaruvchan kattaliklar (masofa, tezlik va b.q.) vaqt o`tishi bilan o'zgaruvchan kattaliklar yoki t vaqtning funksiyasi hisoblanadi. Vaqtni hisoblash boshlang'ich moment (t=0) dan boshlab olib boriladi.

Ko'chish va harakat tushunchalari kinematikaning asosiy tushunchalaridir. Nuqtaning ma'lum vaqt oralig'ida fazoda bir holatdan boshqa holatga ixtiyoriy ravishda o`tishi ko'chish deyiladi. Nuqtaning boshlang'ich holatdan  oxirgi holatga  vaqtga bog'liq holda aniq bir usulda  o`tishiga harakat deyiladi. Fazoda harakatlanayotgan nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan holati bilan vaqt orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

Kinematikaning asosiy masalasi nuqtaning (jismning) harakat qonunlarini o'rganishdan iborat. Agar nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan harakat qonuni berilgan bo`lsa, nuqta harakatining kinematik harakteristikalari: traektoriya, tezlik va tezlanishlarni aniqlash mumkin bo'ladi. Biror sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanuvchi nuqtaning qoldirgan iziga traektoriya deyiladi.

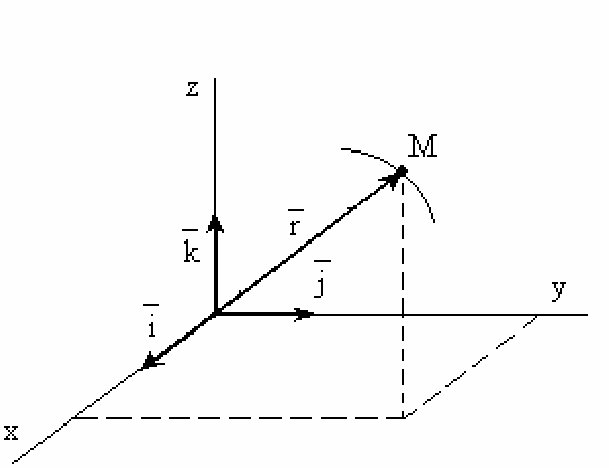
Har qanday qattiq jismni nuqtalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Shu sababli jism harakatini o'rganish uchun uning nuqtalari harakatini o'rganishga to'g'ri keladi. Dastlab nuqta kinematikasini o'rganib, undan keyin qattiq jism kinematikasini o'rganishga o'tiladi.

11.2. Nuqta harakatining berilish usullari.

Nuqta harakati quyidagi uchta usul yordamida beriladi:

1) Vektor usuli,
2) Koordinatalar usuli,
3) Tabiiy usul.

Nuqta harakatining vektor usulda berilishi. M nuqta qandaydir Oxyz koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo'lsin.



79- rasm

Vaqtning istalgan paytida nuqtaning holatini M nuqta va koordinata boshi O ni tutashtirishdan hosil bo'lgan $\bar{r}$ radius–vektor orqali aniqlash mumkin (79-rasm). M nuqta harakatlanayotganida vaqtga bog'liq ravishda $\bar{r}$ radius–vektorning moduli ham, yo'nalishi ham o'zgarib boradi. Demak, $\bar{r}$ radius–vektor t vaqtning vektorli funksiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad (1)$$

(1) tenglamaga nuqtaning vektor shaklidagi harakat tenglamasi deyiladi. Radius- vektorlarning uchlarini tutashtirishda hosil bo'lgan chiziqqa vektorlar godografi deyiladi. Vektorlar godografi harakatlanuvchi nuqtaning traektoriyasi bo`lib hisoblanadi.

Vektorni analitik usulda berish uchun uning koordinata o`qlaridagi proeksiyalari berilgan bo'lishi lozim. $\bar{r}$ vektorning to'g'ri burchakli Dekart koordinata o`qlaridagi proeksiyalari quyidagicha belgilanadi: $r_A = x,\ \mathrm{r_y} = y,\ \mathrm{r_z} = z$

bu yerda: x,y,z- M nuqtaning koordinatalari.

Agar koordinata o`qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}$, $\bar{\mathrm{j}}$ va $\bar{\kappa}$ - deb belgilasak $\bar{r}$ radius–vektor uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (2)$$

(2) tenglik harakatning vektorli va Dekart koordinatalari orqali aniqlash usullari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Nuqta harakatining koordinatalar usulda berilishi. Nuqtaning fazodagi holatini uning x,y,z Dekart koordinatalari orqali aniqlash mumkin. Nuqta harakatlanganda uning koordinatalari vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi, ya'ni x,y,z koordinatalar vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t) \qquad (3)$$

(3) tenglamalarga nuqta harakatining Dekart koordinatalaridagi tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalar yordamida nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilganda harakat qonunini aniqlaydi.

Agar nuqta faqat bitta tekislikda harakatlansa, nuqtaning harakat tenglamalari bittaga kamayadi, ya'ni

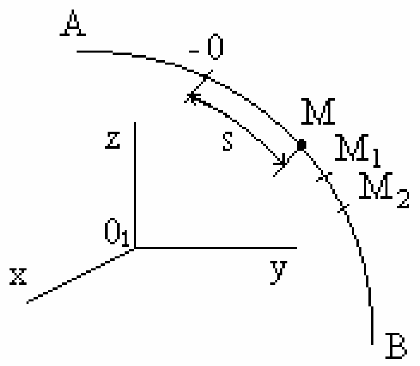
$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t) \qquad (4)$$

Agar nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo`lsa, u holda Ox o`qini shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'naltiramiz. Nuqtani harakat tenglamasi bitta tenglama bilan ifodalanadi:

$$x = f(t) \qquad (5)$$

(5) ga nuqtaning to’g’ri chiziqli harakat tenglamasi deyiladi.

Nuqta harakatining tabiiy usulda berilishi. Nuqtaning traektoriyasi avvaldan ma‘lum bo`lsa, harakatni tabiiy usulda berish maqsadga muvofiqdir. Nuqta O_1xyz koordinatalar sistemasiga nisbatan qandaydir AB egri chiziq bo’ylab harakatlanayotgan bo’lsin (80-rasm). Shu traektoriya ustidan ixtiyoriy qo’zg’almas O nuqta tanlaymiz. O nuqtani sanoq boshi deb ataymiz hamda musbat va manfiy harakat yo’nalishini belgilab olamiz. U holda M nuqtaning traektoriyadagi holati egri chiziqli $S = \overline{O}^{\cup}\overline{M}$ yoy koordinatasi bilan aniqlanadi. M nuqta harakatlanishi natijasida $M_1, M_2, \ldots$ holatlarni egallaydi va vaqt o`tishi bilan s masofa o’zgarib boradi va t vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo’ladi:



80- rasm

$$s = f(t) \qquad (6)$$

(6) tenglamaga M nuqtaning traektoriya bo’ylab harakat tenglamasi yoki harakat qonuni deyiladi.

Agar 1) nuqtaning traektoriyasi, 2) traektoriyada musbat yoki manfiy harakat yo’nalishini ko’rsatuvchi sanoq boshi, 3) nuqtaning traektoriya bo’ylab qiladigan s=f(t) harakat qonunlari avvaldan ma‘lum bo`lsa, nuqtaning harakati tabiiy usulda beriladi.

Shuni ta’kidlash lozimki (6) dagi S kattalik nuqtaning bosib o’tgan yo’lini emas, balki nuqtaning holatini aniqlaydi. Masalan, nuqta O sanoq boshidan harakatlanib M_1 nuqta kelib, yana iziga qaytib M nuqtaga kelsin. Bunday holda nuqtaning koordinatasi $S = OM$ bo’ladi. Bosib o’tgan yo’li $OM + M_1M$ ga teng bo’ladi.

11.3. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi.

To’g’ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan M nuqta harakatlanayotgan bo’lsin. Nuqta vaqtning t paytida $\bar{r}$ radius–vektor bilan aniqlanuvchi M nuqtada, vaqtning t_1 paytida M_1 holatni egallab, radius – vektori $\bar{r}_1$ bo’lsin (81-rasm, a).

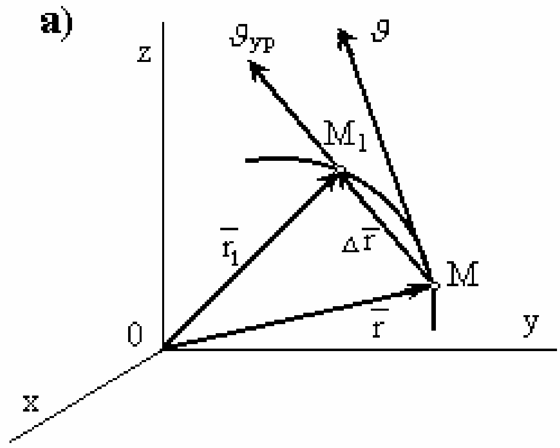
U holda nuqta $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oraligida $\overline{MM}_1 = \Delta \bar{r}$ ga ko'chadi. OMM_1 uchburchakdan quyidagini yozamiz.

$$\overline{MM}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta \bar{r}$$

Ko'chish vektori $\Delta\bar{r}$ ni shu ko'chish sodir bo'ladigan Δt vaqtga nisbati nuqtaning mazkur vaqt oraligidagi o'rtacha tezlik vektori deyiladi.

$$\bar{\vartheta}_{yp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \qquad \textbf{(7)}$$

O'rtacha tezlik vektori $\bar{\vartheta}_{yp}$ $\Delta\bar{r} = \overline{MM}_1$ vektor bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Δt vaqt oralig'i qancha kichik qilib olinsa, nuqta harakatini xarakterlovchi $\bar{\vartheta}_{yp}$ kattalik shuncha aniq bo'ladi. Nuqtaning harakati to'g'risida aniq xarakteristikaga ega bo'lish uchun berilgan ondagi nuqtaning tezligi tushunchasi kiritiladi.



81- rasm

Nuqta o'rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan ondagi tezlik (oniy tezlik) vektori deyiladi va $\bar{\vartheta}$ bilan belgilanadi:

$$\bar{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\bar{\vartheta}_{yp}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

yoki $$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (8)$$

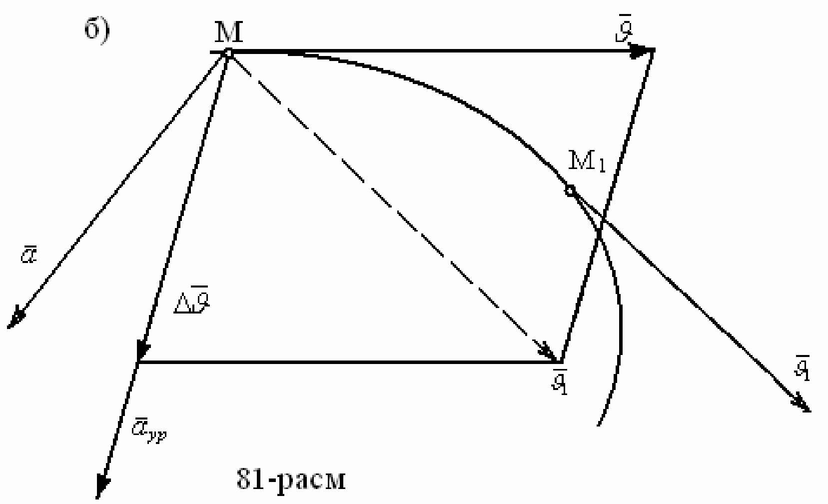
Demak, nuqtaning tezlik vektori uning radiusi – vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Tezlik vektorining o'lchov birligi $[\vartheta] = \frac{[uzunlik]}{[vaqt]} = \frac{L}{T}$, tezlik asosan $\frac{m}{s}$ yoki $\frac{km}{soat}$ larda o'lchanadi.

11.4. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezlanishi.

Biror vaqt oraligida nuqta tezligi moduli va yo'nalishining o'zgarishini xarakterlovchi kattalikka tezlanish deyiladi.

Vaqtning qandaydir t paytida nuqta M holatda bo`lib tezligi $\bar{\vartheta}$, vaqtning t_1 paytida nuqta M_1 holatga kelib tezligi $\bar{\vartheta}_1$ bo'lsin (81–расм,б).



81-расм

$\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida nuqtaning tezligi $\Delta\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_1 - \vartheta$ orttirma oladi. $\Delta\bar{\vartheta}$ tezlik orttirmasini aniqlash uchun $\bar{\vartheta}_1$ M_1 tezlik vektorini M nuqtaga o'z-o'ziga parallel ko'chirib, $\bar{\vartheta}$ va $\bar{\vartheta}_1$ tezlik vektorlari asosida parallelogram quramiz.

Parallelogramning ikkinchi tomoni $\Delta\bar{\vartheta}$ tezlik orttirmasi bo`lib hisoblanadi. Shuni qayd qilish kerakki, $\Delta\bar{\vartheta}$ tezlik vektori doimo traektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

$\Delta\bar{\vartheta}$ tezlik orttirmasini Δt ga nisbati nuqtaning o'rtacha tezlanishi deyiladi:

$$\bar{a}_{yp} = \frac{\Delta\bar{\vartheta}}{\Delta t} \qquad (9)$$

$\bar{a}_{yp}$ vektorning yo'nalishi $\Delta\bar{\vartheta}$ vektorning yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Nuqtaning o'rtacha tezlanish vektori $\bar{a}_{yP}$ ni Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori deyiladi:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\vartheta}}{\Delta t} \qquad \text{yoki} \qquad \bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \qquad (10)$$

Demak, nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori nuqta tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga yoki radius–vektordan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga teng.

Tezlanishning o'lchov birligi $\frac{L}{T^2}$ yoki $\frac{uzunlik}{(vaqt)^2}$, tezlanish asosan $\frac{m}{s^2}$ da o'lchanadi.

Agar nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo`lsa tezlanish vektori shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Agar traektoriya egri chiziqdan iborat bo`lsa, tezlanish vektori traektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kinematika deb nimaga aytiladi?
2. Fazo nima?
3. Vaqt qanday kattalik?
4. Ko'chish deb nimaga aytiladi?
5. Harakat deb nimaga aytiladi?
6. Kinematikaning asosiy masalasi nima?
7. Harakat vektor usulda qanday ifodalanadi?
8. Harakat koordinata usulda qanday ifodalanadi?
9. Harakat tabiiy usulda qanday ifodalanadi?
10. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi formulasi qanday ifodalanadi?
11. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezlanishi formulasi qanday ifodalanadi?

12 – MA'RUZA
HARAKAT KOORDINATA USULDA BERILGANDA NUQTANING TEZLIGI VA TEZLANISHI. HARAKAT TABIIY USULDA BERILGANDA NUQTANING TEZLIGI. URINMA VA NORMAL TEZLANISHLAR.

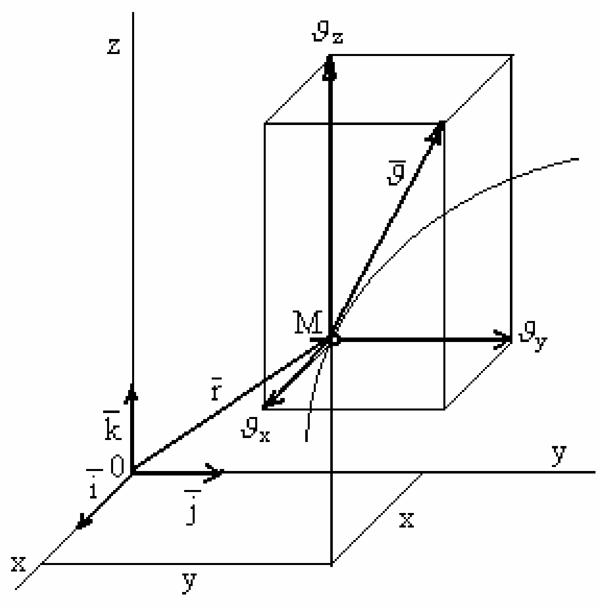
REJA:
12.1. Harakat koordinata usulda berilganda nuqtaning tezligi.
12.2. Harakat koordinata usulda berilganda nuqtaning tezlanishi.
12.3. Harakat tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi.
12.4. Urinma va normal tezlanishlar.

Adabiyotlar: 1, 4, 8, 9, 12, 13.

Tayanch iboralar: tezlik moduli, tezlikning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari, tezlikning yo'naltiruvchi kosinuslari, tezlanish moduli, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari, tabiiy koordinata sistemasi, urinma tezlanish, normal tezlanish, to'liq tezlanish.

12.1. Harakat koordinatalar usulida berilganda nuqtaning tezligi .

Harakat koordinatalar usulida berilganda nuqtaning tezligining moduli va yo'nalishini aniqlaymiz.
Nuqta $x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$ qonuniyat bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. Koordinata o'qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}$, $\bar{j}$ va $\bar{\kappa}$ bilan belgilab, M nuqtani koordinata boshi O nuqta bilan tutashtirib $\bar{r}$ radius- vektorini o'tkazamiz (82-rasm).



82 -rasm

Paralellepipedning yasovchilarini Oxyz koordinata o'qlariga parallel yo'naltiramiz. U holda $\bar{r}$ radius-vektor va $\bar{\vartheta}$ tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proeksiyalari quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (11)$$

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_x\bar{i} + \vartheta_y\bar{j} + \vartheta_z\bar{\kappa} \qquad (12)$$

(8) ni e'tiborga olib (11) tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{\kappa} \qquad (13)$$

(12) va (13) larning birlik vektorlari oldidagi koeffisentlar o'zaro tengligidan quyiidagilarni hosil qilamiz.

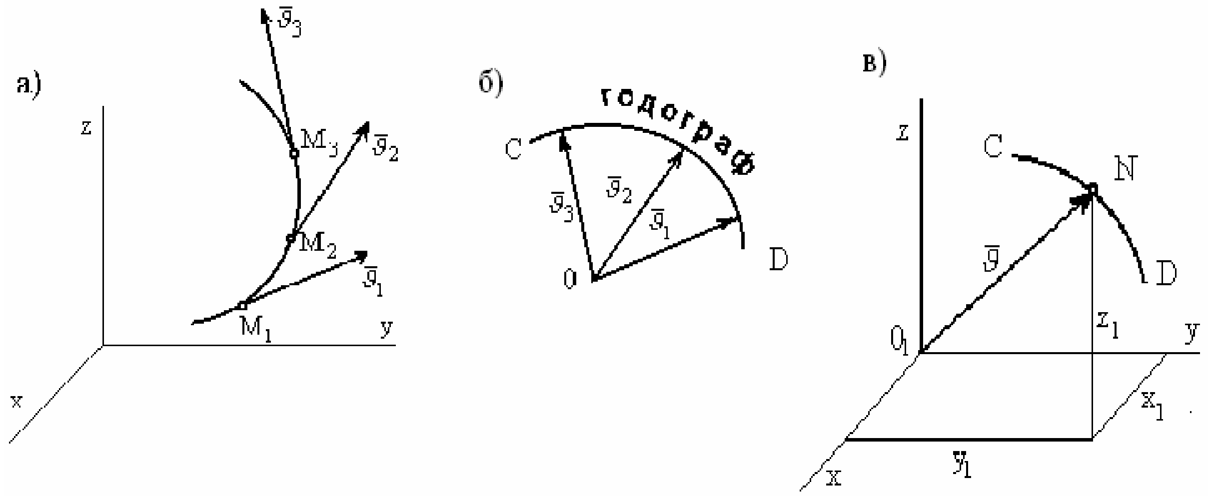
$$\vartheta_X = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \vartheta_Y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \vartheta_Z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (14)$$

(14) tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini ifodalaydi.

Shunday qilib, nuqta tezligining biror qo'zg'almas Dekart koordinata o'qidagi proeksiyasi, nuqtaning shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga teng.

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi.

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_Z^2} \quad (15) \qquad \cos\alpha = \frac{\vartheta_X}{\vartheta}, \quad \cos\beta = \frac{\vartheta_Y}{\vartheta}, \quad \cos = \frac{\vartheta_Z}{\vartheta} \quad (16)$$



83-rasm

Egri chiziqli notekis harakatda nuqta tezligining moduli ham yo'nalishi ham o'zgaradi. Nuqta O*xyz* koordinata sistemasiga nisbatan notekis egri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsin (83-rasm,a). Nuqtaning traektoriyada egallagan bir necha $M_1, M_2, M_3,$ ketma ket holatlariga mos tezliklarning barchasini miqdor va yo'nalishlarini o'zgartirmay biror O_1 qutbga keltiraylik (83-rasm, б).

Bu holda tezlik vektorining uchlarini tutashtirishda hosil bo'lgan CD egri chiziq nuqta tezligining godografi deyiladi.

Ixtiyoriy O_1 *xyz* koordinata sistemasi olib СД tezlik godografini unga parallel qilib ko'chiramiz (83-rasm,в). Tezlik godografi ixtiyoriy N nuqtasining radius-vektori $\bar{\vartheta}$ tezlikdan iborat bo'ladi. Godograf nuqtasining koordinatalari tegishlicha x_1, y_1 ,z bo'lsin., u holda:

$$x_1 = \vartheta_x = \dot{x}, \quad y_1 = \vartheta_y = \dot{y}, \quad z_1 = \vartheta_z = \dot{z}, \qquad (17)$$

Bu tenglamalar tezlik godografining parametrik tenglamalarini ifodalaydi.

12.2. HARAKAT KOORDINATALAR USULIDA BERILGANDA NUQTANING TEZLANISHI.

Nuqtaning harakati

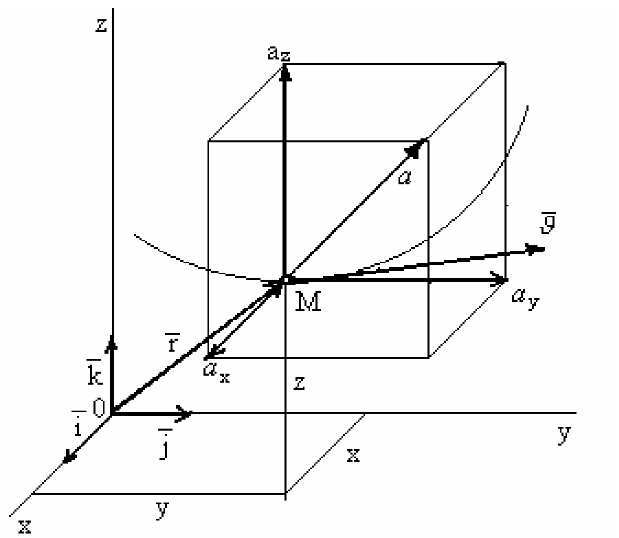
$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. M nuqtaning radius-vektori $\bar{r}$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

ko'rinishda bo'lsin.

Nuqtaning tezlanishi radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng, $\bar{i}, \bar{j}$ va $\bar{k}$ vektorlar o'zgarmas bo'lganligidan (84 – rasm)



84-rasm

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

$\bar{a}$ tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proeksiyalari quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\bar{a} = a_X\bar{i} + a_Y\bar{j} + a_Z\bar{k}$$

a_x, a_y, a_z - $\bar{a}$ tezlanishning x,y,z o'qlaridagi proeksiyalari. Tezlanishni aniqlovchi ikki formulani o'zaro solishtirib quyidagini hosil qilamiz.

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta_X}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\vartheta_y}{dt} = \ddot{y}, \quad a_Z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\vartheta_Z}{dt} = \ddot{z} \qquad (18)$$

Demak, tezlanish vektorining biror qo'zg'almas Dekart koordinatalar o'qidagi proeksiyasi, nuqtaning mos koordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilasiga yoki tezlik vektorining mos koordinata o'qlaridagi proeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga teng bo'ladi.

Nuqta tezlanishining moduli va yo'nalishi quyidagi formulalardan topiladi.

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} \qquad (19)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a} \qquad (20)$$

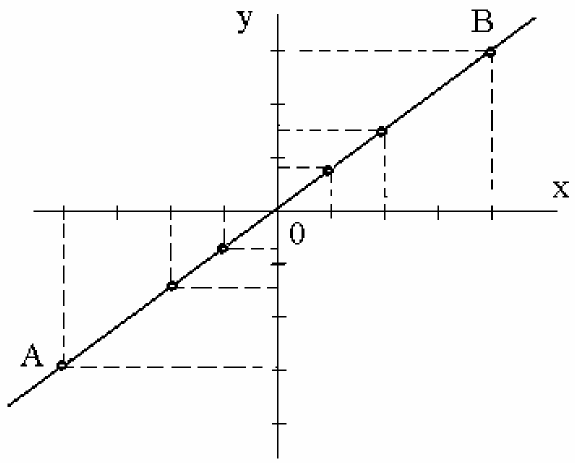
bu yerda α_1, β_1, γ_1- tezlanish vektorining koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari.

18-masala. Nuqtaning harakat tenglamasi

$x = 8t - 4t^2$, $\quad y = 6t - 3t^2$

ko'rinishda berilgan (x,y – metrlarda, t-soniyalarda). Nuqtaning trektoriyasi, tezligi va tezlanishini aniqlang.

Yechish. Nuqtaning harakat tenglamasiga ko'ra uning traektoriya tenglamasini topish uchun harakat tenglamadagi t vaqtni chiqarib tashlash lozim. Buning uchun birinchi tenglamaning har ikkala tomonini 3 ga, ikkinchi tenglamaning har ikkala tomonini 4 ga ko'paytiramiz:



85 - rasm

$x = 8t - 4t^2 \quad 3 \qquad 3x = 24t - 12t^2$

$y = 6t - 3t^2 \quad 4 \qquad 4_y = 24t - 12t^2$

Birinchisidan ikkinchisini ayiramiz.

$3x - 4y = 0 \qquad yoki \qquad y = \frac{3}{4}x \qquad (1)$

Bu nuqtaning traektoriya tenglamasi. Nuqtaning traektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat ekan (85-rasm).

У	0	0,75	1,5	3	-0,75	-1,5	-3
X	0	1	2	4	-1	-2	-4

Nuqtaning tezligini aniqlaymiz. Nuqtaning harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\vartheta_X = \frac{dx}{dt} = 8 - 8t = 8(1-t) \qquad \vartheta_Y = \frac{dy}{dt} = 6 - 6t = 6(1-t)$$

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_X^2 + \vartheta_Y^2} = \sqrt{8^2(1-t)^2 + 6^2(1-t)^2} = \sqrt{(8^2+6^2)(1-t)^2} = \sqrt{(64+36)(1-t)^2} == 10(1-t)$$

Nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz. (2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$a_X = \frac{d\vartheta_X}{dt} = -8; \qquad a_z = -6;$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10\text{м}/c^2$$

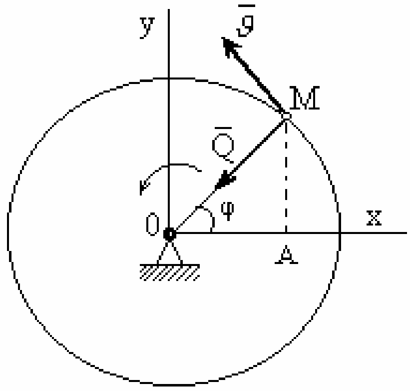
Nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlari AB to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan.

19-masala. Qo'zg'almas O markaz atrofida aylanma harakat qiluvchi OM= r krivoshipning oxirgi uchi M nuqtasining harakat tenglamasi, tezligi va tezlanishini aniqlang. Krivoshipning gorizantal o'qqa nisbatan burilish burchagi $\varphi = \omega t$ qonun bo'yicha o'zgaradi.

Yechish. O nuqtani koordinata boshi qilib *x, y* o'qlarini o'tkazamiz (86-rasm). M nuqtaning koordinatasi

$$x = OA = OM\ \cos\varphi = \mathrm{r}\ \cos\omega\ \mathrm{t}$$

$$y = AM = OM \sin\varphi = \mathrm{r}\sin\omega\,\mathrm{t}$$



86-rasm

M nuqtaning tezligining koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini (12) ga asosan aniqlaymiz.

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t$$

$$\vartheta_y = \frac{dy}{dt} = -r\omega\cos\omega t$$

M nuqta tezligining modulini (15) formulaga ko'ra aniqlaymiz.

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_X^2 + \vartheta_Y^2} = \sqrt{(-r\omega\sin\omega\,\mathrm{t})^2 + (r\omega\cos\omega\,\mathrm{t})^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin\omega t + r^2\omega^2 cos^2\omega t} = r\cdot\omega = \mathrm{const}$$

M nuqtaning tezligi o’zgarmas kattalik ekan. Tezlik yo’nalishini esa (16) formulaga ko’ra aniqlaymiz.

$$\cos(\bar{\vartheta},\wedge x)=\frac{\vartheta_x}{\vartheta}=\frac{-r\omega\sin\omega t}{r\omega}=-\sin\varphi$$

$$\cos(\bar{\vartheta},\wedge y)=\frac{\vartheta_y}{\vartheta}=\frac{-r\omega cos\omega t}{r\omega}=cos\varphi$$

M nuqtaning tezlanishini (18) va (19) formulalardan foydalanib topamiz.

$$a_X=\frac{d\vartheta_X}{dt}=-r\omega^2\cos\omega t$$

$$a_Y=\frac{d\vartheta_Y}{dt}=-r\omega^2\sin\omega t$$

$$a=\sqrt{a_X^2+a_y^2}=\sqrt{\left(-\mathrm{r}\omega^2\cos\omega t\right)^2+\left(-r\omega^2\sin\omega\,\mathrm{t}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{r^2\omega^4\cos^2\omega t+r^2\omega^4\sin^2\omega t}=r\omega^2=const$$

M nuqtaning tezlanishi ham o’zgarmas miqdor ekan. M nuqta tezlanishning yo’nalishini (20) ga ko’ra aniqlaymiz.

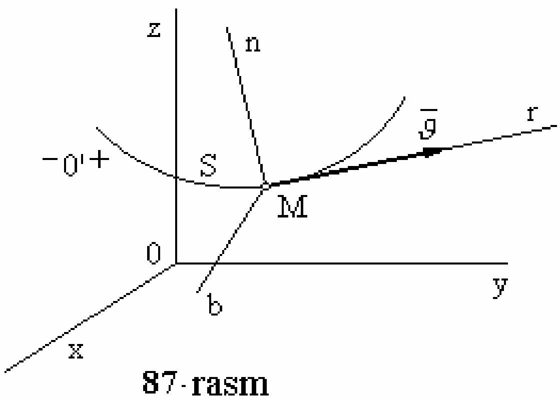
$$\cos(a,\wedge x)=\frac{a_X}{a}=\frac{-r\omega^2\cos\omega\,\mathrm{t}}{r\omega^2}=-cos\varphi$$

$$\cos(a,\wedge y)=\frac{a_Y}{a}=\frac{-r\omega^2\sin\omega\,\mathrm{t}}{r\omega^2}=-\sin\varphi$$

Demak, krivoshipning M uchi O markaz atrofida tekis aylanma harakat qiladi.

12.3. Harakat tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi .

Nuqtaning harakati s=f(t) ko’rinishda ya‘ni tabiiy usulda berilganda uning tezligi va tezlanishini aniqlaymiz.



87-rasm

Biz shu paytgacha nuqtani $\bar{\vartheta}$ tezlik, $\bar{a}$ tezlanish vektorlarining modullarini qo’zg’almas O*xyz* koordinata sistemasi o’qlaridagi proeksiyalari orqali aniqlagan edik. Harakat tabbiy usulda berilganda nuqtaning $\bar{\vartheta}$ tezlik va $\bar{a}$ tezlanish vektorlarining modullarini qo’zg’almas O*xyz* koordinata sistemasiga emas, balki nuqta bilan birgalikda harakatlanuvchi $M\tau nb$ koordinata sistemasi o’qlaridagi proeksiyalari orqali aniqlanadi. $M\tau$ o’q nuqtaning traektoriyasiga urinma qilib yo’naltiriladi. Mn o’q $M\tau$ o’qqa

perpendikulyar traektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'naltiriladi. Bu o'qqa bosh normal o'qi deyiladi. Ikkala o'qqa perpendikulyar qilib Mb o'qi yo'naltiriladi. Bu o'qqa binormal o'qi deyiladi (87-rasm).
Nuqtaning $\bar{\vartheta}$ tezlik vektori traektoriyaga urinma bo'ylab yo'nalgan. Uning $M\tau$ o'qdagi proeksiyasi ϑ_τ $\vartheta_\tau = \vartheta$ yoki $\vartheta_\tau = -\vartheta$ bo'lishi mumkin. Bundan keyin ϑ_τ ni ϑ bilan belgilaymiz.

ϑ ning qiymatini aniqlashga o'tamiz. Nuqta vaqtning t paytida trayektoriyaning M nuqtasida, $t_1 + \Delta t$ vaqtdan keyin M_1 nuqtasiga kelsin. Δt vaqt oralig'ida nuqta egri chiziqli trektoriya bo'ylab $\Delta s = \overset{\cup}{MM_1}$ ga ko'chadi (79-rasm). Δs- nuqta koordinatasi orttirmasi. Nuqtaning o'rtacha tezligi $\vartheta_{yp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ formula yordamida aniqlanadi
Nuqtaning berilgan ondagi tezligi o'rtacha tezlikdan Δt ni nolga intiltirib olingan limitga teng

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

yoki $$\vartheta = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (21)$$

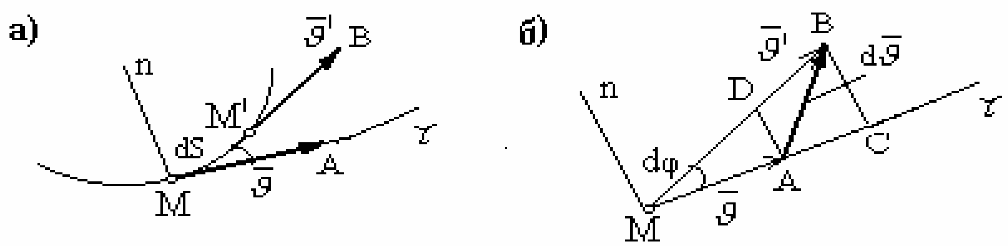
Nuqtaning tezligi masofadan (egri chiziqli koordinatadan) vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga teng.

12.4. Nuqtaning urinma va normal tezlanishlari.

Nuqta $M\tau n$ tekisligida harakatlanganligi uchun nuqta tezlanish vektorining Mb o'qdagi proeksiyasi $(a_b = 0)$ nolga teng. Chunki Mb - o'q bu tekislikka perpendikulyar yo'nalgan. Nuqta tezlanishining $M\tau$ va Mn o'qlardagi proeksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun (10) tenglikni $M\tau$ va Mn o'qlariga proeksiyalaymiz:

$$a_\tau = \frac{(d\vartheta)\tau}{dt}, \qquad a_n = \frac{(d\vartheta)n}{dt} \qquad (22)$$

Nuqtaning M va M[1] holatlardagi tezliklarining farqini $d\bar{\vartheta}$ vektor bilan belgilaymiz (88 -rasm,a), u xolda



88-rasm

$$d\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}^1 - \overline{\vartheta}. \qquad \overline{\vartheta} = \overline{MA} \text{ ва } \overline{\vartheta}^1 = \overline{MB}$$

$\overline{\vartheta} = \overline{MA}$ va $\overline{\vartheta}' = \overline{MB}$ vektorlarni umumiy bo`lgan M nuqtaga ko'chiramiz, (88-rasm, b) natijada $d\overline{\vartheta} = \overline{AB}$ bo'ladi. $d\varphi$ burchak juda kichik bo'lsa, ABCD figurani to'g'ri burchakli deb qarash mumkin. U holda:

$(d\vartheta)_\tau = AC = DB = MB - MA = \vartheta^1 - \vartheta = d\vartheta$

Yoyni vatarga nisbatidan olingan limit birga teng bo'lgani uchun AD, MA radiusning elementar yoyi hisoblanadi, u holda

$$(d\vartheta)_n = AD = MAd\varphi = \vartheta d\varphi$$

$(d\vartheta)_\tau$ va $(d\vartheta)_n$ larning qiymatlarini (22) ga qo'yib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad a_n = \vartheta\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (23)$$

(23) ning ikkinchi tengligini o'ng tomonini o'zgartiramiz:

$$\vartheta\frac{d\varphi}{dt} = \vartheta\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}$$

bu yerda: $\frac{d\varphi}{ds} = k$ - egri chiziqning egrilik koeffisienti. Uni quyidagi ko'rinishda belgilaymiz:

$$k = \frac{1}{\rho} \qquad (24)$$

bu yerda: ρ - egri chiziqning egrilik radiusi.

(21) va (24) ni e'tiborga olsak (23) ning ikkinchi tengligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$a_n = \vartheta\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \vartheta\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vartheta = \frac{\vartheta^2}{\rho}$$

Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},. \qquad a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}, \qquad a_в = 0 \qquad (25)$$

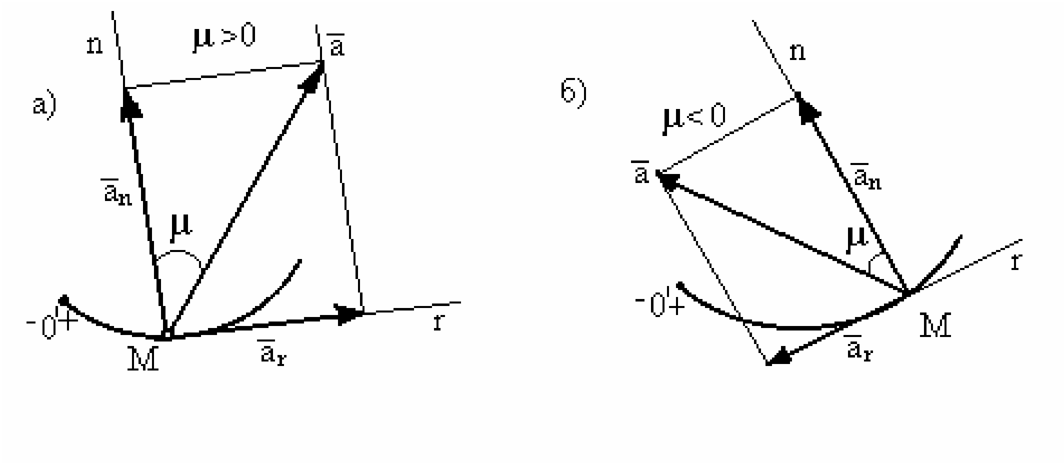
$a_\tau -$ nuqtaning urinma (tangensial) tezlanishi,

a_n - nuqtaning normal tezlanishi.

Shunday qilib, nuqta tezlanishining urinmadagi proeksiyasi tezlikning algebraik qiymatidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga yoki nuqtani yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilasiga teng, nuqta tezlanishining bosh normaldagi proeksiyasi, nuqta tezligi kvadratning traektoriyani berilgan nuqtadagi egrilik radiusi nisbatiga teng.

Nuqtaning tezlanish vektori $\bar{a}$, urinma tezlanish $\bar{a}_\tau$ va normal tezlanish $\bar{a}_n$ larning geometrik yig'indisiga teng (89-rasm).

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$$



89-rasm

Tezlanish moduli va yo'nalishi

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{\rho}\right)^2}$$

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} \qquad (26)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

bu yerda - $\mu > 0$ bo'lsa $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ bo'ladi, u holda $\bar{a}$ tezlanish vektori M_n normaldan M_τ o'qi tomon og'gan bo'ladi (89-rasm,a), $\mu < 0$ bo'lsa teskari tomonga og'adi (89-rasm, б).

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Nuqta tezligining Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari qanday aniqlanadi?

2. Tezlik godografi deganda nimani tushunasiz, uning parametrik tenglamalari?

3. Nuqta tezlanishining Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari nimaga teng?

4. Nuqtaning tezlik va tezlanish moduli qanday aniqlanadi?

5. Tabiiy koordinata sistemasi Dekart koordinata sistemasidan qanday farq qiladi?

6. Harakat tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi qanday aniqlanadi?

7. Nuqtaning urinma tezlanishi qanday formula bilan aniqlanadi?

8. Nuqtaning normal tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?

9. Nuqtaning to'liq tezlanishi modulini ifodalovchi tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?

10. Nuqtaning qanday harakatida normal tezlanish nolga teng?

11. Nuqtaning qanday harakatida urinma tezlanish nolga teng?

13 – MA'RUZA

QATTIQ JISMNING ILGARILANMA HARAKATI. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI. BURCHAK TEZLIK, BURCHAK TEZLANISH.

REJA:

13.1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati.
13.2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati. Burchak tezlik. Burchak tezlanish.
13.3. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezligi.
13.4. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanishi.
13.5. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlari.

Adabiyotlar: 3, 4, 8, 9, 11, 12.

Tayanch iboralar: ilgarilanma harakat, absolyut qattiq jism, aylanma harakat, aylanish o'qi, aylanma harakat tenglamasi, burilish burchagi, burchak tezlik, burchak tezlanish, aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezligi, aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanishi, aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlari.

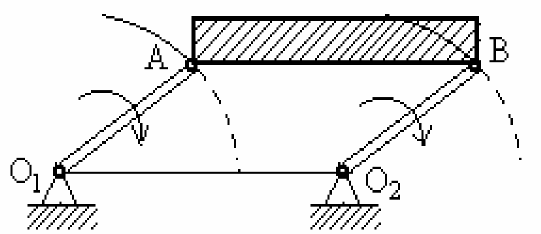
13.1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati.

Barcha qattiq jismlarni kinematikada ham statikadagi kabi absolyut qattiq jism deb qaraladi. Qattiq jism kinematikasida uchraydigan masalalar ikki qismga bo'linadi:

1) butun jismning harakati va bu harakatning kinematik harakteristikalarini aniqlash;

2) jism har bir nuqtasining harakatini o'rganish.

Dastlab qattiq jismning ilgarilanma harakatini o'rganishdan boshlaymiz.



90-rasm

Jismda olingan har qanday kesma jism harakati davomida hamma vaqt o'z – o'ziga parallel ko'chsa., jismning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi.

Ilgarilanma harakatni to'g'ri chiziqli harakat bilan almashtirmaslik kerak. Masalan, to'g'ri chiziqli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib kuzov nuqtalarining traektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat.

AB sparnik O_1A va O_2B krivoshiplar atrofida aylanishi natijasida ilgarilanma harakat qiladi. AB sparnik hamma vaqt o'z–o'ziga parallel ko'chadi. Sparnikning A va B nuqtalari markazlari O_1, O_2 nuqtalarda yotgan aylanalar chizadi. Bu holda sparnikning nuqtalari aylana bo'ylab harakat qiladi (90- rasm).

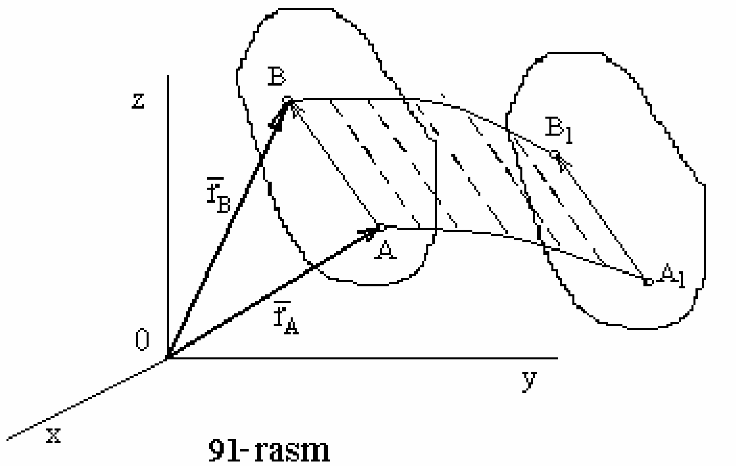
Ilgarilanma harakatning xossalari quyidagi teoremadan aniqlanadi.

Teorema. Ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalari bir xil traektoriya chizadi va har onda moduli va yo'nalishi bir xil bo'lgan tezlik va tezlanishlarga ega bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun O*xyz* koordinata sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismni ko'rib chiqamiz. Qattiq jismdan ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalarni olamiz. Vaqtning t paytida ularning holatlari tegishlicha $\bar{r}_A$ va $\bar{r}_B$ radius – vektorlar orqali aniqlansin (91-rasm). Bu nuqtalarni tutashtiruvchi $\overline{AB}$ vektorni o'tkazamiz, u holda

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{A}\overline{B} \qquad (27)$$

Qattiq jism absolyut qattiq jism bo'lganligi uchun $\overline{A}\overline{B}$ - vektor o'zgarmas kattalik, shuningdek qattiq jism ilgarilanma harakatlanayotgani uchun uning yo'nalishi ham o'zgarmaydi. Shunday qilib qattiq jism harakatlanayotganida $\overline{AB}$ vektor o'zgarmaydi ($\overline{AB}$=const) . Demak A va B nuqtalarning traektoriyalari bir hil egri chiziqdan iborat. A va B nuqtalarning tezliklarini topish uchun (35) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:



91-rasm

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\left(A\bar{B}\right)}{dt}$$

$\overline{A}\overline{B}$ o'zgarmas bo'lgani uchun uning hosilasi nolga teng. $\bar{r}_A$ va $\bar{r}_B$ radius – vektorlarning vaqt bo'yicha olingan hosilalari A va B nuqtalar tezliklarini beradi, ya'ni

$$\bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta}_B$$

Vaqtning istalgant payti uchun A va B nuqtalarning tezliklarining moduli va yo'nalishi bir hil bo'ladi. Oxirgi tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{\vartheta}_A}{dt} = \frac{d\bar{\vartheta}_B}{dt} \qquad \text{yoki} \qquad \bar{a}_A = \bar{a}_B$$

Demak, vaqtning istalgan paytida A va B nuqtalar tezlanishlarining modullari ham yo'nalishlari ham bir xil bo'ladi.

A va B nuqtalar ixtiyoriy tanlangan edi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki vaqtning istalgan paytida jismning barcha nuqtalarining traektoriyalari, shuningdek tezlik va tezlanishlari bir xil bo'ladi. Shunday qilib teorema isbotlandi.

Teoremadan yana shu narsani bilib olish mumkinki, qattiq jismning ilgarilanma harakatini uning bitta nuqtasi harakati orqali aniqlab olish mumkin. Yana shu narsani ta'kidlash lozimki, tezlik va tezlanish tushunchalari faqat jismning ilgarilanma harakati uchun ta'luqli. Qolgan barcha hollar uchun qattiq jism nuqtalari turli xil tezlik va tezlanishlar bilan harakatlanadi.

Qattiq jismning bunday harakatlarida “jismning tezligi”, yoki “jismning tezlanishi” degan terminlar mazmunini yo’qotadi.

13.2. Qattiq jismning qo’zg’almas o’q atrofida aylanma harakati.

Qattiq jismning qandaydir ikkita nuqtasi uning harakati davomida qo’zg’almasdan qolsa, bunday harakatga qo’zg’almas o’q atrofidagi aylanma harakat deyiladi. Qo’zg’almas A va B nuqtalar orqali o’tuvchi AB to’g’ri chiziqqa aylanish o’qi deyiladi. Aylanma harakatda qattiq jismning o’q ustida yotgan barcha nuqtalari qo’zg’almas bo’ladi. Jismning qolgan barcha nuqtalari, aylanish o’qiga perpendikulyar tekislikda markazi aylanish o’qida yotgan aylanalar chizadi. Aylanma harakat qilayotgan jismning holatini aniqlash uchun aylanish o’qi orqali qo’zg’almas I tekislik, qattiq jismga biriktirilgan va u bilan birgalikda aylanuvchi II tekislikni o’tqazamiz (92-rasm). Qattiq jismni vaqtning istalgan paytdagi holati tekisliklar orasidagi burilish burchagi deb ataluvchi φ burchak orqali aniqlanadi. φ burchak musbat yoki manfiy ishorada bo’lishi mumkin. Az o’qning musbat uchidan qaraganimizda qattiq jism o’q atrofida soat mili aylanishiga teskari yo’nalishda aylansa, burilish burchagi musbat, aks holda manfiy ishorada olinadi.

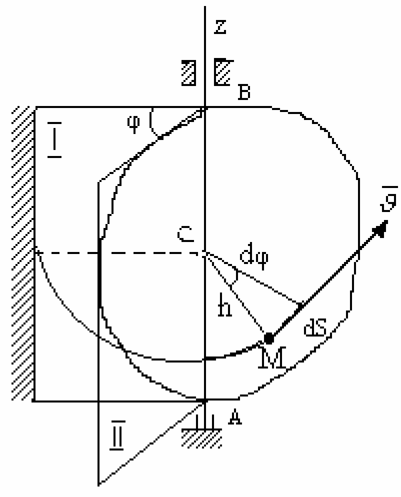
Burilish burchagi φ-radianlarda o’lchanadi. Jismni vaqtning istalgan paytidagi holatini aniqlash uchun burilish burchagi φ ning t vaqtga bog’liqligini bilish zarur, ya‘ni:

$$\varphi=f(t) \qquad (28)$$

(28) qattiq jismning qo’zg’almas o’q atrofidagi aylanma harakati tenglamasi.

Qattiq jism aylanma harakatining kinematik harakteristikalarini aniqlashga o’tamiz. Vaqtning t paytidagi burilish burchagi φ bo’lib, vaqtning $t_1 = t + \Delta t$ paytida burilish burchagi $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ ga teng bo’lsin. Qattiq jism Δt vaqt oralig’ida $\Delta\varphi$ burchakka buriladi. Burilish burchagi $\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbatan o’rtacha burchak tezligi deyiladi.

$$\omega_{yp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



92-rasm

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining berilgan ondagi burchak tezligini topish uchun o'rtacha burchak tezligining Δt nolga intilgandagi limitini olamiz.

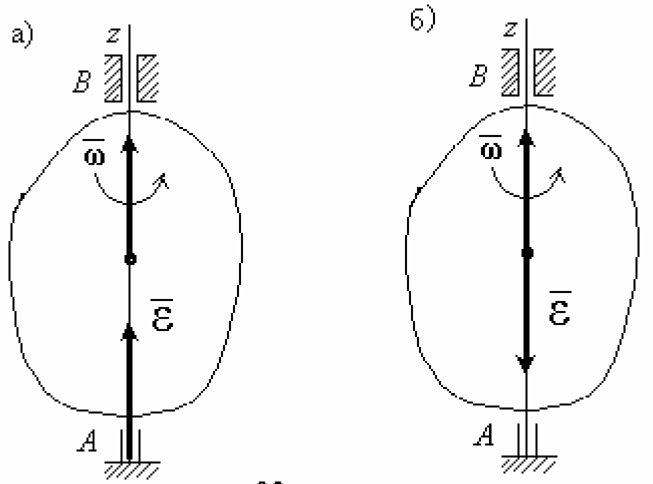
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (29)$$

Shunday qilib, jismning burchak tezligi burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga teng. Qattiq jism o'q atrofida soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanayotgan bo'lsa $\omega > 0$, soat mili aylanishi bo'yicha aylanayotgan bo'lsa $\omega < 0$ bo'ladi. burchak tezligining o'lchami $\frac{1}{T}$ yoki $\frac{1}{vaqt}$. O'lchov birligiga yoki $\frac{1}{s}(s^{-1})$ chunki radian o'lchamsiz kattalik.

Burchak tezlik vektor ko'rinishda ifodalanadi. Uning moduli $|\overline{\omega}|$ ga teng. Burchak tezlik vektori jismning aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan va uning musbat yo'nalishidan qaralganda aylanish soat mili aylanishiga teskari yo'nalgan bo'ladi (93 – rasm).

Burchak tezlanish burchak tezligini vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishini xarakterlovchi kattalik.

Vaqtning t paytida jismning burchak tezligi ω vaqtning $\Delta t = t_1 + \Delta t$ paytida burchak tezligi ω_1 bo'lsin $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida jism burchak tezligi orttirmasa $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ ga teng bo'ladi. $\Delta\omega$ ning Δt ga nisbati jismning shu vaqtdagi o'rtacha burchak tezlanishi deyiladi.



93-rasm

$$\varepsilon_{yp} = \frac{\Delta\,\omega}{\Delta\,t}$$

O'rtacha burchak tezlanishining Δt nolga intilgandagi limiti jismning berilgan ondagi burchak tezlanishi deyiladi.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

(29) ni e'tiborga olsak

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (30)$$

ko'rinishda yoziladi.

Shunday qilib jismning berilgan ondagi burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga, burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilasiga teng.

O'lchami $\frac{1}{T^2}$ $yoki$ $\frac{1}{vakt^2}$, o'lchov birligi $\frac{|рад|}{s^2}$ yoki $\frac{1}{s^2}$ (s^{-2})

Agar vaqt o'tishi bilan burchak tezligining moduli ortib borsa, jismning aylanishi tezlanuvchan aylanma harakat, kamaya borsa, sekinlanuvchan aylanma harakat bo'ladi. ω va ε bir hil ishorada bo'lsa aylanma harakat tezlanuvchan, har hil ishorada sekinlanuvchan bo'ladi.

Burchak tezlanishi ham vektor ko'rinishda ifodalanadi. Bu holda u quyidagicha ifodalanadi.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \qquad (31)$$

Agar jism tezlanuvchan aylanayotgan bo'lsa $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{\omega}$ vektorlar bir tomonga yo'nalgan bo'ladi sekinlanuvchan aylanma harakatda esa $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{\omega}$ vektorlari qarama – qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi (93-rasm,б).

Tekis va tekis o'zgaruvchan aylanma harakat*

Jism harakati davomida uning burchak tezligi o'zgarmay qolsa (ω=const), jismning bunday aylanishiga tekis aylanma harakat deyiladi. Tekis aylanma harakat qonunini aniqlaymiz. (29) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\varphi = \omega\, dt$$

Tenglikning chap tomonini φ_0 dan φ gacha , o'ng tomonini 0 dan t chegaralarda integrallaymiz.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega\, dt$$

yoki:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t \text{ yoki } \varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (32)$$

Bu jismning tekis aylanma harakat tenglamasi.

agar φ_0=0 bo'lsa

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (33)$$

Texnikada ko'pincha, jism tekis aylanma harakat qilayotgan bo'lsa, u minutdagi aylanishlar soni bilan ifodalanadi. Jism bir marta to'liq aylanganda burilish burchagi $\varphi = 2\pi$ bo'ladi. Jism bir minutda n marta aylansa, tekis aylanma harakat burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \frac{2\pi\, n}{60} = \frac{\pi\, n}{30} \approx 0{,}1\pi s^{-1} \quad (34)$$

Jism harakati davomida burchak tezlanishi o'zgarmay qolsa $(\varepsilon = \text{const})$, uning bunday harakatiga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi.

(31) tenglikning quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\omega = \varepsilon\, \mathrm{dt}$$

tenglikning chap tomonini ω_0 dan ω gacha, o'ng tomonini 0 dan t gacha chegaralarda integrallaymiz.

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\,\omega = \varepsilon \int_0^t dt$$

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon\, t \ \text{ yoki } \ \omega = \omega_0 + \varepsilon\, t \qquad (35)$$

(35) ifodani quyidagi ko'rinishda keltiramiz.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon\, t \quad \text{yoki } \mathrm{d}\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon\, \mathrm{t\,d\,t}$$

Tenglikni ikkinchi marta integrallaymiz.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (36)$$

Bu jismning tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi.

13.3. Aylanma harakat qilayotgan jism nuqtasining tezligi.

Qattiq jismning aylanish o'qidan h masofada joylashgan M nuqtasini ko'rib chiqamiz (94-rasm). Jism aylanma harakatlanayotganida, M nuqta aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikda radiusi h ga teng bo'lgan markazi aylanish o'qida yotgan aylana chizadi. Jism dt vaqt oralig'ida dφ burchakka burilsa, M nuqta aylana bo'ylab harakatlanib ds =h dφ yoy koordinatasini o'tadi. U holda nuqtaning tezligi quyidagicha aniqlanadi.

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$$

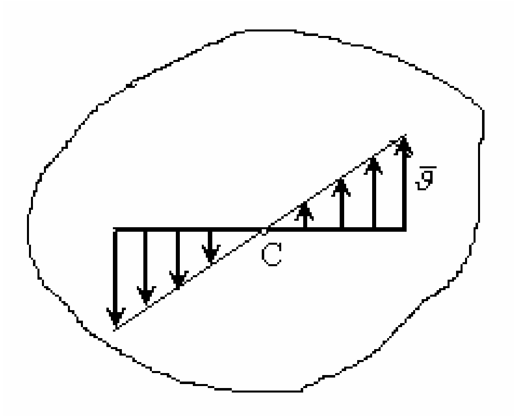
yoki $\vartheta = h\omega$ (37)

Ayrim hollarda $\bar{\vartheta}$ tezlikni chiziqli tezlik deb ham ataydilar.

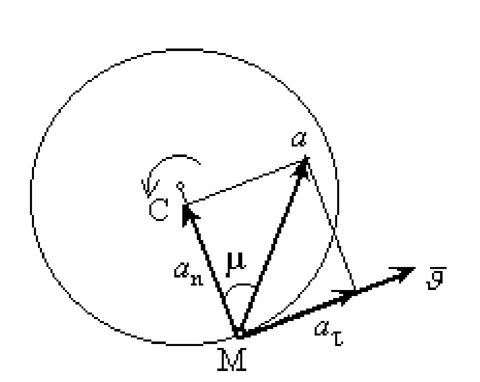
Shunday qilib, aylanma harakat qilayotgan qattiq jism nuqtasining tezligi miqdor jihatdan jism burchak tezligini aylanish o'qidan nuqtagacha bo'lgan masofaga bo'lgan ko'paytmaga teng.

Nuqtaning chiziqli tezligi nuqta chizayotgan aylanaga harakat yo'nalishi bo'yicha o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'naladi.

Jism barcha nuqtalarining burchak tezliklari har onda o'zaro teng bo'ladi. Shu sababli qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalarining chiziqli tezliklari mazkur nuqtalardan aylanish o'qiga bo'lgan masofalarga proporsional bo'ladi (94-rasm).



94-rasm



95-rasm

13.4. Aylanma harakat qilayotgan jism nuqtasining tezlanishi.

M nuqtaning tezlanishini $a_\tau = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ va $a_n = \dfrac{\vartheta^2}{\rho}$ formulalar yordamida aniqlaymiz. $\rho = h$ deb olib, ϑ tezlikning (37) tenglikdagi qiymatini yuqoridagi tengliklarga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \qquad a_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

yoki

$$a_\tau = h\varepsilon, \qquad a_n = h\omega^2 \qquad (38)$$

Urinma tezlanish $\overline{a}_\tau$ nuqtaning traektoriyasiga urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (tezlanuvchan aylanma harakatda nuqtaning harakat yo'nalishi bilan, sekinlanuvchan aylanma harakatda esa unga teskari yo'nalgan bo'ladi); normal tezlanish $\overline{a}_n$ doimo MC radius bo'ylab aylanish o'qi tomon yo'nalgan bo'ladi (95-rasm).

M nuqtaning to'liq tezlanishi va yo'nalishi quyidagi ifodalar yordamida aniqlanadi.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad yoki \qquad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (39)$$

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (40)$$

13.5 Aylanma harakat qilayotgan qattiq jism nuqtasining tezlik va tezlanish vektori.

M nuqtani AB aylanish o'qida yotgan O nuqta bilan tutashtirib $\bar{r}$ radius- vektorini o'tkazamiz 96-rasmdan quyidagini yozamiz.

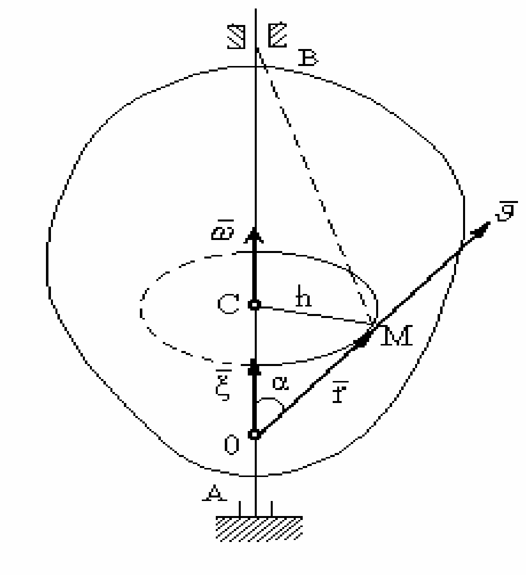
$h = r\sin\alpha$ tenglikni (37) ga qo'yamiz.

$$|\vartheta| = |\omega| h = |\omega| r \sin\alpha$$

yoki

$$|\vartheta| = |\bar{\omega} x \bar{r}|$$

$[\bar{\omega} x \bar{r}]$ vektorning moduli M nuqtaning tezligi moduliga teng $[\bar{\omega} x \bar{r}]$ vektor bilan $\bar{\vartheta}$ vektorning yo'nalishi ustma – ust tushadi, demak



96-rasm

$$\bar{\vartheta} = \bar{\omega} \text{ x} \bar{r} \qquad (41)$$

Aylanma harakat qilayotgan jismning istalgan nuqtasining tezlik vektori jismning burchak tezligi bilan shu nuqta radius–vektorining vektorial ko'paytmasiga teng. (41) formulaga Eyler formulasi deyiladi.

(41) tenglikning har ikkalasi tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} x\bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \text{ x} \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

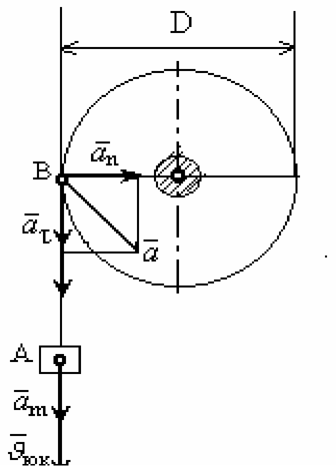
yoki

$$a = (\bar{\varepsilon} x \bar{r}) + (\bar{\omega} x \bar{\vartheta}) \qquad (42)$$

(42) tenglama aylanma harakat qilayotgan jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektorini aniqlash formulasi (42) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qavs urinma tezlanish, ikkinchi qavs esa normal tezlanish ekanligini e'tiborga olsak quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} x \bar{r} \qquad \text{va} \qquad \bar{a}_n = \bar{\omega} x \bar{\vartheta}$$

22 – masala. Barabanga o'ralgan AB ipning uchiga osilgan A yuk tinch holatdan tekis tezlanuvchan harakatlanib pastga tushishi natijasida, baraban aylanma harakatga keladi. 3 s ichida baraban 9 marta aylanadi. Barabanning diametri D=30 sm bo'lsa 5 – s oxirida baraban chetidagi nuqtani va A yukning tezligi va tezlanishini aniqlang (97 – rasm).



-lib

Yechish. Masalani shartiga ko'ra $\varphi_0 = 0$: $\omega_0 = 0$ u holda tekis tezlanuvchan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad (1) \qquad \omega = \varepsilon t \qquad (2)$$

t=3 s ichida baraban $\varphi = 9$ marta aylanganligi uchun (1) dan

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 9}{9} = 2\frac{aй}{c^2} = 4\pi\, s^{-2}$$

5 s oxirida barabanning burchak tezligi

$$\omega = 4\pi \cdot 5 = 20\pi\, s^{-1}$$

Barabanning B nuqtasining tezligi yukning tezligiga teng bo'ladi.

$$\vartheta = R\omega = 0{,}15 \cdot 20\pi = 9{,}42\frac{m}{s}$$

Yukning tezlanishi B nuqtaning urinma tezlanishiga teng.

$$a_Z = R\varepsilon = 0{,}15 \cdot 4\pi = 1{,}88\frac{m}{s^2}$$

B nuqtaning normal tezlanishi

$$a_r = R\varpi^2 = 0{,}15 \cdot 400\pi^2 = 591{,}6\frac{m}{s^2}$$

B nuqtaning to'liq tezligi

$$a = \sqrt{a_r + a_n{}^2} = \sqrt{1{,}88^2 + 591{,}6^2} \approx 591{,}6\frac{m}{s^2}$$

23 – masala. n=90 $\frac{ay}{\min}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan val dvigatel o'chirilgandan so'ng tekis sekinlanuvchan harakatlanib t_1=40 s dan so'ng to'xtaydi. Shu vaqt oralig'ida val necha marta aylangan.

Yechish. Val tekis sekinlanuvchan aylanaga harakat qilayotganligi sababli $\varphi_0 = 0$, u holda

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}: \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (1)$$

Valning dvigatel o'chirilishida qanday burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsa, shu burchak tezlik uning boshlang'ich burchak tezligidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$$

Valning to'xtash t=t_1 paytdagi burchak tezligi $\omega = 0$ bo'ladi. U holda (1) ning ikkinchi tengligi quyidagi ko'rinishni oladi.

$$0 = \frac{\pi n}{30} + \varepsilon t, \qquad \text{bundan} \quad \varepsilon = -\frac{\pi n}{30 \cdot t_1}$$

Dvigatel o'chirilgandan so'ng valning aylanishlar sonini N bilan belgilaymiz (n bilan N ni aralashtirib yubormaslik kerak. n– valning

burchak tezligi), u holda valning shu paytdagi burilish burchagi $\varphi_1 = 2\pi N$.
ε va φ_1 larning bu qiymatlarini (1) ning birinchi tengligiga qo'yamiz.

$$2\pi N = \left(\frac{\pi n}{30}\right)t_1 - \left(\frac{\pi n}{60}\right)t_1 = \frac{\pi n}{60}t_1$$

bundan

$$N = \frac{\pi t_1}{120} = 30\,ayl$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Qattiq jismning qanday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi va bu harakatning asosiy xususiyatlari?
2. Qattiq jismning qanday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat deyiladi?
3. Aylanma harakat tenglamasi?
4. Aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning burchak tezlik va burchak tezlanish modullari qanday formula bilan aniqlanadi?
5. Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat qilayotgan qattiq jism burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlari qanday yo'nalgan bo'ladi?
6. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezligi qanday formula orqali ifodalanadi?
7. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezlanishi qanday formula orqali ifodalanadi?
8. Eyler formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlik vektori qanday ifodalanadi?
10. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanish vektori qanday ifodalanadi?

14 – MA'RUZA.
QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI. HARAKATNI ILGARILANMA VA AYLANMA HARAKATLARGA AJRATISH. TEKIS SHAKL NUQTASINING TEZLIGINI ANIQLASH. JISM IKKITA NUQTASI TEZLIKLARINING PROYEKSIYALARI HAQIDA TEOREMA.

REJA:

14.1. Qattiq jismning tekis parallel harakati.
14.2. Qattiq jism tekis parallel harakatini ilgarilanma va aylanma harakatlarga ajratish.

14.3. Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb yordamida aniqlash.
14.4. Jism ikkita nuqtasi tezliklarining proeksiyalari haqida teorema.

Adabiyotlar: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

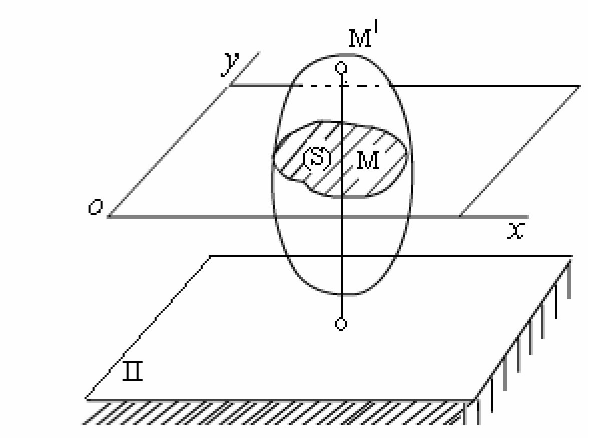
Tayanch iboralar: tekis parallel harakat, tekis shakl, qutb, tekis parallel harakat tenglamalari, tekis shaklning tezligi, jism ikkita nuqtasi tezliklarining proeksiyalari.

14.1. Qattiq jismning tekis parallel harakati.

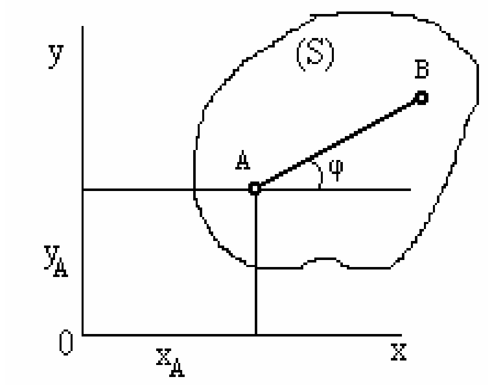
Barcha nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel harakatlanuvchi qattiq jismning harakatiga tekis parallel harakat deyiladi.

Jismning tekis parallel harakatiga misol qilib g'ildirakning to'g'ri chiziqli yo'lda dumalashi, shatunning krivoship – shatun mexanizmdagi harakati va boshqa harakatlarni ko'rsatish mumkin. Qattiq jismni qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati, tekis parallel harakatning xususiy holi hisoblanadi.

Jismning tekis parallel harakatini ko'rib chiqamiz. Biror qo'zg'almas П tekislikka nisbatan harakatlanayotgan qattiq jism berilgan bo'lsin. Qattiq jismni



98-rasm



99-rasm

qo'zg'almas П tekislikka parallel bo'lgan O*xy* tekislik bilan kesamiz. Kesimda S qirqim hosil bo'ladi (98 – rasm). Kelgusida S qirqimni tekis shakl deb ataymiz. Tekis parallel harakat ta'rifiga ko'ra, jismning harakati davomida bu S tekis shakl qo'zg'almas П tekislikka parallel bo'lgan O*xy* tekisligida harakatlanadi. S tekis shaklga perpendikulyar MM^1 kesma, jism harakati davomida doimo o'z–o'ziga parallel ko'chadi, demak kesma ilgarilanma harakat qiladi. Shunday qilib, qattiq jismning tekis parallel harakatini o'rganish uchun jismda П qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan S tekis shaklning O*xy* tekisligidagi harakatini bilish kifoya.

S tekis shaklning O*xy* tekislikdagi holati tekis shaklda o'tkazilgan qandaydir AB kesmaning holati bilan aniqlanadi (99 - rasm).

O'z navbatida AB kesmaning holati A nuqtani x_A, y_A koordinatalari va AB kesmaning x o'qi bilan tashkil qilgan φ burchak yordamida aniqlash mumkin. S tekis shaklning holatini aniqlash uchun tanlangan A nuqtani bundan keyin qutb deb ataymiz. Tekis shakl harakatlanganda x_A, y_A koordinatalar va φ burchak t vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi.

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t), \tag{43}$$

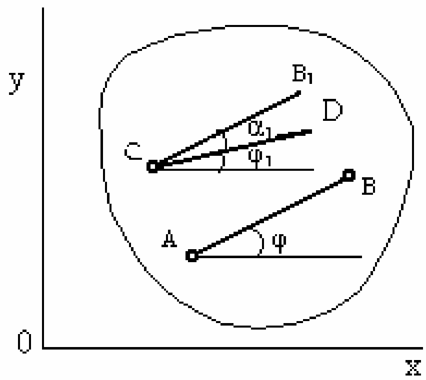
Harakat qonunini aniqlovchi (43) tenglamalar tekis shaklning harakat tenglamalari yoki bo'lmasa, qattiq jismning tekis parallel harakat tenglamalari deyiladi.

(43) tengliklarning birinchi ikkitasi, $\varphi = const$ bo'lganda tekis shaklning harakat tenglamasini ifodalaydi. Bu harakat ilgarilanma harakat bo'lib hisoblanadi.

Uchinchi tenglama x_A=const, y_A=const bo'lganda tekis shaklning A qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Yuqoridagilardan shu narsani bilib olish mumkinki, tekis shakl o'z tekisligida qiladigan tekis parallel harakati uning barcha nuqtalari huddi qutb kabi harakat qiluvchi ilgarilanma va qutb atrofidagi aylanma harakatlarning yig'indisidan iborat ekan.

Tekis parallel harakatning asosiy kinematik harakteristikalari, qutbning tezlik va tezlanishiga teng bo'lgan ilgarilanma harakat tezligi va tezlanishi $\left(\bar{\vartheta}_{ил} = \bar{\vartheta}_A,\ \bar{a}_{ил} = \bar{a}_A\right)$ va qutb atrofida aylanishi natijasida olgan burchak tezlik va burchak tezlanishlar bo'lib hisoblandi. Vaqtning istalgan t payti uchun harakteristikalarning qiymatlari (43) tenglamalardan foydalanib topiladi.



100-rasm

Harakatni o'rganishda qutb deb tekis shaklning istalgan nuqtasini olish mumkin. Qutb deb A nuqtani emas, tekis shaklning qandaydir C nuqtasini olaylik. CD kesmaning holati CD ning Ox o'q bilan hosil qilgan φ_1 burchak orqali aniqlanadi (100 – rasm).

Bunday holda ilgarilanma harakatni harakterlovchi kattaliklar o'zgaradi, ya'ni $\bar{\vartheta}_A \neq \bar{\vartheta}_C$ va $\bar{a}_A \neq \bar{a}_C$ (shunday bo'lmasa tekis shaklning harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo'lar edi). Aylanma harakatning kinematik harakteristikalari ya'ni ω va ε lar o'zgarmasdan qoladi. Haqiqatdan ham C nuqtadan AB parallel CB_1 kesmani o'tkazamiz, vaqtning istalgan payti uchun

$$\varphi_1 = \varphi - \alpha \qquad (44)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $\alpha = const$ ekanligini e'tiborga olib, (44) tenglikdan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olamiz

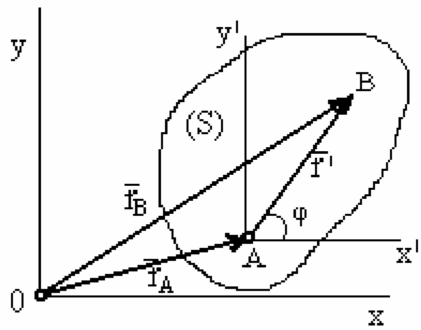
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

yoki $\omega_1 = \omega, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, harakatning aylanma harakat qismi qutbning o'zgarishiga bog'liq bo'lmas ekan.

14.2. Tekis shakl nuqtasining tezligini aniqlash

14.1. da qayd qilinganidek, tekis shaklning harakati tekis shaklning barcha nuqtalari A qutbning ϑ_A tezligiga teng tezlik bilan harakatlanuvchi ilgarilanma va qutb atrofidagi aylanma harakat yig'indisidan iborat. Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezligi tekis shaklning har



101-rasm

/e-lib

bir harakatida olgan tezliklarning geometrik yig'indisiga teng ekanligini ko'rsatamiz.

A va B nuqtalarning qo'zg'almas Oxy koordinata sistemasiga nisbatan radius – vektorlari $\bar{r}_A$ va $\bar{r}_B$ bo'lsin.

B nuqtaning qo'zg'aluvchi Ax_1y_1 koordinata sistemasiga nisbatan radius – vektorini $\bar{r}'$ bilan belgilab (101 – rasm) quyidagini yozamiz.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}'$$

Tenlikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\bar{\vartheta}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}^1}{dt}$$

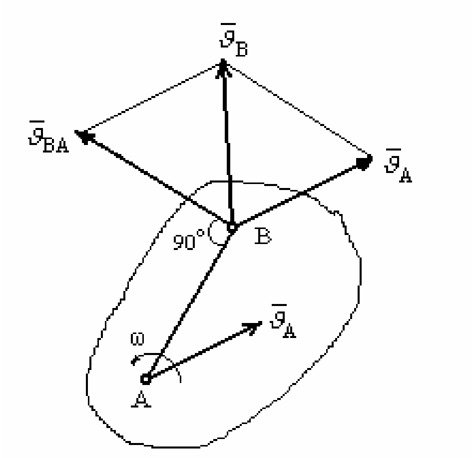
Bunda $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \vartheta_A - A$ qutbning tezligi, $\frac{d\bar{r}^1}{dt} = \bar{\vartheta}_{BA}$ - B nuqtaning A nuqta atrofida aylanishida olgan tezligi, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{BA} \qquad (45)$$

B nuqtaning A qutb atrofida aylanishida olgan $\bar{\vartheta}_{BA}$ tezligini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\bar{\vartheta}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{BA} \qquad \left(\bar{\vartheta}_{BA} \perp \overline{BA}\right) \qquad (46)$$

ω - tekis shaklning burchak tezligi.

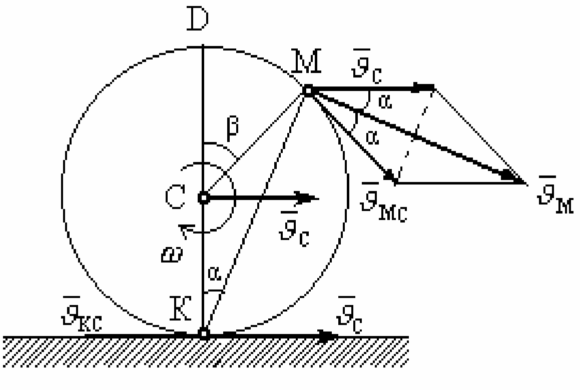


102-rasm

Shunday qilib, tekis shakl ihtiyoriy B nuqtasining tezligi, qutb deb tanlangan A nuqtaning tezligi bilan B nuqtani qutb atrofida aylanishida olgan tezliklarining geometrik yig'indisiga teng. $\bar{\vartheta}_B$ tezlikning moduli va yo'nalishi parallelogramm asosida topiladi (102 – rasm).

24–masala. To'g`ri chiziqli relesda sirpanmasdan dumalayotgan g'ildirak gardishidagi M nuqtaning tezligini aniqlang (103–rasm). G'ildirak markazi C nuqtaning tezligi $\bar{\vartheta}_C$, burchak DKM=α bo'lsin.

Yechish. G'ildirak markazi C nuqtaning tezligi ma'lum bo'lgani uchun, bu nuqtani qutb deb olamiz, u holda M nuqtaning tezligi $\bar{\vartheta}_M = \bar{\vartheta}_C + \bar{\vartheta}_{MC}$ bu yerda $\bar{\vartheta}_{MC} \perp \overline{MC}$ $\bar{\vartheta}_{MC}$ ning moduli $\vartheta_{MC} = \omega \cdot MC = \omega \cdot R$ (R – g'ildirakning radiusi). G'ildirak sirpanmasdan dumalayotgani uchun $\bar{\vartheta}_K = 0\,K$ nuqtaning tezligini quyidagi ko'rinishda yozamiz.



103-rasm

$\bar{\vartheta}_K = \bar{\vartheta}_C + \bar{\vartheta}_{KC}$ bu yerda $\vartheta_{KC} = \omega \cdot KC = \omega \cdot R$

K nuqtaning tezligi $\vartheta_K = 0$ bo'lgani uchun $\vartheta_{KC} = \vartheta_C$ bunda $\omega = \frac{\vartheta_C}{R}$. Buni e'tiborga olsak $\vartheta_{MC} = \frac{\vartheta_C}{R} \cdot R = \vartheta_c$.

Demak $\bar{\vartheta}_{MC} = \bar{\vartheta}_c$ $\bar{\vartheta}_c$ va $\bar{\vartheta}_{MC}$ tezliklar asosida qurilgan parallelogramm rombdan iborat bo'ladi. $\bar{\vartheta}_c$ va ϑ_{MC} vektorlar orasidagi burchak β ga teng. O'z navbatida β=2α. Markaziy burchak o'zi tiralib turgan yoy bo'lgani uchun $\bar{\vartheta}_c$ va $\bar{\vartheta}_M$ vektorlar orasidagi burchak hamda $\bar{\vartheta}_{MC}$ va $\bar{\vartheta}_M$ vektorlar orasidagi burchak ham α ga teng.

Rombning dioganallari o'zaro perpendikulyar bo'lganligidan.

$$\vartheta_M = 2\vartheta_C \cos\alpha \text{ va } \bar{\vartheta}_M \perp \overline{KM}$$

14.3. Jism ikki nuqtasi tezliklarining proeksiyalari haqida teorema

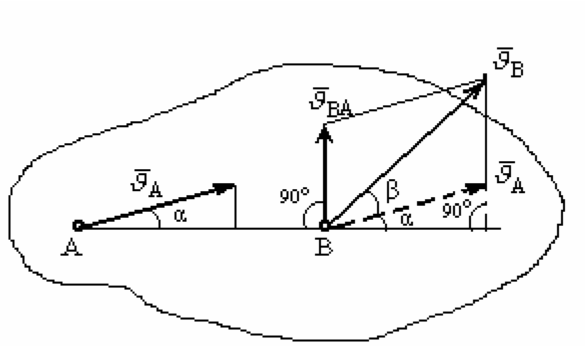
Tekis shakl (yoki tekis parallel harakat qilayotgan jism) nuqtasining tezligini (45) formula yordamida aniqlash bir muncha murakkab hisoblashlar bilan bog'liq.

Tekis shakl nuqtasining tezligini aniqlashning amaliy jihatdan qulay va sodda usullari ham mavjudki quyida shu usullardan biri bilan tanishamiz.

Teorema. Qattiq jism ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqtalardan o'tuvchi o'qdagi proeksiyalari o'zaro teng.

Isbot. Tekis shaklning qandaydir ikkita A va B nuqtalarni ko'rib chiqamiz. A nuqtani qutb deb olamiz (104-rasm), u holda (45) formulaga ko'ra B nuqtaning tezligi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$\bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{BA}$$



104-rasm

Tenglikning har ikkala tomonini AB bo'ylab yo'nalgan o'qqa proeksiyalaymiz:

$$\vartheta_B \cos\beta = \vartheta_A \cos\alpha \quad (47)$$

$\bar{\vartheta}_{BA}$ vektor AB o'qqa perpendikulyar yo'nalgani uchun uning o'qdagi proeksiyasi nolga teng.

Agar (47) tenglik bajarilmasa u holda tekis shakl (yoki jism) harakatlanayotganida A va B nuqtalar orasidagi masofa o'zgarishi kerak, bunday bo'lishi mumkin emas, chunki qattiq jismni absolyut qattiq jism deb olamiz. Teorema isbotlandi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Qattiq jismning tekis parallel harakati deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tekis parallel harakat deganda siz qanday harakatlarni tushunasiz?
3. Tekis parallel harakat tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Tekis shakl nima?
5. Qutb deganda nimani tushinasiz?

6. Tekis shaklning istalgan nuqtasi qutb bo’la oladimi?
7. Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb yordamida aniqlanadigan formulasini keltirib chiqaring?
8. Qutb yordamida tekis shakl ihtiyoriy nuqtasining tezligi geometrik usulda qanday aniqlanadi?
9. Jism ikkita nuqtasi tezliklari proeksiyalari haqidagi teoremani tushintirib bering.
10. Qattiq jismning tekis parallel harakati qanday oddiy harakatlar yig`indisidan iborat bo’ladi?

15 – MA‘RUZA
TEZLIKLAR ONIY MARKAZI. SENTROIDALAR HAQIDA TUSHUNCHA. TEKIS SHAKL NUQTASINING TEZLANISHINI ANIQLASH. TEZLANISHLAR ONIY MARKAZI.

REJA:
15.1.Tezliklar oniy markazi va uni aniqlash usullari.
15.2. Sentroida haqida tushuncha.
15.3.Tekis shakl nuqtasining tezlanishini qutb yordamida aniqlash.
15.4.Tezlanishlar oniy markazi.

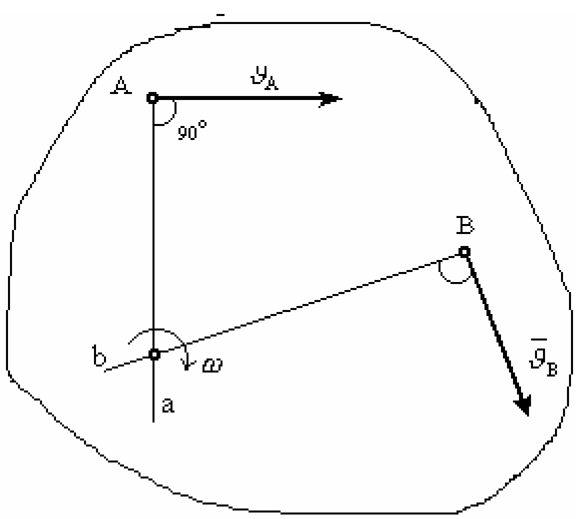
Adabiyotlar: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

Tayanch iboralar: tezliklar oniy markazi, tezliklar oniy markazini aniqlash usullari, sentroida, qo'zg’almas sentroida, qo'zg’aluvchan sentroida, tekis shakl nuqtasining tezlanishi, tezlanishlar oniy markazi.

15.1. Tezliklar oniy markazi va uni aniqlash usullari.

Tekis parallel harakat qiladigan qattiq jism nuqtasining tezligini aniqlashning sodda usuli tezliklarning oniy markazi tushunchasiga asoslanadi. Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklarning oniy markazi deyiladi.

Agar tekis shakl (jism) ilgarilanma bo'lmagan harakat qilayotgan bo'lsa, vaqtning istalgan paytida tezligi nolga teng bo'lgan nuqtasi mavjud bo'ladi. Vaqtning t paytida tekis shaklning A va B nuqtalari o'zaro parallel bo'lmagan $\bar{\vartheta}_A$ va $\bar{\vartheta}_B$ tezliklarga ega bo'lsin (105-rasm). $\bar{\vartheta}_A$ va $\bar{\vartheta}_B$ tezlik vektorlariga *Aa* va *Bb* perpendikulyar o'tkazamiz. Bu perpendikulyar qandaydir P nuqtada kesishadi. P nuqta tezliklarining oniy markazi bo'ladi ($\vartheta_P = 0$). Faraz qilaylik $\vartheta_P \neq 0$ bo'lsin. U holda tezliklarning proeksiyalari



105-rasm

haqidagi teoremaga asosan $\overline{\vartheta}_P$ vektor bir vaqtning o'zida AP va BP larga perpendikulyar bo'lishi lozim, lekin bunday bo'lishi mumkin emas. Teoremadan shu narsa kelib chiqadiki, vaqtning shu paytida tekis shaklning tezligi nolga teng bo’lmagan boshqa bir nuqtasi mavjud bo'lmaydi.

Agar vaqtning shu paytida R nuqtani qutb deb olsak (45) formulaga ko'ra A nuqtaning tezligi quyidagicha aniqlanadi.

$$\overline{\vartheta_A} = \overline{\vartheta_P} + \overline{\vartheta_{PA}}$$

Bizga ma‘lumki $\overline{\vartheta}_P = 0$, u holda A nuqtaning tezligi

$$\overline{\vartheta_A} = \overline{\vartheta_{PA}}$$

(46) formulaga ko'ra

$$\vartheta_A = \omega \cdot \overline{PA} \qquad \left(\overline{\vartheta}_A \perp \overline{PA}\right) \qquad (48)$$

Xuddi shuningdek B nuqtaning tezligi

$$\vartheta_B = \omega \cdot PB \qquad \left(\overline{\vartheta}_B \perp PB\right) \qquad (48^/)$$

(55) va (55^1) tengliklardan quyidagi nisbatni yozamiz

$$\frac{\vartheta_A}{PA} = \frac{\vartheta_B}{PB} \qquad (49)$$

Tekis shakl nuqtalarining tezliklari shu nuqtalardan tezliklarining oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g’ri proporsional.

Olingan natijalardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

1. Tekis shakl ikkita A va B nuqtalari tezliklarining yo'nalishlari ma‘lum bo'lsin (105-rasm) A va B nuqtalardan $\overline{\vartheta}_A$ va $\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektorlariga perpendikulyarlar o’tkazsak ularning kesishgan P nuqtasi tezliklar oniy markazi bo'lib hisoblanadi.
2. Tekis shakl istalgan nuqtasining tezligini aniqlash uchun, tekis shaklda biror A nuqtasining tezligini moduli va yo'nalishi boshqa bir B nuqtani tezligining yo'nalishini bilish kerak.

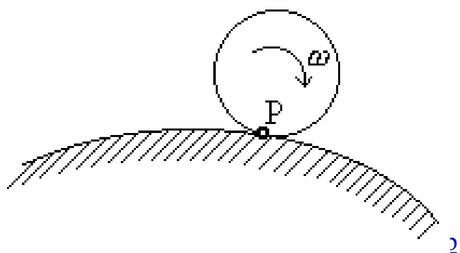
A va B nuqtalardan $\overline{\vartheta}_A$ va $\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektorlariga perpendikulyarlar tushirib tezliklar oniy markazi P nuqtani va $\overline{\vartheta}_A$ tezlik vektorining yo’nalishiga qarab, tekis shaklning aylanish yo'nalishini aniqlaymiz. $\overline{\vartheta}_A$ni bilgan holda (49) formuladan tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezligi aniqlanadi. $\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektori PB ga perpendikulyar tekis shakl aylanish yo'nalishi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

3. Tekis shaklning burchak tezligi vaqtning berilgan paytda qandaydir nuqtasi tezligining tezliklar oniy markazdan shu nuqtagacha bo'lgan masofaga bo'lgan nisbatga teng:

$$\omega = \frac{\vartheta_B}{PB} \qquad (50)$$

ω ning boshqacha ifodalanishini topamiz.

(45) va (46) tengliklardan.



106-rasm

$\overline{\vartheta}_{BA} = \left(\overline{\vartheta}_B - \overline{\vartheta}_A\right)$ va $\vartheta_{BA} = \omega \cdot AB$ bulardan quyidagini hosil qilamiz.

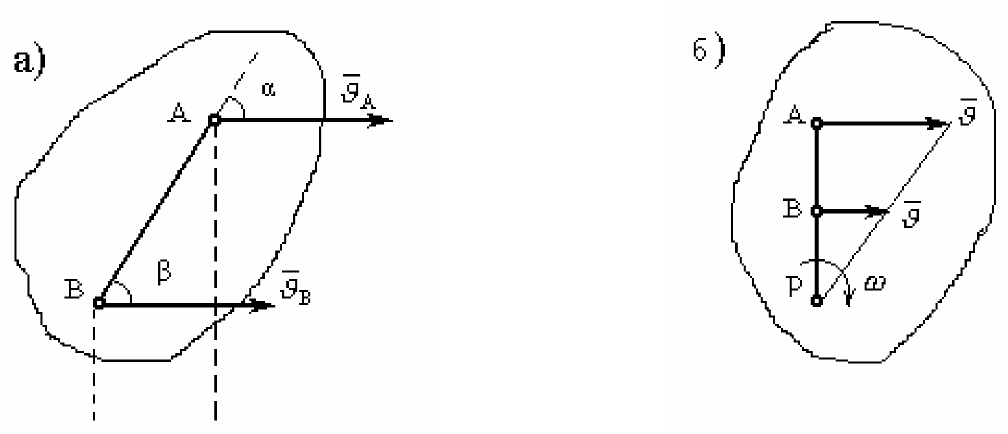
$$\omega = \frac{\vartheta_{BA}}{AB} = \frac{\left|\overline{\vartheta}_B - \overline{\vartheta}_A\right|}{AB} = \frac{\left|\overline{\vartheta}_B + \left(\overline{\vartheta}_A - \overline{\vartheta}_A\right)\right|}{AB} \qquad (51)$$

Tezliklar oniy markazini topishning xususiy hollari bilan tanishamiz.

a) Silindr shaklidagi jism qo’zg’almas sirt ustida sirpanmasdan dumalayotgan bo'lsa, dumalayotgan jismning qo'zg’almas sirtga tutinish P nuqtasi, sirpanish bo'lmaganda tezligi nolga $\left(\overline{\vartheta}_P = 0\right)$ teng bo'ladi. Demak P nuqta tezliklar oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Bunga g’ildirakning rels ustida dumalashini misol qilib ko'rsatish mumkin (106-rasm)

б) Tekis shakl A va B nuqtalarning tezlik vektorlari o'zaro parallel, hamda AB chiziq $\overline{\vartheta}_A$ ga perpendikulyar bo'lmasa (107-rasm, a) bunday holda tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi. Tekis shakl barcha nuqtalarning tezliklari $\overline{\vartheta}_A$ ga parallel bo'ladi. Tezliklarning proeksiyalari haqidagi teoremaga ko'ra $\vartheta_A \cos\alpha = \vartheta_B \cos\beta$ bundan $\vartheta_A = \vartheta_B$; Demak, vaqtning shu paytida jism barcha nuqtalari moduli va yo’nalishi bir hil bo'lgan tezlikka ega bo'lib jism ilgarilanma harakat qiladi. Shu paytda jismning ω burchak tezligi (51) formulaga ko'ra nolga teng.

107-



rasm

в) Tekis shakl A va B nuqtalarning tezlik vektorlari o'zaro parallel hamda AB chiziq $\overline{\vartheta}_A$ vektorga perpendikulyar bo'lsa, bunday holda tezliklar oniy markazi P 107-rasm,б da ko’rsatilgandek topiladi. Bu holda oldingilarga qaraganda tezliklar oniy markazini topishda $\overline{\vartheta}_A$ va $\overline{\vartheta}_B$ tezliklarning yo'nalishidan tashqari ularning modullari ham ma‘lum bo’lishi kerak.

г) Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining $\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektori va burchak tezligi ω ma‘lum bo'lsa $\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektori ustida yotuvchi tezliklar oniy markazi P (107-rasm,б) gacha bo’lgan masofa (50) formuladan topiladi.

$$BP = \frac{\vartheta_B}{\omega}$$

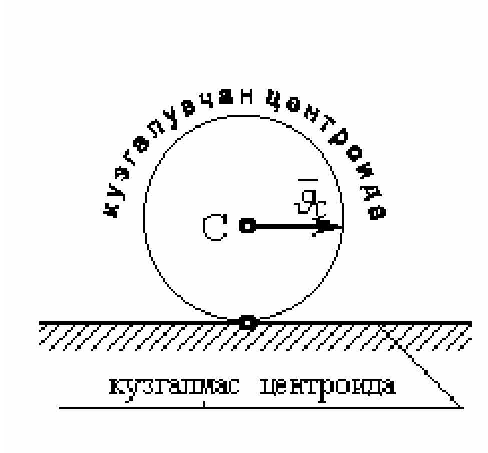
15.2. Sentroidalar haqida tushuncha.

Umumiy holda tezliklar oniy markazi vaqtning o'tishi bilan tekis shaklning harakat tekisligida o'z holatini o'zgartira boradi. Agar tezliklar oniy markazining har ondagi holatini tekis shaklda va harakat tekisligida belgilab borsak, ularning geometrik o'rni ikkita chiziqni ifodalaydi.

Tezliklar oniy markazining tekis shakl harakati tekisligidagi geometrik o'rni qo'zg’almas sentroida deyiladi.

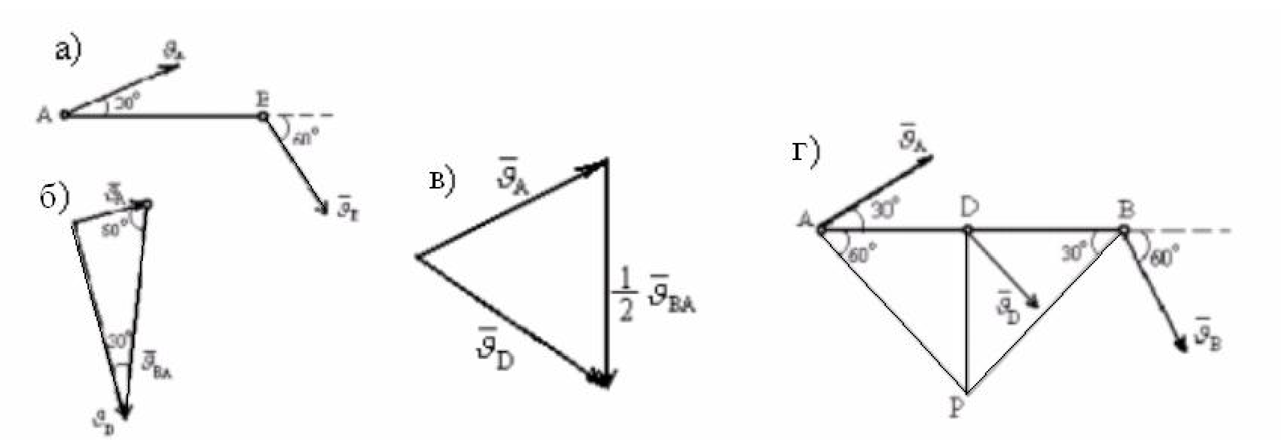
Tezliklar oniy markazining tekis shaklga bog’langan tekislikdagi geometrik o'rni qo'zg’aluvchan sentroida deyiladi.

Masalan qo'zg’almas rels ustida sirpanmay dumalayotgan g’ildirak uchun qo'zg’almas sentroida to'g’ri chiziq, qo'zg’aluvchi sentroida g’ildirak gardishidagi aylanadan iborat (108-rasm).



108- rasm

Har onda qo'zg’almas va qo'zg’aluvchan sentroidalar tezliklar oniy markazi P nuqtada umumiy urinish nuqtasiga ega bo'ladi. Shu sababli qattiq jismning tekis parallel harakatini geometrik tarzda quyidagicha talqin qilish mumkin: tekis shaklning harakati qo’zg’aluvchan sentroidani qo'zg’almas sentroida ustida sirpanmasdan dumalashidir.



109-rasm

25-masala AB sterjen tekis parallel harakat qiladi. A nuqtaning tezligi shu paytda 5 m/s bo'lib, sterjen bilan 30^0 burchak hosil qiladi. B nuqtaning tezligi shu paytda sterjenning davomi bilan 60^0 burchak hosil qiladi (109-rasm,a).

Agar AB=2m bo’lsa, B nuqtaning tezligini, tezliklar oniy markazini, sterjenning burchak tezligini aniqlang. Shuningdek sterjenning o'rtasidagi D nuqtaning tezligini ham aniqlang.

Yechish. Graffo analitk usulda yechish (45) formulaga ko'ra B nuqtaning tezligi

$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\vartheta}_{BA} \qquad (1)$$

formulaga ko'ra tezliklar uchburchagini ko'ramiz. (109-rasm,б) bu uchburchakning bitta tomoni va barcha burchaklari ma‘lum, shunga ko'ra:

$$\vartheta_{BA} = \frac{\vartheta_A}{\sin 30^0} = \frac{5}{0,5} = 10m/s;$$

$$\vartheta_B = \vartheta_A tg60^0 = 5\sqrt{3} \approx 8,05\frac{m}{s} \qquad (2)$$

bu yerda $\vartheta_{BA} = \omega \cdot BA = \omega \cdot 2$ (3)

(2) va (3) lardan ω ni aniqlaymiz.

$$\omega \cdot 2 = 10 \qquad \omega = \frac{10}{2} = 5\frac{rad}{s}$$

Sterjen o'rtasidagi D nuqtaning tezligini aniqlaymiz.

$$\vartheta_B = \vartheta_A + \frac{1}{2}\vartheta_{BA}$$

Tezliklar uchburchagini quramiz (109-rasm,в) bu uchburchakning ikkita tomoni o'zaro teng, ya‘ni:

$\vartheta_A = \frac{1}{2}\vartheta_{BA} = 5м/c$ Bu ikkala tomon orasidagi burchak 60^0. Demak bu uchburchak teng tomonli. Demak D nuqtaning tezligi ham $\vartheta_D = 5м/c$

Endi bu masalani tezliklar oniy markazi yordamida yechamiz. Buning uchun A va B nuqtalar tezlik vektorlariga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlar qandaydir P nuqtada kesishadi. P nuqta tezliklar oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Uchburchak ABP ning bitta tomoni va barcha burchaklari ma‘lum. Uchburchakning AP va BP tomonlarini aniqlaymiz (109 – rasm,г).

$$AP = AB\sin 30^0 = 2 \cdot 0,5 = 1m$$

$$BP = AB\cos 30^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73m$$

AB sterjenning burchak tezligi

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{5}{1} = 5\frac{rad}{s}$$

B nuqtaning tezligi

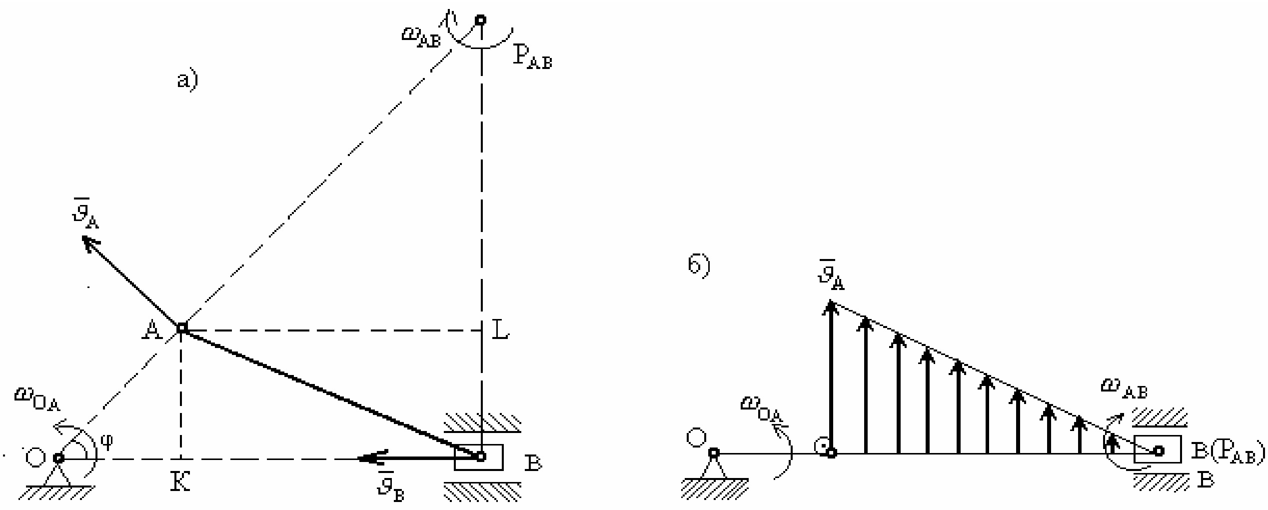
$$\vartheta_B = \omega BP = 5 \cdot 1,73 = 8,65\frac{m}{s}$$

D nuqtaning tezligining aniqlash uchun D nuqtani P nuqta bilan tutashtiramiz. Hosil bo’lgan Δ ADP dan

__AD=AP=1м. Demak uchburchak teng tomonli. Shunga ko'ra DP=1м, u holda

$$\vartheta_D = \omega DP = 5 \cdot 1 = 5m/s$$

D nuqtaning tezligi DP ga perpendikulyar yo'nalgan.



110 - rasm

26-masala. Krivoship mexanizmining OA krivoshipi O nuqta atrofida ω_{OA} burchak tezlik bilan aylanmoqda OA=r va AB = l deb olib, OA krivoship porshenning yo'naltiruvchi o'qi bilan φ burchak hosil qilganda AB shatunning burchak tezligi va B porshenning tezligining aniqlang. (110-rasm, a)

Yechish. Krivoshipning burchak tezligi va uzunligini bilgan holda krivoship A nuqtasi (barmoq) ning tezligining aniqlaymiz:

$$\vartheta_A = \omega_{OA} \cdot OA = r \cdot \omega_{OA}$$

Krivoship A nuqtasining tezligi OA ga perpendikulyar B porshenning tezligi esa OB bo'ylab yo'nalgan A va B nuqtalarning tezlik vektorlariga perpendikulyarlar o'tkazamiz, ular qandaydir nuqtaga kesishadi. Bu nuqta tezliklar, oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Uni P_{AB} deb belgilaymiz. A nuqtadan tezliklar oniy markazigacha bo'lgan masofani hisoblaymiz.

$$AP_{AB} = \frac{AL}{\cos\varphi}$$

lekin $AL = KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}$

AL ning o'rniga qiymatini qo'yamiz.

$$AP_{AB} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

AB shatunning burchak tezligi

$$\omega_{AB} = \frac{\vartheta_A}{AP_{AB}} = \frac{r\omega_{OA}}{\dfrac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi}} = \frac{r\omega_{OA} \cdot \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}$$

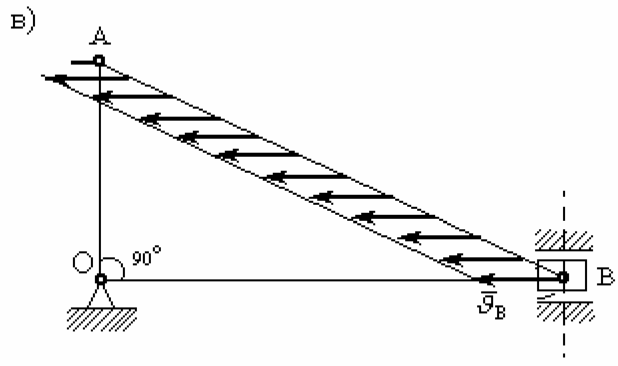
B porshenning tezligini topish uchun BP_{AB} ni aniqlaymiz.

$$BP_{AB} = LP_{AB} + LB = AP_{AB} \sin\varphi + AK = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}\ tg\varphi + r\sin\varphi$$

B porshenning tezligi

$$\vartheta_B = BP_{AB}\omega_{AB} = \left(\sqrt{l^2 - r^2\sin^2}tg\varphi + \mathrm{r}\sin\varphi\right)\cdot\frac{r\omega_{OB}\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} = \left(r^2\sin\varphi + \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\omega_{OA}$$

φ=0 bo'lganda, shatunning tezliklar oniy markazi B nuqta bilan ustma-ust tushadi. Natijada shatunning barcha nuqtalari B nuqta atrofida aylanalar chizadi (110-rasm,б).



110 - rasm

Shatunning burchak tezligi

$$\omega_{AB} = \frac{\vartheta_A}{PA} = \frac{r}{l}\omega_{OA}$$

B porshenning tezligi $\vartheta_{\text{B}} = 0$ $\varphi = 90^0$ bo’lganda krivoshipning A nuqtasi va B porshenning tezliklari o’zaro parallel bo’ladi. Shunga ko’ra AB shatunning tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi (110-rasm,б).

Bu paytda AB shatunning barcha nuqtalari bir hil $\overline{\vartheta}_A$ tezlikka ega bo’ladi. Chunki $\omega_{AB} = 0$.

15.3. Tekis shakl nuqtasining tezlanishi.

Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi tekis shaklning ilgarilanma va aylanma harakatlarida olgan tezlanishlarining geometrik yig’indisidan iborat ekanligini ko’rsatamiz. B nuqtaning *Oxy* koordinata sistemasiga nisbatan holati (101-rasmga qarang) quyidagicha aniqlangan edi.

$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{r}^1$, bu yerda $\overline{r}^1 = \overline{A}\overline{B}$

tenglikni har ikkala tomonidan vaqt bo’yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz.

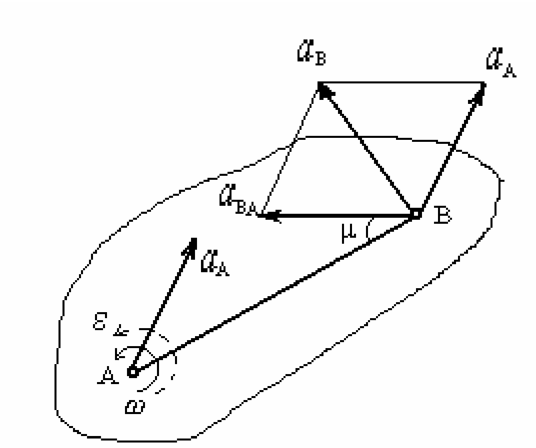
$$\overline{a}_B = \frac{d^2\overline{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\overline{r}^1}{dt^2}$$

Tenglikning o’ng tomonidagi birinchi qo’shiluvchi had A nuqtaning $\overline{a}_A$ tezlanishini, ikkinchi qo’shiluvchi had esa tekis shaklning A qutb atrofida aylanishida olgan $\overline{a}_{BA}$ tezlanishini beradi, u holda:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \qquad (52)$$

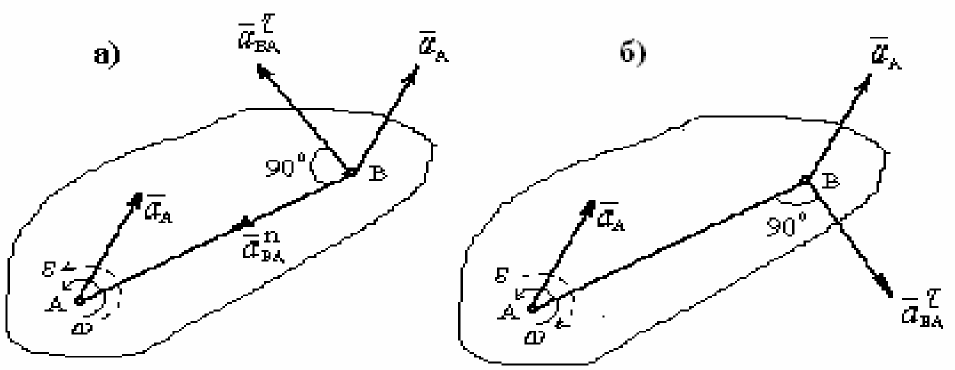
Tezlanish $\overline{a}_{BA}$ aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanishi kabi (39) va (40) formulalar yordamida topiladi

$$\bar{a}_{BA} = BA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \text{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (53)$$



111-rasm

bu yerda ω va ε - tekis shaklning burchak tezligi va burchak tezlanishi, $\mu - \bar{a}_{BA}$ tezlanish vektori bilan BA kesma orasidagi burchak (111 – rasm).
Shunday qilib, tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi, qutb deb tanlangan nuqtaning tezlanishi va tekis shaklning qutb atrofida aylanishida B nuqtaning olgan tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng. $\bar{a}_B$ tezlanishning moduli va yo'nalishi parallelogramm qurish asosida topiladi (111 – rasm) B nuqtaning $\bar{a}_B$ tezlanishini tasvirlangan parallelogramm yordamida hisoblash bir oz qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Avval μ ning qiymatini, keyin esa $\bar{a}_{BA}$ va $\bar{a}_A$ vektorlar orasidagi burchakni aniqlash lozim. Shunga ko'ra masalalarni yechishda $\bar{a}_{BA}$ tezlanish vektori $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ urinma va $\bar{a}^n_{BA}$ normal tashkil etuvchilar bilan almashtiriladi, u holda (52) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.



112-rasm

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA} \qquad (54)$$

$\overline{a}^{\tau}_{BA}$ vektor AB kesmaga doimo perpendikulyar bo'lib, tezlanuvchan harakatda aylanish yo'nalishi bo'ylab (112 – rasm,a), sekinlanuvchan harakatda esa aylanish yo'nalishiga teskari yo'nalgan bo'ladi (112-rasm,б). $\overline{a}^{n}_{BA}$ vektor doimo AB bo'ylab B nuqtadan A nuqtaga tomon yo'nalgan bo'ladi. Son jihatidan bu tezlanishlar quyidagiga teng.

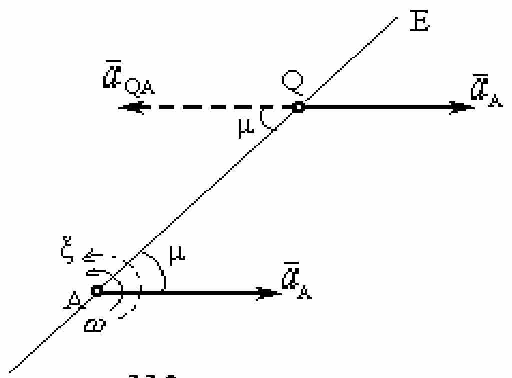
$$a^{\tau}_{BA} = AB \cdot \varepsilon; \qquad a^{n}_{BA} = AB \cdot \omega^2 \qquad (55)$$

Agar qutb deb tanlangan A nuqta ilgarilanma harakat qilmasa, u holda uning tezlanishini ham $\overline{a}^{\tau}_{A}$ urinma va $\overline{a}^{n}_{A}$ normal tashkil etuvchilar yig'indisidan iborat deb qarash lozim, u holda (54) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{a}_B = \overline{a}^{\tau}_{A} + \overline{a}^{n}_{A} + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA} \qquad (56)$$

15.4. Tezlanishlar oniy markazi.

Agar tekis shakl ilgarilanma bo'lmagan harakat qilsa vaqtning istalgan paytida unda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqta mavjud bo'ladi. Tekis shaklni vaqtning istalgan paytida tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini aniqlaymiz. Aytaylik tekis shaklning qandaydir biror A nuqtasining tezlanishi $\overline{a}_A$, tekis shaklning burchak tezligi ω berilgan bo'lsin.



113- rasm

1). Burchak μ ni aniqlaymiz .

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

2) A nuqtadan $\overline{a}_A$ vektor bilan μ burchak tashkil etuvchi AE to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (113-rasm). Bunda AE to'g'ri chiziq aylanish tezlanuvchan bo'lsa $\overline{a}_A$ vektordan aylanish yo'nalishi tomon, agar aylanish sekinlanuvchan bo'lsa, aylanishga qarama-qarshi tomonga og'gan bo'lishi kerak, aniqrog'i, ε burchak tezlanishi yo'nalgan tomonga og'gan bo'ladi

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \qquad (57)$$

ga teng kesmani AE to'g'ri chiziq ustiga qo'yib Q nuqtani aniqlaymiz. Q nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Haqiqatdan ham A nuqtani qutb deb olib, Q nuqtaning tezlanishini (52) va (53) formulalar yordamida hisoblaymiz.

$$\overline{a}_Q = \overline{a}_A + a_{QA}$$

bunda

$$\overline{a}_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

AQ ning bu qiymatini (57) formulaga qo'ysak

$$a_{QA} = a_A \text{ kelib chiqadi.}$$

$\bar{a}_{QA}$ vektor AQ bilan μ burchak tashkil etadi. Demak, $\bar{a}_{QA}$ vektor $\bar{a}_A$ vektorga parallel lekin qarama – qarshi tomonga yo'nalgan. Shunga ko'ra

$\bar{a}_{QA} = -\bar{a} \qquad va \qquad \bar{a}_Q = 0$

Agar Q nuqtani qutb deb tanlasak, u holda $\bar{a}_Q = 0$ bo'ladi. Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi (52) formulaga ko'ra.

$$\bar{a}_{QA} = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_{BQ} \qquad (58)$$

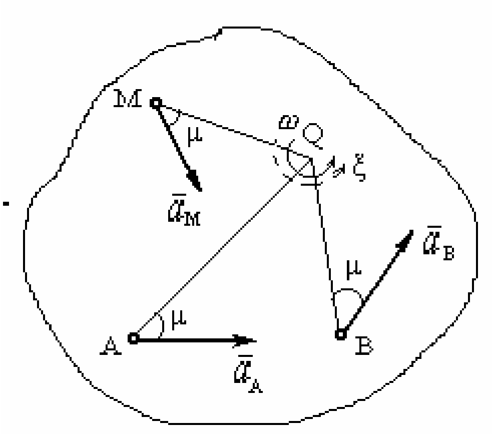
(53) formulaga ko'ra B nuqtaning tezlanishi son jihatdan quyidagiga teng.

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (59)$$

(57) va (59) formulalardan

$$\frac{a_B}{BQ} = \frac{a_A}{AQ} = \ldots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (60)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

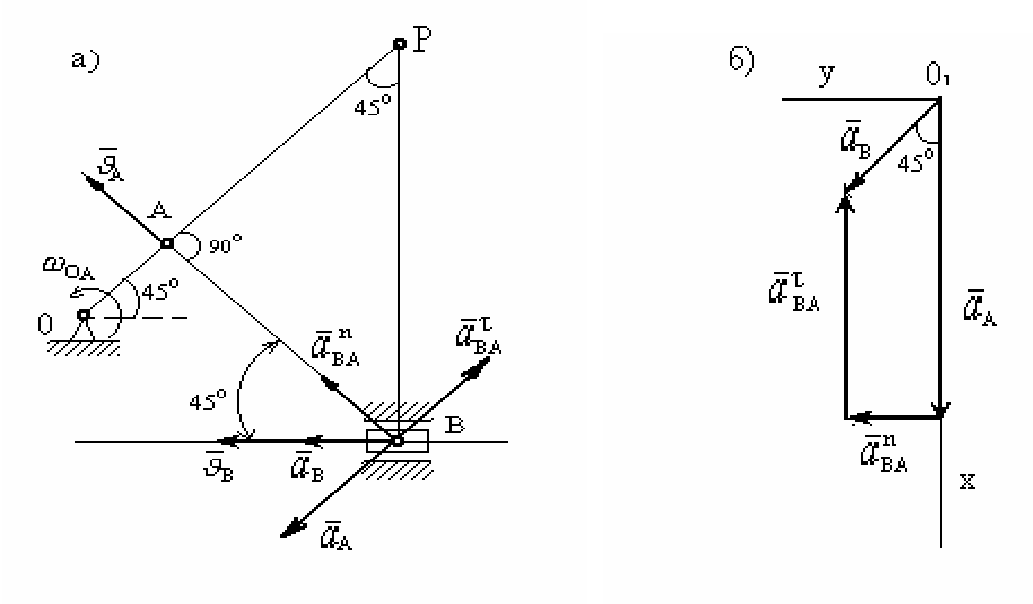


114- rasm

Demak, tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari, shu nuqtalardan tezlanishlar oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi. Tezlanishlarning taqsimlanishi 114-rasmda tasvirlangan. Tezliklar oniy markazi P bilan tezlanishlar oniy markazi Q vaqtning bu paytida ustma–ust tushmaydi. Masalan, to'g'ri chiziqli rels bo'ylab markazi C o'zgarmas tezlik ($\vartheta_C = const$) harakatlanayotgan g'ildirakning tezliklar oniy markazi g'ildirak bilan rels tutinib turgan P nuqtasi hisoblanadi $(\bar{\vartheta}_p = 0)$ lekin, P nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'la olmaydi chunki $a_p \neq 0$. Bu holda tezlanishlar oniy markazi to'g'ri chiziqli tekis harakatlanayotgan g'ildirakning C markazi bo'ladi, bu nuqtaning tezlanishi $\bar{a}_C = 0$. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismda tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi ustma–ust tushadi.

27- masala. Markaziy bo'lmagan krivoship shatun mexanizmning OA krivoshipi bilan AB shatuni o'zaro perpendikulyar va gorizontal o'q bilan $\varphi = 45^0$ burchak hosil qilgan paytda AB shatunning burchak tezligi, burchak tezlanishi hamda B porshenning tezlanishini aniqlang. Krivoshipning uzunligi OA=20sm, shatuning uzunligi AB=100sm. Krivoship $\omega_{OA} = 10\dfrac{rad}{s}$ burchak tezlik bilan tekis aylanma harakat qiladi.

Yechish. AB shatun tekis parallel harakat qiladi. A nuqtaning tezligini aniqlaymiz. (53) formulaga ko'ra



115-rasm

$$\vartheta_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200 \frac{sm}{s}$$

$\bar{\vartheta}_A$ tezlik vektori OA ga perpendikulyar va ω_{AO} yo'nalgan tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi. Tezliklar oniy markazi P nuqtani aniqlaymiz. Buning uchun $\bar{\vartheta}_A$ tezlik va B porshen tezligi yo'nalishiga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Ular qandaydir nuqtada kesishadi. Bu nuqta tezliklar oniy markazi P nuqtadir.
Mexanizmlar shunday holatda bo'lganda (115-rasm,a)

$$AP = AB = 100sm$$

AB shatunning burchak tezligi

$$\vartheta_A = \omega_{AB} \cdot AP \quad yoki \quad \omega_{AB} = \frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{200}{100} = 2\frac{rad}{s}$$

B porshenning tezlanishini aniqlaymiz. A nuqtani qutb deb olib (54) formulaga ko'ra yozamiz.

$$a_B = a_A^\tau + a_A^n + a_{BA}^\tau + a_{BA}^n$$

OA krivoship tekis aylanma harakat qilinayotgani uchun, A nuqtaning a_A^τ urinma tezlanishi

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0 \quad \text{ga teng}$$

Normal a_A^n tezlanishini aniqlaymiz:

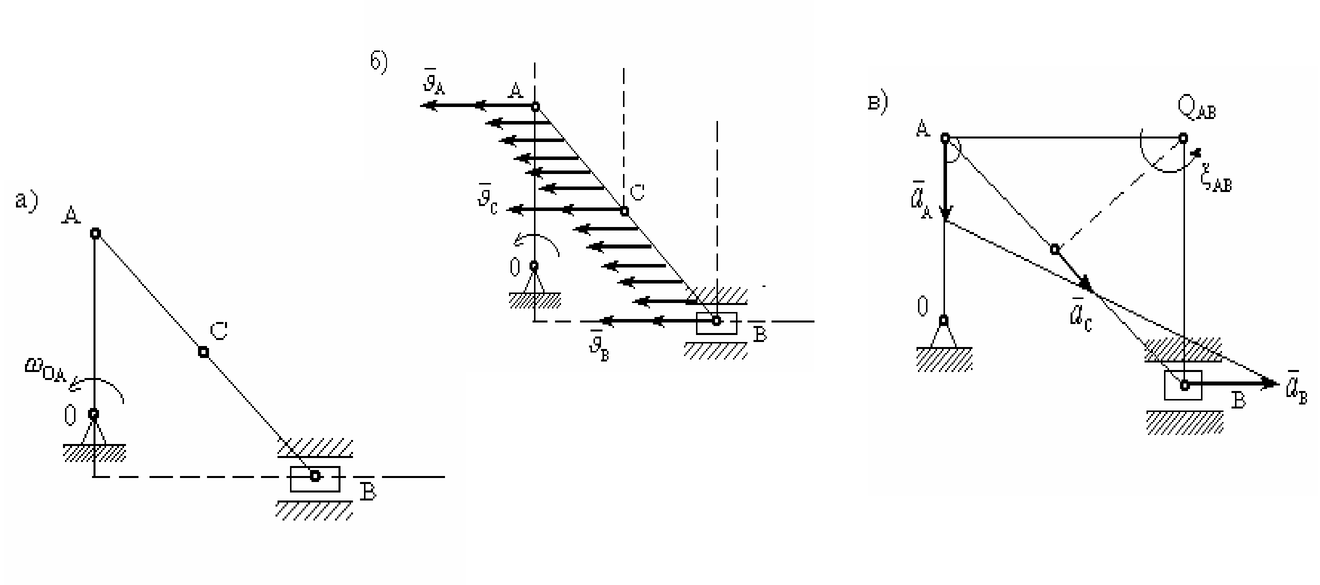
$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 20 = 2000 \frac{sm}{s^2}$$

a_A^n normal tezlanish OA bo'ylab, A nuqtadan O nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi.

Tezlanish $\bar{a}_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 100 = 400 \frac{sm}{s^2}$

a^{n}_{BA} tezlanish AB bo'ylab B dan A ga qarab yo'nalgan bo'ladi. Urinma a^{τ}_{BA} tezlanish AB (a^{n}_{BA}) ga perpendikulyar shatunning aylanish yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Lekin, $\overline{a}^{n}_{BA}$ tezlanish moduli ham, yo'nalishi ham bizga hozircha noma'lum.

$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA}$ formuladan noma'lumlar $\overline{a}_B$ va $\overline{a}^{\tau}_{BA}$ bo'lib hisoblanadi. Ular ko'pburchak qurish yordamida aniqlanadi. Ihtiyoriy O_1 nuqta tanlab, $\overline{a}_A$ vektorni o'zining masshtabida o'z–o'ziga parallel qilib O_1 nuqtaga keltiramiz. Uning uchiga a^{n}_{BA} tezlanish vektorini ko'chiramiz. Bu vektorning uchiga esa $\overline{a}^{\tau}_{BA}$ vektorni keltirib qo'yamiz. Endi O_1 nuqta bilan $\overline{a}^{\tau}_{BA}$ tezlanishi vektorining uchini tutashtiramiz. Ko'pburchakni yopuvchi tomoni B porshenning $\overline{a}_B$ tezlanish vektori bo'lib hisoblanadi (115-rasm,б). O_1 nuqta orqali x,y o'qlarini o'tkazamiz. Tezlanishlarni *x* hamda *y* o'qlariga proyeksiyalaymiz:



116-rasm

$$\Sigma a_{KX} = 0; \qquad a_B cos 45^0 = a^{\tau}_{BA} - a_A \qquad (1)$$

$$\Sigma a_{KY} = 0 \qquad a_B \sin 45^0 = -a^{n}_{BA} \qquad (2)$$

(2) dan $a^{n}_{BA} = -a_B \sin 45^0$

$$a_B = -\frac{a^{n}_{BA}}{\sin 45^0} = -\frac{400}{0,707} = -566\frac{sm}{s^2}$$

(1) dan $a^{\tau}_{BA} = a_A + a_B \cos 45^0 = 2000 - 400 = 1600\dfrac{sm}{s^2}$

AB shatunning burchak tezlanishini aniqlaymiz.

$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{1600}{100} = 16\frac{rad}{s^2}$$

28–masala. Krivoship–shatun mexanizmining OA krivoshipi o'zgarmas $\omega_{OA} = 10s^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanadi. OA krivoship B porshenning harakat yo'nalishiga perpendikulyar bo'lgan paytda krivoship A barmog'ining, B porshen, shatunning o'rtasidagi C nuqtalarning tezlanishlarini va AB shatunning burchak tezlanishini aniqlang.
OA =25 sm, OD=5 sm, AB=50 sm (116 – rasm, a).

Yechish. Krivoship A barmog'ining tezligini aniqlaymiz

$$\vartheta_A = \omega_{OA} \cdot OA = 25 \cdot 10 = 250\frac{sm}{s}$$

Shunday holatda A_1 B va C nuqtalarning tezliklari o'zaro teng:

$$\vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_C$$

Demak, tezliklar oniy markazi. Cheksizlikda yotadi. (116-rasm,б)
AB shatunning burchak tezligi $\omega_{AB} = 0$ A nuqta O nuqta atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun, uning tezlanish moduli

$$a_A = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 25 \cdot 10^2 = 2500\frac{sm}{s^2}$$

Mexanizmning shu holatida AB shatunning tezliklar oniy markazi. Cheksizlikda yotganligi uchun AB shatunning barcha nuqtalari bir hil tezlikka ega bo'ladi. (116rasm,б), demak

$$\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_C$$

AB shatunning burchak tezligi

$$\omega_{AB} = 0$$

B va C nuqtalarning tezlanishlarini tezlanishlar oniy markazi yordamida aniqlaymiz.
Tezlanishlar oniy markazi holatini aniqlash uchun μ burchakni topamiz.

$$tg\mu = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \infty \qquad \text{demak} \quad \alpha = 90^0 \text{ ekan}$$

B porshen to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlangani uchun uning tezlanishi shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Krivoship A nuqtasining tezlanishi AO bo'ylab A dan O nuqta tomon yo'nalgan bo'ladi (116-rasm, в).

A va B nuqtalar tezlanishlariga tushirilgan perpendikulyarlar kesishgan nuqta tezlanishlar oniy markazi Q_{AB} bo'ladi.

B va C nuqtalar tezlanishlar modullarini (60) formula, yordamida aniqlaymiz.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Tekis shaklning qanday nuqtasiga tezliklar oniy markazi deyiladi?
2. Tezliklar oniy markazini aniqlashning qanday usullari mavjud?
3. Sentroida nima?
4. Qo'zg'aluvchan sentroida deb nimaga aytiladi?
5. Qo'zg'almas sentroida deb nimaga aytiladi?

6. Qutb yordamida tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini aniqlash formulasini keltirib chiqaring?
7. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini geometrik usulda qanday topiladi?
8. Tekis shaklning qanday nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi?
9. Tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi ustma–ust tushadimi?

16 – MA‘RUZA

QATTIQ JISMNING QO`ZG`ALMAS NUQTA ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI. BITTA QO`ZG`ALMAS NUQTAGA EGA BO`LGAN QATTIQ JISMNING KO’CHISHIGA OID TEOREMA.

REJA:

16.1 Qattiq jismning qo`zg`almas nuqta atrofidagi aylanma harakati.

16.2 Bitta qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan qattiq jismning ko`chishiga oid teorema. Jismning sferik harakatida burchak tezlik.

16.3 Jismning sferik harakatida burchak tezlanish.

6.4 Sferik harakat qiluvchi qattiq jism nuqtasining tezligi.

16.5 Sferik harakat qiluvchi qattiq jism nuqtasining tezlanishi.

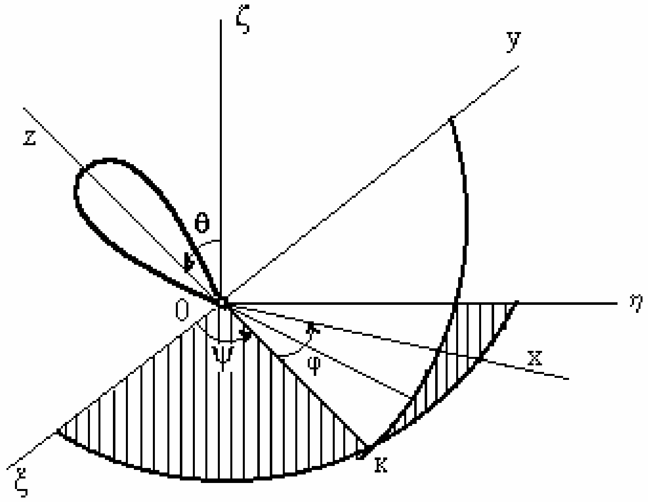
Adabiyotlar: 4, 8, 9, 12.
Tayanch iboralar: Sferik harakat, tugunlar chizig`i, protsessiya, aylanish va nutatsiya burchaklari, aylanish oniy o`qi, nuqtaning aylanma tezlanishi, nuqtaning o`qqa intilma tezlanishi, Rivals teoremasi.

16.1. Qattiq jismning qo`zg`almas nuqta atrofidagi aylanma harakati.

Qattiq jismning harakati davomida bitta nuqtasi doimo qo`zg`almasdan qolsa, uning bunday harakatiga qo`zg`almas nuqta atrofidagi aylanma harakat yoki sferik harakat deyiladi. Bunday harakat qiluvchi jismlarga tayanch tekisligidagi nuqtasi qo`zg`almas bo`lgan pirildoqning harakati yoki birgina sferik sharnir vositasida biriktirilgan jismlarning harakati misol bo`la oladi.

Qattiq jismning qo`zg`almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari. Qo`zg`almas nuqta atrofida aylanuvchi jismlarning holatini aniqlovchi parametrlarni aniqlaymiz.

Jismning qo`zg`almas O nuqta atrofidagi aylanma harakatini o`rganish uchun Oξηζ qo`zg`almas



117-rasm

koordinatalar sistemasini va jism bilan mahkam berkitilgan hamda u bilan birga harakatlanadigan *Oxyz* koordinata sistemasini o’tkazamiz (117- rasm).

Qo`zg’almas Oξη va qo`zg`aluvchi Oxy tekisliklar kesishgan OK chiziqqa tugunlar chizig`i deyiladi.

Oξη qo`zg`almas tekislikda yotuvchi Oξ o`q bilan OK tugunlar chizig`i orasidagi burchak ψ bilan belgilanadi va unga prosessiya burchagi deyiladi. Qo`zg’aluvchi *Oxy* tekislikda yotuvchi OK bilan Ox o`q orasidagi burchak φ bilan belgilanadi va sof aylanish burchagi deyiladi.

Oζ, qo`zg`almas o`q bilan Oz qo`zg`aluvchi o`q orasidagi burchak θ bilan belgilanadi va nutatsiya burchagi deyiladi.

ψ, φ, θ burchaklar Eyler burchaklari deyiladi. Eyler burchaklarining musbat yo`nalishlari 117– rasmda yoylar bilan ko`rsatilgan.

Jism O*z* o`q atrofida aylanma harakat qilganda Eyler burchaklari vaqtga bog`liq ravishda o’zgaradi, ya‘ni vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo`ladi:

$$\psi = f_1(t),\ \varphi = f_2(t),\quad \theta = f_3(t), \qquad (61)$$

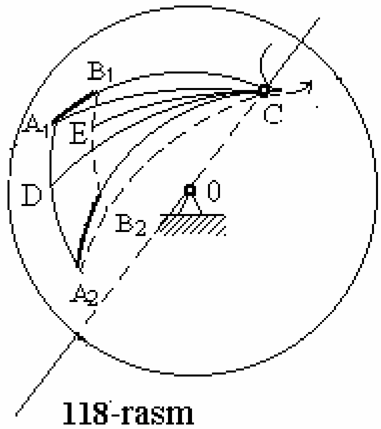
(61) ga jismning qo`zg`almas nuqta atrofidagi harakat tenglamalari yoki sferik harakat tenglamalari deyiladi.

16.2. Bitta qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan qattiq jismning ko`chishga oid teorema. Jismning burchak tezligi.

Qattiq jismning fazodagi holatini uning bir to’g`ri chiziqqa yotmagan uchta nuqtasining holati bilan aniqlash mumkin. Haqiqatdan ham ikkita nuqta qandaydir o`qni, uchinchi nuqta esa jismning shu o`qqa nisbatan holatini aniqlaydi. Qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan qattiq jismning holati qo`zg`almas nuqta bilan bir to’g`ri chiziqda yotmagan ikkita nuqtasining holati orqali aniqlash mumkin.

Teorema. Qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan qattiq jismning bir holatdan ikkinchi holatga har qanday ko`chishini qo`zg`almas nuqtadan o`tuvchi o`q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun markazi qo`zg`almas O nuqta bo`lgan sferik sirt o`tkazamiz (118- rasm). Bu sferik sirtda jismga ta’luqli ikkita ixtiyoriy A_1 va B_1 nuqtalarni olamiz. Vaqtning t_1 paytida jismning holati A_1B_1 yoy orqali aniqlanadi. Vaqtning t_2 paytida jismning holati A_2B_2 yoy orqali aniqlanadi. Sfera katta aylanasining A_1 A_2 va B_1B_2 yoylarini o`tkazamiz. $A_1A_2$ va $B_1B_2$ yoylarni o’rtasidagi D va E nuqtalardan sferik perpendikulyar yoylar o`tkazib, ularning kesishgan nuqtasini C bilan belgilaymiz. C nuqta A_1 va A_2 nuqtalardan ham B_1 va B_2 nuqtalardan teng uzoqlikda bo`lgani tufayli $A_1{}^{\cup}\overline{C} = A_2{}^{\cup}\overline{C}$ va $B_1{}^{\cup}C = B_2{}^{\cup}C$. Jism absolyut qattiq bo`lganligidan



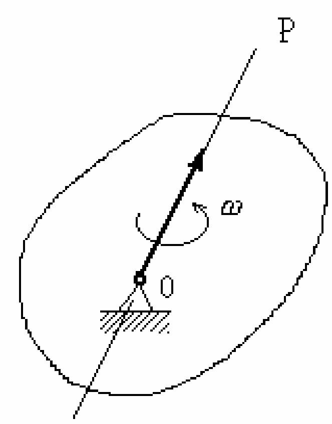
118-rasm

$A_1^{\cup}B_1 = A_2^{\cup}B_2$ Demak, A_1CB_1 va A_2 CB_2 sferik uchburchaklar o`zaro teng. Bu uchburchaklarni OC o`q atrofida $A_1CA_2 = B_1CB_2 = \Delta\alpha$ burchakka aylantirsak, A_1 C B_1 sferik uchburchak A_2CB_2 sferik uchburchak ustiga tushadi, ya‘ni A_1B_1 sferik yoy A_2B_2 holatni egallaydi. Teorema isbotlandi.

Jismning t_1 paytda egallagan I holatdan t_2 paytdagi II holatga ko`chishi jismni OC o`q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin ekan. Δt nolga intilsa, u holda OC o`qning yo`nalishi biror OP limit holatiga yaqinlashadi. Δt vaqt oralig`i kichraya borgan sari jismning I va II holatlari bir-biriga tobora yaqinlasha boradi. Agar $\Delta t$ nolga intilganda OC o`qning limit holatini ifodalovchi OP o`q aylanish oniy o`qi deyiladi (119-rasm). Δt nolga intilganda $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ dan olingan limit qattiq jismning burchak tezligi deyiladi:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

Qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan jismning oniy burchak tezligi qo`zg`almas nuqtaga qo`yilgan va oniy aylanish o`qi bo`ylab yo`nalgan bo`ladiki, uning musbat uchidan qaraganda kuzatuvchiga jismning aylanishi soat mili harakati yo`nalishiga teskari yo`nalgan bo`ladi (119-rasm).



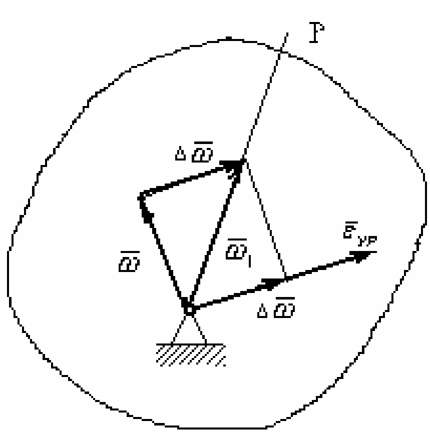
119-rasm

16.3 Jismning sferik harakatida burchak tezlanishi.

Jismning sferik harakatida oniy aylanish o`qining holati vaqtga bog`liq ravishda o’zgarib boradi, shu sababli oniy burchak tezligi ham miqdor va yo`nalish jihatdan o’zgaradi.

Vaqtning t paytida jismning burchak tezligi $\overline{\omega}$, vaqtning t + Δt paytida jismning burchak tezligi $\overline{\omega}_1$ bo`lsin (120-rasm). U holda $\Delta t$ vaqt ichida burchak tezligi orttirmasi $\Delta\overline{\omega}$ bo`ladi. $\Delta\overline{\omega}$ burchak tezlik orttirmasining Δt ga nisbati o’rtacha burchak tezlanishni beradi:

$$\overline{\varepsilon}_{YP} = \frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t}$$



120-rasm

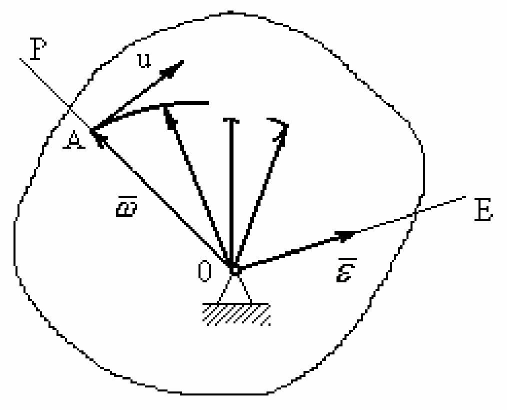
Δt nolga intilganda o’rtacha burchak tezlanishdan olingan limit vaqtning t paytdagi burchak tezlanish deyiladi:

$$\overline{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} \qquad \text{yoki} \qquad \overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

(62)

Burchak tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosilaga burchak tezlanish vektori deyiladi.

Vaqtning ketma –ket turli paytlariga mos kelgan jismning burchak tezlik vektorlarini qo`zg`almas O nuqtaga qo'yib, bu vektorlar uchlarini tutashtirib chiqsak qandaydir egri chiziq hosil bo`ladi. Bu egri chiziqqa burchak tezlik vektori godografi deyiladi (121-rasm). Vaqtning t payti uchun burchak tezlik godografi A nuqtasining harakat tezligini aniqlaymiz. Bu nuqtaning radius-vektori $\overline{\omega}$ vektor bo'lib hisoblanadi. Radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaning tezligiga teng:



121-rasm

$$\overline{u} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

$\overline{\varepsilon}$ va $\overline{u}$ vektorlar geometrik jihatdan bir xil kattalikka teng bo`lgani uchun ular o`zaro teng:

$$\overline{\varepsilon} = \overline{u} \qquad (63)$$

Jismning burchak tezlanishi geometrik jihatdan burchak tezligi vektor uchining chiziqli tezligiga teng: Geometrik jihatdan $\overline{u}$ tezlikka teng burchak tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$ qo`zg`almas O nuqtaga qo`yiladi.

Burchak tezlanish vektori yo`nalgan chiziqqa burchak tezlanish o`qi deyiladi va E harfi bilan belgilanadi.

Burchak tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$ burchak tezlik vektori godografiga o`tkazilgan urinma bo`ylab yo`naladi.

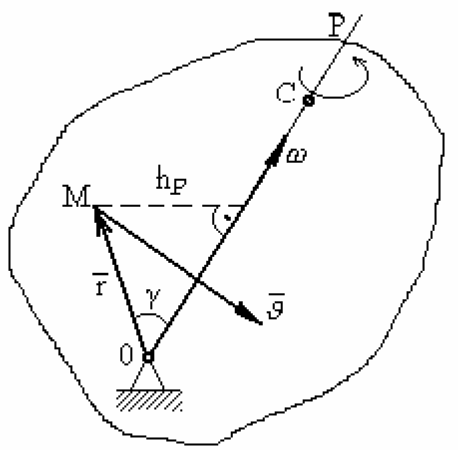
Burchak tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$ ni qo`zg`almas O nuqtaga qo'yish mumkin. Burchak tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$ bilan burchak tezlik vektori $\overline{\omega}$ bir chiziqda yotmaydi.

16.4. Sferik harakat qiluvchi qattiq jism nuqtasining tezligi.

Sferik harakat qilayotgan qattiq jism nuqtasining berilgan ondagi tezligi oniy OP o`q atrofidagi aylanuvchi jism nuqtasining tezligi aniqlanadigan Eyler formulasidan (41) topiladi:

$$\overline{\vartheta} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

bu yerda: $\overline{r}$ -M nuqtaning qo`zg`almas O nuqtaga nisbatan radius – vektori (122-rasm)



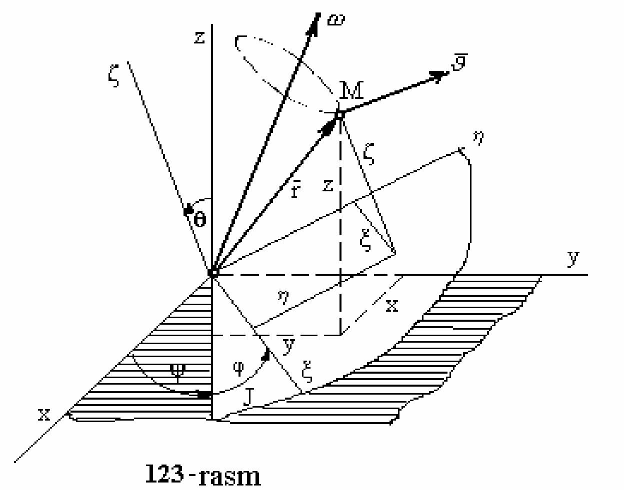
122-rasm

Nuqta tezligining moduli:

$$\vartheta = \omega r \cdot \sin\gamma = \omega \cdot h_p \qquad (64)$$

bu yerda: h_p – M nuqtadan aylanish oniy o`qqa tushirilgan perpendikulyar.

Qo`zg`almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi miqdor jihatdan shu nuqtadan aylanish oniy o`qigacha bo`lgan masofaga proporsional bo`ladi, yo`nalishi esa $\overline{\omega}$ *va* $\bar{r}$ vektorlariga perpendikulyar bo'lib, oniy o`q atrofidagi aylanishiga mos yo`naladi.



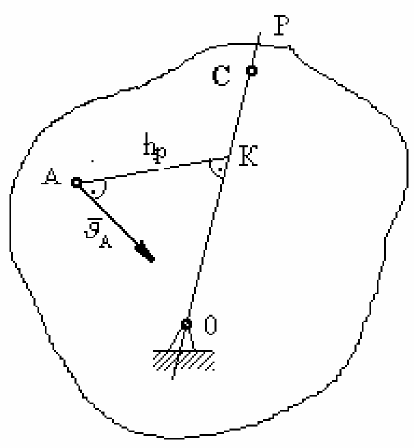
123-rasm

Nuqta tezligining qo`zg`almas Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari Eyler formulasiga ko'ra:

$$\vartheta_X = \omega_Y \cdot z - \omega_Z y;$$
$$\vartheta_Y = \omega_Z x - \omega_X z;$$
$$\vartheta_Z = \omega_X y - \omega_Y x;$$

Tezlikning qo`zg`aluvchan Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (123 - rasm) quyidagi ko'rinishda bo`ladi:

$$\vartheta_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\xi \eta;$$
$$\vartheta_\eta = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta;$$
$$\vartheta_\xi = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi;$$



124-rasm

Agar aylanish oniy o`qining holati va jism biror nuqtasining tezligi $\overline{\vartheta}$ ma'lum bo`lsa (124-rasm) , bu nuqtadan aylanish oniy o`qiga perpendikulyar tushirib jismning oniy burchak tezligini aniqlash mumkin:

$$\vartheta_A = AK \cdot \omega$$

bundan

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{AK} \qquad (65)$$

Demak, burchak tezlik modulini aniqlash uchun ϑ_A tezlik modulini A nuqtadan aylanish oniy o`qigacha bo`lgan masofaga bo'lish kerak ekan.

16.5 Sferik harakat qiluvchi qattiq jism nuqtasining tezlanishi.

Sferik harakat qiluvchi qattiq jism biror bir nuqtasining tezlanishini hisoblash uchun, shu nuqta tezligining vektorli ifodasidan foydalaniladi:

$$\overline{\vartheta} = \overline{\omega} \times \bar{r}$$

Tenglikni har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}$$

Bunda

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{\varepsilon},\quad \frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{\vartheta}=\bar{\omega}\times\bar{r}$$

Bularni o'rniga qo'yamiz

$$\bar{a}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\bar{\vartheta} \qquad (66)$$

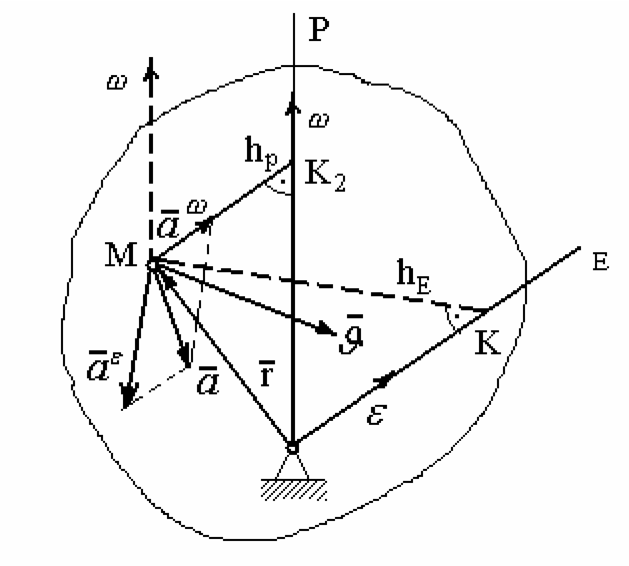
yoki

$$\bar{a}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) \qquad (67)$$

Bunda:

$\bar{\varepsilon}\times\bar{r}=\bar{a}^{\varepsilon}$ – nuqtaning aylanma tezlanishi;

$\bar{\omega}\times\bar{\vartheta}=\bar{a}^{\omega}$ - nuqtaning o`qqa intilma (markazga intilma) tezlanishi deyiladi.



125 -rasm

Shunday qilib

$$\bar{a}=\bar{a}^{\varepsilon}+\bar{a}^{\omega} \qquad (68)$$

Bu tenglama Rivals teoremasini ifodalaydi.

Sferik harakat qiluvchi qattiq jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi uning aylanma va o`qqa intilma tezlanishlarining geometrik yig`indisiga teng (125-rasm).

Nuqtaning aylanma tezlanish $\bar{a}^{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ vektori burchak tezlanish vektori $\bar{\varepsilon}$ va nuqtaning $\bar{r}$ radius-vektori orqali o`tuvchi tekislikka perpendikulyar yo`nalgan bo`ladi. Aylanma tezlanishning moduli:

$$a^{\varepsilon}=\varepsilon r\sin(\bar{\varepsilon},\hat{\ }\bar{r})=\varepsilon\cdot h_E \qquad (69)$$

bunda: $h_E=MK_1$ – M nuqtadan burchak tezlanish o`qi E gacha bo`lgan masofa. O'qqa intilma tezlanishi vektori $\bar{a}^{\omega}=\bar{\omega}\times\bar{\vartheta}$ burchak tezlik ω vektori va chiziqli tezlik $\bar{\vartheta}$ vektorlariga perpendikulyar yo`nalgan bo`ladi. Yoki bo'lmasa, M nuqtadan aylanish oniy o`qi OP tomonga OK$_2$ bo'yicha yo`naladi.

O`qqa intilma tezlanishning moduli

$$\bar{a}^{\omega}=\omega\vartheta\sin\left(\bar{\omega}\hat{\times}\bar{\vartheta}\right)=\omega\vartheta=\omega^2h_P \qquad (70)$$

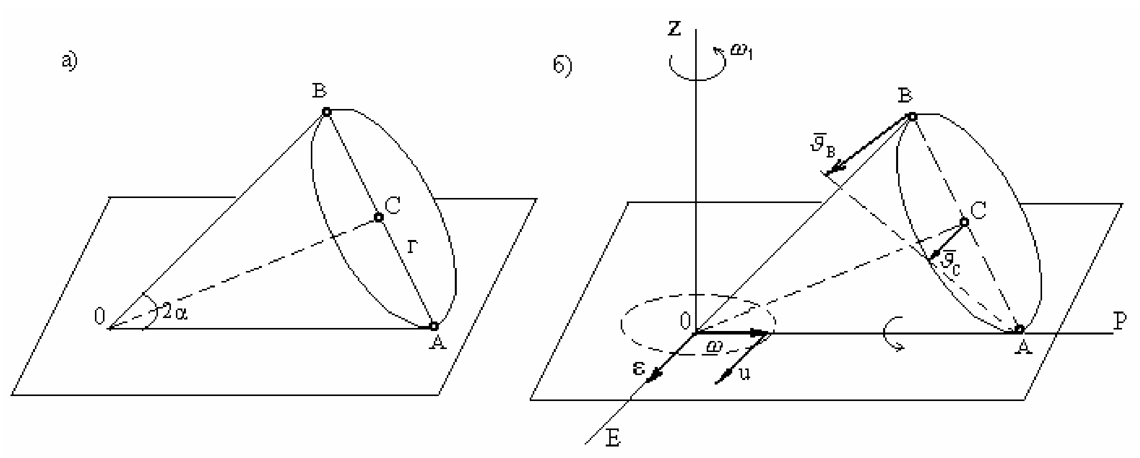
Bunda: $h_p=MK_2$ – M nuqtadan P aylanish oniy o`qigacha bo`lgan masofa.
Qo`zg`almas nuqtaga ega bo`lgan qattiq jism nuqtasining tezlanishi:

$$a=\sqrt{(a^{\varepsilon})^2+(a^{\omega})^2+2a^{\varepsilon}a^{\omega}\cos\left(\bar{a}^{\varepsilon}\hat{,}\bar{a}^{\omega}\right)}$$

yoki $$a=\sqrt{\varepsilon^2h_E^2+\omega^4h_P^2+2h_Eh_P\varepsilon\omega^2\cos\left(\bar{a}^{\varepsilon},\hat{\ }a^{\omega}\right)} \qquad (71)$$

formuladan topiladi.

Sferik harakatda nuqtaning aylanma $\overline{a}^{\varepsilon}$ va o`qqa intilma $\overline{a}^{\omega}$ tezlanishlarni urinma $\overline{a}_{\tau}$ va normal $\overline{a}_n$ tezlanishlar bilan aralashtirib yubormaslik kerak.



126-rasm

29-masala. Asosining radiusi r =20sm uchidagi burchak 2α=60^0 bo`lgan konus qo`zg`almas gorizontal tekisliklikda sirpanmasdan dumalayotgan bo`lsin. Agar konus asosi markazining tezligi $\vartheta_C = 60 sm/s = const$ bo`lsa, konusning burchak tezligi, burchak tezlanishi, asosining pastki A nuqtasi va eng yuqori B nuqtasining tezligi va tezlanishini aniqlang (126- rasm, a).

Yechish 1. Konusning burchak tezligini aniqlash. O uchi doimo qo`zg`almas bo`lgani uchun konusning harakati sferik harakatdan iborat bo`ladi. Bunday harakatni har onda oniy OP o`q atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin. Masala shartiga ko'ra, konus tekislikda sirpanmasdan dumalagani uchun aylanish OP oniy o`qi uning gorizontal tekislikdagi yasovchisidan iborat. Shu sababli OA yasovchidagi hamma nuqtalarning tezliklari nolga teng (126- rasm,б).

Konusning oniy o`qi atrofida aylanish burchak tezligining modulini C nuqtaning tezligi yordamida aniqlaymiz.

C nuqtadan oniy o'qgacha bo`lgan masofani aniqlaymiz (127- rasm).

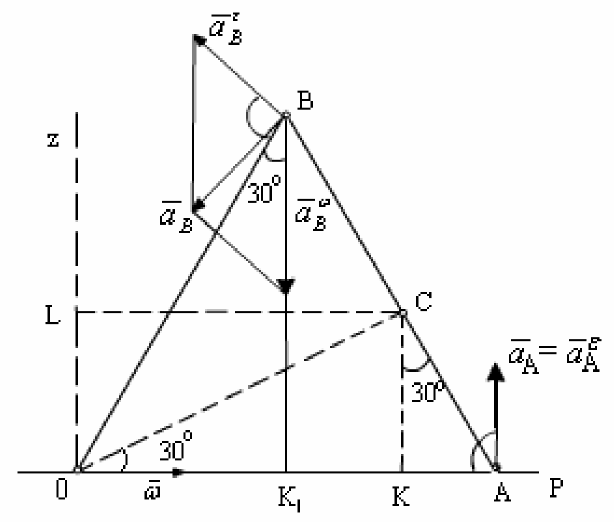
$$CK = CA\cos 30^0 = r\cos 30^0 = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 17,.32 sm$$

Burchak tezligining modulini (65) formula yordamida aniqlaymiz:

$$\omega = \frac{\vartheta_C}{CK} = \frac{60}{10\sqrt{3}} = 3,46 s$$

Oniy burchak tezlik vektori $\overline{\omega}$ oniy o`q OP bo`ylab yo`nalgan bo`ladi.

2. Konusning burchak tezlanishini aniqlash.



Konus gorizontal tekislik bo`ylab siljib $z$ o`q atrofida aylanadi. Uning moduli o'zgarmaydi $\overline{\omega}$ vektorning uchi gorizontal tekislikda aylana chizadi. $\overline{\omega}$ vektorning Oz o`q atrofidagi aylanish burchak tezligi $\omega$, OC o`qning Oz o`q atrofidagi aylanish burchak tezligi bilan bir xil bo`ladi:

$$\omega_1 = \frac{\vartheta_C}{CL} \quad \text{127-rasmdan}$$

$$CL = OC\cos 30^0 = OA\cos 30^0 \cdot \cos 30^0 = 2r\cos 30^0 = 40\frac{3}{4} = 30sm$$

$$\omega_1 = \frac{\vartheta_C}{CL} = \frac{60}{30} = 2c^{-1}$$

Oniy burchak tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$ oniy burchak tezlik vektori $\overline{\omega}$ uchining tezligiga teng bo`ladi:

$$\varepsilon = u = \omega_1\omega = 2\cdot 2\sqrt{3} = 6{,}93\overline{s}^2$$

$\overline{u}$ vektor $\overline{\omega}$ vektorning godografiga urinma bo`ylab yo`naladi. Shu sababli oniy burchak tezlanishi gorizontal tekisligida $\overline{u}$ ga parallel ravishda yo`nalgan (126-rasm, б) $\overline{\varepsilon} \perp \overline{\omega}$ bo`ladi.

3. A va B nuqtalarining tezliklarini aniqlash. A nuqta aylanish oniy o`qi ustiga yotganligi tufayli uning tezligi nolga teng:

$$\vartheta_A = 0$$

B nuqtaning tezligi aylanish oniy o`qi atrofida aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezligi kabi topiladi:

$$BK_1 = 2CK = 20\sqrt{3}sm$$

$$\vartheta_B = \omega \cdot BK_1 = 2\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3} = 120\frac{sm}{s} \quad \left(\frac{\vartheta_B}{\vartheta_C} = \frac{BK_1}{CK} = 2\right)$$

$\overline{\vartheta}_B$ tezlik vektori xuddi $\overline{\vartheta}_C$ tezlik vektori kabi POZ tekisligiga perpendikulyar ravishda yo`nalgan bo`ladi.

4. A va B nuqtalarning tezlanishlarini aniqlash.

B nuqtaning tezlanishi (68) ga asosan aniqlanadi:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^{\omega} + \overline{a}_B^{\varepsilon}$$

$$\overline{a}_B^{\omega} = \omega^2 \cdot BK\,,= \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 20\sqrt{3} = 415{,}7\,sm/s^2$$

$\overline{a}_B^{\omega}$ vektor nuqtadan oniy o`qqa tushirilgan BK perpendikulyar bo`ylab yo`nalgan bo`ladi.

$\overline{a}_B^{\varepsilon}$ tezlanishni aniqlash uchun B nuqtadan burchak tezlanish o`qi E ga perpendikulyar tushiramiz, bu perpendikulyarning uzunligi BO = 2r ga teng bo`ladi.

$$\overline{a}_B^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot BO = 4\sqrt{3}\cdot 40 = 277{,}1sm/s^2$$

$\overline{a}_B^{\varepsilon}$ vektorini POZ tekislikda OB ga perpendikulyar ravishda shunday yo`naltiramizki, $\overline{\varepsilon}$ vektorining musbat yo`nalishidan qaraganda $\overline{a}_B^{\varepsilon}$ vektorning yo`nalishi soat mili aylanishiga teskari yo`nalishda bo`lsin (127- rasm).

B nuqtaning tezlanishi $\overline{a}_B$ parallelogramning diagonali uzunligi kabi topiladi:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{\varepsilon}\right)^2 + \left(a_B^{\omega}\right)^2 + 2a_B^{\varepsilon}a_B^{\omega}\cos 120^0} = \sqrt{160^2 \cdot 3 + 240^2 \cdot 3 - 2 \cdot 160 \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = 366 sm/s^2$$

A nuqtaning o`qqa intilma tezlanishi nolga teng:

$$a_A^{\omega} = 0$$

A nuqtaning aylanma tezlanish moduli

$$a_A^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot AO = 4\sqrt{3} \cdot 40 = 277{,}1 sm/s^2$$

$\overline{a}_B^{\varepsilon}$ vektor POZ tekislikda OA ga perpendikulyar ravishda yuqoriga yo`naladi (127- rasm).

$$a_A^{\varepsilon} = 277{,}1\ sm/s^2$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Sferik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Prosessiya, sof aylanish va nutatsiya burchaklari qanday aniqlanadi?
3. Sferik harakat tenglamalari qanday ko'rinishda bo`ladi?
4. Eyler teoremasi qanday harakatni xarakterlaydi?
5. Serik harakatlanayotgan jismning burchak tezligi qanday aniqlanadi?
6. Sferik harakatda jismning burchak tezlanishi qanday topiladi?
7. Sferik harakat qilayotgan jism nuqtasining tezligi formulasi qanday ifodalanadi?
8. Tezlikning qo`zg`almas va qo`zg`aluvchan Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari Eyler formulasiga ko'ra qanday ko'rinishda bo`ladi?
9. Sferik harakat qiluvchi qattiq jism nuqtasining tezlanishi qanday aniqlanadi.?
10. Nuqtaning aylanma tezlanishi qanday ifoda orqali topiladi?
11. Nuqtaning o`qqa intilma tezlanishi qanday ifoda orqali topiladi?
12. Rivals teoremasining matematik ifodasi qanday ko'rinishga ega?

17 – MA'RUZA
NUQTANING NISBIY, KO'CHIRMA VA ABSOLYUT HARAKATI. TEZLIKLARNI QO`SHISH HAQIDA TEOREMA.

REJA:

17.1 Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakati.
17.2 Nuqtaning murakkab harakatida tezliklarni qo`shish.

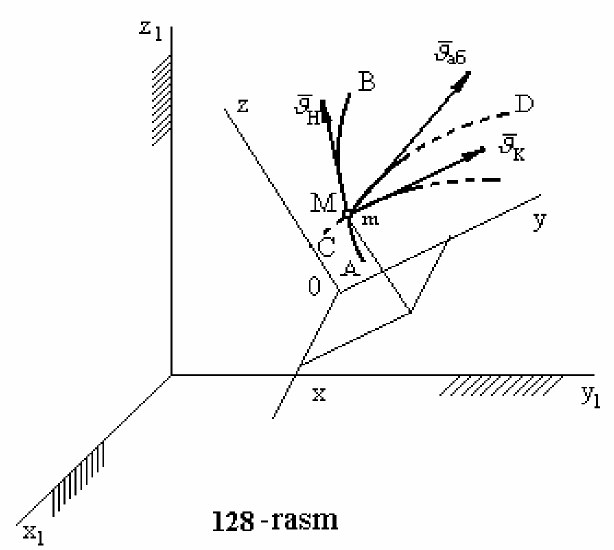
Adabiyotlar: 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12.

Tayanch iboralar: nisbiy harakat, ko'chirma harakat, absolyut harakat, nisbiy tezlik, nisbiy tezlanish, ko'chirma tezlik, ko'chirma tezlanish, absolyut tezlik, absolyut tezlanish, qo`zg`almas sanoq sistema, qo`zg`aluvchan sanoq sistema, tezliklarni qo`shish haqida teorema.

17.1 Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakati.

Biz shu vaqtga qadar nuqta yoki jismning harakatini bitta sanoq sistemasiga nisbatan o'rganib keldik. Ayrim hollarda mexanika masalalarini yechishda nuqta yoki jismning harakatini bir vaqtning o'zida ikkita: bulardan biri shartli ravishda qo`zg`almas, ikkinchisi esa birinchisiga nisbatan harakatda bo`lgan sanoq sistemalariga nisbatan o'rganishga to'g`ri keladi.

Bir vaqtning o'zida ikki yoki undan ortiq harakatlarga ishtirok etuvchi nuqtaning harakatiga murakkab harakat deyiladi. Suzib ketayotgan kema palubasida dumalayotgan koptokning harakati qirg`oqqa nisbatan murakkab harakatda bo`ladi. Koptokning harakatining ikkita sodda harakatga ajratish mumkin.



128 -rasm

M nuqta biror Oxyz koordinata sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo`lsin. O`z navbatida M nuqta bu koordinata sistemasi bilan birgalikda qo`zg`almas deb olingan $O_1x_1y_1z_1$ koordinata sistemasiga nisbatan harakatlansin (128 – rasm). Odatda har ikkala kordinatalar sistemasi ham ma'lum jismlarga biriktirilgan deb qaraladi. Quyidagi qoidalarni kiritamiz.

1. M nuqtaning qo`zg`aluvchan Oxyz koordinata sistemasiga nisbatan harakatiga nisbiy harakat deyiladi (bunday harakatni shu sanoq sistemasi bilan bog`liq bo`lgan va shu sanoq sistema bilan birgalikda harakatlanayotgan kuzatuvchi ko'radi). Nuqtaning nisbiy harakatida qoldirgan AB traektoriyasiga nisbiy traektoriya deyiladi. M nuqtaning Oxyz koordinata sistemasiga nisbatan harakat tezligiga nisbiy tezlik $(\overline{\vartheta}_H)$, tezlanishiga nisbiy tezlanishi $(\overline{a}_H)$ deyiladi. $\overline{\vartheta}_H$ va $\overline{a}_H$ kattaliklarni aniqlashda Oxyz koordinata sistemasini qo`zg`almas deb qarash mumkin.

2. Qo`zg`aluvchan Oxyz koordinata sistemasi va u bilan o'zgarmas ravishda bog'langan jism (nuqta) ning qo`zg`almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinata sistemasiga nisbatan harakati ko'chirma harakat deyiladi.

Vaqtning berilgan paytida harakatdagi M nuqta bilan ustma–ust tushuvchi qo`zg`aluvchi koordinata sistemasi m nuqtasining tezligi ko'chirma tezlik $(\overline{\vartheta}_K)$, tezlanishiga ko'chirma tezlanish $(\overline{a}_K)$ deyiladi.

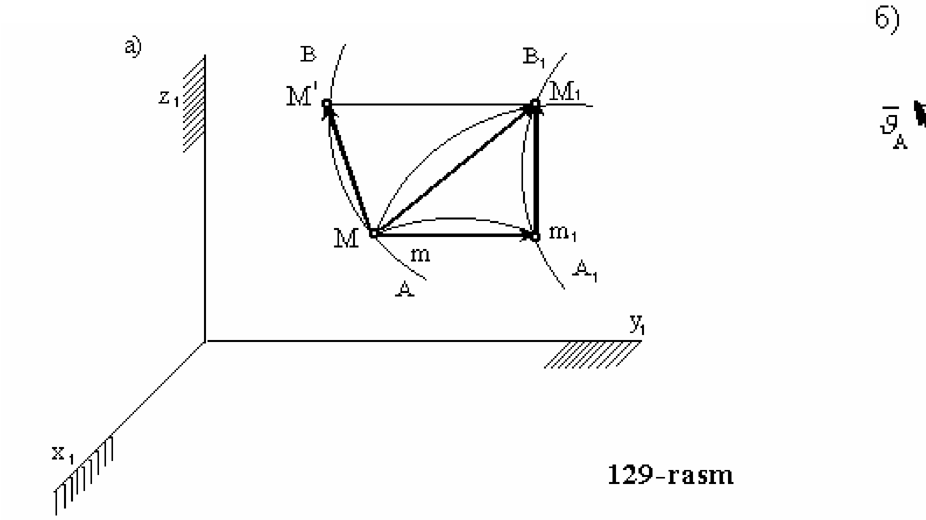
Shunday qilib quyidagini yozamiz:

$$\bar{\vartheta}_K = \bar{\vartheta}_m, \qquad \bar{a}_K = \bar{a}_m \qquad (72)$$

3. M nuqtaning qo`zg`almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinata sistemasiga nisbatan harakatiga absolyut yoki murakkab harakat deyiladi. Nuqtaning harakat paytida qoldirgan CD traektoriyasiga absolyut traektoriya, tezligiga absolyut tezlik $(\bar{\vartheta}_a)$, tezlanishiga esa absolyut tezlanish $(\bar{a}_a)$ deyiladi.

Yuqorida keltirilgan misolimizda koptokning kema palubasiga nisbatan harakati nisbiy harakat koptokning tezligi esa nisbiy tezlik;

kemaning qirg`oqqa nisbatan harakati koptok uchun ko'chirma harakat, kema palubasining shu paytda koptok tegib turgan nuqtasining tezligi ko'chirma tezlik, koptokning qirg`oqqa nisbatan harakati absolyut harakat, koptokning tezligi absolyut



129-rasm

tezlik bo`ladi.

Kinematikaga oid shu masalalarni yechishda, nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut tezliklar miqdori va tezlanishlari orasidagi bog`lanishlarni aniqlash lozim.

17.2. Tezliklarni qo`shish haqida teorema.

M nuqtaning murakkab harakatini ko'rib chiqamiz. M nuqta $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig`ida AB traektoriya bo`ylab nisbiy harakatlanib, M nuqtadan M^1 nuqtaga kelsin (129-rasm,a). Shu vaqt oralig`ida AB egri chiziq qo`zg`aluvchan *Oxyz* sistemasi bilan birgalikda harakatlanib A_1, B_1 holatni egallaydi. Vaqtning t paytida AB egri chiziqning m nuqtasi bilan ustma-ust tushuvchi M nuqta , shu vaqtning ichida ko'chirma harakat qilib , M
(m) nuqtadan m_1 nuqtaga keladi. Natijada M nuqta Δt vaqt oralig`ida absolyut harakat qilib, $M_1$ holatni egallaydi. Ko'chish vektor kattalik bo`lgani uchun vektorli Mm M_1 uchburchakdan quyidagini yozamiz.

$$\overline{MM}_1 = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M}_1$$

Tenglikning har ikkala tomonini Δt ga bo'lib, Δt ni 0 ga intiltirib limit olamiz.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}$$

Yuqorida aytilganga ko'ra

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{\vartheta}_a, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} = \overline{\vartheta}_К$$

yozamiz. Δt nolga intilganda A_1, B_1 egri chiziq AB bilan ustma-ust tushishga intiladi, u holda

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1 m_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM^{/}}}{\Delta t} = \overline{\vartheta}_H$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz.

$$\overline{\vartheta}_a = \overline{\vartheta}_H + \overline{\vartheta}_K \qquad (73)$$

Shunday qilib, tezliklarni qo`shish haqidagi quyidagi teoremani isbotladik: murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezligi nisbiy va ko'chirma tezliklarning geometrik yig`indisiga teng.

129-rasm , b da hosil bo`lgan figuraga tezliklar parallelogrammi deyiladi. Absolyut tezlikning moduli kosinuslar teoremasiga asosan topiladi(129 –rasm,б).

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_H^2 + \vartheta_K^2 + 2\vartheta н \vartheta к \cos\alpha} \qquad (74)$$

burchak $\alpha - \overline{\vartheta}_H$ *ва* $\overline{\vartheta}_K$ tezlik vektorlari orasidagi burchak.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Nuqtaning qanday harakatiga nisbiy harakat deyiladi?
2. Nuqtaning qanday harakatiga ko'chirma harakat deyiladi?
3. Nuqtaning qanday harakatiga absolyut harakat deyiladi?
4. Nuqtaning nisbiy tezligi qanday topiladi?
5. Nuqtaning ko'chirma tezligi qanday topiladi?
6. Nuqtaning absolyut tezligi qanday topiladi?
7. Tezliklarni qo`shish haqidagi teoremani aytib bering.
8. Absolyut tezlik modulini topish formulasini yozib bering.

18 – MA'RUZA

TEZLANISHLARNI QO`SHISH HAQIDA TEOREMA (KORIOLIS TEOREMASI). KORIOLIS TEZLANISHINING MODULI VA YO`NALISHINI ANIQLASH.

REJA:

18.1. Ko`chirma harakat ilgarilanma harakat bo`lmaganda tezlanishlarni qo`shish.

18.2. Ko`chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo`lganda tezlanishlarni qo`shish.

18.3. Koriolis tezlanishining moduli va yo`nalishni aniqlash.

Adabiyotlar: 4, 8, 9, 12.

Tayanch iboralar: nisbiy tezlanish, ko`chirma tezlanish, absolyut tezlanish, Koriolis tezlanishi. Jukovskiy qoidasi.

18.1. Ko`chirma harakat ilgarilanma harakat bo`lmaganda tezlanishlarni qo`shish.

Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut tezlanishlari orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Buning uchun (73) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\overline{\vartheta}_a}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta}_H}{dt} + \frac{d\overline{\vartheta}_K}{dt}$$

tenglikning chap tomoni absolyut tezlanishni beradi.

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{\vartheta}_a}{dt}$$

u holda

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{\vartheta}_a}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta}_H}{dt} + \frac{d\overline{\vartheta}_K}{dt} \qquad (75)$$

(75) tenglikning o'ng tomonidagi hadlar tegishlicha nisbiy tezlanish $\overline{a}_H$ va ko'chirma tezlanish $\overline{a}_K$ larni bermaydi. Chunki bu kattaliklar nuqtaning murakkab harakatida qo`zg'aluvchan sanoq sistemasi harakatining xarakteriga bog'liq.

Nisbiy tezlik $\overline{\vartheta}_H$ va ko'chirma tezlik $\overline{\vartheta}_K$ vektorlarining nisbiy harakat paytida vaqtga bog'liq o'zgarishlarini «1» indeks bilan ko'chirma harakat paytidagisini esa «2» indeks bilan belgilasak (75) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{a}_a = \frac{(d\overline{\vartheta}_H)_1}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta}_H)_2}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta}_K)_1}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta}_K)_2}{dt} \qquad (76)$$

Nisbiy tezlanishiga berilgan ta'rifga ko'ra nisbiy tezlanishning vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishi nisbiy tezlanishni harakterlaydi. Bunda ko'chirma harakat e'tiborga olinmaydi. Shunga ko'ra

$$\overline{a}_H = \frac{(d\overline{\vartheta}_H)_1}{dt} \qquad (77)$$

Shuningdek ko'chirma tezlanish faqatgina ko'chirma harakatda ko'chirma tezlikning vaqtga bog'liq o'zgarishini harakterlaydi, ya'ni $\overline{a}_K = \overline{a}_m$

Shunga ko'ra

$$\overline{a}_K = \frac{(d\overline{\vartheta}_K)_2}{dt} \qquad (78)$$

U holda (76) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz.

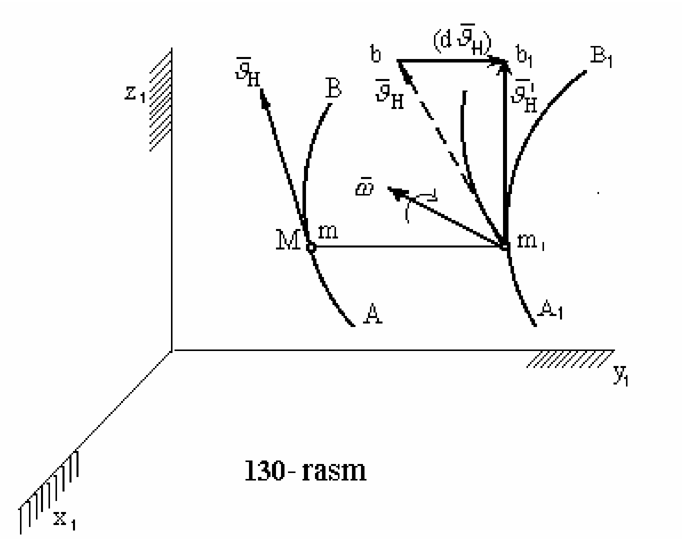
$$\overline{a}_a = \overline{a}_H + \overline{a}_K + \frac{(d\overline{\vartheta}_H)_2}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta}_K)_1}{dt} \qquad (79)$$

quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\overline{a}_{KOP} = \frac{\left(d\overline{\vartheta}_H\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\overline{\vartheta}_K\right)_1}{dt} \qquad (80)$$

$\overline{a}_{KOP}$ - Koriolis tezlanishi.

Nuqtaning nisbiy tezligini ko'chirma harakatda, ko'chirma tezligining nisbiy harakatda vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishini xarakterlovchi kattalikka aylanma yoki bo'lmasa Koriolis tezlanishi deyiladi. Natijada (79) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.



130- rasm

$$\overline{a}_a = \overline{a}_H + \overline{a}_K + \overline{a}_{KOP} \quad (81)$$

Murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezlanishi, nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig`indisiga teng.

Bu Koriolis teoremasini ifodalaydi. Endi Koriolis tezlanishini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

Hisoblashni $\frac{\left(d\overline{\vartheta}_H\right)_2}{dt}$ ni aniqlashdan boshlaymiz. Qarab chiqilayotgan ko'chirma harakatda AB egri chiziqqa urinma bo'ylab yo'nalgan $\overline{\vartheta}_H$ tezlik vektori egri chiziq bilan birgalikda ilgarilanma harakatlanib $\overline{m_1 b}$ holatini oladi (130-rasm), va bir vaqtning o`zida $\overline{m_1 b_1}$ holatni olguncha ω burchak tezlik bilan m_1 nuqta atrofida buriladi. Natijada $\overline{\vartheta}_H$ tezlik vektori ko'chirma harakatda $\left(d\overline{\vartheta}_H\right)_2 = \overline{bb_1} = \overline{\vartheta}_b \cdot dt$ orttirma oladi. Bu erda $\overline{\vartheta}_b - b$ nuqta $(\overline{m_1 b} = \overline{\vartheta}_H)$ vektorining m_2 nuqta atrofida aylanish tezligi $\overline{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanish sodir bo'lgani uchun b nuqtaning tezlik vektori

$$\overline{\vartheta}_b = \overline{\omega} x \overline{m_1 b} = \overline{\omega} x \overline{\vartheta}_H \cdot dt$$

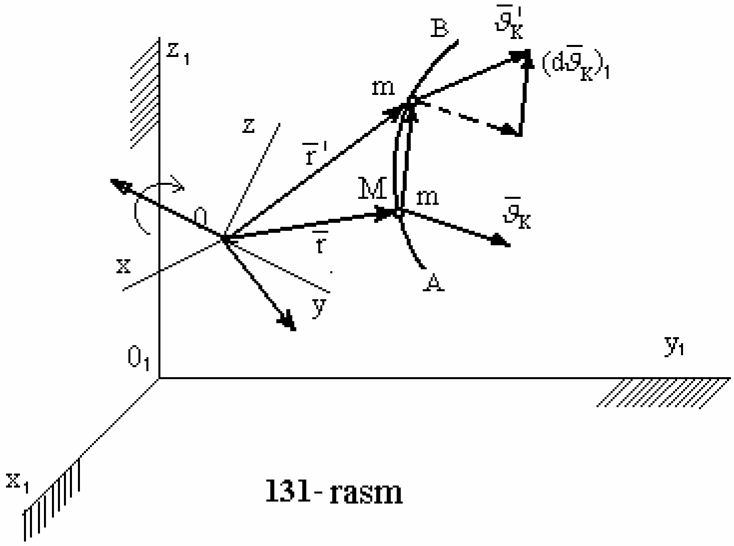
Natijada quyidagini hosil qilamiz.

$$\left(d\overline{\vartheta}_H\right)_2 = \overline{\vartheta}_b \cdot dt = \overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_H \, dt$$

o'rniga qo'yamiz:

$$\frac{\left(d\overline{\vartheta}_H\right)_2}{dt} = \frac{\left(\overline{\omega} x \overline{\vartheta}_H\right) dt}{dt} = \overline{\omega} x \overline{\vartheta}_H \qquad (82)$$

Endi $\frac{(d\bar{\vartheta}_K)_1}{dt}$ ni aniqlaymiz. Qo`zg'aluvchan koordinatalar sistemasining koordinata boshi O nuqtani qutb deb olib, u holda $\overline{Om} = \overline{OM}$ bo'ladi (131-rasm) (45) ga ko'ra



131- rasm

$$\bar{\vartheta}_K = \bar{\vartheta}_0^1 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

dt vaqt oralig'ida nuqta nisbiy harakatlanib $\overline{MM}^1 = \bar{\vartheta}_H \cdot dt$ M^1 holatni oladi. Bu nuqtaning radius-vektori.

$$\bar{r}^1 = \bar{r} + \overline{MM}'$$

ko'rinishda bo'ladi va

$\bar{\vartheta}_K^1 = \bar{\vartheta}_0 + \bar{\omega} x \bar{r}^1 = \bar{\vartheta}_0 + \bar{\omega} \times \left(\bar{r} + \overline{MM}^1\right)$

Demak, nuqta M nuqtadan M' nuqtaga kelguncha nisbiy harakatlanadi. $\overline{MM}^1 = \bar{\vartheta}_H dt$, $\bar{\vartheta}_K$ ko'chirma vektor tezlik shu vaqt ichida orttirma oladi.

$$\left(d\bar{\vartheta}_K\right)_1 = \bar{\vartheta}_K^1 - \bar{\vartheta}_K = \bar{\omega} \times \overline{MM}^1 = \bar{\omega} \times \bar{\vartheta}_H dt$$

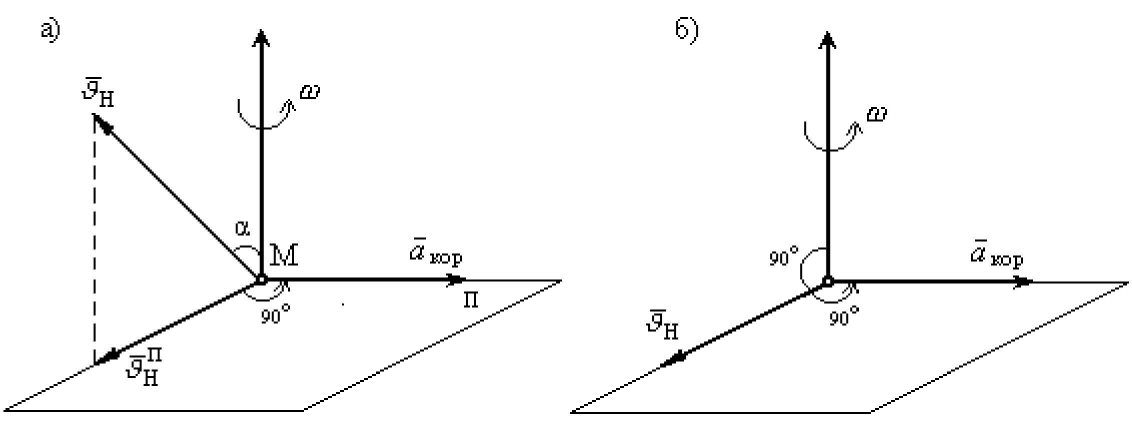
o'rniga qo`yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{\left(d\bar{\vartheta}_K\right)_1}{dt} = \bar{\omega} x \bar{\vartheta}_H \qquad (83)$$

(82) va (83) larni (80) ga qo`yamiz.

$$a_{KOP} = 2\left(\bar{\omega} x \bar{\vartheta}_H\right) \qquad (84)$$

Shunday qilib, Koriolis tezlanishi, ko'chirma harakat burchak tezligini nuqtaning



132- rasm

nisbiy tezligiga bo'lgan vektorial ko'paytmasining ikkilanganiga teng

18.2. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lganda tezlanishlarni qo`shish.

Agar qo`zg'aluvchan sanoq sistemasi ilgarilanma harakat qilayotgan bo'lsa $\omega = 0$ bo'ladi, shunga ko'ra koriolis tezlanishi $\overline{a}_{KOP} = 0$ bo'ladi. U holda (81) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{a}_a = \overline{a}_H + \overline{a}_K \qquad (85)$$

Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishga nisbiy va ko'chirma tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng.

Koriolis tezlanishining moduli va yo'nalishni aniqlash.

18.3. Koriolis tezlanishning moduli va yo`nalishini aniqlash.

Nuqtaning nisbiy tezlanishini hisoblash paytida qo`zg'aluvchan sanoq sistemasining harakati e'tiborga olinmaydi. Nisbiy tezlanish nuqtaning tezlanishi kabi topiladi. Ko'chirma tezlanish qo`zg'aluvchan sanoq sistemasi bilan chambarchas bog'liq bo'lgan nuqtaning tezlanishi kabi topiladi.

Koriolis tezlanishi (84) formula yordamida aniqlanadi. Agar $\overline{\varpi}$ va $\overline{\vartheta}_H$ vektorlar orasida burchak α ga teng bo'lsa, Koriolis tezlanishining moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$a_{KOP} = 2|\omega| \cdot |\vartheta_H| \sin\alpha \qquad (86)$$

$\overline{\varpi}$ vektorni o'ziga parallel tarzda fikran M nuqtaga ko'chirilganda $\overline{a}_{KOP}$- Koriolis tezlanish vektori $\overline{\varpi}$ va $\overline{\vartheta}_H$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda shunday yo'naladiki, uning musbat uchidan qaraganda $\overline{\varpi}$ ni kichik burchakka burib $\overline{\vartheta}_H$ ustiga tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda burishi kerak (132-rasm,a)

132-rasm, a dan ko'rinadiki, Koriolis tezlanishining yo'nalishini aniqlash uchun, nisbiy tezlik $\overline{\vartheta}_H$ vektorini $\overline{\varpi}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan Π tekislikka proeksiyalab va $\overline{\vartheta}_H^{\Pi}$ ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat yo'nalishida 90^0 burchakka burish kerak.

Agar $\overline{\varpi}$ vektori $\overline{\vartheta}_H$ tezlik vektoriga perpendikulyar bo'lsa, Koriolis tezlanishiing yo'nalishini aniqlash uchun $\overline{\vartheta}_H$ ni $\overline{\varpi}$ atrofida ko'chirma harakat aylanishi yo'nalishida 90^0 burchakka burish kerak (132, rasm,б).

Quyidagi xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

1) Qo`zg'aluvchan sanoq sistemasi ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa $\omega = 0$ bo'ladi, u holda (84) formuladan Koriolis tezlanishi $a_{кор} = 0$ kelib chiqadi.

2) Berilgan onda nuqtaning nisbiy tezligi $\vartheta_н = 0$ bo'lsa (84) formulaga ko'ra Koriolis tezlanishi $a_{кор} = 0$ bo'ladi.

3) Agar $\alpha = 0^0$ yoki $\alpha = 180^0$ bo'lsa, berilgan onda nisbiy harakat tezlik vektori ko'chirma harakat burchak tezligi vektoriga parallel bo'lsa $\sin 0^0 = 0$ (84) formulaga ko'ra Koriolis tezlanishi $a_{кор} = 0$ bo'ladi.

30 – masala. ADE uchburchak plastinka z o`qi atrofida $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$ qonuniyat bo'yicha aylanmoqda. B nuqta AD gipotenuza bo'ylab S=AB=2+15t-3t^2 qonuniyat bo'yicha nisbiy harakatlanadi. Vaqtning t_1=2c paytida B nuqtaning absolyut tezligi $\overline{\vartheta}_a$ va absolyut tezlanishi $\overline{a}_a$ ni aniqlang.

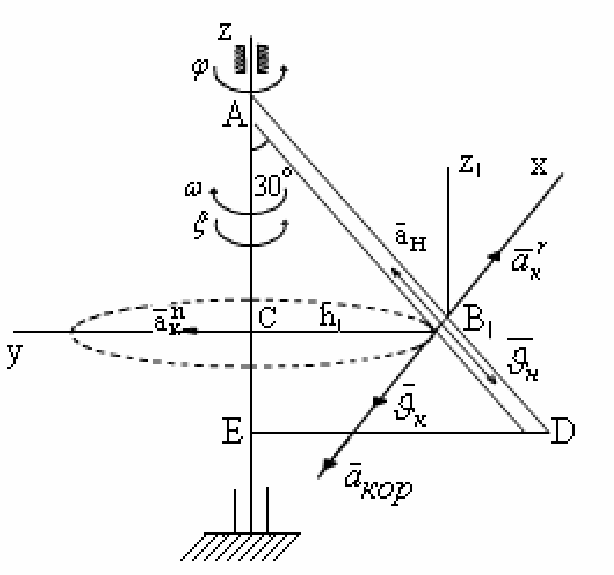
Yechish.B nuqtaning harakati murakkab harakatdan iborat. B nuqtaning AD gipotenuza bo'ylab harakati nisbiy harakat, plastinkaning z o`q atrofidagi aylanishi ko'chirma harakatdir (133 rasm).

U holda absolyut tezlik va absolyut tezlanish quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi. $\overline{\vartheta}_a = \overline{\vartheta}_н + \overline{\vartheta}_к$, $\overline{a}_a = \overline{a}_н + \overline{a}_к + \overline{a}_{кор}$ (1)

shuningdek $\overline{a}_н = \overline{a}_н^r + \overline{a}_н^n$, $\overline{a}_к = \overline{a}_к^r + \overline{a}_к^n$

Nisbiy harakat. B nuqta AD gipotenuza bo'ylab S=AB=2+15t-3t^2 (2)

qonuniyat bo'yicha nisbiy harakat qiladi.



133-rasm

B nuqtaning nisbiy tezligi va nisbiy tezlanishi

$$\vartheta_H = \frac{ds}{dt} = \left[2 + 15t - 3t^2\right]^1 = 15 - 6t \,;$$

$$a_H = \frac{d\vartheta_H}{dt} = \left[15 - 6t\right]^1 = -6\,;$$

$t_1 = 2S$ bo'lganda B nuqtaning o'rnini, nisbiy tezligi va nisbiy tezlanishini aniqlaymiz.

$$s = AB_1 = 2 + 15\cdot 2 - 3\cdot 4 = 20\,sm\,;$$

$$\vartheta_H = 15 - 6\cdot 2 = 3\frac{sm}{s}\,;$$

$$a_H = -6\,\frac{sm}{s^2}\,; \qquad (3)$$

1. Kattaliklarning ishoralaridan shuni aniqlash mumkinki, B nuqtaning nisbiy tezlik vektori A dan D nuqta tomon yo'nalgan, nisbiy tezlanish vektori esa unga teskari yo'nalgan ekan. Bu vektorlarni rasmda ko'rsatamiz (133-rasm).
2. **Ko'chirma harakat.** ADE plastinka z o`q atrofida $\varphi = 0{,}1t^2 - 2{,}2t$ qonuniyat bo'yicha ko'chirma (aylanma) harakat qiladi. Ko'chirma harakatning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε larni aniqlaymiz

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left[0{,}1t^3 - 2.2t\right]' = 0.3t^2 - 2.2;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \left[0{,}3t^2 - 2{,}2\right]' = 0{,}6 \cdot t:$$

t_1=2 c bo'lganda

$$\omega = 0{,}3 \cdot 4 - 2{,}2 = 1{,}2 - 2{,}2 = -1\overline{s}^{1} \quad \varepsilon = 1{,}2\overline{s}^{2} \qquad (4)$$

Burchak tezlik ω burilish burchagi φ ga teskari burchak tezlanish ε esa soat mili aylanishiga teskari tomonga yo'nalgan ekan. B_1 nuqtadan z o`qigacha bo'lgan h masofani aniqlaymiz.

$$h = AB_1 \sin 30^0 = 20 \cdot 0{,}5 = 10sm$$

U holda B nuqtaning ko'chirma tezligi

$$\overline{\vartheta}_K = |\omega| \cdot h = |-1| \cdot 10 = 10\frac{sm}{s}$$

$$a_K^z = |\varepsilon| h = |1{,}2| \cdot 10 = 12\frac{sm}{s^2}$$

$$a_K^n = |\omega^2| h = |-1^2| \cdot 10 = 10\frac{sm}{s^2} \qquad (5)$$

Bularni rasmda ko'rsatamiz. $\overline{\vartheta}_K$ vektor B_1 nuqtaga urinma bo'ylab ω burchak tezlik bilan bir tomonga yo'nalgan bo'ladi. a_K^{τ} vektor esa $\overline{\vartheta}_K$ vektor yo'nalgan to'g'ri chiziq bo'ylab unga teskari (ε burchak tezlanish bilan bir tomonga) yo'nalgan bo'ladi. $\overline{a}_K^n$ vektor esa B_1 nuqtadan aylana markazi tomon, ya‘ni aylanish o'qi tomon yo'nalgan bo'ladi.

3. **Koriolis tezlanishi.** Nisbiy tezlik $\overline{\vartheta}_H$ vektori bilan aylanish o'qi orasidagi burchak 30^0 bo'lgani uchun, Koriolis tezlanishining moduli

$$a_{KOP} = 2|\vartheta_H| \cdot |\omega| \sin 30^0 = 2 \cdot 3 \cdot |-1| \; 0{,}5 = 3\frac{sm}{s^2} \qquad (6)$$

Koriolis tezlanishining yo'nalishni topish uchun nisbiy tezlik $\overline{\vartheta}_H$ vektorini aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikka proeksiyalab, keyin proeksiyani 90^0 burchakka, burchak tezligi yo'nalgan tomonga buramiz. Koriolis tezlanishi $\overline{a}_{KOP}$ vektori $\overline{\vartheta}_K$ vektori bilan bir to'g’ri chiziq bo'ylab yo'nalgan

4. **B nuqtaning absolyut tezligi.** $\overline{\vartheta}_a$ ni aniqlaymiz. $\overline{\vartheta}_H$ va $\overline{\vartheta}_K$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lgani uchun

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_H^2 + \vartheta_K^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} = 10{,}44\,\frac{sm}{s}$$

5. B nuqtaning absolyut tezlanishini aniqlaymiz.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_H + \bar{a}_K^\tau + a_K^n + \bar{a}_{KOP} \qquad (7)$$

Absolyut tezlanish $\bar{a}_a$ ni aniqlash uchun B_1xyz koordinata sistemasini o'tkazib (7) ni koordinata o'qlariga proeksiyalaymiz.

$$a_{ax} = \left|a_K^\tau\right| - a_{KOP} = 12 - 3 = 9\,\frac{sm}{s^2}$$

$$a_{ay} = a_K^n + \left|a_n\right|\sin 30^0 = 10 + \left|-6\right|\cdot 0{,}5 = 13\,\frac{sm}{s^2}$$

$$a_{az} = \left|a_H\right|\cos 30^0 = \left|-6\right|\cdot 0{,}866 = 5{,}196 \approx 5{,}2\,\frac{sm}{s^2}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{9^2 + 13^2 + 5.2^2} = 16.64 m/s^2$$

31-masala. $OEAB_1D$ (OE=OD) plastinka O nuqtadan o'tuvchi plastinka yuzasiga perpendikulyar yo'nalgan o'q atrofida $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$ qonuniyat bo'yicha aylanmoqda. B nuqta radiusi R= 0,5m bo'lgan aylana bo'ylab $S = A^{\cup}B = \pi R\cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Vaqtning $t_1 = 2s$ payti uchun B nuqtaning absolyut tezligi $\bar{\upsilon}_a$ va absolyut tezlanishi $\bar{a}_a$ ni aniqlang.

Yechish: B nuqtaning harakati murakkab harakat bo'lib, uning aylana bo'ylab qiladigan harakati nisbiy harakat, plastikaning aylanishi esa ko'chirma harakat bo'lib hisoblanadi (134-rasm). U holda, nuqtaning absolyut tezligi $\bar{\vartheta}_a$ va absolyut tezlanishi $\bar{a}_a$ quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi.

$$\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_H + \bar{\vartheta}_K$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_H + \bar{a}_K + a_{KOP} \qquad (1)$$

bu yerda: $\bar{a}_H = \bar{a}_H^\tau + \bar{a}_H^n$, $\quad \bar{a}_K = \bar{a}_K^\tau + \bar{a}_K^n$

1. Nisbiy harakat .

Bu harakat quyidagi qonun bo'yicha ro'y beradi.

$$s = \overline{A}^{\cup}\overline{B} = \pi R\cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right) \qquad (2)$$

Avvalo vaqtning t_1 paytida B nuqtaning o'rnini aniqlaymiz. $t_1 = 2s$ bo'lganda

$$s_1 = \pi R\cos\left(\frac{\pi\cdot 2}{3}\right) = \pi R\cos 120^0 = \pi R\cos\left(90^0 + 30^0\right) = -\pi R\sin 30^0 = -0{,}5\pi R$$

U holda

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -\frac{0{,}5\pi R}{R} = -0{,}5\pi$$

Minus ishora B nuqta A nuqtaning o'ng tomonida bo'lishini ko'rsatadi. Uni rasmda ko'rsatamiz, demak B nuqta B_1 nuqtada bo'lar ekan.

$$\vartheta_H = \frac{ds}{dt} = \left[\pi R\cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)\right]^1 = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)$$

$$a_H^\tau = \frac{d\vartheta_H}{dt} = \left[-\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)\right]^1 = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)$$

$$a_H^n = \frac{\vartheta_H^2}{\rho_H} = \frac{\left(-\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)\right)^2}{R} = \frac{\vartheta_H^2}{R} \qquad (3)$$

ρ_H-nuqta traektoriyasining egrilik radiusi, bu yerda aylana radiusiga teng ρ_H=R

$$\vartheta_H = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(90^0 + 30^0\right) = -\frac{\pi^2 R}{3}\cos 30^0 = -\frac{\pi^2\frac{1}{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{8{,}528}{6} = -1{,}42\frac{m}{s};$$

$$a_H^\tau = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(90^0 + 30^0\right) = -\frac{\pi^3 R}{9}\left(-\sin 30^0\right) = \frac{\pi^3\cdot 0{,}5}{9}\cdot 0{,}5 = \frac{7{,}74}{9} = 0{,}86\frac{m}{s^2};$$

$$a_H^n = \frac{\vartheta_H^2}{\rho} = \frac{\vartheta_H^2}{R} = \frac{\left(-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}\right)^2}{0{,}5} = \frac{\pi^4\cdot 2}{48} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}05\frac{m}{s^2}$$

$\bar{\vartheta}_H$,$\bar{a}_H^\tau$ *ва* a_n^n kattaliklarni 134-rasmda ko'rsatamiz.

2. Ko'chirma harakat. Bu harakat plastikaning $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$ qonun bo'yicha aylanishi natijasida ro'y beradi. Avvalo burchak tezlik va burchak tezlanishni aniqlaymiz: $t_1 = 2s$ bo'lganda:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left[t^2 - 0{,}5t^3\right]^1 = 2t - 1{,}5t^2 = 4 - 6 = -2\bar{s}^1$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \left[2t - 1{,}5t^2\right]^1 = 2 - 3t = 2 - 6 = -4\bar{s}^2 \qquad (4)$$

Manfiy ishora shuni ko'rsatadiki ω va ε vektorlar burilish burchagi φ ning yo'nalishiga teskari yo'nalgan ekan.

Nisbiy tezlik $\bar{\vartheta}_K$ va nisbiy tezlanish $\bar{a}_K$ ni aniqlash uchun, avvalo, B_1 nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan $OB_1 = h_1$ masofani aniqlaymiz. Rasmdan ko'rinadiki $\angle B_1OD = \angle OB_1D = 45^0$. U holda $OB_1 = h_1 = 2R\sqrt{2} = 1{,}41м$

$$\vartheta_K = |\omega| h_1 = |-2| \cdot 1{,}41 = 2{,}82 m/s$$
$$a_K^{\tau} = |\varepsilon| h_1 = |-4| \cdot 1{,}41 = 5{,}64 m/s^2$$
$$a_K^{\tau} = \omega^2 \cdot h_1 = (-2)^2 \cdot 1{,}41 = 5{,}64 m/s^2 \qquad (5)$$

3. Bu kattaliklarni rasmda ko'rsatamiz. $\overline{\vartheta}_K$ va $\overline{a}_K^{\tau}$ vektorlar ω va ε larning yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. $\overline{a}_K^{n}$ vektor esa aylanish markazi tomon yo'nalgan bo'ladi.

4. Koriolis tezlanishi. Koriolis tezlanishining moduli $a_{KOP} = 2(\vartheta_H) \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$ formula yordamida aniqlanadi. α burchak nisbiy tezlik vektori $\overline{\vartheta}_K$ bilan aylanish o'qi $\overline{\omega}$ vektor orasidagi burchak. Bizning misolimizda $\alpha = 90^0$ u holda

$$a_{KOP} = 2|-1{,}42| \cdot |-2| = 5{,}68 m/s^2 \qquad (6)$$

Koriolis tezlanishning yo'nalishini N.Ye. Jukovskiy qoidasiga asosan topamiz. Nisbiy tezlik $\overline{\vartheta}_H$ vektor aylanish o'qiga perpendikulyar tekisligida yotadi, uni burchak tezlik $\overline{\omega}$ yo'nalishi bo'yicha 90^0 burchakka buramiz.

Absolyut tezlikni aniqlash. B_1 nuqtani koordinata boshi qilib B_1xy koordinata sistemasini o'tkazamiz.

$$\overline{\vartheta}_a = \overline{\vartheta}_H + \overline{\vartheta}_K$$

tengligini har ikkala tomoni x va y o'qlariga proeksiyalaymiz.

$$\vartheta_{ax} = \vartheta_{нx} + \vartheta_{кx} = 0 - |\vartheta_K| \cos 45^0 = -1{,}99 m/s;$$
$$\vartheta_{ay} = \vartheta_{нy} + \vartheta_{кy} = |\vartheta_н| + |\vartheta_K| \cos 45^0 = 3{,}41 m/s$$
$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_{ax}^2 + \vartheta_{ay}^2} = \sqrt{(-1{,}99)^2 + 3{,}41^2} = 3{,}.95 \frac{m}{s}$$

Kosinuslar teoremasidan foydalanib absolyut tezlik ϑ_a ni aniqlaymiz, $\alpha = 45^0$

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_d^2 + \vartheta_K^2 + 2(\vartheta_d)|\vartheta_K| cos\, 45^0} = 3{,}95 \frac{m}{s}$$

5. Absolyut tezlanishni aniqlash.

$$\overline{a}_a = \overline{a}_H^{\tau} + \overline{a}_H^{n} + \overline{a}_K^{\tau} + \overline{a}_K^{n} + \overline{a}_{KOP} \qquad (7)$$

(7) – ning har ikkala tomonini *x, y* o'qlariga proeksiyalaymiz

$$a_{ax} = a_н^n + a_{KOP} + a_к^n \cos 45^0 - |a_к^{\tau}| \cos 45^0 = 4{,}06 + 5{,}68 + 5{,}64 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - |5{,}64| \frac{\sqrt{2}}{2} = 9{,}74 \frac{m}{s^2}$$
$$a_{ay} = a_к^n \cos 45^0 + |a_к^{\tau}| \cos 45^0 - |a_н^{\tau}| = 5{,}64 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5{,}64 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}86 = 7{,}15 \frac{m}{s^2}$$
$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{9{,}74^2 + 7{,}15^2} = 12{,}08 \frac{m}{s^2}$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Nuqtaning nisbiy ko'chirma va absolyut tezlanishlari orasida qanday bog'lanish bor?
2. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lmagan harakatdan iborat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?
3. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishi nimaga teng?
4. Koriolis tezlanishi deb qanday tezlanishga aytiladi?
5. Koriolis tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?
6. Koriolis tezlanishning modulini aniqlash formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
6. Koriolis tezlanishining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
7. Koriolis tezlanishi nuqtaning qanday harakatida paydo bo'ladi?
8. Koriolis tezlanishi qanday hollarda nolga teng bo'ladi?

ADABIYOTLAR:

Aziz – Qoriev S.K., Yangurazov Sh.X. Nazariy mexanikadan masalalar yechish metodikasi, T., 1 – qism, 1974, 2 qism, «O'qituvchi» 1975.

Bat M.I., Janelidze G.Yu., Kelzon A.S. Teoreticheskoya mexanika v primerax i zadachax, t. 1, M., «Nauka», izd. 8-e, pererabotannoe, 1984.

Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. Kurs teoreticheskoy mexaniki. «Nauka», M., t.1,1970, t.2, 1971.

Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki. «Nauka»,1964.

Gernet M.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki «Visshaya shkola», M., 1965.

Dobronravov V.V., Nikitin N.N., Dvornikov A.A. Kurs teoretichekoy mexaniki «Visshaya shkola» M, 1974

Meshcherskiy I.V. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami, «O`qituvchi», T.1989.

Rashidov T.R.Nazariy mexanika asosiy kursi, «O`qituvchi», T, 1990

Targ S.M. Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki «Visshaya shkola» 1998

Urozboev M.T «Nazariy mexanika asosiy kursi,» «O`qituvchi»,T., 1966.

Shoxaydarova P. va boshqalar. Nazariy mexanika «O`qituvchi», T.,1991.

Yablonskiy A.A., Nikiforova V.M. «Kurs teoreticheskoy mexaniki», ch. I zd.4-e «Visshaya shkola» M, 1971.

Yablonskiy A.A., idr. Sbornik zadaniy dlya kursovx rabot po teoreticheskoy mexaniki, «Visshaya shkola» M, 1985.

Mundarija