ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ для поступающих В ВУЗЫ

группа Б

КНИГА 2

Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

Москва
«Мир и Образование»
Минск
«Харвест»
2003

УДК 51(076.1)
ББК 22.11
П51

Полный сборник решений задач для поступающих в вузы.
П51 Группа Б / Под ред. М. И. Сканави. В 2 кн. кн. 2. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2003. – 832 с.: ил.

ISBN 5-94666-16-0 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-0912-5 (ООО «Харвест»)

Впервые в помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Книги помогут учащимся научиться решать экзаменационные задачи различного уровня сложности любого вуза.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию «Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, 6-е издание (М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование).

УДК 51(076.1)
ББК 22.11

ISBN 5-94666-16-0
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-0912-5
(ООО «Харвест»)

Содержание

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

ТВОРЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информации и Радиоэлектроники Карпук Андрей Андреевич

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информатики и Радиоэлектроники Жевняк Ростислав Михайлович

Кандидат физико-математических наук Ермолицкий Александр Александрович

Решения к главе 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

Степени с действительными показателями

$$a^0 \equiv 1, \tag{7.1}$$

где 0^0 не имеет смысла;

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n} \left(a \neq 0\right), \tag{7.2}$$

где n — действительное число;

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m} \left(a \geq 0\right), \tag{7.3}$$

где m и n — натуральные числа;

$$a^\alpha \cdot a^\beta \equiv a^{\alpha+\beta}, \tag{7.4}$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} \equiv a^{\alpha-\beta}, \tag{7.5}$$

$$\left(a^\alpha\right)^\beta \equiv a^{\alpha\cdot\beta}, \tag{7.6}$$

где α и β — действительные числа.

Показательная функция

Показательной функцией переменной x называется функция

$$y = a^x,$$

где a — данное число.

Если $a < 0$, то функция a^x определена только при целых и при дробных значениях x (если знаменатель дробного показателя – нечетное число). Если $a = 0$, то выражение 0^x определено при $x > 0$. Если $a > 0$, то функция a^x определена при всех действительных значениях x, причем при $a = 1$ имеем $1^x = 1$, т.е. функция равна постоянному.

В дальнейшем показательную функцию a^x будем рассматривать при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Основные свойства показательной функции
$y = a^x$ при $a > 0,\ a \neq 1$:

1. Показательная функция определена при всех действительных значениях x $(x \in R)$.

2. Областью изменения показательной функции служит множество всех положительных действительных чисел, т.е. $y \in (0, +\infty)$.

3. При $a > 1$ показательная функция строго возрастает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (0; 1)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; \infty)$, то $y \in (1; +\infty)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to 0$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $a \in (0; 1)$ показательная функция строго убывает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (1; +\infty)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (0; 1)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

5. Характеристическое свойство: значение показательной функции от суммы равно произведению значений этой функции от слагаемых, т.е.

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b: $\log_a b = x$, если $a^x = b$, или

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (7.7)$$

В дальнейшем основание логарифмов будем считать положительным и отличным от единицы ($a > 0$, $a \neq 1$).

Приведем некоторые свойства логарифмов (при любом положительном основании, отличном от единицы).

1. Логарифм единицы равен нулю, т.е. $\log_a 1 = 0$.

2. *Логарифм основания равен единице*, т.е. $\log_a a = 1$.

3. Для любого положительного числа b существует, и притом только одно, такое действительное число α, что $\log_a b = \alpha$.

4. Из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует $x_1 = x_2$ (и наоборот).

Основные правила логарифмирования

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c. \tag{7.8}$$

Замечание. Логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \ldots b_n) \equiv \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \ldots + \log_a |b_n| \quad (b_1 \cdot b_2 \ldots b_n > 0). \tag{7.9}$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \tag{7.10}$$

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} \equiv \log_a |b| - \log_a |c| \quad (b \cdot c > 0). \tag{7.11}$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм ее основания (логарифмы взяты по тому же основанию), т.е.

$$\log_a b^c = c \log_a b. \tag{7.12}$$

Замечание. Логарифм положительной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, т.е.

$$\log_a b^c \equiv c\log_a|b| \quad (b^c > 0). \tag{7.13}$$

Формулы перехода от одного основания логарифма к другому

1. Логарифм числа по данному основанию равен логарифму этого числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию, т.е.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{7.14}$$

Множитель $\dfrac{1}{\log_b a}$ называется *модулем перехода*.

2. Из формулы (7.14) при $N = b$ получаем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{7.15}$$

3. Часто в логарифмических преобразованиях пользуются тождествами

$$\log_{a^k} N \equiv \frac{1}{k}\log_{|a|} N \quad (a^k > 0) \tag{7.16}$$

и

$$\log_{a\cdot b} N \equiv \frac{\log_{|a|} N}{1+\log_{|a|}|b|} \quad (ab > 0). \tag{7.17}$$

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ и x – независимая переменная.

По определению логарифма выражение $y = \log_a x$ означает то же, что и выражение $a^y = x$, т.е. логарифмическая функция есть обратная функция по отношению к показательной.

Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена при всех положительных действительных значениях x (нуль и отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют).

2. Областью изменения логарифмической функции служит множество всех действительных чисел $y \in (-\infty; +\infty)$.

3. При $a > 0$ логарифмическая функция возрастает, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Причем если $x \in (0;1)$, то $y \in (-\infty; 0)$; если $x = 1$, то $y = 0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; т.е. если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (-\infty; +\infty)$; $y \to -\infty$ при $x \to 0$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Причем если $x \in (0;1)$, то $y \in (0; +\infty)$; если $x = 1$, то $y = 0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $y \in (-\infty; 0)$, т.е. если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (-\infty; +\infty)$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to 0$.

5. Характеристическое свойство: значение логарифмической функции от произведений двух положительных чисел равно сумме значений функции от каждого из чисел:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени.

Рассмотрим несколько типов показательных уравнений, решаемых методами элементарной математики.

Показательные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения при решении показательных уравнений в общем случае обязательна.

1. Уравнение вида

$$a^x = b \tag{7.18}$$

называется *простейшим показательным*.

Рассмотрим уравнение (7.18) при $a > 0$ и $a \neq 1$. Если $b > 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \log_a b$. Если $b \leq 0$, то уравнение решений не имеет.

2. Показательное уравнение вида

$$a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}, \tag{7.19}$$

где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, а $f_1(x), f_2(x)$ — заданные элементарные функции, логарифмированием приводится к виду

$$f_1(x)\log_c a = f_2(x)\log_c b.$$

Если последнее уравнение решается методами элементарной математики, то тем самым решается уравнение (7.19).

Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные только под знаком логарифма.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

1. Уравнение вида

$$\log_a x = b, \tag{7.20}$$

где x – неизвестное, а a и b – заданные числа, называется *простейшим логарифмическим*.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то такое уравнение при любом действительном значении b имеет единственное решение

$$x = a^b. \tag{7.21}$$

2. Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \tag{7.22}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$, после потенцирования приводится к виду

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{7.23}$$

Корнями уравнения (7.22) будут только те корни уравнения (7.23), при которых $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, т.е. корни, принадлежащие к области определения уравнения (7.22).

3. Логарифмические уравнения вида

$$f(\log_a \psi(x)) = 0, \tag{7.24}$$

где $f(t)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции, заменой $\log_a \psi(x) = t$ приводятся к уравнению $f(t) = 0$.

Показательно-логарифмические уравнения

Если неизвестное в уравнении входит в показатель степени и под знак логарифма или в основание логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, и приводят их к логарифмическим уравнениям.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (подстановки, алгебраического сложения, введения новых неизвестных и др.).

Упростить выражения (7.150 — 7.156):

7.150. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

Решение.

$$\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)} = \left(b^{\frac{1}{2}\frac{\lg a}{\lg b}} \cdot a^{\frac{1}{2}\frac{\lg b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)} =$$

$$= \left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)} = (ab)^{\log_{ab}(a+b)} = a+b.$$

Ответ: $a+b$.

7.151. $\left(\left(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2\right)^{1/2} + 2\right)^{1/2} - \log_b a - \log_a b$.

Решение.

$$\left(\left(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2\right)^{1/2} + 2\right)^{1/2} - \log_b a - \log_a b =$$

$$\left(\left(\log_b^4 a + \frac{1}{\log_b^4 a} + 2\right)^{1/2} + 2\right)^{1/2} - \log_b a - \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{\sqrt{\frac{\log_b^8 a + 2\log_b^4 a + 1}{\log_b^4 a}} + 2} -$$

$$-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\log_b^4 a+1}{\log_b^2 a}\right)^2}+2}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\sqrt{\frac{\log_b^4 a+1}{\log_b^2 a}+2}-$$

$$-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\sqrt{\frac{\log_b^4 a+2\log_b^2 a+1}{\log_b^2 a}}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\sqrt{\left(\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}\right)^2}-$$

$$-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\frac{\log_b^2 a+1}{|\log_b a|}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}.$$

Таким образом, получаем два случая:

$$1)\ \begin{cases}\log_b a<0 \text{ или } \begin{cases}0<b<1,\\ a>1\end{cases} \cup \begin{cases}b>1,\\ 0<a<1;\end{cases}\\ -\dfrac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}-\dfrac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\dfrac{-2(\log_b^2 a+1)}{\log_b a}=-2(\log_b a+\log_a b);\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\log_b a>0 \text{ или } \begin{cases}0<b<1,\\ 0<a<1\end{cases} \cup \begin{cases}b>1,\\ a>1;\end{cases}\\ \dfrac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}-\dfrac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=0.\end{cases}$$

Ответ: $-2(\log_b a+\log_a b)$, если $\begin{cases}a>1,\\ 0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}0<a<1,\\ b>1,\end{cases}$ и 0, если $\begin{cases}0<a<1,\\ 0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}a>1,\\ b>1.\end{cases}$

7.152. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}$.

Решение.

ОДЗ: $x>1$.

$$\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}=$$

$$=\log_2 2+\log_2 x^2+\log_2 x\cdot(\log_2 x+1)+2\log_2^2 x+2^{\log_2\log_2^3 x}=$$

$$=1+2\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2 x+2\log_2^2 x+\log_2^3 x=$$

$$=\log_2^3 x+3\log_2^2 x+3\log_2 x+1=(\log_2 x+1)^3.$$

Ответ: $(\log_2 x+1)^3$.

7.153. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

$$\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}=\left(x\cdot x^{\frac{1}{\log_2 x}}+2^{\frac{1}{\log_{x^2} 2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(x\cdot x^{\log_x 2}+2^{\log_2 x^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}=(2x+x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1$$

(с учетом ОДЗ: $0<x\neq 1$).

Ответ: $x+1$, где $0<x\neq 1$.

7.154. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12})$.

Решение.

$$\frac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12})=\frac{\log_a b-\dfrac{\log_a\sqrt{b}}{\log_a\dfrac{\sqrt{a}}{b^3}}}{\dfrac{\log_a b}{\log_a\dfrac{a}{b^4}}-\dfrac{\log_a b}{\log_a\dfrac{a}{b^6}}}:\frac{\log_a a^3\cdot b^{-12}}{\log_a b}=$$

$$=\frac{\log_a b-\dfrac{\frac{1}{2}\log_a b}{\frac{1}{2}-3\log_a b}}{\dfrac{\log_a b}{1-4\log_a b}-\dfrac{\log_a b}{1-6\log_a b}}\cdot\frac{\log_a b}{3-12\log_a b}=$$

$$=\frac{-3\log_a^2 b(1-4\log_a b)(1-6\log_a b)}{(-6\log_a^2 b+4\log_a^2 b)\left(\frac{1}{2}-3\log_a b\right)}\cdot\frac{\log_a b}{3(1-4\log_a b)}=\log_a b.$$

Ответ: $\log_a b$.

7.155. $(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$ при $a>1$.

Решение.

$$(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b=$$

$$=\left(6\left(\frac{1}{2}+1\right)-6\log_a b+\log_a^2 b\right)^{1/2}-\log_a b=\sqrt{9-6\log_a b+\log_a^2 b}-$$

$$-\log_a b=\sqrt{(3-\log_a b)^2}-\log_a b=|3-\log_a b|-\log_a b.$$

Раскрывая модуль, получим два случая:

$$1)|3-\log_a b|-\log_a b=\begin{cases}3-\log_a b\le 0,\\ -3+\log_a b-\log_a b=-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}b\ge a^3,\\ |3-\log_a b|-\log_a b=-3;\end{cases}$$

$$2)|3-\log_a b|-\log_a b=\begin{cases}3-\log_a b>0,\\ 3-\log_a b-\log_a b=3-2\log_a b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<b<a^3,\ b\ne 1,\\ |3-\log_a b|-\log_a b=3-2\log_a b.\end{cases}$$

Ответ: -3, если $b\ge a^3$, и $3-2\log_a b$, если $0<b<a^3$, $b\ne 1$.

7.156. $\dfrac{\log_a b+\log_a(b^{1/2\log_b a^2})}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

Решение.

$$\frac{\log_a b+\log_a(b^{1/2\log_b a^2})}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\frac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}=\frac{\log_a b+\log_a a}{\log_a b-\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}\cdot\log_a b}{\log_a^2 b-1}=\frac{(1+\log_a b)^2}{\log_a^2 b}\cdot\frac{\log_a^2 b}{(1+\log_a b)(\log_a b-1)(\log_a b+1)}=\frac{1}{\log_a b-1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\log_a b-1}$.

7.157. Известно, что $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = p$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ и $x \neq 1$. Найти $\log_{abcd} x$.

Решение.

$$\log_{abcd} x = \frac{\log_x x}{\log_x abcd} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x} + \dfrac{1}{\log_d x}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\delta}} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}.$$

Ответ: $\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}$.

7.158. Известно, что $\beta = 10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma = 10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Найти зависимость α от γ.

Решение.

$$\lg\beta = \frac{1}{1-\lg\alpha};\ \lg\gamma = \frac{1}{1-\lg\beta} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\lg\alpha}} = \frac{1-\lg\alpha}{-\lg\alpha} = -\frac{1}{\lg\alpha} + 1;$$

$$\frac{1}{\lg\alpha} = 1 - \lg\gamma;\ \lg\alpha = \frac{1}{1-\lg\gamma};\ \alpha = 10^{1/(1-\lg\gamma)}.$$

Ответ: $\alpha = 10^{1/(1-\lg\gamma)}$.

7.159. Доказать, что $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

Решение.

$$\log_{ab} c = \frac{\log_a c}{\log_a ab} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a b} = \frac{\log_a c \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b}}{(1 + \log_a b)\dfrac{\log_a c}{\log_a b}} =$$

$$= \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\dfrac{\log_a c}{\log_a b} + \log_a c} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}.$$

Что и требовалось доказать.

7.160. Упростить выражение $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

Решение.

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m = \log_{a+b} m + \frac{\log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)} -$$

$$-2\frac{\log_{a+b} m \cdot \log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)} = \log_{a+b} m \cdot \left(1 + \frac{1}{\log_{a+b}(a-b)} - \frac{2\log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)}\right) =$$

$$= \frac{\log_{a+b} m(\log_{a+b}(a-b) + 1 - 2\log_{a+b} m)}{\log_{a+b}(a-b)}.$$

Так как $m = \sqrt{a^2 - b^2}$, то имеем

$$\frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2}\left(\log_{a+b}(a-b) + 1 - 2\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2}\right)}{\log_{a+b}(a-b)} =$$

$$= \frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2}\,(\log_{a+b}(a-b) + 1 - \log_{a+b}(a-b) - 1)}{\log_{a+b}(a-b)} =$$

$$= \frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} \cdot 0}{\log_{a+b}(a-b)} = 0.$$

Ответ: 0.

7.161. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение.

$$\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{\log_2(2 \cdot 5 \cdot 3)} = \frac{3}{1 + \log_2 5 + \log_2 3}.$$

$$\lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{\log_2(2 \cdot 5)} = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 5} = a; \quad \log_2 5 = \frac{a}{1-a}.$$

$$\lg 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2 \cdot 5)} = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 3}{1 + \frac{1}{1-a}} = \frac{(1-a)\log_2 3}{1} = b;$$

$$\log_2 3 = \frac{b}{1-a}.$$

Таким образом, $\log_{30} 8 = \dfrac{3}{1+\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-a}} = \dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

Ответ: $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

7.162. Доказать, что $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1+\log_a b$.

Решение.

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\log_a x}{\dfrac{\log_a x}{\log_a ab}} = \frac{\log_a x \cdot \log_a ab}{\log_a x} = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1+\log_a b.$$

Что и требовалось доказать.

7.163. Зная, что $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$, найти $\lg 56$.

Решение.

$$\lg 56 = \lg(7\cdot 8) = \lg 7 + \lg 8 = \lg 7 + 3\lg 2 = \frac{\log_2 7}{\log_2 10} + 3\lg 2 = \log_2 7 \cdot \lg 2 + 3\lg 2 =$$

$$= ab + 3a = a(b+3).$$

Ответ: $a(b+3)$.

7.164. Зная, что $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показать, что $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Решение.

$$\log_8 b = \log_8 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}} = \frac{1}{1-\log_8 a} \Rightarrow 1-\log_8 a = \frac{1}{\log_8 b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_8 a = 1-\frac{1}{\log_8 b} \Rightarrow a = 8^{1-\frac{1}{\log_8 b}} \qquad (1).$$

$$\log_8 c = \log_8 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}} = \frac{1}{1-\log_8 b} \Rightarrow 1-\log_8 b = \frac{1}{\log_8 c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_8 b = 1-\frac{1}{\log_8 c} = \frac{\log_8 c - 1}{\log_8 c} \qquad (2).$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$a = 8^{1-\frac{1}{\left(\frac{\log_8 c-1}{\log_8 c}\right)}} = 8^{1-\frac{\log_8 c}{\log_8 c-1}} = 8^{\frac{\log_8 c-1-\log_8 c}{\log_8 c-1}} = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}.$$

Что и требовалось доказать.

Решить уравнения (7.165 — 7.258):

7.165. $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

Решение.

Из условия имеем

$3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 81\cdot 9^{x}=6\cdot 4\cdot 4^{x}-\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9^{x} \Rightarrow 3\cdot 9^{x}=2\cdot 4^{x} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{x}=\frac{2}{3}$,

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, откуда $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

7.166. $\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_{0,2} x+1\geq 0,\\ \log_{0,2}+3\geq 0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\leq 25.$

Перейдем к основанию 0,2. Имеем

$\sqrt{\frac{1}{2}\log_{0,2} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_{0,2} x+2}+\sqrt{2\log_{0,2} x+6}=\sqrt{2}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$\log_{0,2} x+2+2\sqrt{(\log_{0,2} x+2)\ (2\log_{0,2} x+6)}+2\log_{0,2} x+6=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(\log_{0,2} x+2)\ (2\log_{0,2} x+6)}=-3\log_{0,2} x-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(\log_{0,2} x+2)(2\log_{0,2} x+6)=9(\log_{0,2} x+2)^{2}$ при $-3\log_{0,2} x-6\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{0,2} x+2\leq 0$.

С учетом ОДЗ имеем $\log_{0,2} x+2=0$, откуда $x=25$.

Ответ: 25.

7.167. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \log_x \sqrt{5x} \ge 0, \\ -\log_x 5 \ge 0, \\ 0 < x \ne 1 \end{cases} \text{ или } 0 < x \le \frac{1}{5}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\log_x \sqrt{5x} = \log_x^2 5 \Leftrightarrow 2\log_x^2 5 - \log_x 5 - 1 = 0 \Rightarrow (\log_x 5)_1 = -\frac{1}{2},\ x_1 = \frac{1}{25}$$

или

$$(\log_x 5) = 1,\ x_2 = 5;$$

$x_2 = 5$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{25}$.

7.168. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < 4x+1 \ne 1, \\ 0 < 9x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \ne \frac{1}{9}.$$

Перейдем к основанию 7. Имеем

$$\frac{1}{\log_7(4x+1)} + \frac{1}{\log_7 9x} = 0 \Rightarrow \log_7 9x = -\log_7(4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = \frac{1}{4x+1} \Leftrightarrow 36x^2 + 9x - 1 = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

7.169. $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} + \frac{6}{4^{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} - 4 = 0$.

Решение.

Преобразуем знаменатель второго члена уравнения:

$$4^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 4^{\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)^2} = 4^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x\right)} = 4^{\frac{1}{2}(1-\sin 2x)} =$$

$=4^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{2^{\sin 2x}}$, откуда $\frac{6}{4^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=3\cdot 2^{\sin 2x}$. Получаем уравнение $\left(2^{\sin 2x}\right)^2+3\cdot 2^{\sin 2x}-4=0 \Rightarrow 2^{\sin 2x}=-4$ (нет решений) или $2^{\sin 2x}=1$, откуда $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$; $n\in Z$.

7.170. $\log_2(2-x)-\log_2\left(2-\sqrt{x}\right)=\log_2\sqrt{2-x}-0{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}2-x>0,\\ 2-\sqrt{x}>0,\end{cases}$ $0\le x<2$.

Из условия имеем $\log_2\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\log_2\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2-x}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$, откуда $\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$, $\sqrt{4-2x}=2-\sqrt{x}$, $4-2x=4-4\sqrt{x}+x$, $3x-4\sqrt{x}=0$, $\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}-4\right)=0$.

Таким образом, $x_1=0$, $x_2=\frac{16}{9}$.

Ответ: 0; $\frac{16}{9}$.

7.171. $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25} x-1}=\frac{26}{5}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 4. Имеем $5\cdot 5^{\log_4 x}+\frac{1}{5\cdot 5^{\log_4 x}}-\frac{26}{5}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 25\cdot\left(5^{\log_4 x}\right)^2-26\cdot 5^{\log_4 x}+1=0 \Rightarrow \left(5^{\log_4 x}\right)_1=5^{-2}$, $\left(5^{\log_4 x}\right)_2=5^0$, откуда $\left(\log_4 x\right)_1=-2$, $\left(\log_4 x\right)_2=0$. Следовательно, $x_1=\frac{1}{16}$, $x_2=1$.

Ответ: $\frac{1}{16}$; 1.

7.172. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}-x>0,\\ x^2>0,\end{cases}$ $x<0$.

Из условия имеем

$\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8(-x)=0$, $\sqrt{\log_8(-x)}\left(\sqrt{2}-\sqrt{\log_8(-x)}\right)=0$.

Тогда $\log_8(-x)=0$, откуда $x_1=-1$ или $\sqrt{2}-\sqrt{\log_8(-x)}=0$, откуда $\sqrt{2}=\sqrt{\log_8(-x)}$, $2=\log_8(-x)$, $x_2=-64$.

Ответ: -64; -1.

7.173. $2\lg x^2-(\lg(-x))^2=4$.

Решение.

ОДЗ: $x<0$.

Учитывая, что $x<0$ имеем

$4\lg(-x)-\lg^2(-x)-4=0 \Leftrightarrow \lg^2(-x)-4\lg(-x)+4=0$,

$(\lg(-x)-2)^2=0$, откуда $\lg(-x)=2$, $x=-100$.

Ответ: -100.

7.174. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перепишем уравнение в виде

$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162 \Leftrightarrow x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{\log_3 x}=81 \Leftrightarrow \log_3^2 x=4$.

Тогда $(\log_3 x)_1=-2$ или $(\log_3 x)_2=2$, откуда $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$.

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

7.175. $\lg(x^3+8)-0{,}5\lg(x^2+4x+4)=\lg 7$.

Решение.

ОДЗ: $x+2>0$, $x>-2$.

Перепишем уравнение в виде

$$\lg(x+2)(x^2-2x+4)-0{,}5\lg(x+2)^2=\lg 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x+2)(x^2-2x+4)-\lg(x+2)=\lg 7 \Leftrightarrow \lg\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lg 7 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-2x+4=7,\ x^2-2x-3=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$.

Ответ: $-1;\ 3$.

7.176. $2^{\log_5 x^2}-2^{1+\log_5 x}+2^{\log_5 x-1}-1=0$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде $2^{2\log_5 x}-2\cdot 2^{\log_5 x}+\frac{2^{\log_5 x}}{2}-1=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2\log_5 x}-3\cdot 2^{\log_5 x}-2=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\log_5 x}$, найдем $2^{\log_5 x}=-\frac{1}{2}$ (не подходит) или $2^{\log_5 x}=2$, откуда $\log_5 x=1$, $x=5$.

Ответ: 5.

7.177. $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 9-2^x>0, \\ 3-x\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow 3\neq x<\log_2 9.$

Из условия

$$\log_2(9-2^x)=3-x \Leftrightarrow 9-2^x=2^{3-x} \Leftrightarrow 2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0.$$

Решая его как квадратное относительно 2^x, найдем $(2^x)_1=1$, откуда $x_1=0$ или $(2^x)_2=8$, откуда $x_2=3$; $x_2=3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 0.

7.178. $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{1/5}\sqrt{3}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 5. Имеем $\log_5 x+\frac{1}{2}\log_5 x=-\frac{1}{2}\log_5 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_5 x + \log_5 x = \log_5 \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_5 x^3 = \log_5 \frac{1}{3}$. Отсюда имеем $x^3 = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

7.179. $\log_{a^2} x^2 + \log_a (x-1) = \log_a \log_{\sqrt{5}} 5$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 1, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

Из условия имеем

$\log_a x + \log_a (x-1) = \log_a 2 \Rightarrow \log_a x(x-1) = \log_a 2$,

откуда $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -1$; $x_2 = -1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 2.

7.180. $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$\lg x^{2\lg^2 x} = \lg 10x^3 \Leftrightarrow 2\lg^3 x = 1 + 3\lg x \Leftrightarrow 2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lg^3 x + 2 - 3\lg x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(\lg x + 1)(\lg^2 x - \lg x + 1) - 3(\lg x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lg x + 1)(2\lg^2 x - 2\lg x - 1) = 0$,

откуда $(\lg x)_1 = -1$, $(\lg x)_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $(\lg x)_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Получили $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$, $x_3 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{10}, 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}, 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.

7.181. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перейдем к основанию 3. Имеем

$$\frac{1}{\log_3 x}+\log_3 x=\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3^2 x-\log_3 x-2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\log_3 x)_1=-1$ или $(\log_3 x)_2=2$, откуда $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; 9.

7.182. $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\frac{a^2}{2a-x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<a\neq 1,\\ x\neq 2a,\\ 0<x\neq 1.\end{cases}$

Перейдем к основанию a. Имеем

$$\frac{\log_a a}{\log_a \sqrt{x}}\cdot\frac{\log_a\frac{a^2}{2a-x}}{\log_a a^2}=1 \Leftrightarrow \log_a(2a-x)+\log_a x=2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \log_a x(2a-x)=2$, $x(2a-x)=a^2$, $x^2-2ax+a^2=0$, $(x-a)^2=0$, откуда $x=a$.

Ответ: $x=a$, где $0<a\neq 1$.

7.183. $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)}+1{,}5\log_{1/8}4^x=0$.

Решение.

ОДЗ: $3-4x^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из условия

$$5^{\log_5(3-4x^2)}+1{,}5x\log_{2^{-3}}2^2=0 \Leftrightarrow 3-4x^2-x=0 \Leftrightarrow 4x^2+x-3=0,$$

откуда $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{4}$; $x_1=-1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

7.184. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 0<a\neq 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию a. Имеем $\log_a x+\frac{1}{2}\log_a x+\frac{1}{3}\log_a x=11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a x=6$, откуда $x=a^6$.

Ответ: a^6, где $0<a\neq 1$.

7.185. $6-\left(1+4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}} 3}\right)\log_7 x=\log_x 7$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перейдем к основанию 7. Имеем $6-\left(1+4\cdot 9^0\right)\log_7 x=\frac{1}{\log_7 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\log_7^2 x-6\log_7 x+1=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_7 x$, получим $(\log_7 x)_1=\frac{1}{5}$ или $(\log_7 x)_2=1$, откуда $x_1=\sqrt[5]{7}$, $x_2=7$.

Ответ: $\sqrt[5]{7}$; 7.

7.186. $\log_{12}\left(4^{3x}+3x-9\right)=3x-x\log_{12} 27$.

Решение.

ОДЗ: $4^{3x}+3x-9>0$.

Перепишем уравнение в виде

$\log_{12}\left(4^{3x}+3x-9\right)+\log_{12} 27^x=3x \Rightarrow \log_{12} 27^x\left(4^{3x}+3x-9\right)=3x$,

откуда $27^x\left(4^{3x}+3x-9\right)=12^{3x} \Leftrightarrow 4^{3x}+3x-9=4^{3x}$, $3x-9=0$, $x=3$.

Ответ: 3.

7.187. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перейдем к основанию 3, тогда

$\frac{3x^2}{\log_3 x}\cdot\frac{\log_3 x}{2}=x+4 \Leftrightarrow 3x^2-2x-8=0$, откуда $x_1 = 2, x_2 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = -\frac{4}{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 2.

7.188. $\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перейдем к основанию 5. Из условия получаем

$$\sqrt{\log_5^2 x + \frac{1}{\log_5^2 x} + 2} = 2{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_5^4 x + 2\log_5^2 x + 1}{\log_5^2 x}} = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\log_5^2 x + 1}{\log_5 x}\right)^2} = 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{\log_5^2 x + 1}{|\log_5 x|} = 2{,}5.$$

Получаем 2 случая:

1) $\begin{cases} \log_5 x < 0, \\ \log_5^2 x + 2{,}5\log_5 x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\log_5 x)_1 = -\frac{1}{2} < 0,$

$(\log_5 x)_2 = -2 < 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{25}$;

2) $\begin{cases} \log_5 x > 0, \\ \log_5^2 x - 2{,}5\log_5 x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\log_5 x)_3 = \frac{1}{2} > 0$, $(\log_5 x)_4 = 2 > 0$,

откуда $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = 25$.

Ответ: $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{5}$; 25.

7.189. $\log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m - x}} = 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < m \neq 1, \\ 0 < x \neq 1, \\ x < 2m. \end{cases}$

Перейдем к основанию m, тогда

$$\frac{1}{\log_m x}\cdot\frac{\log_m \frac{m}{\sqrt{2m-x}}}{\log_m \sqrt{m}}=1 \Leftrightarrow \log_m x+\log_m(2m-x)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_m x(2m-x)=2.$$

Тогда $x^2-2mx+m^2=0$, $(x-m)^2=0$, откуда $x=m$.

Ответ: m, где $0<m\neq 1$.

7.190. $\log_2 3+2\log_4 x=x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Из условия имеем $\log_2 3+\log_2 x=x^{\frac{\log_3 4}{\log_3 x}} \Leftrightarrow \log_2 3+\log_2 x=x^{\log_x 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 3+\log_2 x=4$, $\log_2 3x=4$, откуда $3x=16$, $x=\frac{16}{3}$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

7.191. $\log_{10} x+\log_{\sqrt{10}} x+\log_{\sqrt[3]{10}} x+\ldots+\log_{\sqrt[10]{10}} x=5{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 10. Имеем

$\lg x+2\lg x+3\lg x+\ldots+10\lg x=5{,}5$, $(1+2+3+\ldots+10)\lg x=5{,}5$.

В скобках — сумма членов арифметической прогрессии S_n с $a_1=1$, $d=1$, $a_n=10$, $n=10$: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{1+10}{2}\cdot 10=55$. Тогда $55\lg x=5{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg x=\frac{1}{10}$, откуда $x=\sqrt[10]{10}$.

Ответ: $\sqrt[10]{10}$.

7.192. $\sqrt{3\log_2^2 x-1-9\log_x^2 2}=5$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}3\log_2^4 x-\log_2^2 x-9\geq 0,\\ 0<x\neq 1.\end{cases}$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Тогда

$$\frac{3\log_2^4 x-\log_2^2 x-9}{\log_2^2 x}=25 \Leftrightarrow 3\log_2^4 x-26\log_2^2 x-9=0.$$

Решая это уравнение как биквадратное относительно $\log_2 x$, найдем $(\log_2 x)_1=-3$ и $(\log_2 x)_2=3$, откуда $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=8$.

Ответ: $\frac{1}{8}$; 8.

7.193. $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[4]{3}} x+\log_{\sqrt[6]{3}} x+\ldots+\log_{\sqrt[16]{3}} x=36$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 3. Получаем

$$2\log_3 x+4\log_3 x+6\log_3 x+\ldots+16\log_3 x=36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+4+6+\ldots+16)\log_3 x=36 \Leftrightarrow (1+2+3+\ldots+8)\log_3 x=18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36\log_3 x=18 \Leftrightarrow \log_3 x=\frac{1}{2}, \text{ откуда } x=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

7.194. $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перейдем к основанию 2. Имеем $\frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{7}{6}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\log_2^2 x-7\log_2 x-6=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, найдем $(\log_2 x)_1=-\frac{2}{3}$ или $(\log_2 x)_2=3$, откуда $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $x_2=8$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 8.

7.195. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перейдем к основанию 5. Тогда получаем $\frac{\log_5 125x}{\log_5 x}\cdot\frac{\log_5^2 x}{\log_5^2 25}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5^2 x+3\log_5 x-4=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_5 x$, имеем $(\log_5 x)_1=1$ или $(\log_5 x)_2=-4$, откуда $x_1=5$, $x_2=\dfrac{1}{625}$.

Ответ: $\dfrac{1}{625}$; 5.

7.196. $3^{\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^8}=27x^{30}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде $3^{\log_3 x+2\log_3 x+3\log_3 x+\ldots+8\log_3 x}=27x^{30} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3^{\log_3 x}\right)^{(1+2+3+\ldots+8)}=27x^{30} \Leftrightarrow x^{1+2+3+\ldots+8}=27x^{30} \Leftrightarrow x^{36}=27x^{30} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^6=27$, откуда $x=\sqrt[6]{27}=\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

7.197. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

Из условия имеем

$5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 5^{-\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=5^{3x-12}\cdot 5^{-2x+4} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}-\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=5^{3x-12-2x+4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8 \Leftrightarrow x\sqrt{x}+x-8\sqrt{x}-12=0$.

Пусть $\sqrt{x}=y\ge 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$y^3+y^2-8y-12=0$, $(y-3)(y+2)^2=0$,

откуда $y_1=3$, $y_{2,3}=-2$; $y_{2,3}=-2$ не подходит. Тогда $\sqrt{x}=3$, $x=9$.

Ответ: 9.

7.198. $\left(3\cdot\left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=\dfrac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1$.

Из условия

$$3^{\frac{3(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=3^{\frac{9}{10}} \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}=\frac{9}{10} \Leftrightarrow 3x-13\sqrt{x}-10=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, получим $\left(\sqrt{x}\right)_1=-\frac{2}{3}$ (не подходит), или $\left(\sqrt{x}\right)_2=5$. Тогда $x=25$.

Ответ: 25.

7.199. $\log_2\log_3\left(x^2-16\right)-\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{1}{x^2-16}=2$.

Решение.

ОДЗ: $\log_3\left(x^2-16\right)>0 \Leftrightarrow x^2-16>3 \Leftrightarrow x^2>19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{19}\right)\cup\left(\sqrt{19};\infty\right)$.

Перепишем уравнение в виде

$$\log_2\log_3\left(x^2-16\right)+\log_2\log_3\left(x^2-16\right)=2 \Leftrightarrow 2\log_2\log_3\left(x^2-16\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\log_3\left(x^2-16\right)=1,$$

откуда $\log_3\left(x^2-16\right)=2 \Leftrightarrow x^2-16=9$, $x^2=25$. Получили $x_{1,2}=\pm5$.

Ответ: -5; 5.

7.200. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x}-1=2\log_x 3\cdot\log_9(12-x)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<x<12,\\ x\neq1.\end{cases}$

Перейдем к основанию 3. Тогда получаем

$$\frac{1+\frac{2\log_3 2}{\log_3 9}}{\frac{\log_3 x}{\log_3 9}}-1=\frac{2}{\log_3 x}\cdot\frac{\log_3(12-x)}{\log_3 9} \Leftrightarrow \frac{2+2\log_3 2}{\log_3 x}-1=\frac{\log_3(12-x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+2\log_3 2-\log_3 x}{\log_3 x}=\frac{\log_3(12-x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow 2+2\log_3 2-\log_3 x=\log_3(12-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2\log_3 2=\log_3 x+\log_3(12-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9+\log_3 4=\log_3 x+\log_3(12-x),\ \log_3 36=\log_3 x(12-x),$$

откуда $36=x(12-x)$ или $x^2-12x+36=0$, $(x-6)^2=0$, $x=6$.

Ответ: 6.

7.201. $3\lg 2+\lg\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=\lg\left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4\right)+1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}2^{\sqrt{x-1}-1}-1>0,\\ x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Перепишем уравнение в виде

$$\lg 8+\lg\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=\lg\left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4\right)+\lg 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\left(8\cdot\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)\right)=\lg\left(4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+40\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=4\left(\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+10\right) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}\right)^2-2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}-12=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}$, получим $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}=-3$ (нет решений), или $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}=2^2$, откуда $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=2$, $\sqrt{x-1}=4$, $x-1=16$, $x=17$.

Ответ: 17.

7.202. $5\log_{x/9}x+\log_{9/x}x^3+8\log_{9x^2}x^2=2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x\ne\frac{1}{9},\\ x\ne\pm\frac{1}{3}.\end{cases}$

Перейдем к основанию 9. Имеем

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9\frac{x}{9}}+\frac{\log_9 x^3}{\log_9\frac{9}{x}}+\frac{8\log_9 x^2}{\log_9 9x^2}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\log_9 x}{\log_9 x-1}+\frac{3\log_9 x}{1-\log_9 x}+\frac{16\log_9 x}{1+2\log_9 x}=2 \Leftrightarrow 8\log_9^2 x-6\log_9 x+1=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_9 x$, получим

$(\log_9 x)_1 = \frac{1}{4}$ или $(\log_9 x)_2 = \frac{1}{2}$, откуда $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 3$.

Ответ: $\sqrt{3}; 3$.

7.203. $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{x/2} x^2 = 0$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 2:

$$\frac{20\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x} + \frac{7\log_2 x^3}{\log_2 16x} - \frac{3\log_2 x^3}{\log_2 \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\log_2 x}{2 + \log_2 x} + \frac{21\log_2 x}{4 + \log_2 x} - \frac{6\log_2 x}{\log_2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 26\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x(5\log_2^2 x + 3\log_2 x - 26) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x\left(\log_2 x + \frac{13}{5}\right)(\log_2 x - 2) = 0,$$

откуда $(\log_2 x)_1 = 0$, $(\log_2 x)_2 = -\frac{13}{5}$, $(\log_2 x)_3 = 2$. Итак,

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2^{-\frac{13}{5}} = \frac{1}{4\sqrt[5]{8}},\ x_3 = 4.$$

Ответ: $1; \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}; 4$.

7.204. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

Решение.

Очевидно, что $x \neq 3$, тогда $|x-3| > 0$. Перепишем уравнение в виде

$|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}$.

Получаем два случая:

1) $|x-3| = 1 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4;$

2) $|x-3| \neq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3x+3 = 4x-8,\ x_3 = 11.$

Ответ: $2;4;11.$

7.205. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 3$, следовательно, $|x-3| > 0$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, имеем $(3x^2-10x+3)\lg|x-3| = 0$, откуда $3x^2-10x+3 = 0$ или $\lg|x-3| = 0$. Корнями квадратного уравнения $3x^2-10x+3=0$ будут $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 3$. Из уравнения $\lg|x-3| = 0$ найдем $|x-3| = 1 \Rightarrow x-3=-1$ или $x-3=1$. Тогда $x_3 = 2$, $x_4 = 4$; $x_2 = 3$ не подходит по ОДЗ логарифма.

Ответ: $\frac{1}{3};2;4.$

7.206. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $|x-2|^{10x^2-3x-1} = |x-2|^0$. Тогда получим два случая:

1) $|x-2| = 1$, откуда $x-2=-1$ или $x-2=1, x_1 = 1,\ x_2 = 3;$

$$2)\begin{cases} 0 < |x-2| \neq 1, \\ 10x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1,\ x \neq 3, \\ x_3 = -\frac{1}{5}, x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{5};\frac{1}{2};1;3.$

7.207. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ 2a - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x \leq 2a. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{\log_a \frac{\sqrt{2a-x}}{a}}{\log_a \sqrt{a}} - \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = 0 \Leftrightarrow \log_a (2a - x) + \log_a x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x(2a - x) = 2,$$

откуда $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, $(x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Ответ: a, где $0 < a \neq 1$.

7.208. $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots$ (выражение в правой части — бесконечная геометрическая прогрессия).

Решение.

В правой части — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии S, где $b_1 = 6{,}5$; $q = \frac{3{,}25}{6{,}5} = 0{,}5 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{6{,}5}{1-0{,}5} = 13$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{16} + \frac{2^x}{4} = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{16} \cdot 2^x = 13$, $2^x = 16$, откуда $x = 4$.

Ответ: 4.

7.209. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 2$.

Перепишем уравнение в виде $49 \cdot 7^{2\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 = 0$. Решая его как квадратное относительно $7^{\sqrt{x-2}}$, получим $\left(7^{\sqrt{x-2}}\right)_1 = 7^{-2}$ или $\left(7^{\sqrt{x-2}}\right)_2 = 7$, откуда $\left(\sqrt{x-2}\right)_1 = -2$ (нет решений), или $\left(\sqrt{x-2}\right)_2 = 1$, $x_2 = 3$.

Ответ: 3.

7.210. $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{5^x}{5}+\frac{125}{5^x}-26=0 \Leftrightarrow 5^{2x}-130\cdot 5^x+625=0.$$

Решая его как квадратное относительно 5^x, получим $(5^x)_1=5$ или $(5^x)_2=5^3$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$.

Ответ: 1; 3.

7.211. $\log_{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3-\log_x 9}+4=0$.

Решение.

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x\ge 3, \\ 0<x<1. \end{array}\right.$

Перейдем к основанию 3. Получаем

$$2\log_3 x\cdot\sqrt{2-\frac{2}{\log_3 x}}+4=0 \Leftrightarrow \log_3 x\cdot\sqrt{\frac{2\log_3 x-2}{\log_3 x}}=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3^2 x-\log_3 x-2=0, \\ \log_3 x<0. \end{cases}$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_3 x$, имеем $(\log_3 x)_1=-1$ или $(\log_3 x)_2=2$; $(\log_3 x)_2=2$ — постороннее решение. Отсюда $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

7.212. $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2}+\log_{2x} 2\cdot\log_{1/2} 2x=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\ne\frac{1}{16}, \\ x\ne\frac{1}{2}, \\ x\ne 1. \end{cases}$

Переходим к основанию 2. Имеем

$$\frac{\frac{\log_2 2}{\log_2 4\sqrt{x}}}{\frac{\log_2 2}{\log_2 2x}}+\frac{\log_2 2}{\log_2 2x}\cdot\frac{\log_2 2x}{\log_2 \frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow \frac{1+\log_2 x}{2+\frac{1}{2}\log_2 x}-1=0,$$

откуда $\log_2 x=2$ и $x=4$.

Ответ: 4.

7.213. $\left|\log_{\sqrt{3}} x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 3. Тогда $\left|2\log_3 x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2$. Раскрывая модули получим три случая:

1) $\begin{cases}\log_3 x<1,\\ -2\log_3 x+2+\log_3 x-2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x<1,\\ \log_3 x=-2\end{cases} \Rightarrow x_1=3^{-2}=\frac{1}{9};$

2) $\begin{cases}1\le\log_3 x<2,\\ 2\log_3 x-2+\log_3 x-2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le\log_3 x<2,\\ \log_3 x=2.\end{cases}$

$\log_3 x=2$ не подходит так как $\log_3 x<2$.

3) $\begin{cases}\log_3 x\ge 2,\\ 2\log_3 x-2-\log_3 x+2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x\ge 2,\\ \log_3 x=2\end{cases} \Rightarrow x_2=3^2=9.$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

7.214. $9^x+6^x=2^{2x+1}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $3^{2x}+2^x\cdot 3^x-2\cdot 2^{2x}=0$ и разделим его на $2^{2x}\ne 0$. Тогда $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0 \Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)_1=-2$ (нет решений) или $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)_2=1 \Rightarrow x=0$.

Ответ: 0.

7.215. $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$.

Решение.

ОДЗ: $x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

Запишем уравнение в виде $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-\frac{5}{2}\cdot 2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}-6=0$. Решая его как квадратное относительно $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}$, имеем $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}=-\frac{3}{2}$ (нет решений), или $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}=2^2 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}=2$, $\sqrt{x^2-4}=4-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=16-8x+x^2, \\ 4-x\ge 0, \end{cases} \text{ откуда } x=\frac{5}{2}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

7.216. $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0$.

Решение.

Имеем

$3^{3x}-13\cdot 3^{2x}+39\cdot 3^x-27=0 \Leftrightarrow \left(3^{3x}-27\right)-13\cdot 3^x\left(3^x-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^{2x}+3\cdot 3^x+9\right)-13\cdot 3^x\left(3^x-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^{2x}-10\cdot 3^x+9\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^x-1\right)\left(3^x-9\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x-3=0$, $3^x-1=0$, $3^x-9=0$.

Таким образом, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=2$.

Ответ: 0; 1; 2.

7.217. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

Решение.

Так как $\sqrt{7-\sqrt{48}}=\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$, то уравнение имеет вид

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x}-14=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{2z} - 14\sqrt{7+\sqrt{48}} + 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{z}$, имеем $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{z} = \left(7+\sqrt{48}\right)^{-1}$, $z_1 = -2$ или $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{z} = 7+\sqrt{48}$, $z_2 = 2$.

Ответ: -2; 2.

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{1/27}(x-1)} = \frac{\log_5 27}{\log_5 243}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 1$.

Из условия имеем

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x+1)} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x-1)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x+1)+\log_3(x-1)} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1 \Rightarrow \log_3\left(x^2-1\right) = 1,\ x^2 - 1 = 3,\ x^2 = 4.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; $x_1 = -2$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 2.

7.219. $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$.

Решение.

Имеем $5 \cdot 5^{x^3} - \frac{5}{5^{x^3}} - 24 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(5^{x^3}\right)^2 - 24 \cdot 5^{x^3} - 5 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно 5^{x^3}, получим $5^{x^3} = -\frac{1}{5}$ (нет решений), или $5^{x^3} = 5 \Rightarrow x^3 = 1$, $x = 1$.

Ответ: 1.

7.220. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $81 \cdot 3^{2x} + 45 \cdot 3^x \cdot 2^x - 36 \cdot 2^x = 0$. Разделив его на $9 \cdot 2^{2x}$, получим $9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = -1$ (нет решений), или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, откуда $x = -2$.

Ответ: -2.

7.221. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия имеем $4\cdot 2^{2\lg x}-2^{\lg x}\cdot 3^{\lg x}-18\cdot 3^{2\lg x}=0$. Разделив его на $3^{2\lg x}$, получим $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\lg x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}-18=0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}=-2$ (нет решений), или $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \lg x=-2$. Тогда $x=10^{-2}=0{,}01$.

Ответ: 0,01.

7.222. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

Решение.

Имеем $3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}-5\cdot 4^x\cdot 9^x=0 \Rightarrow 3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}+2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\frac{2}{3}$ или $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=1$, откуда $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=0$.

Ответ: $0;\ \frac{1}{2}$.

7.223. $\log_5\left(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0{,}01\cdot 5^{3x+1}\right)=3x-1$.

Решение.

ОДЗ: $2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0{,}01\cdot 5^{3x+1}>0$.

По определению логарифма получаем

$2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0{,}01\cdot 5^{3x+1}=5^{3x-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}}+\frac{2^{1,5x}}{2^{0,5}}-0{,}05\cdot 5^{3x}=\frac{5^{3x}}{5} \Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}}+\frac{2^{1,5x}}{2^{0,5}}=\frac{5^{3x}}{5}+\frac{5^{3x}}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}}=\frac{5^{3x}}{2^2\cdot 5} \Leftrightarrow 2^{1,5x-0,5}=5^{3x-1} \Rightarrow \begin{cases}1{,}5x-0{,}5=0,\\ 3x-1=0,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

7.224. $\dfrac{8^x+2^x}{4^x-2}=5.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \dfrac{1}{2}.$

Перепишем уравнение в виде $2^{3x}-5\cdot 2^{2x}+2^x+10=0.$ Пусть $2^x=y.$ Тогда уравнение принимает вид $y^3-5y^2+y+10=0.$ Разделим левую часть уравнения на $y-2$:

$$\begin{array}{r|l} y^3-5y^2+y+10 & y-2 \\ \cline{2-2} -\underline{y^3-2y^2} \qquad\quad & y^2-3y-5 \\ -3y^2+y \qquad & \\ -\underline{-3y^2+6y} \qquad & \\ -5y+10 & \\ -\underline{-5y+10} & \\ 0 & \end{array}$$

Уравнение можно представить в виде $(y-2)(y^2-3y-5)=0,$ откуда $y_1=2,\ y_{2,3}=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}.$ Получили: $2^x=2 \Rightarrow x_1=1;\ 2^x=\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}<0$ (нет решений); $2^x=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x_3=\log_2\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}=\log_2(3+\sqrt{29})-1.$

Ответ: $1;\ \log_2(3+\sqrt{29})-1.$

7.225. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<5x+3\neq 1, \\ 0<3x+7\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{5},\ x\neq -\dfrac{2}{5}.$

Умножив уравнение на $\log_{3x+7}(5x+3)\neq 0,$ получим

$\log^2_{3x+7}(5x+3)-2\log_{3x+7}(5x+3)+1=0 \Leftrightarrow (\log_{3x+7}(5x+3)-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{3x+7}(5x+3)=1 \Leftrightarrow 5x+3=3x+7,\ x=2.$

Ответ: 2.

7.226. $2{,}5^{\log_3 x}+0{,}4^{\log_3 x}=2{,}9.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Перепишем уравнение в виде $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\log_3 x}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_3 x}-2{,}9=0.$ Умножив уравнение на $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}$, получим $\left(\frac{5}{2}\right)^{2\log_3 x} - 2{,}9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + 1 = 0$.

Решив это уравнение как квадратное относительно $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}$, найдем

$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}\right)_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$, откуда $\log_3 x_1 = -1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, или $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}\right)_2 = \frac{5}{2}$, откуда $x_2 = 3$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

7.227. $(\lg(x+20) - \lg x)\log_x 0{,}1 = -1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x + 20 > 0, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases}$ или $0 < x \neq 1$.

Перейдем к основанию 10. Имеем $(\lg(x+20) - \lg x)\left(-\frac{1}{\lg x}\right) = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lg(x+20) - \lg x = \lg x \Leftrightarrow \lg(x+20) = 2\lg x \Leftrightarrow \lg(x+20) = \lg x^2$. Тогда $x + 20 = x^2$, $x^2 - x - 20 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 5$; $x_1 = -4$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 5.

7.228. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перепишем уравнение в виде $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$, $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, $5^{\lg x} = 25$, откуда $\lg x = 2$, $x = 10^2 = 100$.

Ответ: 100.

7.229. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$27 + 9 \cdot 2^{4x} - 2^{6x} - 27 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{6x} - 9 \cdot 2^{4x} + 8 \cdot 2^{3x} + 27 \cdot 2^{2x} - 27 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{6x} - 2^{4x} - 8 \cdot 2^{4x} + 8 \cdot 2^{3x} + 27 \cdot 2^x - 27 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{4x}(2^{2x}-1)-8\cdot 2^{3x}(2^x-1)+27(2^x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{4x}(2^x-1)(2^x+1)-8\cdot 2^{3x}(2^x-1)+27(2^x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x-1)(2^{5x}+2^{4x}-8\cdot 2^{3x}+27)=0,$

откуда $2^x=1$, $x_1=0$. Уравнение $2^{5x}+2^{4x}-8\cdot 2^{3x}+27=0$ решений не имеет.

Ответ: 0.

7.230. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x+1\neq 1, \\ 0<x-0{,}5\neq 1 \end{cases}$ или $0{,}5<x\neq 1{,}5$.

Умножив обе части уравнения на $\log_{x+1}(x-0{,}5)\neq 0$, получим

$\log^2_{x+1}(x-0{,}5)=1 \Rightarrow \log_{x+1}(x-0{,}5)=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-0{,}5=\dfrac{1}{x+1}$, $2x^2+x-3=0$, $x_1=-\dfrac{3}{2}$ (не подходит по ОДЗ), $x_2=1$; или $\log_{x+1}(x-0{,}5)=1$, $x-0{,}5=x+1$, нет решений.

Ответ: 1.

7.231. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \log_2 x>0, \\ \log_4 x>0, \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Перейдем к основанию 2. Имеем

$\dfrac{1}{2}\log_2\log_2 x+\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\log_2 x+2\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\log_2 x+\log_2\left(\dfrac{1}{4}\log^2_2 x\right)=4 \Leftrightarrow \log_2\left(\log_2 x\cdot\dfrac{1}{4}\log^2_2 x\right)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\log^3_2 x=16$, $\log^3_2 x=64$.

Тогда $\log_2 x=4$, $x=2^4=16$.

Ответ: 16.

7.232. $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\ne\dfrac{1}{2}, \\ x\ne 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию 2. Тогда

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}+\frac{\log_2 64}{\log_2 2x}=3 \Leftrightarrow \frac{4}{2\log_2 x}+\frac{6}{1+\log_2 x}-3=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\log_2^2 x-5\log_2 x-2=0,$ где $\log_2 x\ne 0$ и $\log_2 x\ne -1.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x,$ получим $\log_2 x=-\dfrac{1}{3},\ x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=0{,}5\sqrt[3]{4};\ \log_2 x=2,\ x_2=4.$

Ответ: $0{,}5\sqrt[3]{4};\ 4.$

7.233. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}} x-3\quad (a>0,\ a\ne 1).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<a\ne 1, \\ 0<x\ne 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию a. Получаем

$$\frac{3\log_a x-2}{\log_a^2 x}=2\log_a x-3 \Leftrightarrow 2\log_a^3 x-3\log_a^2 x-3\log_a x+2=0,$$

т.к. $\log_a x\ne 0.$ Далее имеем

$$2(\log_a^3 x+1)-3\log_a x(\log_a x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_a x+1)(\log_a^2 x-\log_a x+1)-3\log_a x(\log_a x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x+1)(2\log_a^2 x-5\log_a x+2)=0,$$

откуда $\log_a x+1=0$ или $2\log_a^2 x-5\log_a x+2=0.$ Из первого уравнения $\log_a x=-1,\ x_1=\dfrac{1}{a}.$ Из второго уравнения $\log_a x=\dfrac{1}{2}$ или $\log_a x=2,$ откуда $x_2=\sqrt{a},\ x_3=a^2.$

Ответ: $\dfrac{1}{a};\ \sqrt{a};\ a^2.$

7.234. $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3}=\frac{x^{3\lg x}}{10}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Из условия имеем $\frac{x^{2\lg^2 x}}{x^3\cdot x^{3\lg x}}=\frac{1}{100}\Leftrightarrow x^{2\lg^2 x-3\lg x-3}=10^{-2}$. Логарифмируя обе части этого уравнения по основанию 10, получим

$$\lg x^{2\lg^2 x-3\lg x-3}=\lg 10^{-2}\Leftrightarrow \left(2\lg^2 x-3\lg x-3\right)\lg x=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lg^3 x-3\lg^2 x-3\lg x+2=0\Leftrightarrow 2\left(\lg^3 x+1\right)-3\lg x(\lg x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\lg x+1)\left(\lg^2 x-\lg x+1\right)-3\lg x(\lg x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lg x+1)\left(2\lg^2 x-5\lg x+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg x+1=0 \text{ или } 2\lg^2 x-5\lg x+2=0.$$

Из первого уравнения имеем $\lg x=-1$, $x_1=\frac{1}{10}$, а из второго $\lg x=\frac{1}{2}$, $x_2=\sqrt{10}$ или $\lg x=2$, $x_3=100$.

Ответ: 0,1; $\sqrt{10}$; 100.

7.235. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{1/5}}(x+1)=\frac{x-4}{x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<x+1\neq 1,\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\neq 0.$

Перейдем к основанию 5. Имеем $\frac{x}{\log_5(x+1)}\cdot(-3)\log_5(x+1)=\frac{x-4}{x}$, $-3x=\frac{x-4}{x}$ при $\log_5(x+1)\neq 0$. Отсюда $3x^2+x-4=0$, $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=1$; $x_1=-\frac{4}{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 1.

7.236. $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x^2>0,\\-x>0\end{cases}\Leftrightarrow x<0$.

Из условия имеем $\lg^2(-x)-6\lg(-x)+9=0$, $(\lg(-x)-3)^2=0$, откуда $\lg(-x)=3\Rightarrow -x=10^3=1000$, $x=-1000$.

Ответ: -1000.

7.237. $4\log_4^2(-x)+2\log_4(x^2)=-1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}-x>0,\\x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow x<0.$

Так как по ОДЗ $x<0$, то имеем

$4\log_4^2(-x)+4\log_4(-x)+1=0\Leftrightarrow(2\log_4(-x)+1)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_4(-x)=-1$, $\log_4(-x)=-\frac{1}{2}$.

Отсюда $-x=4^{-1/2}=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

7.238. $\frac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x^2>0,\\-x>0,\\\log_2(-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow x<-1.$

Так как по ОДЗ $x<0$, то имеем

$\frac{2}{\sqrt{3}\log_2(-x)}=\frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}\Rightarrow\frac{4}{3\log_2^2(-x)}=\frac{1}{\log_2(-x)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\log_2^2(-x)-4\log_2(-x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2(-x)(3\log_2(-x)-4)=0\Leftrightarrow\log_2(-x)=\frac{4}{3}$,

так как $\log_2(-x)\neq 0$. Отсюда $-x=2^{4/3}$, $x=-2^{4/3}$.

Ответ: $-2^{4/3}$.

7.239. $\lg\sqrt{10}-\lg 100=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)}-2{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)\geq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$\lg\sqrt{10}-\lg 100+2{,}5=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}5-2+2{,}5=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)}$, $1=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10=\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right) \Leftrightarrow 5^{\sqrt[3]{2x}}=390625 \Leftrightarrow 5^{\sqrt[3]{2x}}=5^8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x}=8$, $x=256$.

Ответ: 256.

7.240. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$.

Решение.

ОДЗ: $x>1$.

Из условия имеем $16\lg^4(x-1)+9\lg^2(x-1)-25=0$. Решая это уравнение как биквадратное относительно $\lg(x-1)$, получим $\lg^2(x-1)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lg(x-1)=-1$ или $\lg(x-1)=1$, откуда $x_1=1{,}1$, $x_2=11$.

Ответ: 1,1; 11.

7.241. $\dfrac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2\left(x^3+2x^2-3x+5\right)}=\log_{2x}x+\log_{2x}2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-1>0, \\ 0<x^3+2x^2-3x+5\neq 1, \\ 0<x\neq\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

По формуле замены основания имеем

$\log_{x^3+2x^2-3x+5}\left(x^3+3x^2+2x-1\right)=\log_{2x}2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x^3+2x^2-3x+5}\left(x^3+3x^2+2x-1\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+2x-1=x^3+2x^2-3x+5 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Rightarrow x_1=1$, $x_2=-6$; $x_2=-6$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 1.

7.242. $(16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0{,}048)\lg(x^3+2x+1)=0$.

Решение.

ОДЗ: $x^3+2x+1>0$.

Из условия $16\cdot 5^{2x-1}-2^{x-1}-0{,}048=0$ или $\lg(x^3+2x+1)=0$. Перепишем первое уравнение в виде

$$\frac{16}{5}\cdot 5^{2x}-\frac{2}{5}\cdot 5^x-0{,}048=0 \Leftrightarrow 16\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^x-0{,}24=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно 5^x, получим $5^x=-\frac{3}{40}$ (нет решений), или $5^x=5^{-1} \Leftrightarrow x_1=-1$ (не подходит по ОДЗ). Из второго уравнения имеем

$$x^3+2x+1=1 \Leftrightarrow x^3+2x=0 \Leftrightarrow x(x^2+2)=0,\ x_3=0,\ x^2+2\neq 0.$$

Ответ: 0.

7.243. $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500 \Leftrightarrow \frac{5^x\cdot 8}{8^{1/x}}=500 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5^x\cdot 2}{8^{1/x}}=125 \Leftrightarrow 5^{x-3}=2^{3/x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0, \\ \frac{3}{x}-1=0, \end{cases} \text{откуда } x=3.$$

Ответ: 3.

7.244. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

Решение.

ОДЗ: $0<\sin x<1$.

Так как $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, то имеем

$$3\log_2^2\sin x+\log_2 2\sin^2 x-2=0 \Leftrightarrow 3\log_2^2\sin x+2\log_2\sin x-1=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2\sin x$, получим $\log_2\sin x=\frac{1}{3}$ или $\log_2\sin x=-1$, откуда $\sin x=\sqrt[3]{2}$ (нет решений), или $\sin x=\frac{1}{2}$. Тогда $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$.

7.245. $\log_{1+x}\left(2x^3+2x^2-3x+1\right)=3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^3+2x^2-3x+1>0, \\ -1<x\neq 0. \end{cases}$

Имеем

$2x^3+2x^2-3x+1=(1+x)^3 \Leftrightarrow 2x^3+2x^2-3x+1=1+3x+3x^2+x^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^3-x^2-6x=0\ \Leftrightarrow\ x\left(x^2-x-6\right)=0$,

откуда $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=3$; $x_1=0$, $x_2=-2$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: 3.

7.246. $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=\frac{4}{3}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия имеем

$\frac{1}{3}\log_2 x+\sqrt[3]{\log_2 x}=\frac{4}{3}\ \Leftrightarrow\ \log_2 x+3\sqrt[3]{\log_2 x}-4=0$.

Пусть $\sqrt[3]{\log_2 x}=y$. Относительно y уравнение принимает вид

$y^3+3y-4=0\ \Leftrightarrow\ \left(y^3-1\right)+(3y-3)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (y-1)\left(y^2+y+1\right)+3(y-1)=0\ \Leftrightarrow\ (y-1)\left(y^2+y+4\right)=0$,

откуда $y-1=0$, так как $y^2+y+4>0$. Тогда $y=1$, $\sqrt[3]{\log_2 x}=1$, $\log_2 x=1$, $x=2$.

Ответ: 2.

7.247. $\sqrt{\log_5 x}+\sqrt[3]{\log_5 x}=2$.

Решение.

ОДЗ: $\log_5 x\geq 0$ или $x\geq 1$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt[6]{(\log_5 x)^3}+\sqrt[6]{(\log_5 x)^2}-2=0$. Пусть $\sqrt[6]{\log_5 x}=y$. Относительно y уравнение принимает вид

$y^3+y^2-2=0\ \Leftrightarrow\ \left(y^3-1\right)+\left(y^2-1\right)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (y-1)\left(y^2+y+1\right)+(y-1)(y+1)=0\ \Leftrightarrow\ (y-1)\left(y^2+2y+2\right)=0$, откуда $y-1=0$, так как $y^2+2y+2>0$. Получили $\sqrt[6]{\log_5 x}=1$, $\log_5 x=1$, $x=5$.

Ответ: 5.

7.248. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3\left(x^3\right) + \log_2\left(x^2\right) - 6$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\frac{\log_2 x \cdot \log_2 x}{\log_2 3} = \frac{3\log_2 x}{\log_2 3} + 2\log_2 x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - (3 + 2\log_2 3)\log_2 x + 6\log_2 3 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, получим $\log_2 x = \log_2 9$ или $\log_2 x = 3$, откуда $x_1 = 9$, $x_2 = 8$.

Ответ: 8; 9.

7.249. $3 \cdot 4^{(x-2)} + 27 = a + a \cdot 4^{(x-2)}$. При каких значениях a уравнение имеет решение?

Решение.

Перепишем уравнение в виде

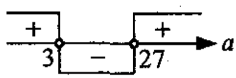
$$3 \cdot 4^{(x-2)} - a \cdot 4^{(x-2)} = a - 27 \Leftrightarrow (3 - a) \cdot 4^{(x-2)} = a - 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{(x-2)} = \frac{a-27}{3-a}, \text{ где } \frac{a-27}{3-a} > 0.$$

Логарифмируя обе части этого уравнения по основанию 4, получим

$$\log_4 4^{(x-2)} = \log_4 \frac{a-27}{3-a} \Leftrightarrow x - 2 = \log_4 \frac{a-27}{3-a},\ x = 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a},$$

где $\frac{a-27}{3-a} > 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем



Таким образом $a \in (3; 27)$.

Ответ: $2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}$, где $a \in (3; 27)$.

7.250. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию a. Имеем $\log_a x + 2\log_a x + \frac{3}{2}\log_a x = 27 \Leftrightarrow$

$\log_a x = 6$, откуда $x = a^6$.

Ответ: a^6, где $0 < a \neq 1$.

7.251. $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Запишем уравнение в виде $x^{2-\lg^2 x - 2\lg x} = x^{-1}$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$\lg x^{2-\lg^2 x-2\lg x} = \lg x^{-1} \Leftrightarrow (2-\lg^2 x - 2\lg x)\lg x = -\lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lg^2 x-2\lg x)\lg x + \lg x = 0 \Leftrightarrow \lg x(\lg^2 x + 2\lg x - 3) = 0,$$

откуда $\lg x = 0$ или $\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$. Из первого уравнения $x_1 = 10^0 = 1$. Решая второе уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получим $\lg x = -3$ и $\lg x = 1$, откуда $x_2 = 10^{-3} = 0{,}001$, $x_3 = 10$.

Ответ: 0,001; 1; 10.

7.252. $\frac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1} - 16^{\log_3 \sqrt{x}}\right) + 16^{\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{15}\left(16 \cdot 16^{\frac{1}{2}\log_3 x} - 16^{\frac{1}{2}\log_3 x}\right) + 16^{\log_3 x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16^{\log_3 x} + 2 \cdot 16^{\frac{\log_3 x}{2}} - 3 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $16^{\frac{\log_3 x}{2}}$, получим $16^{\frac{\log_3 x}{2}} = -3$ (нет решений); или $16^{\frac{\log_3 x}{2}} = 16^0$, откуда $\frac{\log_3 x_2}{2} = 0$, $x = 1$.

Ответ: 1.

7.253. $\log_a\sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2$. **При каких** значениях a уравнение имеет решение?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}-4<x<4,\\ 0<a\neq 1.\end{cases}$

Перейдем к основанию a. Имеем

$$\frac{1}{2}\log_a(4+x)+\frac{3}{2}\log_a(4-x)-\frac{1}{2}\log_a(4-x)-\frac{1}{2}\log_a(4+x)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a(4-x)=2 \Leftrightarrow 4-x=a^2,\ x=4-a^2.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases}-4<4-a^2<4,\\ 0<a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<2\sqrt{2},\\ 0<a\neq 1.\end{cases}$$

Ответ: $x=4-a^2$, где $a\in(0;1)\cup(1;2\sqrt{2})$.

7.254. $\log_2\sqrt[3]{4}+\log_8(9^{x+1}-1)=1+\log_8(3^{x+1}+1)$.

Решение.

ОДЗ: $9^{x+1}-1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Так как $\log_2\sqrt[3]{4}=\frac{2}{3}$, то имеем

$$\log_8(9\cdot 3^{2x}-1)-\log_8(3\cdot 3^x+1)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8\frac{9\cdot 3^{2x}-1}{3\cdot 3^x+1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\cdot 3^{2x}-1}{3\cdot 3^x+1}=8^{\frac{1}{3}}=2 \Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x}-6\cdot 3^x-3=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно 3^x, получим $3^x=-\frac{1}{3}$ (нет решений), или $3^x=3^0 \Rightarrow x=0$.

Ответ: 0.

7.255. $25^{\log_4 x}-5^{\log_{16}x^2+1}=\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}-25^{\log_{16}x}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде

$$5^{\log_2 x}-5\cdot 5^{\frac{1}{2}\log_2 x}=5-5^{\frac{1}{2}\log_2 x} \Leftrightarrow 5^{\log_2 x}-4\cdot 5^{\frac{1}{2}\log_2 x}-5=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $5^{\frac{1}{2}\log_2 x}$, получим

$5^{\frac{1}{2}\log_2 x} = -1$ (нет решений), или $5^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 x = 1$, $\log_2 x = 2$,

$x = 2^2 = 4$.

Ответ: 4.

7.256. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3 - \log_2\left(3^x - 13\right) = 2$.

Решение.

ОДЗ: $3^x - 13 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 13$.

Из условия имеем

$$\log_2 3^{1+\frac{x}{2}} - \log_2\left(3^x - 13\right) = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x - 13} = 2 \Leftrightarrow \frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x - 13} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 3^x - 3\cdot 3^{\frac{x}{2}} - 52 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $3^{\frac{x}{2}}$, получим $3^{\frac{x}{2}} = -\frac{13}{4}$ (нет решений), или $3^{\frac{x}{2}} = 4 \Rightarrow x = 4\log_3 2$.

Ответ: $4\log_3 2$.

7.257. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1) = 10 \quad (n\in N)$.

Решение.

Перейдем к основанию 2.

$$\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10 \Leftrightarrow \log_2(n+1) = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+1 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 1024 - 1 = 1023.$$

Ответ: 1023.

7.258. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$ (рассмотреть при всех действительных значениях a).

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ a \neq -2. \end{cases}$

Из условия имеем

$$2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 2^{\frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow 2^{\frac{a+3}{a+2}+\frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow \frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)} = \frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{2a-1}{a+3},$$

где $a\neq-3$, с учетом ОДЗ $x\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{2a-1}{a+3}$ при $a\neq-2$, $a\neq-3$ и $a\neq\frac{1}{2}$; нет корней при $a=-2$, $a=-3$ и $a=\frac{1}{2}$.

Решить системы уравнений (7.259 — 7.294):

7.259. $\begin{cases}2-\log_2 y=2\log_2(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2\left(x^2-xy+y^2\right)=1.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+y>0,\\ y>0,\\ x^2-xy+y^2>0.\end{cases}$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\log_2 4-\log_2 y=\log_2(x+y)^2,\\ \log_2(x+y)+\log_2\left(x^2-xy+y^2\right)=1.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2\frac{4}{y}=\log_2(x+y)^2,\\ \log_2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{y}=(x+y)^2,\\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{2}{\sqrt{y}},\\ (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{y}}-y,\\ \frac{2}{\sqrt{y}}\left(\frac{4}{y}-3y\left(\frac{2}{\sqrt{y}}-y\right)\right)=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{y}}-y,\\ 6y^3-14y\sqrt{y}+8=0.\end{cases}$$

Пусть $y\sqrt{y}=t$. Тогда второе уравнение имеет вид $6t^2-14t+8=0$,

$3t^2-7t+4=0 \Rightarrow t_1=1,\ t_2=\frac{4}{3}$. Тогда $y_1=1,\ x_1=1;\ y_2=\sqrt[3]{\frac{16}{9}}$,

$x_2=2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-\sqrt[3]{\frac{16}{9}}=\frac{2\sqrt[3]{6}}{2}-\frac{2\sqrt[3]{6}}{3}=\frac{2\sqrt[3]{6}}{6}=\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$.

Ответ: $(1;1),\ \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3};\frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$.

7.260. $\begin{cases}3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0,\\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}3x-y>0,\\ y+x>0.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы как квадратное относительно $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}$. Имеем

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=-3$ (нет решений),

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x-y}{2}=1,\ y=2x-2$.

Из второго уравнения системы имеем $\lg(3x-y)(y+x)=\lg 16$, $(3x-y)(y+x)=16$. Получили

$$\begin{cases}y=2x-2,\\ (3x-y)(y+x)=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-2,\\ (3x-(2x-2))(2x-2+x)=16\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x^2+4x-20=0 \Rightarrow x_1=-\frac{10}{3},\ x_2=2$.

Тогда $y_1=-\frac{26}{3},\ y_2=2$.

$\begin{cases}x_1=-\frac{10}{3},\\ y_1=-\frac{26}{3}\end{cases}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $(2;\ 2)$.

7.261. $\begin{cases} \left(0{,}48^{x^2+2}\right)^{2x-y} = 1, \\ \lg(x+y) - 1 = \lg 6 - \lg(x+2y). \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y>0, \\ x+2y>0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$0{,}48^{(x^2+2)(2x-y)} = 0{,}48^0 \Leftrightarrow (x^2+2)(2x-y)=0 \Leftrightarrow 2x-y=0,\ y=2x$.

Из второго уравнения системы имеем

$\lg\dfrac{x+y}{10} = \lg\dfrac{6}{x+2y} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10} = \dfrac{6}{x+2y} \Rightarrow \dfrac{x+2x}{10} = \dfrac{6}{x+4x},\ x^2=4$.

Тогда $x_1=-2,\ x_2=2;\ y_1=-4,\ y_2=4$.

$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=-4 \end{cases}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: (2; 4).

7.262. $\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-y>0, \\ x+y>0, \\ x>0, \\ y>0, \\ y \ne 3. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\begin{cases} \log_2(x-y) = \log_2\dfrac{32}{x+y}, \\ \lg\dfrac{x}{4} = \lg\dfrac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \dfrac{32}{x+y}, \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{3}{y} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{12}{y}.$$

Из первого уравнения получим

$$\frac{12}{y} - y = \frac{32}{\frac{12}{y}+y} \Leftrightarrow y^4 + 32y^2 - 144 = 0,\ y_1=-2,\ y_2=2.$$

Тогда $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

$\begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -6 \end{cases}$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: (6; 2).

7.263. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x - y > 0, \\ x + y > 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}} = 2^5, \\ \log_3(x-y) = \log_3 \dfrac{3}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} = 5, \\ x - y = \dfrac{3}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2}{\left(\dfrac{x}{y}\right)} - 5 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x}{y}\right) + 2 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{x}{y} = 2.$$

Если $y = 2x$, то $x^2 - 4x^2 = -3x^2 \neq 3$. Пусть $x = 2y$, тогда данная система равносильна двум системам:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2}, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases}$ не подходят по ОДЗ;

2) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2}, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

7.264. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10}=1, \\ xy=15. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y>0$.

Перепишем первое уравнение системы в виде $y^{5x^2-51x+10}=y^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2-51x+10=0$ при $0<y\neq 1$. Данная система уравнений равносильна двум системам:

1) $\begin{cases} y=1, \\ xy=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=15, \\ y_1=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2-51x+10=0, \\ xy=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=10, \\ y_2=1{,}5; \end{cases} \begin{cases} x_3=0{,}2, \\ y_3=75. \end{cases}$

Ответ: (15; 1), (10; 1,5), (0,2; 75).

7.265. $\begin{cases} \log_x y=2, \\ \log_{x+1}(y+23)=3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y>0, \\ 0<x\neq 1. \end{cases}$

Система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y+23=(x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^2+23=x^3+3x^2+3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^3+2x^2+3x-22=0. \end{cases}$$

Разделим левую часть второго уравнения этой системы на $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+3x-22 & x-2 \\ \hline -\ x^3-2x^2 \qquad\qquad & x^2+4x+11 \\ \hline 4x^2+3x \qquad & \\ -\ 4x^2-8x \qquad & \\ \hline 11x-22 & \\ -\ 11x-22 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Тогда второе уравнение можно представить в виде

$(x-2)(x^2+4x+11)=0$,

откуда $x=2$, так как $x^2+4x+11\neq 0$ ($D<0$). Отсюда $y=2^2=4$.

Ответ: (2; 4).

7.266. $\begin{cases}(x^2+y)2^{y-x^2}=1,\\ 9(x^2+y)=6^{x^2-y}.\end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения имеем $x^2+y=2^{x^2-y}$. Подставив это значение во второе уравнение системы, получим $9\cdot 2^{x^2-y}=6^{x^2-y}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^2=3^{x^2-y}\Leftrightarrow x^2-y=2$. Тогда $x^2+y=2^{x^2-y}=2^2=4$ и исходная система уравнений имеет вид $\begin{cases}x^2+y=4,\\ x^2-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=6,\\ 2y=2,\end{cases}\begin{cases}x^2=3,\\ y=1,\end{cases}$ откуда

$\begin{cases}x_1=\sqrt{3},\\ y_1=1;\end{cases}\begin{cases}x_2=-\sqrt{3},\\ y_2=1.\end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{3};1)$, $(-\sqrt{3};1)$.

7.267. $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя второе уравнение по основанию 3, получим

$$\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ \log_3 x^y=\log_3 3^{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1+\log_3 x,\\ y\log_3 x=12\end{cases}\Rightarrow(1+\log_3 x)\log_3 x=12,$$

$$\log_3^2 x+\log_3 x-12=0\Rightarrow\log_3 x=-4,\ x_1=\frac{1}{81}\text{ или }\log_3 x=3,\ x_2=27.$$

Тогда $y_1=-3$, $y_2=4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{81};-3\right)$, $(27;4)$.

7.268. $\begin{cases} 9^{\sqrt[4]{xy^2}} - 27 \cdot 3^{\sqrt{y}} = 0, \\ \frac{1}{4}\lg x + \frac{1}{2}\lg y = \lg\left(4 - \sqrt[4]{x}\right). \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x < 256, \\ y > 0. \end{cases}$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt[4]{x}\sqrt{y}} = 3^{3+\sqrt{y}}, \\ \lg\sqrt[4]{x} + \lg\sqrt{y} = \lg\left(4 - \sqrt[4]{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y} = 3 + \sqrt{y}, \\ \lg\left(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}\right) = \lg\left(4 - \sqrt[4]{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y} = 3 + \sqrt{y}, \\ \sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y} = 4 - \sqrt[4]{x} \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{3+\sqrt{y}}{4-\sqrt[4]{x}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 5 - 2\sqrt[4]{x}.$$

Подставив значение $\sqrt{y}$ в первое уравнение, получим

$2\sqrt[4]{x}\left(5 - 2\sqrt[4]{x}\right) = 3 + 5 - 2\sqrt[4]{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt[4]{x}$, найдем $\sqrt[4]{x} = 1$, $x_1 = 1$ или $\sqrt[4]{x} = 2$, $x_2 = 16$. Тогда $y_1 = 9$, $y_2 = 1$.

Ответ: (1; 9), (16; 1).

7.269. $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y} = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x + y > 0$.

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y} = 1152, \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y} = 1152, \\ x = 5 - y. \end{cases}$$

Так как $x = 5 - y$, то

$$3^{y-5}\cdot 2^{y} = 1152 \Leftrightarrow \frac{3^{y}\cdot 2^{y}}{3^{5}} = 1152 \Leftrightarrow 6^{y} = 279936 \Leftrightarrow 6^{y} = 6^{7} \Leftrightarrow y = 7.$$

Тогда $x = -2$.

Ответ: $(-2; 7)$.

7.270. $\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=1+\lg 8, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0. \end{cases}$

Из условия имеем $\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=\lg 80, \\ \lg\dfrac{x+y}{x-y}=\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=80, \\ \dfrac{x+y}{x-y}=3. \end{cases}$ Из второго уравнения системы $x=2y$. Тогда из первого уравнения имеем $(2y)^2+y^2=80$, $y^2=16$. Отсюда $y_1=-4$, $y_2=4$. Тогда $x_1=-8$, $x_2=8$.

$\begin{cases} x_1=-8, \\ y_1=-4 \end{cases}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: (8; 4).

7.271. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x-y>0$.

Из второго уравнения системы находим $x-y=3$, $x=y+3$. Подставив это значение x в первое уравнение, получим $3^{y+3}\cdot 2^y=972$, $27\cdot 3^y\cdot 2^y=972$, $6^y=6^2$, откуда $y=2$. Тогда $x=5$.

Ответ: (5; 2).

7.272. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)=\log_5(y+x). \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y-x>0, \\ y+x>0, \\ 2y-x-12>0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3\cdot 3^{\log_3(y-x)^2}=48, \\ \log_5(2y-x-12)^2-\log_5(y-x)=\log_5(y+x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2=16, \\ \dfrac{(2y-x-12)^2}{y-x}=y+x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $y-x=4$, $y=x+4$. Из второго уравнения системы получим $(2(x+4)-x-12)^2=(x+4)^2-x^2$, $x^2-16x=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=16$. Тогда $y_1=4$, $y_2=20$.

$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=4 \end{cases}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: (16; 20).

7.273. $\log_9(x^3+y^3)=\log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0. \end{cases}$

Перепишем данное двойное равенство в виде системы уравнений $\begin{cases} \log_9(x^3+y^3)=\log_3(x+y), \\ \log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y). \end{cases}$ Перейдем в первом уравнении системы к основанию 3. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3(x^3+y^3)=\log_3(x+y), \\ \log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3+y^3)=\log_3(x+y)^2, \\ \log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^2, \\ x^2-y^2=x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2, \\ (x+y)(x-y)=x+y. \end{cases}$$

Так как $x+y>0$, то получаем

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=x+y, \\ x-y=1. \end{cases} \Rightarrow x=1+y.$$

Тогда из первого уравнения системы имеем

$$(1+y)^2-(1+y)y+y^2=1+y+y,\ y^2-y=0,$$

откуда $y_1=0$, $y_2=1$. Тогда $x_1=1$, $x_2=2$.

Ответ: (1; 0), (2; 1).

7.274. $\begin{cases}(\log_a x+\log_a y-2)\log_{18} a=1,\\ 2x+y-20a=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ 0<a\neq 1.\end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем $\log_a \frac{xy}{a^2}=\log_a 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{xy}{a^2}=18$, $xy=18a^2$. Система имеет вид $\begin{cases}xy=18a^2,\\ y=20a-2x\end{cases}$ $\Rightarrow y=20a-2x$,

$x(20a-2x)=18a^2$, $x^2-10ax+9a^2=0$, $x_1=a$, $x_2=9a$. Тогда

$$y_1=20a-2a=18a,\ y_2=20a-18a=2a.$$

Ответ: $(a;18a)$, $(9a;2a)$, где $0<a\neq 1$.

7.275. $\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x+y>0$.

Прологарифмируем первое уравнение по основанию 5, имеем

$$\log_5(x+y)\cdot 3^{y-x}=\log_5\frac{5}{27} \Leftrightarrow \log_5(x+y)-(x-y)\log_5 3=1-3\log_5 3.$$

Получаем систему

$$\begin{cases}\log_5(x+y)-(x-y)\log_5 3=1-3\log_5 3,\\ 3\log_5(x+y)=x-y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5(x+y)-3\log_5(x+y)\cdot\log_5 3=1-3\log_5 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+y)\cdot(1-3\log_5 3)=1-3\log_5 3 \Leftrightarrow \log_5(x+y)=1,$$

откуда $x+y=5$. Тогда $x-y=3\log_5 5=3$. Отсюда $\begin{cases}x+y=5,\\ x-y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$

Ответ: (4; 1).

7.276. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5, \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y}+\dfrac{5(x-y)}{x+y}=8. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} xy \ge 0, \\ x \ne \pm y. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы $2^{2\sqrt{xy}}+2^{\sqrt{xy}}-20=0$ и, решив его как квадратное относительно $2^{\sqrt{xy}}$, получим $2^{\sqrt{2xy}}=-5$ (нет решений), или $2^{\sqrt{xy}}=2^2 \Rightarrow \sqrt{xy}=2$, $xy=4$, $y=\dfrac{4}{x}$. Из второго уравнения системы получим $3(x+y)^2+5(x-y)^2=8\left(x^2-y^2\right)$. Так как $y=\dfrac{4}{x}$, то имеем $3\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2+5\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2=8\left(x^2-\dfrac{16}{x^2}\right) \Leftrightarrow x^2=16$, откуда $x_1=-4$, $x_2=4$. Тогда $y_1=-1$, $y_2=1$.

Ответ: $(-4; -1)$, $(4; 1)$.

7.277. $\begin{cases} x^y=2, \\ (2x)^{y^2}=64\,(x>0). \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1$.

Логарифмируем оба уравнения системы по основанию 2, получаем

$$\begin{cases} \log_2 x^y=\log_2 2, \\ \log_2 (2x)^{y^2}=\log_2 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\log_2 x=1, \\ y^2(1+\log_2 x)=6 \end{cases} \Rightarrow \log_2 x=\frac{1}{y},$$

$$y^2\left(1+\frac{1}{y}\right)=6,\ y^2+y-6=0,\ y_1=-3,\ y_2=2.$$

Тогда $\log_2 x=\dfrac{1}{-3}$, $x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, или $\log_2 x=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}; -3\right)$, $\left(\sqrt{2}; 2\right)$.

7.278. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,\\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5 \frac{1}{y}}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0.\end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы

$x^3+y^3=12xy \Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=12xy$.

Второе уравнение, использовав равенство $a^{\log_a b}=b$, представим в виде $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x+y)=xy$. Система имеет вид $\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=12xy,\\ 3(x+y)=xy.\end{cases}$

Если $\begin{cases}x+y=u,\\ xy=v,\end{cases}$ то $\begin{cases}u\left(u^2-3v\right)=12v,\\ 3u=v\end{cases} \Rightarrow v=3u$, $u\left(u^2-3(3u)\right)=12\cdot 3u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^3-9u^2-36u=0 \Leftrightarrow u\left(u^2-9u-36\right)=0$, откуда $u_1=0$, $u_2=-3$, $u_2=12$. Тогда $v_1=0$, $v_2=-9$, $v_3=36$. Исходная система уравнений равносильна трем системам:

1) $\begin{cases}x+y=0,\\ xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ не подходит по ОДЗ;

2) $\begin{cases}x+y=-3,\\ xy=-9,\end{cases}$ здесь $xy<0$, что не удовлетворяет ОДЗ;

3) $\begin{cases}x+y=12,\\ xy=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6,\\ y=6.\end{cases}$

Ответ: (6; 6).

7.279. $\begin{cases}x^{y^2-7y+10}=1,\\ x+y=8\end{cases}$ $(x>0)$.

Решение.

Запишем заданную систему уравнений в виде $\begin{cases}x^{y^2-7y+10}=x^0,\\ x+y=8.\end{cases}$ Эта система уравнений равносильна двум системам:

1) $\begin{cases} x=1, \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2-7y+10=0, \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases}$

Получили: $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=7; \end{cases} \begin{cases} x_2=6, \\ y_2=2; \end{cases} \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=5. \end{cases}$

Ответ: (1; 7), (6; 2), (3; 5).

7.280. $\begin{cases} 2\left(\log_{1/y} x-2\log_{x^2} y\right)+5=0, \\ xy^2=32. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$

В первом уравнении системы перейдем к основанию 2, а второе прологарифмируем по основанию 2. Имеем

$$\begin{cases} 2\left(-\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}-\dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}\right)+5=0, \\ \log_2 x+2\log_2 y=5 \end{cases} \Rightarrow \log_2 x=5-2\log_2 y,$$

$$2\left(\frac{2\log_2 y-5}{\log_2 y}+\frac{\log_2 y}{2\log_2 y-5}\right)+5=0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 y-13\log_2 y+10=0.$$

Решая уравнение как квадратное относительно $\log_2 y$, найдем

$\log_2 y=\frac{5}{4}$, $y_1=2^{5/4}$, или $\log_2 y=2$, $y_2=4$.

Тогда $\log_2 x=\frac{5}{2}$, $x_1=2^{5/2}$; $\log_2 x=1$, $x_2=2$.

Ответ: (2; 4), $\left(4\sqrt{2}; 2\sqrt[4]{2}\right)$.

7.281. $\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем первое уравнение системы по основанию 3, имеем

$$\log_3\left(y\cdot x^{\log_y x}\right)=\log_3 x^{2,5}\Leftrightarrow \log_3 y+\log_3 x^{\log_y x}=2{,}5\log_3 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 y+\log_y x\log_3 x=2{,}5\log_3 x.$$

Перейдем в первом и втором уравнениях системы к основанию 3. Имеем

$$\begin{cases}\log_3 y+\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y}\cdot\log_3 x=2{,}5\log_3 x,\\ \dfrac{\log_3 y\cdot\log_3(y-2x)}{\log_3 y}=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3^2 y+\log_3^2 x=2{,}5\log_3 x\log_3 y,\\ \log_3(y-2x)=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^2 y-2{,}5\log_3 x\cdot\log_3 y+\log_3^2 x=0.$$

Решаем его как квадратное относительно $\log_3 y$, и находим $\log_3 y=\frac{1}{2}\log_3 x$, откуда $y_1=\sqrt{x}$, или $\log_3 y=2\log_3 x$, откуда $y_2=x^2$.

Из второго уравнения этой системы получим $y-2x=3$, $x=\frac{y-3}{2}$. Тогда заданная система уравнений равносильна следующим:

1) $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ x=\dfrac{y-3}{2};\end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases}y=x^2,\\ x=\dfrac{y-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=9,\end{cases}$ учитывая ОДЗ.

Ответ: (3; 9).

7.282. $\begin{cases}\lg(x-3)-\lg(5-y)=0,\\ 4^{-1}\cdot\sqrt[y]{4^x}-8\sqrt[x]{8^y}=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>3,\\ 0\neq y<5.\end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \lg\dfrac{x-3}{5-y}=0, \\ 2^{-2+\frac{2x}{y}}=2^{3+\frac{3y}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{5-y}=1, \\ \dfrac{2x}{y}-2=3+\dfrac{3y}{x} \end{cases} \Rightarrow x=8-y,$$

$$\frac{2(8-y)}{y}-5-\frac{3y}{8-y}=0 \Leftrightarrow y^2-18y+32=0,\ y_1=2,\ y_2=16.$$

Тогда $x_1=6$, $x_2=-8$.

$\begin{cases} x_2=-8, \\ y_2=16 \end{cases}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: (6; 2).

7.283. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1, \\ 3x+2y>0, \\ 2x+3y>0. \end{cases}$

Преобразуем систему с учетом ОДЗ

$$\begin{cases} 3x+2y=x^2, \\ 2x+3y=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2-3x}{2}, \\ 2x+3y-y^2=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{x^2-3x}{2},$$

$$2x+\frac{3(x^2-3x)}{2}=\left(\frac{x^2-3x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3-6x^2+3x+10=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-5)=0,\ x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=5,$$

тогда $y_1=2$, $y_2=-1$, $y_3=5$. $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-1 \end{cases}$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: (5; 5).

7.284. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y)=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$

Во втором уравнении системы перейдем к основанию y. Имеем

$2\left(\log_y x+\dfrac{1}{\log_y x}\right)=5 \Leftrightarrow 2\log_y^2 x-5\log_y x+2=0 \Rightarrow \log_y x=\dfrac{1}{2}$ или

$\log_y x=2$. Далее получаем:

1) $\log_y x=2 \Leftrightarrow x=y^2$. Из первого уравнения системы $y^2+y-12=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=3$, $y_2=-4$ не подходит по ОДЗ, $x_1=9$;

2) $\log_y x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=x^2$. Из первого уравнения системы $x^2+x-12=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3=3$, $x_4=-4$ не подходит по ОДЗ, $y_3=9$.

Ответ: (3; 9), (9; 3).

7.285. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2 \end{cases}$ $(x>0)$.

Решение.

Первое уравнение равносильно двум уравнениям: $x=1$ или $x^2-y^2-16=0$ при $x>0$. Тогда система уравнений равносильна двум системам:

1) $\begin{cases} x=1, \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-y^2-16=0, \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=3. \end{cases}$

Ответ: $(1;-1)$, $(5;3)$.

7.286. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ x \neq 0, \\ x + y \neq 0. \end{cases}$

Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} \lg|x+y| = 1, \\ \lg\dfrac{y}{|x|} = \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 10, \\ \dfrac{y}{|x|} = 2. \end{cases}$

Данная система уравнений равносильна четырем системам:

1) $\begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x + y = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x - 2x = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x = 10, \\ y = -20, \end{cases}$ не подходит;

2) $\begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x + y = 10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x = -10, \\ y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ y = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 0, \\ y > -x, \\ x + y = 10, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > -x, \\ x = \dfrac{10}{3}, \\ y = \dfrac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3}, \\ y = \dfrac{20}{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 0, \\ y < -x, \\ x + y = -10, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y < -x, \\ x = -\dfrac{10}{3}, \\ y = -\dfrac{20}{3} \end{cases}$ не подходит.

Ответ: $(-10; 20)$, $\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{20}{3}\right)$.

7.287. $\begin{cases} 4^x - 7\cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы найдем $y = x + 3$. Тогда

$$2^{2x} - 7\cdot 2^{x-0,5(x+3)} = 2^{3-x-3} \Leftrightarrow 2^{2x} - 7\cdot 2^{0,5x-1,5} = 2^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} - \frac{7\cdot 2^{1,5x}}{2^{1,5}} = 1 \Leftrightarrow 2^{1,5}\cdot 2^{3x} - 7\cdot 2^{1,5x} - 2^{1,5} = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{1,5x}$, имеем $2^{1,5x} = -2^{-1,5}$, нет решений, или $2^{1,5x} = 2^{1,5} \Rightarrow x = 1$. Тогда $y = 4$.

Ответ: (1; 4).

7.288. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y \ge 0$.

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\left(5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}}\right)^2 - 2\cdot 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}} = 689 \Rightarrow \left(5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}}\right)^2 = 1089 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}} = -33$ (не имеет решений) или $5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}} = 33$.

Далее имеем

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}} = 33 \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{y}} = 33 - 5^{\sqrt[3]{x}},\ \left(5^{\sqrt[3]{x}}\right)^2 - 33\cdot 5^{\sqrt[3]{x}} + 200 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $5^{\sqrt[3]{x}}$, найдем $5^{\sqrt[3]{x}} = 8$, откуда $\sqrt[3]{x} = \log_5 8$, $x_1 = 27\log_5^3 2$, или $5^{\sqrt[3]{x}} = 5^2$, откуда $\sqrt[3]{x} = 2$, $x_2 = 8$. Тогда $y_1 = 4\log_2^2 5$, $y_2 = 9$.

Ответ: $\left(27\log_5^3 2; 4\log_2^2 5\right)$, $(8; 9)$.

7.289. $\begin{cases} 10^{\lg 0,5\left(x^2+y^2\right)+1,5} = 100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3} = \dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ 2\sqrt{x^2+10y}-9 \neq 0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$10^{\lg 0{,}5\left(x^2+y^2\right)+1{,}5}=10^{2{,}5} \Leftrightarrow \lg 0{,}5\left(x^2+y^2\right)+1{,}5=2{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg 0{,}5\left(x^2+y^2\right)=1 \Leftrightarrow 0{,}5\left(x^2+y^2\right)=10 \Leftrightarrow x^2+y^2=20$.

Из второго уравнения исходной системы получаем

$2\left(\sqrt{x^2+10y}\right)^2-9\sqrt{x^2+10y}-18=0$.

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x^2+10y}$, имеем $\sqrt{x^2+10y}=-4$ (нет решений), или $\sqrt{x^2+10y}=6$, $x^2+10y=36$. Система принимает вид

$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x^2+10y=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x^2=36-10y \end{cases} \Rightarrow x^2=36-10y,\ y^2-10y+16=0,$

откуда $y_1=2$, $y_2=8$. Тогда $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm4$, или $x^2=-44$ не подходит.

Ответ: (–4; 2), (4; 2).

7.290. $\begin{cases} y^x=1{,}5+y^{-x}, \\ y^{2{,}5+x}=64 \quad (y>0). \end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение на y^x, имеем $y^{2x}-1{,}5y^x-1=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно y^x, получим $y^x=-\frac{1}{2}$ (нет решений), или $y^x=2$. Из второго уравнения системы $y^{2{,}5}\cdot y^x=64 \Rightarrow$ $y^{2{,}5}\cdot 2=64$, $y^{2{,}5}=32$, $y=4$. Таким образом, $4^x=2$, $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

7.291. $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg x+\lg y-\lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)}=-1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y\neq\dfrac{6}{5}, \\ y>-6. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\begin{cases} \lg\dfrac{x+y}{5}=\lg\dfrac{xy}{6}, \\ \lg x=\lg\dfrac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{xy}{6}, \\ x=\dfrac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\dfrac{6y}{y+6}+y}{5}=\dfrac{y^2}{y+6}, \\ x=\dfrac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3, \\ x=\dfrac{6\cdot 3}{3+6}=2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 3).

7.292. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq\dfrac{1}{y}, \\ 0<y\neq 1, \\ y>x. \end{cases}$

В первом уравнении системы перейдем к основанию y:

$$\frac{\log_y \dfrac{y}{x}}{\log_y xy}-\log_y^2 x=1 \Leftrightarrow \frac{1-\log_y x}{1+\log_y x}-\log_y^2 x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_y^3 x+\log_y^2 x+2\log_y x=0 \Leftrightarrow \log_y x\left(\log_y^2 x+\log_y x+2\right)=0,$$

откуда $\log_y x=0$, $x=y^0=1$, $\log_y^2 x+\log_y x+2\neq 0$. Из второго уравнения получаем $y-x=2$. Отсюда $y=3$.

Ответ: (1; 3).

7.293. $\begin{cases}(x+y)^x=(x-y)^y,\\ \log_2 x-\log_2 y=1.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x\neq\pm y.\end{cases}$

Из второго уравнения системы имеем $\log_2\frac{x}{y}=1$, откуда $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$. Тогда из первого уравнения системы получим $(3y)^{2y}=y^y$, $(9y^2)^y=y^y$, откуда $9y^2=y$, $y=\frac{1}{9}$, $x=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right)$.

7.294. $\begin{cases}x^{x-2y}=36,\\ 4(x-2y)+\log_6 x=9\end{cases}$ (найти только целочисленные решения).

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя обе части первого уравнения системы по основанию 6, имеем

$\log_6 x^{x-2y}=\log_6 36 \Leftrightarrow (x-2y)\log_6 x=2$.

Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}(x-2y)\log_6 x=2,\\ 4(x-2y)+\log_6 x=9\end{cases} \Rightarrow \log_6 x=9-4(x-2y),$$

$$(x-2y)(9-4(x-2y))=2 \Leftrightarrow 4(x-2y)^2-9(x-2y)+2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x-2y$, получим $x-2y=\frac{1}{8}$ или $x-2y=2$. Отсюда $\log_6 x=7$, $x_1=6^7$ или $\log_6 x=1$, $x_2=6$.

Если $x_1=6^7$, то $y_1=\frac{6^7}{2}-\frac{1}{10}$ не является целым. При $x_2=6$ получим $y_2=2$ из уравнения $x-2y=2$.

Ответ: (6; 2).

Решения к главе 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{8.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1,\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z; \tag{8.4}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.5}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{8.6}$$

(Здесь и в дальнейшем запись $n\in Z$ означает, что n – любое целое число).

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 8.1), а также знаки функций по четвертям (табл. 8.2).

Таблица 8.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0^\circ\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15^\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75^\circ\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Таблица 8.2

Четверть	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.12}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.13}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,. \tag{8.14}$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,; \tag{8.15}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\,; \tag{8.16}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\,; \tag{8.17}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.18}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \tag{8.19}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \tag{8.20}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; \tag{8.21}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \tag{8.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \tag{8.23}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \tag{8.24}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \tag{8.25}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in Z; \tag{8.26}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.27}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \qquad (8.29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \qquad (8.30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \qquad (8.31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,; \qquad (8.32)$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha); \qquad (8.33)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha); \qquad (8.34)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z\,; \qquad (8.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z\,; \qquad (8.36)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\; n\in Z\,; \qquad (8.37)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\; n\in Z\,; \qquad (8.38)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z\,; \qquad (8.39)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z\,; \qquad (8.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, \quad n\in Z\,; \qquad (8.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, \quad n\in Z\,; \qquad (8.42)$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (8.43)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (8.44)$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (8.45)$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (8.46)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.47)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.48)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.49)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.50)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.51)$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.52)$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.53)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.54)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.55)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z;\tag{8.56}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z;\tag{8.57}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);\tag{8.58}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right);\tag{8.59}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right);\tag{8.60}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right);\tag{8.61}$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right);\tag{8.62}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$
$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right);\tag{8.63}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$
$$\frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right).\tag{8.64}$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.65}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.66}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha,\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{8.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\&\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\&\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z;
\end{aligned}\right\} \tag{8.71}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z.
\end{aligned}\right\} \tag{8.72}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическим называется уравнение, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = m, \tag{8.73}$$

$$\cos x = m, \tag{8.74}$$

$$\operatorname{tg} x = m; \tag{8.75}$$

$$\operatorname{ctg} x = m, \tag{8.76}$$

где m – любое действительное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение тригонометрической функции.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1. $\sin x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения данного уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (8.77)$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.73) решений не имеет.

2. $\cos x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \quad n \in Z. \qquad (8.78)$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.74) решений не имеет.

3. $\operatorname{tg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (8.79)$$

4. $\operatorname{ctg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (8.80)$$

В частных случаях при $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.81)$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.82)$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.83)$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.84)$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.85)$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.86)$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.87)$$

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \qquad (8.88)$$

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.89}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.90}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.91}$$

$$\operatorname{ctg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.92}$$

Тригонометрические уравнения вида $\sin(ax+b)=m$, $\cos(ax+b)=m$, $\operatorname{tg}(ax+b)=t$, $\operatorname{ctg}(ax+b)=t$, где $ax+b$ — линейная функция, $|m|<1$, $a \neq 0$, x, b — любые действительные числа, также относятся к простейшим и приводятся к уравнениям (8.73) – (8.76) заменой $ax+b=y$.

Тригонометрические уравнения, содержащие тригонометрические функции одинакового аргумента

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Пусть имеем

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \tag{8.93}$$

где R – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента. Затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

Если $x \neq (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, то каждое тригонометрическое уравнение вида (8.93) можно привести к рациональному уравнению относительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (8.65) – (8.68). Решая уравнение таким методом, можно потерять корни вида $x=(2n+1)\pi$, где

$n \in Z$, для которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла. Поэтому необходимо проверить, являются ли числа $x = (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, корнями исходного уравнения.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi - x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\sin x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему не изменяется при замене x на $-x$, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\cos x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi + x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = 0, \quad (8.94)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, а n — натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородности уравнения или показателем однородности.

Уравнение (8.94) является частным случаем уравнения (8.93) и делением обеих своих частей на $\cos^n x \neq 0$ (или на $\sin^n x \neq 0$) приводится к целому рациональному относительно $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$):

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0$$

или

$$a_0 \operatorname{ctg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0;$$

при этом область определения уравнения сужается на значения $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ (или на $x = \pi n$), где $n \in Z$.

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, где $k \in N$, можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Так, к уравнению вида (8.94) сводится уравнение

$$a_0 \cos^{2n} x + a_1 \cos^{2n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = b.$$

Для этого нужно умножить b на тригонометрическую единицу:

$$b \equiv b\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^k, \quad k \in Z.$$

Уравнение вида $a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$

Это уравнение является частным случаем уравнения (8.93), следовательно, его можно решать с помощью универсальной подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один способ решения этого уравнения, так называемый способ введения вспомогательного угла. Пусть

$$a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right). \tag{8.95}$$

Разделим обе его части на $\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть φ — одно из решений системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде

$$\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Применив формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, получим уравнение $\sin(\omega x + \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, которое, как видно из проделанных выкладок, равносильно исходному уравнению. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, т.е. $a^2+b^2 \ge c^2$, то уравнение имеет решение

$$\omega x+\varphi=(-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n$$

или

$$x=\frac{(-1)^n}{\omega}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi n}{\omega},\ n\in Z.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, т.е. $a^2+b^2<c^2$, то уравнение решений не имеет.

Уравнения, рациональные относительно выражений $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$

Если левая часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ содержит лишь одно из выражений $\sin x+\cos x$ или $\sin x-\cos x$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x\cos x$), то, вводя новое неизвестное $t=\sin x+\cos x$ или $t=\sin x-\cos x$ и учитывая, что $\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$, $\sin 2x= =1-(\sin x-\cos x)^2$, приходим к уравнению относительно t.

СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений пользуются способом подстановки или сводят системы тригонометрических уравнений к системам алгебраических уравнений. В ряде случаев для решения системы тригонометрических уравнений ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одно из неизвестных, разложить полученное уравнение на множители и т.д. Решения системы записываются в виде упорядоченных пар $(x;\,y)$.

Решить уравнения (**8.176—8.385**):

8.176. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0,\\ \sin x\cos x>0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 x\cdot\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)+\cos^3 x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=2\sqrt{\sin x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^3 x(\sin x+\cos x)}{\sin x}+\frac{\cos^3 x(\cos x+\sin x)}{\cos x}-2\sqrt{\sin x\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sin^2 x(\sin x+\cos x)+\cos^2 x(\cos x+\sin x)-2\sqrt{\sin x\cos x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sqrt{\sin x\cos x}=0,\ \sin x-$

$-2\sqrt{\sin x\cos x}+\cos x=0,\ \sin x-2\sqrt{\sin x\cos x}+\cos x=0,$

$\left(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}=0.$

Тогда $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$, или $\sin x=\cos x,\ \sin x>0,\cos x>0$. Разделив это уравнение на $\cos x\neq 0$, получим $\operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(8k+1), k\in Z.$

8.177. $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\sin x=4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin\frac{x}{2}\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac{1-\cos x}{2}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{1+\cos x}{2}\cdot\frac{1+\cos x}{\sin x}+\sin x=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{2\sin x}+$$

$$+\sin x=6 \Leftrightarrow \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{2+2-2\sin^2 x}{2\sin x}+\sin x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 x}+\frac{2}{\sin x}-\sin x+\sin x-6=0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\sin^2 x-\sin x-2=0\,(\sin x\neq 0).$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим

$$(\sin x)_1=-\frac{2}{3},\, x_1=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k,\, k\in Z;$$

$$(\sin x)_2=1,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n+1),\, n\in Z;$$

Ответ: $x_1=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.178. $\operatorname{tg}(120°+3x)-\operatorname{tg}(140°-x)=2\sin(80°+2x)$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg}3(x+40°)-\operatorname{tg}(180°-(x+40°))=$

$=2\sin 2(x+40°) \Leftrightarrow \operatorname{tg}3(x+40°)+\operatorname{tg}(x+40°)=2\sin 2(x+40°)$.

По формуле $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и обозначив $x+40°=y$, запишем

$$\frac{\sin 4y}{\cos 3y\cos y}-2\sin 2y=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4y-2\sin 2y\cos 3y\cos y}{\cos 3y\cos y}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2y\cos 2y-2\sin 2y\cos 3y\cos y}{\cos 3y\cos y}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2y(2\cos 2y-2\cos 3y\cos y)}{\cos 3y\cos y}=$$

$$=0 \Leftrightarrow \frac{2\sin y\cos y(2\cos 2y-2\cos 3y\cos y)}{\cos 3y\cos y}=0,\quad (\cos y\neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin y(2\cos 2y-2\cos 3y\cos y)}{\cos 3y}=0.$$

Так как $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$, то

$$\frac{\sin y(2\cos 2y - \cos 2y - \cos 4y)}{\cos 3y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin y(\cos 2y - \cos 4y)}{\cos 3y} = 0.$$

По формуле $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ получаем

$$\frac{-2\sin y \sin 3y \sin y}{\cos 3y} = 0,\ \frac{\sin^2 y \sin 3y}{\cos 3y} = 0 \Rightarrow \sin y = 0,$$

или $\sin 3y = 0\ \ (\cos 3y \neq 0)$.

Решения уравнения $\sin y = 0$ входят в решения уравнения

$$\sin 3y = 0\ \left(\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y = \sin y\left(3 - 4\sin^2 y\right)\right),$$

откуда $3y = 180^\circ k$, $y = 60^\circ k$, $k \in Z$, $x + 40^\circ = 60^\circ k$, $x = -40^\circ + 60^\circ k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = -40^\circ + 60^\circ k$, $k \in Z$.

8.179. $\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin x \sin^2\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0$.

По формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ запишем

$$\sin^2 x + 1 - \cos x - \sin x(1-\cos x) + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 1 - \cos x - \sin x + \sin x\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \sin x - \sin x\cos x - \sin^2 x + \sin^2 x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^3 x + \sin^2 x\cos x\right) + (\sin x + \cos x) - \left(\sin x\cos x + \sin^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x - \sin x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z; \sin^2 x - \sin x + 1 \neq 0 \quad (D < 0).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z.$

8.180. $\dfrac{\cos^2 z(1+\operatorname{ctg} z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin z\neq 0,\\ \sin z-\cos z\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\cos^2 z\left(1+\frac{\cos z}{\sin z}\right)-3=3\cos z(\sin z-\cos z)\Leftrightarrow \frac{\cos^2 z(\sin z+\cos z)}{\sin z}-$$

$$-3-3\cos z(\sin z-\cos z)=0\Leftrightarrow \cos^2 z\sin z+\cos^3 z-3\sin z-$$

$$-3\cos z\sin^2 z+3\cos^2 z\sin z=0\Leftrightarrow 4\cos^2 z\sin z+\cos^3 z-$$

$$-3\sin z\left(\cos^2 z+\sin^2 z\right)-3\cos z\sin^2 z=0\Leftrightarrow \cos^2 z\sin z+\cos^3 z-$$

$$-3\sin^3 z-3\cos z\sin^2 z=0\Leftrightarrow \cos^2 z(\sin z+\cos z)-$$

$$-3\sin^2 z(\cos z+\sin z)=0\Leftrightarrow(\sin z+\cos z)\left(\cos^2 z-3\sin^2 z\right)=0.$$

Отсюда или $\sin z+\cos z=0$, или $\cos^2 z-3\sin^2 z=0$. Разделив первое уравнение на $\sin z\neq 0$, а второе на $\sin^2 z\neq 0$, получим

$$\operatorname{ctg} z=-1,\ \ z_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n-1), n\in Z$$

или

$$\operatorname{ctg}^2 z=3,\ \operatorname{ctg} z=\pm\sqrt{3},\ \ z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z.$$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, где n и $k\in Z$.

8.181. $\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t+1}+\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 t+1}=\dfrac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}.$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}\sin t\neq 0,\\ \cos t\neq 0.\end{cases}$

По формулам

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

имеем

$$\frac{1}{\frac{2(1+\cos 2t)}{1-\cos 2t}+1}+\frac{1}{\frac{2(1-\cos 2t)}{1+\cos 2t}+1}=\frac{15(2\cos^2 2t-1)}{8+1-\cos^2 2t}.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2t)(3-\cos 2t)+(1+\cos 2t)(3+\cos 2t)=30\cos^2 2t-15\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-3\cos 2t-\cos 2t+\cos^2 2t+3+3\cos 2t+\cos 2t+$$

$$+\cos^2 2t-30\cos^2 2t+15=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21-28\cos^2 2t=0,\ 4\cos^2 2t=3,\ \cos^2 2t=\frac{3}{4},\ \cos 2t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2t=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ t=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1),\quad k\in Z.$

8.182. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $8(\cos^2 x)^2-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

$$8\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2-4(1+\cos 2x)-\cos x+1=0\Leftrightarrow 2(1+\cos 2x)^2-$$

$$-4(1+\cos 2x)-\cos x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+4\cos 2x+2\cos^2 2x-4-4\cos 2x-\cos x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x=0\Leftrightarrow \cos 4x-\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{4x+x}{2}\sin\frac{x-4x}{2}=0,\ -\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}=0.$$

Отсюда или

$$\sin\frac{5x}{2}=0, \frac{5x}{2}=\pi n, x_1=\frac{2}{5}\pi n, n\in Z,$$

или

$$\sin\frac{3x}{2}=0, \frac{3x}{2}=\pi k, x_2=\frac{2}{3}\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{2}{5}\pi n;\ x_2=\frac{2}{3}\pi k$, где n и $k\in Z$.

8.183. $\dfrac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t.$

Решение.

ОДЗ: $3\cos 2t-\sin 2t\neq 0.$

Из условия имеем

$$\frac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}-\cos^2 2t+\sin^2 2t=0.$$

$$6\cos^3 2t+2\sin^3 2t-3\cos^3 2t+3\cos 2t\sin^2 2t+\sin 2t\cos^2 2t-\sin^3 2t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3\cos^3 2t+3\cos 2t\sin^2 2t\right)+\left(\sin^3 2t+\sin 2t\cos^2 2t\right)=0\Leftrightarrow 3\cos 2t\left(\cos^2 2t+\right.$$

$$\left.+\sin^2 2t\right)+\sin 2t\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)=0,\ 3\cos 2t+\sin 2t=0.\ \operatorname{tg}2t=-3,$$

$$2t=-\operatorname{arctg}3+\pi k,\ \ t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $t=-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.184. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=\dfrac{1}{16}.$

Решение.

Умножив обе части уравнения на $16\sin z\neq 0$, имеем

$$8(2\sin z\cos z)\cos 2z\cos 4z\cos 8z=\sin z\Leftrightarrow 8\sin 2z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=\sin z,$$

$$4(2\sin 2z\cos 2z)\cos 4z\cos 8z=\sin z,\ \ 4\sin 4z\cos 4z\cos 8z=\sin z,$$

$$2(2\sin 4z\cos 4z)\cos 8z=\sin z,\ \ 2\sin 8z\cos 8z=\sin z,$$

$$\sin 16z-\sin z=0\ \Leftrightarrow 2\cos\frac{16z+z}{2}\sin\frac{16z-z}{2}=0,\ \cos\frac{17z}{2}\sin\frac{15z}{2}=0.$$

Отсюда или $\cos\dfrac{17z}{2}=0,\ \dfrac{17z}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ z_1=\dfrac{\pi}{17}+\dfrac{2}{17}\pi k=\dfrac{\pi}{17}(2k+1),$

$k\in Z,$ или $\sin\dfrac{15z}{2}=0,\ \dfrac{15z}{2}=\pi k,\ z_2=\dfrac{2}{15}\pi k,\ k\in Z.$

Из совокупности значений $z_2=\dfrac{2}{15}\pi k,\ k\in Z$, нужно исключить те значения z, для которых $\sin z=0$, т.е. $z=\pi n, n\in Z$, получающиеся при $k=15n$. Аналогично, из совокупности значений $z_1=\dfrac{\pi}{17}(2k+1),\ k\in Z,$

исключаем значения $z=\pi n, n\in Z$, получающиеся при $2k+1=17$; $2k+1=51$; $2k+1=85$; ..., или $k=8$; $k=25$; $k=42$; .... т.е. $k=8+17l$, $l\in Z$. Таким образом, для исходного уравнения находим следующую совокупность решений:

$$z_1=\frac{2\pi k}{15}, k\neq 15l, k\in Z, l\in Z,$$

или

$$z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1), k\neq 17l+8, k\in Z, l\in Z.$$

Ответ: $z_1=\frac{2\pi k}{15}, k\neq 15l,\ z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1), k\neq 17l+8, k\in Z, l\in Z.$

8.185. $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\dfrac{1}{3}\cos x.$

Решение.

Из условия получаем:

$$\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)}{2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-\frac{1}{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}+\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{3}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\times$$

$$\times\left(3+2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Имеем:

1) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$. Разделив первое уравнение на $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, найдем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k\in Z$.

2) $3+2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin 2\left(\frac{x}{4}\right)+2\cos 2\left(\frac{x}{4}\right)+3\left(\cos^2\frac{x}{4}+\sin^2\frac{x}{4}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+2\left(\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}\right)+3\left(\cos^2\frac{x}{4}+\sin^2\frac{x}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{4}+$$

$$+4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+5\cos^2\frac{x}{4}=0.$$

Делим уравнение на $\cos^2\frac{x}{4}\neq 0$. Имеем $\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}+4\mathrm{tg}\frac{x}{4}+5=0$. В полученном квадратном уравнении $D<0$, $\varnothing$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1), k\in Z.$

8.186. $\mathrm{tg}^2 t-\dfrac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\mathrm{ctg}2t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \sin t\neq 0,\\ 2\sin 2t-\sin 4t\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\mathrm{tg}^2 t-\frac{2\sin 2t+2\sin 2t\cos 2t}{2\sin 2t-2\sin 2t\cos 2t}-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t-\frac{2\sin 2t(1+2\cos 2t)}{2\sin 2t(1-\cos 2t)}-$$

$$-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t-\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}-2\mathrm{ctg}2t=0.$$

Так как $\dfrac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}=\mathrm{ctg}t$, то

$$\mathrm{tg}^2 t-\mathrm{ctg}^2 t-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}-\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 t-\cos^4 t}{\sin^2 t\cos^2 t}-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow \frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)(\sin^2 t-\cos^2 t)}{\sin^2 t\cos^2 t}-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\sin^2 t\cos^2 t}-2\mathrm{ctg}2t=0 \Leftrightarrow \frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t}+\frac{2\cos 2t}{\sin 2t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\cos 2t}{\sin 2t}\left(\frac{2}{\sin 2t}+1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2t=0$, $2t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $t_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z;$

2) $\frac{2}{\sin 2t}+1=0,\ \sin 2t=-2,\ \varnothing.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.187. $\sin^2 x\,\mathrm{tg}x+\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x+2\sin x\cos x=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos x}+\frac{\cos^2 x\cos x}{\sin x}+2\sin x\cos x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cos x}+2\sin x\cos x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\sin x\cos x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0,$$

или

$$\frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\sin x\cos x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sin x\cos x}-$$

$$-2\sin x\cos x+2\sin x\cos x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},\ k\in Z.$

8.188. $\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}15^\circ+\mathrm{ctg}(x+25^\circ)=\mathrm{ctg}15^\circ\,\mathrm{ctg}(x+25^\circ)\,\mathrm{ctg}x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \sin(x+25^\circ)\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}+\frac{\cos(x+25^\circ)}{\sin(x+25^\circ)}-\frac{\cos 15^\circ\cos(x+25^\circ)\cos x}{\sin 15^\circ\sin(x+25^\circ)\sin x}=0\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x\sin 15^\circ\sin(x+25^\circ)-\cos 15^\circ\cos(x+25^\circ)\cos x)+$$
$$+(\cos 15^\circ\sin x\sin(x+25^\circ)+\cos(x+25^\circ)\sin x\sin 15^\circ)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\cos x(\cos 15^\circ\cos(x+25^\circ)-\sin 15^\circ\sin(x+25^\circ))+$$
$$+\sin x(\sin(x+25^\circ)\cos 15^\circ+\cos(x+25^\circ)\sin 15^\circ)=0.$$

Так как

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta),\ \ \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta),$$

то

$$-\cos x\cos(15^\circ+x+25^\circ)+\sin x\sin(x+25^\circ+15^\circ)=0\Leftrightarrow -\cos(2x+40^\circ)=0,$$

$$2x+40^\circ=90^\circ+180^\circ k,\ \ x=25^\circ+90^\circ k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=25^\circ+90^\circ k,\ k\in Z.$

8.189. $$\frac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}=\sin t.$$

Решение.

ОДЗ: $16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}\neq 0.$

Имеем

$$\frac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=0\Rightarrow 20\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)-$$

$$-\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left(16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(20\sin^3\frac{t}{2}-16\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)+$$

$$+\left(25\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}-20\cos^3\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{t}{2}\left(5\sin\frac{t}{2}-4\cos\frac{t}{2}\right)+5\cos^2\frac{t}{2}\times$$

$$\times\left(5\sin\frac{t}{2}-4\cos\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(5\sin\frac{t}{2}-4\cos\frac{t}{2}\right)\left(4\sin^2\frac{t}{2}+5\cos^2\frac{t}{2}\right)=0.$$

Отсюда 1) $5\sin\frac{t}{2}-4\cos\frac{t}{2}=0$, 2) $4\sin^2\frac{t}{2}+5\cos^2\frac{t}{2}=0$. Разделив первое уравнение на $\cos\frac{t}{2}\neq 0$, а второе на $\cos^2\frac{t}{2}\neq 0$, будем иметь $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{4}{5}$, $\frac{t}{2}=\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+\pi k,\ \ t_1=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k,\ \ k\in Z$, или $\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}=-\frac{5}{4}$, $\varnothing$.

Ответ: $t=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k,\ \ k\in Z.$

8.190. $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right).$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Так как $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, то получаем

$$\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin^2 x}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{4}+3x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{4}+3x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin x\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\sin 2x+\cos 2x)\sin x=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin 2x+\cos 2x)\sin x-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin 2x+\cos 2x)\sin x-(\cos 2x+\sin 2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin 2x+\cos 2x)(\sin x-1=0).$$

Отсюда или $\sin 2x+\cos 2x=0$, или $\sin x-1=0$. Разделив первое уравнение на $\sin 2x\neq 0$, имеем

$$\operatorname{ctg}2x=-1,\ 2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4k+3),\ k\in Z.$$

Из второго уравнения получаем $\sin x=1,\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n=\dfrac{\pi}{2}(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{8}(4k+3);\ x_2=\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$, где k и $n\in Z.$

8.191. $\sin^{-1}t-\sin^{-1}2t=\sin^{-1}4t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin t\neq 0,\\ \sin 2t\neq 0,\\ \sin 4t\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{\sin 2t}-\frac{1}{\sin 4t}=0 \Rightarrow \sin 2t\sin 4t-\sin t\sin 4t-\sin t\sin 2t=0.$$

По формуле $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ имеем

$$\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 6t)-\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos 5t)-\frac{1}{2}(\cos t-\cos 3t)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2t+\cos 5t)-(\cos 6t+\cos t)=0.$$

Так как $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, то

$$2\cos\frac{7t}{2}\cos\frac{3t}{2}-2\cos\frac{7t}{2}\cos\frac{5t}{2}=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{7t}{2}\left(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{5t}{2}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos\frac{7t}{2}=0,\ \frac{7t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi k,\ k\in Z,$

2) $\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{5t}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin 4t\sin t=0$ не подходит по ОДЗ. Учитывая

ОДЗ, $t=\frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi k=\frac{\pi}{7}(2k+1),\ k\neq 7l+3,$ где k и $l\in Z$.

Ответ: $t=\frac{\pi}{7}(2k+1),\ k\neq 7l+3,$ где k и $l\in Z$.

8.192. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}-3=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\neq 1,\\ \mathrm{tg}x\neq 1,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}-2\frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2-2\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, получим

1) $\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)=-1$, $\sin x+\cos x=-\sin x+\cos x$, $\sin x=0$, $x_1=\pi k$, $k\in Z$;

2) $\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)=3$, $\sin x+\cos x=3\sin x-3\cos x$, $\sin x=2\cos x$,

$\text{tg}x=2$, $x_2=\text{arctg}2+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x_1=\pi k$; $x_2=\text{arctg}2+\pi n$, где k и $n\in Z$.

8.193. $\text{ctg}^2 2x+\frac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0$.

Решение.

По формулам

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

имеем

$$\text{ctg}^2 2x+3\cdot\frac{2\sin 2x\sin x}{2\sin x\cos 2x}+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\text{ctg}^2 x-3\text{tg}2x+2=0\Rightarrow\text{ctg}^3 x+3\text{ctg}2x-3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\text{ctg}^3 2x-1\right)+\left(2\text{ctg}2x-2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\text{ctg}2x-1)\left(\text{ctg}^2 2x+\text{ctg}2x+1\right)+2(\text{ctg}2x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\text{ctg}2x-1)\left(\text{ctg}^2 2x+\text{ctg}2x+3\right)=0.$$

Отсюда

1) $\text{ctg}2x-1=0$, $\text{ctg}2x=1$, $2x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k\in Z$;

2) $\text{ctg}^2 2x+\text{ctg}2x+3\neq 0$ $(D<0)$, $\varnothing$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k\in Z$.

8.194. $\text{tg}^4 3t=\sin^2 6t$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 3t\neq 0$.

Из условия имеем:

$$\left(\operatorname{tg}^2 3t\right)^2=\sin^2 6t \Rightarrow \frac{(1-\cos 6t)^2}{(1+\cos 6t)^2}-\left(1-\cos^2 6t\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\cos 6t)^2-(1-\cos 6t)(1+\cos 6t)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 6t)\left(1-\cos 6t-(1+\cos 6t)^3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 6t)\left(1-\cos 6t-1-3\cos 6t-3\cos^2 6t-\cos^3 6t\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 6t)\times\left(\cos^3 6t+3\cos^2 6t+4\cos 6t\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 6t(\cos 6t-1)\left(\cos^2 6t+3\cos 6t+4\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 6t=0,\ 6t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\cos 6t-1=0,\ \cos 6t=1,\ 6t=2\pi n,\ t_2=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z;$

3) $\cos^2 6t+3\cos 6t+4=0\ \ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $t_1=\frac{\pi}{12}(2k+1);\ t_2=\frac{\pi n}{3}$, где k и $n\in Z$.

8.195. $\frac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{1-\left(\left(\sin^2 z\right)^3+\left(\cos^2 z\right)^3\right)}{1-\left(\sin^4 z+\cos^4 z\right)}=2\cos^2 3z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\left(\sin^2 z+\cos^2 z\right)\left(\sin^4 z-\sin^2 z\cos^2 z+\cos^4 z\right)}{1-\left(\left(\sin^2 z+\cos^2 z\right)^2-2\sin^2 z\cos^2 z\right)}=2\cos^2 3z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-1\left(\left(\sin^2 z+\cos^2 z\right)^2-3\sin^2 z\cos^2 z\right)}{1-1+2\sin^2 z\cos^2 z}=2\cos^2 3z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-1+3\sin^2 z\cos^2 z}{2\sin^2 z\cos^2 z}=\ 2\cos^2 3z,\ \ 2\cos^2 3z=\frac{3}{4},\ \ \cos 3z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$3z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ z=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{18}(6k\pm1),\ k\in Z.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm1),\ k\in Z.$

8.196. $\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x=\frac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)}{\sin x\cos x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)=0,$$

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x-\sin x=0$, 2) $\cos x+\sin x-1=0$. Разделив первое уравнение на $\cos x\neq 0$, получим $\mathrm{tg}x=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Второе уравнение запишем в виде:

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда или $\sin\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=\pi n$, $x_2=2\pi n$, $n\in Z$, или $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0.$ Разделив последнее уравнение на $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, найдем $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi l$, $x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in Z$; x_2, x_3 не подходят по ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1), k\in Z.$

8.197. $\frac{\operatorname{ctg}2z}{\operatorname{ctg}z}+\frac{\operatorname{ctg}z}{\operatorname{ctg}2z}+2=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\operatorname{ctg}z\neq 0,\\ \operatorname{ctg}2z\neq 0,\\ \sin z\neq 0,\\ \sin 2z\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\left(\frac{\operatorname{ctg}2z}{\operatorname{ctg}z}\right)^2+2\cdot\frac{\operatorname{ctg}2z}{\operatorname{ctg}z}+1=0\Leftrightarrow\left(\frac{\operatorname{ctg}2z}{\operatorname{ctg}z}+1\right)^2=0\Leftrightarrow\frac{\operatorname{ctg}2z}{\operatorname{ctg}z}=-1,$$

$\operatorname{ctg}2z=-\operatorname{ctg}z, \operatorname{ctg}2z+\operatorname{ctg}z=0.$

Так как $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, то получаем $\frac{\sin 3z}{\sin 2z\sin z}=0.$

По формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ имеем

$$\frac{3\sin z-4\sin^3 z}{\sin 2z\sin z}=\frac{\sin z\left(3-4\sin^2 z\right)}{\sin 2z\sin z}=\frac{3-4\sin^2 z}{\sin 2z}$$

и наше уравнение принимает вид $3-4\sin^2 z=0$, откуда $\sin z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$z=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.198. $\cos^{-2}2x\operatorname{tg}2x+\sin^{-2}2x\operatorname{ctg}2x=\frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+10\sin^{-1}4x+4\sqrt{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+\frac{10}{\sin 4x}+4\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}+\frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}=\frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+\frac{10}{\sin 4x}+4\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}=\frac{8\cos^2 4x+10\sin^2 4x}{\sin^3 4x}+4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)^2-2\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}=\frac{8\left(1-\sin^2 4x\right)+10\sin^2 4x}{\sin^3 4x}+4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}=\frac{8+2\sin^2 4x}{\sin^3 4x}+4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-4\left(\sin^2 2x\cos^2 2x\right)}{8\sin^3 2x\cos^3 2x}-\frac{8+2\sin^2 4x}{\sin^3 4x}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-4\sin^2 4x}{\sin^3 4x}-\frac{8+2\sin^2 4x}{\sin^3 4x}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-4\sin^2 4x-8-2\sin^2 4x}{\sin^3 4x}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{6\sin^2 4x}{\sin^3 4x}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin 4x}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $4x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4},\ \ k\in Z.$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

8.199. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}\cdot\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\cos x}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{\dfrac{2\cos x}{\sin x}}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{2\cos x\sin^2 x}{\sin x(\sin^2 x+\cos^2 x)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{8}(1-2\cos x\sin x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\sin 2x}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{1-\sin 2x}{8}\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1-\sin 2x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-1+\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=0.$$

Разделив это уравнение на $\cos 2x\neq 0$, получим $\operatorname{tg}2x=1$, $2x=\frac{\pi}{4}+\pi k$,

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(4k+1),\ k\in Z.$

8.200. $\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg}2x)}{\operatorname{ctg}2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0,\\ \operatorname{ctg}2x-\cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\frac{3\left(\cos 2x+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\cos 2x(\sin 2x+1)}{\cos 2x(1-\sin 2x)}-2(\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow(\sin 2x+1)\left(\frac{3}{1-\sin 2x}-2\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin 2x+1=0,\ \sin 2x=-1,\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),$ $k\in Z;$

2) $\frac{3}{1-\sin 2x}-2=0,\ \sin 2x=-\frac{1}{2},\ 2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,$

$x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $n\in Z;$ x_1 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg}x=3.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Так как $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, то имеем

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2}{\operatorname{tg}x}-3=0\Rightarrow\ 3\operatorname{tg}^3 x-4\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}x-2=0.$$

Пусть $\operatorname{tg}x=y$, тогда

$3y^3-4y^2+3y-2=0,\ 3y^3-3y^2-y^2+2y+y-1-1=0,$

$3y^2(y-1)-(y-1)^2+(y-1)=0,\ (y-1)(3y^2-y+2)=0.$

Отсюда

1) $y-1=0,\ y=1,\ \operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z;$

2) $3y^2-y+2\neq 0\ (D<0)$, $\varnothing$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

Решение.

Так как

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$

то уравнение имеет вид

$2\cos 13x+3(\cos 3x+\cos 5x)-8\cos x\cos^3 4x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 13x+3\cdot 2\cos 4x\cos x-8\cos x\cos^3 4x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 13x-2\cos x(4\cos^3 4x-3\cos 4x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 13x-2\cos x\cos 12x=0 \Leftrightarrow 2\cos 13x-(\cos 13x+\cos 11x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin 12x\sin x=0.$

Отсюда

1) $\sin 12x=0,\ 12x=\pi k,\ x_1=\dfrac{\pi k}{12},\ k\in Z;$

2) $\sin x=0,\ x_2=\pi n,\ n\in Z;$ x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{12},\ k\in Z.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

Решение.

Имеем:

$(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)^2+(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x)^2=$

$=3-\sin 4x \Leftrightarrow (1+\sin 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=3-\sin 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+2\sin 2x+\sin^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=3-\sin 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-1+\sin 4x=0 \Leftrightarrow -\cos 4x+\sin 4x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 4x=1,$

$4x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi k}{4}=\dfrac{\pi}{16}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{16}(4k+1),\ k\in Z.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2t\neq 0.$

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то имеем:

$$\frac{(1-\cos 2t)^3}{\sin^3 2t}+\frac{6}{\sin 2t}=\frac{8}{\sin^3 2t}-\frac{3(1+\cos 2t)}{\sin 2t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1-\cos 2t)^3 + 6\sin^2 2t - 8 + 3(1+\cos 2t)\sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\cos 2t)^3 + 6(1-\cos^2 2t) - 8 + 3(1+\cos 2t)(1-\cos^2 2t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 3\cos 2t + 3\cos^2 2t - \cos^3 2t + 6 - 6\cos^2 2t - 8 + 3 - 3\cos^2 2t +$

$+ 3\cos 2t - 3\cos^3 2t = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 2t + 6\cos^2 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2t + 3\cos^2 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 2t + 2 + 3\cos^2 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\cos 2t + 1)(\cos^2 2t - \cos 2t + 1) + 3(\cos 2t + 1)(\cos 2t - 1) = 0,$

$(\cos 2t + 1)(2\cos^2 2t + \cos 2t - 1) = 0.$

Отсюда

1) $\cos 2t + 1 = 0,\ \cos 2t = -1,\ 2t = \pi + 2\pi n,\ t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

2) $2\cos^2 2t + \cos 2t - 1 = 0$. Решая уравнение как квадратное относительно $\cos 2t$, имеем $\cos 2t = -1,\ t_2 = t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ — не подходит по ОДЗ; $\cos 2t = \frac{1}{2},\ 2t_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ t_3 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z.$

Ответ: $t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z.$

8.205. $2\sin x \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x - 5\cos^2 x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$

Решение.

Так как $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, то имеем

$\sin x(1 + \cos(\pi - 2x)) + \frac{3}{2}(1 + \cos(\pi + 2x))\cos x - 5\cos^2 x\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x(1 - \cos 2x) + \frac{3}{2}(1 - \cos 2x)\cos x - 5\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 2\sin x\cos 2x + 3\cos x - 3\cos 2x\cos x - 10\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - \cos 2x) + 3\cos x(1 - \cos 2x) - 10\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)(2\sin x + 3\cos x) - 10\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(2\sin x + 3\cos x) - 10\cos^3 x = 0,$

$4\sin^3 x + 6\sin^2 x\cos x - 10\cos^3 x = 0,$

$2\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - 5\cos^3 x = 0.$

Разделив это уравнение на $\cos^3 x \neq 0$, получим:

$$2\operatorname{tg}^3 x-2+3\operatorname{tg}^2 x-3=0 \Leftrightarrow 2(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1\right)+3(\operatorname{tg}x-1)\times$$
$$\times(\operatorname{tg}x+1)=0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}x-1)\left(2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+5\right)=0.$$

Отсюда

1) $\operatorname{tg}x-1=0,\ \operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z;$

2) $2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+5\neq 0\ \ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\frac{82}{9}(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x+1)\cos 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\left((\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x\right)^2-2\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 x=\frac{82}{9}\cdot\left(\frac{\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}+1\right)\cos 2x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2-2\right)^2-2=\frac{82}{9}\cdot\left(\frac{\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}\right)\cos 2x.$$

Применив формулу $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$, имеем

$$\left(\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)^2-2\right)^2-2=\frac{82}{9}\cdot\frac{\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2\right)^2=\frac{100}{9}.$$

Отсюда 1) $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2=\pm\frac{10}{3}\Leftrightarrow\ \frac{4}{\sin^2 2x}-2=\pm\frac{10}{3}$. Тогда

$\sin^2 2x=-3,\ \varnothing$; или $\sin^2 2x=\frac{3}{4},\ \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

Решение.

Так как $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, то имеем

$$2\left(\frac{1}{2}(1+\cos4t)\right)^3-\left(\frac{1}{2}(2+\cos4t)\right)^2+1{,}5\left(1-\cos^2 4t\right)-1{,}5(1-\cos4t)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1+\cos4t)^3}{4}-\frac{(1+\cos4t)^2}{4}+\frac{3\left(1-\cos^2 4t\right)}{2}-\frac{3(1-\cos4t)}{2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^3 4t-4\cos^2 4t+7\cos4t=0\Leftrightarrow\cos4t\left(\cos^2 4t-4\cos4t+7\right)=0.$$

Отсюда 1) $\cos4t=0,\ 4t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\cos^2 4t-4\cos4t+7\neq0\ \ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$

8.208. $\sin6x+2=2\cos4x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sin3(2x)+2-2\cos2(2x)=0$ и применив формулы $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ получим

$$3\sin2x-4\sin^3 2x+2-2+4\sin^2 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow4\sin^3 2x-4\sin^2 2x-3\sin2x=0\Leftrightarrow\sin2x\left(4\sin^2 2x-4\sin2x-3\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin2x=0,\ 2x=\pi k,\ x_1=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

2) $4\sin^2 2x-4\sin2x-3=0.$ Решив уравнение как квадратное относительно $\sin2x$, имеем $\sin2x=\frac{3}{2},\varnothing;\ \sin2x=-\frac{1}{2},\ 2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,$

$x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{2};\ x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, где k и $n\in Z.$

8.209. $\sin^2 t\,\mathrm{tg}t + \cos^2 t\,\mathrm{ctg}t - 2\sin t\cos t = 1 + \mathrm{tg}t + \mathrm{ctg}t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t \neq 0,\\ \sin t \neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\sin^2 t\sin t}{\cos t} + \frac{\cos^2 t\cos t}{\sin t} - 2\sin t\cos t = 1 + \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 t + \cos^4 t}{\sin t\cos t} - \sin 2t = 1 + \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t\cos t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t}{\sin t\cos t} - \sin 2t = 1 + \frac{1}{\sin t\cos t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 4\sin^2 t\cos^2 t}{2\sin t\cos t} - \sin 2t = 1 + \frac{2}{2\sin t\cos t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 2t}{\sin 2t} - \sin 2t - 1 - \frac{2}{\sin 2t} = 0 \Rightarrow 2 - \sin^2 2t - \sin^2 2t - \sin 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow \sin 2t(2\sin 2t + 1) = 0.$$

Отсюда

$2\sin 2t + 1 = 0,\ \sin 2t = -\frac{1}{2},\ 2t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},$
$k \in Z;\ \sin 2t \neq 0.$

Ответ: $t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

8.210. $\mathrm{tg}^3 2x + \mathrm{ctg}^3 2x + 6\sin^{-1} 2x = 8\sin^{-3} 4x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0,\\ \sin 2x \neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\sin^3 2x}{\cos^3 2x} + \frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x} + \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^6 2x + \cos^6 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x} + \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 2x+\cos^2 2x)(\sin^4 2x-\sin^2 2x\cos^2 2x+\cos^4 2x)}{\sin^3 2x\cos^3 2x}+$$

$$+\frac{6}{\sin 2x}-\frac{8}{\sin^3 4x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-3\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}+\frac{6}{\sin 2x}-\frac{8}{\sin^3 4x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-6(4\sin^2 2x\cos^2 2x)}{8\sin^3 2x\cos^3 2x}-\frac{8}{\sin^3 4x}+\frac{6}{\sin 2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-6\sin^2 4x}{\sin^3 4x}-\frac{8}{\sin^3 4x}+\frac{6}{\sin 2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-6\sin^2 4x-8}{\sin^3 4x}+\frac{6}{\sin 2x}=0 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sin 4x}+\frac{6}{\sin 2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sin 2x\cos 2x}+\frac{1}{\sin 2x}=0 \Leftrightarrow \frac{-1+2\cos 2x}{2\sin 2x\cos 2x}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+2\cos 2x=0, \cos 2x=\frac{1}{2}, 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1),$$

$k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1),\ k\in Z.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\cos x\cos 2x\sin 3x-0{,}5\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos 2x\sin 3x-0{,}5\sin x)=0.$$

Отсюда или

$$\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z,$$

или

$$\cos 2x\sin 3x-0{,}5\sin x=0, \text{ или } 2\cos 2x\sin 3x-\sin x=0.$$

Используя формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, имеем:

$$\sin(3x-2x)+\sin(3x+2x)-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x+\sin 5x-\sin x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x,\quad 5x=\pi n,\ x_2=\frac{\pi n}{5},\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ x_2=\frac{\pi n}{5}$, где k и $n\in Z.$

8.212. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2.$

Решение.

Запишем уравнение в виде $\cos 3(3x) - 2\cos 2(3x) - 2 = 0$ и, применив формулы $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, имеем:

$$4\cos^3 3x - 3\cos 3x - 2\left(2\cos^2 3x - 1\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 3x - 4\cos^2 3x - 3\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x\left(4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3\right) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos 3x = 0,\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{6}(2k+1),\ k \in Z,$

2) $4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3 = 0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 3x$, найдем $\cos 3x = \frac{3}{2}$, $\varnothing$; или $\cos 3x = -\frac{1}{2},\ 3x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n,$

$x_2 = \pm\frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi n = \frac{2\pi}{9}(3n \pm 1),\ n \in Z.$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1),\ x_2 = \frac{2\pi}{9}(3n \pm 1)$, где k и $n \in Z.$

8.213. $2\sin^5 2t - \sin^3 2t - 6\sin^2 2t + 3 = 0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\sin^3 2t\left(2\sin^2 2t - 1\right) - 3\left(2\sin^2 2t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2 2t - 1\right)\left(\sin^3 2t - 3\right) = 0.$$

Отсюда

1) $2\sin^2 2t - 1 = 0,\ \sin 2t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$

$t_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k+1),\ \ k \in Z;$

2) $\sin^3 2t - 3 = 0,\ \sin 2t = \sqrt[3]{3} > 1,\ \varnothing.$

Ответ: $t = \frac{\pi}{8}(2k+1),\ k \in Z.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=\frac{3}{2}\left(\sin^4 2t+\cos^4 2t\right)+\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)\left(\sin^4 2t-\sin^2 2t\cos^2 2t+\cos^4 2t\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\left(\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)^2-2\sin^2 2t\cos^2 2t\right)-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)^2-3\sin^2 2t\cos^2 2t-\frac{3}{2}\left(1-2\sin^2 2t\cos^2 2t\right)-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)=0\Leftrightarrow 1-3\sin^2 2t\cos^2 2t-\frac{3}{2}+3\sin^2 2t\cos^2 2t-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)=0\Leftrightarrow \sin t+\cos t+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}=0\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos\frac{t}{2}=0,\ \frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\pi+\pi k=\pi(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}=0,\ \operatorname{tg}\frac{t}{2}=-1,\ \frac{t}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi n,$

$$t_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n-1),\ n\in Z.$$

Ответ: $t_1=\pi(2k+1);\ t_2=\frac{\pi}{2}(4n-1),\ k$ и $n\in Z.$

8.215. $\left(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x\right)\left(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x\right)=4\sin^{-2} 4x+5.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{1}{\cos^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}\right)=\frac{4}{\sin^2 4x}+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot\frac{1+\cos^2 2x}{\sin^2 2x}-\frac{4}{\sin^2 4x}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 2x+\sin^2 2x+\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^2 2x\cos^2 2x}-\frac{4}{\sin^2 4x}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^2 2x\cos^2 2x}-\frac{4}{\sin^2 4x}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x\cos^2 2x}+1-\frac{4}{\sin^2 2x}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x\cos^2 2x}-\frac{4}{\sin^2 4x}-4=0 \Leftrightarrow \frac{8}{\sin^2 4x}-\frac{4}{\sin^2 4x}-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 4x}=4 \Leftrightarrow \sin^2 4x=1,\ \sin 4x=\pm 1,\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$

8.216. $\sin 3z+\sin^3 z=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

Решение.

Так как $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, то имеем:

$$3\sin z-4\sin^3 z+\sin 3z-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin z\cos z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin z-3\sin^3 z-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin z\cos z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin z\left(1-\sin^2 z-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z\right)=0 \Leftrightarrow \sin z\left(\cos^2 z-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z\cos z\left(\cos z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin z=0,\ z_1=\pi k,\ k\in Z;$

$2)\cos z=0,\ z_2=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z;$

$3)\cos z-\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\ \cos z=\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ l\in Z.$

Ответ: $z_1=\pi k;\ z_2=\frac{\pi}{2}(2n+1);\ z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ k,\ n$ и $l\in Z.$

8.217. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Уравнение равносильно двум уравнениям: $\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2=0$ или $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=0$. Запишем первое уравнение в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x+\sin x)=0.$$

Так как $\cos x\neq 0$, то

$$\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n-1),\ n\in Z.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{ctg}x}=0\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}x}=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x=-1,\ \varnothing.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4n-1),\ n\in Z.$

8.218. $2\sin 2x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\cos 3x\cos^{-1}5x\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 5x\neq 0.$

Имеем

$$2\sin 2x+\left(\sin 3x-\frac{\cos 3x\sin 5x}{\cos 5x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+\frac{\sin 3x\cos 5x-\cos 3x\sin 5x}{\cos 5x}=0\Leftrightarrow 2\sin 2x-\frac{\sin 2x}{\cos 5x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2-\frac{1}{\cos 5x}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi m$, $x_1 = \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$; здесь $m \neq 2l+1$, так как в противном случае $\cos 5x = 0$; значит, $x_1 = \pi k$, $k \in Z$.

2) $2 - \frac{1}{\cos 5x} = 0$, $\cos 5x = \frac{1}{2}, 5x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi k$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, k$ и $n \in Z$.

8.219. $3(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t) + 4\sin 2t = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \cos t \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$3(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t) + 4\sin 2t = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{\sin t}{\cos t}\right) + 4\sin 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin t \cos t} + 4\sin 2t = 0 \Leftrightarrow \frac{6\cos 2t}{\sin 2t} + 4\sin 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2t + 2\sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow 3\cos 2t + 2(1 - \cos^2 2t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2t - 3\cos 2t - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 2t$, найдем

$\cos 2t = 2$, $\varnothing$; $\cos 2t = -\frac{1}{2}$, $2t = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$, $n \in Z$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$, $n \in Z$.

8.220. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x + \cos^{-2} 2x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x + \sin^{-2} 2x} = \frac{2}{3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} + \frac{1}{\cos^2 2x}} + \frac{1}{\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin^2 2x}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x+1}+\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x+1}-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(1+\cos 4x)}{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+1}+\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)}{\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+1}-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 4x}{3-\cos 4x}+\frac{1-\cos 4x}{3+\cos 4x}-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1+\cos 4x)(3+\cos 4x)+3(3-\cos 4x)(1-\cos 4x)-$$

$$-2(3-\cos 4x)(3+\cos 4x)=0 \Leftrightarrow \cos^2 4x=0,\ \cos 4x=0,\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$

8.221. $\operatorname{tg}3t+\operatorname{tg}t=2\sin 4t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \cos 3t\neq 0.\end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, то перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin(3t+t)}{\cos 3t\cos t}-2\sin 4t=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4t-\sin 4t(2\cos 3t\cos t)}{\cos 3t\cos t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4t(1-2\cos 3t\cos t)=0.$$

Применяя формулу $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$, имеем

$$\sin 4t(1-\cos 2t-\cos 4t)=0 \Leftrightarrow \sin 4t\left(1-\cos 2t-2\cos^2 2t+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4t\left(2\cos^2 2t+\cos 2t-2\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin 4t=0,\ 4t=\pi k,\ t_1=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z;$

2) $2\cos^2 2t+\cos 2t-2=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\cos 2t$, находим $\cos 2t=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<-1$, $\varnothing$; или $\cos 2t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$,

$2t=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi n$, $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi n$, $n\in Z$. Учитывая ОДЗ, $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$, где k и $l\in Z$.

Ответ: $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$; $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi n$, где k, l и $n\in Z$.

8.222. $\sin(3\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=\frac{\cos^{-1}x-\cos x}{2\sin x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\sin x+\operatorname{tg}x=\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{2\sin x}\Leftrightarrow \sin x+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{2\sin x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}-\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=0\Leftrightarrow\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x}-\frac{\sin x}{2\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x\left(\frac{\cos x+1}{\cos x}-\frac{1}{2\cos x}\right)=0,\ \sin x\neq 0;\ \ \frac{\cos x+1}{\cos x}-\frac{1}{2\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos x+1}{\cos x}=0\Leftrightarrow\ 2\cos x+1=0,\ \cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k=\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1)$, $k\in Z$.

8.223. $\frac{1}{2}\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x$.

Решение.

Запишем это уравнение в виде

$$\sin 2x\cos 2x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)\sin x+2\sin x\cos x\sin x=2\cos^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)\sin^2 x+2\sin^2 x\cos x-2\cos^2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\left(2\cos^2 x-1\right)\left(1-\cos^2 x\right)+1-\cos^2 x-\cos x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x-2\cos^4 x-\cos x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x\left(2\cos^3 x-2\cos x+1\right)=0.$$

Отсюда имеем $\cos^2 x=0$, $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$; $2\cos^3 x-2\cos x+1\neq 0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$.

8.224. $\frac{2\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)}{\cos^4 t-\sin^4 t}=\cos^{-1}2t+\cos 4t+1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 2t\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2\left(\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\right)}{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)}=\frac{1}{\cos 2t}+\cos 4t+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-4\cos^2 t\sin^2 t}{\cos 2t}-\frac{1}{\cos 2t}-\cos 4t-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sin^2 2t-1}{\cos 2t}-\cos 4t-1=0\Leftrightarrow \frac{\cos^2 2t}{\cos 2t}-\cos 4t-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t-\left(2\cos^2 2t-1\right)-1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2t-\cos 2t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t(2\cos 2t-1)=0\Rightarrow \cos 2t\neq 0;\ 2\cos 2t-1=0,\ \cos 2t=\frac{1}{2},$$

$$2t=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ t=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $k\in Z$.

8.225. $\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin^2 t+\sin 2t-1}{\cos^2 t-\sin 2t+1}$.

Решение.

ОДЗ: $\cos t\neq 0$.

Так как $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, то

$$\operatorname{tg} t-\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)+\sin 2t-1}{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)-\sin 2t+1}=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} t-\frac{1-\cos 2t+2\sin 2t-2}{1+\cos 2t-2\sin 2t+2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} t-\frac{2\sin 2t-\cos 2t-1}{-2\sin 2t+\cos 2t+3}=0,$$

применяя формулы $\sin\alpha=\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, получаем

$$\operatorname{tg} t-\frac{\dfrac{4\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}-1}{\dfrac{4\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}+3}=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 t-2\operatorname{tg}^2 t+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg}^2 t\right)-\left(\operatorname{tg}^2 t-1\right)=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t(\operatorname{tg} t-1)-(\operatorname{tg} t-1)(\operatorname{tg} t+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg} t-1)\left(\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{tg} t-1\right)=0.$$

Отсюда имеем или $\operatorname{tg} t-1=0$, $\operatorname{tg} t=1$, $t_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$, $k\in Z$, или $\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{tg} t-1=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} t$, получаем $\operatorname{tg} t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $\operatorname{tg} t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_3=\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi l$, $l\in Z$.

Ответ: $t_1=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$; $t_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi n$; $t_3=\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi l$; k, n и $l\in Z$.

8.226. $\frac{\sin 2t + 2\cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = \cos t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \sin 2t + \cos 2t \neq 0. \end{cases}$

Так как $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, то имеем

$$\frac{\sin 2t + \cos 2t}{2\sin\frac{t+3t}{2}\sin\frac{3t-t}{2} + 2\sin\frac{3t-t}{2}\cos\frac{3t+t}{2}} = \cos t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t + \cos 2t}{2\sin 2t\sin t + 2\sin t\cos 2t} - \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t + \cos 2t}{2\sin t(\sin 2t + \cos 2t) - \cos t} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin t} - \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin t\cos t = 0$, $1 - \sin 2t = 0$, $\sin 2t = 1$, $2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$t = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$.

8.227. $\sin t^2 - \sin t = 0.$

Решение.

По формуле $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, получаем

$$2\sin\frac{t^2-t}{2}\cos\frac{t^2+t}{2} = 0.$$

Отсюда

1) $\sin\frac{t^2-t}{2} = 0,$

2) $\cos\frac{t^2+t}{2}=0.$

Из первого уравнения имеем

$$\frac{t^2-t}{2}=\pi k,\ \ k\in Z\Leftrightarrow\ t^2-t-2\pi k=0,\ k\in Z.$$

Решая это квадратное уравнение, получим $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, где $1+8\pi k\ge 0,\ \ k\ge-\frac{1}{8\pi},\ k=0,1,2,\dots$.

Из второго уравнения имеем

$$\frac{t^2+t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z,\ \text{или}\ t^2+t-\pi-2\pi n=0,\ \ n\in Z.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(1+2n)}}{2}$, где $1+4\pi(1+2n)\ge 0,\ \ n\ge-\frac{1}{8\pi}-\frac{1}{2},\ n=0,1,2,\dots$.

Ответ: $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$; $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(1+2n)}}{2}$, где k и $n=0,1,2,\dots$.

8.228. $\sin^3 z\sin 3z+\cos^3 z\cos 3z=\cos^3 4z.$

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения, применяя формулы

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},\ \ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\ \ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\sin^2 z\sin z\sin 3z+\cos^2 z\cos z\cos 3z=\left(1-\cos^2 z\right)\sin z\sin 3z+$$

$$+\cos^2 z\cos z\cos 3z=\sin z\sin 3z-\cos^2 z\sin z\sin 3z+\cos^2 z\cos z\cos 3z=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2z-\cos 4z)-\cos^2 z(\sin z\sin 3z-\cos z\cos 3z)=$$

$$=\frac{\cos 2z-\cos 4z}{2}+\cos^2 z\cos 4z=\frac{\cos 2z-\cos 4z+2\cos^2 z\cos 4z}{2}=$$

$$=\frac{\cos 2z+\cos 4z\left(2\cos^2 z-1\right)}{2}=\frac{\cos 2z+\cos 4z\cos 2z}{2}=\frac{\cos 2z(1+\cos 4z)}{2}=$$

$$=\frac{\cos 2z(1+\cos 4z)}{2}=\cos 2z\cos^2 2z=\cos^3 2z.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид $\cos^3 2z = \cos^3 4z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos 4z = \cos 2z,\ \cos 4z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow\ -2\sin 3z \sin z = 0.$

Отсюда

1) $\sin 3z = 0,\ 3z = \pi k,\ z_1 = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z;$

2) $\sin z = 0,\ z_2 = \pi n,\ n \in Z,\ z_2$ входит в z_1.

Ответ: $z = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t - 3) - 2\sin^2 t(\sin 2t - 3) - 1 = 0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$(\sin 2t - 3)\cdot 2\sin^2 t\left(\sin^2 t - 1\right) - 1 = 0,$

$-(\sin 2t - 3)\cdot 2\sin^2 t\cos^2 t - 1 = 0,\ (\sin 2t - 3)\cdot 4\sin^2 t\cos^2 t + 2 = 0,$

$(\sin 2t - 3)\sin^2 2t + 2 = 0,\ \sin^3 2t - 3\sin^2 2t + 2 = 0,$

$\sin^3 2t - \sin^2 2t - 2\sin 2t + 2 = 0,\ \sin^2 2t(\sin 2t - 1) - 2\left(\sin^2 2t - 1\right) = 0,$

$\sin^2 2t(\sin 2t - 1) - 2(\sin 2t - 1)(\sin 2t + 1) = 0,$

$(\sin 2t - 1)\left(\sin^2 2t - 2\sin 2t - 2\right) = 0.$

Отсюда

1) $\sin 2t - 1 = 0,\ \sin 2t = 1,\ 2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ t_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z;$

2) $\sin^2 2t - 2\sin 2t - 2 = 0.$ Решая это уравнение как квадратное относительно $\sin 2t$, получаем $\sin 2t = 1 + \sqrt{3} > 1,\ \varnothing;\ \sin 2t = 1 - \sqrt{3},$
$2t = (-1)^n \arcsin\left(1 - \sqrt{3}\right) + \pi n,\ t_2 = (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Ответ: $t_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1);\ t_2 = (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$, где k и $n \in Z.$

8.230. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x.$

Решение.

Имеем

$8(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x\cos 8x = 2\cos 15x\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x\cos 8x = 2\cos 15x\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos 8x = 2\cos 15x\sin x,\ \ \sin 16x = 2\cos 15x\sin x.$

По формуле $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha))$, имеем

$\sin 16x = -\sin 14x + \sin 16x,\ \ \sin 14x = 0,\ \ 14x = \pi k,\ \ x = \frac{\pi k}{14},\ \ k \in Z.$

Так как $\sin x \neq 0,\ \ x \neq \pi l$, то $x = \frac{\pi k}{14},\ \ k \neq 14l$, где k и $l \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{14},\ \ k \neq 14l$, где k и $l \in Z$.

8.231. $2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$

Решение.

Имеем $8(\sin^2 x)^2 + 5\sin^2 2x - 4(\cos^2 x)^2 - 4\cos 2x = 0$. По формулам

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, находим

$$8\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 + 5(1-\cos^2 2x) - 4\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 - 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\cos 2x)^2 + 5(1-\cos 2x)^2 - (1+\cos^2 2x) - 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x + 5 - 5\cos^2 2x - 1 - 2\cos 2x - \cos^2 2x -$$

$$-4\cos 2x = 0 \ \ \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, найдем

$\cos 2x = -3$, $\varnothing$; или $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$,

$k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ \ k \in Z.$

8.232. $\sin 2t\cos 2t(\sin^4 2t + \cos^4 2t - 1) = \frac{1}{2}\sin^2 4t.$

Решение.

Имеем

$$(2\sin 2t\cos 2t)\left((\sin^2 2t + \cos^2 2t)^2 - 2\sin^2 2t\cos^2 2t - 1\right) - \sin^2 4t = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin 4t\left(1-2\sin^2 2t\cos^2 2t-1\right)-\sin^2 4t=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sin 4t\cdot 4\sin^2 2t\cos^2 2t-2\sin^2 4t=0,\ \ \sin^3 4t+2\sin^2 4t=0,$

$\sin^2 4t\left(\sin 4t+2\right)=0.$

Отсюда

1) $\sin^2 4t=0,\ 4t=\pi k,\ t=\dfrac{\pi k}{4},\ k\in Z;$

2) $\sin 4t+2=0,\ \sin 4t=-2,\ \varnothing.$

Ответ: $t=\dfrac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

8.233. $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+tgx-1)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$\left(2\sin x\cos x-2\cos^2 x\right)+4\left((\sin x-\cos x)+\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)+4\left((\sin x-\cos x)+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$2\cos x(\sin x-\cos x)+4(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x-\cos x)\left(\cos x+2+\frac{2}{\cos x}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x-\cos x=0,$

2) $\cos x+2+\dfrac{2}{\cos x}=0.$ Разделив первое уравнение на $\cos x\neq 0,$ найдем $\operatorname{tg}x=1,\ x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k=\dfrac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$ Умножив второе уравнение на $\cos x\neq 0,$ получим $\cos^2 x+2\cos x+2\neq 0\ \ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.234. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x\right)=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}2x.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$1+1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4+\frac{4\operatorname{ctg}2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\operatorname{ctg}2x\right)}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 2x}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\operatorname{ctg}2x\right)}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(1-\sin^2 2x\right)+\sin 2x\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos^2 2x-\sin 2x\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}2x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2x=\frac{\pi}{3}+\pi n,$

$x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{6}(3n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1);\ x_2=\frac{\pi}{6}(3n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^3 2x+1.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Так как $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2 a}$, то уравнение принимает вид

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)^2=\cos^3 2x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+1=\cos^3 2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2\sin^2 x}{\sin^4 x}=\cos^3 2x \Leftrightarrow \cos 2x=\cos^3 2x\sin^4 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1-\cos^2 2x\sin^4 x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1-\cos 2x\sin^2 x\right)\left(1+\cos 2x\sin^2 x\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $1-\cos 2x\sin^2 x=0,\ \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x-\sin^4 x+1=0,\ \sin^2 x-2\sin^4 x+1=0,$$

$$2\sin^4 x-\sin^2 x-1=0,$$

решив биквадратное уравнение, имеем $\sin^2 x=1,\ \sin^2 x=-\frac{1}{2},\ \varnothing;$

$\sin x=\pm 1,\ x_2=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

3) $1+\cos 2x\sin^2 x=0,\ 2\sin^4 x-\sin^2 x+1\neq 0\ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1);\ x_2=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.236. $\dfrac{1}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}-6\cos^{-1}x=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Так как $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то заданное уравнение имеет вид

$$\frac{8}{\sin^3 x}-\frac{6}{\cos x}=\frac{(1-\cos x)^3}{\sin^3 x}+\frac{(1+\cos x)^3}{\sin^3 x}.$$

$$8\cos x-6\sin^3 x=\left(1-3\cos x+3\cos^2 x-\cos^3 x+1+3\cos x+3\cos^2 x+\right.$$

$$\left.+\cos^3 x\right)\cos x\Leftrightarrow 8\cos x-6\sin^3 x-2\cos x-6\cos^3 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^3 x+\cos^3 x-\cos x=0\Leftrightarrow\sin^3 x-\cos x\sin^2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 x\,(\sin x-\cos x)=0.$$

Так как $\sin x\neq 0$, то

$\sin x-\cos x=0,\ \sin x=\cos x,\ \operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.237. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-2\sin 2x\cos 2x=0,$

$2\sin 2x(2\sin 5x\sin 7x-\cos 2x)=0\Leftrightarrow$

$\sin 2x(\cos 2x-\cos 12x-\cos 2x)=0,\ \sin 2x\cos 12x=0.$

Отсюда

1) $\sin 2x=0,\ 2x=\pi k,\ x_1=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

2) $\cos 12x=0,\ 12x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x_2=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{12}=\dfrac{\pi}{24}(2n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi k}{2};\ x_2=\dfrac{\pi}{24}(2n+1),$ где k и $n\in Z.$

8.238. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\dfrac{2\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

Решение.

Так как $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ и $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$, то имеем

$\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{2}\sin 5x+\sin 2x=\sin 2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{2}\sin 5x=0,\ \ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sin 5x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\sin 5x=0\Leftrightarrow\ 2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)=0.$

Отсюда

1) $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{8}\right)=0,\ 3x+\dfrac{\pi}{8}=\pi k,\ x_1=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z;$

2) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)=0,\ 2x-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x_2=\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{3};\ x_2=\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2},$ где k и $n\in Z.$

8.239. $3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)+3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}.$

Решение.

Из условия имеем

$3\sin^2\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}+3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0,$

$$3\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(3\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда 1) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$; 2) $3\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0$.

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1,\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k-1),\ k\in Z.$

2) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{3},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l=\frac{\pi}{3}(6l\pm1),\ l\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1);\ x_2=\frac{\pi}{3}(6l\pm1)$, где k и $l\in Z$.

8.240. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\neq 0.\end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то имеем

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}-\sqrt{2}\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}-\sqrt{2}\cos x=0,\ \frac{1-\sin^2 x}{\cos x\sin x}-\sqrt{2}\cos x=0,$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos x\sin x}-\sqrt{2}\cos x=0,\ \cos^2 x-\sqrt{2}\cos^2 x\sin x=0,$$

$$\cos^2 x\left(1-\sqrt{2}\sin x\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z;$

2) $1-\sqrt{2}\sin x=0,\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1);\ x_2=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,$ где k и $n\in Z.$

8.241. $\mathrm{tg}^3 z+\mathrm{ctg}^3 z-8\sin^{-3}2z=12.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2z\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\mathrm{tg}^3 z+\mathrm{ctg}^3 z-\frac{8}{\left(\frac{2\mathrm{ctg}z}{1+\mathrm{ctg}^2 z}\right)^3}=12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^3 z+\mathrm{ctg}^3 z-\frac{(1+\mathrm{ctg}^2 z)^3}{\mathrm{ctg}^3 z}=12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\mathrm{ctg}^6 z-1-3\mathrm{ctg}^2 z-3\mathrm{ctg}^4 z-\mathrm{ctg}^6 z-12\mathrm{ctg}^3 z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{ctg}^4 z+4\mathrm{ctg}^3 z+\mathrm{ctg}^2 z=0\Leftrightarrow \mathrm{ctg}^2 z(\mathrm{ctg}^2 z+1+4\mathrm{ctg}z)=0.$$

Так как $\mathrm{ctg}z\neq 0$, то

$$\mathrm{ctg}^2 z+1+4\mathrm{ctg}z=0,\ \frac{1}{\sin^2 z}+\frac{4\cos z}{\sin z}=0,\ 4\sin z\cos z+1=0,\ 2\sin 2z=-1,$$

$$\sin 2z=-\frac{1}{2},\ 2z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.242. $\frac{1}{\mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}2x}-\frac{1}{\mathrm{ctg}5x+\mathrm{ctg}2x}=\mathrm{tg}3x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0,\\ \mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}2x\neq 0,\\ \mathrm{ctg}5x+\mathrm{ctg}2x\neq 0,\\ \cos 5x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \sin 5x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0.\end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, то имеем

$$\frac{\cos 5x\cos 2x}{\sin 7x}-\frac{\sin 5x\sin 2x}{\sin 7x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 5x\cos 2x-\sin 5x\sin 2x}{\sin 7x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cos 7x}{\sin 7x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0,$$

$$\frac{\cos 7x\cos 3x-\sin 3x\sin 7x}{\sin 7x\cos 3x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cos 10x}{\sin 7x\cos 3x}=0 \Rightarrow \cos 10x=0,$$

$\sin 7x\cos 3x\neq 0, 10x=\frac{\pi}{2}+\pi k, x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}=\frac{\pi}{20}(2k+1), k\neq 5l+2,$ так как в противном случае $\cos 2x=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{20}(2k+1), k\neq 5l+2, k$ и $l\in Z$.

8.243. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}+4\cos^{-1}2z=\frac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-1}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin z\neq 0,\\ \operatorname{tg}\frac{z}{2}\neq\pm 1.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}-\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}+\frac{4}{\cos 2z}+2\operatorname{tg}z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}+\frac{4}{\cos 2z}+2\operatorname{tg}z=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{ctg}z+2\operatorname{tg}z+\frac{4}{\cos 2z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos z}{\sin z}+\frac{\sin z}{\cos z}+\frac{2}{\cos 2z}=0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\sin z\cos z}+\frac{2}{\cos 2z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2z}+\frac{2}{\cos 2z}=0 \Leftrightarrow \cos 2z+\sin 2z=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}2z=-1,$$

$$2z=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ z=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4k-1),\ k\in Z$$

Ответ: $z=\frac{\pi}{8}(4k-1),\ k\in Z$

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0.$

Из условия имеем

$$\frac{(\cos^2 x)^2}{(\sin^2 x)^2} + 1 - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2} + 1 - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos 2x)^2}{(1-\cos 2x)^2} + (1-\cos 2x)(1+\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)\left(\frac{1+\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2} + (1-\cos 2x)\right) = 0.$$

Отсюда 1) $1+\cos 2x = 0$, 2) $\dfrac{1+\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2} + (1-\cos 2x) = 0.$

Из первого уравнения находим

$$\cos 2x = -1,\ 2x = \pi + 2\pi k,\ x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z.$$

Умножив второе уравнение на $(1-\cos 2x)^2 \neq 0$, имеем

$$1 + \cos 2x + (1-\cos 2x)^3 = 0,\ \varnothing.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z.$

8.245. $\dfrac{4\sin^2 \frac{t}{2} - 1}{\cos t} = \operatorname{tg} t(1 - 2\cos t).$

Решение.

ОДЗ: $\cos t \neq 0.$

Так как $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, то имеем:

$$\frac{2(1-\cos t)-1}{\cos t}-\frac{\sin t(1-2\cos t)}{\cos t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2\cos t-\sin t(1-2\cos t)}{\cos t}=0 \Leftrightarrow (1-2\cos t)(1-\sin t)=0,$$

при $\cos t \neq 0$. Тогда

1) $1-2\cos t=0,\ \cos t=\frac{1}{2},\ t_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\ k\in Z;$

2) $1-\sin t=0,\ \sin t=1,\ t_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$ t_2 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\ k\in Z.$

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\frac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+2\cos 2z=0.$

Решение.

Из условия имеем:

$$6\left(\sin^2 z\right)^2-\left(1-\cos^2 2z\right)-10\left(\cos^2 z\right)^2+4\cos 2z=0.$$

Так как $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, то получаем

$$6\cdot\frac{1}{4}(1-\cos 2z)^2-1+\cos^2 2z-10\cdot\frac{1}{4}(1+\cos 2z)^2+4\cos 2z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\cos 2z)^2-2+2\cos^2 2z-5(1+\cos 2z)^2+8\cos 2z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z=-\frac{1}{2},\ 2z=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.247. $\frac{\cos^3 3t}{\operatorname{tg} t}+\frac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t}=0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \cos 3t\neq 0,\\ \operatorname{tg} t\neq 0,\\ \operatorname{tg} 3t\neq 0.\end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos^2 3t\cos t}{\sin t}+\frac{\cos^2 t\cos 3t}{\sin 3t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 3t\cos t\sin 3t+\cos^2 t\cos 3t\sin t}{\sin t\sin 3t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3t\cos t\,(\sin 3t\cos 3t+\sin t\cos t)}{\sin t\sin 3t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t\cos t(\sin 3t\cos 3t+\sin t\cos t)=0.$$

Так как $\cos 3t\neq 0, \cos t\neq 0$, то

$$\sin 3t\cos 3t+\sin t\cos t=0, \frac{\sin 6t}{2}+\frac{\sin 2t}{2}=0,$$

$$\sin 6t+\sin 2t=0 \Leftrightarrow 2\sin 4t\cos 2t=0.$$

Тогда

$$\sin 4t=0, 4t=\pi l, t_1=\frac{\pi l}{4}, l\in Z;\ \cos 2t=0,\ 2t=\frac{\pi}{2}+\pi m,$$

$t_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}=\frac{\pi}{4}(2m+1)$, $m\in Z; t_1$ не подходит по ОДЗ при $l=2k$, а при $l=2k+1$ получаем серию t_2.

Ответ: $t=\frac{\pi}{4}(2m+1), m\in Z$.

8.248. $\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1} t-1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin t\neq 0,\\ \cos 2t\neq -1,\\ \cos t\neq -1.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2\sin t\cos t}{1+\cos^2 t-\sin^2 t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}-\frac{1}{\sin t}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}-\frac{1}{\sin t}+1=0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 t}{\cos t(1+\cos t)}-\frac{1}{\sin t}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3 t-\cos t-\cos^2 t+\sin t\cos t+\cos^2 t\sin t}{\cos t(1+\cos t)\sin t}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\sin^3 t + \cos^2 t \sin t\right) - \cos t + \left(\sin t \cos t - \cos^2 t\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) - \cos t + \cos t(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin t - \cos t) + \cos t(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow (\sin t - \cos t)(1 + \cos t) = 0.$

Тогда 1) $\sin t - \cos t = 0$, 2) $1 + \cos t = 0$. Разделив первое уравнение на $\cos t \neq 0$, получим $\operatorname{tg} t = 1$, $t_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$. Из второго уравнения имеем $\cos t = -1$, $t_2 = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; t_2 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $t = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z.$

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x + \sin^4 2x}{\cos^4 2x - \sin^4 2x} - \dfrac{1}{2}\cos 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1} 4x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin 4x \neq 0, \\ \cos^4 2x - \sin^4 2x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x\right)^2 - 2\cos^2 2x\ \cos^2 2x}{\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x\right)\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)} - \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sin 4x} = 0 \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 4\sin^2 2x \cos^2 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} - \cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0,$$

$$\frac{2 - \sin^2 4x}{\cos 4x} - \cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0,$$

$$\frac{2 - \left(1 - \cos^2 4x\right) - \cos^2 4x}{\cos 4x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0,\quad \frac{1}{\cos 4x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 4x = \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{12}(3k+1),\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12}(3k+1),\ k \in Z.$

8.250. $\cos^{-4} z = \frac{160}{9} - 2\sin^{-2} z(\operatorname{ctg}2z\operatorname{ctg}z + 1)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2z \neq 0, \\ \sin z \neq 0. \end{cases}$

Имеем

$$\frac{1}{\cos^4 z} = \frac{160}{9} - \frac{2}{\sin^2 z} \cdot \left(\frac{\cos 2z \cos z}{\sin 2z \sin z} + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^4 z} + \frac{2(\cos 2z \cos z + \sin 2z \sin z)}{\sin^2 z 2 \sin z \cos z \sin z} = \frac{160}{9}.$$

Так как $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, то

$$\frac{1}{\cos^4 z} + \frac{\cos z}{\cos z \sin^4 z} = \frac{160}{9}, \ \frac{1}{\cos^4 z} + \frac{1}{\sin^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 z + \cos^4 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{\left(\sin^2 z + \cos^2 z\right)^2 - 2\sin^2 z \cos^2 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin^2 z \cos^2 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{2 - 4\sin^2 z \cos^2 z}{16 \sin^4 z \cos^4 z} = \frac{20}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 2z}{\sin^4 2z} - \frac{20}{9} = 0 \Leftrightarrow 20\sin^4 2z + 9\sin^2 2z - 18 = 0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\sin 2z$, получим $\sin 2z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2z = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $z = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

Ответ: $z = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

8.251. $\cos^{-3} t \sin^{-3} t - \operatorname{tg}^3 t - \operatorname{ctg}^3 t = 2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin 2t \neq 0, \\ \cos 2t \neq 0. \end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, то исходное уравнение принимает вид

$$\frac{8}{\sin^3 2t} - \frac{(1 - \cos 2t)^3}{\sin^3 2t} - \frac{(1 + \cos 2t)^3}{\sin^3 2t} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t},$$

$$\frac{8-1+3\cos 2t-3\cos^2 t+\cos^3 2t-1-3\cos 2t-3\cos^2 2t-\cos^3 2t}{\sin^3 2t}=\frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t},$$

$$\frac{6\left(1-\cos^2 2t\right)}{\sin^3 2t}=\frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t},\ \frac{3\sin^2 2t}{\sin^3 2t}=\frac{\sqrt{3}}{\cos 2t}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2t=\frac{\sqrt{3}}{3},\ 2t=\frac{\pi}{3}+\pi k,$$

$$t=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{6}(3k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}(3k+1),\ k\in Z.$

8.252. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, то имеем

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}-(1-\cos 2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}-1+\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x+1-\cos 2x+\sin 2x\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x-\cos 2x++\sin 2x\cos 2x=0\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x-1+\sin 2x)=0.$$

Отсюда 1) $\cos 2x=0$, 2) $\cos 2x-1+\sin 2x=0.$

Из первого уравнения находим

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+2\sin x\cos x=0,$$

$$-2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow -2\sin x(\sin x-\cos x)=0.$$

Получаем $\sin x=0,\ x_2=\pi n,\ n\in Z;$ x_2 не удовлетворяет уравнению;

$\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1,\ x_3=\frac{\pi}{4}+\pi l=\frac{\pi}{4}(4l+1),\ l\in Z;$ x_3 не входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.253. $\sin 3t - \sin t = \dfrac{8\cos t\,\mathrm{ctg}2t}{4-\sin^{-2} t}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2t \neq 0;\\ \sin t \neq \pm\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Так как $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, то имеем

$$2\sin t\cos 2t = \frac{\dfrac{8\cos t\cos 2t}{\sin 2t}}{4-\dfrac{1}{\sin^2 t}} \Leftrightarrow 2\sin t\cos 2t - \frac{8\cos t\cos 2t\sin^2 t}{2\sin t\cos t\left(4\sin^2 t-1\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\cos 2t\cdot\left(1-\frac{2}{4\sin^2 t-1}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2t = 0,\ 2t = \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1 = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2} = \dfrac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $1-\dfrac{2}{4\sin^2 t-1}=0,\ \sin^2 t = \dfrac{3}{4},\ \sin t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ t_2 = \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z.$

Ответ: $t_1 = \dfrac{\pi}{4}(2k+1),\ t_2 = \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi l$, где k и $l\in Z$.

8.254. $\sin^2 2x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)+2\cos^3 2x=0.$

Решение.

Из условия имеем

$$-\sin^2 2x\sin 2x+3\sin 2x\cos^2 2x+2\cos^3 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 2x-3\sin 2x\cos^2 2x-2\cos^3 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^3 2x-3\,\mathrm{tg}2x-2=0\Leftrightarrow\left(\mathrm{tg}^3 2x-2\,\mathrm{tg}2x\right)-2\left(\mathrm{tg}2x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}2x\left(\mathrm{tg}2x-1\right)\left(\mathrm{tg}2x+1\right)-2\left(\mathrm{tg}2x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\mathrm{tg}2x+1\right)\left(\mathrm{tg}^2 2x-\mathrm{tg}2x-2\right)=0.$$

Отсюда

1) $\mathrm{tg}2x+1=0,\ \mathrm{tg}2x=-1,\ 2x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{\pi}{8}(4k-1),$
$k\in Z;$

2) $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2 = 0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} 2x$, получаем $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$, $x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}$, $l \in Z$;

$\operatorname{tg} 2x = 2, 2x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x_3 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x_1 = x_2$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k-1)$; $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, где k и $n \in Z$.

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3) = 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos(x+1) \neq 0, \\ \sin(2x+3) \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем

$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x+1) - \operatorname{tg}(2x+3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-\sin(x+2)}{\cos(x+1)\cos(2x+3)} = 0 \Rightarrow \sin(x+2) = 0, x+2 = \pi k,$

$x = -2 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = -2 + \pi k$, $k \in Z$.

8.256. $\frac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2} - 2\cos^{-2} z - 1 = 0$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos z \neq 0, \\ \cos 2z \neq -1. \end{cases}$

Имеем $\frac{4(\sin^2 z)^2}{(1+\cos 2z)^2} - \frac{2}{\cos^2 z} - 1 = 0.$

Так как $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, то уравнение принимает вид

$$\frac{4\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2z)\right)^2}{(1+\cos 2z)^2} - \frac{2}{\frac{1}{2}(1+\cos 2z)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos 2z)^2}{(1+\cos 2z)^2}-\frac{4}{1+\cos 2z}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos 2z)^2-4(1+\cos 2z)-(1+\cos 2z)^2}{(1+\cos 2z)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2z)^2-4(1+\cos 2z)-(1+\cos 2z)^2=0 \Leftrightarrow$$

$\cos 2z=-\frac{1}{2}$, $2z=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $z=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $k\in Z$.

Ответ: $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $k\in Z$.

8.257. $\text{tg}^2\frac{z}{2}+\text{ctg}^2\frac{z}{2}-2=4\text{tg}z$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos z\neq 0,\\ \sin z\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\left(\text{tg}\frac{z}{2}+\text{ctg}\frac{z}{2}\right)^2-2\text{tg}\frac{z}{2}\text{ctg}\frac{z}{2}-2-4\text{tg}z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}+\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2-4-\frac{4\sin z}{\cos z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2\frac{z}{2}+\cos^2\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}\right)^2-4-\frac{4\sin z}{\cos z}=0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 z}-4-\frac{4\sin z}{\cos z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos z-\sin^2 z\cos z-\sin^3 z=0 \Leftrightarrow \cos z\left(1-\sin^2 z\right)-\sin^3 z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 z-\sin^3 z=0 \Leftrightarrow (\cos z-\sin z)\left(\cos^2 z+\sin z\cos z+\sin^2 z\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos z-\sin z)(1+\sin z\cos z)=0.$$

Отсюда

1) $\cos z-\sin z=0$, $\text{tg}z=1$, $z_1=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n\in Z$;

2) $1+\sin z\cos z=0$, $\frac{1}{2}\sin 2z=-1$, $\sin 2z=-2$, $\varnothing$.

Ответ: $z=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n\in Z$.

8.258. $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 z(2\cos z\cos 3z)+\sin^2 z(2\sin z\sin 3z)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ и

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$, то имеем

$$\cos^2 z(\cos 2z+\cos 4z)+\sin^2 z(\cos 2z-\cos 4z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos^2 z\cos 2z+\sin^2 z\cos 2z)+(\cos^2 z\cos 4z-\sin^2 z\cos 4z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2z(\cos^2 z+\sin^2 z)+\cos 4z(\cos^2 z-\sin^2 z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2z+\cos 4z\cos 2z=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos 2z(1+\cos 4z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2z(1+2\cos^2 2z-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2\cos^3 2z=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos^3 2z=\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2z=\frac{\sqrt{2}}{2}, 2z=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ z=\pm\frac{\pi}{8}+\pi k=\frac{\pi}{8}(8k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm 1),\ k\in Z.$

8.259. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ}: \sin x\neq 0,\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos(\frac{\pi}{4}+x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\pi n,\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\pi n.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x+2\cos x\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin^3 x+2\sin x\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x-\sin^3 x+2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)^2(\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x)+(\cos x-\sin x)^2\times$$
$$\times(\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\cos x(2\cos x+\sin x)=0.$$

Отсюда

1) $\cos x-\sin x=0$, $\sin x=\cos x$, $\operatorname{tg}x=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi l=\frac{\pi}{4}(4l+1), l\in Z$;

2) $2\cos x+\sin x=0, \operatorname{tg}x=-2$, $x_2=-\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$.

3) $\cos x=0$; $x_3=\frac{\pi}{2}(2m+1)$, $m\in Z$.

Ответ:

$x_1=\frac{\pi}{4}(4l+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}2+\pi n, x_3=\frac{\pi}{2}(2m+1)$, где l, n и $m\in Z$.

8.260. $\frac{1}{\operatorname{tg}3z+\operatorname{tg}4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\frac{1}{\operatorname{ctg}3z+\operatorname{ctg}4z}$.

Решение.

ОДЗ. $\begin{cases}\operatorname{tg}3z+\operatorname{tg}4z\neq 0,\\ \operatorname{ctg}3z+\operatorname{ctg}4z\neq 0,\\ \sin 6z\neq 0,\\ \sin 8z\neq 0.\end{cases}$

По формулам $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ получаем

$$\frac{1}{\frac{\sin 7z}{\cos 3z\cos 4z}}+\frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z}=\frac{1}{\frac{\sin 7z}{\sin 3z\sin 4z}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos 3z \cos 4z}{\sin 7z} + \dfrac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = \dfrac{\sin 3z \sin 4z}{\sin 7z}, \\ \sin 7z \neq 0, \\ \cos 3z \neq 0, \\ \cos 4z \neq 0, \\ \sin 3z \neq 0, \\ \sin 4z \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos 3z \cos 4z}{\sin 7z} - \dfrac{\sin 3z \sin 4z}{\sin 7z} + \dfrac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ 7z \neq \pi k_1,\ k_1 \in Z, \\ 3z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k_2,\ k_2 \in Z, \\ 4z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k_3,\ k_3 \in Z, \\ 3z \neq \pi k_4,\ k_4 \in Z, \\ 4z \neq \pi k_5,\ k_5 \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos 3z \cos 4z - \sin 3z \sin 4z}{\sin 7z} + \dfrac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ z \neq \dfrac{\pi k_1}{7},\ k_1 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi}{6}(2k_2 + 1),\ k_2 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi}{8}(2k_3 + 1),\ k_3 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi k_4}{3},\ k_4 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi k_5}{4},\ k_5 \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos 7z}{\sin 7z} + \dfrac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ z \neq \dfrac{\pi k_1}{7},\ k_1 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi k_6}{6},\ k_6 \in Z, \\ z \neq \dfrac{\pi k_7}{8},\ k_7 \in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\sin 7z\cos 7z+\cos^2 7z}{\sin^2 7z}=0,\ \frac{\cos 7z(\sin 7z+\cos 7z)}{\sin^2 7z}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos 7z(\sin 7z+\cos 7z)=0.$

Тогда

1) $\cos 7z=0,\ 7z=\frac{\pi}{2}+\pi k_8,\ z_1=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k_8}{7}=\frac{\pi}{14}(2k_8+1),\ k_8\in Z;$

2) $\sin 7z+\cos 7z=0\Leftrightarrow\ 1+\mathrm{ctg}7z=0,\ \mathrm{ctg}7z=-1,\ 7z=\frac{3\pi}{4}+\pi k_9,$

$z_2=\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi k_9}{7}=\frac{\pi}{28}(4k_9+3),\ k_9\in Z.$

Исключим из решений $z_1=\frac{\pi}{14}(2k_8+1),\ k_8\in Z$ те из них, которые удовлетворяют условиям $z=\frac{\pi k_1}{7},\ k_1\in Z,\ z=\frac{\pi k_6}{6},\ k_6\in Z$ и $z=\frac{\pi k_7}{8},\ k_7\in Z.$

Имеем:

1) $\frac{\pi}{14}(2k_8+1)\neq\frac{\pi k_1}{7},\ 2k_8+1\neq 2k_1,$ что истинно для всех $k_8\in Z$ и $k_1\in Z$, так как левая часть неравенства нечетная, а правая — четная;

2) $\frac{\pi}{14}(2k_8+1)\neq\frac{\pi k_6}{6},\ 6k_8+3\neq 7k_6,$ что верно для $k_6=6k_{10}+3,\ k_{10}\in Z.$ Тогда $6k_8+3\neq 7(6k_{10}+3)$, откуда $k_8\neq 7k_{10}+3;$

3) $\frac{\pi}{14}(2k_8+1)\neq\frac{\pi k_7}{8},\ 8k_8+4\neq 7k_7,$ что истинно для $k_7=8k_{10}+4,$ $k_{10}\in Z.$ Тогда $8k_8+4\neq 7(8k_{10}+4)$, откуда $k_8\neq 7k_{10}+3.$

Получили $z_1=\frac{\pi}{14}(2k_8+1)$, где $2k_8+1\neq 7k_{10},\ k_8,\ k_{10}\in Z.$

Теперь исключаем из решений $z_2=\frac{\pi}{28}(4k_9+3),\ k_9\in Z$ те из них, которые удовлетворяют условиям $z=\frac{\pi k_1}{7},\ k_1\in Z,\ z=\frac{\pi k_6}{6},\ k_6\in Z$ и $z=\frac{\pi k_7}{8},\ k_7\in Z.$

Имеем:

1) $\frac{\pi}{28}(4k_9+3)\neq\frac{\pi k_1}{7}, 4k_9+3\neq 4k_1$, что истинно для всех $k_9\in Z$ и $k_1\in Z$, так как левая часть неравенства нечетная, а правая — четная;

2) $\frac{\pi}{28}(4k_9+3)\neq\frac{\pi k_6}{6}, 12k_9+9\neq 14k_6$, что верно для всех $k_9\in Z$ и $k_6\in Z$;

3) $\frac{\pi}{28}(4k_9+3)\neq\frac{\pi k_7}{8},\ 8k_9+6\neq 7k_7$. Можно показать, что $k_7=8k_{11}+2,\ k_{11}\in Z$. Тогда $k_9\neq 7k_{11}+1, k_{11}\in Z$.

Получили $z_2=\frac{3\pi}{28}(4k_9+3)$, где $4k_3+3\neq 7k_{11}, k_9, k_{11}\in Z$.

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{14}(2k+1), 2k+1\neq 7l; z_2=\frac{\pi}{28}(3+4k), 3+4k\neq 7l, k$ и $l\in Z, l=\pm1, \pm3,\ldots$.

8.261. $(2\cos 2t+5)\cos^4 t-(2\cos 2t+5)\sin^4 t=3.$

Решение.

Из условия имеем:

$$(2\cos 2t+5)(\cos^4 t-\sin^4 t)-3=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\cos 2t+5)(\cos^2 t+\sin^2 t)(\cos^2 t-\sin^2 t)-3=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\cos 2t+5)\cos 2t-3=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2t+5\cos 2t-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 2t$, находим $\cos 2t=-3,\varnothing;\cos 2t=\frac{1}{2}, 2t=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, t=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k\pm1), k\in Z.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1), k\in Z.$

8.262. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg}(z+60^\circ)\operatorname{tg}(z+120^\circ)=\sqrt{3}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\cos z\neq 0,\\ \cos(z+60^\circ)\neq 0,\\ \cos(z+120^\circ)\neq 0.\end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin z \sin(z+60^\circ)\sin(z+120^\circ)}{\cos z \cos(z+60^\circ)\cos(z+120^\circ)} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z\left(2\sin(z+60^\circ)\sin(z+120^\circ)\right) - \sqrt{3}\cdot\cos z\left(2\cos(z+60^\circ)\cos(z+120^\circ)\right) = 0.$$

По формулам

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

и

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

имеем:

$$\sin z(\cos(-60^\circ) - \cos(180^\circ+2z)) - \sqrt{3}\cos z\cdot(\cos(-60^\circ) + \cos(180^\circ+2z)) = 0,$$

$$\sin z\left(\frac{1}{2} + \cos 2z\right) - \sqrt{3}\cos z\left(\frac{1}{2} - \cos 2z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin z}{2} + \sin z\cos 2z - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos z + \sqrt{3}\cos z\cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z + 2\sin z\cos 2z - \sqrt{3}\cos z + \sqrt{3}(2\cos z\cos 2z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z - \sin z + \sin 3z - \sqrt{3}\cos z + \sqrt{3}\cos z + \sqrt{3}\cos 3z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3z + \sqrt{3}\cos 3z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3z = -\sqrt{3},\ 3z = -60^\circ + 180^\circ k,$$

$$z = -20^\circ + 60^\circ k,$$

Ответ: $z = -20^\circ + 60^\circ k,\ k \in Z.$

8.263. $\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2.$

Решение.

Уравнение равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases}\cos 3x \ne 1,\\ \cos\frac{5x}{2} = 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x = 2\pi k,\ k \in Z,\\ \frac{5x}{2} = 2\pi n,\ n \in Z,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z,\\ x = \frac{4\pi n}{5},\ n \in Z.\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}k = 6m,\\ n = 5m.\end{matrix}$$

$$\frac{2\pi k}{3} = \frac{4\pi n}{5},\ 5\pi k = 6\pi n,\ 5k = 6n.$$

Ответ: $x = 4\pi m,\ m \in Z.$

8.264. $1-\dfrac{2(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)}{\cos^{-2} t}=\sin^4 t-\cos^4 t.$

Решение.

ОДЗ: $\cos t\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$1-\frac{2\left(\cos 2t-\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot 2\sin t\cos t\right)}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}+\left(\sin^4 t-\cos^4 t\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2\left(\cos 2t-2\sin^2 t\right)\cos^2 t+\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\cos 2t-(1-\cos 2t)\right)(1+\cos 2t)+\cos 2t=0,$$

$$1-(2\cos 2t-1)(1+\cos 2t)+\cos 2t=0\Leftrightarrow\ \cos^2 2t=1,\ \ \cos 2t=\pm 1,$$

$$2t=\pi k,\ \ t=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Учитывая ОДЗ, $t=\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $t=\pi k,\ k\in Z.$

8.265. $2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=\cos 2x.$

Решение.

Имеем

$$2\left(\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3\right)-3\left(\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2\right)-\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)-3\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\sin^2 x\cos^2 x\right)-\cos 2x=0\Leftrightarrow\ 2\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right)-$$

$$-3\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)-\cos 2x=0\Leftrightarrow\ 2-6\sin^2 x\cos^2 x-3+6\sin^2 x\times$$

$$\times\cos^2 x-\cos 2x=0\Leftrightarrow\ \cos 2x=-1,\ \ 2x=\pi+2\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z.$

8.266. $\cos^3 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\sin^3 x+4\sin x+4=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\cos^3 x+\sin x\cos x-\cos x\sin x\sin^2 x+4(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^3 x+\sin x\cos x(1-\sin^2 x)+4(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^3 x+\sin x\cos^3 x+4(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^3 x(1+\sin x)+4(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(\cos^3 x+4)=0.$

Отсюда

$\sin x+1=0, \sin x=-1, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k-1), k\in Z, \cos^3 x+4\neq 0.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k-1),\ k\in Z.$

8.267. $\frac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x.$

Решение.

ОДЗ: $2\sin x+3\cos x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$\frac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 x+4\sin^3 x-4\sin^2 x\cos x-6\sin x\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x-2\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x+\cos^3 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{tg}^3 x-2\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{tg}x+1=0.$

Пусть $\mathrm{tg}x=y$. Имеем

$2y^3-2y^2-3y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y^3+1)+y^2(y+1)-3y(y+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y+1)+y^2(y+1)-3y(y+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y+1+y^2-3y)=0,\ (y+1)(2y^2-4y+1)=0.$

Отсюда $y+1=0,\ y_1=-1;\ 2y^2-4y+1=0,\ y_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2};\ y_3=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Получили

$\operatorname{tg}x=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z;$

$\operatorname{tg}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi l,\ l\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1);\ x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n;\ x_3=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi l,$ где k, n и $l\in Z$.

8.268. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\sin x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\frac{3x}{2}\neq 0,\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0.\end{cases}$

По формуле $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, имеем

$$\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}-2\sin x=0\Leftrightarrow\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{3x}{2}}-2\cos\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\ \sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}(1-\cos x-\cos 2x)=0\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}\cdot\left(1-\cos x-2\cos^2x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\sin\frac{x}{2}\cdot\left(2\cos^2x+\cos x-2\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\pi k,\ x_1=2\pi k,\ k\in Z;$

2) $2\cos^2x+\cos x-2=0.$ Решив уравнение как квадратное относи-

тельно $\cos x$, получаем $\cos x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1$, $\varnothing$; или $\cos x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$,

$x_2 = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{17}}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x_1 = 2\pi k,\ x_2 = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{17}}{4} + 2\pi n$, где k и $n \in Z$.

8.269. $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1+\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{1 + \frac{\sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\cos x\sin x - \sin^2 x = 0, \Leftrightarrow \sin x(3\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos x - \sin x = 0,\ \mathrm{tg}x = 3,\ x = \mathrm{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z.$

8.270. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0.$

Решение.

Имеем $\sin^2 x(2\sin x\cos 3x)+\cos^2 x(2\cos x\sin 3x)+2\cdot 0{,}375=0.$ По формуле $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, находим

$\sin^2 x(-\sin 2x+\sin 4x)+\cos^2 x(\sin 2x+\sin 4x)+0{,}75=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x\sin 2x+\sin^2 x\sin 4x+\cos^2 x\sin 2x+\cos^2 x\sin 4x+0{,}75=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(-\sin^2 x\sin 2x+\cos^2 x\sin 2x)+(\sin^2 x\sin 4x+\cos^2 x\sin 4x)+0{,}75=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sin 4x(\sin^2 x+\cos^2 x)+0{,}75=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 4x+2\sin 4x+1{,}5=0,\ 3\sin 4x=-1{,}5,\ \sin 4x=-\frac{1}{2},$

$4x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

8.271. $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0.$

Решение.

Из условия имеем $2\sin z\cos z+5(\sin z+\cos z)+1=0.$

Пусть $\sin z+\cos z=y$, тогда $\sin^2 z+2\sin z\cos z+\cos^2 z=y^2$, и уравнение примет вид

$y^2-1+5y+1=0,\ y^2+5y=0,\ y(y+5)=0,\ y_1=0,\ y_2=-5,$

$2\sin z\cos z=-1,\ \sin 2z=-1,\ 2z_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,$

$z_1=-\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z;\ 2\sin z\cos z=24,\ \sin 2z=24,\ \varnothing.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

8.272. $\sin^3 2t+\cos^3 2t+\frac{1}{2}\sin 4t=1.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$(\sin 2t+\cos 2t)(\sin^2 2t-\sin 2t\cos 2t+\cos^2 2t)+\sin 2t\cos 2t-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin 2t+\cos 2t)(1-\sin 2t\cos 2t)-(1-\sin 2t\cos 2t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\sin 2t\cos 2t)(\sin 2t+\cos 2t-1)=0.$

Отсюда

I) $1-\sin 2t\cos 2t=0,\ \frac{1}{2}\sin 4t=1,\ \sin 4t=2,\ \varnothing;$

II) $\sin 2t+\cos 2t-1=0,\ 2\sin t\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t-\cos^2 t-\sin^2 2t=0,$

$2\sin t\cos t-2\sin^2 t=0,\ 2\sin t(\cos t-\sin t)=0 \Rightarrow$

1) $\sin t=0,\ t_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $\cos t-\sin t=0,\ \operatorname{tg} t=1,\ t_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $t_1=\pi k,\ t_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.273. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} 2z=\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} 2z.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos z\neq 0,\\ \cos 2z\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$\frac{\sin z\sin 2z}{\cos z\cos 2z}=\frac{\sin z}{\cos z}+\frac{\sin 2z}{\cos 2z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin z\sin 2z}{\cos z\cos 2z}=\frac{\sin z\cos 2z+\cos z\sin 2z}{\cos z\cos 2z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin z\sin 2z=\sin z\cos 2z+\cos z\sin 2z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin z\cdot 2\sin z\cos z-\sin z(\cos^2 z-\sin^2 z)-\cos z\cdot 2\sin z\cos z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin z(2\sin z\cos z-\cos^2 z+\sin^2 z-2\cos^2 z)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin z(2\sin z\cos z-3\cos^2 z+\sin^2 z)=0.$

Отсюда

1) $\sin z=0,\ z_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $2\sin z\cos z-3\cos^2 z+\sin^2 z=0.$

Разделив это уравнение на $\cos^2 z\neq 0$, имеем

$\operatorname{tg}^2 z+2\operatorname{tg} z-3=0.$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} z$, получим $\operatorname{tg} z = -3$, $z_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z$; $\operatorname{tg} z = 1$, $z_3 = \dfrac{\pi}{4} + \pi l$, $l \in Z$; z_3 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $z_1 = \pi k$, $z_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, где k и $n \in Z$.

8.274. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

Решение.

ОДЗ: $2\cos x - \sin x \neq 0$.

Из условия имеем

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} - \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - 2\cos^3 x + 2\cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x (2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos x = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$;

2) $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x_2 = \dfrac{\pi}{4}(4n-1)$, $n \in Z$, $x_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi l$, $l \in Z$,

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4}(4n-1)$, $x_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi l$, где k, n и $l \in Z$.

8.275. $\dfrac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \dfrac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \sin 4t \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\frac{\cos 4t}{\sin 4t}}{\sin^2 t} + \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\sin^2 4t} = 0, \frac{\cos 4t}{\sin 4t \sin^2 t} + \frac{\cos t}{\sin t \sin^2 4t} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin 4t \cos 4t + \sin t \cos t = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin 8t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 8t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t \cos 3t = 0.$

Отсюда

1) $\sin 5t = 0,\ 5t = \pi k,\ t_1 = \dfrac{\pi k}{5},\ k \in Z;$

2) $\cos 3t = 0,\ 3t = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ t_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3} = \dfrac{\pi}{6}(2n+1),\ n \in Z.$

Учитывая ОДЗ, получим

$t_1 = \dfrac{\pi k}{5},\ k \neq 5l;\ t_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3} = \dfrac{\pi}{6}(2n+1),\ n \neq 3l+1,\ l \in Z.$

Ответ: $t_1 = \dfrac{\pi k}{5}$, $k \neq 5l$; $t_2 = \dfrac{\pi}{6}(2n+1)$, $n \neq 3l+1$, где k, n и $l \in Z$.

8.276. $\operatorname{tg}^4 x = 36\cos^2 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0.$

Из условия имеем

$$\frac{(\sin^2 x)^2}{(\cos^2 x)^2} - 36\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\cos 2x)^2}{(1+\cos 2x)^2} - 36\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2 - 36\cos^2 2x(1+\cos 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2 = 36\cos^2 2x(1+\cos 2x)^2.$$

Отсюда

$$1-\cos 2x = -6\cos 2x(1+\cos 2x)$$

или

$$1-\cos 2x = 6\cos 2x(1+\cos 2x),\ 6\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$$

или

$$6\cos^2 2x + 7\cos 2x - 1 = 0.$$

Решив эти уравнения как квадратные относительно $\cos 2x$, получим

$\cos 2x = -\dfrac{1}{2},\ 2x_1 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ x_1 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$

$\cos 2x = -\dfrac{1}{3},\ 2x_2 = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ x_2 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$

$\cos 2x = \dfrac{-7+\sqrt{73}}{12}$, $2x_3 = \pm \arccos\dfrac{-7+\sqrt{73}}{12} + 2\pi l$,

$x_3 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-7+\sqrt{73}}{12} + \pi l,\ l \in Z;$ $\cos 2x = \dfrac{-7-\sqrt{73}}{12} < -1$, $\varnothing$.

Ответ: $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $x_2 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi n$,

$x_3 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-7+\sqrt{73}}{12} + \pi l$, где k, n и $l \in Z$.

8.277. $\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x - 2\mathrm{tg}2x - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) - 2\mathrm{tg}2x - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - 2\mathrm{tg}2x - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - 2\mathrm{tg}2x - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)}{\sin 2x \cos 2x} - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos 4x}{\sin 4x} - 4\mathrm{tg}4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 4x - \sin^2 4x}{\sin 4x \cos 4x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos 8x}{\sin 8x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ctg}8x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{ctg}8x = -1,\ 8x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{8} = \frac{\pi}{32}(4k+3),\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{32}(4k+3)$, $k \in Z$.

8.278. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$2\sin^2 x(2\sin x\cos 3x)+2\cos^2 x(2\sin 3x\cos x)-3\sin 2x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(-\sin 2x+\sin 4x)+2\cos^2 x(\sin 2x+\sin 4x)-3\sin 2x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x\sin 2x+2\sin^2 x\sin 4x+2\cos^2 x\sin 2x+2\cos^2 x\sin 4x-$
$-3\sin 2x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2\cos^2 x\sin 2x-2\sin^2 x\sin 2x)+(2\sin^2 x\sin 4x+2\cos^2 x\sin 4x)-$

$-3\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin 4x(\sin^2 x+\cos^2 x)-$
$-3\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x+2\sin 4x-3\sin 2x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin 4x-\sin 2x=0.$ Отсюда

1) $\cos 3x=0,\ 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z;$

2) $\sin x=0,\ x=\pi k,\ x_2=\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(2n+1),\ n\in Z;\ x_2=\pi k, k\in Z.$

8.279. $2\cos z\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-z\right)-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin z\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\cos 2z.$

Решение.

Из условия имеем

$-2\cos z\cos^3 z-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin z\sin^3 z-\cos 2z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\cos^4 z-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin^4 z-\cos 2z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(1-\sin^2 z)^2-5\sin^2 z(1-\sin^2 z)+\sin^4 z-(1-\sin^2 z)+\sin^2 z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2+4\sin^2 z-2\sin^4 z-5\sin^2 z+5\sin^4 z+\sin^4 z-1+\sin^2 z+\sin^2 z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^4 z+\sin^2 z-3=0.$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin^2 z$, получим

$\sin^2 z=-1,\ \varnothing;\ \sin^2 z=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$

$z=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

8.280. $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0.$

Решение.

Из условия имеем

$$(2\sin 2x \sin 6x)\cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 4x - \cos 8x)\cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x - 2\cos 8x \cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x - \cos 4x - \cos 12x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 4x - 1) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos 4x = 0,\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k+1),\ k \in Z;$

2) $2\cos 4x - 1 = 0,\ \cos 4x = \frac{1}{2},\ 4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{12}(6n \pm 1),\ n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1);\ x_2 = \frac{\pi}{12}(6n \pm 1)$, где k и $n \in Z.$

8.281. $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5.$

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 7\operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

$$3\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

$$3\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x - 1) - 2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) + 5(\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 5) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1,\ x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1),$$

$k \in Z;\ 3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 5 \neq 0\ \ (D < 0), \varnothing.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z.$

8.282. $5\sin^4 2z-4\sin^2 2z\cos^2 2z-\cos^4 2z+4\cos 4z=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$5\left(\sin^2 2z\right)^2-\sin^2 4z-\left(\cos^2 2z\right)^2+4\cos 4z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot\left(\frac{1}{2}(1-\cos 4z)\right)^2-\left(1-\cos^2 4z\right)-\left(\frac{1}{2}(1-\cos 4z)\right)^2+4\cos 4z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4z+\cos 4z=0,\ \cos 4z(2\cos 4z+1)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 4z=0,\ 4z=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ z_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $2\cos 4z+1=0,\ \cos 4z=-\frac{1}{2},\ 4z=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,$

$$z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{6}(3n\pm 1),\ n\in Z.$$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1);\ z_2=\frac{\pi}{6}(3n\pm 1)$, где k и $n\in Z$.

8.283. $1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}5x-\sqrt{2}\operatorname{tg}2x\cos 3x\cos^{-1}5x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \cos 5x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\left(1+\frac{\sin 2x\sin 5x}{\cos 2x\cos 5x}\right)-\frac{\sqrt{2}\sin 2x\cos 3x}{\cos 2x\cos 5x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 2x\cos 5x+\sin 2x\sin 5x}{\cos 2x\cos 5x}-\frac{\sqrt{2}\sin 2x\cos 3x}{\cos 2x\cos 5x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 3x-\sqrt{2}\sin 2x\cos 3x=0\Leftrightarrow\cos 3x\left(1-\sqrt{2}\sin 2x\right)=0.$$

Отсюда 1) $\cos 3x=0$, 2) $1-\sqrt{2}\sin 2x=0.$

1) $\cos 3x=0\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x=0,\ \cos x\left(4\cos^2 x-3\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\cos x\neq 0),\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1),\ n\in Z.$$

2) $1-\sqrt{2}\sin 2x=0$, $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$,

$$x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, где n и $k\in Z$.

8.284. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$.

Решение.

Имеем

$$\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)-\cos^2 2x-\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-3\cos^2 x\sin^2 x-\cos^2 2x-\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16-12\left(4\cos^2 x\sin^2 x\right)-16\cos^2 2x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16-12\sin^2 2x-16\cos^2 2x-1=0,$$

$$15-12\left(1-\cos^2 2x\right)-16\cos^2 2x=0,$$

$$15-12+12\cos^2 2x-16\cos^2 2x=0,\ 4\cos^2 2x=3,\ \cos^2 2x=\frac{3}{4},$$

$$\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$, $k\in Z$.

8.285. $\frac{1}{\sin^2 2x}+\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-4=0$.

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sin^2 2x}+\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)-4=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}-4=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 2x}-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-4=0\Leftrightarrow 1-2\sin 2x\cos 2x-4\sin^2 2x=0,$$

$\cos^2 2x+\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x-4\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x-2\sin 2x\cos 2x-3\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 2x-2\operatorname{ctg} 2x-3=0.$

Решим это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{ctg} 2x$:

$\operatorname{ctg} 2x=-1,\ 2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

$\operatorname{ctg} 2x=3,\ 2x=\operatorname{arcctg} 3+\pi n,\ x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3+\frac{\pi n}{2}$, где k и $n\in Z$.

8.286. $\operatorname{tg} 5z-\operatorname{tg} 3z-2\operatorname{tg} 2z=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 5z\neq 0,\\ \cos 3z\neq 0,\\ \cos 2z\neq 0.\end{cases}$

По формуле $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ имеем

$\frac{\sin 2z}{\cos 5z\cos 3z}-\frac{2\sin 2z}{\cos 2z}=0 \Leftrightarrow \sin 2z(\cos 2z-2\cos 5z\cos 3z)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2z\cdot(\cos 2z-\cos 2z-\cos 8z)=0, -\sin 2z\cos 8z=0.$

Отсюда

1) $\sin 2z=0,\ 2z=\pi k,\ z_1=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

2) $\cos 8z=0,\ 8z=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ z_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}=\frac{\pi}{16}(2n+1),\ n\in Z.$

Учитывая ОДЗ, получим $z_1=\pi k, k\in Z$.

Ответ: $z_1=\pi k;\ z_2=\frac{\pi}{16}(2n+1)$, k и $n\in Z$.

8.287. $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}-2=0.$

Решение.

$\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos\frac{3x}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=2\pi k,\\ \frac{3x}{4}=2\pi l,\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{8\pi l}{3}, l \in Z \end{cases} \Rightarrow \pi k = \frac{8\pi l}{3},\ 3k = 8l,\ k = 8m,\ l = 3m,\ x = 8\pi m,\ m \in Z.$$

Ответ: $x = 8\pi m,\ m \in Z.$

8.288. $(\mathrm{ctg} z - 1)(1 + \sin 2z) = 1 + \mathrm{ctg} z.$

Решение.

ОДЗ: $\sin z \neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\cos z}{\sin z} - 1\right) \cdot \left(\cos^2 z + 2\sin z \cos z + \sin^2 z\right) - \left(1 + \frac{\cos z}{\sin z}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)^2}{\sin z} - \frac{\sin z + \cos z}{\sin z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z + \cos z)\left((\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z + \cos z)\left(\cos^2 z - \sin^2 z - \cos^2 z - \sin^2 z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(\sin z + \cos z)\sin^2 z = 0.$$

Так как $\sin z \neq 0$, то

$\sin z + \cos z = 0,\ \sin z = -\cos z,\ \mathrm{tg} z = -1,$

$$z = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n - 1),\ n \in Z.$$

Ответ: $z = \dfrac{\pi}{4}(4n - 1),\ n \in Z.$

8.289. $\mathrm{tg} x \cdot \dfrac{3 - \mathrm{tg}^2 x}{1 - 3\mathrm{tg}^2 x} = \sin 6x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ 1 - 3\mathrm{tg}^2 x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{3 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \sin 6x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x} - \sin 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)}{\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)}-\sin 6x=0 \Leftrightarrow \frac{3\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x-3\cos x}-\sin 6x=0.$$

Так как $3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x$ и $4\cos^3 x-3\cos x=\cos 3x$, то

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-2\sin 3x\cos 3x=0,\ \sin 3x\left(1-2\cos^2 3x\right)=0,\ -\sin 3x\cos 6x=0.$$

Отсюда

1) $\sin 3x=0,\ 3x=\pi k,\ x_1=\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$

2) $\cos 6x=0,\ 6x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{6},\ x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}=\frac{\pi}{12}(2n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{3};\ x_2=\frac{\pi}{12}(2n+1),\ k,n\in Z.$

8.290. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)=\frac{1}{4}.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\left(\sin^2 3t\right)^2+\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)\right)^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 6t)\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)\right)\right)^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos 6t)^2+(1+\sin 6t)^2-1=0,$$

$$1-2\cos 6t+\cos^2 6t+1+2\sin 6t+\sin^2 6t-1=0,\ 1-\cos 6t+\sin 6t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos^2 3t+\sin^2 3t-\cos^2 3t+\sin^2 3t+2\sin 3t\cos 3t=0,$$

$$2\sin^2 3t+2\sin 3t\cos 3t=0,\ 2\sin 3t\cdot(\sin 3t+\cos 3t)=0.$$

Отсюда 1) $\sin 3t=0$, 2) $\sin 3t+\cos 3t=0.$

1) $3t=\pi k,\ t_1=\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$

2) $\operatorname{tg}3t=-1,\ 3t=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ t_2=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{12}(4n-1),\ n\in Z.$

Ответ: $t_1=\frac{\pi k}{3};\ t_2=\frac{\pi}{12}(4n-1)$, где k и $n\in Z.$

8.291. $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x.$

Решение.

Имеем:

$$\cos 10x + (1 + \cos 8x) + 3(2\cos 3x \cos x) = \cos x + 2(2\cos x \cos 3x)\cos^2 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x + 1 + \cos 8x + 3(\cos 2x + \cos 4x) =$$

$$= \cos x + 2(\cos 2x + \cos 4x) \cdot (1 + \cos 6x),$$

$$\cos 10x + 1 + \cos 8x + 3\cos 2x + 3\cos 4x = \cos x + 2\cos 2x +$$

$$+ 2\cos 4x + 2\cos 2x \cos 6x + 2\cos 4x \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x + 1 + \cos 8x + \cos 2x + \cos 4x =$$

$$= \cos x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 2x + \cos 10x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = 1,\ x = 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z.$

8.292. $1 + \sin\frac{t}{2}\sin t - \cos\frac{t}{2}\sin^2 t = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right).$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$1 + \sin\frac{t}{2}\sin t - \cos\frac{t}{2}\sin^2 t = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{t}{2}\sin t - \cos\frac{t}{2}\sin^2 t - \sin t = 0,\ \sin t \cdot \left(\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\sin t - 1\right) = 0.$$

Отсюда 1) $\sin t = 0$, 2) $\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\sin t - 1 = 0.$

1) $t_1 = \pi k,\ k \in Z.$

2) $\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2} \cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 1 = 0,\ \sin\frac{t}{2} - 2\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} - 1 = 0,$

$$\sin\frac{t}{2} - 2\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} - 1 = 0,$$

$$\sin^3\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin^3\frac{t}{2} - 1 = 0,\ \sin\frac{t}{2}\left(\sin^2\frac{t}{2} - 1\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - 1\right) \times$$

$$\times \left(\sin^2\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} + 1\right) = 0,\ \sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{t}{2} + 1\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - 1\right) \times$$

$$\times\left(\sin^2\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}+1\right)=0,\ \left(\sin\frac{t}{2}-1\right)\left(2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}+1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin\frac{t}{2}-1=0,\ \sin\frac{t}{2}=1,\ \frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ t_2=\pi+4\pi k,\ k\in Z;$ t_2 входит в t_1;

2) $2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}+1\neq 0\ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $x=\pi k,\ k\in Z.$

8.293. $\dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg}x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x-\frac{5\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x+\frac{5\pi}{6}+x\right)\right)}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi-\cos(\pi+2x)\right)+2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+2\cos 2x+2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos^2 x-2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-1=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x$, имеем $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3},\ x_1=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z,\ \operatorname{tg}x=1,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1),$ где k и $n\in Z.$

8.294. $\dfrac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg}t(1+2\cos 2t).$

Решение.

ОДЗ: $\sin t\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\frac{\cos t\left(1+2\left(2\cos^2 t-1\right)\right)}{\sin t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 t-1=\cos t\left(4\cos^2 t-1\right),\ \left(4\cos^2 t-1\right)-\cos t\left(4\cos^2 t-1\right)=0,$$

$$\left(4\cos^2 t-1\right)\left(1-\cos t\right)=0.$$

Отсюда

1) $4\cos^2 t-1=0, \cos^2 t=\frac{1}{4}, \cos t=\pm\frac{1}{2}, t_1=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm1),\ k\in Z;$

2) $1-\cos t=0,\ \cos t=1$ — не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1),\ k\in Z.$

8.295. $(\sin x+\cos x)^4=2\left(1+\sin^2 x\right)-(\sin x-\cos x)^4.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left((\sin x+\cos x)^2\right)^2+\left((\sin x-\cos x)^2\right)^2=2\left(1+\sin^2 x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)^2+\left(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)^2=$$

$$=2\left(1+\sin^2 x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+2\sin x\cos x)^2+(1-2\sin x\cos x)^2=2\left(1+\sin^2 x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4\sin x\cos x+4\sin^2 x\cos^2 x+1-4\sin x\cos x+4\sin^2 x\cos^2 x-2-$$

$$-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x=0,\ \sin^2 x\left(4\cos^2 x-1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x=0,\ x_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $4\cos^2 x-1=0,\ \cos^2 x=\frac{1}{4},\ \cos x=\pm\frac{1}{2},\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi l=\frac{\pi}{3}(3l\pm1),\ l\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{3}(3l\pm1)$, где k и $l\in Z.$

8.296. $\cos^{-4} z=64\cos^2 2z.$

Решение.

ОДЗ: $\cos z\neq 0.$

Из условия имеем

$$\frac{1}{\cos^4 z}=(8\cos 2z)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{\cos^2 z}=8\cos 2z,\ \cos 2z>0,\\ \frac{1}{\cos^2 z}=-8\cos 2z,\ \cos 2z<0,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2}{1+\cos 2z}=8\cos 2z,\\ \frac{1}{1+\cos 2z}=-8\cos 2z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\cos^2 2z+4\cos 2z-1=0,\\ 4\cos^2 2z+4\cos 2z+1=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2z=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2},\\ (2\cos 2z+1)^2=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2z=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}<-1, \varnothing;\\ \cos 2z=\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\\ \cos 2z=-\frac{1}{2}.\end{array}\right. \Rightarrow$$

1) $2\cos^2 z-1=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \cos z=\pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}, z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k, k\in Z;$

2) $2z=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ z_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

Ответ: $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k,\ k\in Z;\ z_2=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

8.297. $4\sin 5x\cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x.$

Решение.

Запишем это уравнение в виде

$$2\sin 10x(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-2\sin 2x\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 10x\cos 2x-2\sin 2x\cos 2x=0,\ 2\cos 2x(\sin 10x-\sin 2x)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

2) $\sin 10x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos 6x\sin 4x=0.$

Отсюда

1) $\cos 6x=0,\ 6x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}=\frac{\pi}{12}(2n+1),\ n\in Z;$

2) $\sin 4x = 0,\ 4x = \pi l,\ x_3 = \frac{\pi l}{4},\ l \in Z;\ x_1$ входит в x_2.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi k}{4};\ x_2 = \frac{\pi}{12}(2n+1)$, где k и $n \in Z$.

8.298. $\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z} + \frac{\mathrm{tg}2z}{\mathrm{tg}4z} + \frac{5}{2} = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \mathrm{tg}2z \neq 0, \\ \mathrm{tg}4z \neq 0, \\ \cos 2z \neq 0, \\ \cos 4z \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$2 \cdot \left(\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z}\right) + 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z}$, получим

1) $\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z} = -\frac{1}{2}$, 2) $\frac{\mathrm{tg}4z}{\mathrm{tg}2z} = -2$. Перепишем первое уравнение в виде

$$\frac{4\mathrm{tg}2z}{1 - \mathrm{tg}^2 2z} + \mathrm{tg}2z \Leftrightarrow 4\mathrm{tg}2z + \mathrm{tg}2z\left(1 - \mathrm{tg}^2 2z\right) = 0,\ \ \mathrm{tg}2z\left(5 - \mathrm{tg}^2 2z\right) = 0.$$

Отсюда

$$5 - \mathrm{tg}^2 2z = 0,\ \mathrm{tg}^2 2z = 5,\ \mathrm{tg}2z = \pm\sqrt{5},\ 2z = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{5} + \pi k,$$

$$z_1 = \pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{5} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ \mathrm{tg}2z \neq 0.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\frac{2\mathrm{tg}2z}{\mathrm{tg}2z\left(1 - \mathrm{tg}^2 2z\right)} = -2,\ \ \frac{1}{1 - \mathrm{tg}^2 2z} = -1,\ \ \mathrm{tg}^2 2z = 2,\ \ \mathrm{tg}2z = \pm\sqrt{2},$$

$$2z = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \pi n,\ \ z_2 = \pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z.$$

Ответ: $z_1 = \pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{5} + \frac{\pi k}{2};\ z_2 = \pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \frac{\pi n}{2}$, где k и $n \in Z$.

8.299. $\frac{\text{tg}x+\text{ctg}x}{\text{ctg}x-\text{tg}x}=6\cos 2x+4\sin 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\text{ctg}x-\text{tg}x\neq 0,\\ \cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}}-6\cos 2x-4\sin 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\cdot\frac{\cos x\sin}{\sin^2 x-\cos^2 x}-6\cos 2x-4\sin 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos 2x}-6\cos 2x-4\sin 2x=0\Leftrightarrow 1-6\cos^2 2x-4\sin 2x\cos 2x=0,$$

$$\cos^2 2x+\sin^2 2x-6\cos^2 2x-4\sin 2x\cos 2x=0,$$

$$\sin^2 2x-4\sin 2x\cos 2x-5\cos^2 2x=0,\ \text{tg}^2 2x-4\text{tg}2x-5=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\text{tg}2x$, получим

$$\text{tg}2x=-1,\ 2x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ \ k\in Z;\ \ \text{tg}2x=5,$$

$$2x_2=\text{arctg}5+\pi n,\ x_2=\frac{1}{2}\text{arctg}5+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ x_2=\frac{1}{2}\text{arctg}5+\frac{\pi n}{2}$, где k и $n\in Z$.

8.300. $\text{tg}5x-2\text{tg}3x=\text{tg}^2 3x\text{tg}5x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 5x\neq 0,\\ \cos 3x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем

$$\text{tg}5x-\text{tg}3x=\text{tg}^2 3x\text{tg}5x+\text{tg}3x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\text{tg}5x-\text{tg}3x=\text{tg}3x(\text{tg}3x\text{tg}5x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(5x-3x)}{\cos 5x\cos 3x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\left(\frac{\sin 3x\sin 5x+\cos 3x\cos 5x}{\cos 3x\cos 5x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 5x\cos 3x}-\frac{\sin 3x\cos 2x}{\cos^2 3x\cos 5x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\cos 3x-\cos 2x\sin 3x}{\cos^2 3x\cos 5x}=0 \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos^2 3x\cos 5x}=0 \Rightarrow \sin x=0,$$

$x=\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $x=\pi k,\ k\in Z.$

8.301. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2\cos^2 z}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}1-2\cos^2 z\ge 0,\\ \cos z+\sin z\ge 0.\end{cases}$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем

$$\begin{cases}\cos^2 z+2\cos z\sin z+\sin^2 z=1-2\cos^2 z,\\ \cos z+\sin z\ge 0.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos z\sin z+2\cos^2 z=0 \Leftrightarrow \cos z(\sin z+\cos z)=0,$$

откуда

1) $\cos z=0,\ z_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$ учитывая, что $\cos z+\sin z\ge 0,\ z_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k=$
$=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$

2) $\sin z+\cos z=0,\ \operatorname{tg} z=-1,\ z_2=-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n-1),\ n\in Z.$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1);\ z_2=\frac{\pi}{4}(4n-1),$ где k и $n\in Z.$

8.302. $\sqrt{3}(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x)=\operatorname{tg}2x\cos^{-1}3x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\ne 0,\\ \cos 3x\ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3}\left(1+\frac{\sin 2x\sin 3x}{\cos 2x\cos 3x}\right)-\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cos 3x}=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}(\cos 2x\cos 3x+\sin 2x\sin 3x)}{\cos 2x\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cos 3x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos 2x\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cos 3x}=0\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x-2\sin x\cos x=0,$$

$$\cos x\left(\sqrt{3}-2\sin x\right)=0.$$

Отсюда

$$\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,$$

или

$$\sqrt{3}-2\sin x=0,\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2=(-1)^l\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z;\ x_1$$

не удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x=(-1)^l\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z.$

8.303. $\left(\cos^{-6}z-\operatorname{tg}^6 z-\frac{7}{3}\right)\cdot(\sin z+\cos z+2)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos z\neq 0.$

Из условия имеем

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\cos^6 z}-\frac{\sin^6 z}{\cos^6 z}-\frac{7}{3}=0,\\ \sin z+\cos z+2=0,\ \varnothing.\end{array}\right.\Leftrightarrow 3-3\sin^6 z-7\cos^6 z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-3\left(\sin^2 z\right)^3-7\left(\cos^2 z\right)^3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-3\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2z)\right)^3-7\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2z)\right)^3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2z+15\cos^2 2z+6\cos 2z-7=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2z+2\cos^2 2z+6\cos^2 2z+6\cos 2z+7\cos^2 2z-7=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2z(\cos 2z+1)+6\cos 2z(\cos 2z+1)+7(\cos 2z+1)(\cos 2z-1)=0,$$

$$(\cos 2z+1)\left(2\cos^2 2z+13\cos 2z-7\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 2z+1=0,\ \cos 2z=-1,\ 2z=\pi+2\pi k,\ z_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$

2) $2\cos^2 2z+13\cos 2z-7=0.$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\cos 2z$, имеем $\cos 2z=-7, \varnothing$; $\cos 2z=\frac{1}{2}$, $2z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, $n\in Z$; z_1 не входит в ОДЗ.

Ответ: $z=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, $n\in Z$.

8.304. $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x+\operatorname{ctg}5x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0,\\ \sin 5x\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\cos 5x}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0\Leftrightarrow -\cos 5x(2\sin 5x-2\cos 2x\sin 3x)=0.$$

Отсюда

1) $\cos 5x=0$, $5x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $k\in Z$;

2) $2\sin 5x-2\cos 2x\sin 3x=0\Leftrightarrow 2\sin 5x-\sin x-\sin 5x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sin 5x-\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 3x=0.$

Тогда или $\sin 2x=0$, $2x=\pi n$, $x_2=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, или $\cos 3x=0$, $3x=\frac{\pi}{2}+\pi l$, $x_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi l}{3}$, $l\in Z$; x_2 входит в x_1 или в x_3.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2l+1)$, где k и $l\in Z$.

8.305. $\cos^{-1}2t+\sin^{-1}2t+\cos^{-1}2t\sin^{-1}2t-5=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2t\neq 0,\\ \sin 2t\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{1}{\cos 2t}+\frac{1}{\sin 2t}+\frac{1}{\cos 2t\sin 2t}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{tg}^2 t}{1-\mathrm{tg}^2 t}+\frac{1+\mathrm{tg}^2 t}{2\mathrm{tg}t}+\frac{\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)^2}{2\mathrm{tg}t\left(1-\mathrm{tg}^2 t\right)}-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\mathrm{tg}^3 t+\mathrm{tg}^2 t-4\mathrm{tg}t+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathrm{tg}^3 t+\mathrm{tg}^2 t\right)+\left(4\mathrm{tg}^3 t-4\mathrm{tg}t\right)+\left(\mathrm{tg}^3 t+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t(\mathrm{tg}t+1)+4\mathrm{tg}t(\mathrm{tg}t+1)(\mathrm{tg}t-1)+(\mathrm{tg}t+1)\left(\mathrm{tg}^2 t-\mathrm{tg}t+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{tg}t+1)\left(6\mathrm{tg}^2 t-5\mathrm{tg}t+1\right)=0.$$

Так как $\mathrm{tg}t+1\neq 0$, то $6\mathrm{tg}^2 t-5\mathrm{tg}t+1=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}t$, получим $\mathrm{tg}t=\frac{1}{2}$, $t_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z;$ $\mathrm{tg}t=\frac{1}{3}$, $t_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $t_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\ t_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,$ где k и $n\in Z.$

8.306. $\cos(22^\circ-t)\cos(82^\circ-t)+\cos(112^\circ-t)\cos(172^\circ-t)=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$

Решение.

Из условия получаем

$$\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ+\cos(104^\circ-2t)\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ+\cos(284^\circ-2t)\right)=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(104^\circ-2t)+\cos(284^\circ-2t)+1=\sin t+\cos t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(194^\circ-2t)\cos 90^\circ+1=\sin t+\cos t,\ \sin t+\cos t-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}=0,$$

$$2\sin^2\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=0,\ 2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin\frac{t}{2}=0,\ \frac{t}{2}=180^\circ k,\ t_1=360^\circ k,\ k\in Z;$

2) $\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{t}{2}=1,\ \frac{t}{2}=45^\circ+180^\circ n,$

$t_2=90^\circ+360^\circ n=90^\circ(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ. $t_1=360^\circ k;\ t_2=90^\circ(4n+1)$, где k и $n\in Z.$

8.307. $\sin 4x(3\sin 4x-2\cos 4x)=\sin^2 2x-16\sin^2 x\cos^2 x\times$

$\times\cos^2 2x+\cos^2 2x.$

Решение.

Из условия получаем

$\sin 4x(3\sin 4x-2\cos 4x)=\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-4\sin^2 2x\times$

$\times\cos^2 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x) \Leftrightarrow\ 2\sin 4x(3\sin 4x-2\cos 4x)=1-\cos 4x-$

$-2\sin^2 4x+1+\cos 4x,\ 6\sin^2 4x-4\sin 4x\cos 4x-2\cos^2 4x=0,$

$3\sin^2 4x-2\sin 4x\cos 4x-\cos^2 4x=0.$

Разделив на $\cos^2 4x\neq 0$, получим $3\mathrm{tg}^2 4x-2\mathrm{tg}4x-1=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}4x$, имеем $\mathrm{tg}4x=-\frac{1}{3}$,

$4x_1=-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ x_1=-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z;\ \mathrm{tg}4x=1,\ 4x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n,$

$x_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi}{16}(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4};\ x_2=\frac{\pi}{16}(4n+1)$, где k и $n\in Z.$

8.308. $\cos 3z-\cos^3 z+\frac{3}{4}\sin 2z=0.$

Решение.

Так как $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, то получаем

$4(4\cos^3 z-3\cos z)-4\cos^3 z+6\sin z\cos z=0,$

$12\cos^3 z-12\cos z+6\sin z\cos z=0,\ 6\cos z(2\cos^2 z-2+\sin z)=0,$

$6\cos z\left(2\left(1-\sin^2 z\right)-2+\sin z\right)=0,\ 6\cos z\left(-2\sin^2 z+\sin z\right)=0,$

$6\cos z\sin z(2\sin z-1)=0.$

Отсюда

1) $\cos z=0,\ z_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sin z=0,\ z_2=\pi n,\ n\in Z;$

3) $2\sin z-1=0,\ \sin z=\frac{1}{2},\ z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in Z.$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ z_2=\pi n;\ z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi l,$ где $k,\ n$ и $l\in Z.$

8.309. $\operatorname{tg}\left(t^2-t\right)\operatorname{ctg}2=1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos\left(t^2-t\right)\neq 0.$

Из условия имеем

$$\operatorname{tg}\left(t^2-t\right)=\operatorname{tg}2,\ \operatorname{tg}\left(t^2-t\right)-\operatorname{tg}2=0\Leftrightarrow\ \frac{\sin\left(t^2-t-2\right)}{\cos\left(t^2-t\right)\cos 2}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sin\left(t^2-t-2\right)=0\Leftrightarrow t^2-t-2=\pi k,\ k\in Z,\ t^2-t-2-\pi k=0,\ k\in Z.$

Из этого уравнения получаем

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2},\ \text{где}\ 9+4\pi k\geq 0,\ k\geq-\frac{9}{4\pi},\ k=0;\ 1;\ 2;\ \dots\ .$$

Ответ: $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$, где $k=0;\ 1;\ 2;\ \dots$.

8.310. $\sin^3 x(1-\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1-\operatorname{tg}x)=1{,}5\cos 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 x\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}\right)+\cos^3 x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)-1{,}5\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 x(\sin x-\cos x)-\cos^2 x(\sin x-\cos x)-1{,}5\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1{,}5\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\cos 2x - 1{,}5\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos x - \sin x - 1{,}5) = 0.$

Отсюда

$\cos 2x = 0,\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z;$

$\cos x - \sin x - 1{,}5 \neq 0.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z.$

8.311. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)}{1 + \cos 2t} = \cos^{-2} 2t - 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2t \neq 0, \\ \cos 2t \neq -1. \end{cases}$

Из условия имеем

$\frac{\sin^2 2t}{1 + \cos 2t} - \frac{1}{\cos^2 2t} + 1 = 0,\ \frac{1 - \cos^2 2t}{1 + \cos 2t} - \frac{1 - \cos^2 2t}{\cos^2 2t} = 0,$

$\frac{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}{1 + \cos 2t} - \frac{1 - \cos^2 2t}{\cos^2 2t} = 0,$

$1 - \cos 2t - \frac{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}{\cos^2 2t} = 0,\ (1 - \cos 2t)\cdot\left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{\cos^2 2t}\right) = 0.$

Отсюда

1) $1 - \cos 2t = 0,\ \cos 2t = 1,\ 2t = 2\pi k,\ t_1 = \pi k,\ k \in Z;$

2) $1 - \frac{1 + \cos 2t}{\cos^2 2t} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2t - \cos 2t - 1 = 0$, решим его как квадратное относительно $\cos 2t$, получим $\cos 2t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1, \varnothing;\ \cos 2t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$

$2t = \pm\arccos\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi n,\ t_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $t_1 = \pi k;\ t_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n$, где k и $n \in Z.$

8.312. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x.$

Решение.

Умножаем обе части уравнения на $\sin x\neq 0$. Получаем

$2(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 3x=\sin x\cos 6x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2\sin 2x\cos 2x)\cos 3x=\sin x\cos 6x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin 4x\cos 3x-\sin x\cos 6x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\sin x+\sin 7x)+\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin 7x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x+\sin 5x=0\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x=0.$

Отсюда

1) $\sin 3x=0$, $3x=\pi k$, $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$, исключив значения $x=\pi m$, при которых $\sin x=0$, получим $x_1=\frac{\pi}{3}(3l\pm 1), l\in Z$.

2) $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{3}(3l\pm 1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, где l и $n\in Z$.

8.313. $1-\cos x=\sqrt{1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}4\cos^2 x-7\cos^4 x\geq 0,\\ 1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}\geq 0.\end{cases}$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\begin{cases}1-2\cos x+\cos^2 x=1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}\\ 1-\cos x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}=2\cos x-\cos^2 x,\\ \cos x\leq 1,\\ 2\cos x-\cos^2 x\geq 0.\end{cases}$$

Еще раз возведя уравнение в квадрат, получим

$4\cos^2 x-7\cos^4 x=4\cos^2 x-4\cos^3 x+\cos^4 x,$

$8\cos^4 x-4\cos^3 x=0, 4\cos^3 x(2\cos x-1)=0.$

Отсюда

1) $\cos x = 0,\ x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k = \dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z;$

2) $2\cos x - 1 = 0,\ \cos x = \dfrac{1}{2},\ x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n = \dfrac{\pi}{3}(6n \pm 1),\ n \in Z.$

Проверкой убеждаемся, что оба корня являются решениями уравнения.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2 = \dfrac{\pi}{3}(6n \pm 1)$, где k и $n \in Z$.

8.314. $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} + \operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{10}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} \neq 0, \\ 2\sin x + \sin 2x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{2\sin x + 2\sin x\cos x} + \frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{10}{3} = 0,$$

$$\frac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)} + \frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{10}{3} = 0,\ \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{10}{3} = 0,$$

$$3\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, получим

1) $\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) = \dfrac{1}{3},\ \cos x = \dfrac{1}{2},\ x_1 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z;$

2) $\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) = 3,\ \cos x = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi n,\ n \in Z;$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z.$

8.315. $4\left(\sin t\cos^5 t+\cos t\sin^5 t\right)+\sin^3 2t=1.$

Решение.

Имеем

$$4\sin t\cos t\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)+\sin^3 2t-1=0,$$

$$2\sin 2t\left(\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\right)+\sin^3 t-1=0,$$

$$2\sin 2t-\sin 2t\left(4\cos^2 t\sin^2 t\right)+\sin^3 2t-1=0,$$

$$2\sin 2t-\sin^3 2t+\sin^3 2t-1=0,\ \sin 2t=\frac{1}{2},\ 2t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$t=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $t=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.316. $\sin^4 x-\sin^2 x+4(\sin x+1)=0.$

Решение.

Из условия имеем

$$\sin^2 x\left(\sin^2 x-1\right)+4(\sin x+1)=0,$$

$$\sin^2 x(\sin x-1)(\sin x+1)+4(\sin x+1)=0,$$

$$(\sin x+1)\left(\sin^3 x-\sin^2 x+4\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(4k-1),\ k\in Z;$

2) $\sin^3 x-\sin^2 x+4\neq 0.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k-1),\ k\in Z.$

8.317. $\dfrac{\sin^2 t-\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t-\operatorname{ctg}^2 t}+2\operatorname{tg}^3 t+1=0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \sin t\neq 0,\\ \sin t\neq\pm 1.\end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin^2 t-\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{\cos^2 t-\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}+2\operatorname{tg}^3 t+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 t\left(\cos^2 t-1\right)}{\cos^2 t}\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t\left(\sin^2 t-1\right)}+2\operatorname{tg}^3 t+1=0,$$

$$\left(\operatorname{tg}^3 t\right)^2+2\operatorname{tg}^3 t+1=0,\ \left(\operatorname{tg}^3 t+1\right)^2=0,\ \operatorname{tg}^3 t=-1,\ \operatorname{tg} t=-1,$$

$$t=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$$

Ответ: $t=\dfrac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

8.318. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t}-\dfrac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t}=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \cos 5t\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin t}{\cos t\cos^2 5t}-\frac{\sin 5t}{\cos 5t\cos^2 t}=0\Leftrightarrow\ \sin t\cos t-\sin 5t\cos 5t=0.$$

Используя формулу $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$, получим

$$\frac{\sin 2t}{2}-\frac{\sin 10t}{2}=0,\ \sin 2t-\sin 10t=0\Leftrightarrow\ -2\cos 6t\sin 4t=0.$$

Отсюда

1) $\cos 6t=0,\ 6t=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6}=\dfrac{\pi}{12}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sin 4t=0,\ 4t=\pi n,\ t_2=\dfrac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

С учетом ОДЗ $t_2=\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $t_1=\dfrac{\pi}{12}(2k+1);\ t_2=\pi n$, где k и $n\in Z.$

8.319. $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}+\sin x\left(1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)=4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0,\\ 1+\sin 2x-\cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}+\sin x\left(1+\frac{\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}\right)-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin x\cos x+2\cos^2 x}{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}+\frac{\sin x\left(\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\sin x\sin\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos x(\sin x+\cos x)}{2\sin x(\cos x+\sin x)}+\frac{\sin x\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}-4=0,\ \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4,$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=2,\ \frac{1}{\sin 2x}=2,\ \sin 2x=\frac{1}{2},\ 2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.320. $\sin 2z-\sin 6z+2=0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sin 2z-\sin 3(2z)+2=0$. По формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, имеем

$\sin 2z-3\sin 2z+4\sin^3 2z+2=0,\ 4\sin^3 2z-2\sin 2z+2=0,$

$2\sin^3 2z-\sin 2z+1=0,\ 2\sin^3 2z+2-\sin 2z-1=0,$

$2(\sin 2z+1)(\sin^2 2z-\sin 2z+1)-(\sin 2z+1)=0,$

$(\sin 2z+1)(2\sin^2 2z-2\sin 2z+1)=0.$

Отсюда

1) $\sin 2z+1=0,\ \sin 2z=-1,\ 2z=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ z=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z;$

2) $2\sin^2 2z-2\sin 2z+1=0\ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

8.321. $\sin^2(t+45^\circ)-\sin^2(t-30^\circ)-\sin 15^\circ\cos(2t+15^\circ)=0{,}5\sin 6t.$

Решение.

Из условия имеем

$1-\cos(2t+90^\circ)-1+\cos(2t-60^\circ)-2\sin 15^\circ\cos(2t+15^\circ)-\sin 6t=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin 2t+\cos(2t-60^\circ)+\sin 2t-\sin(2t+30^\circ)-\sin 6t=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 2t+\cos 2t\cos 60^\circ+\sin 2t\sin 60^\circ-\sin 2t\cos 30^\circ-$

$-\cos 2t\sin 30^\circ-\sin 6t=0,$

$2\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t-\sin 6t=0,$

$2\sin 2t-\sin 6t=0.$

Так как $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, то $2\sin 2t-3\sin 2t+4\sin^3 2t=0,$ $4\sin^3 2t-\sin 2t=0,\ \sin 2t(4\sin^2 2t-1)=0.$

Отсюда

1) $\sin 2t=0,\ 2t=180^\circ k,\ t_1=90^\circ k,\ k\in Z;$

2) $4\sin^2 2t-1=0,\ \sin 2t=\pm\frac{1}{2},\ 2t=\pm 30^\circ+180^\circ l,\ t_2=\pm 15^\circ+90^\circ l,\ l\in Z.$

Ответ: $t_1=90^\circ k,\ t_2=\pm 15^\circ+90^\circ l,$ где k и $l\in Z.$

8.322. $3\operatorname{tg}3x-4\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}3x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$3\operatorname{tg}3x-3\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}2x,$

$$3\cdot\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)=\operatorname{tg}2x\cdot\left(\frac{\sin 2x\sin 3x}{\cos 2x\cos 3x}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x}\right)-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\times$$

$$\times\left(\frac{\sin 2x\sin 3x+\cos 2x\cos 3x}{\cos 2x\cos 3x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sin x}{\cos 3x\cos 2x}-\frac{\sin 2x\cos x}{\cos^2 2x\cos 3x}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos 2x-\sin 2x\cos x=0,\ 3\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\cos^2 x=0,$

$\sin x\left(4\cos^2 x-3\right)=0.$

Отсюда

1) $\sin x=0,\ x_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $4\cos^2 x-3=0,\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;$ x_2 не входит в ОДЗ.

Ответ: $x=\pi k,\ k\in Z.$

8.323. $\frac{5\sin x-5\operatorname{tg}x}{\sin x+\operatorname{tg}x}+4(1-\cos x)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq -1.\end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{5\sin x-\frac{5\sin x}{\cos x}}{\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}}+4(1-\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5\sin x(\cos x-1)}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x(\cos x+1)}+4(1-\cos x)=0,$$

$$(\cos x-1)\left(\frac{5}{\cos x+1}-4\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1$, $x_1 = 2\pi k$, $k \in Z$;

2) $\dfrac{5}{\cos x + 1} - 4 = 0$, $\cos x = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \pm \arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; x_1 не входит в ОДЗ.

Ответ: $x = \pm \arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

8.324. $4\cos x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1$.

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0$.

Запишем уравнение в виде

$$4\cos x - \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 0,$$

$$\sin 2x - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Отсюда

1) $2\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$, $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x_1 = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2}{3}\pi k = \dfrac{2}{9}\pi(3k+1)$, $k \in Z$;

2) $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$, $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \pi n$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n = \dfrac{\pi}{3}(6n+1)$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{2}{9}\pi(3k+1)$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}(6n+1)$, где k и $n \in Z$.

8.325. $1 + \dfrac{2(\cos 2z \operatorname{tg} z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z$.

Решение.

ОДЗ: $\cos z \neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$1 + \frac{2\left(\dfrac{\cos 2z \sin z}{\cos z} - \sin 2z\right)}{\dfrac{1}{\cos^2 z}} - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2(\sin z\cos 2z - \cos z\sin 2z)\cos z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+2\sin(-z)\cos z-\cos 2z=0,\ 1-2\sin z\cos z-\cos 2z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2\sin z\cos z-1+2\sin^2 z=0 \Leftrightarrow\ 2\sin^2 z-2\sin z\cos z=0,$

$\sin z(\sin z-\cos z)=0.$

Отсюда 1) $\sin z=0,\ z_1=\pi n,\ n\in Z;$ 2) $\sin z-\cos z=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} z=1,$ откуда $z_2=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $z_1=\pi n,\ n\in Z;\ z_2=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.326. $(\cos x-\sin x)^2+\cos^4 x-\sin^4 x=0{,}5\sin 4x.$

Решение.

Из условия получаем

$\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x+(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-$

$-0{,}5\sin 4x=0 \Leftrightarrow\ 1-\sin 2x+\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)-(\sin 2x+\sin 2x\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)-\sin 2x(1+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow\ (1+\cos 2x)(1-\sin 2x)=0.$

Отсюда

1) $1+\cos 2x=0,\ \cos 2x=-1,\ 2x_1=\pi+2\pi n,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z.$

2) $1-\sin 2x=0,\ \sin 2x=1,\ 2x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2n+1);\ x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1),$ где n и $k\in Z.$

8.327. $\operatorname{ctg} x\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=1.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

По формуле $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, имеем

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(1-\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}\right)=1 \Leftrightarrow\ 2\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\operatorname{tg}^3x-2\operatorname{tg}^2x\right)-\left(\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}x-1)-(\operatorname{tg}x-1)^2=0,\ (\operatorname{tg}x-1)(2\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1)=0.$$

Отсюда

1) $\operatorname{tg}x-1=0,\ \operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

2) $2\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1\neq 0\ (D<0),\ \varnothing.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

8.328. $\cos^2(x+40^\circ)+\cos^2(x-40^\circ)-\sin 10^\circ\cos 2x=\sin 2x.$

Решение.

Понижая степень, имеем

$$\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x+80^\circ)\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x-80^\circ)\right)-\sin 10^\circ\cos 2x=\sin 2x,$$

$$1+\frac{1}{2}\left(\cos(2x+80^\circ)+\cos(2x-80^\circ)\right)-\sin 10^\circ\cos 2x=\sin 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos 2x\cos 80^\circ-\sin 10^\circ\cos 2x=\sin 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos 2x\sin 10^\circ-\sin 10^\circ\cos 2x=\sin 2x,$$

$$\sin 2x=1,\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.329. $2\cos^2\frac{x}{2}(1-\sin x)+\cos^2x=0.$

Решение.

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них есть нуль. Таким образом имеем:

$$\begin{cases}2\cos\frac{2x}{2}(1-\sin x)=0,\\ \cos^2x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+\cos x)(1-\sin x)=0,\\ \cos x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$

8.330. $\operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2\sin 4x = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 6x \neq 0$.

Запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin 6x \cos 2x}{\cos 6x} - \sin 2x\right) - 2\sin 4x = 0,$$

$$\frac{\sin 6x \cos 2x - \cos 6x \sin 2x}{\cos 6x} - 2\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x - 2\sin 4x \cos 6x = 0,$$

$$\sin 4x(1 - 2\cos 6x) = 0.$$

Отсюда

1) $\sin 4x = 0$, $4x = \pi k$, $x_1 = \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; учитывая ОДЗ, получим $x_1 = \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

2) $1 - 2\cos 6x = 0$, $\cos 6x = \frac{1}{2}$, $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi l}{3}$, $l \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi m}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{18}(6l \pm 1)$, где m и $l \in Z$.

8.331. $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 3x - 0{,}5$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 2(2\cos x \cos 3x)(2\cos^2 3x) - 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 2(\cos 2x + \cos 4x)(1 + \cos 6x) - 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 2x \cos 6x +$$

$$+2\cos 4x \cos 6x - 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x + \cos 2x = \cos 4x + \cos 8x + \cos 2x + \cos 10x - 0{,}5,$$

$$\cos 10x = \frac{1}{2};\ 10x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5} = \frac{\pi}{30}(6k \pm 1),\ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{30}(6k \pm 1)$, $k \in Z$.

8.332. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1) = 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos(x+1) \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x\sin(x+1)}{\cos x\cos(x+1)}-1=0 \Leftrightarrow \sin x\sin(x+1)-\cos x\cos(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos(2x+1)=0,\ 2x+1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.333. $\frac{8\sin^{-2}2x+1}{\cos^{-2}x+\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x+\frac{4}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\frac{8}{\sin^2 2x}+1}{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{8}{1-\cos^2 2x}+1}{\frac{2}{1+\cos 2x}+\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}+\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1+2\cos 2x}{3(1-\cos 2x)}=0,$$

$$\begin{cases}1+2\cos 2x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\end{cases} \text{ т.е. } \cos 2x=-\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.334. $2+\sin t=3\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{t}{2}\neq 0.$

По формуле $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, имеем

$$2+\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}-3\operatorname{tg}\frac{t}{2}=0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3\frac{t}{2}-2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+\operatorname{tg}\frac{t}{2}-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3\frac{t}{2}-3-2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1+2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\operatorname{tg}^3\frac{t}{2}-1\right)-2\left(\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}-1\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1\right)-2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)\left(3\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+\operatorname{tg}\frac{t}{2}+2\right)=0.$$

Отсюда

1) $\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1=0,\ \operatorname{tg}\frac{t}{2}=1,\ \frac{t}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ t=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z;$

2) $3\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+\operatorname{tg}\frac{t}{2}+2\neq 0\,(D<0), \varnothing.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$

8.335. $\operatorname{tg}(35^\circ+x)\operatorname{ctg}(10^\circ-x)=\frac{2}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos(35^\circ+x)\neq 0,\\ \sin(10^\circ-x)\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg}(35^\circ+x)\operatorname{ctg}(90^\circ-(80^\circ+x))=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ+x)\operatorname{tg}(45^\circ+(35^\circ+x))=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ+x)\cdot\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}(35^\circ+x)}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}(35^\circ+x)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ+x)\cdot\frac{1+\operatorname{tg}(35^\circ+x)}{1-\operatorname{tg}(35^\circ+x)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2(35^\circ+x)+5\operatorname{tg}(35^\circ+x)-2=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}(35^\circ+x)$, получим

$$\operatorname{tg}(35^\circ+x)=\frac{1}{3},\ 35^\circ+x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+180^\circ k,\ x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-35^\circ+180^\circ k,\ k\in Z,$$

или

$$\operatorname{tg}(35^\circ+x)=-2,\ \ 35^\circ+x=\operatorname{arctg}(-2)+180^\circ n,\ \ x_2=-\operatorname{arctg}2-35^\circ+180^\circ n,$$

$n\in Z.$

Ответ: $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-35^\circ+180^\circ k,\ k\in Z,\ x_2=-\operatorname{arctg}2-35^\circ+180^\circ n,\ n\in Z.$

8.336. $2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \cos 3x\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$(2\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x)+(\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}3x)+\operatorname{tg}2x(1+\operatorname{tg}3x)=0,\ (1+\operatorname{tg}3x)(2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x)=0.$$

Отсюда

1) $1+\operatorname{tg}3x=0,\ \operatorname{tg}3x=-1,\ 3x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ \ k\in Z;$

2) $2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=0\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x+\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=0,\ 2\operatorname{tg}x\left(1+\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2x}\right)=0.$

Отсюда или $\operatorname{tg}x=0,\ x_2=\pi n,\ n\in Z,$ или $1+\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2x}=0,\ \operatorname{tg}x=\pm\sqrt{2},$ $x_3=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi l,\ l\in Z.$ С учетом ОДЗ $x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\neq 3m+1,$ $m\in Z.$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\neq 3m+1;\ x_2=\pi n,\ x_3=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi l,$ где $k,\ l$ и $m\in Z.$

8.337. $\sin^4 2x+\sin^3 2x\cos 2x-8\sin 2x\cos^3 2x-8\cos^4 2x=0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 2x(\sin 2x+\cos 2x)-8\cos^3 2x(\sin 2x+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x+\cos 2x)(\sin^3 2x-8\cos^3 2x)=0.$$

Отсюда $\sin 2x+\cos 2x=0$ или $\sin^3 2x-8\cos^3 2x=0$.

1) $\operatorname{tg} 2x=-1, 2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

2) $\operatorname{tg}^3 2x=8,\ \operatorname{tg} 2x=2,\ 2x=\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi k}{2}$, где k и $n\in Z$.

8.338. $\cos t(1-\operatorname{tg} t)(\sin t+\cos t)=\sin t$.

Решение.

ОДЗ: $\cos t\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos t\left(1-\frac{\sin t}{\cos t}\right)(\sin t+\cos t)-\sin t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)-\sin t=0 \Leftrightarrow \cos^2 t-\sin^2 t-\sin t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 t-\sin t=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin t$, найдем

$\sin t=-1,\ t_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ \sin t=\frac{1}{2},\ t_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in Z;\ t_1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $t=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in Z$.

8.339. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{1-\cos x}}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x+\sqrt{1-\cos x}}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<\cos x\leq 1,\\ \cos x\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}{\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}\right)}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{2\cos x\sqrt{\cos x}}{2\cos x-1}=0,\ \frac{2\cos x-1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}(2\cos x-1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-2\cos x+1=0,\ \cos x=1,\ x=2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=2\pi k,\ k\in Z.$

8.340. $1+\sin z+\cos z+\sin 2z+\cos 2z=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\sin^2 z+\cos^2 z+\sin z+\cos z+2\sin z\cos z+\cos^2 z-\sin^2 z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z+\cos z)+\left(2\sin z\cos z+2\cos^2 z\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z+\cos z)+2\cos z(\sin z+\cos z)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z+\cos z)(1+2\cos z)=0.$$

Отсюда 1) $\sin z+\cos z=0$, 2) $1+2\cos z=0.$

1) $\operatorname{tg} z=-1,\ z_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z$

2) $\cos z=-\frac{1}{2},\ z_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n=\frac{2}{3}\pi(3n\pm 1),\ n\in Z.$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1);\ z_2=\frac{2}{3}\pi(3n\pm 1)$, где k и $n\in Z.$

8.341. $\operatorname{ctg}(x-25^\circ)+\operatorname{tg}(3x+15^\circ)=2\sin(2x-50^\circ).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin(x-25^\circ)\neq 0,\\ \cos(3x+15^\circ)\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-25^\circ\neq 180^\circ t,\\ 3x+15^\circ\neq 90^\circ+180^\circ p,\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 25^\circ+180^\circ t,\ t\in Z,\\ x\neq 25^\circ+60^\circ p,\ p\in Z.\end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\cos(x-25^\circ)}{\sin(x-25^\circ)}+\frac{\sin(3x+15^\circ)}{\cos(3x+15^\circ)}-2\sin(2x-50^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)+\sin(x-25^\circ)\sin(3x+15^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)}-2\sin(2x-50^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x+40^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)}-2\sin((2x+40^\circ)-90^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x+40^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)}+2\cos(2x+40^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+40^\circ)(1+2\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ))=0.$$

Отсюда

1) $\cos(2x+40^\circ)=0,\ 2x+40^\circ=90^\circ+180^\circ k,\ x_1=25^\circ+90^\circ k,\ k\in Z;$

2) $1+2\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+\sin(x-25^\circ-3x-15^\circ)+\sin(x-25^\circ+3x+15^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)+\sin(4x-10^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)+\sin(4x+80^\circ-90^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)-\sin(90^\circ-(4x+80^\circ))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)-\cos(4x+80^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)-\cos 2(2x+40^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(2x+40^\circ)-1+2\sin^2(2x+40^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(2x+40^\circ)-\sin(2x+40^\circ)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(2x+40^\circ)(2\sin(2x+40^\circ)-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(2x+40^\circ)=0,\\ \sin(2x+40^\circ)=\frac{1}{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+40^\circ=180^\circ n,\\ 2x+40^\circ=30^\circ+360^\circ m,\\ 2x+40^\circ=150^\circ+360^\circ l,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=-20^\circ+90^\circ n,\ n\in Z,\\ x_3=-5^\circ+180^\circ m,\ m\in Z,\\ x_4=55^\circ+180^\circ l,\ l\in Z.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ имеем $x_1 = 25°+90°(2r+1) = 115°+180°r,\ r \in Z.$

Ответ: $x_1 = 115°+180°r,\ r \in Z;\ x_2 = -20°+90°n,\ n \in Z;\ x_3 = -5°+180°m,$ $m \in Z;\ x_4 = 55°+180°l,\ l \in Z.$

8.342. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x + 4 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 - 2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x + 3(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + 4 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 + 3(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$, получим $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)_1 = -2$ или $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)_2 = -1.$

1) $\operatorname{tg}x + \frac{1}{\operatorname{tg}x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}x + 1 = 0,\ (\operatorname{tg}x + 1)^2 = 0,\ \operatorname{tg}x = -1,$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in Z.$$

2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x + 1 \neq 0\ (D < 0), \varnothing.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in Z.$

8.343. $\operatorname{tg}2t = \operatorname{ctg}t - 4\cos t \cos 3t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2t \neq 0, \\ \sin t \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin 2t}{\cos 2t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right) + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t \sin t - \cos 2t \cos t}{\cos 2t \sin t} + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos 3t}{\cos 2t \sin t} + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow\ -\cos 3t(1 - 4\cos t \cos 2t \sin t) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos 3t = 0,\ 3t = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ t_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z;$

2) $1 - 4\cos t \cos 2t \sin t = 0 \Leftrightarrow 1 - 2(2\sin t \cos t)\cos 2t = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin 2t \cos 2t = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 4t = 0 \Leftrightarrow \sin 4t = 1,\ 4t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$t_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{8}(4n+1),\ n \in Z.$$

Ответ: $t_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1);\ t_2 = \frac{\pi}{8}(4n+1)$, где k и $n \in Z$.

8.344. $\cos 2x = \cos^2 \frac{3x}{2}$.

Решение.

Из условия имеем

$$\cos 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 3x)$$

и по формуле $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ имеем

$$2(2\cos^2 x - 1) - 1 - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 1) - 3(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(4\cos^2 x - 3) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos x - 1 = 0,\ \cos x = 1,\ x_1 = 2\pi k,\ k \in Z;$

2) $4\cos^3 x - 3 = 0,\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1),\ n \in Z.$

Ответ: $x_1 = 2\pi k;\ x_2 = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$, где k и $n \in Z$.

8.345. $(\mathrm{tg} t - \mathrm{ctg} t + 2\mathrm{tg} 2t)(1 + \cos 3t) = 4\sin 3t$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \sin t \neq 0, \\ \cos 2t \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} + 2\mathrm{tg} 2t\right) \cdot (1 + \cos 3t) - 4\sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin t\cos t}+2\operatorname{tg}2t\right)\cdot(1+\cos 3t)-4\sin 3t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{2\cos 2t}{\sin 2t}+2\operatorname{tg}2t\right)\cdot(1+\cos 3t)-4\sin 3t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\cdot\left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t}-\frac{\sin 2t}{\cos 2t}\right)\cdot(1+\cos 3t)-4\sin 3t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{\cos^2 2t-\sin^2 2t}{\sin 2t\cos 2t}\right)\cdot(1+\cos 3t)+4\sin 3t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\cos 4t(1+\cos 3t)}{\sin 4t}+4\sin 3t=0\Leftrightarrow\ \cos 4t(1+\cos 3t)+\sin 3t\sin 4t=0,$$

$$\cos 4t+\cos 4t\cos 3t+\sin 4t\sin 3t=0\Leftrightarrow\ \cos 4t+\cos t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5t}{2}\cos\frac{3t}{2}=0.$$

Отсюда

1) $\cos\frac{5t}{2}=0,\ \frac{5t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z;$

2) $\cos\frac{3t}{2}=0,\ \frac{3t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ t_2=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z.$

Учитывая ОДЗ, получаем

$$t_1=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k=\frac{\pi}{5}(2k+1),\ k\neq 5l+2;\ t_2=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n=\frac{\pi}{3}(2n+1),\ n\neq 3l+1,$$

где k, n, и $l\in Z$.

Ответ: $t_1=\frac{\pi}{5}(2k+1),\ k\neq 5l+2;\ t_2=\frac{\pi}{3}(2n+1),\ n\neq 3l+1$, где k, n, и $l\in Z$.

8.346. $\sin x(\cos x-2)+\operatorname{tg}x=2-\cos x-\cos^{-1}x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Запишем уравнение в виде

$$\sin x(\cos x-2)+(\cos x-2)+\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-2)(\sin x+1)+\frac{\sin x+1}{\cos x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+1)\cdot\left(\cos x-2+\frac{1}{\cos x}\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x+1=0,\ \sin x=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

2) $\cos x-2+\frac{1}{\cos x}=0 \Leftrightarrow\ \cos^2 x-2\cos x+1=0,\ (\cos x-1)^2=0,$

$\cos x-1=0,\quad \cos x=1,\ x_2=2\pi n,\ n\in Z;\ x_1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=2\pi n,\ n\in Z.$

8.347. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2+\sin x=2\cos x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2-2\cos x=-\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2(1+\cos x)=-\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left(2-\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)=\sin x \Leftrightarrow\ 2-\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Используя формулу $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, имеем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, получим

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=-2,\ \varnothing \text{ или } \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$

8.348. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x-(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)^2-(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x-\sin x=0$, 2) $\cos x-\sin x-1=0.$

1) $\operatorname{tg} x=1,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

2) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,\ 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда или $\sin\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\pi l,\ x_2=2\pi l,\ l\in Z,$ или $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1,\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n-1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1);\ x_2=2\pi l;\ x_3=\frac{\pi}{2}(4n-1),$ где $k,\ l$ и $n\in Z.$

8.349. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{106}{9}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, то получаем

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^2+\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}-\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}-\frac{106}{9}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^2-2\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}+$$

$$+\frac{(1-\cos 2x)^2-(1+\cos 2x)^2}{(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)}-\frac{106}{9}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2}{1-\cos^2 2x}\right)^2-2-\frac{4\cos 2x}{1-\cos^2 2x}-\frac{106}{9}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2+2\cos^2 2x}{1-\cos^2 2x}\right)^2-\frac{4\cos 2x}{1-\cos^2 2x}-\frac{124}{9}=0,$$

$$\left(\frac{1+\cos^2 2x}{1-\cos^2 2x}\right)^2-\frac{\cos 2x}{1-\cos^2 2x}-\frac{31}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22\cos^4 2x-9\cos^3 2x-80\cos^2 2x+9\cos 2x+22=0.$$

Пусть $\cos 2x=y$. Тогда уравнение примет вид

$$22y^4-9y^3-80y^2+9y+22=0.$$

$$22y^2-9y-80+\frac{9}{y}+\frac{22}{y^2}=0 \Leftrightarrow 22\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-9\left(y-\frac{1}{y}\right)-80=0,$$

$$22\left(\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2\right)-9\left(y-\frac{1}{y}\right)-80=0,\ 22\left(y-\frac{1}{y}\right)^2-9\left(y-\frac{1}{y}\right)-36=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $y-\frac{1}{y}$, найдем

$$\left(y-\frac{1}{y}\right)_1=-\frac{12}{11} \text{ и } \left(y-\frac{1}{y}\right)_2=\frac{33}{22}.$$

После упрощений получим

$$11y^2+12y-11=0 \text{ и } 22y^2-33y-22=0;\ y_1=\frac{-6-\sqrt{157}}{11},$$

$$y_2=\frac{-6+\sqrt{157}}{11},\ y_3=-\frac{1}{2},\ y_4=2.$$

Тогда

$$\cos 2x=\frac{-6-\sqrt{157}}{11}<-1, \varnothing;\ \cos 2x=\frac{-6+\sqrt{157}}{11},$$

$2x = \pm\arccos\frac{-6+\sqrt{157}}{11} + 2\pi k,\ \ x_1 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-6+\sqrt{157}}{11} + \pi k,\ k \in Z;$

$\cos 2x = -\frac{1}{2},\ \ 2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n,\ \ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1),\ \ n \in Z;$

$\cos 2x = 2,\ \varnothing.$

Ответ: $x_1 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-6+\sqrt{157}}{11} + \pi k;\ x_2 = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$, где k и $n \in Z$.

8.350. $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{7\pi}{12} + \pi l. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} = \frac{7\pi}{12} + l,\ \ k = 1 + 2l,\ \ k \in Z,\ \ l \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi(1+2l)}{2} = \frac{7\pi}{12} + \pi l,\ \ l \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{12} + \pi l,\ l \in Z.$

8.351. $3\sqrt{3}\operatorname{tg}x\sin x - \operatorname{ctg}x\cos x + 9\sin x - 3\sqrt{3}\cos x = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{3\sqrt{3}\sin^2 x}{\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x}+9\sin x-3\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin^3 x+9\sin^2 x\cos x-3\sqrt{3}\cos^2 x\sin x-\cos^3 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x+9\operatorname{tg}^2 x-3\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x-1\right)+\left(9\operatorname{tg}^2 x-3\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1\right)\left(3\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1\right)+3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1\right)\operatorname{tg}x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1\right)\left(3\operatorname{tg}^2 x+4\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0,\ \operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1=\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k+1),\ k\in Z;$

2) $3\operatorname{tg}^2 x+4\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x$, найдем

$$\operatorname{tg}x=\frac{-2\sqrt{3}-3}{3},\ x_2=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}-3}{3}+\pi n,\ n\in Z,$$

или

$$\operatorname{tg}x=\frac{-2\sqrt{3}+3}{3},\ x_3=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}+3}{3}+\pi l,\ l\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1),\ x_2=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}-3}{3}+\pi n,$

$x_3=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}+3}{3}+\pi l,$ где $k,\ n$ и $l\in Z.$

8.352. $\cos 2x-\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-1.$

Решение.

По формулам

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

имеем

$$2\cos^2 x-1-\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x-2\left(1-\sqrt{2}\right)\cos x-\sqrt{2}=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos x$, имеем

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_1=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k\pm 3),\ k\in Z;$$

$$\cos x=\frac{1}{2},\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1),\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(8k\pm 3);\ x_2=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1)$, где k и $n\in Z$.

8.353. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Так как

$$a^4+b^4=\left((a+b)^2-2ab\right)^2-2a^2b^2 \text{ и } (a+b)^2=(a+b)^2-2ab,$$

то имеем

$$\left((\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x\right)^2-2\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 x+(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-$$

$$-2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-2\right)^2-2+(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^4-3(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-4=0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$, получим

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-2 \text{ или } \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2,$$

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x+1=0 \text{ или } \operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+1=0,$$

$$(\operatorname{tg}x+1)^2=0 \text{ или } (\operatorname{tg}x-1)^2=0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}x=\pm 1;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.354. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}{1+\cos x}=2.$

Решение.

$$\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq -1.\end{cases}$$

Имеем

$$\operatorname{ctg}x+\frac{\sin x}{1+\cos x}-2=0,\ \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x)+\sin^2 x-2\sin x(1+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x)+\left(1-\cos^2 x\right)-2\sin x(1+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x)+(1-\cos x)(1+\cos x)-2\sin x(1+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-2\sin x)=0.$$

Отсюда

1) $1+\cos x=0,\ \cos x=-1,\ x_1=\pi+2\pi k,\ k\in Z;$

2) $1-2\sin x=0,\ \sin x=\frac{1}{2},\ x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in Z;$ x_1 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in Z.$

8.355. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x=\sin x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0.\end{cases}$

По формуле $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, имеем

$$\frac{-\sin x}{\cos x\cos 2x}-\sin x=0\Leftrightarrow -\sin x\left(\frac{1}{\cos x\cos 2x}+1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x=0,\ x_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}+1=0 \Leftrightarrow\ 1+\cos x\cos 2x=0,\ 2\cos^3 x-\cos x+1=0,$

$\left(2\cos^3 x+2\right)-(\cos x+1)=0,\ 2(\cos x+1)\left(\cos^2 x-\cos x+1\right)-(\cos x+1)=0,$

$(\cos x+1)\left(2\cos^2 x-2\cos x+1\right)=0.$

Отсюда $\cos x+1=0,\ \cos x=-1,\ x_2=\pi+2\pi n,\ n\in Z;$

$2\cos^2 x-2\cos x+1\neq 0\ (D<0), \varnothing;\ x_2$ входит в x_1.

Ответ: $x=\pi k,\ k\in Z.$

8.356. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x=(\sin 2x+\sin 4x)\cos^{-1} x\sin^{-1} 3x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$2\sin^2 3x+\left(\sin 2(3x)\right)^2=\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{\cos x\sin 3x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 3x+(2\sin 3x\cos 3x)^2=\dfrac{2\sin 3x\cos x}{\cos x\sin 3x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 3x+4\sin^2 3x\cos^2 3x-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 3x+4\sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^4 3x-3\sin^2 3x+1=0.$

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\sin 3x$, получим

$\sin 3x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 3x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ x_1=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6},\ k\in Z;\ \sin 3x=\pm 1,$

$3x_2=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

С учетом ОДЗ $x_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\neq 3l+1,\ n\in Z,\ l\in Z.$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{12}(2k+1),\ x_2=\dfrac{\pi}{6}(2n+1),\ n\neq 3l+1,$ где $k,\ n$ и $l\in Z.$

8.357. $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$4\left(\sin^2 x\right)^2+\cos 2(2x)-1-12\left(\cos^2 x\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+2\cos^2 2x-1-1-3(1+\cos 2x)^2=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2},$$

$$2x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ \ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ \ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.358. $5(1-\sin 2x)-16(\sin x-\cos x)+3=0.$

Решение.

Из условия имеем

$$5\left(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)-16(\sin x-\cos x)+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(\sin x-\cos x)^2-16(\sin x-\cos x)+3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin x-\cos x$, имеем

$$\sin x-\cos x=3,\ \varnothing;\ \text{или}\ \sin x-\cos x=\frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{5},\ \ 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5},\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Тогда

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\pi k,\ \ x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

8.359. $37\operatorname{tg}3x=11\operatorname{tg}x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Используя формулу $\operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, перепишем уравнение в виде

$$37\cdot\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}-11\operatorname{tg}x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x\cdot\left(\frac{111-37\operatorname{tg}^2x-11+33\operatorname{tg}^2x}{1-3\operatorname{tg}^2x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}x\cdot\left(\frac{100-4\operatorname{tg}^2x}{1-3\operatorname{tg}^2x}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=0,\\ \operatorname{tg}^2x=25,\end{array}\right.\\ \operatorname{tg}^2x\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=0,\\ \operatorname{tg}x=\pm5,\end{array}\right.\\ \operatorname{tg}x\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

Последнее решение не удовлетворяет исходному уравнению. Отсюда $x_1=\pi k,\ k\in Z$; $x_2=\operatorname{arctg}(\pm5)+\pi n=\pm\operatorname{arctg}5+\pi n, n\in Z$.

Ответ: $x_1=\pi k,\ k\in Z$; $x_2=\pm\operatorname{arctg}5+\pi n, n\in Z$.

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\cos 2x+\sin 2x$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{2}(\cos^2 2x+\sin^2 2x)(\cos^2 2x-\sin^2 2x)-(\cos 2x+\sin 2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}(\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x-\sin 2x)-(\cos 2x+\sin 2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos 2x+\sin 2x)(\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x-1)=0.$$

Отсюда $\cos 2x+\sin 2x=0$ или $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x-1=0$.

1) $\operatorname{tg}2x=-1,\ 2x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{\pi}{8}(4k-1),\ k\in Z$.

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\pi}{4}\cos 2x-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)=\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{4}+2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ x_2=\pm\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$.

Ответ: $x_1=-\dfrac{\pi}{8}(4k-1),\ k\in Z$; $x_2=\pm\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$.

8.361. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=\sin^{-1}x-\cos^{-1}x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+\left(\sin x-\cos x\right)=0,$$

$$\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)+\left(\sin x-\cos x\right)=0,$$

$$\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+1\right)=0.$$

Отсюда 1) $\sin x-\cos x=0$; 2) $\sin x+\cos x+1=0$.

1) $\operatorname{tg}x=1,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

2) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\ 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$

Отсюда $\cos\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\pi+2\pi n$, $n\in Z$, или $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$, $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in Z$; x_2 и x_3 не входят в ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.362. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)-\frac{7}{16}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x-\frac{7}{16}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-3\sin^2 x\cos^2 x-\frac{7}{16}=0\Leftrightarrow 16-12\left(4\sin^2 x\cos^2 x\right)-7=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2 2x=\frac{3}{4},\ \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

8.363. $\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2\cos x(\cos x-1)$.

Решение.

Так как $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, то имеем

$$3\sin x-4\sin^3 x+\sin x-2\sin x\cos x-2\cos x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4\sin x-4\sin^3 x-2\sin x\cos x\right)-2\cos x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(2-2\left(1-\cos^2 x\right)-\cos x\right)-2\cos x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(2\cos^2 x-\cos x\right)-2\cos x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x-1)-2\cos x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x(2\cos x-1)-\cos x+1\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos x=0$, $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$;

2) $2\sin x\cos x-\sin x-\cos x+1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(1+2\sin x\cos x)-(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)-(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2-(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда а) $\sin\frac{x}{2}=0$; б) $\sin x+\cos x=0$; в) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$.

Тогда а) $\frac{x}{2}=\pi n$, $x_2=2\pi n$, $n\in Z$; б) $\operatorname{tg}x=-1$, $x_3=-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $l\in Z$;

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi t$, $x_4=\frac{\pi}{2}+2\pi t$, $t\in Z$. Решения x_4 входят в x_1.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$; $x_2=2\pi n$, $n\in Z$; $x_3=\frac{\pi}{4}(4l-1)$, $l\in Z$.

8.364. $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot(\cos x+\sin x)$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot(\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)\left(\cos x-\sin x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x+\sin x=0$, 2) $\cos x-\sin x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=0$.

1) $\operatorname{tg}x=-1$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k\in Z$.

2) $\cos x-\sin x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)-\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=0.$$

Тогда

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0$, $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\pi n$, $x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$;

или

$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+\pi m$,

$x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{3}(6n-1)$, $n\in Z$;

$x_3=\frac{\pi}{6}(12m-1)$, $m\in Z$.

8.365. $2(1+\sin 2x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$

Решение.

ОДЗ: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$2\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)^2-\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)^2-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)^2+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(2(\sin x+\cos x)+\frac{1}{\sin x-\cos x}\right)=0.$$

Отсюда 1) $\sin x+\cos x=0$, 2) $2(\sin x+\cos x)+\frac{1}{\sin x-\cos x}=0.$

1) $\operatorname{tg}x=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

2) $2\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+1=0,\ \cos 2x=\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,$

$x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1);\ x_2=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, где k и $n\in Z.$

8.366. $\dfrac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем

$$1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)+(1+2\sin x\cos x)+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)+\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)+(\cos x-\sin x)\times$$

$$\times(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)+(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)\times$$

$$\times(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos x+\sin x+\cos x-\sin x)=0,$$

$$(\cos x+\sin x)(1+2\cos x)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x+\sin x=0$, 2) $1+2\cos x=0.$

1) $\operatorname{tg} x=-1,\ x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

2) $\cos x=-\dfrac{1}{2},\ x_2=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2\pi n=\dfrac{2\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z;$ x_1 не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=\dfrac{2\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

8.367. $\dfrac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t}-\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t}=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \cos 2t\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin 2t}{\cos 2t\cos^2 t}-\frac{\sin t}{\cos t\cos^2 2t}=0,\ \frac{\sin 2t\cos 2t-\sin t\cos t}{\cos^2 t\cos^2 2t}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin t\cos t\cos 2t-\sin t\cos t}{\cos^2 t\cos^2 2t}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin t\cos t(2\cos 2t-1)}{\cos^2 t\cos^2 2t}=0,$$

$$\frac{\sin t(2\cos 2t-1)}{\cos t\cos^2 2t}=0 \Leftrightarrow \sin t(2\cos 2t-1)=0.$$

Тогда

1) $\sin t = 0,\ t_1 = \pi k,\ k \in Z;$

2) $2\cos 2t - 1 = 0,\ \cos 2t = \frac{1}{2},\ 2t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ t_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $t_1 = \pi k,\ t_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где k и $n \in Z$.

8.368. $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}3x = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$

Так как $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ и $\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, то имеем

$$\operatorname{tg}x + \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\left(1 + \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}x\left(2\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 3\right)}{\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)\left(1-3\operatorname{tg}^2 x\right)} = 0.$$

Отсюда 1) $\operatorname{tg}x = 0,\ x_1 = \pi n,\ n \in Z;$ 2) $2\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.$ Решив уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}^2 x$, найдем

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = \operatorname{arctg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k = \pm\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z;$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3,\ \ \operatorname{tg}x = \pm 3,\ \ x_3 = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{3}\right) + \pi m = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1),\ m \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \pi n,\ n \in Z;\ x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2},\ k \in Z;\ x_3 = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1),\ m \in Z.$

8.369. $\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x = \sin x + \cos x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-(\cos x+\sin x)\sin x\cos x=0,$$

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x+\sin x)\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-\sin x\cos x)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x+\sin x=0$; 2) $\cos x-\sin x-\sin x\cos x=0$.

1) $\operatorname{tg} x=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

2) Пусть $\cos x-\sin x=y \Rightarrow \cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x=y^2, -2\sin x\cos x=$ $=y^2-1,\ -\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Относительно y уравнение принимает вид $y+\frac{y^2-1}{2}=0,\ y^2+2y-1=0$, откуда $y_1=-1-\sqrt{2},\ \varnothing;\ y_2=-1+\sqrt{2}$. Отсюда

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\pi n,\ x_2=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1);\ x_2=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}(4n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.370. $\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}=2.$

Решение.

Пусть

$$\begin{cases}\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}=u>0,\\ \sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}=v>0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2 x+\frac{1}{2}=u^2>0,\\ \sin^2 x+\frac{1}{2}=v^2>0.\end{cases} \Rightarrow\ u^2+v^2=2.$$

Получили следующую систему

$$\begin{cases} u+v=2, \\ u^2+v^2=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ (u+v)^2-2uv=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ uv=1. \end{cases} \Rightarrow \ u=1,\ v=1.$$

Тогда

$$\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}=1,\ \cos^2 x+\frac{1}{2}=1,\ \cos^2 x=\frac{1}{2},\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.371. $\sin 3x=a\sin x.$

Решение.

По формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ имеем

$$3\sin x-4\sin^3 x-a\sin x=0,\ \ 4\sin^3 x+(a-3)\sin x=0,$$

$$\sin x\left(4\sin^2 x+a-3\right)=0.$$

Отсюда

1) $\sin x=0,\ x_1=\pi k,\ k\in Z;$

2) $4\sin^2 x+a-3=0,\ \sin^2 x=\frac{3-a}{4}\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{3-a}{4},\ \cos 2x=\frac{a-1}{2},$

$$\begin{cases} 2x=\pm\arccos\frac{a-1}{2}+2\pi n, \\ -1\le\frac{a-1}{2}\le 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}+\pi n,\ n\in Z, \\ -1\le a\le 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=\pi k$, где $a\in R$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}+\pi n$, где $a\in[-1;3]$; k и $n\in Z.$

8.372. $\cos 3x=m\cos x.$

Решение.

По формуле $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ имеем

$$4\cos^3 x-3\cos x-m\cos x=0,\ \ \cos x\left(4\cos^2 x-3-m\right)=0.$$

Отсюда

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $4\cos^2 x-3-m=0 \Leftrightarrow 2(1+\cos 2x)=m+3$, $\cos 2x=\dfrac{m+1}{2}$,

$$\begin{cases}2x=\pm\arccos\dfrac{m+1}{2}+2\pi n, \\ -1\le\dfrac{m+1}{2}\le 1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{m+1}{2}+\pi n, n\in Z. \\ -3\le m\le 1.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, где $m\in R$; $x_2=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{m+1}{2}+\pi n$, где $m\in[-3;1]$; k и $n\in Z$.

8.373. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\alpha+1=\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\ne 0, \\ \cos\alpha\ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\alpha=-(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\alpha)\Rightarrow\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\alpha}=-1\Rightarrow\operatorname{tg}(x+\alpha)=-1,$$

$$x+\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=-\alpha-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Из ОДЗ следует, что $\alpha\ne\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $x=-\alpha+\dfrac{\pi}{4}(4k-1)$ при $\alpha\ne\dfrac{\pi}{4}, k\in Z$. При $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ решений нет.

8.374. $12\sin x+4\sqrt{3}\cos(\pi+x)=m\sqrt{3}$.

Решение.

Из условия имеем

$$12\sin x-4\sqrt{3}\cos x=8\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=8\sqrt{3}(\sin 60^\circ\sin x-$$

$$-\cos 60^\circ\cos x)=-8\sqrt{3}\cos(60^\circ+x)=8\sqrt{3}\sin(x-30^\circ).$$

Тогда

$$8\sqrt{3}\sin(x-30^\circ)=m\sqrt{3},\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{m}{8},$$

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{m}{8}+\pi n+\frac{\pi}{6}=(-1)^n\arcsin\frac{m}{8}+\frac{\pi}{6}(6n+1),$$

где $-8\le m\le 8$, $n\in Z$.

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{m}{8}+\dfrac{\pi}{6}(6n+1)$, где $-8\le m\le 8$, $n\in Z$.

8.375. $\sin\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)=\cos\alpha.$

Решение.

Из условия имеем

$$2\sin\left(x+\frac{3}{2}\right)\cos 1=\cos\alpha,\ \sin\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x+\frac{3}{2}=(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}+\pi k, \\ -1\le\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}-\frac{3}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ -2\cos 1\le\cos\alpha\le 2\cos 1. \end{cases}$$

Ответ: $x=(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}-\frac{3}{2}+\pi k$ при $\alpha\in R,\ k\in Z.$

8.376. $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x}=4.$

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{x}{2}\ne 0.$

Запишем уравнение в виде

$$2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x}=2^2\Leftrightarrow\ 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(1-\cos x)}{\sin x}-\cos x-2=0\Rightarrow\ 2-2\cos x-\sin x\cos x-2\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2(\cos x+\sin x)-\sin x\cos x=0.$$

Пусть $\cos x+\sin x=y\Rightarrow\ \cos^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=y^2,\ 2\sin x\cos x=$ $=y^2-1,\ \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}.$

Относительно y уравнение принимает вид $2-2y+\frac{1-y^2}{2}=0,$ $y^2+4y-5=0,\ y_1=-5,\ y_2=1.$

1) $\sin 2x = 24, \varnothing$;

2) $\sin 2x = 0,\ 2x = \pi k,\ x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Учитывая ОДЗ, имеем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k+1),\ k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4k+1),\ k \in Z.$

8.377. $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{1-\sin^2 x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sin^2 x}\right)^2 - 6\left(2^{\sin^2 x}\right) + 8 = 0.$$

Решив его как квадратное относительно $2^{\sin^2 x}$, получим

1) $2^{\sin^2 x} = 2,\ \sin^2 x = 1,\ \sin x = \pm 1,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z;$

2) $2^{\sin^2 x} = 2^2,\ \sin^2 x = 2,\ \varnothing.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z.$

8.378. $3^{1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots} = \sqrt[3]{9}.$

Решение.

Из условия имеем

$$3^{1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 1 + \sin x + \ldots + \sin^n x + \ldots = \frac{2}{3}.$$

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем

$$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{2}{3},\ \sin x = -\frac{1}{2},\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

8.379. $2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^n x+\ldots} = \sqrt[3]{0{,}25}.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^n x+\ldots} = 2^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^n x+\ldots=-\frac{2}{3}.$$

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем

$$-\frac{1}{1+\cos x}=-\frac{2}{3},\ \cos x=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\ k\in Z.$

8.380. $9^{1-\cos 6x}=3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$3^{2-2\cos 6x}=3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}\Leftrightarrow\ 2-2\cos 6x=\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x},\ 2-2\cos 6x-\operatorname{tg} 3x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos 6x-\frac{\sin 6x}{1+\cos 6x}=0\Leftrightarrow\ 2\sin^2 6x-\sin 6x=0,$$

$$\sin 6x(2\sin 6x-1)=0\Rightarrow\ 2\sin 6x-1=0,\ \sin 6x=\frac{1}{2},$$

$$6x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6},\ \ k\in Z;\ \ \sin 6x\neq 0.$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6},\ k\in Z.$

8.381. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$81^{\sin^2 x}+81^{1-\sin^2 x}-30=0\Leftrightarrow\left(81^{\sin^2 x}\right)^2-30\left(81^{\sin^2 x}\right)+81=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $81^{\sin^2 x}$, получим

$81^{\sin^2 x}=3,\ 3^{4\sin^2 x}=3$ или $81^{\sin^2 x}=27,\ 3^{4\sin^2 x}=3^3\Rightarrow$

1) $4\sin^2 x=1,\ \sin x=\pm\frac{1}{2},\ x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

2) $4\sin^2 x=3,\ \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ x_2$ входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1), k\in Z.$

8.382. $1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot4^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos^{-1}x}.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq0$.

Из условия имеем

$$1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot2^{2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x}{\sqrt{2}\cos x}\right)}\Leftrightarrow1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot2^{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot2^{1-\operatorname{tg}x},1+2^{\operatorname{tg}x}-\frac{3\cdot2}{2^{\operatorname{tg}x}}=0\Leftrightarrow(2^{\operatorname{tg}x})^2+2^{\operatorname{tg}x}-6=0.$$

Решив уравнение как квадратное относительно $2^{\operatorname{tg}x}$, имеем

1) $2^{\operatorname{tg}x}=-3,\ \varnothing;$

2) $2^{\operatorname{tg}x}=2\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.383. $\log_{\cos x}4\cdot\log_{\cos^2 x}2=1.$

Решение.

ОДЗ: $0<\cos x<1$.

Перейдем к основанию $\cos x$. Получаем

$\frac{1}{2}\log_{\cos x}2^2\cdot\log_{\cos x}2=1,\ \log^2_{\cos x}2=1.$

Отсюда

1) $\log_{\cos x}2=1\Leftrightarrow\cos x=2,\ \varnothing;$

2) $\log_{\cos x}2=-1,\ \frac{1}{\cos x}=2,\ \cos x=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(6k\pm1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm1),\ k\in Z.$

8.384. $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4.$

Решение.

ОДЗ: $0 < \sin x < 1.$

Перейдем к основанию $\sin x$. Имеем

$$\log_{\sin x} 2^2 \cdot \frac{1}{2}\log_{\sin x} 2 = 4, \ \log^2_{\sin x} 2 = 4.$$

Отсюда

1) $\log_{\sin x} 2 = 2, \ \sin^2 x = 2, \ \varnothing;$

2) $\log_{\sin x} 2 = -2, \ \dfrac{1}{\sin^2 x} = 2, \ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}, \ \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Учитывая ОДЗ, $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$

8.385. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x > 0.$

Из условия имеем

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - 1 + 2\sin^2 x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_2 \sin x)^2 + 2(\log_2 \sin x) - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\log_2 \sin x$, получим

$\log_2 \sin x = 3, \ \sin x = 8, \ \varnothing;$

или

$\log_2 \sin x = -1, \ \sin x = \dfrac{1}{2}, \ x_2 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z.$

8.386. Дано $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2.$ Найти $x + y.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=2,\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y.\Rightarrow\ \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x+y)=1,\ x+y=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x+y=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.387. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}3x+\frac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0$ не имеет корней.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}+\frac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x}{\sin 2x\sin 3x}+\frac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 2x\sin 3x}+\frac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0\Leftrightarrow\ \sin 5x\sin x+1=0,$$

$$2\sin 5x\sin x=-2\Leftrightarrow\ \cos 4x-\cos 6x=-2\Leftrightarrow\ \begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \cos 6x=1.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $4x=\pi+2\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},$ $k\in Z.$ Тогда из второго уравнения системы имеем $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi k\right)\neq 1,\ \varnothing.$

8.388. Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению $\sin^3 x+\sin x\sin 2x-3\cos^3 x=0.$ Показать, что треугольник равнобедренный.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 x+\sin x\cdot 2\sin x\cos x-3\cos^3 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3x+2\operatorname{tg}^2x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}^2x-3=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}x-1)+3(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+1)=0,$$

$$(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x+3\right)=0.$$

Отсюда 1) $\operatorname{tg}x-1=0$, $\operatorname{tg}x=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}$. Так как треугольник прямоугольный, то второй угол $x_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$; $x_1=x_2=\frac{\pi}{4}$, что и требовалось доказать; $\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x+3\neq 0$ $(D<0),\varnothing$.

8.389. Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению

$$(3\cos x-2)\left(14\sin^2 x+\sin 2x-12\right)=0.$$

Решение.

Уравнение равносильно совокупности уравнений

1) $3\cos x-2=0$ или 2) $14\sin^2 x+\sin 2x-12=0$.

1) $\cos x=\frac{2}{3}$. Тогда $\sin x=+\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) $14\sin^2 x+2\sin x\cos x-12\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x-6\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-6=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x$, получим $\operatorname{tg}x=-3$ или $\operatorname{tg}x=2$. Пусть $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{5}}{2}=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}x=-3=\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}x=2=\operatorname{tg}\gamma$, где α, β, γ — углы треугольника. Так как сумма углов треугольника $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\beta+\gamma=\pi-\alpha$, то

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{tg}\alpha,\ \frac{-3+2}{1+3\cdot 2}=-\frac{1}{7}\neq\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Противоречие. Таким образом доказано, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению $(3\cos x-2)\left(14\sin^2 x+\sin 2x-12\right)=0.$

8.390. Показать, что существуют треугольники, у которых каждый угол удовлетворяет уравнению $(65\sin x-56)(80-64\sin x-65\cos^2 x)=0$. Найти эти углы.

Решение.

Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

1) $65\sin x-56=0$ или 2) $80-64\sin x-65\cos^2 x=0$.

1) $\sin x=\frac{56}{65}.$

2) $80-64\sin x-65(1-\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow 65\sin^2 x-64\sin x+15=0,$

откуда $\sin x=\frac{5}{13}$ или $\sin x=\frac{3}{5}$.

Пусть $\sin x_1=\frac{3}{5}$, $\sin x_2=\frac{5}{13}$, $\sin x_3=\frac{56}{65}$, где x_1, x_2, x_3 — углы треугольника и $x_1+x_2+x_3=\pi$, или $x_1+x_2=\pi-x_3$. Тогда

$$\sin(x_1+x_2)=\sin(\pi-x_3)=\sin x_3.$$

Отсюда $\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2=\sin x_3$. Из равенства $\sin x_1=\frac{3}{5}$ получаем

$$\sin^2 x_1=\frac{9}{25},\ 1-\cos^2 x_1=\frac{9}{25},\ \cos x_1=\pm\frac{4}{5}.$$

Так как $\sin x_2=\frac{5}{13}$, то имеем

$$\sin^2 x_2=\frac{25}{169},\ 1-\cos^2 x_2=\frac{25}{169},\ \cos x_2=\pm\frac{12}{13}.$$

Подставляя значения $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\cos x_1$ и $\cos x_2$ в уравнение, находим, что $x_1=\arcsin\frac{3}{5}$, $x_2=\arcsin\frac{5}{13}$, $x_3=\pi-\arcsin\frac{56}{65}$.

Ответ: $x_1=\arcsin\frac{3}{5}$, $x_2=\arcsin\frac{5}{13}$, $x_3=\pi-\arcsin\frac{56}{65}$.

8.391. Показать, что треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению $3\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-2\sqrt{3}=0$, является равносторонним.

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{6\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\sqrt{3}=0,$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+6\right)=0,$$

откуда

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{3};$

2) $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+6\neq 0\ (D<0), \varnothing.$

Получили, что треугольник, каждый из углов которого равен $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi\right)$ и удовлетворяет уравнению $3\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\sqrt{3}=$ $=3\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}=0,$ является равносторонним. Что и требовалось доказать.

8.392. Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}, 0<\gamma<\frac{\pi}{2})$.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases}\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta,\\ \cos\beta=\operatorname{tg}\gamma,\\ \cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta},\\ \cos\beta=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma},\\ \cos\gamma=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta},\\ \cos^2\beta=\dfrac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma},\\ \cos^2\gamma=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha},\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}, \\ \cos^2\beta = \dfrac{1-\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma}, \\ \cos^2\gamma = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{cases}$$

Так как $\cos^2\gamma = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, то имеем

$$\cos^2\beta = \frac{1-\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}.$$

Подставив значение $\cos^2\beta = \dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$ в первое уравнение системы находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1-\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}}{\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}} = \frac{2-3\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1} \Leftrightarrow \cos^4\alpha+\cos^2\alpha-1=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos^2\alpha$, имеем $\cos^2\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, $\varnothing$ или $\cos^2\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Отсюда

$$1-\sin^2\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \sin^2\alpha = 1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}-1}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8.393. Найти углы α, β и γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию

Решение.

Пусть α, β и γ — члены арифметической прогрессии, $d=\frac{\pi}{12}$; $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ — члены геометрической прогрессии; $\beta=\alpha+\frac{\pi}{12}$, $\gamma=\alpha+\frac{\pi}{6}$.

По свойству членов геометрической прогрессии

$b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}, k=2,3,\ldots,n-1$, следовательно $\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$,

$$\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Так как $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ и $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$, то имеем

$$\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}-2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}+2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\sqrt{3}+2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\sqrt{3}-2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=0,\ 2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ 2\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{6},\ \alpha=\frac{\pi}{6}.$

Тогда $\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$

Решить системы уравнений **(8.394—8.405)**:

8.394. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решение.

Запишем данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ (\sin x+\cos y)^2-2\sin x\cos y=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin x\cos y=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y=-\sin x,\ \sin x\cdot(-\sin x)=-\frac{1}{4},\ \sin^2 x=\frac{1}{4},\ \sin x=\pm\frac{1}{2}.$$

Таким образом данная система равносильна следующей совокупности двух систем уравнений:

а) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решив системы, найдем

$$\begin{cases}x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\\ y_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\end{cases}\ \begin{cases}x_2=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k,\\ y_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\end{cases}\quad k,\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ y_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,$

$x_2=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ y_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,$ где k и $n\in Z.$

8.395. $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg}x+\cos y}=3, \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0$.

Из условия имеем

$$\begin{cases} 81^{\operatorname{tg}x}\cdot 9^{\cos y}=3, \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2, \end{cases} \Rightarrow\ 9^{\cos y}=2+81^{\operatorname{tg}x},\ 81^{\operatorname{tg}x}\cdot\left(2+81^{\operatorname{tg}x}\right)=3,$$

$$\left(81^{\operatorname{tg}x}\right)^2+2\left(81^{\operatorname{tg}x}\right)-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $81^{\operatorname{tg}x}$, получим $81^{\operatorname{tg}x}=-3$, $\varnothing$; $81^{\operatorname{tg}x}=1$. Отсюда $\operatorname{tg}x=0$, $x=\pi k_1$, $k_1\in Z$.

Тогда

$$9^{\cos y}=2+1=3,\ 3^{2\cos y}=3,\ 2\cos y=1,\ \cos y=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k_2,\ k_2\in Z.$$

Ответ: $x=\pi k_1$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k_2$, где k_1 и $k_2\in Z$.

8.396. $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем

$$x=\frac{5\pi}{3}+y,\ \ \sin\left(\frac{5\pi}{3}+y\right)-2\sin y=0,\ \ -\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right)-2\sin y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin\frac{\pi}{3}\cos y+\cos\frac{\pi}{3}\sin y-2\sin y=0\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\cos y+3\sin y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}y=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ y=-\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k-1),\ \ k\in Z.$$

Тогда $x=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{3\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y=\frac{\pi}{6}(6k-1)$, где $k\in Z$.

8.397. $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}25,\\ \sin y\cos x=0{,}75.\end{cases}$

Решение.

Сложим и вычтем первое и второе уравнения системы. Получаем

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\sin y\cos x=1,\\ \sin x\cos y-\sin y\cos x=-\dfrac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=-\dfrac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k_1,\\ x-y=(-1)^{k_2}\dfrac{\pi}{6}+\pi k_2,\end{cases}\quad k_1 \text{ и } k_2\in Z\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2),\ \ y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2);\ \ x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2),$$

$$y_2=\frac{2}{3}\pi+\pi(k_1+k_2);\ \ k_1 \text{ и } k_2\in Z.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2),\ y_1=\dfrac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2);$

$x_2=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2),\ \ y_2=\dfrac{2}{3}\pi+\pi(k_1+k_2);$ где k_1 и $k_2\in Z.$

8.398. $\begin{cases}x-y=-\dfrac{1}{3},\\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Решение.

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2\pi x)-\frac{1}{2}(1-\cos 2\pi y)=\frac{1}{2},\ \ \cos 2\pi x+\cos 2\pi y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{2\pi x+2\pi y}{2}\cos\frac{2\pi x-2\pi y}{2}=1,\ \ 2\cos\pi(x+y)\cos\pi(x-y)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\pi(x+y)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1,\ \ 2\cos\pi(x+y)\cdot\frac{1}{2}=1,\ \ \cos\pi(x+y)=1,$$

$$\pi(x+y)=2\pi k,\ \ x+y=2k,\ \ k\in Z.$$

Таким образом получим

$$\begin{cases} x-y=-\frac{1}{3}, \\ x+y=2k, k\in Z. \end{cases} \Rightarrow x=k-\frac{1}{6}, y=k+\frac{1}{6}, \text{ где } k\in Z.$$

Ответ: $x=k-\frac{1}{6},\ y=k+\frac{1}{6}$, где $k\in Z$.

8.399. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\frac{1}{6}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \cos y\neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем

$$x=\frac{\pi}{4}-y,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\operatorname{tg}y=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}y\right)\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}y}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{(1-\operatorname{tg}y)\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}y}=\frac{1}{6},\ 6\operatorname{tg}^2 y-5\operatorname{tg}y+1=0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}y$, получим $\operatorname{tg}y_1=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}y_2=\frac{1}{3}$. Подставив эти значения во второе уравнение системы, найдем $\operatorname{tg}x_1=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}x_2=\frac{1}{2}$. Отсюда

$$\begin{cases} x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k, \\ y_1=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n, \\ y_2=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n; \end{cases} k,\ n\in Z.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k, \\ y_1=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k; \end{cases} \begin{cases} x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n, \\ y_2=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n; \end{cases} k,\ n\in Z.$

8.400. $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y.\end{cases}$

Решение.

Возведя оба уравнения системы в квадрат, получим

$$\begin{cases}2\sin^2 x=\sin^2 y,\\ 2\cos^2 x=3\cos^2 y.\end{cases} \Rightarrow\ 2=\sin^2 y+3\cos^2 y,\ 2\sin^2 y+3\left(1-\sin^2 y\right),$$

$\sin^2 y=\frac{1}{2},\ \sin y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k_1,\ k_1\in Z.$

Тогда $2\sin^2 x=\sin^2 y=\frac{1}{2},\ \ \sin^2 x=\frac{1}{4},\ \ \sin x=\pm\frac{1}{2},\ \ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k_2,$ $k_2\in Z.$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k_2,\ y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k_1;\ k_2$ и $k_1\in Z;\ k_2$ и k_1 — числа одной четности.

8.401. $\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2,\\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=-1{,}8.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \sin y\neq 0.\end{cases}$

Используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2-\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=-1{,}8.\end{cases} \Rightarrow\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=2-\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1-\left(2-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}=-1{,}8;\ \ 4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{2}$. Далее имеем

$$1)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{y_1}{2}=\frac{5}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{y_2}{2}=-\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases}\frac{x_1}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k_1,\\ \frac{y_1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi k_2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_1,\\ y_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_2.\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\frac{x_2}{2}=\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi k_1,\\ \frac{y_2}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k_2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_1,\\ y_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_2,\end{cases} \text{где } k_1 \text{ и } k_2 \in Z.$$

Ответ: $x_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_1$, $y_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_2$;

$x_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_1$, $y_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_2$, где k_1 и $k_2\in Z$.

8.402. $\begin{cases}2^{\cos x}+2^{\cos^{-1} y}=5,\\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{-1} y}=4.\end{cases}$

Решение.

Из условия имеем

$$2^{\cos^{-1} y}=5-2^{\cos x},\ 2^{\cos x}\cdot\left(5-2^{\cos x}\right)=4,\ \left(2^{\cos x}\right)^2-5\left(2^{\cos x}\right)+4=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $2^{\cos x}$, получим

$$2^{\cos x}=1,\ \cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z$$

или

$$2^{\cos x}=2^2,\ \cos x=2,\ \varnothing.$$

Подставив значение $2^{\cos x}=1$ в первое уравнение системы, найдем $2^{\cos^{-1} y}=4,\ \cos^{-1} y=2,\ \cos y=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k_1=\frac{\pi}{3}(6k_1\pm 1),\ k_1\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ y=\frac{\pi}{3}(6k_1\pm 1)$, где k и $k_1\in Z$.

8.403. $\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}75,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos y\neq 0.\end{cases}$

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=3\Leftrightarrow\ \frac{0{,}75}{\cos x\cos y}=3,\ \cos x\cos y=0{,}25.$$

Тогда данная система имеет вид

$$\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}75,\\ \cos x\cos y=0{,}25.\end{cases}$$

Сложив второе уравнение этой системы с первым, а затем вычтя из второго уравнения первое, получим

$$\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=1,\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=-\frac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y=2\pi k_1,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k_2,\end{cases} k_1 \text{ и } k_2\in Z.\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2),\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_2-k_1),\end{cases} k_1 \text{ и } k_2\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2),\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_2-k_1),\ k_1$ и $k_2\in Z.$

8.404. $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=0{,}25,\\ x+y=\frac{5\pi}{6}.\end{cases}$

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}(1+\cos 2y)=0{,}25,\ \cos 2x+\cos 2y=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(x+y)\cos(x-y)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow\ 2\cos\frac{5\pi}{6}\cos(x-y)=-\frac{3}{2},$$

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x-y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z.$$

Отсюда исходная система принимает вид

$$\begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x+y=\dfrac{5\pi}{6}, \end{cases} k\in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x+y=\dfrac{5\pi}{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x+y=\dfrac{5\pi}{6}, \end{cases} \end{array}\right. k\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1), \\ y_1=\dfrac{\pi}{3}-\pi k=\dfrac{\pi}{3}(1-3k); \end{cases} \begin{cases} x_2=\dfrac{\pi}{3}+\pi k, \\ y_2=\dfrac{\pi}{2}-\pi k, \end{cases} k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ y_1=\frac{\pi}{3}(1-3k);$

$$x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1),\ \ y_2=\frac{\pi}{2}(1-2k),\ k\in Z.$$

8.405. $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}25, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Решение.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow\ \cos(x-y)-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \cos(x-y)=1,$$

$$x-y=2\pi k,\ \ k\in Z.$$

Таким образом исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x-y=2\pi k, k\in Z, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, \\ y=\dfrac{\pi}{6}-\pi k, \end{cases} k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k+1),\ y=\frac{\pi}{6}(1-6k),\ k\in Z.$

Решения к главе 9

НЕРАВЕНСТВА

НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные функции переменной x (одна из них может быть постоянной), называются *неравенствами с одним неизвестным*.

Переменная величина x называется неизвестной. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — алгебраические выражения, то неравенство называется алгебраическим.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в тождественное (истинное).

Решить неравенство с одним неизвестным — значит найти множество (совокупность) всех его решений или показать, что оно не имеет решений.

Областью допустимых значений неизвестного данного неравенства (ОДЗ) или областью определения неравенства называют множество всех значений неизвестного, при которых существуют обе части неравенства.

Равносильные неравенства и основные теоремы о равносильности неравенств

Так как рассматриваемые ниже понятия и свойства неравенств одинаковы для неравенств $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, то будем рассматривать только неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Пусть даны два неравенства с одним неизвестным

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{9.1}$$

$$g_1(x) > g_2(x).$$

Неравенство (9.2) называется следствием неравенства (9.1), если все решения неравенства (9.1) есть решения неравенства (9.2) или неравенство (9.1) не имеет решений.

Два неравенства (с одним неизвестным) называются равносильными (эквивалентными), если каждое из них является следствием другого.

Если над обеими частями неравенства с одним неизвестным произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и в результате тождественных преобразований получилось неравенство $f_3(x) > f_4(x)$ с той же областью определения, то они равносильны.

Если к каждой части данного неравенства прибавить одно и то же число или выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и $m(x)$ — число или выражение, имеющее смысл при всех значениях x из D, то неравенство $f_1(x) + m(x) > f_2(x) + m(x)$ равносильно данному.

Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или выражение, принимающее положительные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то полученное неравенство того же смысла будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то получим равносильное данному неравенство противоположного смысла, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ и число или выражение $m(x) < 0$ при всех x из ОДЗ неравенства, то неравенство $f_1(x) \cdot m(x) < f_2(x) \cdot m(x)$ будет равносильно данному.

Неравенство $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

Неравенство $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \geq f_2(x),$$
$$f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \leq f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейные функции переменной x (одна из которых может быть постоянной), называются неравенствами первой степени с одним неизвестным.

Всякое линейное неравенство с одним неизвестным всегда можно привести к каноническому виду

$$ax + b > 0. \tag{9.3}$$

Решение неравенства $ax + b > 0$

Если $a > 0$, то после умножения обеих частей неравенства на $\frac{1}{a} > 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} > 0$, из которого последует $x > -\frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то после умножения обеих частей данного неравенства на $\frac{1}{a} < 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} < 0$, из которого следует $x < -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то при $b \leq 0$ для любого действительного значения x неравенство обращается в неверное, т.е. решений не имеет, а при $b > 0$ данное неравенство верно при всех действительных значениях x, т.е. все действительные числа являются решениями неравенства.

Решение неравенств второй степени (квадратных) с одним неизвестным

Неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного не выше второй степени, причем хотя бы один из них второй степени, называется неравенством второй степени с одним неизвестным.

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным (квадратное неравенство) можно привести к одному из его канонических видов:

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c\geq 0, \\ &ax^2+bx+c<0, \quad ax^2+bx+c\leq 0, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где $x \neq 0$.

Решение неравенства $ax^2+bx+c>0$ $(a \neq 0)$

Если $a>0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$$

или

$$x^2+px+q>0, \tag{9.5}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$$

или

$$x^2+px+q<0, \tag{9.6}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Другие неравенства вида (9.4) также приводятся к виду, аналогичному (9.5) или (9.6).

Исследование трехчлена $x^2+px+q=0$

Рассмотрим трехчлен

$$x^2+px+q. \tag{9.7}$$

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно разложить на множители с действительными коэффициентами

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ — корни трехчлена $(x_1 < x_2)$.

Если $x < x_1 < x_2$, то $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Если $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q < 0$.

Если $x > x_2 > x_1$, то $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Вывод. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при значениях x, меньших меньшего корня и больших большего корня, и отрицателен при значениях x, лежащих между корнями.

2. Если $D = p^2 - 4q = 0$ $\left(q = \frac{p^2}{4}\right)$, то трехчлен $x^2 + px + q$ принимает вид

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и при всех $x \neq -\frac{p}{2}$ будет положительным, а при $x = -\frac{p}{2}$ равен нулю.

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно представить в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$ при всех x, а $4q - p^2 > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при всех значениях x.

Решение целых рациональных неравенств с одним неизвестным

Целым рациональным алгебраическим неравенством с одним неизвестным называется такое неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного.

Степенью целого рационального алгебраического неравенства с одним неизвестным называется большая из степеней многочленов, входящих в это неравенство.

Всякое целое рациональное алгебраическое неравенство n-й степени с одним неизвестным может быть приведено к одному из канонических видов

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n > 0, \qquad (9.8)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \geq 0 \qquad (9.9)$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n < 0, \qquad (9.10)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \leq 0 \qquad (9.11)$$

$$(a_0 \neq 0).$$

Метод интервалов

Чтобы найти решения неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0 \qquad (9.12)$$

или

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0\ , \qquad (9.13)$$

достаточно нанести на числовую ось нули (корни) левой части неравенства $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а затем проверить знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов путем подстановки любого числа из этого интервала. Тогда множеством всех решений неравенства (9.12)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс, а решением неравенства (9.13)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак минус.

При решении неравенств

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\geq 0$$

и

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\leq 0$$

с помощью метода интервалов, кроме соответствующих интервалов знакопостоянства левых частей неравенств, к их решениям надо относить и их нули (корни).

Обобщенный метод интервалов

Рассмотрим схему решения неравенства (9.8)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n>0 \quad (a\neq 0).$$

Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ в множестве действительных чисел можно представить в виде

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i},$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_k$ — действительные корни соответственно кратности $m_1,m_2,\ldots,m_k$, а трехчлены $x^2+p_1x+q_1,\ldots,x^2+p_ix+q_i$ имеют отрицательные дискриминанты, т.е. при всех x положительны.

Неравенство (9.8) можно переписать в виде

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i}>0.$$

Так как квадратные трехчлены в этом неравенстве принимают положительные значения при всех действительных значениях неизвестного, то оно равносильно неравенству

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}>0.$$

Множители левой части неравенства с нечетными показателями можно оставить в первой степени, а с четными – опустить, выписав те значения x, при которых они обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид

$$a_0\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_s}\right)>0,$$

при $a_0>0$ оно равносильно неравенству

$$\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_s}\right)>0,$$

а при $a_0 < 0$ — неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2})\ldots(x - x_{j_s}) < 0 .$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Дробно-рациональные неравенства

Неравенства вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \tag{9.14}$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0 , \tag{9.15}$$

где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ и $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m \quad (b_0 \neq 0)$ — многочлены переменной x, называются дробно-рациональными неравенствами.

При решении таких неравенств пользуются следующими утверждениями:

1. Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) > 0.$$

2. Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

3. Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) < 0.$$

4. Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \leq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых рациональных неравенств.

При решении дробно-рациональных неравенств нужно придерживаться следующей схемы:

а) перенести все члены неравенства в левую часть;

б) привести все члены левой части неравенства к общему знаменателю;

в) заменить дробные неравенства целыми;

г) разложить левую часть полученного неравенства на простейшие множители;

д) привести полученное неравенство к виду (9.12) или (9.13);

е) найти решения полученного неравенства по методу интервалов.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Системой неравенств с одним неизвестным называется несколько неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.

При решении системы неравенств с одним неизвестным обычно решают каждое из неравенств системы, а затем находят пересечение множеств полученных решений.

Решить систему неравенств с одним неизвестным – значит найти множество всех ее решений или показать, что система не имеет решений.

НЕРАВЕНСТВА С НЕИЗВЕСТНЫМ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком абсолютной величины (модуля), используется определение абсолютной величины:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезным применить геометрический смысл модуля числа, согласно которому $|x|$ есть расстояние от точки x числовой прямой до начала отсчета, а $|x-a|$ — это расстояние на числовой прямой между точками x и a.

Рассмотрим неравенство

$$f(|x|) < g(x), \tag{9.16}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции.

Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| < g(x), \tag{9.17}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} g(x) \leq 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| > g(x), \tag{9.18}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} g(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ неравенства } (9.18). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| < g(x), \tag{9.19}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| < g(x) \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| < g(x). \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно двойному неравенству

$$-g(x) < f(|x|) < g(x).$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| > g(x), \tag{9.20}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| > g(x) \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| > g(x) \end{cases}.$$

Во-вторых, оно также равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x). \end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \tag{9.21}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком постоянства знака как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединив решения на всех промежутках, получим множество всех решений неравенства.

Некоторые неравенства вида (9.21) $|f(x)| \geq |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$, т.е. возведением обеих частей исходного неравенства в квадрат.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Алгебраическое неравенство называется иррациональным, если его неизвестное входит под знак корня.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются только арифметические, а корни нечетной степени рассматриваются на всей числовой оси (при всех действительных значениях подкоренных выражений).

Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех значениях неизвестного из области допустимых, возвести в любую натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

причем при всех x из ОДЗ $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то неравенство

$$(f_1(x))^n > (f_2(x))^n$$

равносильно данному.

Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то неравенство $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ равносильно данному.

В частности, неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.22}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.23}$$

равносильно неравенству $f(x) < g(x)$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.24}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}, \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.25}$$

равносильно неравенству $f(x) < (g(x))^{2n+1}$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.26}$$

равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases}$$

а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.27}$$

равносильно неравенству $f(x) > (g(x))^{2n+1}$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении показательных неравенств используются следующие правила:

1) Если $a>1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)}<a^{f_2(x)} \tag{9.28}$$

равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)}>a^{f_2(x)} \tag{9.29}$$

равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$.

2) Если $0<a<1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)}<a^{f_2(x)} \tag{9.30}$$

равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)}>a^{f_2(x)} \tag{9.31}$$

равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$.

3) Если $a>1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x)<\log_a f_2(x), \tag{9.32}$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \tag{9.33}$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$.

4) Если $0<a<1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x)<\log_a f_2(x), \tag{9.34}$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \tag{9.35}$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Тригонометрическим неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся:

1. Неравенство $\sin x > a$. Если $a < -1$, то решением неравенства будет любое действительное число. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z \quad (9.36)$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

2. Неравенство $\sin x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z \quad (9.37)$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x.

3. Неравенство $\cos x > a$. Если $a < -1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z \quad (9.38)$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство $\cos x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z \quad (9.39)$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех значениях x.

5. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \quad (9.40)$$

6. Неравенство $\operatorname{tg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z \quad (9.41)$$

7. Неравенство $\operatorname{ctg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z \ . \qquad (9.42)$$

8. Неравенство $\operatorname{ctg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z \ . \qquad (9.43)$$

В случае нестрогих неравенств к решениям присоединяются соответствующие концы интервалов.

9.096. Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных чисел не меньше 9.

Решение.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. Докажем, что $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Имеем

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9, \ \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 6,$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+2 \geq 6,$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq 0, \text{ неравенство истинно.}$$

Что и требовалось доказать.

9.097. Доказать, что если a — любое действительное число, то верно неравенство $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.

Решение.

Имеем

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}-2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\left(a^2+a+1\right)-2\sqrt{a^2+a+1}+1}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+a+1}-1\right)^2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geq 0,$$ неравенство истинно, т.к. $\left(\sqrt{a^2+a+1}-1\right)^2\geq 0$

и $\sqrt{a^2+a+1}>0$ при $a\in R$. Что и требовалось доказать.

9.098. Найти все значения p, при которых выражение

$\lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$ определено для любых x.

Решение.

ОДЗ: $(p-1)x^2+2px+3p-2>0$.

Неравенство $Ax^2+Bx+C>0$ выполняется для всех $x\in R$, когда $B^2-4AC<0$, $A>0$, т.е. когда $\begin{cases}p^2-(p-1)(3p-2)<0,\\ p-1>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2p^2-5p+2>2,\\ p>1\end{cases}\Leftrightarrow (p>2).$$

Ответ: $p\in(2;\infty)$.

9.099. Найти все значения a, при которых выражение

$\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$ имеет смысл для любых $x\in R$.

Решение.

ОДЗ: $(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3\geq 0$.

Неравенство $Ax^2+Bx+C\geq 0$ выполняется для всех $x\in R$, когда $B^2-4AC\leq 0$, $A>0$, т.е. когда

$$\begin{cases}(a-1)^2-(a+1)(3a-3)\leq 0,\\ a+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(a+2)\geq 0,\\ a+1>0\end{cases}\Leftrightarrow (a\geq 1).$$

Ответ: $a\in[1;\infty)$.

9.100. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству $4^{2+\sqrt{x-1}}+3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 4^{\sqrt{x-1}}+2^{3+\sqrt{x-1}}+5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}$.

Решение.

Представим неравенство в виде

$$16\cdot 2^{2\sqrt{x-1}}+3\cdot 4\cdot 2^{\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 2^{2\sqrt{x-1}}+8\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+5\cdot 2\cdot 2^{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x-1}} - 6 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} - 16 < 0$. Решив это неравенство как квадратное относительно $2^{\sqrt{x-1}}$, имеем $-2 < 2^{\sqrt{x-1}} < 8$. Неравенство $2^{\sqrt{x-1}} > -2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$. Неравенство $2^{\sqrt{x-1}} < 8 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-1}} < 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < 3$, $0 \leq x - 1 < 9$, $1 \leq x < 10$. В ответ запишем целые числа из этого промежутка.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$; $x_7 = 7$; $x_8 = 8$; $x_9 = 9$.

9.101. При каких значениях p оба корня квадратного трехчлена $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5$ отрицательны?

Решение.

По теореме Виета корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ существуют и оба отрицательны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = B^2 - 4AC \geq 0, \\ \dfrac{B}{A} > 0, \\ \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(p+1)^2 - 4(9p-5) \geq 0, \\ 9p - 5 > 0, \\ p + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 7p + 6 \geq 0, \\ p > \dfrac{5}{9}, \\ p > -1, \end{cases} \quad \text{откуда имеем} \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{9} < p \leq 1, \\ p \geq 6. \end{array} \right.$$

Ответ: $p \in \left(\dfrac{5}{9}; 1\right] \cup [6; \infty)$.

9.102. При каких значениях n оба корня уравнения $(n-2)x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ положительны?

Решение.

По теореме Виета корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ существуют и оба положительны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = B^2 - 4AC \ge 0, \\ \dfrac{B}{A} < 0, \\ \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - (n-2)(n+3) \ge 0, \\ \dfrac{n}{n-2} > 0, \\ \dfrac{n+3}{n-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le 6, \\ n^2 + n - 6 > 0, \\ n(n-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n < -3, \\ 2 < n \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left(n \in (-\infty; -3) \cup (2; 6]\right).$$

Ответ: $n \in (-\infty; -3) \cup (2; 6]$.

9.103. При каких значениях m корни уравнения $4x^2 - (3m+1)x - m - 2 = 0$ заключены в промежутке между -1 и 2?

Решение.

Корни уравнения $ax^2 + bx + x = 0$ заключены в промежутке (λ, δ), т.е. $\lambda < x_1 < \delta$ и $\lambda < x_2 < \delta$, когда

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0, \\ a(a\delta^2 + b\delta + c) > 0, \\ a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0, \\ \lambda < -\dfrac{b}{2a} < \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)^2 + 16(m+2) \ge 0, \\ 4(2)^2 - (3m+1)2 - m - 2 > 0, \\ 4(-1)^2 - (3m+1)(-1) - m - 2 > 0, \\ -1 < \dfrac{3m+1}{8} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m + 22m + 33 \ge 0, \\ -7m + 12 > 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ 3m - 15 < 0, \\ 3m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R, \\ m < \dfrac{12}{7}, \\ m > -\dfrac{3}{2}, \\ m < 5, \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2} < m < \frac{12}{7}\right).$$

Ответ: $m \in \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{12}{7}\right)$.

9.104. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2 - 7x + 4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений x?

Решение.

Квадратный трехчлен $ax^2 - 7x + 4a < 0$ для $x \in R$, когда

$$\begin{cases} 49 - 16a^2 < 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > \dfrac{49}{16}, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(a < -\frac{7}{4} \right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{4} \right)$.

9.105. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству $\left| \frac{2}{x-13} \right| > \frac{8}{9}$.

Решение.

Из условия имеем $|x-13| < \frac{9}{4}$, $x \neq 13$, отсюда $-\frac{9}{4} < x - 3 < \frac{9}{4}$, $\frac{43}{4} < x < \frac{61}{4}$,

$x \neq 13$; $x \in \left(\frac{43}{4}; 13 \right) \cup \left(13; \frac{61}{4} \right)$. Целыми решениями из объединения этих интервалов будут $x_1 = 11$; $x_2 = 12$; $x_3 = 14$; $x_4 = 15$.

Ответ: $x_1 = 11$; $x_2 = 12$; $x_3 = 14$; $x_4 = 15$.

9.106. Доказать, что при условии $2y + 5x = 10$ выполняется неравенство $3xy - x^2 - y^2 < 7$.

Решение.

Получаем систему

$$\begin{cases} 2y + 5x = 10, \\ 3xy - x^2 - y^2 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10 - 5x}{2}, \\ \dfrac{3x(10 - 5x)}{2} - x^2 - \left(\dfrac{10 - 5x}{2} \right)^2 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10 - 5x}{2}, \\ 59x^2 - 160x + 128 > 0. \end{cases}$$

Неравенство $59x^2 - 160x + 128 > 0$ выполняется для всех x, т.к. $59 > 0$, $D > 0$.

Что и требовалось доказать.

9.107. Доказать, что если $4b + a = 1$, то выполняется неравенство $a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}$.

Решение.

Имеем

$$\begin{cases} 4b + a = 1, \\ a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ (1 - 4b)^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ 25b^2 - 10b + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ (5b - 1)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство истинно.

Что и требовалось доказать.

9.108. Доказать, что многочлен $m^6 - m^5 + m^4 + m^2 - m + 1$ принимает положительные значения при всех действительных значениях m.

Решение.

Перепишем данный многочлен в виде

$$m^6 + m^2 - (m^5 + m) + (m^4 + 1) = m^2(m^4 + 1) - m(m^4 + 1) + (m^4 + 1) =$$

$= (m^4 + 1)(m^2 - m + 1)$. Так как $m^4 + 1 > 0$ и $m^2 - m + 1 > 0$ при $m \in R$, то $(m^4 + 1)(m^2 - m + 1) > 0$ при $m \in R$.

Что и требовалось доказать.

9.109. Найти область определения функции f, если

$$f(x) = \sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4}.$$

Решение.

Имеем при $x \neq 0$ неравенство

$$4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0,$$

решим его как квадратное относительно $2^{\frac{1}{x}}$. Получим

$$\left[\begin{array}{l}2^{\frac{1}{x}} \ge 4,\\ 2^{\frac{1}{x}} \le \dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{\frac{1}{x}} \ge 2^2,\\ 2^{\frac{1}{x}} \le 2^{-2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x} \ge 2,\\ \dfrac{1}{x} \le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1-2x}{x} \ge 0,\\ \dfrac{1+2x}{x} \le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)x \le 0,\\ x \ne 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)x \le 0,\\ x \ne 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x \le \dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{1}{2} \le x < 0.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

9.110. Найти область определения функции f, если

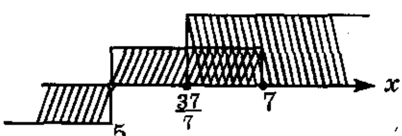
$$f(x) = \sqrt{9 - \left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}.$$

Решение.

Получаем неравенство $9 - \left(\dfrac{4x-22}{x-5}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4x-22}{x-5}\right)^2 \le 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4x-22}{x-5}\right| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le \frac{4x-22}{x-5} \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x-22}{x-5} \le 3,\\ \dfrac{4x-22}{x-5} \ge -3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x-22}{x-5} - 3 \le 0,\\ \dfrac{4x-22}{x-5} + 3 \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-7}{x-5} \le 0,\\ \dfrac{7x-37}{x-5} \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-7)(x-5) \le 0,\\ (7x-37)(x-5) \ge 0,\\ x \ne 5.\end{cases}$$



Методом интервалов получаем $x \in \left[\dfrac{37}{7}; 7\right]$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{37}{7}; 7\right]$.

9.111. Найти целые неотрицательные значения x, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2}$.

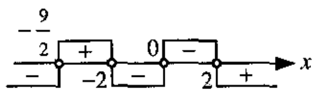
Решение.

Перепишем неравенство в виде $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2x}{x(x-2)}<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}<0 \text{ при } x\neq 0, \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x+9}{(x-2)(x+2)}<0,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+9)(x-2)(x+2)<0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x=1$.



Ответ: $x=1$.

9.112. При каких значениях a неравенство $\dfrac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для любых значений $x\in R$?

Решение.

Так как $x^2+4>0$, то имеем $ax<1{,}5x^2+6 \Leftrightarrow 1{,}5x^2-ax+6>0$. Это неравенство выполняется для любых значений $x\in R$, если $D=a^2-36<0$, $a^2<36$, $-6<a<6$.

Ответ: $a\in(-6;6)$.

9.113. Найти область определения функции f, если $f(x)=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)\,+4}$.

Решение.

Область определения данной функции найдем, решив неравенство

$\log_{0,5}(x^2-9)+4\geq 0$, $\log_{0,5}(x^2-9)\geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<x^2-9\leq 16$, $9<x^2\leq 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 25, \\ x^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5, \\ \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-5; -3) \cup (3; 5]$.

9.114. При каких значениях x определено следующее выражение:

$\log_3 (1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2{,}5))$?

Решение.

Получаем неравенство

$$1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2{,}5) > 0,\ \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2{,}5) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2{,}5 > 0{,}5,\ x^2 - 2x - 3 > 0,\ (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

9.115. Найти те значения m, при которых неравенство

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

выполняется для любых действительных значений x.

Решение.

Так как $x^2 - 8x + 20 > 0$ при $x \in R$, то необходимо

$mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0$.

Последнее неравенство истинно для $x \in R$, когда

$$\begin{cases} (m+1)^2 - m(9m+4) < 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 + 2m - 1 > 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

9.116. При каких значениях x разность $\dfrac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$ принимает только отрицательные значения?

Решение.

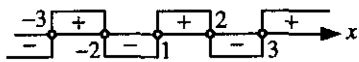
Имеем

$$\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x<0 \Leftrightarrow \frac{11x^2-5x+6-x^3-5x-6x}{x^2+5x+6}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^3+6x^2-11x+6}{x^2+5x+6}<0 \Leftrightarrow \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2+5x+6}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+2)}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(x+2)>0.$$

Методом интервалов получаем $x \in (-3;-2)\cup(1;2)\cup(3;\infty)$.



Ответ: $x \in (-3;-2)\cup(1;2)\cup(3;\infty)$.

9.117. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ выполняется для любых x ?

Решение.

Из условия получаем

$$\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+mx-1-2x^2+2x-3}{2x^2-2x+3}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+(m+2)x-4}{2x^2-2x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-(m+2)x+4}{2x^2-2x+3}>0.$$

Так как $2x^2-2x+3>0$ при $x \in R$, то $x^2-(m+2)x+4>0$ для $x \in R$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m+2)^2-16<0$, $(m+2)^2<16$, $-4<m+2<4$, $-6<m<2$.

Ответ: $m \in (-6;2)$.

9.118. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется для любых x?

Решение.

Из условия имеем $\dfrac{2x^2-(m+3)x+2}{x^2-3x+4}>0$. Так как $x^2-3x+4>0$ при $x\in R$, то $2x^2-(m+3)x+2>0$ для любых x, откуда $D=(m+3)^2-16<0$, $(m+3)^2<16$, $-4<m+3<4$, $-7<m<1$.

Ответ: $m\in(-7;1)$.

9.119. При каких значениях a сумма $a+\dfrac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}$ принимает только положительные значения?

Решение.

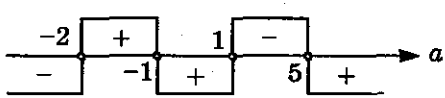
Запишем неравенство

$$a+\frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}>0,\quad \frac{a^3-3a^2-10a-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}>0,$$

$$\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2-3a-10}>0,\quad \frac{a^2(a+1)-(a+1)}{(a+2)(a-5)}>0,\quad \frac{(a+1)(a^2-1)}{(a+2)(a-5)}>0,$$

$$(a+1)^2(a-1)(a+2)(a-5)>0.$$

Методом интервалов находим $a\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(5;\infty)$.



Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(5;\infty)$.

9.120. Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$\log_4 x+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2\log_{\sqrt{5}}5$.

Решение.

Перейдем к основанию 2. Имеем $\dfrac{1}{2}\log_2 x+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x}+\log_2(\sqrt{x}-1)<1\Leftrightarrow\log_2(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))<1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)<2, \\ x>0, \\ \sqrt{x-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-2<0, \\ x>0, \\ \sqrt{x}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<\sqrt{x}<2, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<4.$$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=3$.

9.121. Показать, что при любых действительных значениях x функция $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может принимать значений, больших $\dfrac{3}{2}$ и меньших $\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Пусть, от противного, имеем

$$1)\ \frac{x^2+x+1}{x^2+1}>\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+2x+2>3x^2+3 \Leftrightarrow x^2-2x+1<0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2<0$, нет решений;

$$2)\ \frac{x^2+x+1}{x^2+1}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+2x+2<x^2+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1<0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2<0$, нет решений.

Полученные противоречия показывают, что y не может принять значения, меньшие, чем $\dfrac{1}{2}$ или большие, чем $\dfrac{3}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Найти области определения функций **(9.122—9.129):**

9.122. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$.

Решение.

Областью определения данной функции будут все те значения x, для которых выполняется неравенство $|x-3|-|8-x|\ge 0$. Раскрывая модули, получаем три случая:

$$1)\ \begin{cases} x<3, \\ -x+3-8+x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ -5\ge 0, \end{cases} \ x\in\varnothing;$$

2) $\begin{cases}3 \le x < 8, \\ x-3-8+x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3 \le x < 8, \\ x \ge \dfrac{11}{2},\end{cases} \quad \dfrac{11}{2} \le x < 8;$

3) $\begin{cases}x \ge 8, \\ x-3+8-x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 8, \\ 5 \ge 0,\end{cases} \begin{cases}x \ge 8, \\ x \in R,\end{cases} \quad x \ge 8.$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{11}{2}; \infty\right)$.

9.123. $y = \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{\log_3|x-4|}$.

Решение.

Получаем

$$\begin{cases}4x - x^2 \ge 0, \\ \log_3|x-4| \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-4) \le 0, \\ |x-4| \ne 1, \\ x-4 \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le x \le 4, \\ x \ne 3, \\ x \ne 5, \\ x \ne 4.\end{cases}$$

Ответ: $x \in [0; 3) \cup (3; 4)$.

9.124. $y = \log_3\left(0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}} x} - 1{,}25^{8-(\log_2 x)^2}\right)$.

Решение.

Рассмотрим неравенство $0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}} x} - 1{,}25^{8-(\log_2 x)^2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}} x} > 1{,}25^{8-(\log_2 x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{4-2\log_{\sqrt{2}} x} > \left(\frac{4}{5}\right)^{(\log_2 x)^2 - 8} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 - 2\log_{\sqrt{2}} x > \log_2^2 x - 8$. Переходя к основанию 2, получаем $\log_2^2 x + 4\log_2 x - 12 > 0$. Решая это неравенство как квадратное относительно $\log_2 x$, имеем $\left[\begin{array}{l}\log_2 x > 2, \\ \log_2 x < -6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 4, \\ 0 < x < \dfrac{1}{64}.\end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{64}\right) \cup (4; \infty)$.

9.125. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|}$.

Решение.

Областью определения данной функции будут те значения x, для которых имеет место неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|\ge 0 \Leftrightarrow 0<\log_3|x-3|\le 1 \Leftrightarrow 1<|x-3|\le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|x-3|\le 3,\\ |x-3|>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\le x-3\le 3,\\ \left[\begin{array}{l}x-3>1,\\ x-3<-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 6,\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<2.\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: $x\in[0;2)\cup(4;6]$.

9.126. $y=\sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$.

Решение.

Получаем неравенство $\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)-1\ge 0$, $\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge 1,\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-3)\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x-3\le\frac{1}{2},\\ x-3\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3<x\le\frac{7}{2},\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(3;\frac{7}{2}\right]\cup[5;\infty)$.

9.127. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

Решение.

Имеем неравенство $2-\lg|x-2|\ge 0$, $\lg|x-2|\le 2 \Leftrightarrow 0<|x-2|\le 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|x-2|\le 100,\\ |x-2|>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-100\le x-2\le 100,\\ x-2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-98\le x\le 102,\\ x\ne 2.\end{cases}$$

Ответ: $x\in[-98;2)\cup(2;102]$.

9.128. $y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0{,}5}-1\right)+\dfrac{1}{\log_3(2x-6)}$.

Решение.

Область определения данной функции найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases}2^{\log_{x-3}0{,}5}-1>0,\\ \log_3(2x-6)\neq 0,\\ 2x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\log_{x-3}0{,}5}>1,\\ 2x-6\neq 1,\\ 2x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x-3}0{,}5>0,\\ 2x\neq 7,\\ 2x>6.\end{cases}$$

Получаем два случая:

$$1)\ \begin{cases}0<x-3<1,\\ 0{,}5<1,\\ x\neq\dfrac{7}{2},\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<x<4,\\ x\neq\dfrac{7}{2};\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}x-3>1,\\ 0{,}5>1,\\ x\neq\dfrac{7}{2},\\ x>3,\end{cases}\quad\varnothing.$$

Ответ: $x\in\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};4\right)$.

9.129. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\dfrac{1}{\log_8(x-4)}$.

Решение.

Из условия получаем систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1\geq 0,\\ \log_8(x-4)\neq 0,\\ x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+11}{(x+3)(x-4)}\geq 0,\\ x-4\neq 1,\\ x>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+11)(x+3)(x-4)\geq 0,\\ x\neq -3,\\ x\neq 5,\\ x>4.\end{cases}$$

Методом интервалов имеем $x \in (4;5) \cup (5;\infty)$.

Ответ: $x \in (4;5) \cup (5;\infty)$.

Решить неравенства **(9.130 — 9.205):**

9.130. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$.

Решение.

Неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} < 3, \\ \dfrac{3x+1}{x-3} > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} - 3 < 0, \\ \dfrac{3x+1}{x-3} + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{x-3} < 0, \\ \dfrac{3x-4}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0, \\ (3x-4)(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$.

9.131. $\log_{|x-1|} 0{,}5 > 0{,}5$.

Решение.

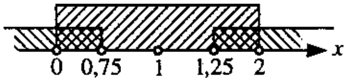
Из условия имеем две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ 0{,}5 < \sqrt{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}25 < |x-1| < 1, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0{,}5 > \sqrt{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| > 1, \\ |x-1| < 0{,}25, \end{cases} \varnothing.$$

Из системы 1) имеем $\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1{,}25, \\ x < 0{,}75. \end{array}\right. \end{cases}$

Методом интервалов получаем $x \in (0;\ 0{,}75) \cup (1{,}25;\ 2)$.



Ответ: $x \in (0;\ 0{,}75) \cup (1{,}25;\ 2)$.

9.132. $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1)\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} > 0, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-3x+2 > 0, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1;$$

$$2)\ \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-3x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 2)$.

9.133 $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$.

Решение.

ОДЗ: $4 - x^3 > 0$, $x^3 < 4$, $x < \sqrt[3]{4}$.

Отсюда получаем $|x+2| - |x| > 0$. Раскрывая модули, имеем следующие три случая:

$$1)\ \begin{cases} x < -2, \\ -x-2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ -2 > 0 \end{cases} \varnothing;$$

2) $\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ x+2+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x < 0, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0;$

3) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x+2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$

$x \in (-1; \infty)$. Учитывая ОДЗ, имеем $x \in \left(-1; \sqrt[3]{4}\right)$.

Ответ: $x \in \left(-1; \sqrt[3]{4}\right)$.

9.134. $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} > 1, \\ \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - 1 > 0, \\ \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - \sqrt{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin 2x - 1 + \cos 2x}{1-\cos 2x} > 0, \\ \dfrac{\sin 2x - \sqrt{3} + \sqrt{3}\cos 2x}{1-\cos 2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sin x\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{1-\cos^2 x + \sin^2 x} > 0, \\ \dfrac{2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x}{1-\cos^2 x + \sin^2 x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sin x(\cos x - \sin x)}{2\sin^2 x} > 0, \\ \dfrac{2\sin x\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)}{2\sin^2 x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1 > 0, \\ \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} < 0, \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1, \\ \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}, \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z$.

9.135. а) $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$; б) $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\le -4$.

Решение.

а) Перепишем неравенство в виде $\frac{\log_a^2 x-3\log_a x-4}{\log_a^2 x+2}<0$.

Так как $\log_a^2 x+2>0$ при $0<a\ne 1$ и $x>0$, то $\log_a^2 x-3\log_a x-4<0$. Решая последнее неравенство как квадратное относительно $\log_a x$, имеем $-1<\log_a x<4 \Rightarrow$

1) $\begin{cases}0<a<1,\\ a^4<x<\frac{1}{a};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}a>1,\\ \frac{1}{a}<x<a^4.\end{cases}$

Ответ: $x\in\left(a^4;\frac{1}{a}\right)$ для $0<a<1$ и $x\in\left(\frac{1}{a};a^4\right)$, если $a>1$.

б) $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\le -4$. Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\log_2\log_2\sqrt{x}+\log_2\sqrt{\log_2 x}\le -4 \quad\Rightarrow\quad \log_2\left(\log_2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\log_2 x}\right)\le -4,$$

$\log_2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\log_2 x}\le\frac{1}{16}$, $\log_2 x\cdot\sqrt{\log_2 x}\le\frac{1}{8}$. Возводя обе части неравенства в квадрат, получим $\log_2^3 x\le\frac{1}{64}$. Отсюда $0<\log_2 x\le\frac{1}{4}$, $1<x\le\sqrt[4]{2}$.

Ответ: $x\in\left(1;\sqrt[4]{2}\right]$.

9.136. $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-x-\frac{(x-2)^2\cdot(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$.

Решение.

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{8x}\cdot\frac{(1-x)(x+2)^2-(x-2)^2\cdot(1-x)}{(x+2)^2}>0 \Leftrightarrow$$

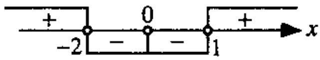
$$\Leftrightarrow\frac{(x^3+8)+(6x^2+12x)}{8x}\cdot\frac{(1-x)\left((x+2)^2-(x-2)^2\right)}{(x+2)^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)+6x(x+2)}{8x}\cdot\frac{(1-x)((x+2+x-2)(x+2-x+2))}{(x+2)^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2+4x+4)}{8x}\cdot\frac{(1-x)\cdot 8x}{(x+2)^2}>0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+2)^2(x-1)\cdot x}{x(x+2)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x-1)<0,\\ x\neq 0,\\ x\neq -2.\end{cases}$$

Методом интервалов находим $x\in(-2;\,0)\cup(0;1)$.



Ответ: $x\in(-2;0)\cup(0;1)$.

9.137. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{8}\right)^2+9\cdot\log_2\frac{32}{x^2}<4\cdot\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\log_2^4 x-\left(\log_2\frac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\frac{32}{x^2}-4\log_2^2 x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x-(3\log_2 x-3)^2+9(5-2\log_2 x)-4\log_2^2 x<0 \Leftrightarrow$$

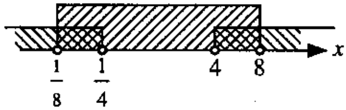
$$\Leftrightarrow \log_2^4 x-9\log_2^2 x+18\log_2 x-9+45-18\log_2 x-4\log_2^2 x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x-13\log_2^2 x+36<0.$$

Решая это неравенство как биквадратное относительно $\log_2 x$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}-3<\log_2 x<3,\\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x>2,\\ \log_2 x<-2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{8}<x<8,\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ 0<x<\frac{1}{4}.\end{array}\right.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$.



Ответ: $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$.

9.138. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

Решение.

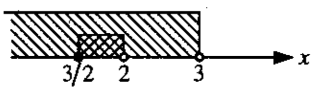
ОДЗ: $x \neq 2, 3$.

Раскрывая модуль, получаем два случая:

1) $\begin{cases} x-3<0, \\ \dfrac{-x+3}{x^2-5x+6}-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{-2x^2+9x-9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) \leq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$.



2) $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ \dfrac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ \dfrac{2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, 3; \\ (x-2)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \leq 0, \\ x > 3, \end{cases} \varnothing.$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

9.139. $\dfrac{m^2x+1}{2} - \dfrac{m^2x+3}{3} < \dfrac{m+9x}{6}$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\dfrac{m^2x+1}{2} - \dfrac{m^2x+3}{3} - \dfrac{m+9x}{6} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3m^2x+3-2m^2x-6-m-9x}{6} < 0 \Leftrightarrow (m^2-9)x - (m+3) < 0$,

$(m+3)((m-3)x-1) < 0$.

Полученное неравенство равносильно следующим пяти системам неравенств:

1) $\begin{cases} m < -3, \\ x < \dfrac{1}{m-3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m = -3, \\ \varnothing; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -3 < m < 3, \\ x > \dfrac{1}{m-3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} m = 3, \\ x \in R; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m > 3, \\ x < \dfrac{1}{m-3}. \end{cases}$

Ответ: Если $m > 3$ или $m < -3$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{m-3}\right)$;

если $-3 < m < 3$, то $x \in \left(\dfrac{1}{m-3}; \infty\right)$;

если $m = 3$, то $x \in (-\infty; \infty)$;

если $m = -3$, то решений нет.

9.140. $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

Решение.

ОДЗ: $x<2$.

Так как $\sqrt{2-x}>0$, то имеем $\left(\sqrt{2-x}\right)^2+2\left(\sqrt{2-x}\right)-4>0$. Решив это неравенство как квадратное относительно $\sqrt{2-x}$, получаем $\sqrt{2-x}<-1-\sqrt{5}$, $\varnothing$; или $\sqrt{2-x}>-1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 2-x>\left(\sqrt{5}-1\right)^2$, $x<-4+2\sqrt{5}$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-4+2\sqrt{5}\right)$.

9.141. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt{3^{2x}-9\cdot 3^x}>3^x-9$. Оно равносильно следующим двум системам неравенств:

1) $\begin{cases}3^x-9<0,\\ 3^{2x}-9\cdot 3^x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^x<3^2,\\ 3^x\left(3^x-3^2\right)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2,\\ x\geq 2,\end{cases}$ $\varnothing$;

2) $\begin{cases}3^x-9\geq 0,\\ 3^{2x}-9\cdot 3^x>\left(3^x-9\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^x\geq 3^2,\\ 3^{2x}-9\cdot 3^x>\left(3^x-9\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3^x\geq 3^2,\\ 3^{2x}-9\cdot 3^x>3^{2x}-18\cdot 3^x+81\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2,\\ 9\cdot 3^x>81\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2,\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

Ответ: $x\in(2;\infty)$.

9.142. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$.

Решение.

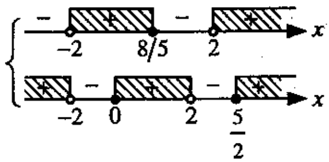
ОДЗ: $x\neq\pm 2$.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\leq 1,\\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1\leq 0,\\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4-x^2+4}{x^2-4} \le 0, \\ \dfrac{x^2-5x+4+x^2-4}{x^2-4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5x+8}{x^2-4} \le 0, \\ \dfrac{2x^2-5x}{x^2-4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{8}{5}\right)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ x\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ x \ne \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$



Для системы неравенств графически получаем $x \in \left[0; \dfrac{8}{5}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $x \in \left[0; \dfrac{8}{5}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}; \infty\right)$.

9.143. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \\ x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то, возведя обе части в квадрат, получим

$x+3 < x-1+2\sqrt{(x-1)(x-2)}+x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x-2)} > 6-x$. Последнее неравенство, с учетом ОДЗ, равносильно следующим двум системам неравенств:

1) $\begin{cases} 6-x < 0, \\ (x-1)(x-2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ (x-1)(x-2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6;$

2) $\begin{cases} 6-x \ge 0, \\ x \ge 2, \\ 4(x-1)(x-2) > (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ x^2 > \dfrac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ x > \sqrt{\dfrac{28}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{28}{3}} < x \le 6.$

Объединяя промежутки решений, получаем, что $x > \sqrt{\dfrac{28}{3}}$.

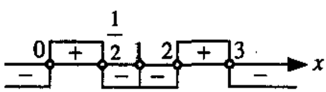
Ответ: $x \in \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}; \infty\right)$.

9.144. $\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0$.

Решение.

ОДЗ: $|x-1| > 0$, $x \ne 1$.

Корнями уравнений $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(3-x) = 0$ и $\log_2|x-1| = 0$ являются числа $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, которые не являются решениями заданного неравенства, поэтому на числовой оси отмечаем их полыми кружками:



(включая $x = 1$). Эти точки разбивают числовую ось на шесть промежутков. Подставляя из каждого промежутка значение x в данное неравенство, получаем знак неравенства в рассматриваемом промежутке. С помощью рисунка находим ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$.

9.145. $\sqrt{3}\cos^{-2}x < 4\operatorname{tg}x$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\frac{4\sin x}{\cos x}<0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-4\sin x\cos x}{\cos^2 x}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3}-2\sin 2x<0,\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x>\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z,$$

$$\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in Z$.

9.146. $\sin 4x+\cos 4x\operatorname{ctg}2x>1$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\sin 4x+\frac{\cos 4x\cos 2x}{\sin 2x}>1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x\sin 2x+\cos 4x\cos 2x}{\sin 2x}>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}>1,\ \operatorname{ctg}2x>1,\ \pi n<2x<\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z,$$

$$\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{8}(4n+1),\ n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}(4n+1)\right),\ n\in Z$.

9.147. $2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$.

Решение.

Из условия имеем

$$2+\operatorname{tg}2x+\frac{1}{\operatorname{tg}2x}<0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 2x+2\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}2x}<0,\ \frac{(\operatorname{tg}2x+1)^2}{\operatorname{tg}2x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 \neq 0, \\ \operatorname{tg} 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x \neq -1, \\ \operatorname{tg} 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < 2x < \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} < x < \dfrac{\pi n}{2}, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}(2n-1); \dfrac{\pi}{8}(4n-1)\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{8}(4n-1); \dfrac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z$.

9.148. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8 < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^4 - x^3) + (4x^3 - 4) + (4x^2 - 4) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3(x-1) + 4(x-1)(x^2 + x + 1) + 4(x-1)(x+1) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

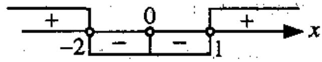
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^3 + 4x^2 + 8x + 8) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x^3 + 8) + (4x^2 + 8x)) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)(x^2 - 2x + 4) + 4x(x+2)) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 4) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$.



Ответ: $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$.

9.149. $\frac{3}{6x^2 - x - 12} < \frac{25x - 47}{10x - 15} - \frac{3}{3x + 4}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

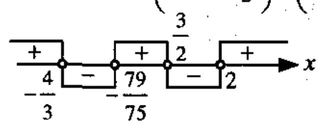
$$\frac{3}{(3x+4)(2x-3)} - \frac{25x-47}{5(2x-3)} + \frac{3}{3x+4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15-(25x-47)(3x+4)+15(2x-3)}{5(3x+4)(2x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-75x^2+71x+158}{(3x+4)(2x-3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{75x^2-71x-158}{(3x+4)(2x-3)} > 0,\ \frac{75\left(x+\frac{79}{75}\right)(x-2)}{(3x+4)(2x-3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{79}{75}\right)(x-2)(3x+4)(2x-3) > 0.$$

Методом интервалов имеем $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$.



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

9.150. $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x} < 0$.

Решение.

ОДЗ: $|x-2| > 0$, $x \neq 2$, $x \neq 0$, $x \neq 4$.

Корнями уравнений $\log_{0,3}|x-2| = 0$ и $x^2 - 4x = 0$ будут числа $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$ — не подходит по ОДЗ.

Эти точки разбивают числовую ось на 6 промежутков. Из каждого промежутка выбираем значение x и, подставляя его в данное неравенство, определяем знак неравенства на рассматриваемом промежутке. Методом интервалов получаем, что $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$.

9.151. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Решение.

Неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

1) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x^2 - 4x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x(x-4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 0;$

2) $\begin{cases} x - 3 \ge 0, \\ x^2 - 4x > (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x > \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{2}.$

Объединяя полученные промежутки, имеем $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\dfrac{9}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\dfrac{9}{2}; \infty\right)$.

9.152. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

Решение.

Перейдем к основанию 2.

Имеем $\dfrac{1 - \frac{1}{2}\log_2 x}{1 + \log_2 x} - \dfrac{1}{2} \le 0$, $\dfrac{2 - \log_2 x - 1 - \log_2 x}{2(1 + \log_2 x)} \le 0$,

$\dfrac{1 - 2\log_2 x}{1 + \log_2 x} \le 0$, $\dfrac{\log_2 x - \frac{1}{2}}{\log_2 x + 1} \ge 0$.

Умножив обе части этого неравенства на квадрат знаменателя, получим

$$\begin{cases}\left(\log_2 x-\dfrac{1}{2}\right)(\log_2 x+1)\ge 0,\\ \log_2 x+1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge \dfrac{1}{2},\\ \log_2 x<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt{2},\\ 0<x<\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};\infty\right)$.

9.153. $\log_{\frac{4}{3}}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0$.

Решение.

Из условия имеем $\sqrt{x+3}-x>1$, $\sqrt{x+3}>x+1$. Полученное неравенство равносильно двум системам неравенств:

1) $\begin{cases}x+1<0,\\ x+3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1,\\ x\ge -3\end{cases} \Leftrightarrow -3\le x<-1;$

2) $\begin{cases}x+1\ge 0,\\ x+3>(x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1,\\ x^2+x-2<0\end{cases} \Leftrightarrow -1\le x<1.$

Ответ: $x\in[-3;1)$.

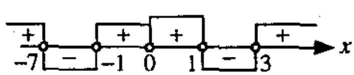
9.154. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}>\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде $\dfrac{2-x}{x^2(x+1)}-\dfrac{1-2x}{x^2(x-3)}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(x-3)-(1-2x)(x+1)}{x^2(x+1)(x-3)}>0,\ \frac{x^2+6x-7}{x^2(x+1)(x-3)}>0,\ \frac{(x+7)(x-1)}{x^2(x+1)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x^2(x+1)(x-3)(x+7)(x-1)>0$. Методом интервалов получаем $x\in(-\infty;-7)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(3;\infty)$.



Ответ: $x\in(-\infty;-7)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(3;\infty)$.

9.155. $0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x-1}}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}} > 0{,}2^{2\log_4 x-1} \Leftrightarrow$

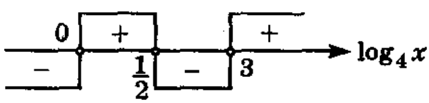
$$\Leftrightarrow \frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x} < 2\log_4 x-1,\ \frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x} - 2\log_4 x+1<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\log_4 x-3-2\log_4^2 x+\log_4 x}{\log_4 x}<0,\ \frac{2\log_4^2 x-7\log_4 x+3}{\log_4 x}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\log_4 x-\frac{1}{2}\right)(\log_4 x-3)}{\log_4 x}>0 \Leftrightarrow \left(\log_4 x-\frac{1}{2}\right)(\log_4 x-3)\log_4 x>0.$$

Методом интервалов находим

$$\left[\begin{array}{l} 0<\log_4 x<\frac{1}{2}, \\ \log_4 x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ x>64. \end{array}\right.$$



Ответ: $x\in(1;2)\cup(64;\infty)$.

9.156. $(2{,}25)^{\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2-3x-10) > -\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2-3x-10) > \log_2(x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2\left(x^2-3x-10\right)>2\log_2|x+2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-3x-10\right)>\log_2|x+2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10>|x+2|, \\ x^2-3x-10>0, \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2<x^2-3x-10, \\ x+2>-x^2+3x+10, \\ x^2-3x-10>0, \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-12>0, \\ x^2-2x-8>0, \\ x^2-3x-10>0, \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<-2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<-2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>5, \\ x<-2; \end{array}\right. \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Методом интервалов находим $x\in(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$.

9.157. $\log_{0,5}(x+3)<\log_{0,25}(x+15)$.

Решение.

Перейдем к основанию 2. Имеем $\log_{0,5}(x+3)<\log_{0,5}\sqrt{x+15}$. Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+15>0, \\ x+3>\sqrt{x+15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x>-15, \\ x^2+6x+9>x+15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x^2+5x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-6. \end{array}\right. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой имеем $x \in (1; \infty)$.

Ответ: $x \in (1; \infty)$.

9.158. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1>0, \\ x+1>0, \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5.$$

Перейдем к основанию 3. Имеем

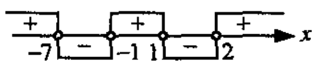
$$-\log_3(x-1)-\log_3(x+1)+2\log_3(5-x)>1 \Leftrightarrow \log_3\frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)}>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)}>3 \Leftrightarrow \frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)}-3>0 \Leftrightarrow \frac{(5-x)^2-3(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-10x+28}{(x-1)(x+1)}>0,\ \frac{x^2+5x-14}{(x-1)(x+1)}<0,\ \frac{(x+7)(x-2)}{(x-1)(x+1)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+7)(x-2)(x-1)(x+1)<0.$$

С учетом ОДЗ методом интервалов получаем $2<x<5$.



Ответ: $x \in (2; 5)$.

9.159. $2\log_3\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}\log_3\left(9\sqrt[3]{x}\right)\ge 1$.

Решение.

ОДЗ: $\log_3 x>0$.

Перейдем к основанию 3. $2\log_3\log_3 x-\log_3\log_3 9\sqrt[3]{x}\ge 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3\log_3^2 x-\log_3\log_3 9\sqrt[3]{x}\ge 1,\ \log_3\frac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}}\ge 1,\ \frac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}}\ge 3 \Leftrightarrow$$

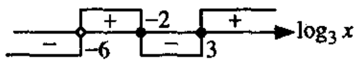
$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x}{2+\frac{1}{3}\log_3 x}-3\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x-\log_3 x-6}{\log_3 x+6}\ge 0,$$

$$\frac{(\log_3 x+2)(\log_3 x-3)}{\log_3 x+6}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\log_3 x+2)(\log_3 x-3)(\log_3 x+6)\ge 0,\\ \log_3 x+6\ne 0.\end{cases}$$

Относительно $\log_3 x$ методом интервалов получаем

1) $-6<\log_3 x\le -2$, не подходит по ОДЗ;

2) $\log_3 x\ge 3 \Leftrightarrow x\ge 27$.



Ответ: $x\in[27;\infty)$.

9.160. $0{,}008^x+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04$.

Решение.

Из условия имеем $0{,}2^{3x}+\frac{5}{5^{3x}}+0{,}08\cdot 0{,}2^{3x}<30{,}04 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+5+0{,}08<30{,}04\cdot 5^{3x} \Leftrightarrow 5^{3x}>5^{-1} \Leftrightarrow 3x>-1,\ x>-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$.

9.161. $0{,}4^{\log_3\frac{3}{x}\log_3 3x}>6{,}25^{\log_3 x^2+2}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем неравенство в виде $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_3\frac{3}{x}\log_3 3x}>\left(\frac{2}{5}\right)^{-2\log_3 x^2-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{3}{x}\log_3 3x>-2\log_3 x^2-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 3-\log_3 x)(\log_3 3+\log_3 x)<-4\log_3 x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\log_3 x)(1+\log_3 x)+4\log_3 x+4<0,\ \log_3^2 x-4\log_3 x-5>0.$$

Решая это неравенство как квадратное относительно $\log_3 x$, получаем

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x > 5,\\ \log_3 x < -1,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x > 243,\\ 0 < x < \dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup (243; \infty)$.

9.162. $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}} < 1$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots} < 0{,}3^{\frac{3x^2+5x}{3}} < 0{,}3^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots > \frac{3x^2+5x}{3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots > \dfrac{3x^2+5x}{3},\\ \dfrac{3x^2+5x}{3} > 0.\end{cases}$$

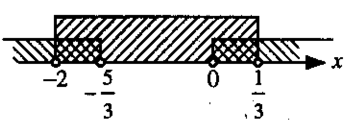
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой

$b_1 = 1, q = -\dfrac{1}{2}, S = \dfrac{b_1}{1-q}$, следовательно, $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots = \dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$.

Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3} > \dfrac{3x^2+5x}{3},\\ \dfrac{3x^2+5x}{3} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+5x-2 < 0,\\ 3x^2+5x > 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 < x < \dfrac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}x > 0,\\ x < -\dfrac{5}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим $x \in \left(-2; -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.



Ответ: $x \in \left(-2; -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

9.163. $\dfrac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}>0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} -8x-x^2>0, \\ x+3>0, \\ \lg(x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x<-2, \\ -2<x<0. \end{array}\right.$

Из условия имеем $\dfrac{\lg\dfrac{7}{-8x-x^2}}{\lg(x+3)}>0$, $\log_{x+3}\dfrac{7}{-8x-x^2}>0$. Полученное неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

1) $\begin{cases} 0<x+3<1, \\ \dfrac{7}{-8x-x^2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<-2, \\ 1+\dfrac{7}{8x+x^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<-2, \\ \dfrac{x^2+8x+7}{x^2+8x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

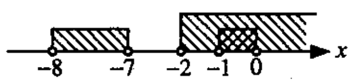
$\Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<-2, \\ (x+7)(x+1)(x+8)x>0. \end{cases}$

Отсюда методом интервалов находим $-3<x<-2$.

2) $\begin{cases} x+3>1, \\ \dfrac{7}{-8x-x^2}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ 1+\dfrac{7}{x^2+8x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{x^2+8x+7}{x^2+8x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ (x+8)x(x+7)(x+1)<0. \end{cases}$

С помощью числовой прямой находим $-1<x<0$.



Объединяя оба случая, получаем $\left[\begin{array}{l} -3<x<-2, \\ -1<x<0. \end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-3;-2)\cup(-1;0)$.

9.164. $\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \log_4 \frac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-2}{4x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{2}{3}, \\ x < -1. \end{array} \right.$

Перейдем в исходном неравенстве к основаниям 3 и 4. Получим

$$\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} + \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow 2\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow 0 < \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{4x-1}{x+1} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} < 4, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} - 4 < 0, \\ \frac{4x-1}{x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{x+1} < 0, \\ \frac{3x-2}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ (3x-2)(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{2}{3}, \\ x < -1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

9.165. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Перепишем неравенство в виде $2^{\log_{0,5} x \cdot \log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2{,}5 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\log_{0,5} x}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2{,}5 > 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 \frac{1}{x}}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2{,}5 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} - 2{,}5 > 0$. Так как $0 < x^{\log_{0,5} x} \neq 1$, то

$\left(x^{\log_{0,5} x}\right)^2 - 2{,}5\left(x^{\log_{0,5} x}\right) + 1 > 0$. Решая это неравенство как квадратное

относительно $x^{\log_{0,5} x}$, получаем $\left[\begin{array}{l} x^{\log_{0,5} x} > 2, \\ x^{\log_{0,5} x} < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Логарифмируя первое и второе неравенства совокупности по основанию 2, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x^{\log_{0,5} x} > \log_2 2, \\ \log_2 x^{\log_{0,5} x} < \log_2 \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x \log_2 x > 1, \\ \log_{0,5} x \log_2 x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\log_2^2 x > 1, \\ -\log_2^2 x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2^2 x < -1, \ \varnothing; \\ \log_2^2 x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x > 1, \\ \log_2 x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ 0 < x < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

9.166. $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Запишем данное неравенство в виде $243 \cdot \left(3^{\lg x}\right)^2 - 9 \cdot 3^{\lg x} - 2 > 0$. Решив его как квадратное относительно $3^{\lg x}$, находим $\left[\begin{array}{l} 3^{\lg x} > 3^{-2}, \\ 3^{\lg x} < -\frac{18}{243}, \ \varnothing. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg x > -2$, $x > 0{,}01$.

Ответ: $x \in (0{,}01; \infty)$.

9.167. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ne-1$.

Из условия имеем $\dfrac{x^2-x+1-2x-2}{x^3+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}$,

$\dfrac{x^2-3x-1}{x^3+1}-\dfrac{1-2x}{x^3+1}\le0$, $\dfrac{x^2-3x-1-1+2x}{x^3+1}\le0$, $\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}\le0$,

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}\le0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}\le0,\\ x+1\ne0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2\le0,\\ x\ne-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le2,\\ x\ne-1.\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2]$.

9.168. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

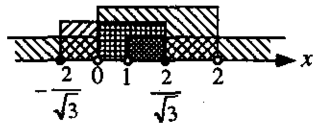
Решение.

Неравенство равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}\ge0,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}>0,\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}<\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4-3x^2}{4x^2}\ge0,\\ \dfrac{2-x}{2x}>0,\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\le\dfrac{4}{3},\\ x\ne0,\\ (x-2)x<0,\\ (x-1)x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{2}{\sqrt3}\le x\le\dfrac{2}{\sqrt3},\\ x\ne0,\\ 0<x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<0.\end{array}\right.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой имеем $x \in \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.



Ответ: $x \in \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

9.169. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6} \le \frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

Решение.

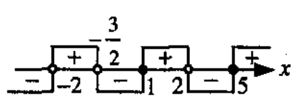
Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{4}{(x+2)(2x+3)}-\frac{1}{2x+3}-\frac{4}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3+4x-8-x^2+4-4}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \le 0,\ \frac{x^2-6x+5}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \ge 0,$$

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5)(2x+3)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ x \ne -\frac{3}{2}, \\ x \ne \pm 2. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$.



Ответ: $x \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$.

9.170. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)}-\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{6-x}{x-4}\geq\dfrac{5(6-x)}{x-2}$.

Решение.

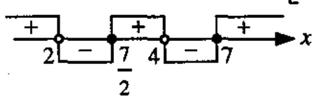
ОДЗ: $x\neq 2$, $x\neq 4$.

Имеем $\dfrac{x-16}{3(x-4)}-\dfrac{5(6-x)}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-16)(x-2)-15(6-x)(x-4)}{3(x-4)(x-2)}\geq 0$,

$\dfrac{x^2-34x+76}{(x-4)(x-2)}\geq 0$, $\dfrac{\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-7)}{(x-4)(x-2)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)(x-7)(x-4)(x-2)\geq 0,\\ x\neq 4,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x\in(-\infty;2)\cup\left[\dfrac{7}{2};4\right)\cup[7;\infty)$.



Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup\left[\dfrac{7}{2};4\right)\cup[7;\infty)$.

9.171. $0{,}6^{\lg^2(-x)+3}\leq\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2\lg x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $x<0$.

Так как $\lg x^{2k}=2k\lg|x|$, то, учитывая ОДЗ, перепишем данное неравенство в виде

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\lg^2(-x)+3}\leq\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4\lg(-x)}\Leftrightarrow \lg^2(-x)+3\geq -4\lg(-x)$, $\lg^2(-x)+4\lg(-x)+3\geq 0$.

Решив его как квадратное относительно $\lg(-x)$, получим

$$\left[\begin{array}{l}\lg(-x)\ge -1,\\ \lg(-x)\le -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x\ge 0{,}1,\\ -x\le 0{,}001\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -0{,}1,\\ x\ge -0{,}001.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-0{,}1]\cup[-0{,}001;0)$.

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $(x-3)\sqrt{x^2+4}-(x-3)(x+3)\le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-(x+3)\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\le 0,\\ \sqrt{x^2+4}-(x+3)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0,\\ \sqrt{x^2+4}-(x+3)\le 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 3,\\ \sqrt{x^2+4}\ge x+3;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ \sqrt{x^2+4}\le x+3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 3,\\ x+3\le 0,\\ x\in R;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ x+3\ge 0,\\ x^2+4\ge x^2+6x+9;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x^2+4\le x^2+6x+9,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 3,\\ x\le -3,\\ x\in R;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ x\ge -3,\\ x\le -\dfrac{5}{6};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x\le -\dfrac{5}{6},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -3,\\ -3\le x\le -\dfrac{5}{6},\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{6}\right]\cup[3;\infty)$.

9.173. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{13x^2}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{12x^2}$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству $13x^2 \ge x^4 + 36 > 12x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 36 > 12x^2, \\ x^4 + 36 \le 13x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 12x^2 + 36 > 0, \\ x^4 - 13x^2 + 36 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 6\right)^2 > 0, \\ 4 \le x^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 \ne 0, \\ x^2 \le 9, \\ x^2 \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm\sqrt{6}, \\ -3 \le x \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in \left[-3; -\sqrt{6}\right) \cup \left(-\sqrt{6}; -2\right] \cup \left[2; \sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; 3\right]$.

Ответ: $x \in \left[-3; -\sqrt{6}\right) \cup \left(-\sqrt{6}; -2\right] \cup \left[2; \sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; 3\right]$.

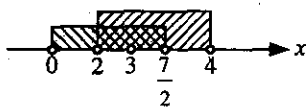
9.174. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$.

Решение.

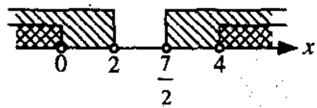
Перепишем неравенство в виде $|x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0$. Оно равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x-3| < 1, \\ 2x^2 - 7x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} |x-3| > 1, \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x - 3 < 1, \\ x - 3 \ne 0, \\ x(2x-7) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 3 < -1, \end{cases} \\ x(2x-7) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 < x < 4, \\ x \ne 3, \\ 0 < x < \dfrac{7}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{7}{2}, \\ x < 0. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы неравенств будет $(2;\,3)\cup\left(3;\,\frac{7}{2}\right)$.



Решением второй системы неравенств является $(-\infty;\,0)\cup(4;\,+\infty)$.



Ответ: $x\in(-\infty;\,0)\cup(2;\,3)\cup\left(3;\,\frac{7}{2}\right)\cup(4;\,\infty)$.

9.175. $\log_{\frac{1}{5}} x+\log_4 x>1$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 4. Имеем $\dfrac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{5}}+\log_4 x>1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_4 x}{-\log_4 5}+\log_4 x>1 \Leftrightarrow \log_4 x\cdot\left(\frac{1-\log_4 5}{-\log_4 5}\right)>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x\cdot\left(\frac{\log_4 5-1}{\log_4 5}\right)>1 \Leftrightarrow \log_4 x>\frac{\log_4 5}{\log_4 5-1},\ \log_4 x>\frac{\log_4 5}{\log_4 \frac{5}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x>\log_{\frac{5}{4}} 5 \Leftrightarrow x>4^{\log_{\frac{5}{4}} 5}.$$

Далее $4^{\log_{\frac{5}{4}} 5}=4^{\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}=4^{-\log_{\frac{5}{4}} 0,2}=4^{\log_{\frac{4}{5}} 0,2}=4^{\log_{0,8} 0,2}$.

Ответ: $x\in\left(4^{\log_{0,8} 0,2};\,\infty\right)$.

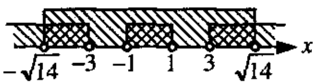
9.176. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56$.

Решение.

Из условия получаем

$$\begin{cases} x^4 - 10x^2 + 9 > 0, \\ x^4 - 10x^2 - 56 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 > 9, \\ x^2 < 1, \end{array}\right. \\ -4 < x^2 < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -3, \\ -1 < x < 1, \end{array}\right. \\ -\sqrt{14} < x < \sqrt{14}. \end{cases}$$

Методом интервалов находим $x \in \left(-\sqrt{14}; -3\right) \cup (-1; 1) \cup \left(3; \sqrt{14}\right)$.



Ответ: $x \in \left(-\sqrt{14}; -3\right) \cup (-1; 1) \cup \left(3; \sqrt{14}\right)$.

9.177. $216x^6 + 19x^3 < 1$.

Решение.

$216x^6 + 19x^3 - 1 < 0$. Решаем неравенство как квадратное относительно x^3, $-\frac{1}{8} < x^3 < \frac{1}{27} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

9.178. $x^{0{,}5\log_{0{,}5} x - 3} \geq 0{,}5^{3 - 2{,}5\log_{0{,}5} x}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Логарифмируя обе части данного неравенства по основанию 0,5, получаем

$$\log_{0{,}5} x^{0{,}5\log_{0{,}5} x - 3} \leq \log_{0{,}5} 0{,}5^{3 - 2{,}5\log_{0{,}5} x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(0{,}5\log_{0{,}5} x - 3\right)\log_{0{,}5} x \leq \left(3 - 2{,}5\log_{0{,}5} x\right)\log_{0{,}5} 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5\log^2_{0{,}5} x - 3\log_{0{,}5} x \leq 3 - 2{,}5\log_{0{,}5} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5\log^2_{0{,}5} x - 0{,}5\log_{0{,}5} x - 3 \leq 0.$$

Решив это неравенство как квадратное относительно $\log_{0{,}5} x$, найдем

$$-2 \leq \log_{0{,}5} x \leq 3 \Leftrightarrow 0{,}125 \leq x \leq 4.$$

Ответ: $x \in [0{,}125; 4]$.

9.179. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

Решение.

Так как $x^2-5x+9>0$ при $x\in R$, то данное неравенство имеет вид $|x-6|>x^2-5x+9$. Оно равносильно двум неравенствам

1) $x-6>x^2-5x+9 \Leftrightarrow x^2-6x+15<0$, $\varnothing$;

2) $x-6<-x^2+5x-9 \Leftrightarrow x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow 1<x<3$.

Ответ: $x\in(1;3)$.

9.180. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

Решение.

ОДЗ: $\frac{x}{x-2}\geq 0; x\neq 2$.

Пусть $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y\geq 0$. Относительно y неравенство имеет вид

$$\frac{y^4}{2}-y^2-2y>0 \Leftrightarrow y(y^3-2y-4)>0 \Leftrightarrow y(y-2)(y^2+2y+2)>0.$$

Так как $y^2+2y+2>0$ при $y\in R$, то получаем неравенство $y(y-2)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y>2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>2,\ \frac{12x}{x-2}>16,\ \frac{3x}{x-2}-4>0,\ \frac{3x-4+8}{x-2}>0,$$

$$\frac{-x+8}{x-2}>0,\ \frac{x-8}{x-2}<0,\ (x-8)(x-2)<0,\ 2<x<8.$$

Ответ: $x\in(2;8)$.

9.181. $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$.

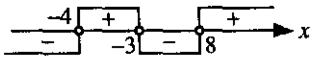
Решение.

Исходное неравенство равносильно неравенству $\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>6 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}-6>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6x-24}{x+4}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0\ \Leftrightarrow\ \frac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0,\ (x+3)(x-8)(x+4)>0.$$

Методом интервалов получаем $x\in(-4;-3)\cup(8;\infty)$.



Ответ: $x\in(-4;-3)\cup(8;\infty)$.

9.182. $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1$.

Решение.

Исходное неравенство равносильно следующим системам неравенств:

$$1)\ \begin{cases}0<2x<1,\\ x^2-5x+6>2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<\dfrac{1}{2},\\ x^2-7x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<\dfrac{1}{2},\\ \left[\begin{array}{l}x>6,\\ x<1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\ 0<x<\frac{1}{2};$$

$$2)\ \begin{cases}2x>1,\\ x^2-5x+6<2x,\\ x^2-5x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x^2-7x+6<0,\\ x^2-5x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ 1<x<6,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 3<x<6.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;2)\cup(3;6)$.

9.183. $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.

Решение.

Исходное неравенство равносильно неравенству $0<\log_2\log_{x-1}9<1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 1<\log_{x-1}9<2$. Получаем две системы неравенств:

$$1)\ \begin{cases}0<x-1<1,\\ (x-1)^2<9<x-1,\end{cases}\quad\varnothing;$$

2) $\begin{cases} x-1>1, \\ x-1<9<(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x<10, \\ \left[\begin{array}{l} x-1>3, \\ x-1<-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<10, \\ \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<-2. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: $x \in (4;10)$.

9.184. $\log_{0,25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$0<\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\ 0<\left|\frac{4x+2+x+3}{2(x+3)}\right|<\frac{1}{2},\ 0<\left|\frac{5x+5}{2(x+3)}\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x+5}{2(x+3)} \neq 0, \\ \frac{5x+5}{2(x+3)}<\frac{1}{2}, \\ \frac{5x+5}{2(x+3)}>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -3, \\ \frac{2x+1}{x+3}<0, \\ \frac{3x+4}{x+3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -3, \\ -3<x<-\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x>-\frac{4}{3}, \\ x<-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3};-1\right) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{4}{3};-1\right) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

9.185. $x^2\left(x^4+36\right)-6\sqrt{3}\left(x^4+4\right)<0$.

Решение.

Имеем $x^6-6\sqrt{3}x^4+36x^2-24\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\sqrt{3}\right)^3<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow x^2<2\sqrt{3}$. Отсюда $-\sqrt{2\sqrt{3}}<x<\sqrt{2\sqrt{3}}$,

$-\sqrt[4]{12}<x<\sqrt[4]{12}$.

Ответ: $x \in \left(-\sqrt[4]{12};\sqrt[4]{12}\right)$.

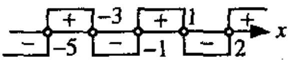
9.186. $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{(x^3-x)+(3x^2-3)}{(x+5)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2-1)+3(x^2-1)}{(x+5)(x-2)}<0,\ \frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+5)(x-2)}<0,$$

$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)(x-2)<0$. $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(1;2)$.



Ответ: $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(1;2)$.

9.187. $2\log_{\log_3 x}3<1$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\log_{\log_3 x}9<1$. Оно равносильно двум системам неравенств:

$$1)\ \begin{cases}0<\log_3 x<1,\\ 9>\log_3 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<x<3,\\ x<3^9\end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3;$$

$$2)\ \begin{cases}\log_3 x>1,\\ 9<\log_3 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3,\\ x>3^9\end{cases} \Leftrightarrow x>3^9.$$

Ответ: $x\in(1;3)\cup(3^9;\infty)$.

9.188. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x-2\ge 0,\\ 2x+4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2.$$

Запишем данное неравенство в виде $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>\sqrt{2x+4}$ и возведем обе его части в квадрат. Имеем

$$x+3+2\sqrt{(x+3)(x-2)}+x-2>2x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)}>3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+3)(x-2)>9,\ 4x^2+4x-33>0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}, \\ x < \dfrac{-1-\sqrt{34}}{2}. \end{array}\right. \text{ С учетом ОДЗ имеем } x > \frac{-1+\sqrt{34}}{2}.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}; \infty \right)$.

9.189. $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перейдем к основанию 5, тогда $\dfrac{\log_5 \sqrt{3x+4}}{\log_5 x} > 1$. Отсюда имеем $\log_x \sqrt{3x+4} > 1$. Последнее неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{3x+4} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < 3x+4 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - 3x - 4 > 0, \end{cases} \quad \varnothing;$$

$$2) \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{3x+4} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 3x+4 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x-4)(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

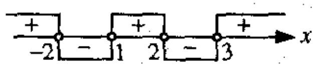
Ответ: $x \in (1; 4)$.

9.190. $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} > 0$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде $\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-3)(x-2) > 0$. Методом интервалов получаем $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$.

9.191. $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\operatorname{tg} x)<5$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0$.

Перепишем неравенство в виде $2\cos x\left(\cos x-\sqrt{8}\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)-5<0$. Имеем $\begin{cases}2\cos^2 x-2\sqrt{8}\sin x-5<0,\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin^2 x+2\sqrt{8}\sin x+3>0,\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x<-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \varnothing,\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

Отсюда $x\in\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$.

Ответ: $x\in\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$.

Решение.

Решениями данного неравенства являются значения неизвестного, принадлежащие ОДЗ: $x^3+3x+4\geq 0$, $(x+1)(x^2-x+4)\geq 0$. Здесь $x^2-x+4>0$ при $x\in R$. Тогда $x+1\geq 0$, $x\geq -1$.

Ответ: $x\in[-1;\infty)$.

9.193. $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0.5}(x-1)>5$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде $4\log_2^2(x-1)+\log_2(x-1)-5>0$.

Решив его как квадратное относительно $\log_2(x-1)$, имеем

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)>1, \\ \log_2(x-1)<-\dfrac{5}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1>2, \\ 0<x-1<\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3, \\ 1<x<\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}+1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(1; \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}+1\right) \cup (3; \infty)$.

9.194. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде $(25 \cdot 2^x - 25) - (10^x - 5^x) > 0$,

$25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0$, $(2^x - 1)(25 - 5^x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0;\end{cases} \\ \begin{cases}2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x > 2^0, \\ 5^x < 5^2;\end{cases} \\ \begin{cases}2^x < 2^0, \\ 5^x > 5^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0, \\ x < 2;\end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2. \\ \begin{cases}x < 0, \\ x > 2;\end{cases} \varnothing;\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0; 2)$.

9.195. $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству $\log_{x^2} \log_{x^2} (x^2)^2 > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x^2} 2\log_{x^2} x^2 > 1$, $\log_{x^2} 2 > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x^2 < 1, \\ x^2 > 2;\end{cases} \\ \begin{cases}x^2 > 1, \\ x^2 < 2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 < x < 1, \\ x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l}x > \sqrt{2}, \\ x < -\sqrt{2},\end{array}\right.\end{cases} \varnothing; \\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x > 1, \\ x < -1,\end{array}\right. \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

9.196. $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

Запишем данное неравенство в виде $0{,}5^{2\sqrt{x}}-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}+2>0$ и решим его как квадратное относительно $0{,}5^{\sqrt{x}}$. Получим $\left[\begin{array}{l}0{,}5^{\sqrt{x}}>2,\\ 0{,}5^{\sqrt{x}}<1\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0{,}5^{\sqrt{x}}>0{,}5^{-1},\\ 0{,}5^{\sqrt{x}}<0{,}5^{0}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}<-1,\ \varnothing;\\ \sqrt{x}>0.\end{array}\right.$ Отсюда $x>0$.

Ответ: $x\in(0;\infty)$.

9.197. $x^2\left(x+3\sqrt{5}\right)+5\left(3x+\sqrt{5}\right)>0$.

Решение.

Из условия

$x^3+3\sqrt{5}x^2+15x+5\sqrt{5}>0\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{5}\right)^3>0,\ x+\sqrt{5}>0,\ x>-\sqrt{5}$.

Ответ: $x\in\left(-\sqrt{5};\infty\right)$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$.

Решение.

ОДЗ: $x>1$.

Имеем $\dfrac{9^{\log_2(x-1)}}{9}-\dfrac{8\cdot 5^{\log_2(x-1)}}{25}>9^{\log_2(x-1)}-\dfrac{16\cdot 5^{\log_2(x-1)}}{5}$,

$\dfrac{9^{\log_2(x-1)}}{9}-9^{\log_2(x-1)}>\dfrac{8\cdot 5^{\log_2(x-1)}}{25}-\dfrac{16\cdot 5^{\log_2(x-1)}}{5}$,

$-\dfrac{8}{9}\cdot 9^{\log_2(x-1)}>-\dfrac{72}{25}\cdot 5^{\log_2(x-1)},\ \dfrac{1}{9}\cdot 9^{\log_2(x-1)}<\dfrac{9}{25}\cdot 5^{\log_2(x-1)}$,

$\dfrac{9^{\log_2(x-1)}}{9^2}<\dfrac{5^{\log_2(x-1)}}{5^2}\Leftrightarrow\dfrac{9^{\log_2(x-1)}}{5^{\log_2(x-1)}}<\dfrac{9^2}{5^2},\ \left(\dfrac{9}{5}\right)^{\log_2(x-1)}<\left(\dfrac{9}{5}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2(x-1)<2,\ 0<x-1<4,\ 1<x<5$.

Ответ: $x\in(1;5)$.

9.199. $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)}>\dfrac{1}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sqrt{4x+5}-1>0,\\ \sqrt{4x+5}+11>0,\\ \log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x+5}>1,\\ \sqrt{4x+5}>-11,\\ \sqrt{4x+5}+11\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{4x+5}>1$, $4x+5>1$, $x>-1$.

Из условия имеем

$\log_{\sqrt{4x+5}+11}\left(\sqrt{4x+5}-1\right)>\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{4x+5}+11}\left(\sqrt{4x+5}-1\right)>\log_{\sqrt{4x+5}+11}\left(\sqrt{\sqrt{4x+5}+11}\right)$.

Для $x>-1$ очевидно, что $\sqrt{4x+5}+11>1$, поэтому получаем

$\begin{cases}\sqrt{4x+5}+11>1,\\ \sqrt{4x+5}-1>\sqrt{\sqrt{4x+5}+11}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ \sqrt{4x+5}-1>\sqrt{\sqrt{4x+5}+11}.\end{cases}$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то, возведя их в квадрат, имеем

$\begin{cases}x>-1,\\ \left(\sqrt{4x+5}\right)^2-2\sqrt{4x+5}+1>\sqrt{4x+5}+11\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ \left(\sqrt{4x+5}\right)^2-3\sqrt{4x+5}-10>0.\end{cases}$

Решая второе неравенство этой системы как квадратное относительно $\sqrt{4x+5}$, находим $\sqrt{4x+5}<-2$, $\varnothing$; $\sqrt{4x+5}>5$, откуда $x>5$.

Ответ: $x\in(5;\infty)$.

9.200. $\dfrac{\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}-1\right)}{\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}+5\right)}<\dfrac{1}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ \sqrt{x+3} > 1, \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$

Для $x > -2$, $\sqrt{x+3} + 5 > 1$, следовательно, $\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}+5\right) < 0$, поэтому из условия получаем $2\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}-1\right) > \log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}+5\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ \left(\sqrt{x+3}-1\right)^2 < \sqrt{x+3}+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3\sqrt{x+3} - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} > 1, \\ -1 < \sqrt{x+3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x+3} < 4 \Leftrightarrow 1 < x+3 < 16 \Leftrightarrow -2 < x < 13.$$

Ответ: $x \in (-2; 13)$.

9.201. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$.

Решение.

ОДЗ: $1 < x \ne 2$.

Рассмотрим два случая:

1) $1 < x < 2$, тогда $\log_2(x-1) < 0$, $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$ и неравенство принимает вид $\log_2 \sqrt{x+1} > \log_2(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1 > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0$, $x(x-3) < 0$, отсюда $x \in (1; 2)$;

2) $x > 2$, тогда $\log_2(x-1) > 0$, $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$ и неравенство имеет вид $\log_2 \sqrt{x+1} < \log_2(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < x-1$, $x^2 - 3x > 0$, $x(x-3) > 0$, отсюда $x \in (3; +\infty)$.

В ответ записываем объединение обоих интервалов.

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

9.202. $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \ne 1$.

Перепишем данное неравенство в виде $x^{\log_2 x}+\dfrac{16}{x^{\log_2 x}}-17<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{2\log_2 x}-17x^{\log_2 x}+16<0$. Решив это неравенство как квадратное относительно $x^{\log_2 x}$, получим $1<x^{\log_2 x}<16$. Прологарифмировав по основанию 2, имеем неравенство $0<\log_2^2 x<4$, которое равносильно

системе неравенств $\begin{cases}-2<\log_2 x<2,\\ \log_2 x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{4}<x<4,\\ x\neq 1.\end{cases}$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{1}{4};1\right)\cup(1;4)$.

9.203. $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем неравенство в виде

$5^{\log_5 x\log_5 x}+x^{\log_5 x}<10 \Leftrightarrow x^{\log_5 x}+x^{\log_5 x}<10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^{\log_5 x}<10$, $x^{\log_5 x}<5$. Логарифмируя обе части этого неравенства по основанию 5, получаем $\log_5 x\log_5 x<\log_5 5$, $\log_5^2 x<1$, $-1<\log_5 x<1$, $\dfrac{1}{5}<x<5$.

Ответ: $x\in\left(\dfrac{1}{5};5\right)$.

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$.

Решение.

Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$0<\log_2(2-\log_4 x)-1<3 \Leftrightarrow 1<\log_2(2-\log_4 x)<4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2<2-\log_4 x<16$, $0<-\log_4 x<14 \Leftrightarrow -14<\log_4 x<0$,

$\dfrac{1}{4^{14}}<x<1$, $2^{-28}<x<1$.

Ответ: $x\in(2^{-28};1)$.

9.205. $\left(x^2+4x+10\right)^2-7\left(x^2+4x+11\right)+7<0$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$\left(x^2+4x+10\right)^2-7\left(x^2+4x+10\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+10\right)\left(x^2+4x+10-7\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+10\right)\left(x^2+4x+3\right)<0$. Так как $x^2+4x+10>0$ при $x \in R$, то полученное неравенство равносильно неравенству $x^2+4x+3<0$. Отсюда $-3<x<-1$.

Ответ: $x \in (-3;-1)$.

9.206. Расположить в порядке возрастания три числа $a_1=\log_{\frac{1}{2}}\sin 2x$, $a_2=-1-\log_2\sin x$, $a_3=\log_{\frac{1}{2}}(1-\cos 2x)$, если $0<x<\frac{\pi}{4}$.

Решение.

Перепишем a_1, a_2, a_3 в виде

$a_1=-\log_2 2\sin x\cos x=-1-\log_2\sin x-\log_2\cos x,$

$a_2=-1-\log_2\sin x,$

$a_3=-\log_2 2\sin^2 x=-1-2\log_2\sin x.$

При $0<x<\frac{\pi}{4}$ $\log_2\sin x<0$, $\log_2\cos x<0$, следовательно, размещение в порядке возрастания данных чисел будет a_2, a_1, a_3.

Ответ: a_2, a_1, a_3.

Решить системы неравенств (**9.207 — 9.214**):

9.207. $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x \ne 2$.

Перепишем данную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \le 0{,}2^{0}, \\ \dfrac{2x-2+2-x}{2(2-x)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0, \\ x(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 0 < x < 2. \end{cases} \quad n \in Z$$. Отсюда имеем $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

9.208. $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2 - 13}$.

Решение.

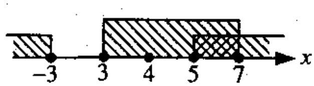
ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \ge 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 13 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{13} \le x \le 4, \\ x \ge 5. \end{array}\right.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9x + 20} \le \sqrt{x-1}, \\ \sqrt{x^2 - 13} \ge \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 \le x - 1, \\ x^2 - 13 \ge x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 21 \le 0, \\ x^2 - x - 12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 7, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ x \le -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Методом интервалов имеем (с учетом ОДЗ) $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ 5 \le x \le 7. \end{array}\right.$



Ответ: $x \in [5; 7] \cup 4$.

9.209. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0, \\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x>5$, $x\neq 8$.

Данная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{(x-8)^2}>0, \\ \lg\sqrt{x+7}>\lg\dfrac{x-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8, \\ \sqrt{x+7}>\dfrac{x-5}{4}, \\ x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8, \\ x+7>\dfrac{(x-5)^2}{16}, \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8, \\ x^2-26x-87<0, \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8, \\ -3<x<29, \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8, \\ 5<x<29. \end{cases}$$

Ответ: $x\in(5;8)\cup(8;29)$.

9.210. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$.

Решение.

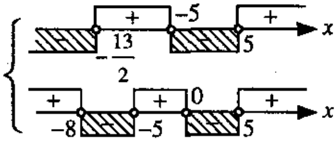
ОДЗ: $x\neq\pm 5$.

Перепишем неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}, \\ 4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-7}{x-5}-4-\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{3x}{x^2-25}<0, \\ \dfrac{3x}{(x-5)(x+5)}+\dfrac{x}{x-5}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+13}{(x-5)(x+5)}<0, \\ \dfrac{x^2+8x}{(x-5)(x+5)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+13)(x-5)(x+5)<0, \\ x(x+8)(x-5)(x+5)<0. \end{cases}$$

Полученную систему будем решать методом интервалов



Общими решениями двух неравенств системы будут $x \in \left(-8; -\dfrac{13}{2}\right) \cup (0; 5)$.

Ответ: $x \in \left(-8; -\dfrac{13}{2}\right) \cup (0; 5)$.

9.211. $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{7}{4} \le x \le 5$.

Из условия имеем

$$\begin{cases} 4x-7 \ge 0, \\ x > 0, \\ 4x-7 < x^2, \\ x+5 \ge 0, \\ 5-x \ge 0, \\ x+5+2\sqrt{25-x^2}+5-x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{7}{4}, \\ x > 0, \\ x^2-4x+7 > 0, \\ x \ge -5, \\ x \le 5, \\ \sqrt{25-x^2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4} \le x \le 5, \\ 25-x^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4} \le x \le 5, \\ x^2 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4} \le x \le 5, \\ -4 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4} \le x < 4.$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{7}{4}; 4\right)$.

9.212. $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

Решение.

Перепишем данную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} \dfrac{2^{x-3x}}{3^{x-2x}} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{3,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}, \\ x^2-6x-3,5<3,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x^2-6x-7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ -1<x<7. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-1; 3)$.

9.213. $\begin{cases} \left|x^2+5x\right|<6, \\ \left|x+1\right| \le 1. \end{cases}$

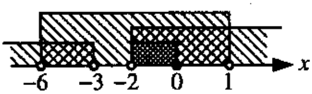
Решение.

Система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} -6<x^2+5x<6, \\ -1 \le x+1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x<6, \\ x^2+5x>-6, \\ x+1\le 1, \\ x+1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x^2+5x+6>0, \\ x\le 0, \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6<x<1, \\ \left[\begin{array}{l} x>-2, \\ x<-3, \end{array}\right. \\ -2\le x\le 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in (-2; 0]$.



Ответ: $x \in (-2; 0]$.

9.214. $\begin{cases} \left|x^2-4x\right|<5, \\ \left|x+1\right|<3. \end{cases}$

Решение.

Система неравенств равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x<5, \\ x^2-4x>-5, \\ -3<x+1<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5<0, \\ x^2-4x+5>0, \\ -4<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<5, \\ x\in R, \\ -4<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2.$$

Ответ: $x\in(-1;2)$.

9.215. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\frac{2}{x^2-49}.$$

Решение.

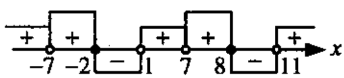
Областью определения данной функции являются все значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}\geq 0, \\ x^2-49\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-8)(x+2)}{(x-1)(x-11)}\geq 0, \\ x^2\neq 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x+2)(x-1)(x-11)\geq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq 11, \\ x\neq \pm 7. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем

$x\in(-\infty;-7)\cup(-7;-2]\cup(1;7)\cup(7;8]\cup(11;\infty)$.



Ответ: $x\in(-\infty;-7)\cup(-7;-2]\cup(1;7)\cup(7;8]\cup(11;\infty)$.

Решения к главе 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольный треугольник (a , b , c — стороны; α , β , γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a ; \qquad (10.1)$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha ; \qquad (10.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ; \qquad (10.3)$$

$$r = \frac{S}{p} ; \qquad (10.4)$$

$$R = \frac{abc}{4S} ; \qquad (10.5)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} ; \qquad (10.6)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов)}; \qquad (10.7)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \text{ (теорема синусов)}. \qquad (10.8)$$

2. Прямоугольный треугольник (a , b — катеты; c — гипотенуза; a_c , b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab ; \qquad (10.9)$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c\,; \tag{10.10}$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}\,; \tag{10.11}$$

$$R=\frac{c}{2}\,; \tag{10.12}$$

$$a^2+b^2=c^2 \text{ (теорема Пифагора)}; \tag{10.13}$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c}\,; \tag{10.14}$$

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}\,; \tag{10.15}$$

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}\,; \tag{10.16}$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta\,. \tag{10.17}$$

3. Равносторонний треугольник:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,; \tag{10.18}$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\,; \tag{10.19}$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\,. \tag{10.20}$$

4. Произвольный выпуклый четырехугольник (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\,. \tag{10.21}$$

5. Параллелограмм (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\,. \tag{10.22}$$

6. Ромб:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\,. \tag{10.23}$$

7. Прямоугольник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi . \qquad (10.24)$$

8. Квадрат (d — диагональ):

$$S = a^2 = d^2/2 . \qquad (10.25)$$

9. Трапеция (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2} ; \qquad (10.26)$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh . \qquad (10.27)$$

10. Описанный многоугольник (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S = pr . \qquad (10.28)$$

11. Правильный многоугольник (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3} ;\ a_4 = R\sqrt{2} ;\ a_6 = R ; \qquad (10.29)$$

$$S = \frac{n a_n r}{2} . \qquad (10.30)$$

12. Окружность, круг (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C = 2\pi r ; \qquad (10.31)$$

$$S = \pi r^2 . \qquad (10.32)$$

13. Сектор (l — длина дуги, ограничивающей сектор; n° — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha ; \qquad (10.33)$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha . \qquad (10.34)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

2. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

3. Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2},$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника.

4. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

5. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

где a и b — длины двух сторон треугольника ABC; a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны.

6. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

7. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

8. Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. $S = h^2$.

9. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

Доказательство всех этих дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

10.191. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9 см. Найти стороны трапеции.

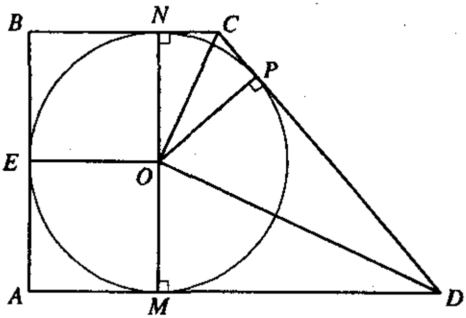


Рис. 10.1

Решение.

По условию $OC = 3$ см, $OD = 9$ см (см. рис. 10.1). Пусть N, P, M, E — точки касания окружности со сторонами трапеции BC, CD, AD, AB соответственно. По свойству касательных:

1) $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OM \perp AD$.

2) $\angle NCO = \angle PCO$, $\angle MDO = \angle PDO$.

Тогда $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle ADC) = 90° \Rightarrow \Delta COD$ — прямоугольный, откуда $CD = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$ см. Пусть r — радиус вписанной окружности. $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OK = \frac{1}{2} OC \cdot OD$ или $3 \cdot \sqrt{10} \cdot r = 3 \cdot 9$, $r = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$. Из ΔCPO:

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - \frac{9^2}{10}} = 3\sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$PD = CD - CP = 3\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{10}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{27\sqrt{10}}{10}.$$

По свойству касательной $MD = PD$, $NC = CP$. Очевидно $BNOE$ — квадрат, поэтому

$$BE = BN = r = \frac{9\sqrt{10}}{10}. \ AB = 2r = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ см};$$

$$BC = BN + CN = \frac{9\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ см};$$

$$AD = AN + ND = \frac{9\sqrt{10}}{10} + \frac{27\sqrt{10}}{10} = \frac{18\sqrt{10}}{5} \text{ см}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{10}}{5}$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$, $3\sqrt{10}$, $\frac{18\sqrt{10}}{5}$ см.

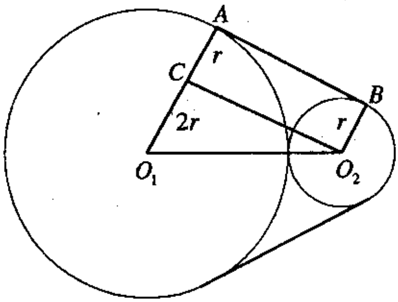


Рис. 10.2

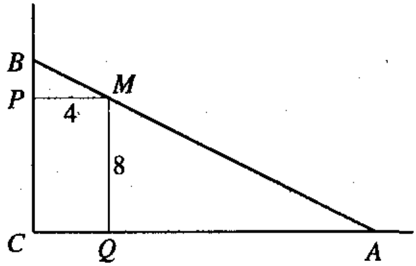


Рис. 10.3

10.192. Две окружности касаются внешним образом. Их радиусы относятся как 3:1, а длина их общей внешней касательной равна $6\sqrt{3}$. Определить периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними частями окружностей.

Решение.

Пусть $O_2B = r$; тогда $O_1A = R = 3r$ (рис. 10.2). Проведем $O_2C \parallel AB$; имеем $AC = r$, $O_1C = 2r$, $O_1O_2 = 4r$, т.е. $O_1O_2 = 2O_1C$ и, значит, $\angle CO_2O_1 = 30°$. Так как $O_2C = AB = 6\sqrt{3}$, то из ΔO_1CO_2 находим $O_1O_2 = O_2C : \cos 30° = 6\sqrt{3} : \left(\sqrt{3}/2\right) = 12$, откуда $r = 3$, $R = 9$. Дуги, входящие в указанную фигуру, содержат соответственно 120 и 240°, поэтому их длины равны $\frac{2\pi r}{3}$ и $\frac{4\pi r}{3}$. Искомый периметр составляет $P = 2 \cdot 6\sqrt{3} + \frac{2\pi r}{3} + \frac{4\pi r}{3} = 12\sqrt{3} + 14\pi$.

Ответ: $14\pi + 12\sqrt{3}$.

10.193. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см². Найти катеты треугольника.

Решение.

По условию $\angle C = 90°$, $MP = 4$ см, $MQ = 8$ см, $S_{\Delta ABC} = 100$ см² (рис. 10.3); найдем BC и AC. Пусть $BC = x$, $AC = y$; тогда $0{,}5xy = 100$, т.е. $xy = 200$. Так как $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, то $\frac{MP}{AQ} = \frac{BP}{MQ}$ или $\frac{4}{y-4} = \frac{x-8}{8}$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{4}{y-4}=\dfrac{x-8}{8}, \\ xy=200\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=50, \\ xy=200\end{cases} \Rightarrow\ y^2-25y+100=0,\ y_1=5 \text{ см},$$

$y_2=20$ см. Получаем два решения: $x_1=40$ см, $y_1=5$ см; $x_2=10$ см, $y_2=20$ см.

Ответ: 40 и 5 см или 10 и 20 см.

10.194. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC; угол COC_1, где O — центр окружности, описанной около треугольника, является прямым. Доказать, что $|\angle B-\angle A|=90^\circ$.

Решение.

Обозначим $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Пусть для определенности $\beta>\alpha$ (рис. 10.4). $\angle CAB$ вписан в окружность с центром в точке O и опирается на ту же дугу BC, что и центральный угол $\angle COB$, поэтому $\angle COB=2\angle CAB=2\alpha$. $OC\perp OC_1$, $AB\perp OC_1 \Rightarrow$

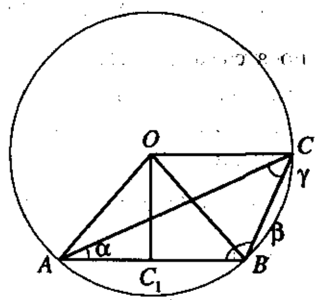


Рис. 10.4

$\Rightarrow\ OC\parallel AB$, тогда $\angle BOC=\angle OBA$, как накрест лежащие, поэтому $\angle OBA=2\alpha$. ΔOAB — равнобедренный, тогда $\angle OAB=\angle OBA$, следовательно, $\angle OAB=2\alpha$. $\angle AOB=2\angle ACB=2\gamma$ (как центральный угол). Из ΔAOB : $\angle AOB+\angle OAB+\angle OBA=180^\circ$, $2\alpha+2\alpha+2\gamma=180^\circ$, $2\alpha+\gamma=90^\circ$, в то же время $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. Отсюда получаем $\beta-\alpha=90^\circ$. Что и требовалось доказать.

10.195. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

Решение.

Пусть M и K — точки касания окружности и сторон AB и AD квадрата $ABCD$ (рис. 10.5), M и K — точки пересечения окружности с указанными сторонами квадрата, а P и E — со сторонами BC и CD. По условию

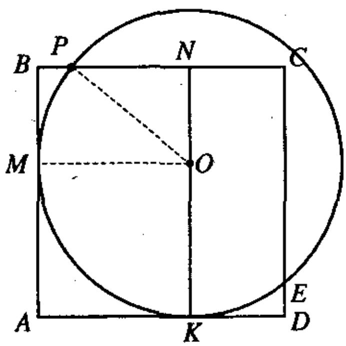


Рис. 10.5

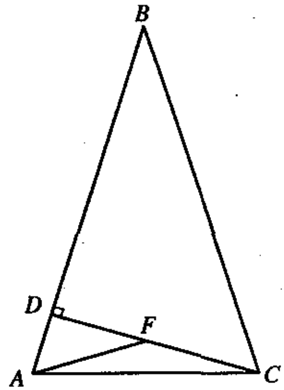


Рис. 10.6

$BP = DE = 2$ см, $CP = CE = 23$ см. Проведем $ON \perp BC$. $OM = OP = NB = OK = R$, где R — радиус данной окружности. $AB = NK = BC = CP + PB = 25$ см, $ON = NK - KO = (25 - R)$ см, $PN = BN - BP = (R - 2)$ см. Из прямоугольного треугольника PNO: $OP^2 = ON^2 + NP^2$ или $R^2 = (R-2)^2 + (25 - R^2)$, откуда $\left[\begin{array}{l} R = 17 \\ R = 37 \end{array}\right.$. Условию удовлетворяет $R = 17$.

Ответ: 17 см.

10.196. Дан треугольник ABC, в котором $2h_c = AB$ и $\angle A = 75^\circ$. Найти величину угла C.

Решение.

Обозначим высоту CD через h, а отрезок AD — через x (рис. 10.6). Имеем $\angle ACD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Проведем AF так, чтобы $\angle CAF = \angle ACD = 15^\circ$. Тогда $\angle AFD = 30^\circ$ и из ΔADF получим $AF = FC = 2x$, $DF = x\sqrt{3}$. Но $DF = h - FC = h - 2x \Rightarrow x = \dfrac{h}{2+\sqrt{3}} = h(2-\sqrt{3})$. Так как $AB = 2h$, то $BD = AB - AD = 2h - x = h\sqrt{3}$. Из ΔBDC имеем $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2h \Rightarrow \angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$.

Ответ: 75°.

10.197. В прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых построенными прямыми.

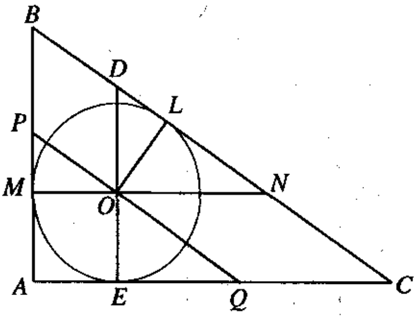


Рис. 10.7

Решение.

Найдем радиус вписанной окружности. Имеем $r=\frac{S}{p}=\frac{0{,}5\cdot 6\cdot 8}{0{,}5(6+8+10)}=\frac{24}{12}=2$ см. Далее, так как $\Delta ABC \sim \Delta MPO$ (рис. 10.7), то $\frac{AB}{MP}=\frac{AC}{MO}$, откуда $MP=\frac{AB\cdot MO}{AC}=\frac{6\cdot 2}{8}=\frac{3}{2}$ см.

Аналогично, $\Delta EOQ \sim \Delta MPO$: $\frac{EQ}{MO}=\frac{OE}{PM}$, откуда $EQ=\frac{OE\cdot MO}{PM}=\frac{2\cdot 2}{3/2}=\frac{8}{3}$ см.

Проведем $OL\perp BC$; тогда $DN=DL+LN$. $\Delta EOQ=\Delta MPO$ (по катету и острому углу); значит, $LN=EQ=\frac{8}{3}$ см. Точно так же из равенства треугольников MPO и DLO находим $DL=MP=\frac{3}{2}$ см и, следовательно, $DN=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{25}{6}$ см.

Ответ: $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{3}$ и $\frac{25}{6}$ см.

10.198. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCK$ (рис. 10.8) $BC\parallel AK$, BD и CD — биссектрисы $\angle ABC$ и $\angle BCK$, DE — высота, $DE=12$ см, $BD=15$ см, $CD=13$ см. Из ΔBED ($\angle BED=90^\circ$): $BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=9$ см. Из прямо-

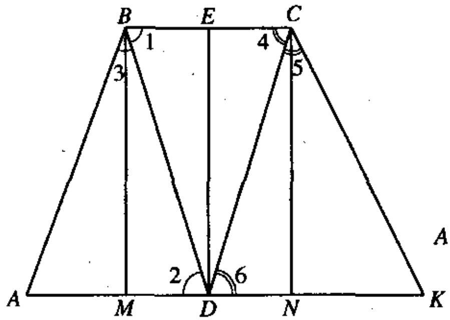


Рис. 10.8

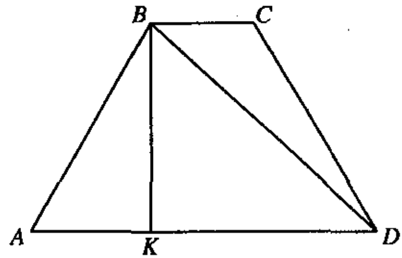


Рис. 10.9

угольного треугольника ΔCED $CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = 5$ см. Тогда $BC = BE + CE = 14$ см. $\angle 1 = \angle 3$ — по условию, $\angle 1 = \angle 2$ — внутренние накрест лежащие при $BC \| AD$ и секущей BD. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, $AD = AB$. Аналогично, $\angle 5 = \angle 6$, $CK = DK$. BM и CN — высоты трапеции. $BM = CN = DE = 12$ см, отсюда $MD = BE = 9$ см, $DN = EC = 5$ см. Пусть $AB = x$ см, тогда $AM = (x - 9)$ см. Из прямоугольного треугольника ΔAMB $AB^2 = AM^2 + BM^2$; $x^2 = (x-9)^2 + 144$, $x = 12{,}5$. Следовательно, $AD = AB = 12{,}5$ см. Пусть $CK = y$ см. Тогда $NK = (y - 5)$ см. Из ΔCNK ($\angle CNK = 90°$): $CK^2 = CN^2 + NK^2$; $y^2 = (y-5)^2 + 144$; $y = 16{,}9$. Следовательно, $DK = CK = 16{,}9$ см. Тогда $AK = AD + DK = 29{,}4$ см.

Ответ: 29,4 см; 12,5 см; 14 см; 16,9 см.

10.199. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 10.9) $BC \| AD$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Так как около данной трапеции описана окружность, то $AB = CD$. Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD = 2AB$; $AB = \frac{AD + BC}{2} = 10$ см. BK — высота трапеции. Тогда $AK = \frac{AD - BC}{2} = 6$ см. Из ΔAKB ($\angle AKB = 90^\circ$):

$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 8$ см. Радиус вписанной окружности $r = \frac{1}{2}BK = 4$ см.

Радиус R описанной окружности найдем как радиус окружности, описанной около ΔABD : $R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\Delta ABD}}$, $KD = AD - AK = 10$ см. Из ΔBKD

($\angle BKD = 90^\circ$): $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{41}$ см. $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BK = 64$ см².

Тогда $R = \frac{10 \cdot 2\sqrt{41} \cdot 16}{4 \cdot 64} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$ (см).

Ответ: 4 см; $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ см.

10.200. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q. Найти стороны треугольника.

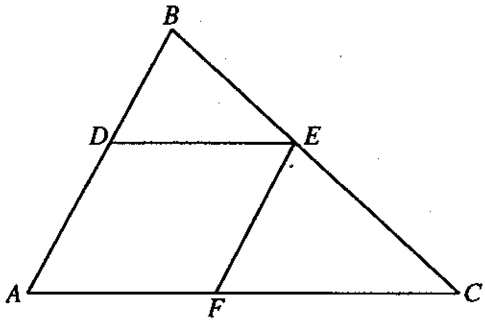


Рис. 10.10

Решение.

В ΔABC (рис. 10.10) вписан ромб $ADEF$, $BE = p$, $EC = q$, $DE = FE = m$, тогда $BC = p + q$. $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ (по двум углам). Тогда $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$; $AC = \frac{DE \cdot BC}{BE} = \frac{m(p+q)}{p}$. $\Delta FEC \sim$

$\sim \Delta ABC$. Тогда $\frac{FE}{AB} = \frac{EC}{BC}$; $AB = \frac{FE \cdot BC}{EC} = \frac{m(p+q)}{q}$.

Ответ: $p + q$; $\frac{m(p+q)}{p}$; $\frac{m(p+q)}{q}$.

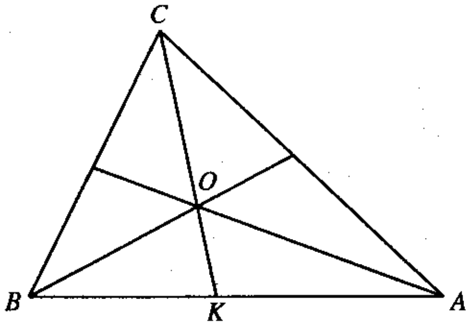


рис. 10.11

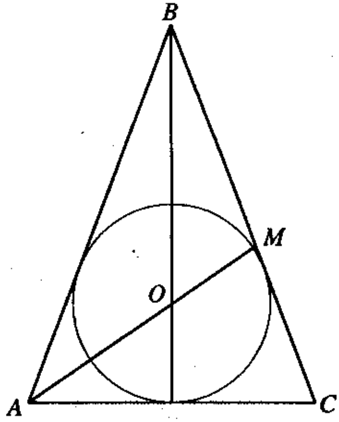


Рис. 10.12

10.201. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$ см, $BC = 12$ см и $AC = 18$ см. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C.

Решение.

Пусть CK — биссектриса $\angle C$, O — центр окружности, вписанной в ΔABC, — точка пересечения его биссектрис (рис. 10.11). Пусть $BK = x$ см, $x > 0$. Тогда $AK = (15 - x)$ см. По свойству биссектрисы $\frac{BK}{BC} = \frac{AK}{AC}$; $\frac{x}{12} = \frac{15-x}{18}$; $x = 6$. BO — биссектриса ΔBCK. Тогда $\frac{CO}{OK} = \frac{BC}{BK} = \frac{12}{6} = 2:1$.

Ответ: 2:1.

10.202. Дан равнобедренный треугольник с основанием, равным a, и боковой стороной, равной b. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании в отношении $(a+b):b$, считая от вершины угла.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.12) $AB = BC = b$, $AC = a$, O — центр вписанной окружности, AM — биссектриса $\angle BAC$, BO — биссектриса $\angle ABM$.

Тогда $\frac{AO}{OM} = \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \frac{BM + MC}{BM} = 1 + \frac{MC}{BM} = 1 + \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$.

Что и требовалось доказать.

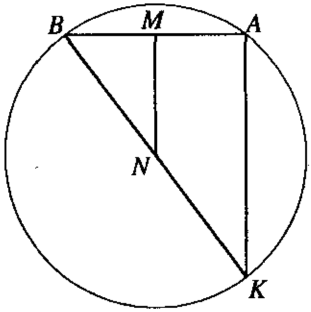


Рис. 10.13

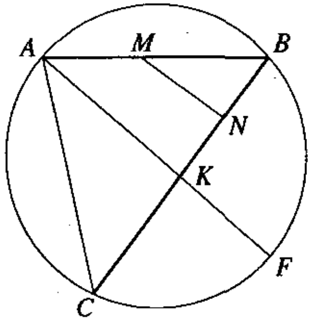


Рис. 10.14

10.203. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

Решение.

Из точки B окружности (рис. 10.13) проведены хорды $AB = 9$ см и $BK = 17$ см, $MN = 5$ см. Тогда MN — средняя линия ΔABK, $AK = 2MN = 10$ см. Искомый радиус R найдем как радиус окружности, описанной около ΔABK: $R = \dfrac{AB \cdot AK \cdot BK}{4S_{\Delta ABK}}$. Полупериметр треугольника

$p = \dfrac{AB + AK + BK}{2} = 18$ см. $S_{\Delta ABK} = \sqrt{(18-9)(18-10)(18-7)\cdot 18} = 36$ см².

$R = 10\dfrac{5}{8}$ см.

Ответ: $10\dfrac{5}{8}$ см.

10.204. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

Решение.

Из точки B окружности (рис. 10.14) проведены хорды $AB = 10$ см и $BC = 12$ см, M — середина AB, $MN \perp BC$, $MN = 4$ см. Опустим из точки A перпендикуляр AK на отрезок BC. В ΔABK — MN — средняя линия. Тогда $AK = 2MN = 8$ см. Из ΔMNB ($\angle MNB = 90^\circ$): $BN = \sqrt{BM^2 - MN^2} = 3$ см. Тогда $BK = 2BN = 6$ см. Так как $BC = 12$ см,

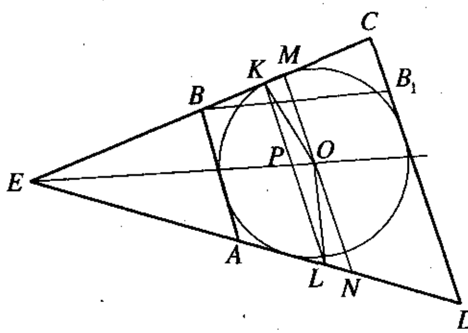


Рис. 10.15

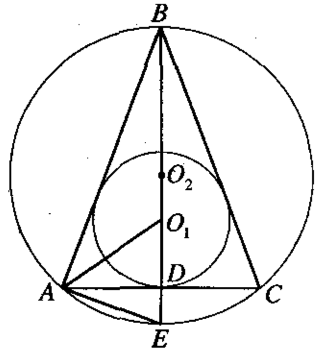


Рис. 10.16

то K — середина BC, и, следовательно, $AC = AB = 10$ см, отрезок AK лежит на диаметре AF данной окружности. Пусть $AF = 2R$, где R — радиус данной окружности. Тогда $KF = AF - AK = 2R - 8$. K — точка пересечения диаметра AF и хорды BC. По свойству хорды $AK \cdot KF = CK \cdot KB$; $8(2R - 8) = 6 \cdot 6$; $R = 6{,}25$.

Ответ: 6,25 см.

10.205. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5 см. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найти стороны полученной трапеции.

Решение.

Окружность с центром O (рис. 10.15) касается сторон угла E в точках K и L, $KL = 8$ см, $OK = 5$ см, $AB \| CD \| KL$. Проведем диаметр окружности $MN \| KL$, P — точка пересечения EO и KL, $\angle KPO = 90°$, $\Delta KPO \sim \Delta OKM$ — по двум углам ($\angle PKO = \angle KOM$, $\angle KPO = \angle OKM = 90°$). Тогда $\frac{KP}{KO} = \frac{KO}{MO}$, $MO = \frac{KO^2}{KP} = \frac{25}{4}$ см. $MN = 2MO = \frac{25}{2}$ см. MN — средняя линия трапеции $ABCD$ и, так как в эту трапецию вписана окружность, то $BC = AD = MN = \frac{25}{2}$ см. BB_1 — высота трапеции $ABCD$, $BB_1 = 2OK = 10$ см. Из ΔBB_1C ($\angle BB_1C = 90°$): $B_1C = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = 7{,}5$ см. $CD - AB = 2B_1C = 15$ см, $CD + AB = 2BC = 25$ см. Тогда $CD = 20$ см, $AB = 5$ см.

Ответ: 20 см; 5 см; 12,5 см; 12,5 см.

10.206. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3/2 см, а описанной 25/8 см?

Решение.

В ΔABC $AB = BC$, BD — высота, O_1 — центр вписанной, а O_2 — центр описанной окружностей (рис. 10.16), радиусы которых $r = \frac{3}{2}$ см и $R = \frac{25}{8}$ см. E — точка пересечения луча BD и описанной окружности. AO_1 — биссектриса $\angle BAC$. Пусть $\angle BAO_1 = \angle O_1AD = \alpha$. Тогда $\angle AO_1D = 90° - \alpha$. Так как BE — диаметр описанной окружности, то $\angle BAE = 90°$, $\angle O_1AE = 90° - \alpha$, $BE = 2R = \frac{25}{4}$ см. Отсюда $AE = O_1E$. Пусть $DE = x$ см. Тогда $AE = O_1E = O_1D + DE = r + x = \frac{3}{2} + x$. Из ΔBAE ($\angle BAE = 90°$, AD — высота): $AE^2 = DE \cdot BE$; $\left(\frac{3}{2} + x\right)^2 = x \cdot \frac{25}{4}$; $x = \frac{9}{4}$ или $x = 1$. Из ΔADE ($\angle ADE = 90°$): $AD = \sqrt{AE^2 - DE^2}$. При $x = \frac{9}{4}$: $AE = \frac{15}{4}$ см, $AD = 3$ см, $AC = 6$ см. При $x = 1$: $AE = \frac{5}{2}$ см, $AD = \frac{\sqrt{21}}{2}$ см и AC выражается иррациональным числом. Следовательно, $AC = 6$ см, $AB = BC = \sqrt{BE^2 - AE^2} = 5$ см.

Ответ: 5 см, 5 см, 6 см.

10.207. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

Решение.

В ΔABC имеем $AC = 21$ см, $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, вершины L и Q прямоугольника $MNQL$ принадлежат AC, M — AB, N — BC

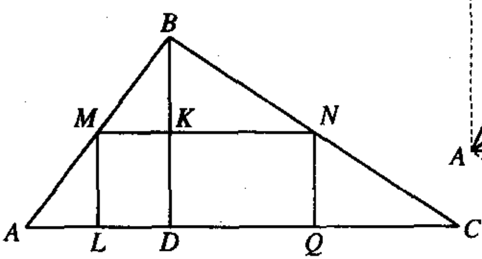


Рис. 10.17

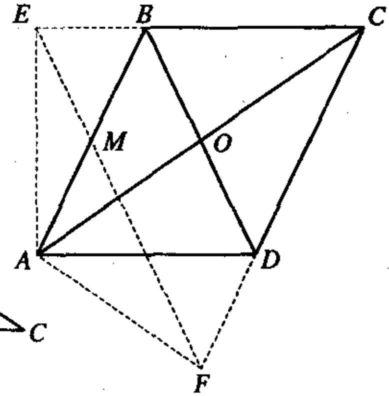


Рис. 10.18

(рис. 10.17). Пусть $ML = x$ см. Тогда периметр прямоугольника 24 см и $MN = (12 - x)$ см. BD — высота ΔABC, K — точка пересечения BD и MN, а BK — высота ΔMBN. По формуле Герона найдем площадь S треугольника ΔABC : $S = 84$ см². Тогда $BD = \frac{25}{AC} = 8$ см, $BK = (8 - x)$ см.

Так как $MN \parallel AC$, то $\Delta MBN \sim \Delta ABC$. Тогда $\frac{BK}{BD} = \frac{MN}{AC}$; $\frac{8-x}{8} = \frac{12-x}{21}$,

$x = 5\frac{7}{13}$. Следовательно, $ML = 5\frac{7}{13}$ см, $MN = 6\frac{6}{13}$ см.

Ответ: $5\frac{7}{13}$ см, $6\frac{6}{13}$ см.

10.208. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

Решение.

Так как ΔAEF — равнобедренный (рис. 10.18), то биссектриса AM перпендикулярна EF и лежит на диагонали ромба. Находим $AM^2 = AF^2 - MF^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$, т.е. $AM = \frac{3}{2}$ (см). В ΔACF имеем

$\angle F = 90^\circ$ и $FM \perp AC$ $\Rightarrow$ $AF^2 = AC \cdot AM$, $9 = AC \cdot \frac{3}{2}$, $AC = 6$ (см).

Далее $\Delta ACD \sim \Delta AEF$ (углы при основании равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), поэтому $\frac{AM}{OD} = \frac{EF}{AC} \Leftrightarrow \frac{3/2}{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$, $OD = \sqrt{3}$ см. Получили $BD = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 6$ см.

Ответ: 6 и $2\sqrt{3}$ см.

10.209. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26 см. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

Решение.

Пусть r — искомый радиус. В ΔABC $AB = 10$см, $BC = 24$см, $AC = 26$ см (рис. 10.19), O — центр окружности, касающейся AB и BC в точках N и K соответственно. Так как $26^2 = 10^2 + 24^2$, то ΔABC — прямоугольный.

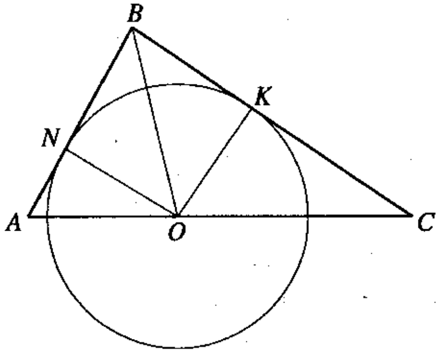


Рис. 10.19

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 120$, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot ON = 5r$; $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OK = 12r$.

Так как $S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC}$, то $17r = 120$, $r = \frac{120}{17}$.

Ответ: $\frac{120}{17}$.

10.210. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10 см.

Решение.

Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана и около ΔACD (рис. 10.20), причем такая окружность единственна. Ее радиус находим по формуле $R = \frac{abc}{4S}$. Имеем $S = \frac{1}{2} AD \cdot BE$, где $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$; отсюда $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 = 56$. Из

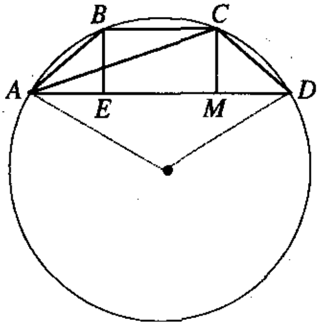


Рис. 10.20

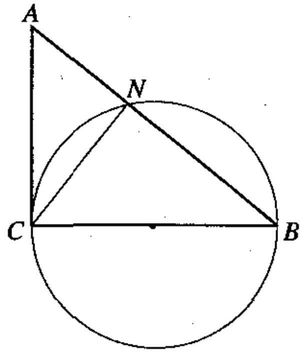


Рис. 10.21

ΔACM имеем $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$. Получили $R = \dfrac{14 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 56} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

10.211. На большем катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.21) $\angle ACB = 90°$, $BC > AC$, $AC = 7{,}5$ см, N — точка пересечения окружности, о которой говорится в условии, и гипотенузы AB, $CN = 6$ см. $\angle CNB$ — вписанный и опирается на диаметр. Тогда $\angle CNB = 90°$. Из ΔANC ($\angle ANC = 90°$): $AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = 4{,}5$ см. Так как CN — высота прямоугольного ΔACB, то $\Delta ANC \sim \Delta CNB$. Следовательно, $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{CN}{BC}$, $BC = \dfrac{AC \cdot CN}{AN} = 10$ см. Искомый радиус $R = \dfrac{1}{2} BC = 5$ см.

Ответ: 5 см.

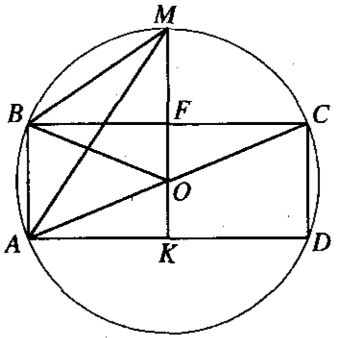


Рис. 10.22

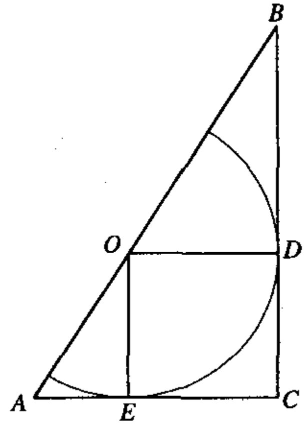


Рис. 10.23

10.212. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояния от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см.

Решение.

Так как AC — диаметр окружности (рис. 10.22), то $R = 0{,}5\sqrt{24^2 + 7^2} = 12{,}5$ см.

В ΔBOF имеем $OF = \sqrt{OB^2 - BF^2} = \sqrt{12{,}5^2 - 12^2} = 3{,}5$. см; значит, $MF = 12{,}5 - 3{,}5 = 9$ см, $MK = 12{,}5 + 3{,}5 = 16$ см. Из ΔMBF и ΔMAK находим искомые расстояния: $MB = \sqrt{MF^2 + BF^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ см, $MA = \sqrt{MK^2 + KA^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ см.

Ответ: 15 и 20 см.

10.213. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

Решение.

Проведем радиусы OD и OE в точки касания (рис. 10.23). Имеем $OD = OE = CE = CD$, т.е. $ECDO$ — квадрат. Пусть R — радиус окружности; тогда длина дуги ED равна $\frac{\pi R}{2}$. Так как $\Delta AEO \sim \Delta ODB$, то $\frac{AE}{OD} = \frac{AO}{OB} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$. Но $AE^2 = AO^2 - OE^2 = 30^2 - R^2$, откуда

$\frac{\sqrt{30^2 - R^2}}{R} = \frac{3}{4}$, $16\left(30^2 - R^2\right) = 9R^2 \Rightarrow R = 24$. Длина дуги ED равна 12π.

Ответ: 12π.

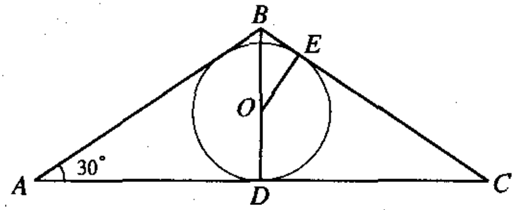


Рис. 10.24

10.214. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

Решение.

Проведем радиус $OE \perp BC$ (рис. 10.24). Так как $\angle OBE = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$, то $\angle BOE = 30^\circ$ и $BE = \frac{1}{2}BO$. Из ΔBEO находим $BO^2 = \frac{1}{4}BO^2 + 9$, откуда $BO = 2\sqrt{3}$. В ΔADB имеем $AB = 2BD$. Но $BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 3$ и, следовательно, $AB = BC = 4\sqrt{3} + 6$. Наконец, $AC = 2DC = 2(BC - BE) =$ $= 2\left(4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3} + 12$.

Ответ: $4\sqrt{3} + 6$, $6\sqrt{3} + 12$.

10.215. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.25) $\angle ACB = 90^\circ$, BP и AE — медианы, $BP = \sqrt{52}$, $AE = \sqrt{73}$. Пусть $BC = x$, $AC = y$. Тогда $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Из ΔACE ($\angle ACE = 90°$):

$AC^2 + CE^2 = AE^2$; $y^2 + \frac{x^2}{4} = 73$.

Из ΔBCP ($\angle BCP = 90°$):

$BC^2 + CP^2 = BP^2$; $x^2 + \frac{y^2}{4} = 52$.

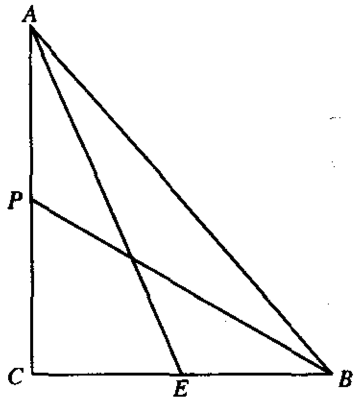


Рис. 10.25

Решая систему $\begin{cases} y^2 + \frac{x^2}{4} = 73, \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 52, \end{cases}$ получаем $\begin{cases} 4y^2 + x^2 = 292, \\ 4x^2 + y^2 = 208; \end{cases}$ $5x^2 + 5y^2 = 500$; $x^2 + y^2 = 100$. Следовательно,

$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = 10$.

Ответ: 10.

10.216. Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

Решение.

Пусть A — точка пересечения окружностей с центрами O и O_1 (рис. 10.26), $OA = 8$ см, $O_1A = 4$ см, MN — их общая касательная. По условию окружности пересекаются под прямым углом, следовательно, касательные к ним в точке A взаимно перпендикулярны. Но тогда и радиусы, проведенные в точку касания также перпендикулярны. Из ΔOAO_1: $OO_1^2 = OA^2 + O_1A^2 = 80$.

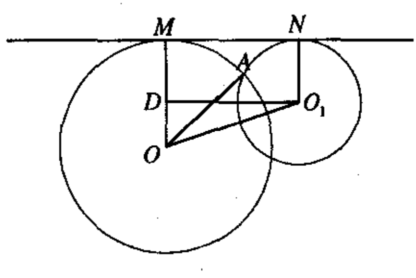


Рис. 10.26

Проведем $O_1D \| MN$. Тогда $O_1D \perp OM$, $MN = O_1D$, $MD = NO_1 = 4$, $OD = OM - MD = 4$. Из ΔODO_1: $O_1D = \sqrt{OO_1^2 - OD^2} = 8$.

Ответ: 8.

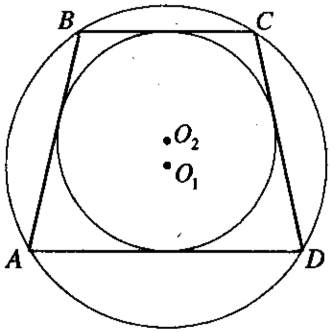


Рис. 10.27

10.217. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?

Решение.

Для того, чтобы в трапецию можно было вписать окружность и вокруг нее можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы трапеция была равнобокой и боковая сторона равнялась полусумме оснований.

Необходимость.

Пусть $ABCD$ — трапеция, вокруг которой описана окружность с центром в точке O_1 и в которую вписана окружность с центром в точке O_2 (рис. 10.27). Тогда по свойству четырехугольника, вписанного в окружность, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Но $\angle ABC + \angle BAD = 180°$ и, следовательно, $\angle BAD = \angle ADC$ и трапеция $ABCD$ — равнобокая, $AB = CD$. Так как в трапецию вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$ и, значит, $AB = CD = \dfrac{BC + AD}{2}$.

Достаточность.

Пусть $ABCD$ — равнобокая трапеция ($AB = CD$) и $AB = CD = \dfrac{BC + AD}{2}$. Тогда $\angle BAD = \angle ADC$, но $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Отсюда $\angle ADC + \angle ABC = 180°$, и вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность. Кроме того, $AB + CD = BC + AD$ и, следовательно, в $ABCD$ можно вписать окружность. Что и требовалось доказать.

10.218. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 10.28) $BC \parallel AD$, $BC = 4$ см, $AD = 12$ см, O —

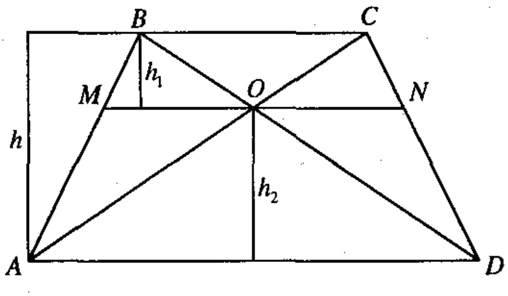


Рис. 10.28

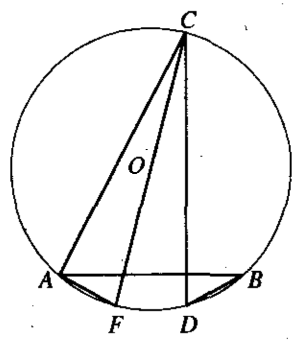


Рис. 10.29

точка пересечения диагоналей, MN — отрезок искомой длины. Пусть h_1 — расстояние между прямыми BC и MN, h_2 — между MN и AD, h — между BC и AD, $h = h_1 + h_2$. $\Delta MBO \sim \Delta ABD$. Тогда $\frac{MO}{AD} = \frac{h_1}{h}$ (1).

$\Delta OCN \sim \Delta ACD$. Тогда $\frac{ON}{AD} = \frac{h_1}{h}$. Следовательно, $MO = ON = \frac{1}{2}MN$.

Пусть $MO = x$ см. Тогда из (1) имеем: $\frac{x}{12} = \frac{h_1}{h}$. $\Delta MAO \sim \Delta BAC$. Тогда $\frac{MO}{BC} = \frac{h_2}{h}$; $\frac{x}{4} = \frac{h_2}{h}$. Следовательно, $\frac{x}{12} + \frac{x}{4} = \frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h}$; $\frac{x}{3} = \frac{h_1 + h_2}{h}$; $x = 3$.

Значит, $MN = 6$ см.

Ответ: 6 см.

10.219. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Решение.

Проведем диаметр CF (рис. 10.29). Докажем, что $AF = BD$ как хорды, стягивающие равные дуги. Действительно, $\cup AC + \cup BD = 180^\circ$ (так как $AB \perp CD$), $\cup AC + \cup AF = 180^\circ$ (поскольку CF — диаметр). Следовательно, $\cup AF = \cup BD$ и $AF = BD$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $AC^2 + AF^2 = 4R^2$, откуда и $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Что и требовалось доказать.

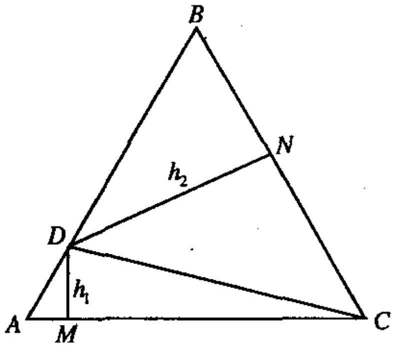


Рис. 10.30

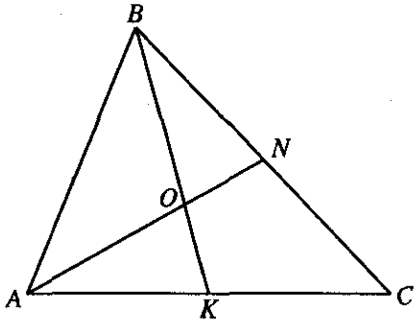


Рис. 10.31

10.220. Показать, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

Решение.

Пусть D — произвольная точка стороны AB равностороннего ΔABC (рис. 10.30). Опустим из точки D перпендикуляры DM и DN на стороны AC и BC. Пусть $DM = h_1$, $DN = h_2$, $AC = a$. Тогда $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}ah_1$, $S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2}ah_2$, $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta ADC} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC}$, $\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h_1 + h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = const$. Что и требовалось доказать.

10.221. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.31) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, BK и AN — медианы. O — точка их пересечения, $AN \perp BK$. Пусть $ON = x$ см, $OK = y$ см. Тогда $AO = 2x$ см, $BO = 2y$ см. Из ΔBON ($\angle BON = 90°$): $BO^2 + ON^2 = BN^2$; $4y^2 + x^2 = 16$ (1). Из ΔAOK ($\angle AOK = 90°$): $AO^2 + OK^2 = AK^2$; $4x^2 + y^2 = 9$ (2). Складывая (1) и (2), имеем $5x^2 + 5y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 5$. Из ΔAOB ($\angle AOB = 90°$): $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$ (см).

Ответ: $2\sqrt{5}$ см.

10.222. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их общими касательными, а основание касается большей из окружностей. Найти основание треугольника.

Решение.

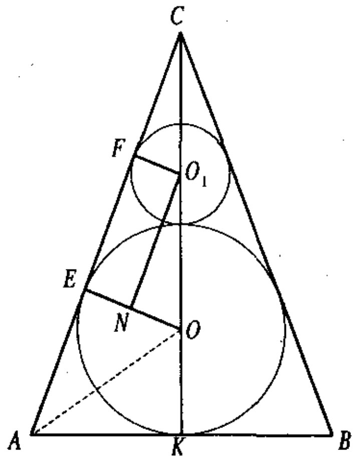


Рис. 10.32

O и O_1 — центры данных окружностей, ΔABC — треугольник, о котором говорится в условии задачи, $AC = BC$ (рис. 10.32). CK — высота ΔABC, O и O_1 принадлежат CK. F и E — точки касания окружностей с центрами O_1 и O соответственно со стороной AC треугольника. $OE = OK = R$. $O_1F = r$.

Так как $\Delta AKC \sim \Delta OEC$ (по двум углам: $\angle AKC = \angle OEC = 90^\circ$, угол с вершиной C общий), то $\angle CAK = \angle COE$. Так как окружность с центром O касается сторон $\angle CAK$, то AO — его биссектриса. Пусть $\angle COE = \alpha$.

Тогда $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$. Проведем $O_1N \parallel AC$. Тогда $O_1N \perp OE$, $EN = O_1F = r$,

$ON = OE - EN = R - r$, $OO_1 = R + r$. Из ΔO_1NO ($\angle O_1NO = 90^\circ$): $\cos\alpha = \frac{ON}{OO_1} = \frac{R-r}{R+r}$. Из ΔAKO ($\angle AKO = 90^\circ$):

$$AK = OK \operatorname{ctg}\angle OAK = R\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = R\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = R\frac{1+\frac{R-r}{R+r}}{\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2}} =$$

$$= R\frac{R+r+R-r}{(R+r)\sqrt{\frac{(R+r)^2-(R-r)^2}{(R+r)^2}}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4Rr}} = \frac{R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

$$AB = 2AK = \frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

Ответ: $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$.

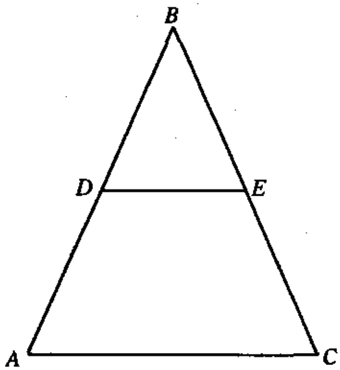


Рис. 10.33

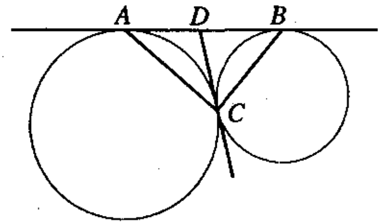


Рис. 10.34

10.223. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Найти его стороны, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

Решение.

Пусть a и b — катеты, а c — гипотенуза треугольника. Так как $a+b+c=60$, то $a+b=60-c$, откуда $(a+b)^2=(60-c)^2$ или $a^2+2ab+b^2=3600-120c+c^2$ (*). Но $a^2+b^2=c^2$, а $6c=0{,}5ab$ (площадь треугольника). Подставляя эти выражения в равенство (*), получим $c^2+24c=3600-120c+c^2$, $144c=3600$, т.е. $c=25$ см. Имеем систему уравнений $\begin{cases} a+b=35, \\ ab=300, \end{cases}$ т.е. a и b — корни уравнения $x^2-35x+300=0$. Значит, $a_1=20$, $a_2=15$; $b_1=15$, $b_2=20$.

Ответ: 15, 20 и 25 см.

10.224. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 18 см. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40 см?

Решение.

По условию в ΔABC (рис. 10.33) имеем: $AB=BC=18$, $AC=12$. Пусть $BD=BE=x$. Тогда $AD=EC=18-x$. Периметр трапеции $ADEC$: $P=AC+DE+2AD=40$, отсюда $DE=40-(2AD+AC)=2x-8$. $\Delta ABC\sim$ $\sim\Delta DBE$, следовательно, $\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{AB}{AC}$ или $\dfrac{x}{2x-8}=\dfrac{18}{12}$, $x=6$.

Ответ: 6 см.

10.225. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом. Найти угол, определяемый хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

Решение.

Пусть AB — общая внешняя касательная данных окружностей, C — точка их касания, D — точка пересечения AB и общей касательной окружностей в точке C (рис. 10.34). Тогда $DB = DC$, $DA = DC$, откуда $\angle DCB = \angle DBC$, $\angle DAC = \angle DCA$. Из ΔACB: $\angle DAC + \angle DBC + \angle ACB = 180^\circ$, следовательно, $\angle DAC + \angle DBC = \angle ACB$ и $2\angle ACB = 180^\circ$, откуда $\angle ACB = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

10.226. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$ см.

Решение.

Обозначим радиус окружности через r, а длину гипотенузы через $5x$. Тогда (рис. 10.35) $BC = 3x + r$, $AC = 2x + r$, поскольку $BK = BL$, $AK = AM$. Так как $\angle OCM = 45^\circ$, то $r = OC : \sqrt{2} = \sqrt{8} : \sqrt{2} = 2$ см. Для площади треугольника ABC имеем выражение $S = 0{,}5AC \cdot BC$; с другой стороны, $S = pr$, где $p = 0{,}5(AB + BC + AC)$. Следовательно, $0{,}5(2x+2)(3x+2) = 2(5x+2)$ или $3x^2 - 5x - 2 = 0$, откуда $x = 2$ см (второй корень уравнения не подходит). Итак, $AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.

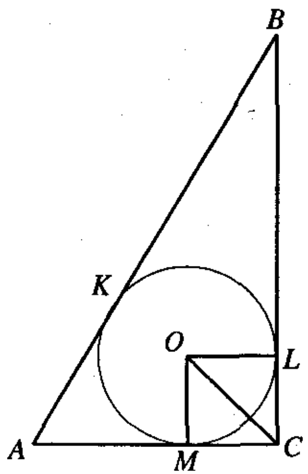


Рис. 10.35

Ответ: 6, 8 и 10 см.

10.227. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстояниях b, c, d. Найти высоту треугольника.

Решение.

Пусть точка M удалена от стороны AB равностороннего ΔABC на b, от BC на c и от AC на d (рис. 10.36). Пусть $AB = a$, h — высота ΔABC.

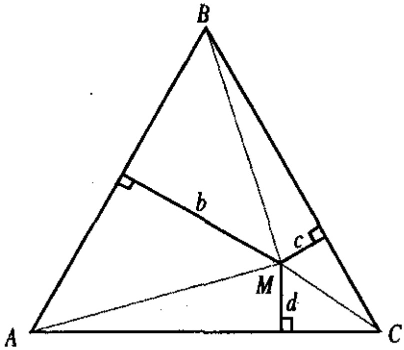


Рис. 10.36

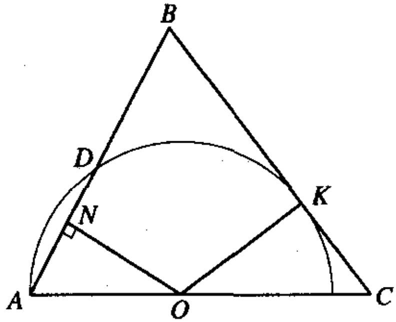


Рис. 10.37

Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta AMC}$; $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ad$;

$h = b + c + d$.

Ответ: $b + c + d$.

10.228. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

Решение.

По теореме о касательной и секущей, имеем (рис. 10.37) $BK^2 = AB \cdot DB = 9 \cdot 4 = 36$, откуда $BK = 6$ см, $KC = 3$ см. Проведем радиус OK в точку касания и $ON \perp AB$. Тогда $AN = ND = \frac{5}{2}$ см. Так как $\Delta ANO \sim \Delta OKC$ (прямоугольные треугольники, у которых $\angle A = \angle C$), то $\frac{KC}{AN} = \frac{OC}{AO} = \frac{3}{5/2} = \frac{6}{5}$. Пусть искомый радиус равен r. Тогда $AO = r$, $OC = \sqrt{9 + r^2}$ и, значит, $6r = 5\sqrt{9 + r^2}$, $36r^2 = 225 + 25r^2$, откуда $r = \frac{15}{\sqrt{11}}$ см.

Ответ: $\frac{15}{\sqrt{11}}$ см.

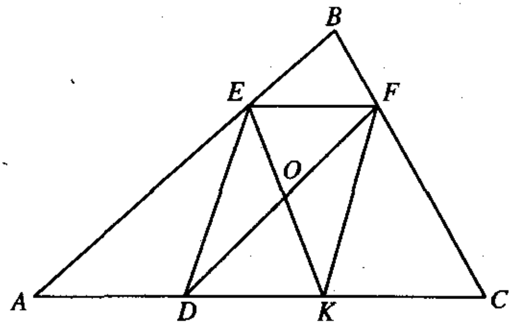


Рис. 10.38

10.229. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC $DK = EF = 3$ см, $DE = 5$ см, $DF = 6$ см, $DK \| EF$, O — точка пересечения диагоналей DF и EK параллелограмма $DEFK$ (рис. 10.38). Пусть $EO = x$ см. Тогда $DF^2 + EK^2 = 2(DE^2 + EF^2)$; $36 + 4x^2 = 2(25+9)$; $x = 2\sqrt{2}$. $OEBF$ — параллелограмм. Тогда $BE = FO = 3$ см, $BF = EO = 2\sqrt{2}$ см. $KEFC$ — параллелограмм. Тогда $FC = EK = 4\sqrt{2}$ см, $KC = EF = 3$ см. $AEFD$ — параллелограмм. Тогда $AE = DF = 6$ см, $AD = EF = 3$ см. Следовательно, $AB = AE + EB = 9$ см, $BC = BF + FC = 6\sqrt{2}$ см, $AC = AD + DK + KC = 9$ см.

Ответ: 9 см; 9 см; $6\sqrt{2}$ см.

10.230. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24, 28 и 56 см. Найти боковые стороны.

Решение.

Площадь треугольника $S = \dfrac{24 \cdot 28}{2} = 336$ см². Пусть одна из боковых сторон равна x см, тогда вторая равна $(56 - x)$ см. Полупериметр треугольника

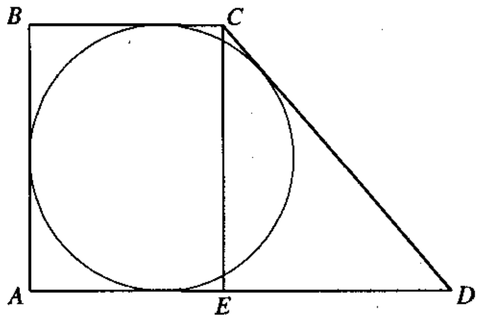


Рис. 10.39

$p = \dfrac{28+56}{2} = 42$ (см). Тогда по формуле Герона площадь треугольника $S = \sqrt{42 \cdot 14(42-x)(42-56+x)}$. Следовательно, $\sqrt{3 \cdot 14^2 \cdot (42-x)(x-14)} = 336$; $\sqrt{3(42-x)(x-14)} = 24$; $\left[\begin{array}{l} x = 26, \\ x = 30. \end{array}\right.$ Таким образом, боковые стороны данного треугольника 26 см и 30 см.

Ответ: 26 см; 30 см.

10.231. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $4r/3$.

Решение.

Найдем сторону $AB = 2r$ (рис. 10.39). Пусть $ED = x$. Тогда, используя равенство $AB + CD = BC + AD$, получим $2r + CD = \dfrac{4r}{3} + \dfrac{4r}{3} + x$, откуда $CD = \dfrac{2r}{3} + x$. В ΔCED имеем $CD^2 = CE^2 + ED^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2r}{3} + x\right)^2 = 4r^2 + x^2$, откуда $x = \dfrac{8r}{3}$. Получили $CD = \dfrac{10r}{3}$, $AD = \dfrac{12r}{3} = 4r$.

Ответ: $4r$, $\dfrac{10r}{3}$, $2r$.

10.232. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам

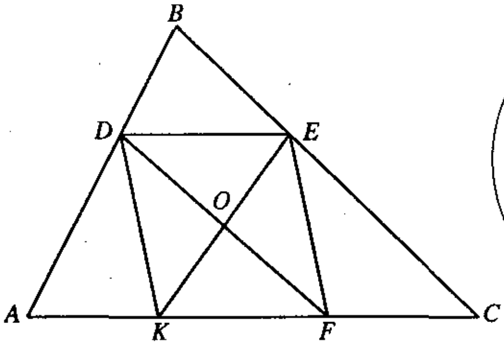


Рис. 10.40

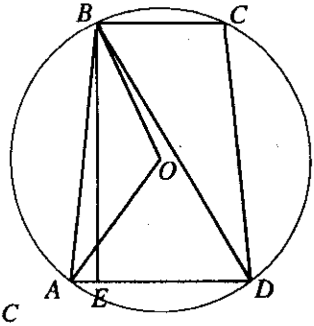


Рис. 10.41

треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.40) $AB = 9$ см, $BC = 15$ см, $KDEF$ — параллелограмм, о котором говорится в условии задачи. $DE = KF = 6$ см. $ADEK$, $KDEF$, $FDEC$ — три параллелограмма с общим основанием $DE = 6$ см. Следовательно, $AK = KF = FC = DE = 6$ см и $AC = 3DE = 18$ см. $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ и $DE = \frac{1}{3}AC$. Следовательно, $DB = \frac{1}{3}AB = 3$ см, $BE = \frac{1}{3}BC = 5$ см.

O — точка пересечения диагоналей DF и KE параллелограмма $KDEF$. Из параллелограмма $DBEO$ $EO = DB = 3$ см, $DO = BE = 5$ см. Тогда $KE = 6$ см, $DF = 10$ см. Так как $2\left(DE^2 + DK^2\right) = DF^2 + KE^2$, то $2\left(36 + DK^2\right) = 100 + 36$, $DK = 4\sqrt{2}$ см.

Ответ: $4\sqrt{2}$ см, 18 см.

10.233. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой h, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120°.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 10.41) $BC \parallel AD$, $AB = CD$, O — центр описанной окружности, $\angle AOB = 120^\circ$. Тогда вписанный $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = 60^\circ$.

BE — высота трапеции, $BE = h$. Так как трапеция равнобокая, то длина

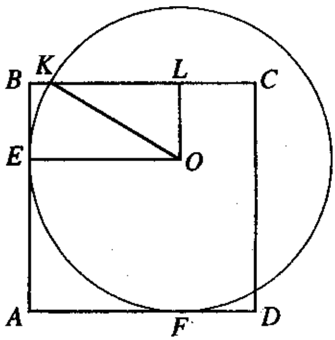


Рис. 10.42

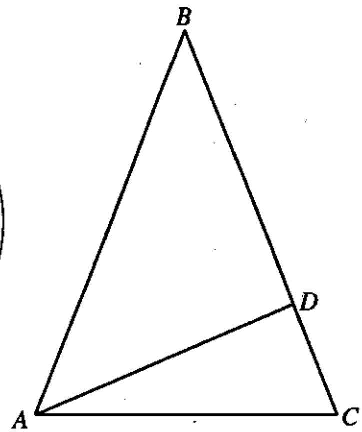


Рис. 10.43

ED равна длине средней линии трапеции. Из ΔBED ($\angle BED = 90^\circ$):
$DE = BE \operatorname{ctg} \angle ADB = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

10.234. Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

Решение.

Проведем радиус OK (рис. 10.42); тогда $KL = \sqrt{KO^2 - LO^2}$.
$LO = BE = 18 - 13 = 5$ (см) $\Rightarrow$ $KL = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см), $BK = 13 - 12 = 1$ (см). Получили, что сторона квадрата разделена на отрезки 1 и 17 см.

Ответ: 1 и 17 см.

10.235. В равнобедренном треугольнике угол при основании содержит 72°, а биссектриса этого угла имеет длину, равную m. Найти длины сторон треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ$, AD — биссектриса $\angle BAC$, $AD = m$ (рис. 10.43). $\angle BAD = \angle DAC = 36^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC = 36^\circ$, $\angle ADC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle BCA) = 72^\circ$. Следовательно, ΔADB и

ΔCAD — равнобедренные, $BD = AD = AC = m$. Пусть $AB = BC = x$. Тогда $DC = x - m$. Так как AD — биссектриса ΔABC, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$;

$\frac{m}{x-m} = \frac{x}{m}$; $x^2 - xm - m^2 = 0$, и так как $x > 0$, то $x = \frac{m(1+\sqrt{5})}{2}$.

Ответ: m; $\frac{m(1+\sqrt{5})}{2}$.

10.236. В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит 36°, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

Решение.

Воспользуемся чертежом к предыдущей задаче. В ΔABC $AB = BC$, $\angle ABC = 36^\circ$, AD — биссектриса $\angle BAC$, $AD = \sqrt{20}$. $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ$, $\angle BAD = \angle DAC = 36^\circ$, $\angle ADC = \angle BAD + \angle ABC = 72^\circ$. Следовательно, ΔADB и ΔCAD — равнобедренные, $BD = AD = AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Пусть $AB = BC = x$. Тогда $DC = x - 2\sqrt{5}$. Так как AD — биссектриса ΔABC, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{2\sqrt{5}}{x - 2\sqrt{5}} = \frac{x}{2\sqrt{5}}$, $x^2 - 2x\sqrt{5} - 20 = 0$ и, так как $x > 0$, то $x = 5 + \sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$; $5 + \sqrt{5}$.

10.237. Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий составляют p и q. Найти площадь четырехугольника.

Решение.

Так как KL, LM, NM, KN — средние линии соответствующих треугольников (рис. 10.44), то $KL = NM = \frac{1}{2}AC$, $KN = LM = \frac{1}{2}BD$. По условию $AC = BD \Rightarrow KLMN$ — ромб, площадь которого равна $\frac{1}{2}pq$. Пусть искомая площадь равна S. Тогда $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$. Но $S_{\Delta AKN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABD}$;

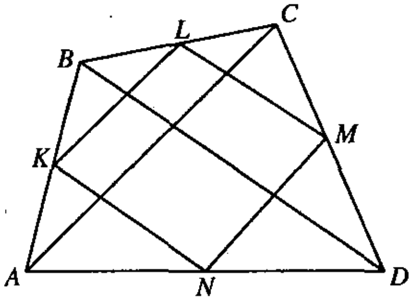


Рис. 10.44

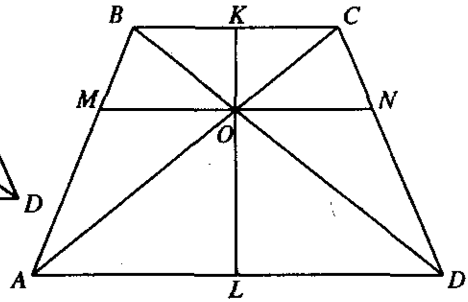


Рис. 10.45

аналогично $S_{\Delta CML} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}$, поэтому $S_{\Delta AKN} + S_{\Delta CML} = \frac{1}{4} S$. Аналогично получаем, что $S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4} S$. Таким образом, площадь вне ромба равна $\frac{1}{2} S$. Отсюда и площадь ромба равна $\frac{1}{2} S$, откуда $S = pq$.

Ответ: pq.

10.238. **Большее основание трапеции в два раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух полученных трапеций к высоте данной трапеции.**

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 10.45) $AD \| BC$, $AD = 2BC$, O — точка пересечения AC и BD, MN — прямая, о которой говорится в условии задачи. Проведем через точку O высоту KL трапеции $ABCD$. Тогда KO — высота трапеции $MBCN$ и ΔBOC, OL — высота трапеции $AMND$ и ΔAOD. $\Delta BOC \sim \Delta AOD$. Тогда $\frac{OK}{OL} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{OK}{OL} = \frac{1}{3}, \frac{OL}{KL} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.

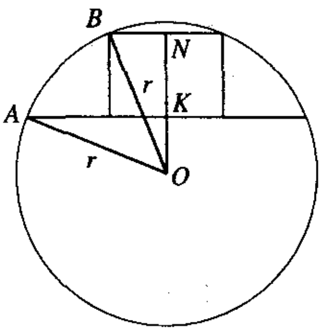


Рис. 10.46

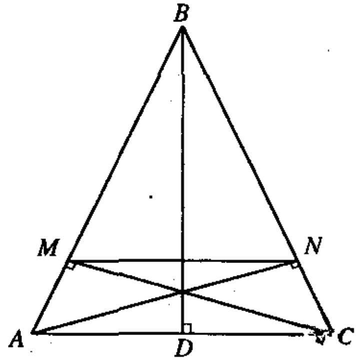


Рис. 10.47

10.239. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

Решение.

Пусть r — искомый радиус. В ΔAOK (рис. 10.46) имеем $OK=\sqrt{r^2-9}$, а в ΔOBN имеем $ON^2+BN^2=OB^2$ или $(OK+2)^2+1=r^2$. Следовательно, $r^2-9+4\sqrt{r^2-9}+4+1=r^2$, откуда $r^2-9=1$, т.е. $r=\sqrt{10}$ см.

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

10.240. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а боковой стороны — 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 10.47) $AB=BC=18$ см, $AC=12$ см, AN, CM, BD — высоты. $AD=\frac{1}{2}AC=6$ см. $MN\|AC$ (ΔABC — равнобедренный), тогда $\Delta MBN\sim\Delta ABC$. $\Delta BCD\sim\Delta ANC$ (оба прямоугольные, $\angle ACN$ — общий). Тогда $\frac{NC}{CD}=\frac{AC}{BC}$, $NC=\frac{CD\cdot AC}{BC}=4$. Поэтому $BN=BC-NC=$ $=14$ см. Из подобия ΔMNB и ΔABC: $\frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC}$, $MN=\frac{AC\cdot BN}{BC}=\frac{28}{3}$.

Ответ: $\frac{28}{3}$ см.

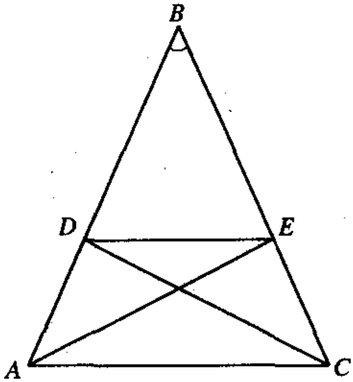


Рис. 10.48

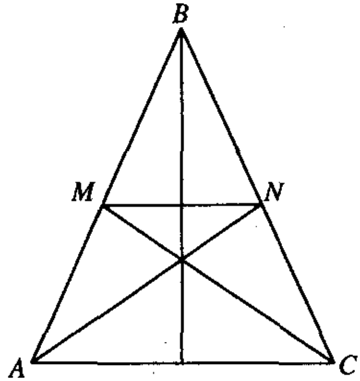


Рис. 10.49

10.241. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Определить основание треугольника.

Решение.

Так как ΔABC — равнобедренный, то $CE = AD$ и $DE \| AC$ (рис. 10.48).

Из подобия треугольников ABC и DBE следует, что $\frac{m}{AC} = \frac{BD}{b}$. Учитывая, что CD — биссектриса, имеем $\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{AC}$. Пусть $AC = x$, $BD = y$. Тогда

имеем $\begin{cases} \frac{m}{x} = \frac{y}{b}, \\ \frac{y}{b-y} = \frac{b}{x}, \end{cases}$ откуда $y = \frac{bm}{x}$ и $\frac{bm}{x\left(b - \frac{bm}{x}\right)} = \frac{b}{x}$, т.е. $x = \frac{bm}{b-m}$.

Ответ: $\frac{bm}{b-m}$.

10.242. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, а боковая сторона — 12 см. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.49): $AB = BC = 12$, $AC = 8$, AN и CM — биссектрисы. Пусть $MN = x$. Как и в задаче 10.240, $MN \| AC$. Так как

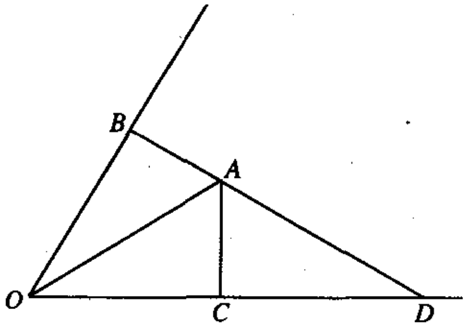


Рис. 10.50

$\angle ACM = \angle NCM$ и $\angle ACM = \angle NMC$, то ΔMNC — равнобедренный и $NC = MN = x$. Тогда $BN = 12 - x$. По свойству биссектрисы: $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$,

$\frac{12-x}{x} = \frac{12}{8}$, $x = \frac{24}{5} = 4{,}8$ см.

Ответ: 4,8 см.

10.243. Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстояниях $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

Решение.

Пусть точка O — вершина угла ($\angle O = 60^\circ$), AB и AC — расстояние от точки A до сторон, $AB = \sqrt{7}$ см, $AC = 2\sqrt{7}$ см (рис. 10.50). D — точка пересечения прямой AB и луча OC, $\angle D = 30^\circ$. Из $\angle ACD$ ($\angle ACD = 90^\circ$): $AD = 2AC = 4\sqrt{7}$ см. $BD = AB + AD = 5\sqrt{7}$ см.

Из ΔOBD ($\angle OBD = 90^\circ$): $OB = BD \operatorname{tg} \angle D = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ см. Из ΔOBA ($\angle OBA = 90^\circ$): $OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

Ответ: $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

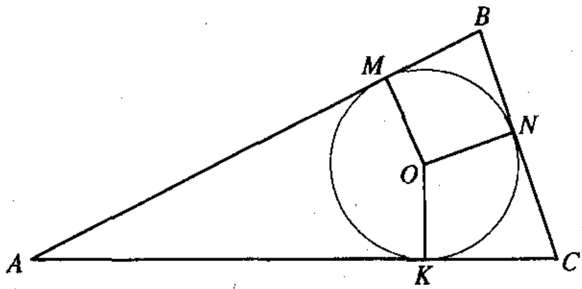


Рис. 10.51

10.244. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить *длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на* отрезки 4 и 3 см.

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса 3, вписанной в ΔABC (рис. 10.51). M, N, K — точки касания этой окружности соответственно со сторонами AB, BC, AC. $BN = 3$ см, $NC = 4$ см. Тогда $ON \perp BC$, $OM \perp AB$, $ON = OM = 3$ см. $BM = BN = 3$ см. Тогда $BMON$ — ромб, и так как в нем есть два прямых угла, то $BMON$ — квадрат. Следовательно, ΔABC — прямоугольный. Пусть $AM = x$ см. Тогда $AK = AM = x$ см. $CK = CN =$ $= 4$ см. Следовательно, $AB = (x+3)$ см, $BC = 7$ см, $AC = (x+4)$ см и

$AC^2 = AB^2 + BC^2$. Тогда $(x+4)^2 = 49 + (3+x)^2$; $x = 21$. Значит, $AC = 25$ см,

$AB = 24$ см.

Ответ: 24 см; 25 см; 7 см.

10.245. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой. Определить радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен r и расстояние от ее центра до вершины угла равно a.

Решение.

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, о которых говорится в условии задачи, вписанных в угол BAC (рис. 10.52), $O_1A = a$. E, F, K — соответственно точки касания малой, средней и большой окружностей со стороной AC угла. Тогда $O_1E = r$, $O_1E \perp AC$, $O_2F \perp AC$, $O_3K \perp AC$ и $\Delta AO_1E \sim \Delta AO_2F \sim \Delta AO_3K$. Пусть x — радиус средней, y — радиус большой окружности. Тогда $O_2O_1 = O_2F = x$, $O_2O_3 = O_3K = y$. Из подобия ΔAO_1E и

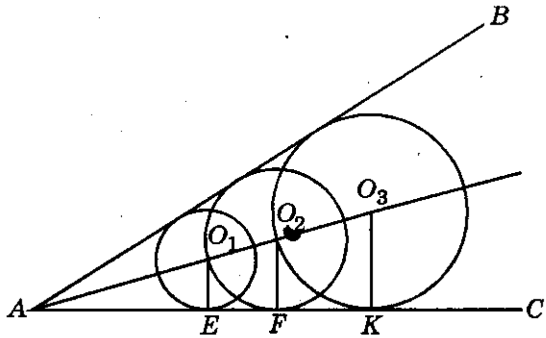


Рис. 10.52

ΔAO_2F следует, что $\dfrac{AO_1}{O_1E}=\dfrac{AO_2}{O_2F}$; $\dfrac{a}{r}=\dfrac{a+x}{x}$; $x=\dfrac{ar}{a-r}$. Из подобия ΔAO_1E и ΔAO_3K следует, что:

$$\frac{AO_1}{O_1E}=\frac{AO_3}{O_3K};\ \frac{a}{r}=\frac{a+x+y}{y};\ y=\frac{r(a+x)}{a-x}=\frac{r\left(a+\dfrac{ar}{a-r}\right)}{a-r}=\frac{a^2r}{(a-r)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{ar}{a-r}$; $\dfrac{a^2r}{(a-r)^2}$.

10.246. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 10.53) $BC\|AD$, $AB\perp AD$, O — центр вписанной окружности, OC= 4см, OD= 8см. Так как по условию окружность с центром O касается сторон $\angle BCD$ и $\angle ADC$, то CO и OD —биссектрисы этих углов. Но $\angle BCD+\angle ADC=180°$. Тогда

$$\angle OCD+\angle ODC=\frac{1}{2}\angle BCD+\frac{1}{2}\angle ADC=90°$$

и $\angle COD=180°-(\angle OCD+\angle ODC)=90°$.

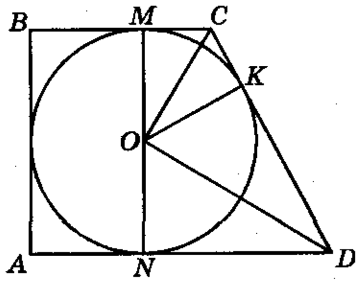


Рис. 10.53

Из $\Delta COD (\angle COD = 90°)$: $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 4\sqrt{5}$ см. Пусть M, N, K — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AD, CD трапеции. Тогда MN — диаметр окружности, $OK \perp CD, OK = r$, где r — радиус вписанной окружности. Из $\Delta COD (\angle COD = 90°)$:

$$OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ см; } AB = MN = 2r = 2OK = \frac{16\sqrt{5}}{5} \text{ см.}$$

По свойству трапеции, в которую можно вписать окружность,

$BC + AD = AB + CD = \frac{16\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}$ см. Тогда длина средней линии трапеции равна $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ см.

Ответ: $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ см.

10.247. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.

Решение.

Пусть в правильных треугольниках ABC и DFE (рис.10.54) $AC = a$, $DE = 3a$, $CD = 2a$. Так как $\angle BCD = \angle FDC = 120°$, то $BC \| DF$, K — точка пересечения прямой DF и прямой, проходящей через точку B парал-

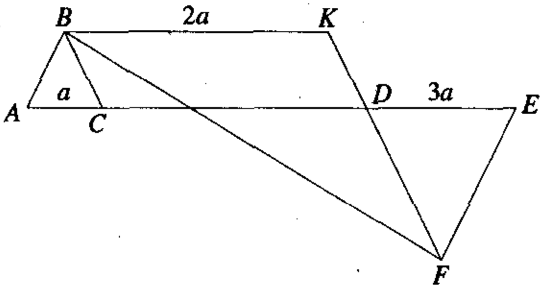


Рис. 10.54

лельно AC. Следовательно, $BKDC$ — параллелограмм, $BK = CD = 2a$, $KD = BC = a$, $KF = KD + DF = 4a$, $\angle BKD = \angle CDF = 120^\circ$. Из ΔBKF:

$$BF = \sqrt{BK^2 + KF^2 - 2BK \cdot KF \cos \angle BKF} =$$
$$= \sqrt{4a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 4a \cos 120^\circ} = 2a\sqrt{7}.$$

Ответ: $2a\sqrt{7}$.

10.248. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков.

Решение.

Пусть искомая длина равна $2x$. Тогда $AB = 4x$, $AO_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $BO_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$ (рис. 10.55). Проведем $O_2C \| AB$. В ΔO_1O_2C имеем $O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}$ (*).

Умножив обе части уравнения (*) на $\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}$, получим

$$R^2 - r^2 = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} \quad (**).$$

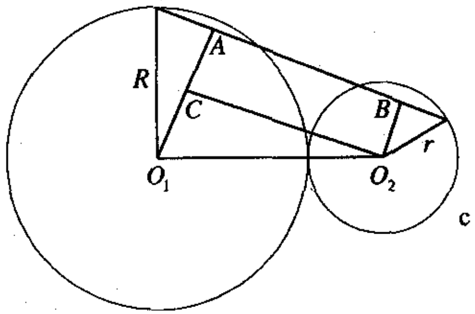


Рис. 10.55

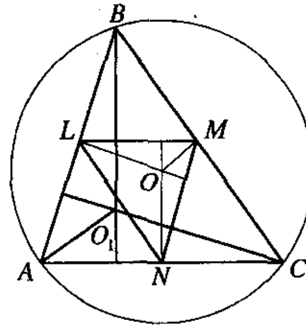


Рис. 10.56

Складывая равенства (*) и (**), имеем

$$2\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}+\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(R+r)^2-16x^2+R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2\left(R^2+Rr-8x^2\right)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2\left(R(R+r)-8x^2\right)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{(R+r)^2-16x^2}=R(R+r)-8x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(R^2-x^2\right)\left((R+r)^2-16x^2\right)=\left(R(R+r)-8x^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2(R+r)^2-16R^2x^2-x^2(R+r)^2+16x^4=R^2(R+r)^2-16R(R+r)x^2+64x^4.$$

Так как $x\neq0$, то приходим к уравнению $48x^2=14Rr-R^2-r^2$, откуда

$x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$ (второй корень уравнения не подходит). Искомая

длина составляет $2x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$.

10.249. Доказать, что расстояние от ортоцентра (точки пересечения высот) до вершины треугольника в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

Решение.

Пусть O — центр окружности, описанной около ΔABC, и O_1 — его ортоцентр (рис. 10.56). Построим ΔLMN, сторонами которого служат средние линии заданного треугольника. Высоты ΔLMN пересекаются в точке O, поскольку эти высоты перпендикулярны сторонам ΔABC и проходят через их середины. Но $\Delta LMN \sim \Delta ABC$ и потому $\frac{MO}{AO_1}=\frac{LN}{BC}=\frac{1}{2}$, т.е. $AO_1 = 2MO$. Что и требовалось доказать.

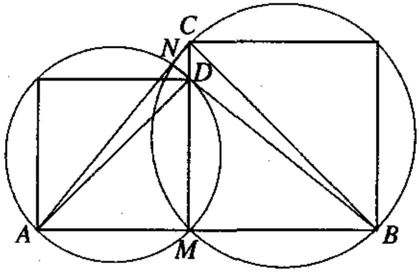


Рис. 10.57

10.250. На отрезке AB взята точка M, а на отрезках AM и MB по одну сторону от прямой AB построены квадраты, описанные окружности которых пересекаются в точке N. Доказать, что прямая AN проходит через вершину второго квадрата и что треугольник ANB прямоугольный.

Решение.

Соединим вершины квадратов A и C, B и D (рис. 10.57). Продолжим BD до пересечения с AC. Обозначим точку пересечения N и покажем, что она совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около квадратов. Действительно, так как $\Delta ACM = \Delta BDM$, то $\angle ACM = \angle BDM$ и потому $BN \perp AC$. Но прямые углы BNC и AND опираются на соответствующие диаметры, а значит, точка N принадлежит обеим описанным окружностям, откуда и следует доказываемое утверждение. Что и требовалось доказать.

10.251. В угол, содержащий 60°, вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность (начиная со второй) касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти соответствующих кругов больше площади меньшего круга?

Решение.

Пусть A — вершина угла. O_i и r_i — соответственно центр и радиус i-й окружности (i=1, ..., 5). Так как $\frac{1}{2}\angle A = 30^\circ$, то $AO_i = 2r_i$, $AO_{i-1} = 2r_{i-1}$, откуда $AO_i = AO_{i-1} + r_{i-1} + r_i$ или $2r_i = 2r_{i-1} + r_{i-1} + r_i$, т.е. $r_i = 3r_{i-1}$. Следовательно, радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3, а сумма площадей пяти кругов составит

$$S = \pi r_1^2\left(1+9+9^2+9^3+9^4\right) = \frac{\pi r_1^2\left(9^5-1\right)}{9-1} = 7381\pi r_1^2.$$ Итак, $S : \pi r_1^2 = 7381$.

Ответ: в 7381 раз.

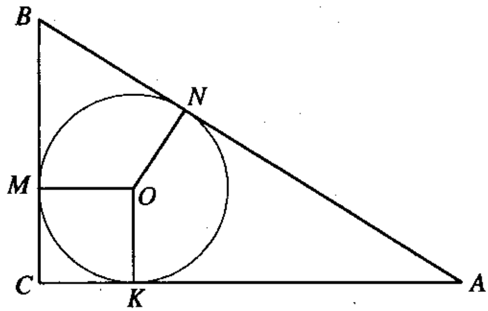


Рис. 10.58

10.252. Стороны треугольника относятся как 5:4:3. Найти отношение отрезков сторон, на которые они делятся точкой касания вписанной окружности.

Решение.

Так как в ΔABC (рис. 10.58) $AB : AC : BC = 5:4:3$, то $\angle C = 90^\circ$. Пусть $BC = 3x$. Тогда $AC = 4x$, $AB = 5x$. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности $r = \frac{BC + AC - AB}{2} = x$. O — центр вписанной окружности, M, N, K — точки ее касания со сторонами BC, AB, AC треугольника соответственно. Тогда $CK = CM = r = x$, $AN = AK = 3x$, $BN = BM = 2x$. Следовательно, $CK : AK = 1:3$; $CM : BM = 1:2$; $BN : AN = 2:3$.

Ответ: 1:3; 1:2; 2:3.

10.253. Для треугольника со сторонами 26, 28 и 30 см найти произведение радиусов описанной и вписанной окружностей.

Решение.

Обозначим стороны треугольника: $a = 26$ см, $b = 28$ см, $c = 30$ см. Полупериметр треугольника $p = \frac{26+28+30}{2} = 42$ см. Пусть S — площадь треугольника. Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p}$. Тогда $R \cdot r = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{abc}{4p} = 130$ см^2.

Ответ: 130 см^2.

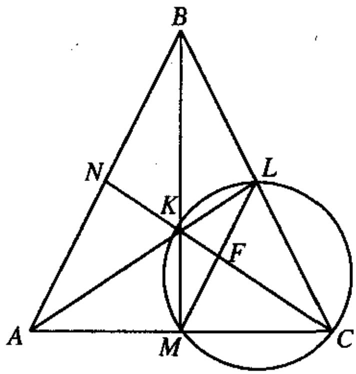


Рис. 10.59

10.254. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Длина стороны AB равна a. Найти длину медианы CN.

Решение.

Так как CN — медиана, то $CK = \frac{2}{3}CN$ (рис. 10.59). Соединив точки L и M, получаем среднюю линию LM; поэтому $\frac{LM}{AB} = \frac{CF}{CN} = \frac{1}{2}$, т.е. $CF = \frac{1}{2}CN$, $LM = \frac{a}{2}$, $LF = FM = \frac{1}{2}AN = \frac{a}{4}$, $FK = \frac{1}{6}CN$. Имеем

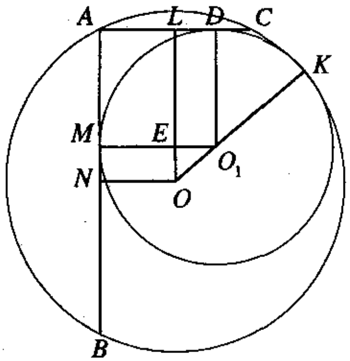


Рис. 10.60

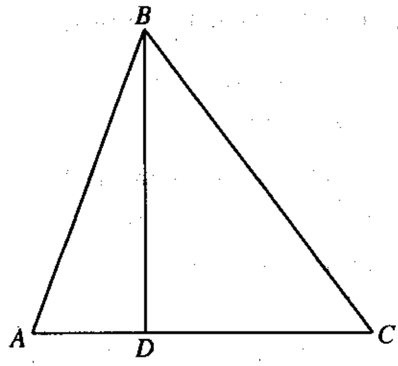


Рис. 10.61

$LF \cdot FM = FK \cdot CF$ (произведение отрезков хорд, проходящих через точку F).

Следовательно, $\frac{a^2}{16} = \frac{1}{6} CN \cdot \frac{1}{2} CN$, откуда $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

10.255. Через точку A окружности радиуса 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$ см.

Решение.

O — центр окружности радиуса 10 см (рис. 10.60), O_1 — центр окружности, касающейся хорд AB и AC и данной окружности соответственно в точках M, D и K. Тогда $O_1D \perp AC$, $O_1M \perp AB$. $\angle BAC$ — вписанный и прямой. Следовательно, BC — диаметр данной окружности, $BC = 20$ см, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см). Опустим перпендикуляры OL и ON соответственно на AC и AB. Тогда $AL = LC = \frac{1}{2} AC = 6$ см, $AN = NB = \frac{1}{2} AB = 8$ см. Пусть искомый радиус $O_1K = O_1D = O_1M = x$ см. E — точка пересечения OL и O_1M. Тогда $\angle OEO_1 = 90°$, $OE = OL - EL = AN - O_1D = (8 - x)$ см, $O_1E = O_1M - ME = O_1M - AL = (x - 6)$ см.

$OO_1 = OK - O_1K = (10 - x)$ см. Из ΔOEO_1 ($\angle OEO_1 = 90^\circ$): $OE^2 + EO_1^2 = OO_1^2$;

$(8-x)^2 + (x-6)^2 = (10-x)^2$; $x = 8$.

Ответ: 8 см.

10.256. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{10}$ см. Найти длину третьей стороны, зная, что эта сторона равна проведенной к ней высоте.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 10.61) $AB = \sqrt{10}$ см, $BC = \sqrt{13}$ см, высота $BD = AC$. Так как треугольник ABC остроугольный, то точка D принадлежит отрезку AC. Пусть $BD = AC = x$ см. Из ΔADB ($\angle ADB = 90^\circ$): $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{10 - x^2}$. Из ΔCDB ($\angle CDB = 90^\circ$): $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{13 - x^2}$. Следовательно, $AD + DC = AC$; $\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{13 - x^2} = x$; $\sqrt{13 - x^2} = x - \sqrt{10 - x^2}$; $13 - x^2 = x^2 - 2x \cdot \sqrt{10 - x^2} + 10 - x^2$; $2x\sqrt{10 - x^2} = x^2 - 3$;

$$\begin{cases} 4x^2(10 - x^2) = x^2 - 6x^2 + 9, \\ x^2 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} 5x^4 - 46x^2 + 9 = 0, \\ x^2 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = \frac{1}{5}, \end{array}\right. \\ x^2 \geq 3; \end{cases} x^2 = 9.$$

Отсюда $AC = 3$ см.

Ответ: 3 см.

10.257. Через точку P диаметра данной окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 60°. Вычислить радиус окружности, если $AP = a$ и $BP = b$.

Решение.

Пусть MN — диаметр окружности с центром O, проходящей через точку P (рис. 10.62), $\angle APO = 60^\circ$. Опустим перпендикуляр OK на хорду AB. Тогда $BK = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}$; $PK = BK - BP = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$. В ΔOKP $\angle OKP = 90^\circ$, $\angle KOP = 30^\circ$. Тогда $OP = 2PK = a - b$. $MP = R + a - b$, $PN = R - (a - b)$, где R — искомый радиус окружности. Так как

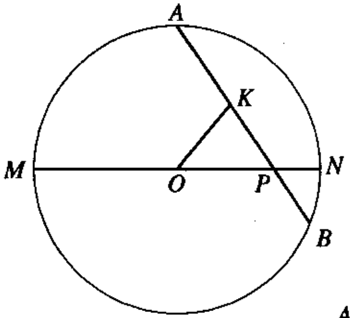


Рис. 10.62

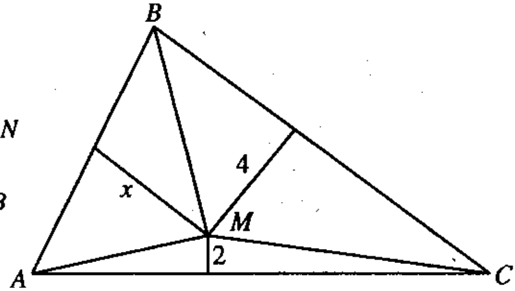


Рис. 10.63

$MP \cdot PN = AP \cdot PB$, то $(R + a - b)(R - (a - b)) = ab$; $R^2 - (a - b)^2 = ab$; $R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Ответ: $R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

10.258. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC равны соответственно 2 и 4 см. Вычислить расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

Решение.

Пусть искомое расстояние равно x (рис. 10.63). Тогда $S_{\Delta AMB} = 0{,}5 \cdot 10x = 5x$. $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMC} - S_{\Delta BMC}$. Найдем эти площади: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 7} = 84$ см², $S_{\Delta AMC} = 0{,}5 \cdot 21 \cdot 2 = 21$ см², $S_{\Delta BMC} = 0{,}5 \cdot 17 \cdot 4 = 34$ см². Отсюда $S_{\Delta AMB} = 84 - 55 = 29$ см² и $x = 5{,}8$ см.

Ответ: 5,8 см.

10.259. На отрезке AC длиной 12 см построена точка B так, что $AB = 4$ см. На отрезках AB и AC как на диаметрах в одной полуплоскости с границей AC построены полуокружности. Вычислить радиус окружности, касающейся построенных окружностей и AC.

Решение.

Точки O_1 и O_2 — центры полуокружностей с диаметрами AB и AC и радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 6$ см соответственно (рис. 10.64). O_3 — центр окружности искомого радиуса x см, $x > 0$. Тогда $O_1O_3 = (x + 2)$ см,

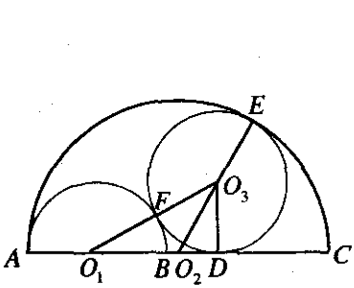


Рис. 10.64

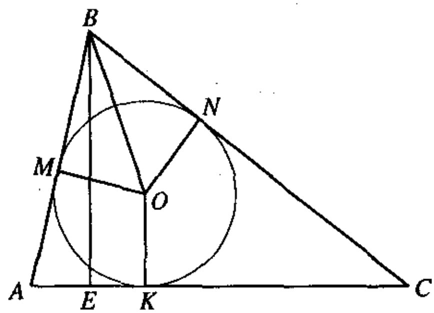


Рис. 10.65

$O_1O_2 = R_2 - R_1 = 4$ см, $O_2O_3 = (6 - x)$ см. D — точка касания окружности с центром O_3 и AC. Тогда $O_3D \perp AC$, $O_3D = x$ см. В $\Delta O_1O_2O_3$ полупериметр $p = \dfrac{O_1O_3 + O_2O_3 + O_1O_2}{2} = 6$ см. Тогда его площадь

$$S = \sqrt{p(p - O_1O_3)(p - O_1O_2)(p - O_2O_3)} = \sqrt{6(6 - x - 2)(6 - 4)(6 - 6 + x)} =$$
$$= \sqrt{12x(4 - x)}.$$

С другой стороны, $S = \dfrac{1}{2}O_1O_2 \cdot O_3D = 2x$. Тогда $\sqrt{12x(4 - x)} = 2x$; $3x(4 - x) = x^2$; $x = 3$.

Ответ: 3 см.

10.260. Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.65) $AC = 48$ см, BE — высота, $BE = 8{,}5$ см, O — центр вписанной окружности, M, N, K — точки касания этой окружности соответственно со сторонами AB, BC, AC треугольника. Тогда $ON \perp BC$, $ON = 4$ см, $AM = AK$, $CK = CN$, $BM = BN$. Площадь треугольника ABC $S = \dfrac{1}{2}AC \cdot BE = 204$ см^2. Тогда его полупериметр $p = \dfrac{S}{ON} = 51$ см. Но $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = AK + KC + BN = AC + BN$. Следовательно, $BN = p - AC = 3$ см. Из ΔBNO ($\angle BNO = 90^\circ$): $OB = \sqrt{BN^2 + ON^2} = 5$ см.

Ответ: 5 см.

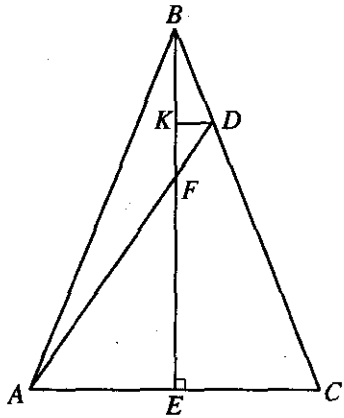


Рис. 10.66

10.261. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

Решение.

Пусть AD пересекает BE в точке F (рис. 10.66). Проведем $DK \| AC$. Так как $\Delta BCE \sim \Delta BDK$, то $\frac{BK}{BE} = \frac{KD}{EC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{5}$, откуда $BK = \frac{1}{5}BE$, $KD = \frac{1}{5}EC$. Так как $\Delta KFD \sim \Delta AFE$, то $\frac{KD}{AE} = \frac{KF}{FE} = \frac{1}{5}$. Пусть $KF = x$; тогда $FE = 5x$ и $BK + x + 5x = BE$, откуда $BK + 6x = 5BK$ или $6x = 4BK$, т.е. $BK = \frac{3x}{2}$. Выразим BF через x: $BF = BK + x = \frac{3x}{2} + x = \frac{5x}{2}$. Но $FE = 5x$ и, значит, $BF : FE = 1 : 2$.

Ответ: 1:2.

10.262. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h; радиус вписанной окружности равен r. Найти гипотенузу.

Решение.

Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза, p — полупериметр данного треугольника. $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c = p - c$; $p = r + c$. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ch = pr$. Тогда $\frac{1}{2}ch = (r+c)r$; $c(h-2r) = 2r^2$; $c = \frac{2r^2}{h-2r}$.

Ответ: $\frac{2r^2}{h-2r}$.

10.263. Медианы треугольника равны 5, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение.

Обозначим стороны треугольника через a, b, c, а проведенные к ним медианы — m_a, m_b, m_c ($m_a = 5$, $m_b = \sqrt{52}$, $m_c = \sqrt{73}$). По формуле, выражающей сторону треугольника через его медианы, имеем:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2(52+73)-25} = 10.$$

Аналогично $b = \frac{2}{3}\sqrt{2(25+73)-52} = 8$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{2(25+52)-73} = 6$. Таким образом, $a^2 = b^2 + c^2$, следовательно, данный треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

10.264. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

Решение.

Пусть a, b, c, p — соответственно катеты, гипотенуза и полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности. Тогда $p + r = \frac{a+b+c}{2} + r = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} + r$. Рассмотрим сумму $\frac{c}{2} + r$. Так как площадь треугольника $S = \frac{ab}{2} = pr$, то $r = \frac{ab}{2p}$, откуда

$$\frac{c}{2} + r = \frac{c}{2} + \frac{ab}{2p} = \frac{pc+ab}{2p} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{4p} = \frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{4p} =$$

$$= \frac{c(a+b)+(a+b)^2}{4p} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{4p} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2p} = \frac{a+b}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

10.265. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружностей равна сумме его катетов.

Решение.

Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности. Как известно, $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$, тогда $2R + 2r = c + 2\frac{a+b-c}{2} = c + a + b - c = a + b$. Что и требовалось доказать.

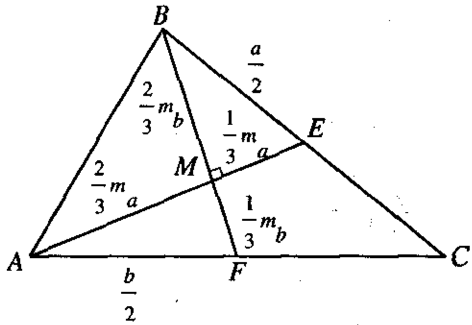


Рис. 10.67

10.266. Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b и известно, что медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

Решение.

По условию $BC = a$, $AC = b$, AE и BF — медианы, $\angle AMF = 90°$ (рис. 10.67). Положим $AE = m_a$, $BF = m_b$. Тогда в ΔBME и ΔAMF соответственно имеем $\frac{m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} = \frac{a^2}{4}$, $\frac{4m_a^2}{9} + \frac{m_b^2}{9} = \frac{b^2}{4}$. Складывая эти равенства, получаем $\frac{5(m_a^2 + m_b^2)}{9} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ или $m_a^2 + m_b^2 = \frac{9(a^2 + b^2)}{20}$. Из ΔAMB имеем $AB^2 = \frac{4(m_a^2 + m_b^2)}{9} = \frac{a^2 + b^2}{5}$, откуда $AB = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$.

10.267. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB отрезка AB как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей не зависит от положения точки C на отрезке AB.

Решение.

Пусть длина отрезка AB равна $2l$. Обозначим радиус одной из окружностей через x; тогда радиус второй окружности равен $l - x$. Сумма длин полуокружностей составляет $L = \pi x + \pi(l - x) = \pi l$, т.е. не зависит от x. Что и требовалось доказать.

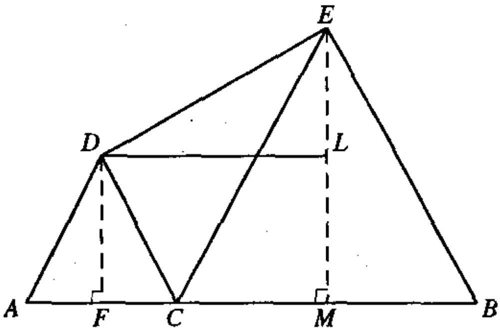


Рис. 10.68

10.268. Точка C перемещается по отрезку AB длиной l. На отрезках AC и CB как на основаниях построены правильные треугольники по одну сторону от AB. Где нужно взять точку C, чтобы расстояние между вершинами треугольников было наименьшим?

Решение.

Пусть $AC = x$; тогда $CB = l - x$ (рис. 10.68). Проведем $DL \parallel AB$ и опустим перпендикуляры на AB из точек D и E. Так как треугольники ADC и CEB — правильные, то $DL = FM = FC + CM = \frac{x}{2} + \frac{l-x}{2} = \frac{l}{2}$,

$EL = \frac{(l-x)\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{(l-2x)\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $DE^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{3(l-2x)^2}{4}$.

Расстояние DE является наименьшим при $l - 2x = 0$, откуда $x = l/2$, т.е. точку C следует взять в середине отрезка AB.

Ответ: в середине отрезка AB.

10.269. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение.

Пусть площадь треугольника равна S. Тогда его стороны: $a = \frac{2S}{15}$, $b = \frac{2S}{20}$, $c = \frac{2S}{12}$. Имеем $a^2 + b^2 = 4S^2\left(\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}\right) = 4S^2\left(\frac{1}{225} + \frac{1}{400}\right) =$ $= \frac{4S^2}{25}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) = \frac{4S^2}{144}$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$, т.е. треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

10.270. Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

Решение.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные к этим сторонам. Воспользуемся формулами:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2},\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2},\ m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}.$$

Тогда $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right)=$

$=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Отсюда $\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

10.271. Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20 см.

Решение.

Данная задача может рассматриваться как продолжение задачи № 10.269. Имеем: треугольник — прямоугольный, высоты h_a, h_b — его катеты. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$ (см^2).

Ответ: 150 см^2.

10.272. Числа m_1, m_2 и m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$, то треугольник является прямоугольным.

Решение.

Обозначим стороны треугольника через a, b, c. Тогда $4m_1^2=$ $=2\left(b^2+c^2\right)-a^2$, $4m_2^2=2\left(a^2+c^2\right)-b^2$ (см. дополнительные соотношения 2°. Сложив эти равенства, получим $4\left(m_1^2+m_2^2\right)=4c^2+a^2+b^2$. По условию $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$. Но $4m_3^2=2\left(a^2+b^2\right)-c^2$ и, значит, $\frac{4c^2+a^2+b^2}{4}=$ $=\frac{5\left(2\left(a^2+b^2\right)-c^2\right)}{4}$, откуда $4c^2+a^2+b^2=10\left(a^2+b^2\right)-5c^2$ или $c^2=a^2+b^2$, т.е. треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

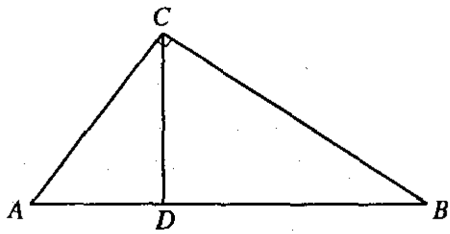


Рис. 10.69

10.273. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.69) $\angle ACD = 90^\circ$, CD — высота, $S_{\Delta BDC} = Q$, $S_{\Delta ADC} = q$.

Из подобия ΔBDC и ΔADC следует, что $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{\frac{1}{2}AD \cdot CD}{\frac{1}{2}BD \cdot CD} = \dfrac{q}{Q}$.

Пусть $AD = qx$, тогда $BD = Qx$. $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{qQ}$.

$$S_{\Delta ADC} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{qx \cdot x\sqrt{Qq}}{2} = \frac{x^2 q\sqrt{Qq}}{2} = q \text{, отсюда } x^2 = \frac{2}{\sqrt{Qq}}.$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{(qx + Qx) \cdot qx} = \sqrt{\frac{2q(Q+q)}{\sqrt{Qq}}} = \sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{q}{Q}}}.$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{Q}{q}}}.$$

Ответ: $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\dfrac{q}{Q}}}$, $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\dfrac{Q}{q}}}$.

10.274. Числа h_1, h_2 и h_3 выражают длины высот некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $(h_1/h_2)^2 + (h_1/h_3)^2 = 1$, то треугольник является прямоугольным.

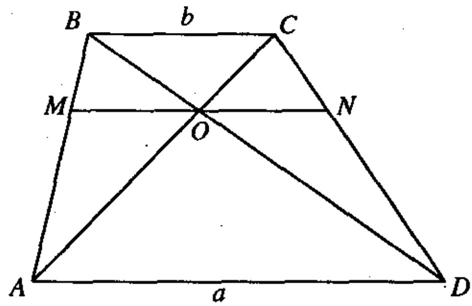


Рис. 10.70

Решение.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, которым соответствуют высоты h_1, h_2, h_3. Воспользуемся тем, что высоты треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам: $\frac{h_1}{h_2}=\frac{b}{a}$; $\frac{h_1}{h_3}=\frac{c}{a}$. Подставив эти отношения в данное по условию равенство, получаем $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=1$; $b^2+c^2=a^2$, следовательно, данный треугольник — прямоугольный. Что и требовалось доказать.

10.275. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Доказать, что $MN=2ab/(a+b)$, где a и b — длины оснований.

Решение.

Пусть $AD=a$, $BC=b$ (рис. 10.70). Так как $\Delta MBO \sim \Delta ABD$, то $\frac{MO}{a}=\frac{BO}{BD}$, $MO=a\cdot\frac{BO}{BD}$. Аналогично $\Delta OND \sim \Delta BCD$, откуда $\frac{ON}{b}=\frac{OD}{BD}$, $ON=b\cdot\frac{OD}{BD}$. Тогда $MN=MO+ON=\frac{a\cdot BO+b\cdot OD}{BD}=\frac{2a\cdot BO}{BD}$, так как $\Delta AOD \sim \Delta BOC \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{OD}{BO}$, $a\cdot BO=b\cdot OD$. Учитывая, что $BD=BO+OD$, окончательно получаем, что

$$MN=\frac{2a\cdot BO}{BO+OD}=\frac{2a}{1+\frac{OD}{BO}}=\frac{2a}{1+\frac{a}{b}}=\frac{2ab}{a+b}.$$ Что и требовалось доказать.

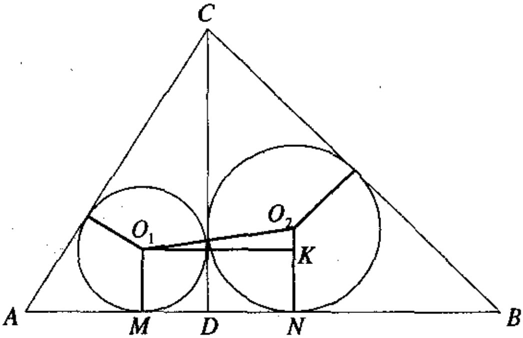


Рис. 10.71

10.276. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, равны соответственно 4 и 3 см. Найти расстояние между их центрами.

Решение.

Пусть O_2 — центр окружности, вписанной в ΔBCD, O_1 — центр окружности, вписанной в ΔACD (рис. 10.71), N и M — точки касания этих окружностей с прямой AB. Тогда $O_2N \perp AB$, $O_1M \perp AB$, $O_2N = r_2 = 4$ см, $O_1N = r_1 = 3$ см. Опустим перпендикуляр O_1K на O_2N. Тогда $O_2K = r_2 - r_1 = 1$ см, $O_1K = r_2 + r_1 = 7$ см. Из ΔO_1KO_2 ($\angle O_1KO_2 = 90°$): $O_1O_2 = \sqrt{O_1K^2 + O_2K^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ см.

Ответ: $5\sqrt{2}$ см.

10.277. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны a и b.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.72) $\angle C = 90°$, $CB = a$, $CA = b$, CK — биссектриса $\angle BCA$. Пусть $CK = x$. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CBK} + S_{\Delta ACK}$; $\frac{1}{2} AC \cdot CB =$ $= \frac{1}{2} AC \cdot CK \sin\angle ACK + \frac{1}{2} BC \cdot CK \sin\angle BCK$. Тогда $ab = bx\sin 45° + ax\sin 45°$, $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

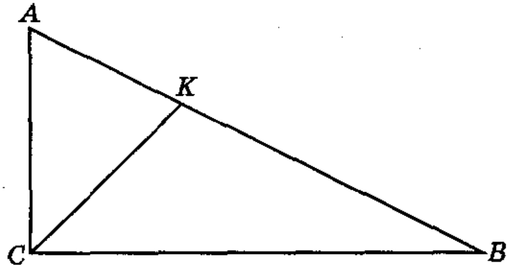


Рис. 10.72

Ответ: $x=\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

10.278. Дан квадрат, сторона которого равна a. Определить стороны равновеликого ему равнобедренного треугольника, у которого сумма длин основания и высоты, опущенной на него, равна сумме длин двух боковых сторон.

Решение.

Пусть x — основание, z — боковая сторона, y — высота, проведенная к основанию искомого треугольника. По условию $\begin{cases}\dfrac{1}{2}xy=a^2,\\ x+y=2z,\end{cases}$ по теореме Пифагора (рис. 10.73) $y^2+\dfrac{x^2}{4}=z^2$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}xy=2a^2,\\ x+y=2z,\\ y^2+\dfrac{x^2}{4}=z^2,\end{cases}\quad \begin{cases}z=\dfrac{1}{2}(x+y),\\ xy=2a^2,\\ 4y^2+x^2=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}(x+y)\right)^2,\end{cases}\quad \begin{cases}z=\dfrac{1}{2}(x+y),\\ xy=2a^2,\\ 4y^2+x^2=x^2+2xy+y^2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}z=\dfrac{1}{2}(x+y),\\ xy=2a^2,\\ 3y^2=4a^2,\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3},\\ x=\dfrac{2a^2}{y}=a\sqrt{3},\\ z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}+a\sqrt{3}\right)=\dfrac{5a\sqrt{3}}{6}.\end{cases}$$

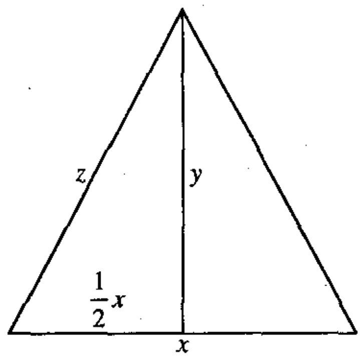


Рис. 10.73

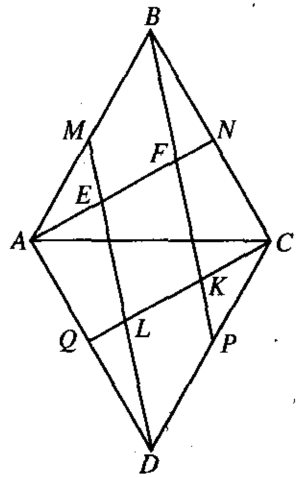


Рис. 10.74

Ответ: $a\sqrt{3}$, $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$, $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$.

10.279. Точки M, N, P, Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна 100 см^2.

Решение.

Пусть E и F — точки пересечения отрезка AN соответственно с DM и BP, а K и L — точки пересечения отрезка CQ соответственно с BP и DM (рис. 10.74). $\Delta AQC = \Delta ANC$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $\angle QCA = \angle NAC$, тогда $AN \| CQ$. Аналогично $DM \| BP$. Таким образом, $EFKL$ — параллелограмм. $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 50$. $S_{\Delta CQD} = \frac{1}{2} S_{\Delta ACD} = 25$.

Так как $PD = PC$ и $BP \| DM$, то $CK = LK$, аналогично $DL = EL$, $AE = FE$. Следовательно, QL — средняя линия ΔADE, т.е. $QL = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}KL$. Тогда $QL = \frac{1}{5}CQ$, $S_{\Delta DQL} = \frac{1}{5} S_{\Delta DCQ} = 5$. Пусть $\angle ELK = \alpha$, тогда и $\angle DLQ = \alpha$. $\frac{S_{EFKL}}{S_{DQL}} = \frac{EL \cdot LK \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} DL \cdot QL \cdot \sin\alpha} = \frac{DL \cdot LK}{\frac{1}{4} DL \cdot LK} = 4$.

Отсюда имеем $S_{EFKL} = 4 S_{\Delta DQL} = 20$.

Ответ: 20 см^2.

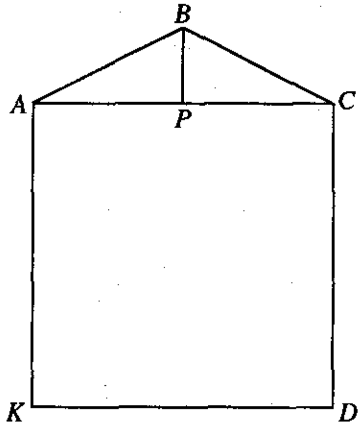


Рис. 10.75

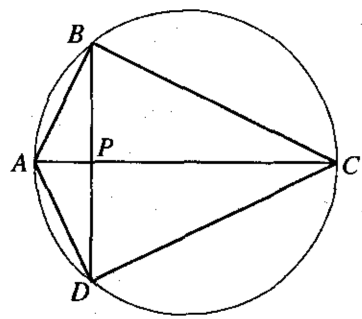


Рис. 10.76

10.280. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на основании, как $\sqrt{3}:12$.

Решение.

Пусть $ACDK$ — данный по условию квадрат (рис. 10.75), ABC — данный по условию треугольник, $AB = BC$, BP — высота ΔABC. Обозначим $AC = a$, $BP = h$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah$, $S_{ACDK} = a^2$. По условию $\frac{\frac{ah}{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ или $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Из прямоугольного ΔABP: $\operatorname{tg}\angle BAP = \frac{BP}{AP} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $\angle BAP = \angle BCP = 30^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

10.281. В окружность вписан четырехугольник с углами 120, 90, 60 и 90°. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$ см². Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

Решение.

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.76), $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. P — точка пересечения AC и BD, $AC \perp BD$. Так как $\angle ABC = 90^\circ$, то AC —

диаметр данной окружности. BP — высота прямоугольного ΔABC. Тогда $\angle ABD = \angle ACB$. $\angle ABD$ и $\angle ACD$ — вписанные и опираются на хорду AD.

Тогда $\angle ABD = \angle ACD$. Следовательно, $\angle ACB = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCD = 30^\circ$. Тогда

$\Delta ABC = \Delta ADC$ (по гипотенузе и острому углу), $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ см^2.

Пусть $AB = a$. Тогда $BC = AB\operatorname{ctg}\angle ACB = a\sqrt{3}$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $a = 3$. Искомый радиус $R = \frac{1}{2}AC = AB = 3$ см.

Ответ: 3 см.

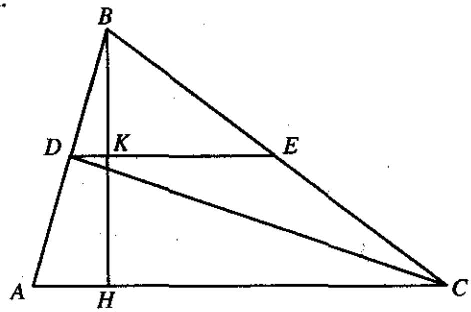


Рис. 10.77

10.282. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная основанию AC. Площадь треугольника ABC равна 8 кв. ед., а площадь треугольника DEC равна 2 кв. ед. Найти отношение длины отрезка DE к длине основания треугольника ABC.

Решение.

Имеем $S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2}DE \cdot HK = 2$ (рис. 10.77) и $HK = \frac{4}{DE}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 8$, откуда $BH = \frac{16}{AC}$. Так как $\Delta ABC \sim \Delta DBE$, то $\frac{DE}{AC} = \frac{BK}{BH}$.

Далее $BK = BH - HK$ и, значит,

$$\frac{BK}{BH} = \frac{BH - HK}{BH} = 1 - \frac{HK}{BH} = 1 - \frac{4}{DE} : \frac{16}{AC} = 1 - \frac{AC}{4DE}.$$

Пусть $\frac{DE}{AC}=x$. Тогда $x=1-\frac{1}{4x}$ или $4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Получили $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$.

Ответ: 1:2.

10.283. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см², а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

Решение.

Пусть a и b — катеты треугольника. Имеем систему $\begin{cases} ab=48, \\ a^2+b^2=100, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=196$, $a^2-2ab+b^2=4$, $\Rightarrow a+b=14$, $a-b=2$ и, следовательно, $a=8$ (см), $b=6$ (см). Так как $S=pr$, то $24=12r$, $r=2$ (см).

Ответ: 2 см.

10.284. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

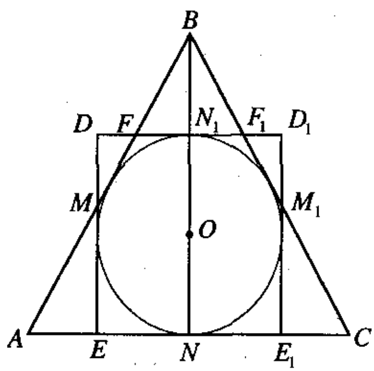


Рис. 10.78

Решение.

ΔABC и квадрат EDD_1E_1 (рис. 10.78) те, о которых говорится в условии задачи, BN — высота ΔABC, O — центр данной окружности, M и F — точки пересечения AB, M_1 и F_1 — точки пересечения BC со сторонами квадрата, N_1 — точка касания DD_1 с окружностью и пересечения DD_1 с BN. Шестиугольник $EMFF_1M_1E_1$ — фигура искомой площади S. $S=S_{EDD_1E_1}-\left(S_{\Delta MDF}+S_{\Delta M_1D_1F_1}\right)=S_{EDD_1E_1}-2S_{\Delta MDF}$. $BN=3R$; $NN_1=2R$; $BN_1=R$; $DN_1=R$.

Из ΔBN_1F ($\angle BN_1F=90^\circ$): $FN_1=BN_1\operatorname{tg}\angle FBN_1=R\operatorname{tg}30^\circ=\frac{R\sqrt{3}}{3}$,

$DF = DN_1 - FN_1 = R - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R(3-\sqrt{3})}{3}$. $\angle DFM = \angle BFF_1 = 60°$. Из ΔMDF

($\angle MDF = 90°$): $MD = DF\,\mathrm{tg}\,\angle DFM = \frac{R(3-\sqrt{3})}{3}\cdot\sqrt{3} = R(\sqrt{3}-1)$.

$$S_{\Delta MDF} = \frac{1}{2}DF\cdot DM = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}\cdot R(\sqrt{3}-1) =$$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{6} = \frac{R^2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3};\ S_{EDD_1E_1} = 4R^2.$$

Тогда $S = 4R^2 - \frac{2R^2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3} = R^2\cdot\frac{12-4\sqrt{3}+6}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}$.

Ответ: $\frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}$.

10.285. В круге радиуса R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 60°, другая — 120°. Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

Решение.

Площадь сегмента с дугой 60° равна $S_1 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, а площадь сегмента с дугой 120° равна $S_2 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Искомая площадь $S = \pi R^2 - S_1 - S_2 = \frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$.

Ответ: $\frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$.

10.286. Две окружности радиусов r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и $3r$ соответственно (рис. 10.79), AB — их общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Тогда $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$, $O_1A = r$, $O_2B = 3r$, $O_1O_2 = 4r$. P — точка касания данных окружностей. Тогда искомая площадь

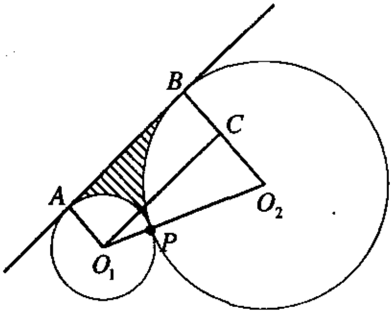


Рис. 10.79

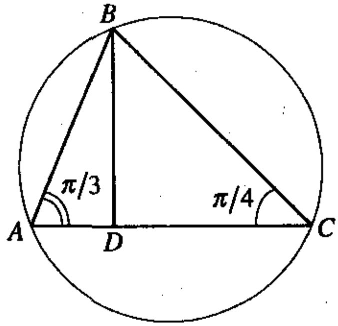


Рис. 10.80

$S = S_1 - (S_2 + S_3)$, где S_1 — площадь трапеции O_1ABO_2, S_2 — площадь сектора AO_1P, S_3 — площадь сектора BO_2P. O_1C — высота трапеции O_1ABO_2. Следовательно, $BC = AO_1 = r$, $CO_2 = BO_2 - BC = 2r$. Отсюда $\angle CO_1O_2 = 30°$, $\angle CO_2O_1 = 60°$, $O_1C = 2r\sqrt{3}$, $\angle AO_1O_2 = 120°$.

$S_1 = \frac{AO_1 + BO_2}{2} \cdot O_1C = 4r^2\sqrt{3}$, $S_2 = \frac{\pi r^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$, $S_3 = \frac{\pi(3r)^2 \cdot 60}{360} = \frac{3\pi r^2}{2}$.

Тогда $S = 4r^2\sqrt{3} - \left(\frac{\pi r^2}{3} + \frac{3\pi r^2}{2}\right) = \frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}$.

Ответ: $\frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}$.

10.287. Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны $\pi/3$ и $\pi/4$.

Решение.

Так как $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ (рис. 10.80), то $AB = 2\sqrt{2}$ см (сторона вписанного квадрата). Проведем $BD \perp AC$. Учитывая, что $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$, имеем $AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$ (см); далее, так как ΔBDC — равнобедренный, то

$DC = BD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$ см. Значит, $AC = AD + DC = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ (см).

Получаем: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\sqrt{6} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \sqrt{3} + 3$ (см^2).

Ответ: $\left(\sqrt{3} + 3\right)$ см^2.

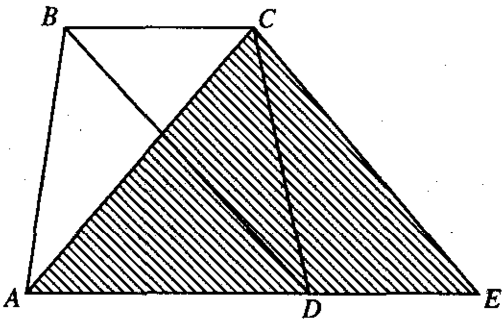


Рис. 10.81

10.288. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 10.81) $BC \| AD$, $BC = 3$ см, $AD = 6$ см, $AC = 7$ см, $BD = 8$ см. Проведем $CE \| BD$. Тогда $AE = AD + DE = AD + BC = 9$ см, $CE = BD$. Следовательно, трапеция $ABCD$ и треугольник ACE имеют равные площади (у них равны высоты и основание треугольника равно сумме оснований трапеции). По формуле Герона площадь треугольника $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$ см^2.

Ответ: $12\sqrt{5}$ см^2.

10.289. В ромб со стороной a и острым углом $60°$ вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

Решение.

Радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности (рис. 10.82) $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, так как $\angle A = 60°$. Четырехугольник $KLMN$ является прямоугольником, так

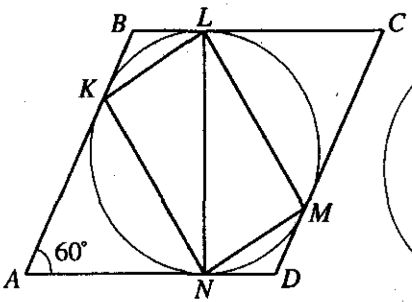


Рис. 10.82

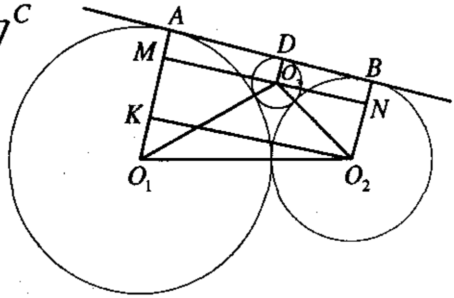


Рис. 10.83

как его углы опираются на диаметр окружности. Его площадь $S = MN \cdot LM$, где $MN = R$ (катет, лежащий против угла 30°), $LM = R\sqrt{3}$. Получили $S = R^2\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ответ: $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

10.290. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом криволинейный треугольник вписан круг. Найти его площадь.

Решение.

A и B — точки касания общей внешней касательной с касающимися окружностями соответственно с центром O_1 радиуса R и с центром O_2 радиуса r, $R > r$ (рис. 10.83). Тогда $O_1O_2 = R + r$, $O_1A \perp AB$, $O_1A = R$, $O_2B = r$, $O_1A \| O_2B$. O_3 — центр круга искомой площади, о котором говорится в условии задачи. Через точки O_2 и O_3 проведем прямые MN и O_2K, параллельные AB. Тогда $O_2K \perp O_1A$, $MN \perp O_1A_1$, $O_1K = R - r$. D — точка касания окружности с центром O_3 и AB. Тогда $O_3D \perp AB$, $O_3D = x$. $O_1M = O_1A - AM = R - x$, $O_2O_3 = r + x$, $O_1O_3 = R + x$, $O_2N = r - x$. Из ΔO_1MO_3 ($\angle O_1MO_3 = 90°$): $O_3M = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1M^2} = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx}$. Из ΔO_2NO_3 ($\angle O_2NO_3 = 90°$): $O_3N = \sqrt{O_2O_3^2 - O_2N^2} = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}$.

Из ΔO_1KO_2 ($\angle O_1KO_2=90^\circ$): $O_2K=\sqrt{O_1O_2^2-O_1K^2}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.

Так как $KO_2=MN=MO_3+O_3N$, то $2\sqrt{Rr}=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}$;

$\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$; $x=\dfrac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$.

Искомая площадь круга $S=\pi x^2=\dfrac{\pi R^2r^2}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^4}$.

Ответ: $\dfrac{\pi R^2r^2}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^4}$.

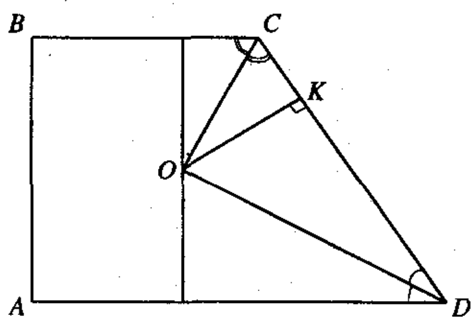


Рис. 10.84

10.291. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2 см. Найти площадь трапеции.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 10.84) $BC\parallel AD$, $AB\perp AD$, O — центр вписанной окружности, $CO=1$ см, $DO=2$ см. Тогда CO и DO — биссектрисы соответственно $\angle BCD$ и $\angle ADC$. Так как $\angle BCD+\angle ADC=180^\circ$, то $\angle OCD+\angle ODC=\dfrac{1}{2}\angle BCD+\dfrac{1}{2}\angle ADC=90^\circ$ и $\angle COD=90^\circ$, $CD=$ $=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{5}$ см. K — точка касания вписанной окружности со стороной CD трапеции. Тогда OK — радиус этой окружности и высота прямоугольного ΔCOD. Следовательно, $OK=\dfrac{OC\cdot OD}{CD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ см.

$AB = 2 \cdot OK = \frac{4}{\sqrt{5}}$ см. Так как в данную трапецию вписана окружность,

то $BC + AD = AB + CD = \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ см.

Площадь трапеции $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = \frac{9}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 3{,}6$ см^2.

Ответ: 3,6 см^2.

10.292. Окружность радиуса R разделена на шесть равных дуг, и внутри круга, образованного этой окружностью, через каждые две соседние точки деления проведены равные дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенной между проведенными дугами.

Решение.

Пусть точка O — центр окружности радиуса $R; A, B, C, D, E, F$ —точки деления окружности, о которых говорится в условии задачи (рис.10.85), $\angle AOB = 60°$. O_1 — центр дуги AnB, проходящей внутри данного круга, о которой говорится в условии. Так как по условию точки A и B — точки касания дуги AnB с аналогичными соседними дугами, то OA — их общая касательная и $O_1A \perp OA$. $\angle AOO_1 = \frac{1}{2}\angle AOB = 30°$, $\angle AO_1B = 120°$. Из $\Delta OAO_1 (\angle OAO_1 = 90°) : O_1A = OA \operatorname{tg}\angle AOO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Площадь S_1 криволинейного треугольника $OAnB$ равна разности площадей S_2 равностороннего треугольника AOB и S_3 сегмента круга с центром O_1, ограниченного дугой AnB.

$$S_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot O_1A^2 - S_{\Delta AO_1B} = \frac{1}{3}\pi \cdot O_1A^2 - \frac{1}{2}O_1A^2 \sin\angle AO_1B =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{3}\sin 120° = \frac{R^2}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \; S_2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда $S_1 = S_2 - S_3 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) =$

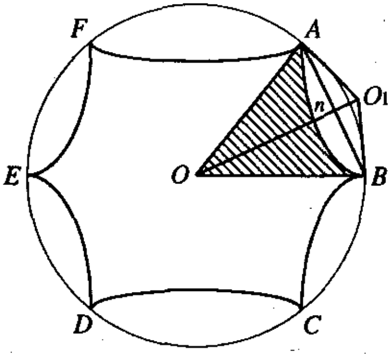


Рис. 10.85

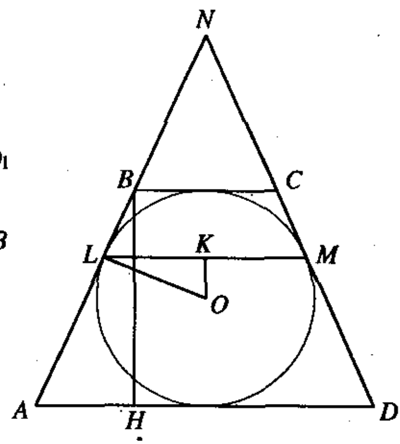


Рис. 10.86

$= R^2 \cdot \frac{12\sqrt{3} - 4\pi}{36} = \frac{R^2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}{9}$. Искомая площадь части данного круга

$S = 6S_1 = \frac{2R^2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}{3}$.

Ответ: $\frac{2R^2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}{3}$.

10.293. В некоторый угол вписана окружность радиуса R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь этой трапеции.

Решение.

Пусть L и M — точки касания (рис. 10.86); тогда $SL = SM$, откуда $AB = CD$, так как $AD \| BC \| LM$. Проведем $OK \perp LM$ и $BH \perp AD$. Искомая площадь $S = \frac{1}{2}(AD + BC)BH$. Для описанной трапеции имеем $AD + BC = AB + CD = 2AB$; поэтому $S = AB \cdot BH$. Далее, $\Delta ABH \sim \Delta OLK$ ($\angle LOK = \angle BAH$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), откуда $\frac{LK}{LO} = \frac{BH}{AB}$ или $\frac{a/2}{R} = \frac{2R}{AB}$ и $AB = \frac{4R^2}{a}$.

Получили $S = \frac{4R^2}{a} \cdot 2R = \frac{8R^3}{a}$.

Ответ: $\frac{8R^3}{a}$.

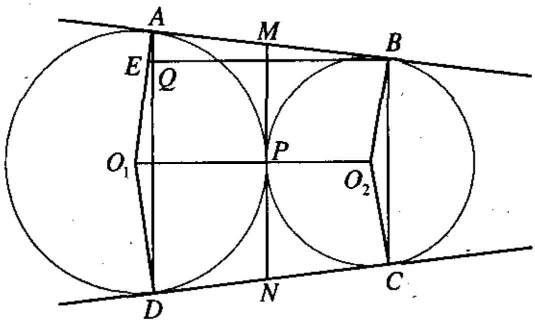


Рис. 10.87

10.294. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей радиуса R и r соответственно, $R > r$ (рис. 10.87), P — точка их касания, AB и DC — их общие внешние касательные, $ABCD$ — трапеция искомой площади. Тогда $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$, $O_1A = R$, $O_2B = r$. Проведем через точку P общую к данным окружностям касательную MN. Так как $AM = MP = MB$, то MN — средняя линия трапеции $ABCD$ и $MN = AB$. Проведем $BE \| O_1O_2$, имеем $BE = O_1O_2 = R + r$, $AE = O_1A - O_1E = O_1A - O_2B = R - r$. Из ΔEAB ($\angle EAB = 90^\circ$): $AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. $O_1O_2 \perp AD$, $BE \| O_1O_2$. Следовательно, $BE \perp AD$. Q — точка пересечения EB и AD. Тогда AQ — высота прямоугольного ΔEAB и $AB^2 = BE \cdot BQ$, $BQ = \frac{AB^2}{BE} = \frac{4Rr}{R+r}$. BQ — высота трапеции $ABCD$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BQ = MN \cdot BQ = AB \cdot BQ = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

Ответ: $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$.

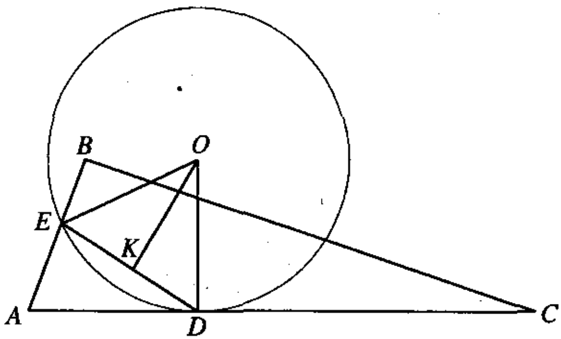


Рис. 10.88

10.295. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Решение.

По условию в ΔABC (рис. 10.88) $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, точки E и D — соответственно середины AB и AC, O — центр окружности, о которой говорится в условии задачи. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$ см. Тогда ED — средняя линия ΔABC, $ED = \frac{1}{2}BC = 4$ см. K — середина ED. Тогда $KD = 2$ см. $OK \perp ED$, $BC \| ED$. Тогда $OK \perp BC$. $OD \perp AC$. Следовательно, $\angle KOD = \angle BCA$ — как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, и прямоугольные треугольники OKD и CBA подобны. Тогда $\frac{OD}{AC} = \frac{KD}{AB}$, $OD = \frac{AC \cdot KD}{AB} = \frac{10}{3}$ см. Искомая площадь круга $S = \pi \cdot OD^2 = \frac{100\pi}{9}$ см².

Ответ: $\frac{100\pi}{9}$ см².

10.296. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.

Решение.

Пусть a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза данного треугольника. $c=2R$, $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b-2R}{2}$, $a+b=2(R+r)$. Но $a^2+b^2=c^2$, тогда $(a+b)^2-2ab=4R^2$, $2ab=(a+b)^2-4R^2=4(R+r)^2-4R^2=8Rr+4r^2$, $ab=2\left(2Rr+r^2\right)=2r(2R+r)$. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}ab=r(2R+r)$.

Ответ: $r(2R+r)$.

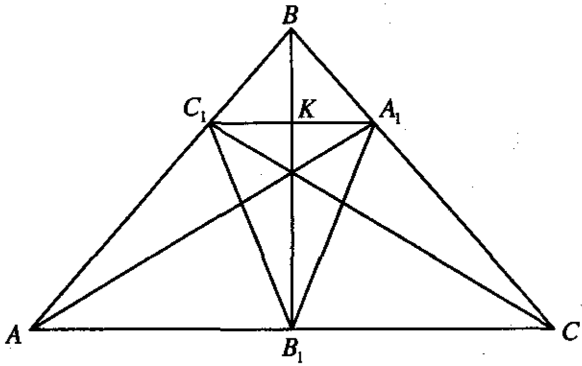


Рис. 10.89

10.297. Длины сторон треугольника относятся как $m:n:m$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

Решение.

В ΔABC (рис. 10.89) $AB:AC:BC=m:n:m$. Следовательно, $AB=BC$. AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы ΔABC, K — точка пересечения A_1C_1 и BB_1. Тогда BB_1 — высота ΔABC, B_1K — высота $\Delta A_1B_1C_1$.

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\frac{AC\cdot BB_1}{A_1C_1\cdot B_1K}$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{A_1C}{A_1B}=\frac{AC}{AB}=\frac{n}{m}$. $\Delta ABC\sim\Delta C_1BA_1$. Тогда $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{A_1B}=\frac{BA_1+A_1C}{A_1B}=$

$=1+\dfrac{A_1C}{A_1B}=1+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m+n}{m}$; $\dfrac{BB_1}{B_1K}=\dfrac{BK+B_1K}{B_1K}=\dfrac{BK}{B_1K}+1=\dfrac{BA_1}{A_1C}+1=\dfrac{m}{n}+1=\dfrac{m+n}{m}$;

следовательно, $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\dfrac{AC}{A_1C_1}\cdot\dfrac{BB_1}{B_1K}=\dfrac{(m+n)^2}{mn}$.

Ответ: $\dfrac{(m+n)^2}{mn}$.

10.298. Определить площадь сегмента, если его периметр равен p, а дуга содержит 120°.

Решение.

Обозначим радиус круга через R. Так как дуга сегмента содержит 120°, то ее длина равна $\dfrac{2\pi R}{3}$, а хорда, стягивающая эту дугу (сторона правильного вписанного треугольника), равна $R\sqrt{3}$. Тогда периметр сегмента составляет $p=\dfrac{2\pi R}{3}+R\sqrt{3}$, откуда $R=\dfrac{3p}{2\pi+3\sqrt{3}}$. Площадь сегмента:

$$S=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{3p^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{3p^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)^2}$.

10.299. На отрезке AB и на каждой его половине построены как на диаметрах полукруги (по одну сторону от AB). Считая радиус большого круга равным R, найти сумму площадей криволинейных треугольников, образовавшихся при построении круга, касательного ко всем трем данным полукругам.

Решение.

Пусть O — середина AB, D — середина AO, F — середина OB, E — центр круга, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.90). Пусть r — радиус того круга. Тогда $OA=R$, $DO=\dfrac{R}{2}$, $DE=\dfrac{R}{2}+r$, $OE=R-r$. Из ΔDOE ($\angle DOE=90^\circ$): $DE^2=DO^2+OE^2$; $\left(\dfrac{R}{2}+r\right)^2=\left(\dfrac{R}{2}\right)^2+(R-r)^2$;

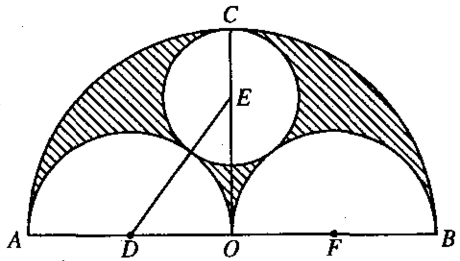


Рис. 10.90

$r=\dfrac{R}{3}$. Искомая площадь $S=S_1-(2S_2+S_3)$, где S_1 — площадь полукруга с центром O, S_2 — площадь полукруга с центром D, S_3 — площадь круга с центром E.

$$S=\frac{\pi R^2}{2}-\left(2\cdot\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}+\pi r^2\right)=\frac{\pi R^2}{2}-\left(\frac{\pi R^2}{4}+\frac{\pi R^2}{9}\right)=\frac{5}{36}\pi R^2.$$

Ответ: $\dfrac{5}{36}\pi R^2$.

10.300. Сторона правильного треугольника равна a. Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса $a/3$, центр которого совпадает с центром треугольника.

Решение.

Искомая площадь $S=S_1-S_2+3S_3$, где $S_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь треугольника, $S_2=\dfrac{\pi a^2}{9}$ — площадь круга, S_3 — площадь сегмента, отсекаемого треугольником от круга. Хорда этого сегмента равна $\dfrac{a}{3}$; поэтому $S_3=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\pi a^2}{9}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9\cdot 4}=\dfrac{\pi a^2}{54}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}$.

Получаем, что $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi a^2}{9}+\dfrac{\pi a^2}{18}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}$.

Ответ: $\dfrac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}$.

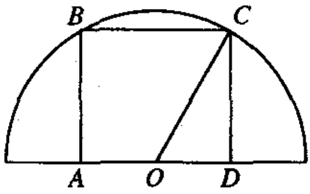


Рис. 10.91.1

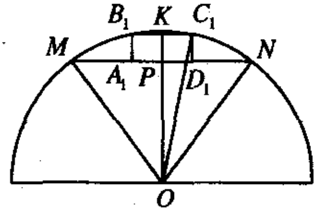


Рис. 10.91.2

10.301. Найти отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой в 180°, к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой в 90°.

Решение.

Пусть $ABCD$ — квадрат, вписанный в сегмент с дугой в 180° (рис. 10.91.1), $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, вписанный в сегмент того же круга с дугой в 90° (рис. 10.91.2). Пусть R — радиус круга, $AB = x$, $A_1B_1 = y$. Рассмотрим квадрат $ABCD$. O — центр круга. Тогда $OC = R$, $OD = CD/2 = x/2$. Из ΔCDO ($\angle CDO = 90°$): $OD^2 + CD^2 = OC^2$; $\frac{x^2}{4} + x^2 = R^2$; $x = \frac{2R}{\sqrt{5}}$. Рассмотрим квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Проведем $OK \perp B_1C_1$. Тогда K — середина B_1C_1, точка P пересечения A_1D_1 и OK — середина A_1D_1, $KP = A_1B_1 = y$, $KC_1 = y/2$. Так как $\angle MON = 90°$, то $OP = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $OK = OP + PK = \frac{R\sqrt{2}}{2} + y$. Из ΔOKC_1 ($\angle OKC_1 = 90°$): $OC_1^2 = OK^2 + KC_1^2$; $R^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} + y\right)^2 + \frac{y^2}{4}$; $5y^2 + 4Ry\sqrt{2} - 2R^2 = 0$; $y = \frac{R\sqrt{2}}{5}$. Следовательно, $\frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{2R \cdot 5}{\sqrt{5} \cdot R\sqrt{2}}\right)^2 = 10$.

Ответ: 10:1.

10.302. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

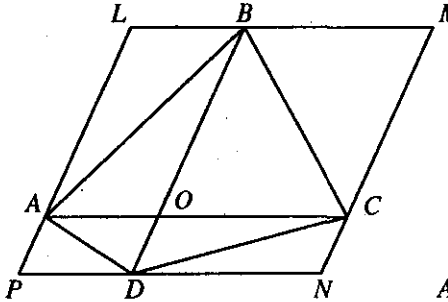


Рис. 10.92

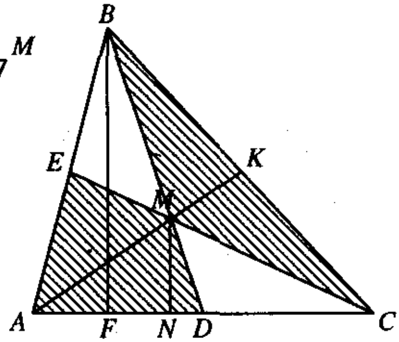


Рис. 10.93

Решение.

Покажем, что искомая площадь $S_{LMNP} = 2S$ (рис. 10.92). Так как $AL \| BO$ и $LB \| AO$, то $ALBO$ — параллелограмм и, значит, $S_{\Delta ALB} = S_{\Delta AOB}$. Аналогично получаем $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta BOC}$, $S_{\Delta DCN} = S_{\Delta DOC}$, $S_{\Delta APD} = S_{\Delta AOD}$, откуда и следует, что $S_{LMNP} = 2S$.

Ответ: $2S$.

10.303. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE; M — точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

Решение.

Проведем третью медиану AK треугольника ABC (рис. 10.93), опустим на AC перпендикуляры BF и MN. Так как $MD = BD/3$, то $MN = BF/3$. $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{3} BF = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$. MD — медиана ΔABC. Аналогично $S_{\Delta AME} = S_{\Delta BME} = S_{\Delta BMK} = S_{\Delta CMK} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$. Это означает, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников. Так как четырехугольник $ADME$ и треугольник BMC каждый состоит из двух таких треугольников, то они равновелики. Что и требовалось доказать.

10.304. Два круга концентричны, причем окружность меньшего круга делит большой круг на равновеликие части. Доказать, что часть кольца, заключенная между параллельными касательными к окружности меньшего радиуса, равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

Решение.

Пусть O — общий центр данных кругов, K — точка касания хорды AB большего круга к кругу меньшего радиуса (рис. 10.94). Пусть радиус большего круга R, меньшего — r. Тогда по условию $\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2}$ и $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. В ΔOKB $\angle OKB = 90°$,

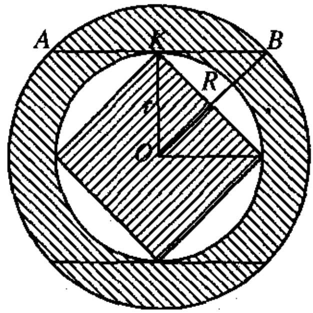


Рис. 10.94

$OK = r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{OB}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\angle BOK = 45°$ и $\angle AOB = 90°$. Тогда площадь сегмента, ограниченного хордой AB: $S_1 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$. Площадь кольца $S_2 = \pi R^2 - \pi r^2$. Тогда площадь части кольца, заключенная между параллельными касательными: $S = S_2 - 2S_1 = \pi R^2 - \pi r^2 - \frac{\pi R^2}{2} + R^2 = \frac{\pi R^2}{2} - \pi r^2 + R^2$. Так как $R = r\sqrt{2}$, то $S = 2r^2$. Площадь квадрата, вписанного в круг радиуса r, равна также $2r^2$. Утверждение доказано.

10.305. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение.

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Пусть u и v — длины катетов, а w — длина гипотенузы; тогда $S = \frac{\pi w^2}{4}$. Так как u и v — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $uv = \frac{c}{a}$, $u + v = -\frac{b}{a}$. Учитывая, что $w^2 = u^2 + v^2$, имеем $w^2 = (u+v)^2 - 2uv = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ и окончательно находим $S = \frac{\pi(b^2 - 2ac)}{4a^2}$.

Ответ: $\frac{\pi(b^2 - 2ac)}{4a^2}$.

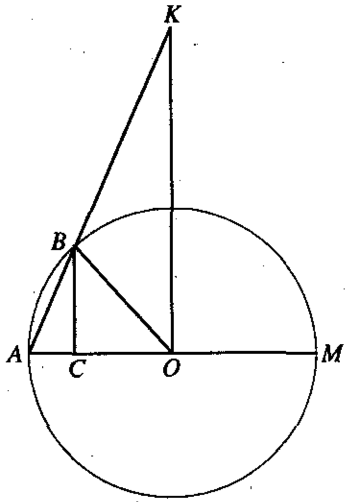


Рис. 10.95

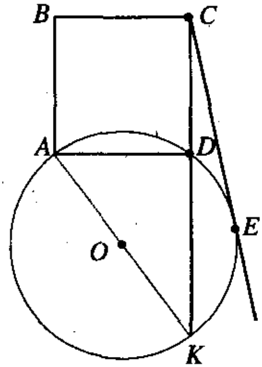


Рис. 10.96

10.306. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B таких, что $\cup AB = 45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, — в точке K. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно AM, пересекает его в точке C. Найти площадь трапеции $OCBK$.

Решение.

По условию $\angle BOC = 45°$, поэтому $BC = OC = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $AC = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ (рис. 10.95). Так как $\Delta ABC \sim \Delta AKO$, то $\frac{KO}{BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow KO = \frac{AO \cdot BC}{AC} = \frac{R}{\sqrt{2}-1} = R(\sqrt{2}+1)$. Тогда площадь трапеции будет равна: $S = \frac{1}{2}(KO + BC)OC = \frac{1}{2}\left(R(\sqrt{2}+1) + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)\frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}$.

Ответ: $\frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}$.

10.307. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в три раза больше стороны квадрата. Найти площадь круга, если сторона квадрата равна a.

Решение.

Пусть $ABCD$ — квадрат, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.96). Указанная окружность проходит через его вершины A и D, CE — касательная, $AD = CD = a$, $CE = 3a$. Продлим CD до пересечения с окружностью в точке K. Пусть $DK = x$. Тогда $CK \cdot CD = CE^2$; $(x+a)a = 9a^2$; $x = 8a$. Так как $\angle ADK = 90°$, то AK — диаметр окружности и $AK^2 = AD^2 + DK^2$. Пусть R — радиус данной окружности. Тогда $4R^2 = a^2 + 64a^2$; $R^2 = \frac{65a^2}{4}$. Искомая площадь круга $S = \pi R^2 = \frac{65\pi a^2}{4}$.

Ответ: $\frac{65\pi a^2}{4}$.

10.308. Дан квадрат со стороной a. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

Решение.

Искомая площадь $S = 12S_{\Delta OAB}$, где OA, OB проведены в соседние вершины правильного двенадцатиугольника (рис. 10.97). Сторона квадрата равна a, поэтому $OA = OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

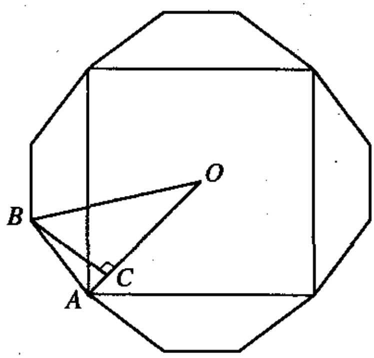


Рис. 10.97

Проведём высоту $BC \perp OA$. Тогда $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot BC$, где $\angle AOB = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Получаем $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow S = \frac{12}{8}a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

Ответ: $\frac{3a^2}{2}$.

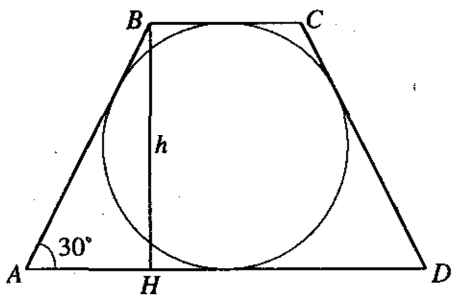


Рис. 10.98

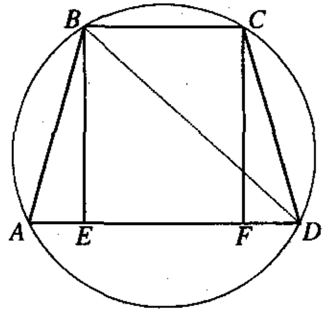


Рис. 10.99

10.309. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 32 см²; острый угол трапеции равен 30°. Определить стороны трапеции.

Решение.

Пусть высота BH трапеции равна h (рис. 10.98). Тогда $AB = 2h$ (так как $\angle A = 30°$), $BC + AD = 4h$ (поскольку $BC + AD = AB + CD = 2AB$). Площадь трапеции $S = \frac{(BC + AD)h}{2} = 2h^2 = 32$ (см²), откуда $h = 4$ см. Следовательно, $AB = CD = 8$ см, $BC + AD = 16$ см. Но $BC + AD = 2BC + 2AH = 2BC + 8\sqrt{3}$. Итак, $AB = CD = 8$ см, $BC = 8 - 4\sqrt{3}$ см, $AD = 8 + 4\sqrt{3}$ см.

Ответ: 8 см; $8 - 4\sqrt{3}$ см; $8 + 4\sqrt{3}$ см.

10.310. Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а основания равны 16 и 12 см. Определить площадь описанного круга.

Решение.

Пусть BE — высота трапеции $ABCD$, $BE = 14$ см, $BC = 12$ см, $AD = 16$ см, $AB = CD$ (рис. 10.99). Тогда $AF = \frac{AD + BC}{2} = 14$ см. В ΔBED $\angle BED = 90°$, $BE = ED$. Следовательно, $\angle BDE = 45°$. Из ΔAEB ($\angle AEB = 90°$): $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 10\sqrt{2}$ (см). Радиус R круга, описанного около трапеции $ABCD$, найдем как радиус круга, описанного около ΔABD: $R = \frac{AB}{2\sin\angle BDA} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 10$ (см). Следовательно, искомая площадь круга $S = \pi R^2 = 100\pi$ см².

Ответ: 100π см².

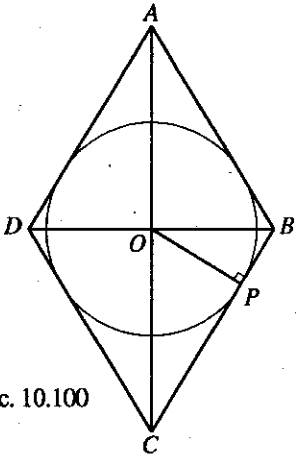


Рис. 10.100

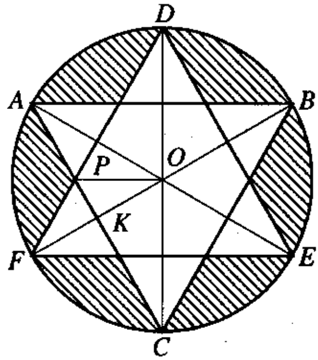


Рис. 10.101

10.311. Длины диагоналей ромба относятся как 3:4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

Решение.

Пусть точка O — точка пересечения диагоналей и центр вписанного круга радиуса r ромба $ABCD$, $BD : AC = 3 : 4$ (рис. 10.100). $\frac{BO}{CO} = \frac{BD}{AC} = \frac{3}{4}$. Пусть $BO = 3x$, тогда $CO = 4x$, $BC = 5x$ (из ΔBOC). Пусть P — точка касания круга со стороной BC. Тогда $OP \perp BC$, $OP = r$.

$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OP = \frac{1}{2} OC \cdot OB$. $OP = r = \frac{OC \cdot OB}{BC} = \frac{12x}{5}$. Площадь круга

$S_1 = \pi r^2 = \frac{144\pi x^2}{25}$. Площадь ромба $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2BO \cdot OC = 24x^2$.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{24x^2 \cdot 25}{144\pi x^2} = \frac{25}{6\pi}.$$

Ответ: $\frac{25}{6\pi}$.

10.312. В круг радиуса R вписан правильный треугольник, высоты которого продолжены до пересечения с окружностью. Эти точки пересечения соединены между собой, в результате чего получается новый треугольник. Вычислить ту часть площади круга, которая находится вне этих треугольников.

Решение.

Искомая площадь равна $6S_1$, где S_1 — площадь криволинейного треугольника APF (рис. 10.101), S_1, в свою очередь, равна разности сектора AOF и удвоенной площади треугольника AOP. $\angle AOF = 60°$, следовательно,

$$S_{AOF} = \frac{1}{6}\pi R^2. \quad S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}AP \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AC \cdot OK = \frac{1}{6}R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{12}.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = 6S_1 = 6(S_{AOF} - 2S_{\Delta AOP}) = 6\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{6}\right) = R^2(\pi - \sqrt{3}).$$

Ответ: $R^2(\pi - \sqrt{3})$.

10.313. Две окружности радиуса R пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

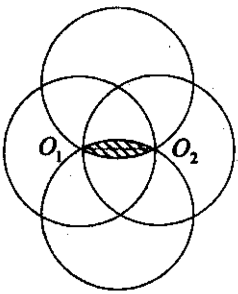


Рис. 10.102

Решение.

Каждая из двух последних окружностей проходит через центры первых двух (рис. 10.102), поэтому длина их общей хорды $O_1O_2 = R$. Искомая площадь равна удвоенной площади сегмента с центральным углом $60°$, т.е.

$$S = 2\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$

Ответ: $\frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

10.314. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны 3 и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены две высоты BE и BF. Вычислить площадь четырехугольника $BFDE$.

Решение.

Площадь ромба $S = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 6 = AD \cdot BE$ (рис. 10.103). Из ΔAOD находим $AD = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$ (см) $\Rightarrow$ $BE = 6 : 2{,}5 = 2{,}4$ (см). Из ΔBDE имеем $DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = 1{,}8$ (см).

Получили $S_{BEDF} = 2S_{\Delta BED} = 1{,}8 \cdot 2{,}4 = 4{,}32$ (см^2).

Ответ: 4,32 см^2.

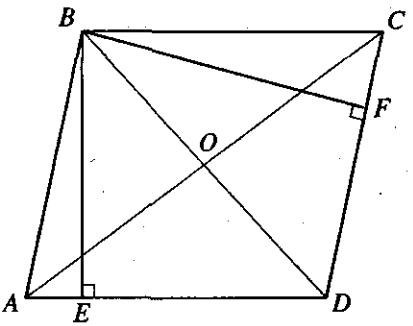


Рис. 10.103

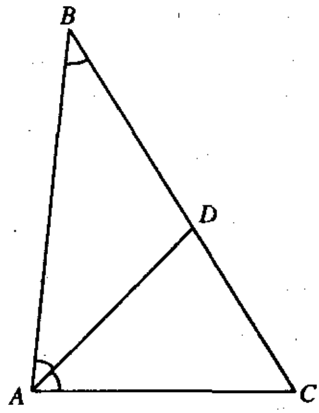


Рис. 10.104

10.315. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

Решение.

$\angle A = 2\angle B$, $BC - AC = 2$ см, $AB = 5$ см (рис. 10.104); найдем $S_{\Delta ABC}$. Проведем биссектрису AD; тогда $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ ($\angle C$ — общий, $\angle B = \angle DAC$) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{AC}$, $AC^2 = BC \cdot CD$ (*). Так как AD — биссектриса, то $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{5}{BD} \Rightarrow \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{5}{BC - CD} \Rightarrow AC \cdot BC - AC \cdot CD = 5CD \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AC + 5}$ (**). Из равенств (*) и (**) следует, что $AC^2 = \dfrac{AC \cdot BC^2}{AC + 5}$, $AC^2 + 5AC = BC^2$. Так как $BC = AC + 2$, то $AC^2 + 5AC = AC^2 + 4AC + 4$, откуда $AC = 4$ см, $BC = 6$ см.

Получили $S_{\Delta ABC} = \sqrt{7{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}5} = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ см^2.

Ответ: $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ см^2.

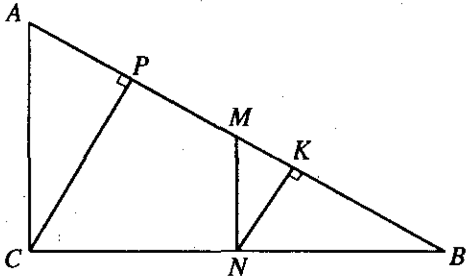


Рис. 10.105

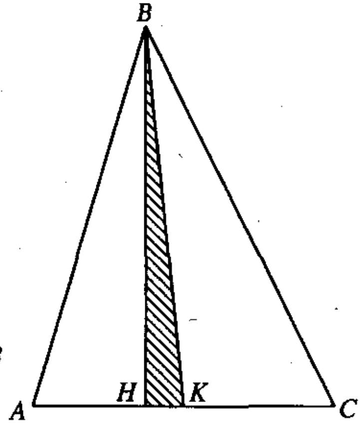


Рис. 10.106

10.316. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5 см, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4 см. Вычислить площадь треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 10.105) $\angle ACB = 90°$, M — середина AB, $MN \perp BC$, $MN = 5$ см. Тогда N — середина BC и $AC = 2MN = 10$ см. Опустим на AB перпендикуляры NK и CP. Тогда $NK = 4$ см, K — середина BP и $CP = 2NK = 8$ см. Из ΔAPC ($\angle APC = 90°$): $AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = 6$ см. Из ΔACB ($\angle ACB = 90°$): $AC^2 = AP \cdot AB$; $AB = \frac{AC^2}{AP} = \frac{50}{3}$ см. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CP = \frac{200}{3}$ см^2.

Ответ: 200/3 см^2.

10.317. В треугольнике ABC известны: $BC = 15$ см, $AC = 14$ см, $AB = 13$ см. Вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

Решение.

Пусть BH и BK — соответственно высота и биссектриса ΔABC (рис. 10.106). Так как $15^2 < 13^2 + 14^2$, то ΔABC — остроугольный и точка H принадлежит отрезку AC. По формуле Герона находим: $S_{\Delta ABC} = 84$ см^2. Тогда $BH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = 12$ см. Пусть $AK = x$ см. Тогда $CK = (14 - x)$ см и по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AK}{AB}=\frac{CK}{BC}$, откуда $\frac{x}{13}=\frac{14-x}{15}$; $x=6{,}5$. Из ΔAHB ($\angle AHB=90°$): $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=5$ см. Тогда $HK=AK-AH=1{,}5$ см. Искомая площадь $S_{\Delta BHK}=\frac{1}{2}BH\cdot HK=9$ см^2.

Ответ: 9 см^2.

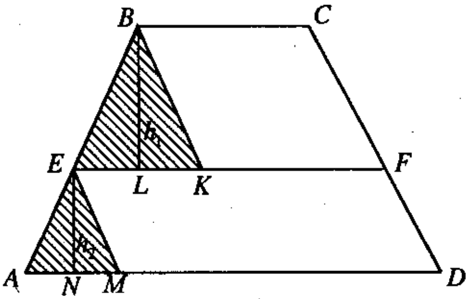


Рис. 10.107

10.318. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 10.107) $BC \parallel AD$, $EF \parallel BC$, площади S_1 и S_2 трапеций $AEFD$ и $EBCF$ равны, $BC=a$, $AD=b$. Проведем BL и EN — соответственно высоты трапеций $EBCF$ и $AEFD$. Пусть $EF=x$, $BL=h_1$, $EN=h_2$. Проведем $BK \parallel CF$, $EM \parallel CD$. Тогда $KF=a$, $EK=x-a$, $MD=x$, $AM=b-x$. $\Delta AEM \sim \Delta EBK$. Тогда $\frac{EK}{BL}=\frac{AM}{EN}$, $\frac{x-a}{h_1}=\frac{b-x}{h_2}$ (a). $S_1=\frac{BC+EF}{2}\cdot BL=\frac{a+x}{2}\cdot h_1$. $S_2=\frac{AD+EF}{2}\cdot EN=\frac{b+x}{2}\cdot h_2$. Тогда $\frac{a+x}{2}h_1=\frac{b+x}{2}h_2$ (b). Перемножая равенства (a) и (b), получаем: $\frac{x^2-a^2}{2}=\frac{b^2-x^2}{2}$. Отсюда $2x^2=a^2+b^2$; $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

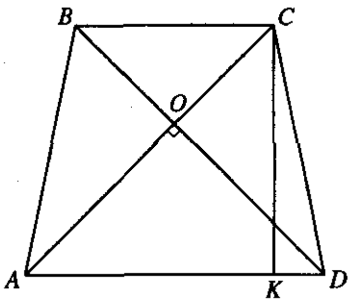


Рис. 10.108

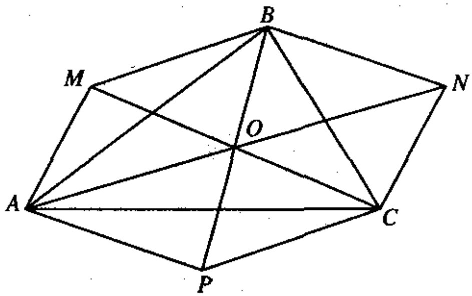


Рис. 10.109

10.319. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна a^2. Определить высоту трапеции.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 10.108) $AB = CD$, $AC \perp BD$, O — точка пересечения AC и BD, CK — высота трапеции. Так как трапеция равнобокая, то $AK = \dfrac{AD + BC}{2}$, $AO = DO$, и так как $\angle AOD = 90°$, то $\angle OAD = 45°$. Следовательно, в прямоугольном ΔAKC $AK = CK$. Площадь трапеции $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CK = AK \cdot CK = CK^2 = a^2$. Значит, $CK = a$.

Ответ: a.

10.320. Медианы одного треугольника равны сторонам другого треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

Решение.

Каждую медиану исходного треугольника ABC продолжим на 1/3 её длины (рис. 10.109). Площадь образовавшейся фигуры $AMBNCP$ составит $2S_{\Delta ABC}$ ($\Delta BOC = \Delta BNC$, $\Delta AOB = \Delta AMB$, $\Delta AOC = \Delta APC$). Длины сторон каждого из треугольников AOM, BOM, BON, CON, COP, AOP равны $2m_1/3$, $2m_2/3$, $2m_1/3$; поэтому $S_{AMBNCP} = 6S_{\Delta AOM}$. Пусть S_m — площадь треугольника, построенного на медианах ΔABC. Тогда $S_{\Delta AOM} = 4S_m/9$ и $S_{AMBNCP} = 2S_{\Delta ABC} = 6 \cdot 4S_m/9 = 8S_m/3$, откуда $S_{\Delta ABC} : S_m = 4:3$.

Ответ: 4:3.

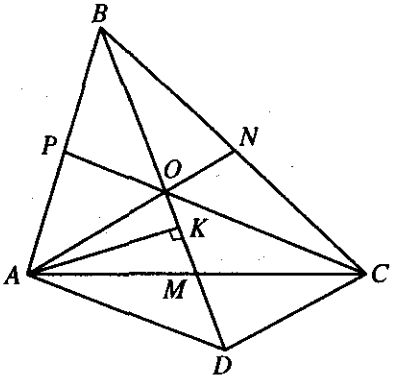


Рис. 10.110

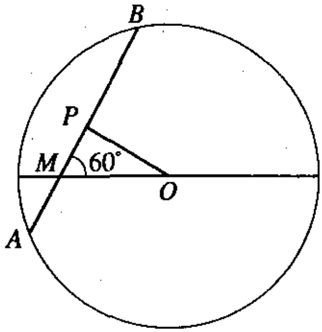


Рис. 10.111

10.321. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть AN, BM, CP — медианы ΔABC (рис. 10.110), O — точка их пересечения, $AN = 3$ см, $BM = 4$ см, $CP = 5$ см. На продолжении отрезка BM за точку M отложим отрезок $DM = OM$. Тогда $DO = BO =$ $= \frac{2}{3}BM = \frac{8}{3}$ см. Опустим перпендикуляр AK на BM. $S_{\Delta ADO} =$ $= \frac{1}{2}DO \cdot AK = \frac{1}{2}BO \cdot AK = S_{\Delta ABO} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$. Так как $AOCD$ — параллелограмм, то $AD = OC = \frac{10}{3}$ см. $AO = \frac{2}{3}AN = 2$ см. По формуле Герона находим $S_{\Delta ADO} = \frac{8}{3}$ см^2. Тогда $S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta ADO} = 8$ см^2.

Ответ: 8 см^2.

10.322. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный $60°$. Найти OM, если $AM = 10$ см, а $BM = 4$ см.

Решение.

Проведем $OP \perp AB$ (рис. 10.111). Тогда $AP = BP = 7$ см и $MP = 3$ см. Так как $\angle PMO = 60°$, то $\angle MOP = 30°$ и $OM = 2MP = 6$ см.

Ответ: 6 см.

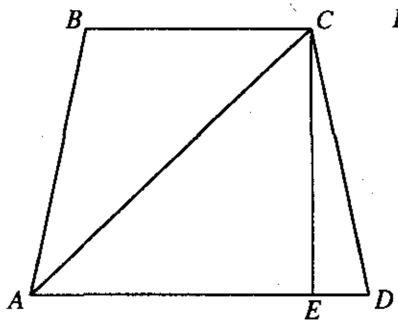


Рис. 10.112

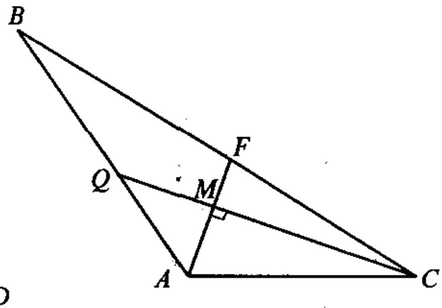


Рис. 10.113

10.323. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см². Найти высоту трапеции.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 10.112) $AB = CD$, $AC = 10$ см, CE — высота. Пусть $AE = x$ см, $CE = y$ см. Так как $AE = \dfrac{AD+BC}{2}$, то по условию $xy = 48$ см. Из ΔAEC ($\angle AEC = 90^\circ$): $AE^2 + CE^2 = AC^2$; $x^2 + y^2 = 100$. Решаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100; \\ xy = 48; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 100; \\ xy = 48; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^2 = 196; \\ xy = 48. \end{cases}$ Так как $x > 0$, $y > 0$, то $x + y = 14$. Тогда $\begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \end{cases}$ или

$\begin{cases} x = 6, \\ y = 8. \end{cases}$ Отсюда высота трапеции равна 6 см или 8 см.

Ответ: 6 см, 8 см.

10.324. В треугольник вписан круг. Прямые, соединяющие центр круга с вершинами, делят площадь треугольника на части с площадями 4, 13 и 15 см². Найти стороны треугольника.

Решение.

Обозначим стороны треугольника через a, b, c. Тогда площади частей треугольника равны $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, т.е. $ar = 8$, $br = 26$, $cr = 30$, откуда $a = \frac{8}{r}$, $b = \frac{26}{r}$, $c = \frac{30}{r}$. По формуле Герона находим

$S=\sqrt{\frac{32}{r}\cdot\frac{24}{r}\cdot\frac{6}{r}\cdot\frac{2}{r}}=\frac{96}{r^2}$. Но $S=4+13+15=32$ см²; следовательно, $\frac{96}{r^2}=32$,

$r=\sqrt{3}$ см. Итак, $a=\frac{8}{\sqrt{3}}$ см, $b=\frac{26}{\sqrt{3}}$ см, $c=\frac{30}{\sqrt{3}}$ см.

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{3}}$, $\frac{26}{\sqrt{3}}$, $\frac{30}{\sqrt{3}}$ см.

10.325. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 и 24 см. Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть AF и CQ — медианы ΔABC (рис. 10.113), M — точка их пересечения, $AC=20$ см, $AF=18$ см, $CQ=24$ см. Тогда $AM=\frac{2}{3}AF=12$ см, $CM=\frac{2}{3}CQ=16$ см. Так как $AM^2+MC^2=AC^2$, то ΔAMC — прямоугольный, и $S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}AM\cdot CM=96$ см²; $S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta AMC}=288$ см².

Ответ: 288 см².

10.326. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 м. Найти площадь треугольника.

Решение.

Площадь ΔABC в 3 раза больше площади ΔAOC (O — точка пересечения медиан; рис. 10.114). Имеем $S_{\Delta AOC}=$ $=\frac{1}{2}AC\cdot OK=KC\cdot OK$. Но $OK=\frac{1}{2}BK=2$ м, $KC=\sqrt{OC^2-OK^2}$, где $OC=\frac{2}{3}MC=\frac{10}{3}$ м $\Rightarrow$

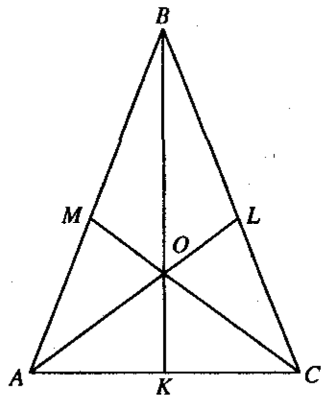


Рис. 10.114

$\Rightarrow\ KC=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-2^2}=\frac{8}{3}$ м, и $S_{\Delta AOC}=\frac{16}{3}$ м², т.е. $S_{\Delta ABC}=16$ м².

Ответ: 16 м².

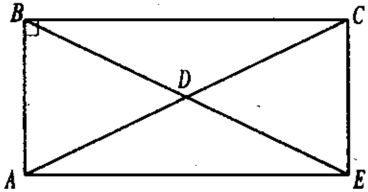


Рис. 10.115

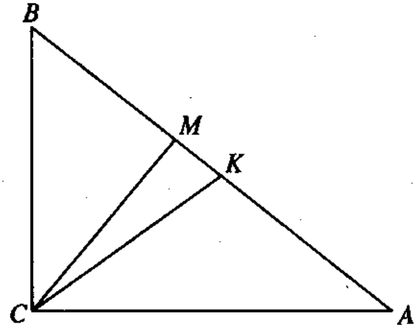


Рис. 10.116

10.327. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

Решение.

Пусть BD — медиана ΔABC (рис. 10.115), $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{15}$ см, $BD = 2$ см. На продолжении отрезка BD за точку D отложим отрезок $DE = BD$. $ABCE$ — параллелограмм, поэтому $AC^2 + BE^2 = 2(AB + BC)^2$;

$AC^2 = 2(1+15) - 16$; $AC = 4$ см.

Тогда $AC^2 = AB^2 + BC^2$ и ΔABC — прямоугольный.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{15}}{2}$ см².

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см².

10.328. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник высотой и медианой, проведенными к большей по величине стороне.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 10.116) $BC = 3$ см, $AC = 4$ см, $AB = 5$ см, CK — медиана, CM — высота. Так как $AB^2 = BC^2 + AC^2$, то ΔABC — прямоугольный. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 6$ см²; $BM = \frac{BC^2}{AB} = \frac{9}{5}$ см; $CM = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{12}{5}$ см. $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot CM = \frac{54}{25} = 2{,}16$ (см²). Так как CK — медиана, то $S_{\Delta ACK} = S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = 3$ см². $S_{\Delta CMK} = S_{\Delta BCK} - S_{\Delta BMC} = 0{,}84$ см².

Ответ: 3 см²; 0,84 см²; 2,16 см².

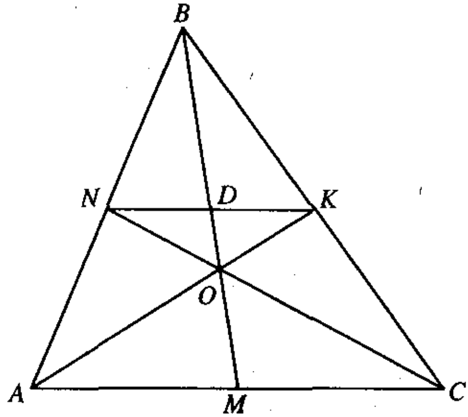


Рис. 10.117

10.329. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

Решение.

Докажем, что все указанные в условии треугольники равновелики. Имеем $S_{\Delta AOM} = S_{\Delta COM}$ (рис. 10.117), так как эти треугольники имеют одинаковые высоты и одинаковые основания, равные $AC/2$. Аналогично $S_{\Delta AON} = S_{\Delta BON}$ и $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta COK}$. Но $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta BON}$, так как $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta DOK} + S_{\Delta BKD}$, $S_{\Delta BON} = S_{\Delta DON} + S_{\Delta BND}$, а $S_{\Delta DOK} = S_{\Delta DON}$ и $S_{\Delta BKD} = S_{\Delta BND}$ (у этих треугольников равны основания KD и ND, а также опущенные из них высоты). Итак, площадь каждого треугольника равна $S_{\Delta ABC}/6$. Теперь по формуле Герона находим $S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ см^2, откуда $S_{\Delta AOM} = 14$ см^2.

Ответ: 14 см^2.

10.330. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение.

Не нарушая общности, можем принять, что $a > 0$ (случай $a < 0$ рассматривается абсолютно аналогично). Тогда его гипотенуза равна $\sqrt{m^2 + n^2}$, радиус вписанной окружности $r = \dfrac{m + n - \sqrt{m^2 + n^2}}{2}$. По условию

$$m+n=-\frac{b}{a};\quad mn=\frac{c}{a}.\quad r=\frac{m+n-\sqrt{(m+n)^2-2mn}}{2}=\frac{-\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}}{2}=$$

$$=-\frac{b+\sqrt{b^2-2ac}}{2a}.$$

Ответ: $-\frac{b+\sqrt{b^2-2ac}}{2a}$.

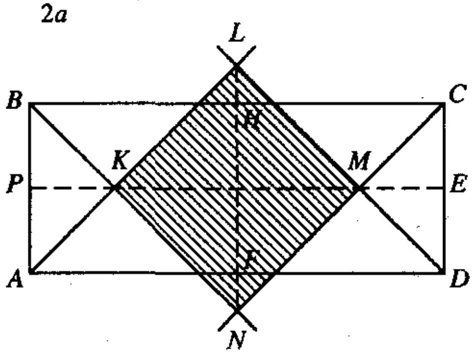


Рис. 10.118

10.331. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

Решение.

$KLMN$ — четырёхугольник, образованный при взаимном пересечении биссектрис углов прямоугольника $ABCD$ (рис. 10.118), $AB=a$, $AD=b$. Не нарушая общности, примем, что $b>a$. Так как $ABCD$ — не ромб, то из свойств биссектрис углов параллелограмма следует, что $KLMN$ — прямоугольник. Точки P и E, соответственно, — середины сторон AB и CD прямоугольника. Так как ΔAKB и ΔCMD — равнобедренные, то KP и ME — серединные перпендикуляры к противоположным сторонам прямоугольника и, следовательно, точки P, K, M, E лежат на одной прямой. Тогда прямая KM, делящая пополам $\angle AKB$, делит пополам и вертикальный с ним $\angle NKL$ и, следовательно, прямоугольник $KLMN$

является квадратом. Из ΔAKB : $KP = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. $ME = KP = \frac{a}{2}$; $PE = BC = b$.

Тогда $KM = b - a$ и искомая площадь $S = \frac{1}{2}KM^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2}{2}$.

10.332. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен $2p$, а площадь равна m^2.

Решение.

Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза данного треугольника. Используя свойства прямоугольного треугольника, составим систему:

$$\begin{cases} a+b+c=2p, \\ \frac{ab}{2}=m^2, \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases}$$

Имеем: $a+b=2p-c$, $a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$. Следовательно, $c^2+4m^2=4p^2-4pc+c^2$; $c=\frac{p^2-m^2}{p}$. Тогда $a+b=$ $=2p-c=\frac{p^2+m^2}{p}$, $ab=2m^2$. Значит, a и b — корни уравнения $x^2-\frac{p^2+m^2}{p}x+2m^2=0$. Тогда $px^2-(p^2+m^2)x+2m^2p=0$;

$x=\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8p^2m^2}}{2p}$. Катеты данного треугольника

$\frac{p^2+m^2+\sqrt{(p^2+m^2)^2-8p^2m^2}}{2p}$ и $\frac{p^2+m^2-\sqrt{(p^2+m^2)^2-8p^2m^2}}{2p}$.

Ответ: $\frac{p^2-m^2}{p}$; $\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8p^2m^2}}{2p}$.

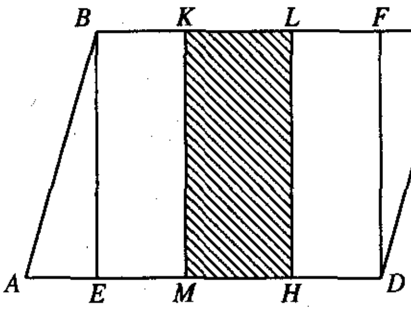


Рис. 10.119

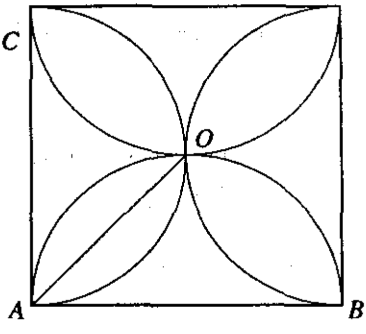


Рис. 10.120

10.333. Параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 153$ см, $AD = 180$ см, $BE = 135$ см (BE — высота), разделен на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с AD?

Решение.

Пусть KM и LH — прямые, разбивающие параллелограмм $ABCD$ (рис. 10.119) на три равновеликие фигуры, DF — высота параллелограмма. Тогда $BK = EM = HD = LF$. Пусть $BK = x$ см. Из ΔAEB ($\angle AEB = 90°$):

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 72$ см. Тогда $AM = (x + 72)$ см и $S_{ABKM} =$

$= \dfrac{AM + BK}{2} \cdot BE = 135(x + 36)$ см². $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 180 \cdot 135$ см². Так как

$S_{ABKM} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}$, то $135(x+36) = 60 \cdot 135$; $x = 24$. Следовательно, $AM = 96$ см,

$AH = AD - HD = 156$ см.

Ответ: 96 см; 156 см.

10.334. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

Решение.

Хорда OA стягивает дугу 90° (рис. 10.120); следовательно, площадь половины лепестка равна $\dfrac{\pi a^2}{16} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2(\pi - 2)}{16}$.

Отсюда искомая площадь $S = 8 \cdot \frac{a^2(\pi - 2)}{16} = \frac{a^2(\pi - 2)}{2}$.

Ответ: $\frac{a^2(\pi - 2)}{2}$.

10.335. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см^2. Определить длину дуги сектора.

Решение.

Периметр сектора $p = 2r + l$, где r — радиус сектора, l — длина дуги сектора. Площадь сектора $S = \frac{rl}{2}$.

Тогда $\begin{cases} 2r + l = 28, \\ rl = 98, \end{cases}$ $\begin{cases} r = \frac{28-l}{2}, \\ rl = 98; \end{cases}$ $l(28 - l) = 196$; $l^2 - 28l + 196 = 0$; $l = 14$.

Ответ: 14 см.

10.336. В равносторонний треугольник ABC со стороной $a =$ $= 2$ см вписан круг; точка A является центром второго круга с радиусом 1 см. Найти площадь пересечения этих кругов.

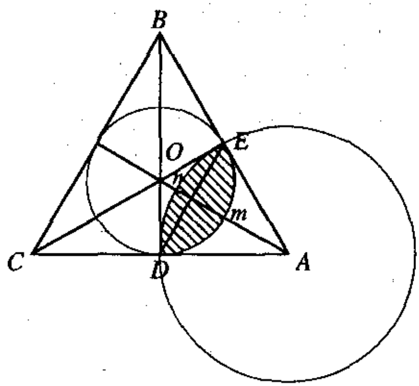


Рис. 10.121

Решение.

Искомая площадь равна сумме площадей сегмента DmE круга радиуса $R = \sqrt{3}/3$ см с центром O, вписанного в ABC, и сегмента круга радиуса $r = 1$ см (рис. 10.121), $\angle DOE = 120°$. Тогда

$$S_{DmE} = \frac{1}{3}\pi R^2 - S_{\Delta DOE} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2}{2}\sin 120° = \frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2;$$

$S_{DnE} = \frac{1}{6}\pi r^2 - S_{\Delta DAE} = \ = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2. Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18}$ см^2.

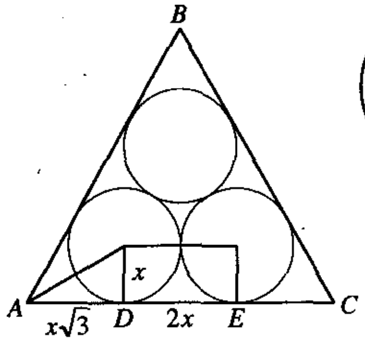


Рис. 10.122

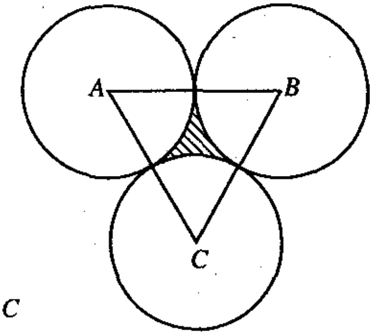


Рис. 10.123

10.337. Внутри правильного треугольника со стороной a расположены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.

Решение.

Пусть x — радиус каждой из окружностей. Тогда $AD = x\sqrt{3}$, $DE = 2x$,

$EC = x\sqrt{3}$ (рис. 10.122). Отсюда $2x\sqrt{3} + 2x = a$, $x = \dfrac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Площадь каждого из кругов равна $\pi x^2 = \dfrac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8}$; поэтому искомая площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8} = \dfrac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}$.

Ответ: $\dfrac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}$.

10.338. Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса R . Найти площадь этого треугольника.

Решение.

Искомая площадь равна разности площади равностороннего ΔABC со стороной $2R$ и суммы площадей секторов, ограниченных данными дугами (рис. 10.123): $S = S_{\Delta ABC} - 3S_{сект} = \dfrac{4R^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\dfrac{\pi R^2}{6} = \dfrac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$.

Ответ: $\dfrac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$.

10.339. Центр равностороннего треугольника со стороной, равной 6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

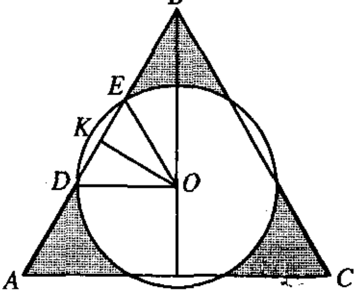


Рис. 10.124

Решение.

Пусть O — центр правильного ΔABC (рис. 10.124), $AB = 6$ см. Радиус $r_1 = 2$ см круга, о котором говорится в условии задачи, удовлетворяет неравенству $r < r_1 < R$, где $r = \sqrt{3}$ см — радиус вписанного, $R = 2\sqrt{3}$ — радиус описанного кругов ΔABC, поэтому круг пересекает стороны ΔABC. D и E — точки пересечения круга со стороной AB треугольника, K — середина DE. Тогда $OK \perp DE$, $OK = r = \sqrt{3}$ см, $OD = r_1 = 2$ см. Из ΔOKD ($\angle OKD = 90°$): $\cos \angle DOK = \dfrac{KO}{OD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle DOK = 30°$. $\angle DOE = 2\angle DOK = 60°$. Следовательно, ΔDOE — равносторонний и его площадь $S_1 = \sqrt{3}$ см². Искомая площадь $S = S_{\Delta ABC} - S_2$, где S_2 — площадь части круга, расположенной внутри ΔABC. $S_2 = S_{кр} - 3S_3$, где S_3 — площадь сегмента, ограниченного хордой DE.

$$S_3 = S_{сект} - S_1 = \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2.$$

$$S_2 = 4\pi - 3\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} = 2\pi + 3\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$S = S_{\Delta ABC} - S_2 = 9\sqrt{3} - \left(2\pi + 3\sqrt{3}\right) = 2\left(3\sqrt{3} - \pi\right) \text{ см}^2.$$

Ответ: $2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ см².

10.340. В ромб вписана окружность радиуса R. Найти площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

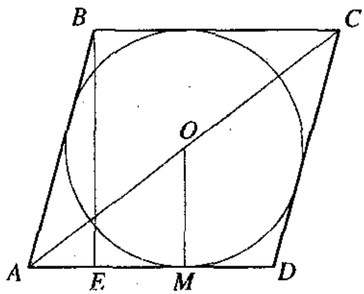


Рис. 10.125

Решение.

Пусть O — центр окружности, вписанной в ромб $ABCD$ (рис. 10.125), M — точка её касания со стороной ромба. Тогда $OM = R$, $AO = 2R$, $\angle AMO = 90°$. Следовательно, $\angle OAM = 30°$, $\angle BAD = 60°$. Пусть BE — высота ромба. Тогда $BE = 2R$ и из ΔAEB ($\angle AEB = 90°$):

$AB = \dfrac{BE}{\sin\angle BAD} = \dfrac{4R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$. Площадь ромба $S = AD \cdot BE = \dfrac{8R^2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{8R^2\sqrt{3}}{3}$.

10.341. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему, как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

Решение.

Пусть x — больший отрезок гипотенузы. Тогда по условию $\dfrac{c-x}{x} = \dfrac{x}{c}$, $x^2 + cx - c^2 = 0$, откуда $x = \dfrac{c\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ (второй корень уравнения не подходит). Отсюда $x^2 = \dfrac{c^2\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}$. Обозначив через h высоту, проведенную к гипотенузе, имеем $\dfrac{c-x}{h} = \dfrac{h}{x}$, и, значит, $h^2 = cx - x^2 = c^2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = c^2\left(\sqrt{5}-2\right)$, т.е. $h = c\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}ch = \dfrac{c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}$.

Ответ: $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

10.342. Длины сторон и диагоналей параллелограмма равны соответственно a, b, c и f. Найти углы параллелограмма, если $a^4+b^4=c^2f^2$.

Решение.

Пусть α и β — углы данного параллелограмма, противолежащие соответственно диагоналям c и f и $0° < \alpha < 90°$. Тогда $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$; $f^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$. Перемножив уравнения системы $\begin{cases} c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha; \\ f^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha, \end{cases}$ получаем: $f^2c^2=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha$.

Тогда $a^4+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\alpha=45°$; $\beta=180-\alpha=135°$.

Ответ: $45°$; $135°$.

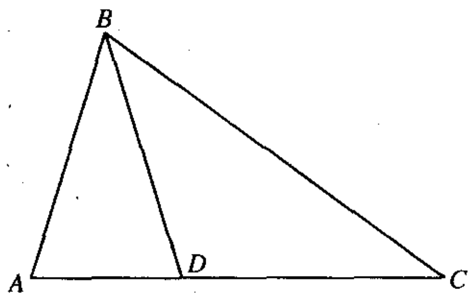


Рис. 10.126

10.343. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

Решение.

Пусть BD — биссектриса ΔABC (рис. 10.126), $AB=14$ см, $BC=35$ см, $BD=12$ см; $\angle ABD=\angle CBD=\alpha$. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD}$.

Тогда $\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD+\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle CBD$;

$14\cdot 35\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=14\cdot 12\sin\alpha+35\cdot 12\sin\alpha$; $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$.

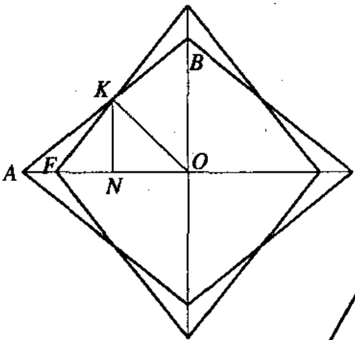


Рис. 10.127

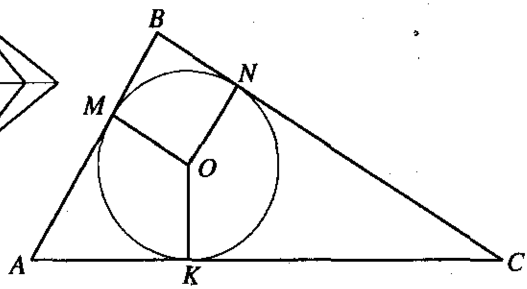


Рис. 10.128

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}35\cdot 14\cdot\dfrac{24}{25} = 235{,}2$ см^2.

Ответ: 235,2 см^2.

10.344. Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 и 6 см, а второй получен поворотом первого на $90°$ вокруг его центра.

Решение.

Искомая площадь S равна $4(S_{\Delta AOB} - S_{\Delta AFK})$ (рис. 10.127). Находим $S_{\Delta AOB} = 0{,}5\cdot 3\cdot 2 = 3$ см^2. Сторона ромба равна $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ (см). В ΔAOB отрезок OK — биссектриса; тогда, используя формулу $l_c = \dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$, имеем $OK = \dfrac{\sqrt{6(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}}{5} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$ см.

Далее, $S_{\Delta AFK} = \dfrac{1}{2}AF\cdot KH$, где $KH = \dfrac{OK}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{5}$ см, $AF = 3-2 = 1$ см; поэтому $S_{\Delta AFK} = 0{,}6$ см^2. Окончательно $S = 4(3-0{,}6) = 9{,}6$ см^2.

Ответ: 9,6 см^2.

10.345. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2 см. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 и 6 см. Определить вид треугольника и вычислить его площадь.

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса $r = 2$ см, вписанной в ΔABC (рис. 10.128), M, N, K — точки касания этой окружности соответственно со сторонами AB, BC, AC треугольника, AK = 4 см, KC = 6 см. Тогда $AM = AK = 4$ см, $CN = CK = 6$ см, $BM = BN = x$ см. Полупериметр данного треугольника $p = (x + 10)$ см и его площадь $S = pr = 2(x+10)\text{см}^2$, или по формуле Герона:

$$S = \sqrt{(10+x)(10+x-(x+4))(10+x-(x+6))(10+x-10)} = 2\sqrt{6x(x+10)}.$$

Получаем: $2\sqrt{6x(x+10)} = 2(x+10)$; $\sqrt{6x} = \sqrt{x+10}$; $x = 2$. Значит, $S = 2(x+10) = 24$ см^2, а стороны треугольника равны 10 см, 8 см и 6 см, и так как $8^2 + 6^2 = 10^2$, то ΔABC — прямоугольный.

Ответ: 24 см^2; треугольник прямоугольный.

10.346. Круг с центром O_1 разделен диаметром AB на два полукруга. В одном из них построены два новых полукруга, опирающиеся на O_1A и O_1B как на диаметры. В криволинейную фигуру, ограниченную контурами этих трех полукругов, вписан круг. Во сколько раз его площадь меньше площади данного круга?

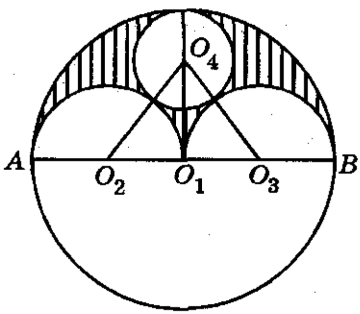


Рис. 10.129

Решение.

Пусть O_2 — середина AO_1 — центр одного полукруга, O_3 — середина BO_1 — центр второго полукруга, O_4 — центр круга, вписанного в криволинейную фигуру, о которой говорится в условии задачи (рис. 10.129).

Пусть R — радиус круга с центром O_1, а S_1 — его площадь, r — радиус круга с центром O_4, а S_2 — его площадь. Имеем: $O_1O_2 = O_1O_3 = \frac{R}{2}$, $O_2O_4 = O_3O_4 = \frac{R}{2} + r$, $O_1O_4 = R - r$. В треугольнике $O_2O_4O_3$: $O_2O_4 = O_3O_4$, точка O_1 — середина O_2O_3. Отсюда следует, что $O_1O_4 \perp O_2O_3$, тогда

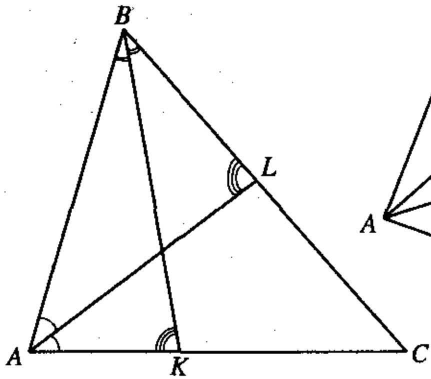


Рис. 10.130

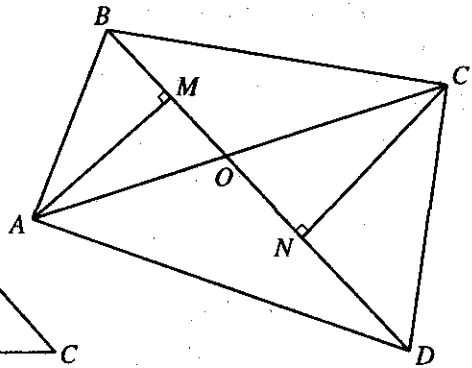


Рис. 10.131

$O_2O_4^2 = O_1O_2^2 + O_1O_4^2$, т.е. $\left(\frac{R}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-r)^2$. $R^2 = 3Rr$, $R = 3r$.

Следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2}{r^2} = 9$.

Ответ: в 9 раз.

10.347. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC. Найти зависимость между углами A и B.

Решение.

Рассмотрим два случая (рис. 10.130):

1) $\angle AKB = \angle ALB$; 2) $\angle AKB = \angle ALC$.

1) $\angle AKB + \angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle ALB + \angle B + \frac{1}{2}\angle A$ (суммы углов треугольника), т.е. $\angle A = \angle B$.

2) Так как $\angle ALC$ — внешний угол ΔABL, то $\angle ALC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$. Далее, $\angle AKB + \angle A + \frac{1}{2}\angle B = \pi$. Но $\angle AKB = \angle ALC$ и, значит, $\angle B + \frac{1}{2}\angle A = \pi - \angle A - \frac{1}{2}\angle B$, откуда $\angle A + \angle B = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\angle A = \angle B$ или $\angle A + \angle B = \frac{2\pi}{3}$.

10.348. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30 см^2, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найти площадь данного четырехугольника.

Решение.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 10.131), $S_{\Delta AOB}=10$ см^2, $S_{\Delta AOD}=20$ см^2, $S_{\Delta BOC}=30$ см^2.

Опустим на BD перпендикуляры AM и CN. Имеем

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOD}}=\frac{\frac{1}{2}BO\cdot AM}{\frac{1}{2}DO\cdot AM}=\frac{BO}{DO}=\frac{1}{2},\ \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta COD}}=\frac{\frac{1}{2}BO\cdot CN}{\frac{1}{2}DO\cdot CN}=\frac{BO}{DO}.$$ Тогда

$S_{\Delta COD}=2S_{\Delta BOC}=60$ см^2, $S_{ABCD}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOD}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}=$ $=120$ см^2.

Ответ: 120 см^2.

10.349. Окружность радиуса R разделена на 4 большие и 4 малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в два раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления окружности.

Решение.

Пусть малая дуга содержит x радианов. Тогда $4x+8x=2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$. Таким образом, восьмиугольник содержит четыре треугольника с центральным углом $\frac{\pi}{3}$ (их суммарная площадь $4\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$) и четыре треугольника с центральным углом $\frac{\pi}{6}$ (их суммарная площадь $4\cdot\frac{R^2}{4}$). Искомая площадь составляет $S=R^2(\sqrt{3}+1)$.

Ответ: $S=R^2(\sqrt{3}+1)$.

10.350. На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, взята точка E так, что $DE=\frac{1}{4}BD$. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найти площадь треугольника AFC.

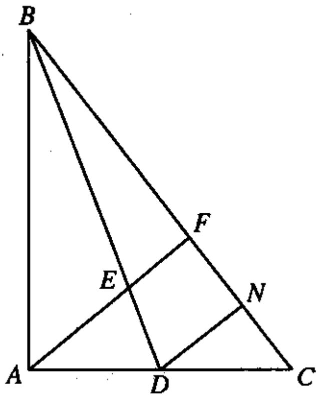


Рис. 10.132

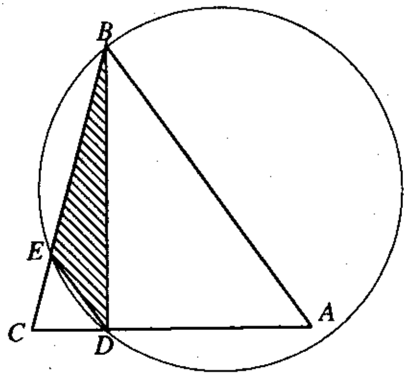


Рис. 10.133

Решение.

Проведём $DN \parallel AF$ (рис. 10.132). Тогда $\frac{BF}{FN} = \frac{BE}{ED} = 3$, и т.к. D — середина AC, то N — середина FC. Следовательно, $BC = BF + FC = 3FN + 2FN = 5FN = \frac{5}{2}FC$. Так как ΔABC и ΔAFC имеют общую высоту, опущенную из вершины A, то $\frac{S_{\Delta AFC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{FC}{BC} = \frac{2}{5}$. Следовательно, $S_{\Delta AFC} = \frac{2S}{5}$.

Ответ: $\frac{2S}{5}$.

10.351. Пусть BD — высота треугольника ABC, точка E — середина BC. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если $AB = 30$ см, $BC = 26$ см и $AC = 28$ см.

Решение.

Найдем площадь данного треугольника по формуле Герона:

$S_{\Delta ABC} = 336$ см². Тогда $BD = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = 24$ см (рис. 10.133). DE — медиана прямоугольного ΔBDC, проведенная к гипотенузе BC. Тогда $DE = \frac{1}{2}BC = 13$ см, $\cos\angle CBD = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}$. Тогда $\sin\angle CBD = \sqrt{1-\cos^2\angle CBD} = \frac{5}{13}$.

Радиус окружности, описанной около ΔBED, $R = \dfrac{DE}{2\sin\angle CBD} = 16{,}9$ см.

Ответ: 16,9 см.

10.352. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади прямоугольного треугольника с указанной гипотенузой. Найти отношение катетов.

Решение.

Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника с площадью $S = \frac{1}{2}ab$. Тогда площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе c, по условию равна $2S = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Используя теорему Пифагора, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Если $x = \frac{a}{b}\ (a > b)$, то имеем $x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}}$. Так как $x > 1$, то $x = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

10.353. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1:3, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

Решение.

Пусть O — точка пересечения медиан AN, BK, CM треугольника ABC (рис. 10.134),

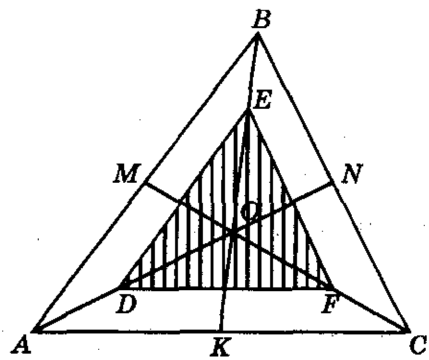


Рис. 10.134

$\frac{AD}{DN} = \frac{BE}{EK} = \frac{CF}{FM} = \frac{1}{3}$. Пусть $AD = x$. Тогда $DN = 3x$, $AN = 4x$,

$AO = \frac{2}{3}AN = \frac{8}{3}x$, $OD = AO - OD = \frac{5}{3}x$, $\frac{OD}{OA} = \frac{5}{8}$. Следовательно, медианы ΔDEF равны 5/8 медиан ΔABC, $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ и

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = \left(\frac{OA}{OD}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2{,}56$.

Ответ: в 2,56 раза.

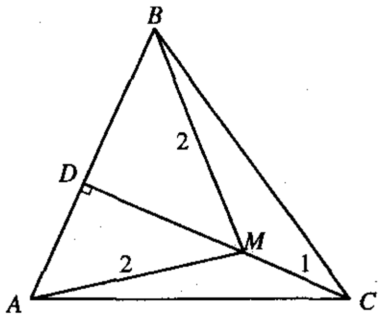


Рис. 10.135

10.354. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $AM = BM = 2$см, а $CM = 1$ см.

Решение.

Обозначим сторону треугольника через a и проведем $MD \perp AB$ (рис. 10.135). Поскольку $AM = BM$, точки C, M, D лежат на высоте CD. В ΔACD и ΔAMD имеем $(1+MD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$, $MD^2 = 4 - \frac{a^2}{4}$. Тогда $a^2 = 4(4 - MD^2)$ и получаем квадратное уравнение $(1+MD)^2 = 3(4-MD^2)$ или $4MD^2 + 2MD - 11 = 0$, откуда $MD = \frac{3\sqrt{5}-1}{4}$ (второй корень не подходит). Далее находим $a^2 = 4(4-MD^2) = 16 - \frac{46-6\sqrt{5}}{4} = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}$ и, следовательно,

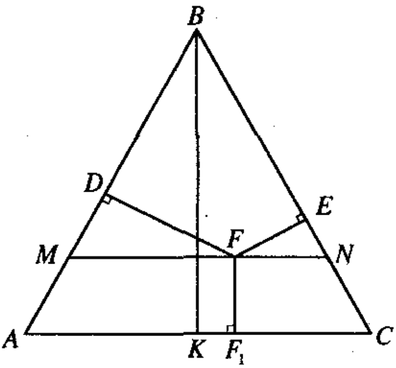


Рис. 10.136.1

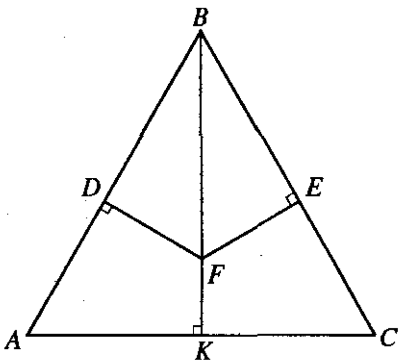


Рис. 10.136.2

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(9+3\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{8}\approx 3{,}4\ \text{см}^2.$$

Ответ: $\left(9\sqrt{3}+3\sqrt{15}\right)/8\approx 3{,}4$ см².

10.355. Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 5 и 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки к его сторонам.

Найти расстояние от этой точки до каждой стороны данного треугольника.

Решение.

Пусть BK — высота ΔABC, $AB=BC$ (рис. 10.136.1). Точки D, E, F_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки F на стороны треугольника и разбивающих его на три равновеликие части. Докажем, используя метод доказательства от противного, что точка F принадлежит BK, а точка F_1 совпадает с точкой K. Пусть $AF_1>F_1C$. Через точку F параллельно AC проведем отрезок MN. Тогда $MF>FN$. $S_{AF_1FD}=S_{AMFF_1}+S_{\Delta MDF}$, $S_{CF_1FE}=S_{CNFF_1}+S_{\Delta NEF}$. Т.к. $MF>FN$, $AF_1>F_1C$, FF_1 — общая высота трапеций $AMFF_1$ и $CNFF_1$, то $S_{AMFF_1}>S_{CNFF_1}$. Т.к. $\Delta MDF\sim\Delta NEF$ ($\angle MDF=\angle NEF=90°$, $\angle DMF=\angle ENF=\angle A$) и $MF>FN$, то $S_{\Delta MDF}>S_{\Delta NEF}$. Следовательно, $S_{AF_1FD}>S_{CF_1FE}$, что противоречит условию. Итак, точка F принадлежит BK (рис. 10.136.2). Из

ΔAKB ($\angle AKB = 90°$): $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 3$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = 12$.

$S_{FDBE} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 4$. $S_{\Delta FDB} = \frac{1}{2} S_{FDBE} = 2$. Пусть $FD = x$, $DB = y$.

$FD \cdot DB = 2S_{\Delta FDB} = 4$, $xy = 4$.

Из $\angle ABK$: $\frac{FD}{DB} = \frac{AK}{BK} = \frac{4}{3}$, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Получаем систему уравнений

$\begin{cases} xy = 4, \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3}. \end{cases}$ Тогда $x = \frac{4}{3} y$, $\frac{4}{3} y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}$, $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Из ΔBDF ($\angle BDF = 90°$): $BF = \sqrt{FD^2 + DB^2} = \sqrt{\frac{16}{3} + 3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

$FK = BK - BF = 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}$.

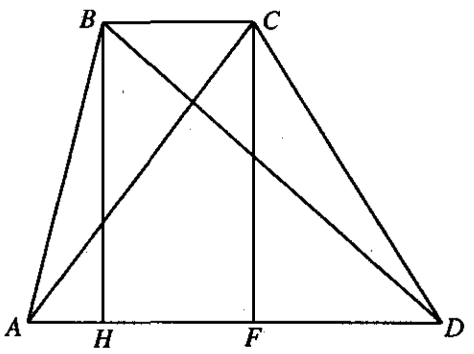


Рис. 10.137

10.356. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение.

Пусть x — сторона прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R. Тогда его площадь равна $x\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь вписанного квадрата равна $2R^2$. Покажем, что $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2-x^2}$. В самом деле, из очевидного неравенства $\left(2R^2-x^2\right)^2 \geq 0$ получаем $4R^4 \geq x^2\left(4R^2-x^2\right)$, откуда и следует, что $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2-x^2}$ (знак неравенства сохранится, поскольку $2R^2>0$ и $x\sqrt{4R^2-x^2}>0$), что и требовалось доказать.

10.357. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD=24$ см и $BC=8$ см и диагоналей $AC=13$ см, $BD=5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.

Решение.

Проведем $BH \perp AD$ и $CF \perp AD$ (рис. 10.137). Пусть $AH=x$; тогда $AF=8+x$, $DH=24-x$. Учитывая, что $BH=CF$, в ΔAFC и ΔBHD имеем $AC^2-AF^2=BD^2-DH^2$. $\Rightarrow 64x=256$, $x=4$ см.

Тогда $CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$ см.

Отсюда $S=\frac{1}{2}(24+8)\cdot 5=80$ см^2.

Ответ: 80 см^2.

10.358. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD=a$, $BC=b$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от площади трапеции 1/4 ее часть. Найти длину отрезка CM.

Решение.

Проведем через точку E пересечения AM и CD высоту KN данной трапеции $ABCD$ (рис. 10.138). Пусть $KN=h$, $KE=y$, $CM=x$. Тогда $EN=h-y$. Рассмотрим случай, когда $S_{\Delta AED}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Тогда $\frac{1}{2}AD\cdot EN=\frac{1}{4}\cdot\frac{AD+BC}{2}\cdot KN$. $a(h-y)=\frac{1}{4}(a+b)h$, $4ah-4ay=ah+bh$,

$4ay = 3ah - bh$, $y = \frac{h(3a-b)}{4a}$. Если $S_{ABCE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$, то $S_{\Delta AED} = \frac{3}{4} S_{ABCD}$,

и тогда $a(h-y) = \frac{3}{4}(a+b)h$, $4ah - 4ay = 3ah + 3bh$, $y = \frac{h(a-3b)}{4a}$.

$\Delta AED \sim \Delta MEC$. Тогда $\frac{MC}{AD} = \frac{KE}{EN}$; $\frac{x}{a} = \frac{y}{h-y}$.

В первом случае, при $y = \frac{h(3a-b)}{4a}$,

$$x = \frac{a \cdot \frac{h(3a-b)}{4a}}{h - \frac{h(3a-b)}{4a}} = \frac{3a-b}{4\left(1 - \frac{3a-b}{4a}\right)} = \frac{a(3a-b)}{a+b}.$$

Во втором случае, при $y = \frac{h(a-3b)}{4a}$,

$$x = \frac{a \cdot \frac{h(a-3b)}{4a}}{h - \frac{h(a-3b)}{4a}} = \frac{a-3b}{4\left(1 - \frac{a-3b}{4a}\right)} = \frac{a(a-3b)}{3(a+b)}.$$

Ответ: $\frac{a(3a-b)}{a+b}$ или $\frac{a(a-3b)}{3(a+b)}$.

10.359. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $AD = 12$ см, $BC = 8$ см на луче BC взята такая точка M, что AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти CM.

Решение.

Проведем через точку E пересечения AM и CD высоту KN данной трапеции $ABCD$ (рис. 10.138). Пусть $KN = h$, $KE = y$, $CM = x$. Тогда $EN = h - y$.

Т.к. $S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то $\frac{1}{2} AD \cdot EN = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot KN$,

$12(h-y) = 10h$, $y = \frac{h}{6}$. $\Delta AED \sim \Delta MEC$.

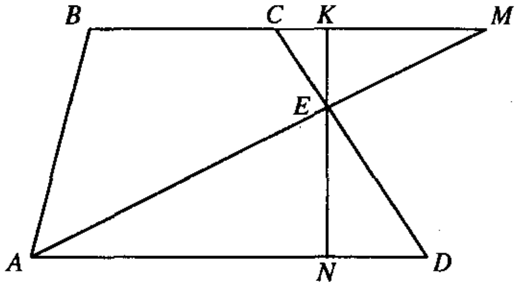


Рис. 10.138

Тогда $\dfrac{MC}{AD}=\dfrac{KE}{EN}$; $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{h-y}$; $x=\dfrac{12y}{h-y}=\dfrac{12\cdot\dfrac{h}{6}}{h-\dfrac{1}{6}h}=\dfrac{2h}{\dfrac{5}{6}h}=2{,}4$.

Ответ: 2,4 см.

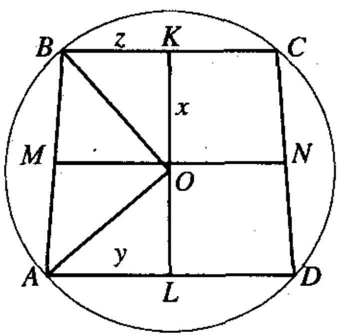


Рис. 10.139

10.360. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, делит ее высоту в отношении 3:4. Найти основания трапеции, если радиус окружности равен 10 и ее средняя линия равна высоте.

Решение.

Пусть $OK=x$, $AL=y$, $BK=z$ (рис. 10.139).

Тогда $MN=z+y=x+\dfrac{3}{4}x=\dfrac{7x}{4}$. В ΔOKB и ΔOLA имеем $OB^2=OK^2+BK^2$, $OA^2=OL^2+AL^2$. Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \dfrac{9x^2}{16}+y^2=100, \\ \dfrac{7x}{4}-z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \dfrac{9x^2}{16}+\left(\dfrac{7x}{4}-z\right)^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \dfrac{27x^2}{8}-\dfrac{7xz}{2}+z^2=100. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем $\dfrac{21x^2}{8}-\dfrac{7xz}{2}=0$, откуда

(так как $x \neq 0$) $x=\dfrac{4z}{3}$. Значит, $z^2+\dfrac{16z^2}{9}=100$ и $z=6$. Отсюда находим

$x=8$, $y=8$. Итак, $AD=2y=16$, $BC=2z=12$.

Ответ: 12 и 16.

Решения к главе 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольная призма (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{\text{сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l\,; \tag{11.1}$$

$$V = SH\,; \tag{11.2}$$

$$V = S_{\text{сеч}} l\,. \tag{11.3}$$

2. Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = Pl\,. \tag{11.4}$$

3. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{\text{бок}} = PH\,; \tag{11.5}$$

$$V = abc\,; \tag{11.6}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2\,. \tag{11.7}$$

4. Куб (a — ребро):

$$V = a^3\,; \tag{11.8}$$

$$d = a\sqrt{3}\,. \tag{11.9}$$

5. Произвольная пирамида (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}SH\,. \tag{11.10}$$

6. Правильная пирамида (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2} Pl ; \qquad (11.11)$$

$$V = \frac{1}{3} SH . \qquad (11.12)$$

7. Произвольная усеченная пирамида (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right). \qquad (11.13)$$

8. Правильная усеченная пирамида (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l . \qquad (11.14)$$

9. Цилиндр (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = 2\pi RH ; \qquad (11.15)$$

$$V = \pi R^2 H . \qquad (11.16)$$

10. Конус (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = \pi Rl ; \qquad (11.17)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H . \qquad (11.18)$$

11. Шар, сфера (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S = 4\pi R^2 ; \qquad (11.19)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 . \qquad (11.20)$$

12. Шаровой сегмент (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S = 2\pi Rh\,; \qquad (11.21)$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \qquad (11.22)$$

13. Шаровой сектор (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h\,. \qquad (11.23)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих условий: а) все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

3. Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 (рис. 11.1), то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.

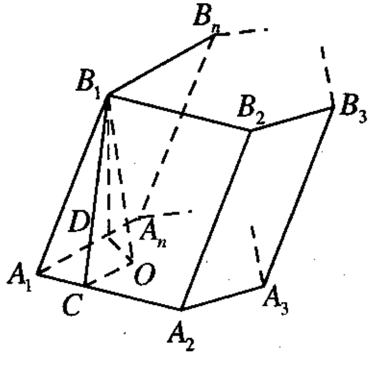


Рис. 11.1

Это же утверждение можно сфор-

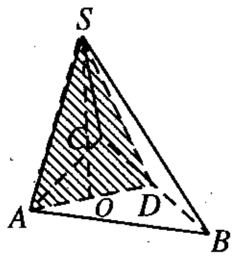


Рис. 11.2

мулировать так: если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

4. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.

5. Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то площадь $SAO \perp BC$ (рис. 11.2).

Доказательство указанных дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

11.106. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Вычислить объем пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше чем, площадь основания.

Решение.

SO — высота правильной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 11.3), $AB = BC = FA = a$. Тогда $CO = OD = CD = a$, и $S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta COD} = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = S_1$. SM — апофема боковой грани CSD. Тогда $OM \perp CD$, $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\angle SMO$ — угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

Пусть $\angle SMO = \varphi$, $0° < \varphi < 90°$, S_2 — площадь боковой поверхности пирамиды. Тогда $\dfrac{S_1}{S_2} = \cos\varphi$. Так как по условию $S_2 = 10S_1$, то $\dfrac{1}{\cos\varphi} = 10$ и $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{\cos\varphi} - 1} = \sqrt{100-1} = 3\sqrt{11}$.

Из $\Delta SOM(\angle SOM = 90°)$: $SO = OM\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{11} = \dfrac{3a\sqrt{33}}{2}$.

Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_1 \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3a\sqrt{33}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{11}}{4}$.

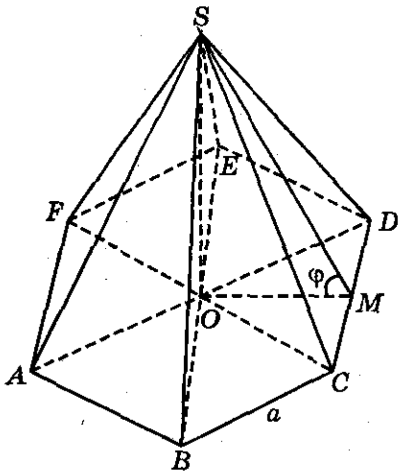


Рис. 11.3

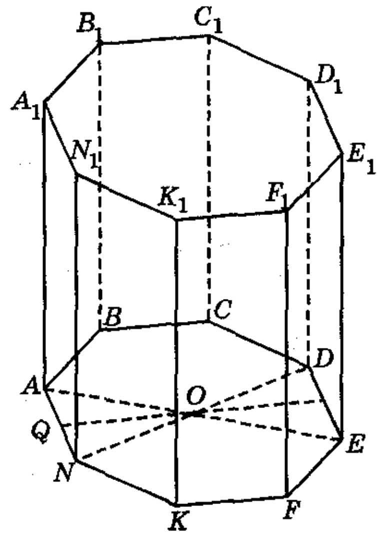


Рис. 11.4

Ответ: $\dfrac{9a^3\sqrt{11}}{4}$.

11.107. Объем правильной восьмиугольной призмы равен 8 м^3, а ее высота равна 2,2 м. Найти боковую поверхность призмы.

Решение.

Пусть O — центр правильного восьмиугольника $ABCDEFKN$, являющегося основанием данной правильной призмы (рис. 11.4). Объем призмы $V = 8\text{м}^3$, высота $H = 2{,}2$ м, тогда площадь основания призмы $S_{\text{осн}} = \dfrac{8}{2{,}2} = \dfrac{40}{11}(\text{м}^2)$. Пусть $AN = a$, OQ — высота ΔAON.

Тогда $AQ = \dfrac{a}{2}$; $\angle AON = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, $\angle AOQ = \dfrac{1}{2}\angle AON = 22{,}5^\circ$. Из

$$\Delta AQO\,(\angle AQO = 90^\circ): OQ = AQ\operatorname{ctg}22{,}5^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{1+\cos45^\circ}{\sin45^\circ} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2};$$

$$S_{\text{осн}} = 8S_{AON} = 8\cdot\frac{1}{2}AN\cdot OQ = 4a^2\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2} = 2a^2(\sqrt{2}+1).$$

Тогда $2a^2(\sqrt{2}+1) = \dfrac{40}{11}; a^2 = \dfrac{20}{11(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{20(\sqrt{2}-1)}{11};$

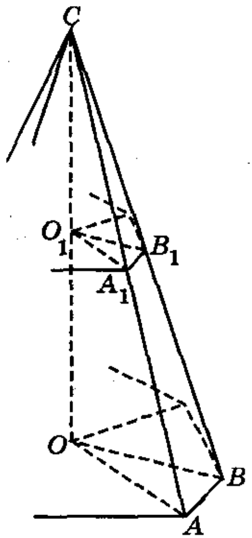


Рис. 11.5

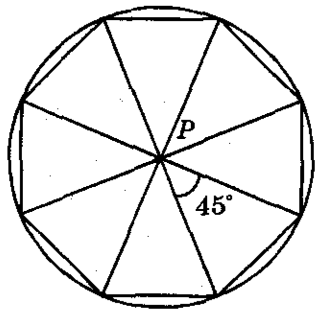


Рис. 11.6

$a=\sqrt{\frac{20(\sqrt{2}-1)}{11}}=\frac{2}{11}\sqrt{55(\sqrt{2}-1)}$ (м). Боковая поверхность призмы

$S=8aH=8\cdot\frac{2}{11}\sqrt{55(\sqrt{2}-1)}\cdot 2{,}2=16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ (м^2).

Ответ: $16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ (м^2).

11.108. Основаниями усеченной пирамиды служат два правильных восьмиугольника. Сторона нижнего основания пирамиды равна 0,4 м, а верхнего 0,3 м; высота усеченной пирамиды равна 0,5 м. Усеченная пирамида достроена до полной. Определить объем полной пирамиды.

Решение.

Пусть AB — сторона нижнего, A_1B_1 — соответствующая сторона верхнего основания данной усеченной восьмиугольной пирамиды, CO — высота полной пирамиды, O_1 — точка пересечения CO и плоскости верхнего основания (рис. 11.5). Тогда OO_1 — высота усеченной пирамиды, $OO_1=0{,}5$м, $\Delta A_1O_1B_1\sim\Delta AOB$.

Тогда $\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4}$. $\Delta CO_1A_1\sim\Delta COA$..

Тогда $\frac{CO_1}{CO} = \frac{O_1A}{OA} = \frac{3}{4}$. Пусть $CO = h$. Тогда $CO_1 = h - 0{,}5$; $\frac{h-0{,}5}{h} = \frac{3}{4}$; $h = 2$ м. P — центр правильного восьмиугольника, являющегося основанием пирамиды (рис. 11.6). Пусть $PA = PB = x$, $\angle APB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Из ΔAPB: $AB^2 = PA^2 + PB - 2PA \cdot PB \cos\angle APB$;

$2x^2 - 2x^2\cos 45^\circ = 0{,}4^2$; $2x^2(1-\cos 45^\circ) = 0{,}16$; $x^2(2-\sqrt{2}) = 0{,}16$;

$x^2 = \frac{0{,}16}{2-\sqrt{2}} = \frac{0{,}16(2+\sqrt{2})}{2} = 0{,}08(2+\sqrt{2})$. $S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}AP^2 \sin\angle APB =$

$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}08(2+\sqrt{2})\sin 45^\circ = 0{,}02\sqrt{2}(2+\sqrt{2}) = 0{,}04(\sqrt{2}+1) = \frac{\sqrt{2}+1}{25}$ (м²).

Площадь восьмиугольника $S = 8S_{\Delta APB} = \frac{8}{25}(\sqrt{2}+1)$ м². Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{16}{75}(\sqrt{2}+1)$ м³.

Ответ: $\frac{16}{75}(\sqrt{2}+1)$ м³.

11.109. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и плоскими углами при вершине, равными углам наклона боковых ребер к основанию.

Решение.

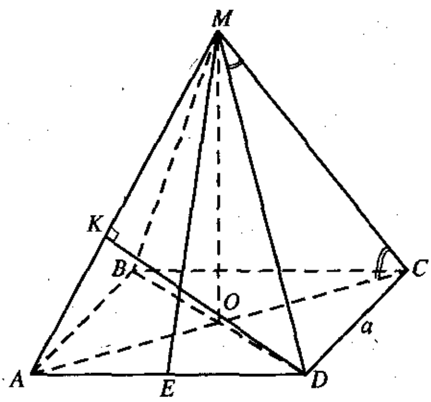


Рис. 11.7

Проведем высоту правильной пирамиды $MABCD - MO$ и высоту боковой грани AMD (рис. 11.7). Пусть $AD = a$. Так как $\angle MCO = \angle AMD$, то прямоугольные треугольники MOC и MKD равны (по гипотенузе и острому углу) и, следовательно, $MO = DK$. Пусть $DK = x$, ME – высота и медиана ΔAMD. Из $\Delta MOA(\angle MOA = 90^\circ)$: $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}$.

Из $\Delta AEM(\angle AEM = 90°)$: $ME = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}$.

$S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot ME = \frac{1}{2} AM \cdot DK$. Тогда $a\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot x$;

$\frac{a^2(a^2 + 4x^2)}{4} = \frac{x^2(a^2 + 2x^2)}{2}$; $4x^4 - 2a^2x^2 - a^4 = 0$; $x = \frac{a\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO = \frac{a^3(\sqrt{\sqrt{5}+1})}{6}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}$.

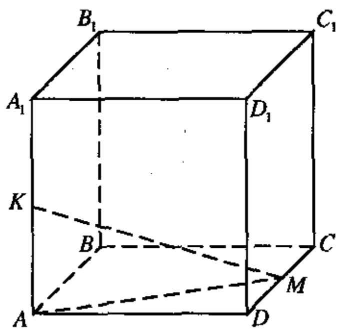


Рис. 11.8

11.110. Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см².

Решение.

Полная поверхность куба $S_{\text{полн}} = 36$ см², поэтому площадь одной грани $S = 6$ см², а ребро куба $AD = a = \sqrt{6}$ см (рис. 11.8).

Далее $KM = \sqrt{AK^2 + AM^2}$, где

$AK = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (см), $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ (см).

Окончательно имеем $KM = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{30}{4}} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

11.111. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

Решение.

EO — высота правильной пирамиды $EABCD$, $\angle BKD$ — линейный угол двугранного при боковом ребре EC (рис. 11.9), $\angle BKD = 120°$. Тогда $OK \perp EC$, $S_{\Delta AEC} = 2S_{\Delta EOC} = EC \cdot OK$, $DK \perp EC$, $S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} EC \cdot DK$.

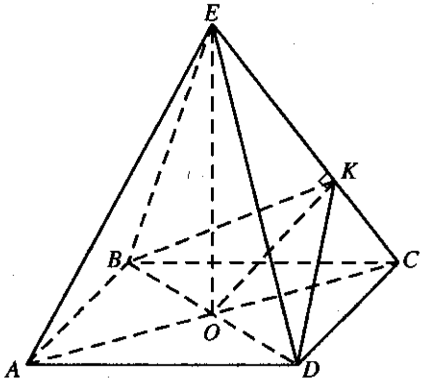


Рис. 11.9

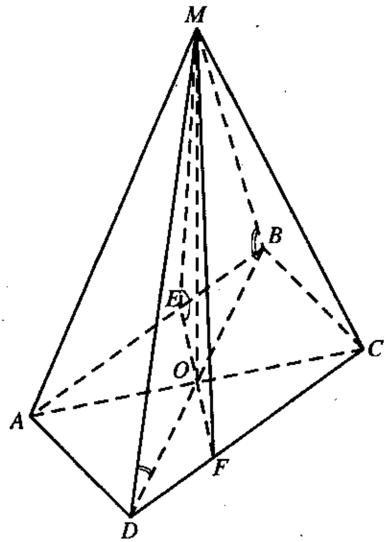


Рис. 11.10

Из $\Delta DOK(\angle DOK = 90°)$: $OK = DK\cos\angle DKO = DK\cos 60° = \frac{1}{2}DK$.

Отсюда боковая поверхность пирамиды $S_б = 4 \cdot S_{\Delta DEC} = 2EC \cdot DK$. Следовательно, $\frac{S_б}{S_{\Delta AEC}} = \frac{2EC \cdot DK}{EC \cdot \frac{1}{2}DK} = 4$. $S_б = 4 \cdot S_{\Delta AEC} = 4S$.

Ответ: $4S$

11.112. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°, а при ребрах AB и CD равны 60°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

Решение.

Пусть MO — высота пирамиды $MABCD$ (рис. 11.10). Через точку O в плоскости основания проведем прямую EF (E принадлежит AB, F принадлежит CD), перпендикулярную параллельным прямым AB и CD. OF и OE — соответственно проекции MF и ME на плоскость основания. Тогда $MF \perp CD$, $ME \perp AB$, $\angle MFO$ и $\angle MEO$ — линейные углы двугранных углов при ребрах CD и AB соответственно,

$\angle MFO = \angle MEO = 60°$. Значит, $\Delta MOF = \Delta MOE$ по катету и острому углу и, следовательно, $OF = OE$, т.е. точка O равноудалена от сторон AB и CD параллелограмма.

Следовательно, O принадлежит прямой, параллельной AB и CD и проходящей через середины двух других сторон параллелограмма. Аналогично, так как двугранные углы при ребрах AD и BC также равны, точка O равноудалена от сторон AD и BC параллелограмма и принадлежит прямой, параллельной AD и BC и проходящей через середины двух других сторон параллелограмма. Значит, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

Так как $OD \perp AD$ и $OB \perp BC$, то $MD \perp AD$, $MB \perp BC$ и $\angle MDO$ и $\angle MBO$ — линейные углы двугранных углов при ребрах AD и BC соответственно, $\angle MDO = \angle MBO = 45°$. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta DOC} = S_{\Delta BOC} = \frac{m^2}{4}$. Так как ΔAOB и ΔDOC — проекции ΔAMB и ΔDMC на плоскость основания, ΔAOD и ΔBOC — проекции ΔAMD и ΔBMC на плоскость основания, то $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta DMC} = \frac{m^2}{2}$, $S_{\Delta AMD} = S_{\Delta BMC} = \frac{m^2}{2\sqrt{2}}$. Боковая поверхность пирамиды:

$$S = 2(S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMD}) = 2(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2\sqrt{2}}) = \frac{m^2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} = = \frac{m^2(\sqrt{2}+2)}{2}.$$

Пусть $MO = H$. Из $\Delta MOE(\angle MOE = 90°)$: $OE = H\operatorname{ctg}60° = \frac{H}{\sqrt{3}}$.

Из $\Delta MOB\left(\angle MOB = 90°\right)$: $OB = H\operatorname{ctg}45° = H$.

Из $\Delta OEB(\angle OEB = 90°)$: $EB^2 = OB^2 - OE^2 = H^2 - \frac{H^2}{3} = \frac{2H^2}{3}$.

$BD = 2 \cdot OB = 2H$. $\Delta BEO \sim \Delta BDA$ — по двум углам.

Тогда $\frac{S_{\Delta BEO}}{S_{\Delta BDA}} = \frac{EB^2}{BD^2} = \frac{\frac{2H^2}{3}}{4H^2} = \frac{1}{6}$; $S_{\Delta BEO} = \frac{1}{6}S_{\Delta BDA} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}m^2 = \frac{m^2}{12}$.

Но $S_{\Delta BEO} = \frac{1}{2}OE \cdot EB = \frac{1}{2}\cdot\frac{H}{\sqrt{3}}\cdot H\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{H^2\sqrt{2}}{6}$. Тогда $\frac{H^2\sqrt{2}}{6} = \frac{m^2}{12}$;

$H^2 = \frac{m^2\sqrt{2}}{4}$; $H^2 = \frac{m\sqrt[4]{2}}{2}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}m^2 \cdot H = \frac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$.

Ответ: $\frac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$, $\frac{m^2(\sqrt{2}+2)}{2}$.

11.113. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть CO_1 — высота наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.11), $C_1O = 12$ дм, тогда CO — проекция CC_1 на плоскость основания, $CO = 5$ дм, ромб $MNKL$ – перпендикулярное сечение параллелепипеда.

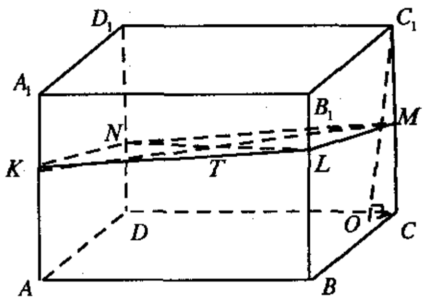


Рис. 11.11

Из $\Delta C_1OC(\angle C_1OC = 90°) : CC_1 = \sqrt{C_1O^2 + CO^2} = 13$ дм.

Отсюда: объем параллелепипеда $V = S_{MNKL} \cdot CC_1 = 312$ дм. Пусть $KM = 8$ дм. Тогда $NL = \frac{2S_{MNKL}}{KM} = 6$ дм. Пусть T — точка пересечений диагоналей ромба $MNKL$. Тогда $KL = \sqrt{KT^2 + TL^2} = 5$ дм, а периметр перпендикулярного сечения $P_{MNKL} = 20$ дм. Боковая поверхность $S = P_{MNKL} \cdot CC_1 = 260$ дм^2.

Ответ: 260 дм^2; 312 дм^3.

11.114. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания — 27, 29 и 25 м, а периметр другого основания равен 72 м (рис. 11.12). Определить объем усеченной пирамиды.

Решение.

Пусть S_1 и S_2 — площади оснований данной усеченной пирамиды, P_1 и P_2 — соответственно периметры оснований, по условию $P_2 = 72$ м. Тогда $P_1 = 27 + 29 + 52 = 108$ (м), отсюда по формуле Герона $S_1 = 270$ м^2.

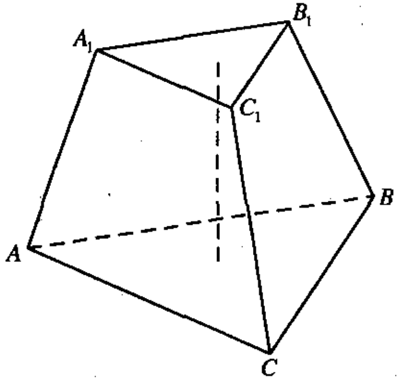


Рис. 11.12

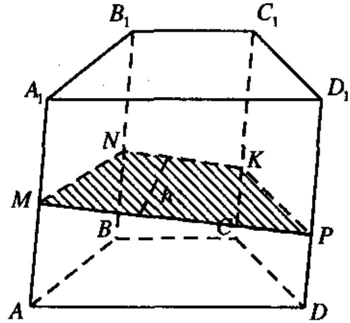


Рис. 11.13

Так как основания усеченной пирамиды подобны, то $\frac{S_2}{S_1}=\frac{P_2^{\,2}}{P_1^{\,2}}$; $S_2 = S_1\cdot\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 120\text{ м}^2$.

Объем усеченной пирамиды $V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=1900\text{ м}^3$.

Ответ: 1900 м^3.

11.115. В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.

Решение.

Трапеция $MNKP(NK \parallel MP)$ – перпендикулярное сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.13). Тогда высота трапеции равна h. Пусть S_1 — площадь грани AA_1D_1D, S_2 — площадь грани BB_1C_1C, l — длина бокового ребра призмы, $MP=a$, $NK=b$. Тогда $S_1=al, S_2=bl$, откуда $a=\frac{S_1}{l}, b=\frac{S_2}{l}$.

Площадь $MNKP$ $S=\frac{a+b}{2}h=\frac{(S_1+S_2)h}{2l}$.

Объем призмы $V=Sl=\frac{(S_1+S_2)h}{2}$.

Ответ: $\frac{(S_1+S_2)h}{2}$.

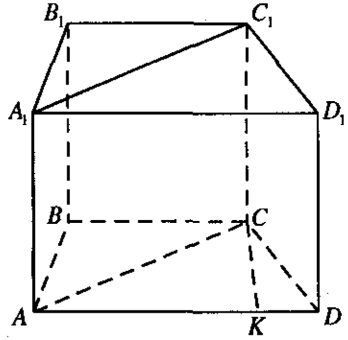


Рис. 11.14

11.116. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, площади боковых граней равны 9, 10 и 17 см^2. Определить объем призмы.

Решение.

Пусть a,b,c — стороны основания призмы, H — ее высота.

Тогда $a=\dfrac{9}{H}, b=\dfrac{10}{H}, c=\dfrac{17}{H}$, полупериметр основания $p=\dfrac{18}{H}$. По формуле Герона площадь основания призмы $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$=\sqrt{\dfrac{18}{H}\cdot\dfrac{9}{H}\cdot\dfrac{8}{H}\cdot\dfrac{1}{H}}=\dfrac{36}{H^2}$. Так как $S=4$ см^2, то $\dfrac{36}{H^2}=4$, $H=3$ см. Объем призмы $V=SH=12$ см^3.

Ответ: 12 см^3.

11.117. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$; $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см, $AD=21$ см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислить полную поверхность призмы.

Решение.

CK — высота основания прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.14).

По условию $AB=CD$, тогда $KD=\dfrac{AD-BC}{2}=5$ см, $AK=\dfrac{AD+BC}{2}=16$ см.

Из $\Delta CKD(\angle CKD=90^\circ): CK=\sqrt{CD^2-KD^2}=12$ см.

Из $\Delta AKC(AKC=90^\circ): AC=\sqrt{AK^2+CK^2}=20$ см. Диагональные сечения призмы AA_1C_1C — прямоугольник с площадью $S_1=180$ см^2, поэтому высота призмы $H = CC_1 = \dfrac{S_1}{AC} = 9$ см. Периметр основания призмы $P = 58$ см, площадь основания $S_{\text{осн}} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot CK = 192$ см^2, боковая поверхность $S_б = PH = 522$ см^2. Полная поверхность призмы $S = S_б + 2\,S_{\text{осн}} = 906$ см^2.

Ответ: 906 см^2.

11.118. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом $30°$. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найти полную поверхность и объем параллелепипеда.

Решение.

В ромбе $ABCD$, являющемся основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.15), $CD = a$, $\angle BCD = 30°$. Тогда его площадь $S_1 = a^2 \sin 30° = \dfrac{a^2}{2}$. Диагональ C_1B боковой грани BB_1C_1C, перпендикулярная плоскости основания, является высотой параллелепипеда, BC — проекция бокового ребра CC_1 на плоскость основания, $\angle BCC_1 = 60°$.

Из $\Delta C_1BC(\angle C_1BC = 90°): BC_1 = BC \operatorname{tg} \angle BCC_1 = a\sqrt{3}$;

$CC_1 = \dfrac{BC}{\cos \angle BCC_1} = 2a$. Объем параллелепипеда $V = S_1 \cdot BC_1 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, $S_{BB_1C_1C} = a^2\sqrt{3}$. CC_1 — наклонная к плоскости основания, BC — ее проекция на эту плоскость, CD — прямая, лежащая в этой плоскости. Следовательно, $\cos \angle C_1CD = \cos \angle C_1CB \cdot \cos \angle BCD = \cos 60° \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Отсюда:

$\sin \angle C_1CD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C_1CD} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$; $S_{CC_1D_1D} = CC_1 \cdot CD \sin \angle C_1CD = \dfrac{a^2\sqrt{13}}{2}$.

Полная поверхность параллелепипеда:

$$S = 2\,(S_1 + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1D_1D}) = 2\left(\frac{a^2}{2} + a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{13}}{2}\right) = a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13}).$$

Ответ: $a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13})$; $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

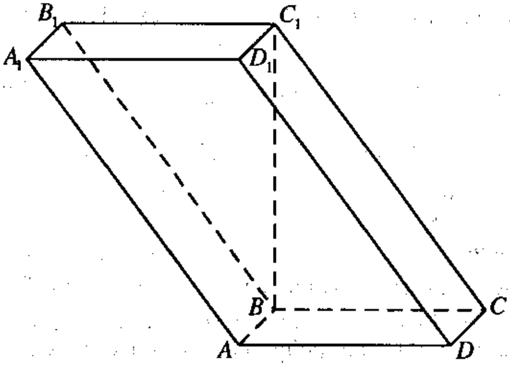


Рис. 11.15

11.119. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

Решение.

Пусть MO — высота правильной пирамиды $MABC$ (рис. 11.16). P — середина BC. Тогда плоскость MPA перпендикулярна плоскости BMC и перпендикуляр AK, опущенный на плоскость BMC, лежит в плоскости MPA, а точка K принадлежит MP. Пусть $MO = h$.

Тогда $MP = \sqrt{PO^2 + MO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + h^2}$.

$S_{\Delta MPA} = \frac{1}{2} AP \cdot MO = \frac{1}{2} AK \cdot MP$.

Тогда $AP \cdot MO = AK \cdot MP$;

$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = b\sqrt{\frac{a^2}{12} + h^2}$;

$\frac{3a^2h^2}{4} = \frac{b^2(a^2 + 12h^2)}{12}$;

$9a^2h^2 = a^2b^2 + 12b^2h^2$;

$h = \frac{ab}{\sqrt{3(3a^2 - 4b^2)}}$.

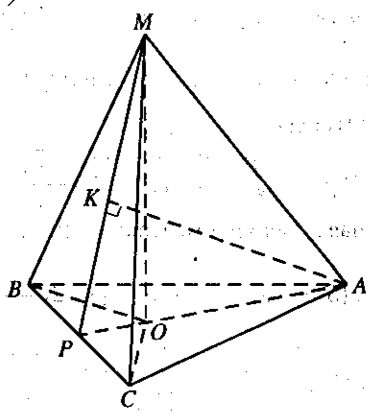


Рис. 11.17

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{ab}{\sqrt{3(3a^2-4b^2)}}=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}.$$

Ответ: $\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.

11.120. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в три раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть DO — высота правильной пирамиды $DABC$, K — середина AB (рис. 11.17). Пусть радиус окружности, вписанной в ΔABC, $OK=r$.

Тогда, по условию, $\pi r^2=r$, отсюда $r=\frac{1}{\pi}$.

$AB=2r\sqrt{3}, S_{\Delta ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}.$ Площадь боковой поверхности $S_б=3S_{\Delta ADB}$. По условию $S_б=3S_{\Delta ABC}$, тогда $S_{\Delta ADB}=S_{\Delta ABC}$;

$\frac{1}{2}AB\cdot DK=3r^2\sqrt{3};\quad r\sqrt{3}\cdot DK=3r^2\sqrt{3};\quad DK=3r.$

Из $\Delta DOK(\angle DOK=90^\circ): DO=\sqrt{DK^2-OK^2}=2r\sqrt{2}$. Объем пирамиды: $V=\frac{1}{3}\cdot 3r^2\sqrt{3}\cdot 2r\sqrt{2}=2r^3\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

11.121. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней (указать какой именно).

Решение.

Пусть DO — высота правильной пирамиды $DABC$, M — середина DB, N — середина DC, ΔMAN — сечение пирамиды, о котором говорится в условии задачи (рис. 11.18). Предположим, что плоскость MAN перпендикулярна плоскости грани ADB. $\Delta ADM=\Delta ADN$ (по трем сторонам). Тогда их высоты, опущенные на стороны AM и AN,

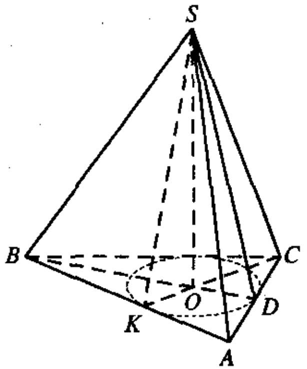


Рис. 11.17

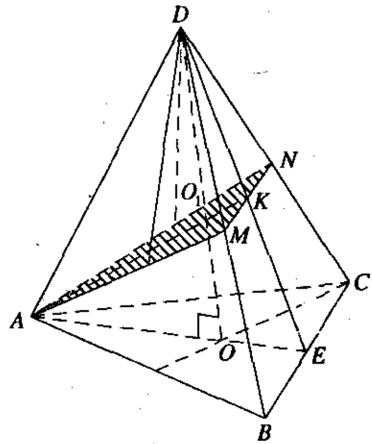


Рис. 11.18

равны. Но высота ΔADM является перпендикуляром к плоскости MAN, а высота ΔADN — наклонной к этой плоскости. Тогда высота ΔADN также является перпендикуляром к плоскости MAN и, следовательно, указанные высоты совпадают с боковым ребром DA данной пирамиды, и $\angle DAB > \angle DAM = 90°$, что невозможно, так как данная пирамида правильная. Аналогично получим противоречие, если предположим, что плоскость AMN перпендикулярна плоскости грани ADC. Следовательно, плоскость MAN перпендикулярна грани BDC. E — середина ВС. Тогда точка K пересечения MN и DE является серединой этих отрезков. Следовательно, медиана AK равнобедренного ΔMAN является его высотой и, так как плоскости MAN и BDC перпендикулярны, то AK — перпендикуляр к плоскости BDC и, значит, $AK \perp DE$. Отсюда AK — медиана и высота ΔDAE.

Тогда $DA = AE$. Пусть $OE = a$. Тогда $OA = 2a, AD = AE = 3a$.

Из $\Delta AOD(\angle AOD = 90°)$: $DO^2 = AD^2 - AO^2 = 5a^2$.

Из $\Delta DOE(\angle DOE = 90°)$: $DE = \sqrt{DO^2 + OE^2} = a\sqrt{6}$. Так как пирамида правильная, то отношение боковой поверхности к площади основания $\frac{S_б}{S_{осн}} = \frac{1}{\cos\angle DEO} = \frac{DE}{OE} = \sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

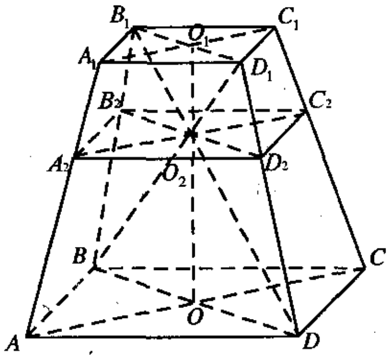


Рис. 11.19

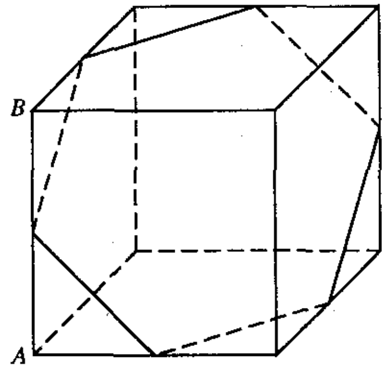


Рис. 11.20

11.122. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям пирамиды проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из полученных частей.

Решение.

O и O_1 — центры соответственно нижнего и верхнего оснований правильной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O_2 — точка пересечения ее диагоналей AC_1 и A_1C (рис. 11.19), $OO_1 = 3$ см, $AD = 2$ см, $A_1D_1 = 1$ см. Квадрат $A_2B_2C_2D_2$ — сечение пирамиды плоскостью, о котором говорится в условии задачи.

Диагональное сечение усеченной пирамиды — равнобокая трапеция AA_1C_1C, $\Delta A_1O_2C_1 \sim \Delta AO_2C$. Тогда $\dfrac{O_1O_2}{O_2O} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Так как $OO_1 = 3$ см, то $O_1O_2 = 1$ см, $OO_2 = 2$ см. $\Delta A_1AC_1 \sim \Delta A_2AO_2$ и $\dfrac{A_2O_2}{A_1C_1} = \dfrac{OO_2}{OO_1} = \dfrac{2}{3}$. Тогда $A_2O_2 = \dfrac{2}{3}A_1C_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ см и $A_2C_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ см, $A_2D_2 = \dfrac{4}{3}$ см. Площади квадратов $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ соответственно $S = 4\text{ см}^2$, $S_1 = 1\text{ см}^2$, $S_2 = \dfrac{16}{9}\text{ см}^2$. Объем усеченной пирамиды с высотой O_1O_2: $V_1 = \dfrac{O_1O_2}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{16}{9} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{37}{27}\text{ см}^3$.

Объем усеченной пирамиды с высотой O_2O:

$$V_2 = \frac{O_2O}{3}\left(S + S_2 + \sqrt{SS_2}\right) = \frac{2}{3}\left(4 + \frac{16}{9} + \frac{8}{3}\right) = \frac{152}{27}\text{ см}^3.$$

Ответ: $\frac{37}{27}$ см^3; $\frac{152}{27}$ см^3.

11.123. Площадь того сечения куба, которое представляет собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную поверхность куба.

Решение.

Пусть сторона шестиугольника равна a; тогда ребро куба $AB = a\sqrt{2}$ (рис. 11.20) и $S_{\text{полн.}} = 6AB^2 = 12a^2$. По условию, $6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = Q$, следовательно, $a^2 = \frac{2Q}{3\sqrt{3}}$. Получим $S_{\text{полн.}} = \frac{8Q\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$.

11.124. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при нем равен 45°. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

Решение.

Основание призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник, его площадь $S = \frac{a^2}{4}$, периметр $P = a\left(\sqrt{2}+1\right)$, боковая поверхность $S_б = PH = aH\left(\sqrt{2}+1\right)$, где H — высота призмы.

Так как $S_б = 2S$, то $aH\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{a^2}{2}$; $H = \frac{a}{2\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$, объем призмы $V = SH = \frac{a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{8}$.

Ответ: $\frac{a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{8}$.

11.125. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность призмы.

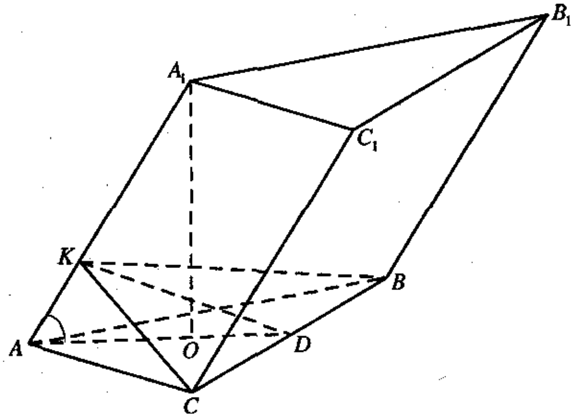


Рис. 11.21

Решение.

Пусть O — центр ΔABC (рис. 11.21), O — проекция A_1 на плоскость ABC, $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$, $\angle A_1AO = 60°$.

Тогда $\cos\angle A_1AB = \cos\angle A_1AO \cdot \cos\angle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

$\sin\angle A_1AB = \sqrt{1-\cos^2\angle A_1AB} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Из $\Delta AOA_1(\angle AOA_1 = 90°): AA_1 = \frac{AO}{\cos\angle A_1AO} = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos 60°} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. В грани AA_1B_1B опустили перпендикуляр BK на AA_1. Тогда плоскость BKC перпендикулярна ребру AA_1 призмы и ΔBKC — перпендикулярное сечение призмы.

Из $\Delta AKB(\angle AKB = 90°): BK = AB\sin\angle A_1AB = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

Периметр $\Delta BKC: P = 2BK + BC = \frac{a\sqrt{13}}{2} + a = \frac{a\left(2+\sqrt{13}\right)}{2}$, боковая поверхность призмы $S = P\cdot AA_1 = \frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{13})}{3}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{13})}{3}$.

11.126. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Все диагональные сечения ее равновелики. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

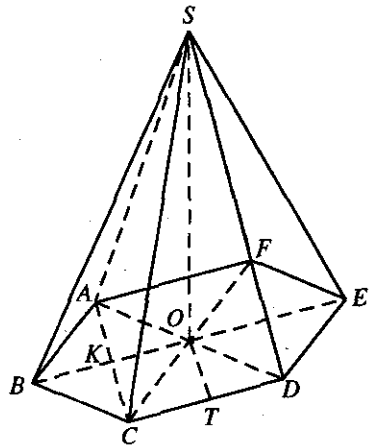


Рис. 11.22

Решение.

Проведем SO — высоту правильной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 11.22). Пусть $SO = H$. Тогда $S_{\Delta ASD} = \frac{AD \cdot SO}{2} = \frac{2aH}{2} = aH.$

K — точка пересечения диагоналей BO и AC ромба $ABCO$.

$OK = \frac{1}{2}BO = \frac{a}{2}, AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = 2AK = a\sqrt{3}, OK \perp AC$. OK — проекция SK на плоскость основания.

Тогда $SK \perp AC$ и $S_{\Delta ASC} = \frac{AC \cdot SK}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}SK.$

По условию $S_{\Delta ASD} = S_{\Delta ASC}$, тогда $aH = \frac{a\sqrt{3}}{2}SK;\ \frac{H}{SK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из $\Delta SOK(\angle SOK = 90^\circ): \sin\angle SKO = \frac{H}{SK} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \angle SKO = 60^\circ; H = SO = KO\operatorname{tg}\angle SKO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания $S_{\text{осн}} = 6S_{\Delta AOB} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{3a^3}{4}$. Пусть T — середина CD, тогда $TO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Так как $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то ΔSOT — прямоугольный равнобедренный, $\angle STO = 45^\circ$ и боковая поверхность пирамиды

$$S_{б} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\angle STO} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3a^3}{4}; \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

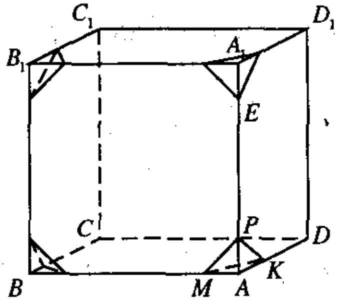


Рис. 11.23

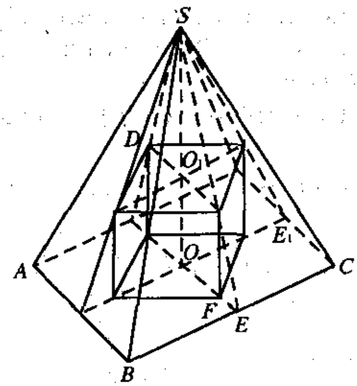


Рис. 11.24

11.127. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

Решение.

Пусть отрезок, отсекаемый каждой из указанных плоскостей на ребре куба, равен x: $AP = AM = EA_1 = x$ (рис.11.23). Тогда $MP = EP = x\sqrt{2}$;

$AP + PE + EA_1 = AA_1$, $2x + x\sqrt{2} = a$, $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$. Вычислим

объем каждой из отсекаемых пирамид $V_1 = \dfrac{1}{6}x^3$.

Тогда объем полученного многогранника равен разности объема куба

и $8V_1$: $V = a^3 - 8V_1 = a^3 - \dfrac{4}{3}x^3 = a^3 - \dfrac{a^3\left(2-\sqrt{2}\right)^3}{6} = \dfrac{a^3\left(6-\left(2-\sqrt{2}\right)^3\right)}{6} =$

$$= \frac{a^3\left(6-8+12\sqrt{2}-82+2\sqrt{2}\right)}{6} = \frac{a^3\left(14\sqrt{2}-14\right)}{6} = \frac{7}{3}a^3(\sqrt{2}-1).$$

Ответ: $\dfrac{7}{3}a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$.

11.128. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре —

в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны, каждое из них имеет длину a. Вычислить полную поверхность и объем куба.

Решение.

Пусть ребро куба $EF = x$ (рис. 11.24). Рассмотрим ΔBSC (равносторонний): $SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из $\Delta SOE (\angle SOE = 90°)$:

$$SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$FE = OE - OF = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}. \ \Delta E_1FE \sim \Delta SOE.$$

Тогда $\frac{E_1F}{SO} = \frac{FE}{OE}$; $E_1F \cdot OE = SO \cdot FE$, $x \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$, $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Полная поверхность куба $S = 6x^2 = \frac{3}{4}a^2$, его объем $V = x^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

Ответ: $\frac{3}{4}a^2$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

11.129. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее 38 см³, а площади оснований относятся как 4:9. Определить боковую поверхность усеченной пирамиды.

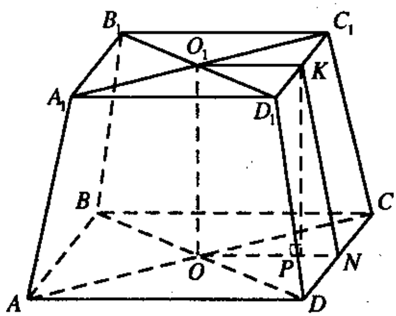


Рис. 11.25

Решение.

Пусть площадь верхнего основания равна $S_1 = 4x$ см². Тогда площадь нижнего основания $S_2 = 9x$ см², и так как объем усеченной пирамиды $V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$, то $4x + 9x + \sqrt{36x^2} = 38$, $x = 2$; $S_1 = 8$ см²; $S_2 = 18$ см². Тогда сторона нижнего основания $a = \sqrt{S_2} = 3\sqrt{2}$ см, сторона верхнего основания $b = 2\sqrt{2}$ см, периметры оснований соответственно $p_2 = 12\sqrt{2}$ см, $p_1 = 8\sqrt{2}$ см. N — середина ребра CD, K — ребра C_1D_1 соответственно нижнего и верхнего оснований данной усеченной

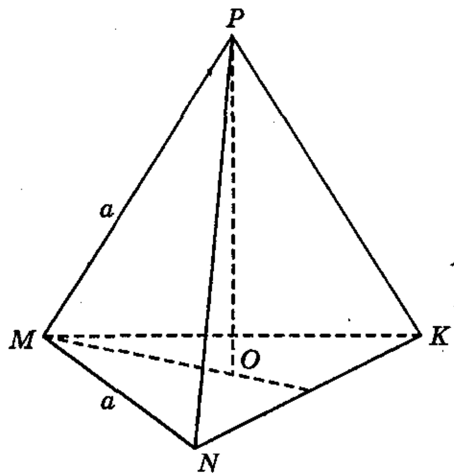


Рис. 11.26

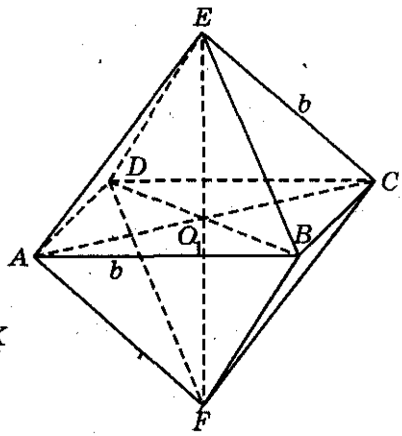


Рис. 11.27

пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.25). Тогда KN — ее апофема, $ON=\frac{a}{2}$, $O_1K=\frac{b}{2}$.

Проведем высоту $KP=OO_1=3$ см. $PN=ON-O_1K=\frac{a-b}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. Из ΔKPN ($\angle KPN=90°$): $KN=\sqrt{KP^2+PN^2}=\sqrt{\frac{19}{2}}$ см. Боковая поверхность $S_б=\frac{p_1+p_2}{2}\cdot KN=10\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{19}{2}}=10\sqrt{19}$ см^2.

Ответ: $10\sqrt{19}$ см^2.

11.130. Найти отношения объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

Решение.

PO — высота правильного тетраэдра $PMNK$ (рис. 11.26). Пусть $MN=a$, тогда $MO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $PO=\sqrt{MP^2-MO^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, объем тетраэдра $V_1=\frac{1}{3}S_{\Delta MNK}\cdot PO=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, полная поверхность тетраэдра $S_1=4S_{\Delta MNK}=a^2\sqrt{3}$. Квадрат $ABCD$ — общее основание двух правильных пирамид $EABCD$ и $FABCD$, из которых состоит данный правильный октаэдр (рис. 11.27), O_1 — центр квадрата $ABCD$. Пусть $AB = b$. Треугольники AO_1E и AO_1B равны ($\angle AO_1E = \angle AO_1B = 90°, AO_1$ — общий катет, $AE = AB$).

Отсюда $EO_1 = AO_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, и объем октаэдра $V_2 = \frac{2}{3} S_{ABCD} \cdot EO_1 = = \frac{2}{3} b^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}$, а его полная поверхность $S_2 = 8S_{\Delta AEB} = 8 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = = 2b^2\sqrt{3}$.

Так как $S_1 = S_2$, то $a^2\sqrt{3} = 2b^2\sqrt{3}$, $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, $\frac{a^3}{b^3} = 2\sqrt{2}$.

Тогда $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} : \frac{b^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{4b^3} = \frac{1}{4} 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

11.131. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b. Найти объем призмы.

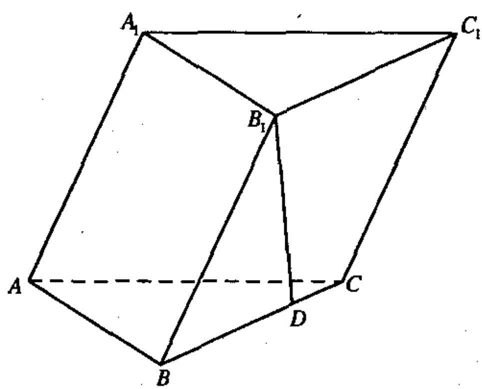


Рис. 11.28

Решение.

По условию грань BB_1C_1C — ромб (рис. 11.28) и перпендикулярна основанию. Тогда высота B_1D ромба — высота призмы. Пусть $BB_1 = a = BC$, $B_1C = b$.

Периметр $P_{\Delta BB_1C} = 2a + b$, по формуле Герона площадь треугольника BB_1C $S = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2} - a\right)^2\left(a + \frac{b}{2} - b\right)} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$. С другой стороны $S = \frac{1}{2} BC \cdot B_1D = \frac{a}{2} B_1D$. Отсюда $B_1D = \frac{2S}{a} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$.

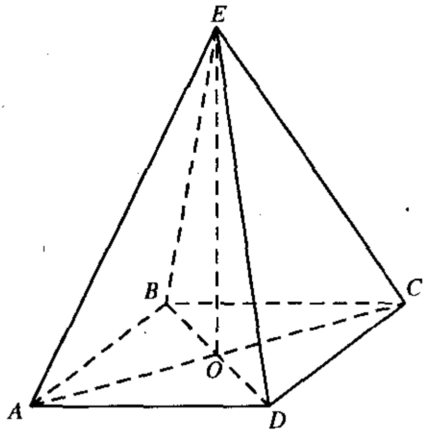


Рис. 11.29

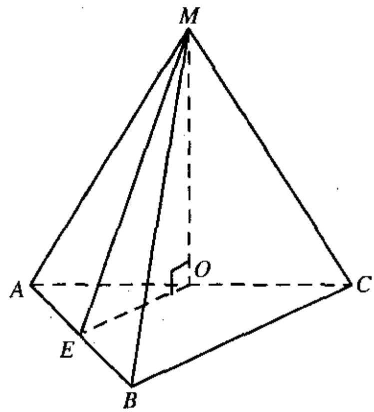


Рис. 11.30

Объем призмы $V = S_{\Delta ABC} \cdot B_1D = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = \frac{ab\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{8}$.

Ответ: $\frac{ab\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{8}$.

11.132. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S; боковые ребра пирамиды равны и образуют с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию $ABCD$ — прямоугольник, проведем EO — высоту пирамиды $EABCD$ (рис. 11.29). Тогда $\angle EAO = 45°$, а так как боковые ребра пирамиды равны, то точка O — центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$ — точка пересечения диагоналей. Пусть $EO = H$. Тогда $AO = EO = H$, $AC = 2H$, площадь прямоугольника $S = \frac{1}{2}AC^2 \sin 60° = 2H^2\frac{\sqrt{3}}{2}$; $H = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}}{3}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH = \frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}}{9}$.

Ответ: $\frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}}{9}$.

11.133. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней— также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определить полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть грань AMC пирамиды $MABC$ — равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания(рис. 11.30). Тогда ее высота и медиана MO является высотой пирамиды. Опустим перпендикуляр OE на AB. Тогда $AE=\frac{AB}{4}=\frac{a}{4}$, $ME\perp AB$.

Из $\Delta AEM(\angle AEM=90°)$: $ME=\sqrt{AM^2-AE^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$,

$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot ME=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}$.

Так как $\Delta ABC=\Delta AMC$, $\Delta AMB=\Delta CMB$, то полная поверхность пирамиды $S=2(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta AMB})=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{a^2\sqrt{15}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}$.

11.134. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания первоначальной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании содержит 45°.

Решение.

Пусть MO — высота правильной пирамиды $MABC$, ΔETF — сечение пирамиды, о котором говорится в условии задачи (рис. 11.31), D — середина AB. Тогда $\angle MDO$ — линейный угол двугранного угла при ребре AB и так как $\angle MDO=45°$, то $MO=DO=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. EF — средняя линия

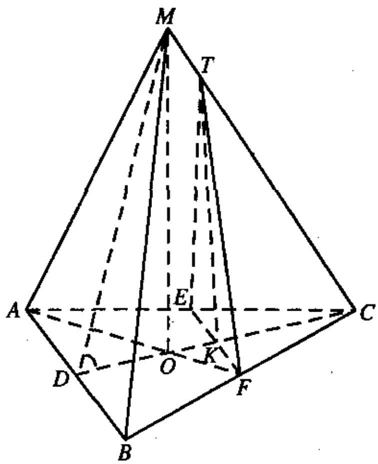


Рис. 11.31

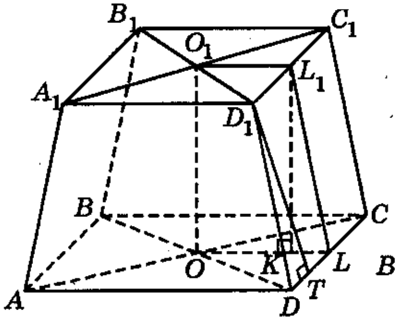


Рис. 11.32

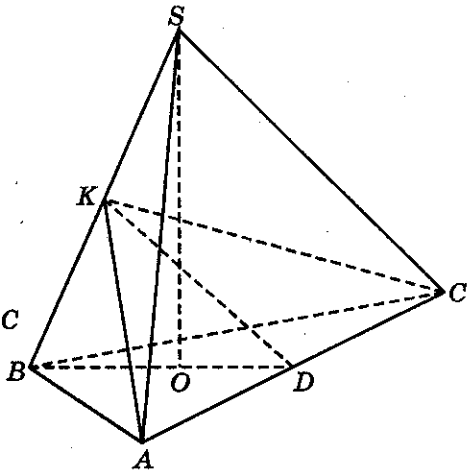


Рис. 11.33

ΔABC, тогда $S_{\Delta ECF}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, $\Delta TEC=\Delta TFC$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $TE=TF$, K — точка пересечения EF и CD. Тогда K — середина EF и TK — медиана и высота ΔETF. Так как плоскость ETF перпендикулярна плоскости ABC, то TK — высота пирамиды $TEFC$. $CK=\frac{1}{2}CD$, $CO=\frac{2}{3}CD$. Тогда $\frac{CK}{CO}=\frac{3}{4}$, $\Delta TKC\sim\Delta MOC$

и $\frac{TK}{MO}=\frac{CK}{CO}=\frac{3}{4}$; $TK=\frac{3}{4}MO=\frac{a\sqrt{3}}{8}$. Объем пирамиды $ETFC$

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ECF}\cdot TK=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3}{128}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{128}$.

11.135. Определить объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если сторона большего основания равна a, сторона меньшего основания равна b, а острый угол боковой грани равен $60°$.

Решение.

Пусть D_1T — высота равнобокой трапеции DD_1C_1C — боковой грани правильной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.11.32). Тогда

$$DT = \frac{CD - C_1D_1}{2} = \frac{a-b}{2}; \quad D_1T = DT\,\mathrm{tg}\angle D_1DT = \frac{a-b}{2}\mathrm{tg}60° = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

L_1 — середина C_1D_1, L — середина CD. Тогда $LL_1 = D_1T = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$.

Опустим перпендикуляр L_1K на плоскость $ABCD$. Тогда K принадлежит отрезку OL, где O — центр нижнего основания, $KL = \dfrac{a-b}{2}$. Из

$$\Delta L_1KL(\angle L_1KL = 90°): L_1K = \sqrt{LL_1^{\,2} - KL^2} = \sqrt{\frac{3(a-b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$V = \dfrac{H}{3}\left(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\right)$, где H — высота пирамиды, S и S_1 — площади соответственно нижнего и верхнего оснований.

Тогда $V = \dfrac{a-b}{3\sqrt{2}}\left(a^2 + b^2 + ab\right) = \dfrac{a^3 - b^3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\left(a^3 - b^3\right)\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\left(a^3 - b^3\right)\sqrt{2}}{6}$.

11.136. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через одно из ребер основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$, считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

Решение.

Полную поверхность пирамиды найдем по формуле

$S_{полн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot 3a \cdot SD$ (рис.11.33). Так как $\Delta BOS \sim \Delta BKD$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий угол), то $\dfrac{BD}{BS} = \dfrac{BK}{BO}$,

$\dfrac{a\sqrt{3}}{2} : BS = BK : \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $a^2 = 2BK \cdot BS$.

По условию $\dfrac{BK}{KS} = \dfrac{m}{n}$, $KS = \dfrac{n}{m}BK$, $BS = BK + KS = \dfrac{n+m}{m}\cdot BK$,

$BK = \dfrac{m}{m+n}BS$, $BS^2 = \dfrac{(m+n)a^2}{2m}$. В ΔSOD имеем $SD^2 = SO^2 + OD^2$;

отсюда, учитывая, что $SO^2 = BS^2 - BO^2$, находим $SD^2 = \frac{(m+n)a^2}{2m} -$

$$-\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} = \frac{3ma^2 + 6na^2}{12m} = \frac{(m+2n)a^2}{4m}.$$

Получили $S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 3a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m+2n}{m}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right).$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right).$

11.137. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол $60°$. Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Опустим из точки D перпендикуляр DK на AC (рис. 11.34). DK — проекция D_1K на плоскость основания параллелепипеда. Тогда $D_1K \perp AC$, $\angle D_1KD$ — линейный угол двугранного угла, по условию $\angle D_1KD = 60°$. Из $\Delta ADC(\angle ADC = 90°)$: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 5$ см, $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}AC\cdot DK = \frac{1}{2}AD\cdot DC$. Тогда $DK = \frac{AD\cdot DC}{AC} = 2{,}4$ см. Из $\Delta D_1DK(\angle D_1DK = 90°): DD_1 = DK\,\mathrm{tg}\,\angle D_1KD = 2{,}4\sqrt{3}$ см. Объем параллелепипеда $V = S_{ABCD}\cdot DD_1 = AD\cdot DC\cdot DD_1 = 3\cdot 4\cdot 2{,}4\sqrt{3} = \frac{144\sqrt{3}}{5}(\text{см}^3)$.

Ответ: $\frac{144\sqrt{3}}{5}(\text{см}^3)$.

11.138. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18 см, а площадь равна 90 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определить боковую поверхность пирамиды.

Решение.

Проведем SO — высоту пирамиды $SABCD$ (рис. 11.35). Опустим перпендикуляры SM, SL, SN, SK соответственно на AB, BC, CD и AD. По условию $ABCD$ — параллелограмм, тогда точка O пересечения диаго-

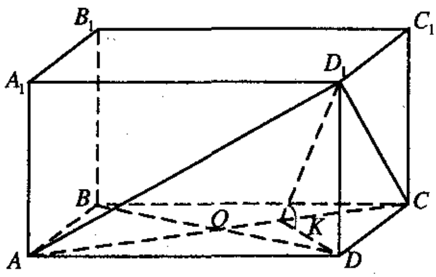


Рис. 11.34

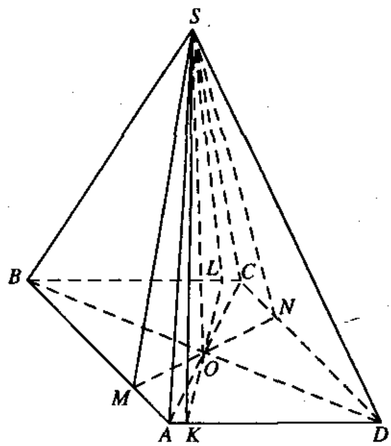


Рис. 11.35

налей — середина отрезков MN и KL, являющихся высотами параллелограмма. $LK = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{90}{18} = 5$ (см); $MN = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{90}{10} = 9$ (см).

Следовательно, $OK = \frac{1}{2}LK = \frac{5}{2}$ см, $MO = \frac{1}{2}MN = \frac{9}{2}$ см.

Из ΔSOK ($\angle SOK = 90°$): $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{13}{2}$ см.

Из ΔSOM ($\angle SOM = 90°$): $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{15}{2}$ см. Боковая поверхность пирамиды $S_б = 2S_{\Delta ASB} + 2S_{\Delta ASD} = AB \cdot SM + AD \cdot SK = 10 \cdot \frac{15}{2} +$ $+ 18 \cdot \frac{13}{2} = 192$ (см^2).

Ответ: 192 см^2.

11.139. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Во сколько раз поверхность октаэдра больше поверхности вписанного куба?

Решение.

Квадрат $ABCD$ — общее основание правильных пирамид $SABCD$ и S_1ABCD, из которых состоит данный правильный октаэдр, O — центр этого квадрата, $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ — куб, о котором говорится в условии

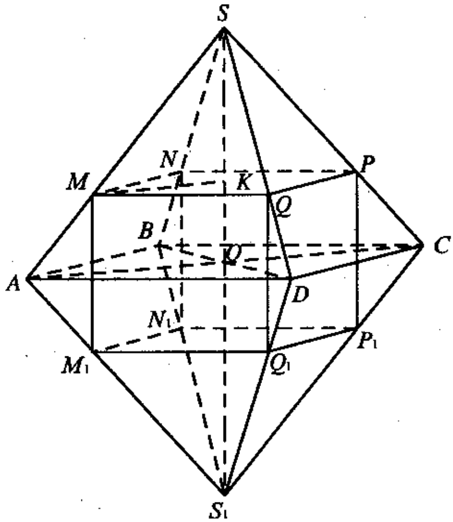


Рис. 11.36

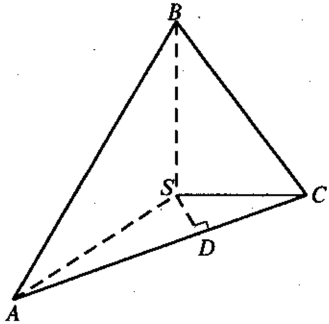


Рис. 11.37

задачи, K — центр квадрата $MNPQ$ — точка пересечения SO и плоскости квадрата $MNPQ$ (рис. 11.36). Пусть $AD = a$, $MQ = 2b$. Тогда $MP = 2b\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $SO = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SK = SO - KO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - b$.

$\Delta SMP \sim \Delta SAC$. Из подобия следует: $\dfrac{MP}{AC} = \dfrac{SK}{SO}$; $\dfrac{2b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} - b}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$;

$2b\sqrt{2} = a\sqrt{2} - 2b$; $2b = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+1}} = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2-1}\right)$. Поверхность октаэдра $S_1 = 8S_{\Delta ASD} = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$. Поверхность куба $S_2 = 6S_{MNPQ} = 6 \cdot (2b)^2 =$

$= 6(a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1))^2 = 12a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = 12a^2(3 - 2\sqrt{2})$

Тогда $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{12a^2(3 - 2\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{2})}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{2})}{6}$.

11.140. Найти объем правильной треугольной пирамиды(рис. 11.37), у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной равно d.

Решение.

Будем считать, что B — вершина пирамиды, а ΔASC — основание. SD — высота прямоугольного равнобедренного ΔASC, опущенная на гипотенузу AC. Тогда SD — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BS и AC, а его длина — расстояние между ними, $SD = d$. Следовательно, $AC = 2SD = 2d$, $S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2}AC \cdot SD = d^2$, $BS = AS = SD\sqrt{2}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ASC} \cdot BS = \frac{d^3}{3}\sqrt{2}.$

Ответ: $\frac{d^3}{3}\sqrt{2}.$

11.141. Площадь того сечения правильного тетраэдра, которое имеет форму квадрата, равна m^2. Найти поверхность тетраэдра.

Решение.

Пусть квадрат $DPQF$ — сечение правильного тетраэдра $MABC$ (рис.11.37), о котором говорится в условии задачи. Тогда $PQ = PD = m$. Так как PQ параллельна DF, то прямая PQ параллельна плоскости ABC. Тогда плоскость AMC, проходящая через прямую PQ, пересекает плоскость ABC по прямой AC, параллельной PQ. Следовательно, $\Delta PMQ \sim \Delta AMC$ и ΔPMQ — равносторонний, $PM = PQ = m$. Аналогично $PD \| BM$, $AP = PD = m$. Следовательно, ребро тетраэдра $a = 2m$.

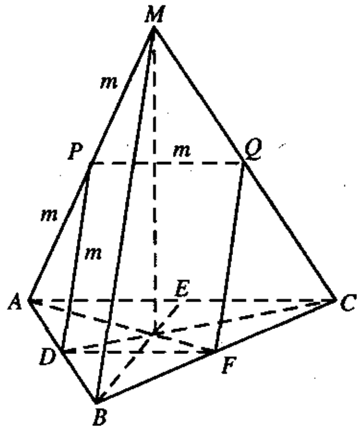


Рис. 11.38

Поверхность тетраэдра $S = 4S_{\Delta ABC} = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} = 4m^2\sqrt{3}$.

Ответ: $4m^2\sqrt{3}$.

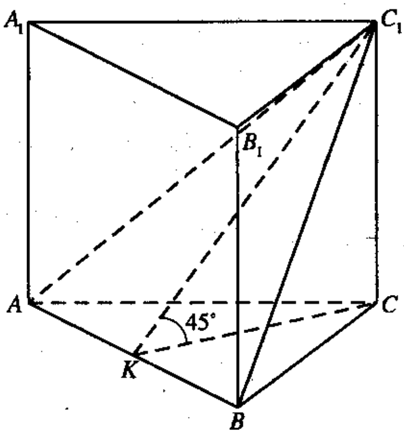


Рис. 11.39

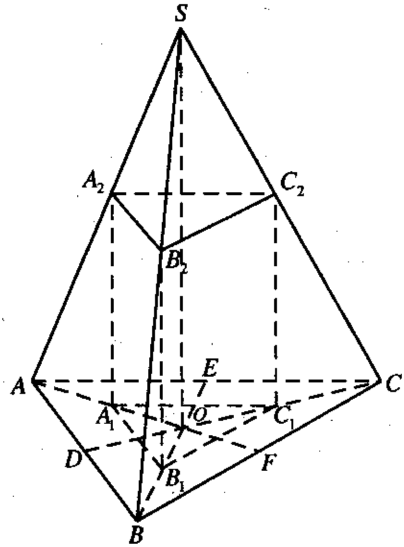


Рис. 11.40

11.142. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол 45°. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

Решение.

ΔAC_1B — сечение правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис.11.39), о котором говорится в условии задачи, K — середина AB. Тогда $CK \perp AB$, $C_1K \perp AB$, $\angle C_1KC$ — угол наклона плоскости AC_1B к плоскости основания, $\angle C_1KC = 45°$. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AC_1B} \cdot \cos\angle C_1KC = \dfrac{S\sqrt{2}}{2}$. Пусть $CC_1 = H$.

Тогда $CK = CC_1 = H$, $BK = \dfrac{H\sqrt{3}}{3}$, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CK = BK \cdot CK =$ $= \dfrac{H^2\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\dfrac{H^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{S\sqrt{2}}{2}$; $H = \sqrt{\dfrac{S\sqrt{6}}{2}}$.

Объем призмы $V = S_{\Delta ABC} \cdot H = \dfrac{S\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{S}{2}\sqrt{6}} = \dfrac{S\sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{6}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{S\sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{6}}{2}$.

11.143. В правильный тетраэдр помещена правильная треугольная призма так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить объем призмы, если все ее ребра равны.

Решение.

Пусть SO — высота тетраэдра $SABC, A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — правильная призма, о которой говорится в условии задачи (рис. 11.40). Из $\Delta SOC(\angle SOC = 90°)$: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Пусть ребро призмы равно x. Тогда $C_1O = \frac{x\sqrt{3}}{3}, CC_1 = CO - C_1O = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{a-x}{\sqrt{3}}$, $\Delta C_2C_1C \sim \Delta SOC$.

Из подобия следует: $\frac{C_1C_2}{C_1C} = \frac{SO}{OC}; C_1C_2 \cdot OC = C_1C \cdot SO; x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a-x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; x\sqrt{3} = a\sqrt{2} - x\sqrt{2}; x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = a\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Объем призмы

$$V = S_{\Delta A_1B_1C_1} \cdot C_1C_2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{6}(3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2})}{2} = \frac{a^3(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^3(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})}{2}$.

11.144. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом $30°$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $45°$. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Решение.

Искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot CC_1$ (рис. 11.41). Так как $\angle ABC = 30°$, то $AC = \frac{c}{2}, BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $S_{\text{осн}} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. С другой стороны, $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, где $CD \perp AB$ и $CD = \frac{1}{2} BC = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Так как

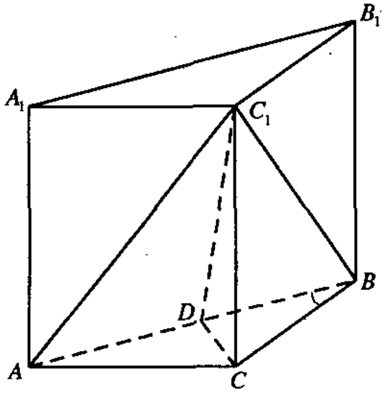


Рис. 11.41

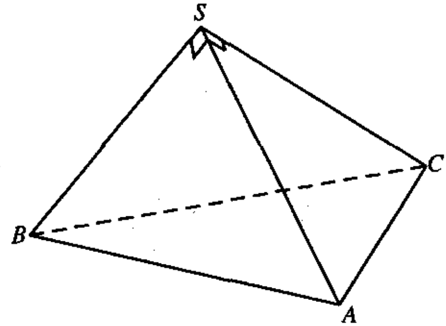


Рис. 11.42

$CD \perp AB$, то и $C_1D \perp AB$, т.е. $\angle C_1DC = 45°$ (по условию); поэтому в ΔC_1DC имеем $CC_1 = CD = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Получили $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{4} = \frac{c^3}{32}$.

Ответ: $\frac{c^3}{32}$.

11.145. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны a^2, b^2 и c^2. Определить объем пирамиды.

Решение.

Пусть $SA = x$, $SB = y$, $SC = z$ (рис. 11.42). Из взаимной перпендикулярности боковых граней следует взаимная перпендикулярность этих ребер, откуда искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ASB} \cdot SC = \frac{1}{6} xyz$. По условию $\frac{1}{2} xy = a^2$, $\frac{1}{2} xz = b^2$, $\frac{1}{2} yz = c^2$. Перемножив эти равенства, получим $\frac{1}{8} x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$. Итак, $V = \frac{1}{6} abc\sqrt{8} = \frac{1}{3} abc\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{1}{3} abc\sqrt{2}$.

11.146. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить полную поверхность пирамиды.

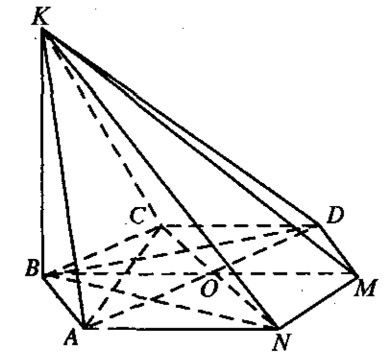


Рис. 11.43.1

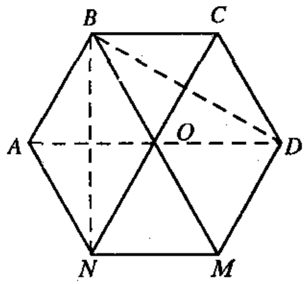


Рис. 11.43.2

Решение.

Правильный шестиугольник $ABCDMN$ — основание пирамиды $KABCDMN$ (рис. 11.43.1), ребро KB перпендикулярно плоскости основания, $KB = AB = a$. Тогда $\Delta ABK = \Delta CBK$ (по двум катетам), $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot BK = \frac{a^2}{2}$. $\angle BAN = \angle ANM = 120°$ (рис. 11.43.2). Тогда из ΔBAN $AB = AN$, $BN = a\sqrt{3}$, $\angle ABN = \angle ANB = 30°$ и, следовательно, $\angle BNM = 90°$. BN — проекция KN на плоскость основания пирамиды. Значит, $KN \perp NM$. Аналогично $KD \perp MD$ и так как $BN = BD$, то $KN = KD$, $\Delta KNM = \Delta KDM$, $\Delta KAN = \Delta KCD$.

Из $\Delta KBN\left(\angle KBN = 90°\right)$: $KN = \sqrt{BN^2 + KB^2} = 2a$.

Тогда $S_{\Delta KNM} = \frac{1}{2} KN \cdot MN = a^2$.

Из $\Delta ABK(\angle ABK = 90°)$: $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = a\sqrt{2}$. Полупериметр треугольника ΔANK $p = \frac{a\sqrt{2} + 2a + a}{2} = \frac{3a + a\sqrt{2}}{2}$, вычислим его площадь по формуле Герона:

$$S_{\Delta ANK} = \sqrt{\frac{3a + a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - a\right)} \times \sqrt{\left(\frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2}\right)\left(\frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - 2a\right)} =$$

$$=\sqrt{\frac{3a+a\sqrt{2}}{4}\cdot(a\sqrt{2}+a)}\times\sqrt{\frac{3a-a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}-a}{2}}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Площадь правильного шестиугольника $ABCDMN$: $S_{осн}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, полная поверхность пирамиды

$$S=2\left(S_{\Delta ABK}+S_{\Delta KNM}+S_{\Delta ANK}\right)+S_{осн}=2\left(\frac{a^2}{2}+a^2+\frac{a^2\sqrt{7}}{4}\right)+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{a^2\left(6+\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^2(6+\sqrt{7}+3\sqrt{3})}{2}$.

11.147. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность пирамиды.

Решение.

По условию $AB=8$ м, $AD=10$ м, $BD=6$ м (рис. 11.44). Так как $6^2+8^2=10^2$, то ΔABD — прямоугольный и $S_{осн}=8\cdot 6=48$ (м²).

Так как $BD\perp AB$, то и $SB\perp AB$, $S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}AB\sqrt{SO^2+OB^2}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{4^2+3^2}=20\ (\text{м}^2).$$

Проведем $SK\perp AD$; тогда $S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}AD\cdot SK=\frac{1}{2}AD\sqrt{SO^2+OK^2}$. Чтобы найти OK, воспользуемся тем, что $\Delta OKD\sim\Delta ABD$;

тогда $OK:AB=OD:AD \Rightarrow OK=\frac{8\cdot 3}{10}=\frac{12}{5}$ (м). Следовательно, $SK=\sqrt{16+\frac{144}{25}}=\frac{4\sqrt{34}}{5}$ (м) и $S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{4\sqrt{34}}{5}=4\sqrt{34}$ (м²). Итак, $S_{прям}=48+2\cdot 20+2\cdot 4\sqrt{34}=8\left(11+\sqrt{34}\right)$ (м²).

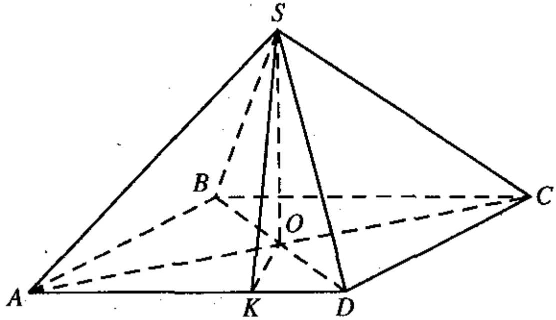


Рис. 11.44

Ответ: $8\left(11+\sqrt{34}\right)$ (м²).

11.148. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$), а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

Решение.

Пусть H — высота полной пирамиды, h — высота усеченной пирамиды и $x = H - h$.

Имеем $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{x^2}{H^2}$ или $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \dfrac{x}{x+h}$, откуда $x\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_1} = x\sqrt{S_2}$,

$x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$. Так как $H = x + h = \dfrac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$, то объем полной пирамиды $V_{прям} = \dfrac{1}{3} S_2 H = \dfrac{1}{3} \dfrac{hS_2\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$.

По условию $V = \dfrac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$, и, значит, $h = \dfrac{3V}{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}}$.

Получили, $V_{прям} = \dfrac{1}{3} \dfrac{S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} \cdot \dfrac{3V}{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}} = \dfrac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$.

Ответ: $\dfrac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$.

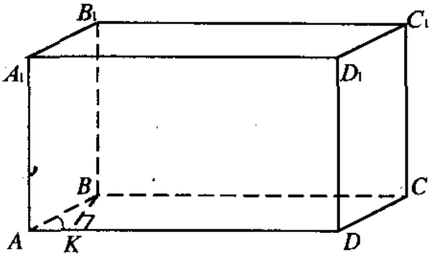


Рис. 11.45

11.149. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30°. Площадь основания равна 4 дм^2. Площади боковых граней параллелепипеда равны 6 и 12 дм^2. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Объем параллелепипеда $V = S_{осн}h$, где h — высота параллелепипеда. Так как параллелепипед прямой, то высоты боковых граней также равны h (рис. 11.44). По условию $\angle BAD = 30°$, $AB \cdot h = 6$ дм^2, $AD \cdot h = 12$ дм^2, т.е. $AD = 2AB$. Пусть $BK \perp AD$; тогда $BK = \frac{1}{2}AB$.

Так как $AD \cdot BK = 4$ дм^2, то имеем $2AB \cdot \frac{1}{2}AB = 4$, $AB = 2$ (дм); следовательно, $h = 3$ дм. Окончательно $V = 4 \cdot 3 = 12$ дм^3.

Ответ: 12 дм^3.

11.150. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны основания равны 3 и 2 м, а боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

Решение.

Пусть O — центр нижнего основания ABC, O_1 — центр верхнего основания $A_1B_1C_1$ правильной усеченной пирамиды, D — середина AB, D_1 — середина A_1B_1 (рис. 11.46). Тогда DD_1 — высота боковой грани AA_1B_1B, площадь которой $S_1 = \frac{A_1B_1 + AB}{2} \cdot DD_1 = \frac{5}{2}DD_1$, отсюда боковая поверхность пирамиды $S_б = 3S_1 = \frac{15}{2} \cdot DD_1$, $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ м^2; $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \sqrt{3}$ м^2. По $S_б = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1}$, тогда $\frac{15}{2}DD_1 = \frac{13\sqrt{3}}{4}$; $DD_1 = \frac{13\sqrt{3}}{30}$. Опустим перпендикуляр D_1K на плоскость ABC. Тогда точка K принадлежит отрезку OD, $DK = OD - O_1D_1 = \frac{AB\sqrt{3}}{6} - \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ м.

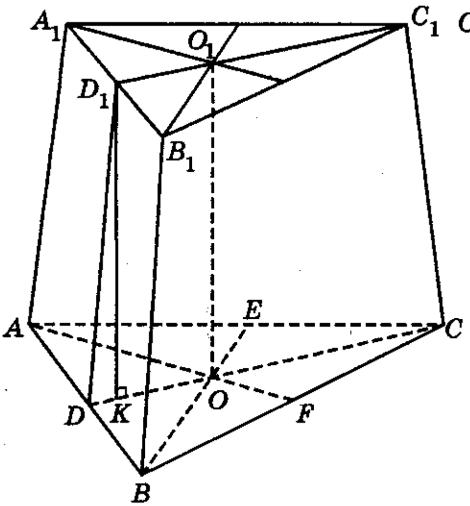


Рис. 11.46

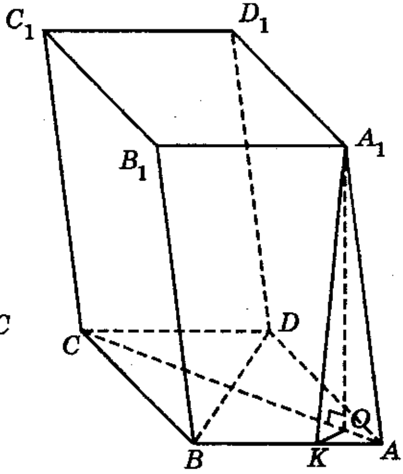


Рис. 11.47

Из $\Delta D_1KD(\angle D_1KD = 90°)\ D_1K = \sqrt{DD_1^2 - DK^2} = \sqrt{\frac{169}{300} - \frac{1}{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ (м).

Объем пирамиды $V = \frac{D_1K}{3}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}}) =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{15}(\frac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}) = 1{,}9$ м^3.

Ответ: 1,9 м^3.

11.151. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a, и острым углом 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Определить объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть A_1O — высота параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, о котором говорится в условии задачи (рис. 11.47). Так как $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, то точка O принадлежит биссектрисе $\angle BAD$ — лучу $AC \cdot AA_1$ — наклонная к плоскости основания призмы, AO — ее проекция на эту плоскость, AB — прямая, лежащая в этой плоскости.

Проведем $A_1K \perp AB$ и соединим K с O. В ΔA_1OA: $\cos\angle A_1AO = \frac{OA}{A_1A}$;

в $\Delta A_1KA: \cos\angle A_1AK = \cos\angle A_1AB = \frac{AK}{A_1A}$; в $\Delta OKA: \cos\angle OAK = = \cos\angle OAB = \frac{AK}{OA}$. Но $\frac{OA}{A_1A}\cdot\frac{AK}{OA} = \frac{AK}{A_1A}$, т.е. $\cos\angle A_1AO\cdot\cos\angle OAK = = \cos\angle A_1AK$, откуда $\cos\angle A_1AO = \frac{\cos\angle A_1AK}{\cos\angle OAK}$.

Так как $\angle BAD = 60°$, то $\angle OAK = 30°$ и, значит, $\cos\angle A_1AO = \frac{\cos 45°}{\cos 30°} = = \frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\sin\angle A_1AO = \sqrt{1-\cos^2\angle A_1AO} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $A_1O = AA_1\sin\angle A_1AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, откуда находим искомый объем:

$$V = S_{ABCD}\cdot A_1O = a^2\sin 60°\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{2}$.

11.152. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра (рис. 11.48). Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

Решение.

Пусть M, N, K, O — центры граней AFC, BFC, AFB, ABC данного тетраэдра соответственно, D — середина AC, E — середина BC. Тогда $FM = \frac{2}{3}FD$, $FN = \frac{2}{3}FE$ и, следовательно, $MN \| DE$, $MN = \frac{2}{3}DE = = \frac{1}{2}AB$. Пусть V_1 и S_1 — объем и поверхность данного тетраэдра, а V_2 и S_2 — объем и поверхность нового тетраэдра. Так как два любых правильных тетраэдра подобны, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{AB^3}{MN^3} = 27:1$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{MN^2} = 9:1$.

Ответ: $27:1; 9:1$.

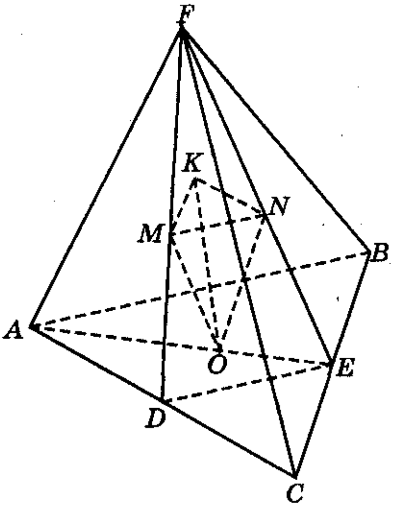


Рис. 11.48

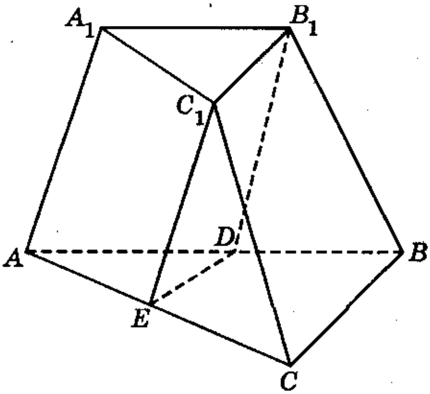


Рис. 11.49

11.153. В усеченной треугольной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделится объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны относятся как 1:2?

Решение.

Стороны оснований относятся как 1:2, поэтому площади оснований относятся как 1:4 (рис. 11.49). Тогда объем усеченной пирамиды $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1 S_2})=\frac{1}{3}h(4S_2+S_2+2S_2)=\frac{7}{3}S_2h$, где S_2— площадь верхнего основания, h — высота. Объем призмы $ADEA_1B_1C_1$ составляет $V_1=S_2h$ и объем оставшейся части пирамиды есть $V_2=V-V_1=\frac{7}{3}S_2h-S_2h=\frac{4}{3}S_2h$. Итак, $V_1:V_2=3:4$.

Ответ: 3:4 .

11.154. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Определить полную поверхность призмы.

Решение.

Пусть A_1O — высота наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 11.50).

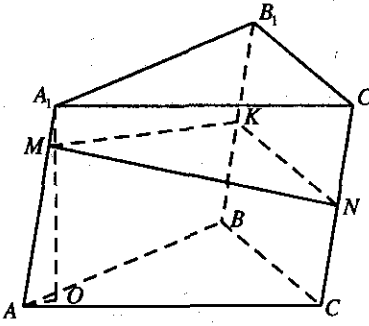


Рис. 11.50

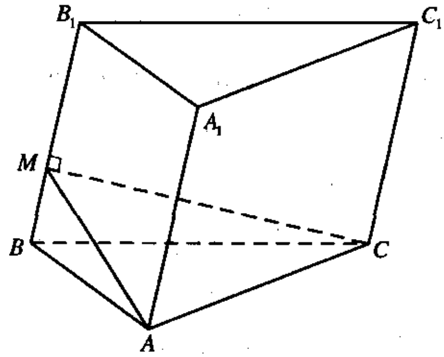


Рис. 11.51

AO — проекция AA_1 на плоскость основания, $\angle A_1AO$ — угол наклона бокового ребра AA_1 к плоскости основания, по условию $\angle A_1AO = 60°$. Из $\Delta AOA_1(\angle AOA_1) = 90°$; $A_1O = AA_1 \sin\angle A_1AO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим ΔMNK — перпендикулярное сечение призмы. Тогда длина его сторон — расстояние между боковыми ребрами призмы. Так как по условию эти расстояния равны a, то периметр перпендикулярного сечения $P = 3a$, его площадь $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Боковая поверхность призмы $S_б = P \cdot AA_1 = 3al$. Объем призмы $V = S_1 \cdot AA_1 = S_{\Delta ABC} \cdot A_1O$.

Отсюда $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot l = S_{\Delta ABC}\frac{l\sqrt{3}}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$. Полная поверхность призмы $S = S_б + 2S_{\Delta ABC} = 3al + a^2$.

Ответ: $3al + a^2$.

11.155. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Длина бокового ребра равна b, а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы 45°. Определить боковую поверхность призмы.

Решение.

Пусть правильный треугольник ABC — основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, $\angle B_1BA = \angle B_1BC = 45°$ (рис. 11.51). Опустим перпендикуляр AM на BB_1. $\Delta BMA = \Delta BMC$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle BMC = \angle BMA = 90°$ и $AM = CM = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отсюда следует, что ΔAMC — перпендикулярное сечение данной призмы и его периметр $P = a\sqrt{2} + a = a(\sqrt{2}+1)$. Боковая поверхность призмы $S_б = P \cdot BB_1 = ab(\sqrt{2}+1)$.

Ответ: $ab(\sqrt{2}+1)$.

11.156. Доказать, что объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.

Решение.

Пусть S_1 и S_2 — площади боковых параллельных граней данной прямой призмы, H — ее высота, a и b — длины параллельных сторон оснований, h — высота трапеции, лежащей в основании. Тогда h — расстояние между параллельными боковыми гранями призмы, вычислим их площади: $S_1 = aH$, $S_2 = bH$, отсюда $a = \frac{S_1}{H}$, $b = \frac{S_2}{H}$, площадь основания призмы $S = (a+b)\cdot\frac{h}{2} = \frac{(S_1+S_2)h}{2H}$.

Объем призмы $V = SH = \frac{(S_1+S_2)h}{2}$, что и требовалось доказать.

11.157. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны a и b, а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть O и O_1 — центры соответственно нижнего $ABCD$ и верхнего $A_1B_1C_1D_1$ оснований правильной усеченной пирамиды (рис. 11.52),

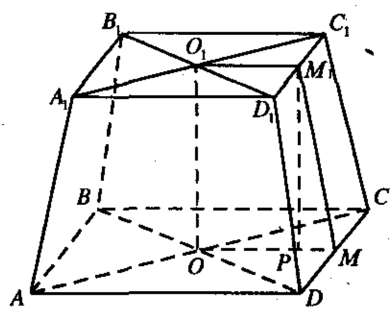


Рис. 11.52

M — середина CD, M_1 — середина C_1D_1. Тогда MM_1 — апофема данной пирамиды. Пусть $MM_1 = x$. Тогда боковая поверхность пирамиды $S_б = 4 \cdot \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot MM_1 = 2(a+b)x$. Площадь верхнего основания $S_1 = b^2$, нижнего основания $S_2 = a^2$.

Полная поверхность $S = S_1 + S_2 + S_б$. По условию $S = 2S_б$. Следовательно, $S_б = S_1 + S_2$; $2(a+b)x = a^2 + b^2$; $x = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$. Опустим перпендикуляр M_1P на плоскость нижнего основания. Тогда P принадлежит OM,

$PM = \frac{a-b}{2}$. Из $\Delta M_1PM(\angle M_1PM = 90°)$: $M_1P = \sqrt{MM_1^2 - PM^2} =$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4(a+b)} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}}{2(a+b)} = \frac{ab}{a+b}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} M_1P(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

Ответ: $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

11.158. В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно a, один плоский угол при вершине пирамиды прямой, а каждый из остальных равен 60°. Вычислить объем пирамиды.

Решение.

Пусть D — вершина пирамиды $DABC$ (рис. 11.53), по условию $DA = DB = DC = a$, $\angle ADC = \angle BDC = 60°$, $\angle ADB = 90°$.

Тогда ΔADC и ΔBDC — равносторонние, $AC = BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$. Так как $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle ACB = 90°$ и $S_{\Delta ACB} = \frac{a^2}{2}$. DO — высота пирамиды. Так как боковые ребра пирамиды равны, то точка O — центр окружности, описанной около основания пирамиды. Так как ΔABC прямоугольный, то точка O — середина гипотенузы AB, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из

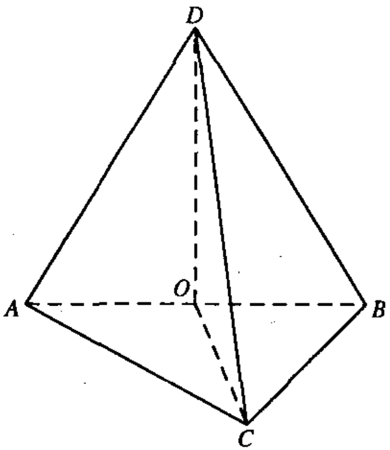


Рис. 11.53

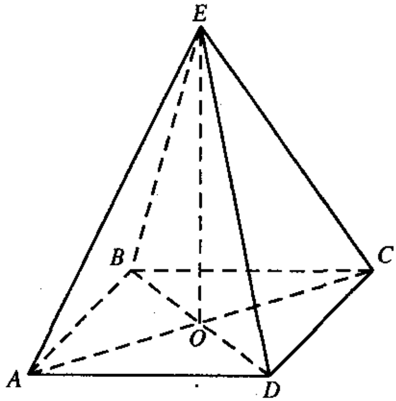


Рис. 11.54

$\Delta AOD(\angle AOD = 90°)$: $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ACB} \cdot DO = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

11.159. Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого 9 и 10 см, а одна из диагоналей 11 см. Противоположные боковые ребра равны, и длина каждого из больших ребер составляет 10,5 см. Вычислить объем пирамиды.

Решение.

Пусть параллелограмм $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$ (рис. 11.54), $AB = 9$ см, $AD = 10$ см, $BD = 11$ см, $AE = CE$, $BE = DE$. O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма. Тогда EO — медиана равнобедренных треугольников AEC и BED.

Следовательно, $EO \perp AC$, $EO \perp BD$, то есть отрезок EO перпендикулярен плоскости основания и является высотой пирамиды. $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$; $AC = \sqrt{241}$ см. Значит, $AC > BD$ и $AO > BO$. AO — проекция AE, BO — проекция BE на плоскость основания. Следовательно, $AE > BE$, $AE = 10{,}5$ см$=\frac{21}{2}$ см. Из $\Delta AOE(\angle AOE = 90°)$: $EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{441}{4} - \frac{241}{2}} = 5\sqrt{2}$ (см). По формуле Герона $S_{\Delta ABD} = 30\sqrt{2}$ см², площадь параллелограмма $ABCD$ $A = 2S_{\Delta ABD} = 60\sqrt{2}$ см². Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S \cdot EO = 200$ см³.

Ответ: 200 см³.

11.160. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями d_1 и d_2. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна Q. Вычислить объем пирамиды при условии, что $d_1 > d_2$.

Решение.

Искомый объем $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot SA$, где $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}d_1d_2$ (рис. 11.55) В ΔSAO имеем $SA = \sqrt{SO^2 - AO^2}$, где $AO = \frac{d_1}{2}$, а $SO = \frac{2Q}{d_2}$, так как по условию $\frac{1}{2}d_2 \cdot SO = Q$. Отсюда $SA = \sqrt{\frac{4Q^2}{d_2^{\,2}} - \frac{d_1^{\,2}}{4}} = \frac{\sqrt{16Q^2 - d_1^{\,2}d_2^{\,2}}}{2d_2}$.

Получили $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \frac{\sqrt{16Q^2 - d_1^{\,2}d_2^{\,2}}}{2d_2} = \frac{d_1}{12}\sqrt{16Q^2 - d_1^{\,2}d_2^{\,2}}$.

Ответ: $\frac{d_1}{12}\sqrt{16Q^2 - d_1^{\,2}d_2^{\,2}}$.

11.161. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны P и Q, а длина их общего ребра равна a. Определить объем пирамиды.

Решение.

Пусть в пирамиде $ABCS$ грани ABC и ABS взаимно перпендикулярны, ΔABC — основание пирамиды, точка S — ее вершина (рис. 11.56), $S_{\Delta ABC} = P$, $S_{\Delta ASB} = Q$, $AB = a$. В плоскости ABS опустим перпендикуляр SK на AB. Тогда отрезок SK перпендикулярен плоско-

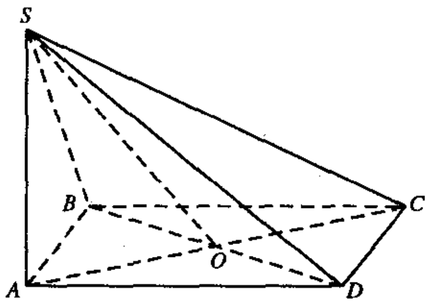


Рис. 11.55

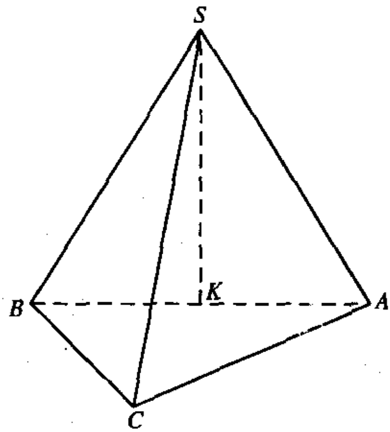


Рис. 11.56

сти ABC и является высотой пирамиды. Из ΔASB: $SK = \frac{2S_{\Delta ASB}}{AB} = \frac{2Q}{a}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SK = \frac{2PQ}{3a}$.

Ответ: $\frac{2PQ}{3a}$.

11.162. В треугольной пирамиде все четыре грани — равные равнобедренные треугольники с основанием a и боковой стороной b. Вычислить объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

Решение.

В пирамиде $SABC$ (рис. 11.57) $AB = AC = BS = CS = b$, $BC = AS = a$: E — середина BC. Тогда $AE \perp BC$, $SE \perp BC$. Следовательно, прямая BC перпендикулярна плоскости ASE. Тогда плоскость ABC также перпендикулярна плоскости ASE. В плоскости ASE опустим перпендикуляр SO на AE. Тогда отрезок SO перпендикулярен плоскости ABC и является высотой пирамиды.

Из $\Delta AEB (\angle AEB = 90°)$: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

M — середина AS. Тогда EM — высота треугольника ΔAES и

$EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{(b^2 - \frac{a^2}{4}) - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.

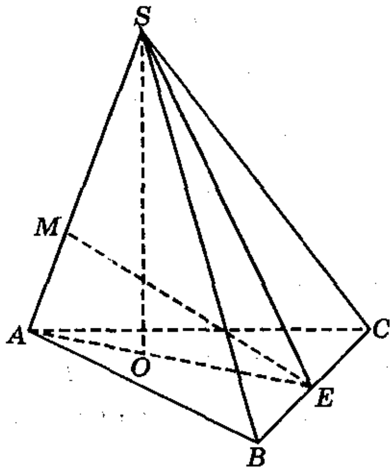


Рис. 11.57

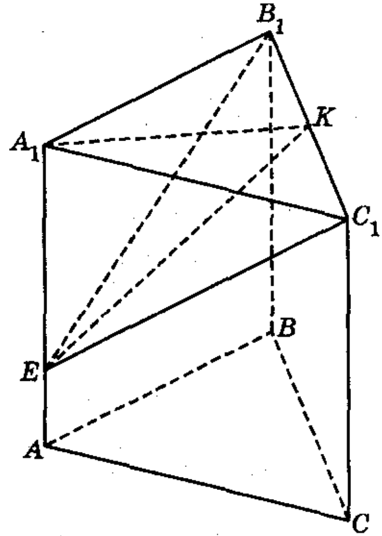


Рис. 11.58

$$S_{\Delta AES} = \frac{1}{2} AS \cdot EM = \frac{1}{2} AE \cdot SO.$$

Тогда $SO = \frac{AS \cdot EM}{AE} = \frac{a \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a\sqrt{4b^2 - a^2}\, \frac{a\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{12}.$$

Задача имеет решение при $\begin{cases} 4b^2 - 2a^2 > 0 \\ 4b^2 - a^2 > 0 \end{cases}$, т.е. при $0 < a < b\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{12}; 0 < a < b\sqrt{2}$.

11.163. В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны a, b и c. Боковое ребро равно l, высота призмы h. Определить полную поверхность призмы.

Решение.

Полная поверхность призмы $S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}$. Так как a, b, c — расстояния между боковыми ребрами призмы, то $a+b+c$ — периметр сечения, перпендикулярного ребру.

Следовательно, $S_{бок}=(a+b+c)l=2pl$, где $p=(a+b+c)/2$. По формуле Герона находим $S_{сеч}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Далее, учитывая, что $V=S_{сеч}l=S_{осн}h$, имеем $S_{осн}=S_{сеч}\,l/h$. Окончательно получим $S_{полн}=\dfrac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+2pl$.

Ответ: $\dfrac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+2pl.$

11.164. Сторона основания правильной треугольной призмы меньше бокового ребра и равна a. Через сторону верхнего основания проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 45° и делит призму на две части. Определить объем и полную поверхность верхней части призмы.

Решение.

В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ $B_1C_1=a$, $B_1C_1<AA_1$, E — точка пересечения плоскости, проходящей через сторону B_1C_1 верхнего основания, и прямой AA_1 (рис. 11.58). Пусть K — середина B_1C_1. Тогда $A_1K\perp B_1C_1$; $A_1K=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot A_1K$ является проекцией отрезка EK на плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда $EK\perp B_1C_1$, $\angle A_1KE$ — угол между секущей плоскостью B_1EC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1, \angle AKE=45°$.

Значит, $A_1E=A_1K=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, и так как $B_1C_1<AA_1$, то $A_1E<AA_1$, т.е. точка E принадлежит отрезку AA_1. Следовательно, верхняя часть призмы, о которой говорится в условии задачи, — пирамида с основанием $A_1B_1C_1$ и высотой EA_1, объем которой $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot EA_1=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{8}$,

$S_{\Delta EA_1C_1}=S_{\Delta EA_1B_1}=\dfrac{1}{2}EA_1\cdot A_1C_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $\Delta A_1B_1C_1$ — проекция ΔEB_1C_1 на

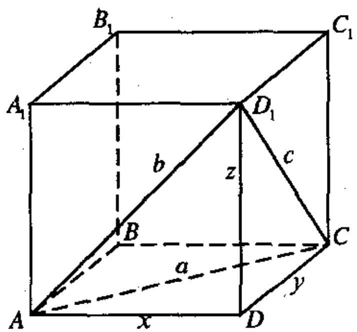


Рис. 11.59

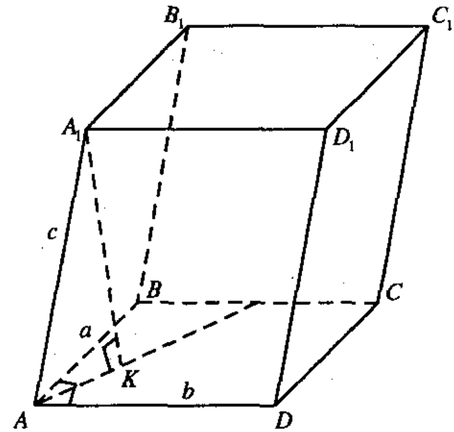


Рис. 11.60

плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда $S_{\Delta EB_1C_1} = \dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{\cos\angle A_1KE} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. Полная поверхность пирамиды $EA_1B_1C_1$:

$$S = 2S_{\Delta EA_1C_1} + S_{\Delta EB_1C_1} + S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{6}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3}{8}$; $\dfrac{a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{4}$.

11.165. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Определить его полную поверхность.

Решение.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.59) $AC = a$, $AD_1 = b$, $CD_1 = c$. Введем неизвестные $AD = x$, $CD = y$, $DD_1 = z$. Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2; \\ b^2 = x^2 + z^2; \\ c^2 = y^2 + z^2; \end{cases}$ Сложив почленно уравнения системы получим: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$, отсюда $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + z^2)$; $a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + z^2)$; $a^2 + b^2 + c^2 = 2(c^2 + x^2)$.

Следовательно, $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$; $y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$; $z=\sqrt{\frac{c^2+b^2-a^2}{2}}$.

Полная поверхность параллелепипеда:

$$S=2(xy+xz+yz)=\sqrt{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2}+\sqrt{b^4-\left(a^2-c^2\right)^2}+\sqrt{c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}.$$

Ответ: $\sqrt{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2}+\sqrt{b^4-\left(a^2-c^2\right)^2}+\sqrt{c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}$.

11.166. Длины ребер параллелепипеда равны a, b и c. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а ребро с длиной c образует с каждым из них угол 60°. Определить объем параллелепипеда.

Решение.

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.60) $AB=a$, $AD=b$, $\angle BAD=90°$, $AA_1=c$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=60°$, A_1K — высота. Так как $\angle A_1AB=\angle A_1AD$, то AK — биссектриса $\angle BAD$. AA_1 — наклонная к плоскости основания, AK — ее проекция, AD — прямая, лежащая в этой плоскости. Тогда $\cos\angle A_1AD=\cos\angle A_1AK\cdot\cos\angle KAD$;

$$\cos\angle A_1AK=\frac{\cos\angle A_1AD}{\cos\angle KAD}=\frac{\cos 60°}{\cos 45°}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $\angle A_1AK=45°$, ΔAKA_1 — прямоугольный и равнобедренный и $A_1K=\frac{AA_1\sqrt{2}}{2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}$. Объем параллелепипеда $V=S_{ABCD}\cdot A_1K=\frac{abc\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$.

11.167. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограм с углом 120° и сторонами 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.61) $AB=3$ см, $AD=4$ см, $\angle ABC=120°$. Тогда AC — большая диагональ основания, B_1D — меньшая диагональ параллелепипеда, $B_1D=AC$. Площадь основания $ABCD$: $S=AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=6\sqrt{3}$ см². Из ΔABC:

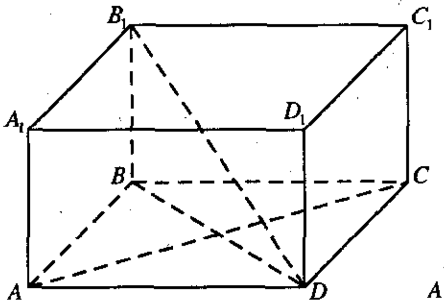


Рис. 11.61

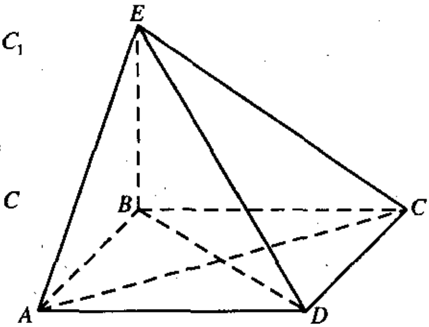


Рис. 11.62

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC = 9 + 16 - 24\cos 120° = 37$ (см). Из ΔBAD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle BAD = 9 + 16 - 24\cos 60° = 13$ (см).

Из $\Delta B_1BD\ (\angle B_1BD = 90°)$: $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (см).

Объем параллелепипеда $V = S \cdot BB_1 = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 36\sqrt{2}$ (см³).

Ответ: $36\sqrt{2}$ (см³).

11.168. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30 и 60°. Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию основание пирамиды $EABCD$ — прямоугольник $ABCD$, боковые грани ABE и CBE перпендикулярны плоскости основания (рис. 11.62). Тогда их общее ребро EB перпендикулярно плоскости основания и является высотой пирамиды. BA — проекция EA на плоскость основания, $BA \perp AD$. Тогда $EA \perp AD$ и, следовательно, $\angle EAB$ — угол наклона боковой грани EAD к плоскости основания, $\angle EAB = 60°$. Аналогично $\angle ECB = 30°$.

Пусть $EB = H$. Из $\Delta ABE(\angle ABE = 90°)$: $AB = BE\mathrm{ctg}\angle EAB = \dfrac{H\sqrt{3}}{3}$.

Из $\Delta CBE\ (\angle CBE = 90°)$: $BC = BE\mathrm{ctg}\angle ECB = H\sqrt{3}$.

Так как $AB \cdot BC = S$, то $\dfrac{H\sqrt{3}}{3} \cdot H\sqrt{3} = S$, $H = \sqrt{S}$. Объем параллелепипеда $V = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{S\sqrt{S}}{3}$.

Ответ: $\frac{S\sqrt{S}}{3}$.

11.169. Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна боковой грани.

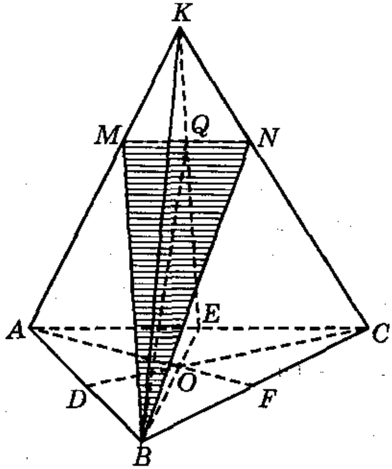


Рис. 11.63

Решение.

Пусть KO — высота правильной пирамиды $KABC$ (рис. 11.63), M — середина AK, N — середина CK, плоскость MBN перпендикулярна плоскости AKC. BM и BN — медианы равных равнобедренных ΔAKB и ΔCKB, проведенные к их боковым сторонам. Следовательно, $BM=BN$. Q — точка пересечения средней линии MN и медианы KE треугольника AKC. Следовательно, Q — середина KE и MN, и так как $BM=BN$, то BQ — высота и медиана ΔMBN. Так как плоскости MBN и AKC перпендикулярны, то отрезок BQ перпендикулярен плоскости AKC и, следовательно, $BQ \perp KE$. Итак, мы имеем: BQ — медиана и высота ΔKBE. Отсюда следует, что $BK = BE$. Пусть $BK = BE = 1$. Тогда $BO = \frac{2}{3}, OE = \frac{1}{3}$. Из прямоугольного треугольника BOK $(\angle BOK = 90°)$:

$KO^2 = BK^2 - BO^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$; далее из $\Delta EOK(\angle EOK = 90°)$ находим

$KE = \sqrt{KO^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Так как пирамида правильная, то

$S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\angle KEO}$. Тогда

$$\frac{S_б}{S_{осн}} = \frac{1}{\cos\angle KEO} = \frac{KE}{EO} = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{1}{3} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

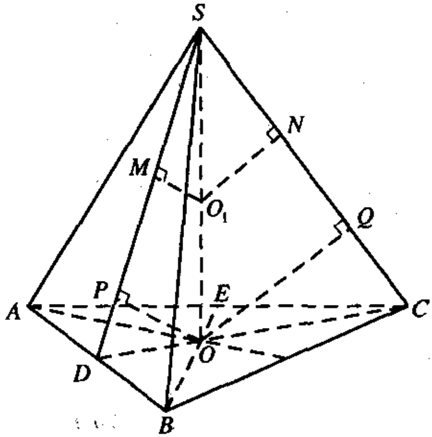


Рис. 11.64

11.170. Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и на боковую грань. Длины этих перпендикуляров равны соответственно a и b. Найти объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

Решение.

Пусть O_1 — середина высоты SO правильной пирамиды $SABC$ (рис. 11.63), SD — апофема боковой грани ASB. O_1N и O_1M — перпендикуляры, опущенные соответственно на SC и SD, $O_1N = a$. Так как пирамида $SABC$ правильная, то плоскости ASB и SDO перпендикулярны и, следовательно, отрезок O_1M перпендикулярен плоскости ASB, $O_1M = b$. Опустим перпендикуляры OQ и OP на SC и SD соответственно. Тогда, так как $OP \| O_1M$, $OQ \| O_1N$, O_1 — середина SO, то $OP = 2\cdot O_1M = 2b$, $OQ = 2\cdot O_1N = 2a$. Пусть $\angle SCO = \alpha$, $\angle SDO = \beta$, $SO = H$. Тогда из ΔOPD ($\angle OPD = 90^\circ$) $OD = \dfrac{2b}{\sin\beta}$, из ΔOQC ($\angle OQC = 90^\circ$) $OC = \dfrac{2a}{\sin\alpha}$. Так как $OC = 2\cdot OD$, то $\dfrac{2a}{\sin\alpha} = 2\cdot\dfrac{2b}{\sin\beta}$; $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{2b}$. Пусть OP — высота прямоугольного ΔSOD, опущенная на гипотенузу.

Тогда $\angle SOP = \angle SDO = \beta$. Аналогично $\angle SOQ = \angle SCO = \alpha$. Из ΔSPO ($\angle SPO = 90^\circ$): $H = \dfrac{OP}{\cos\angle SOP} = \dfrac{2b}{\cos\beta}$.

Из ΔSQO ($\angle SQO = 90^\circ$): $H = \dfrac{OQ}{\cos\angle SOQ} = \dfrac{2a}{\cos\alpha}$.

Тогда $\frac{2b}{\cos\beta}=\frac{2a}{\cos\alpha}$; $\cos\alpha=\frac{a\cos\beta}{b}$. Так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, то

$\frac{a^2\sin^2\beta}{4b^2}+\frac{a^2\cos^2\beta}{b^2}=1$; $\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{4}\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)=1$; $\frac{1}{4}\sin^2\beta+1-\sin^2\beta=\frac{b^2}{a^2}$;

$\frac{3}{4}\sin^2\beta=\frac{a^2-b^2}{a^2}$; $\sin\beta=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{3}}$; $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4(a^2-b^2)}{3a^2}}=$

$=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{a\sqrt{3}}$. Тогда $H=\frac{2b}{\cos\beta}=\frac{2ab\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$.

Площадь основания

$$S=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(2\sqrt{3}\cdot DO)^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}\cdot DO^2=3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2b}{\sin\beta}\right)^2=3\sqrt{3}\cdot\frac{12a^2b^2}{4(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{9a^2b^2\sqrt{3}}{a^2-b^2}.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\cdot\frac{9a^2b^2\sqrt{3}}{a^2-b^2}\cdot\frac{2ab\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2-a^2}}=\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

Задача имеет решение при $\begin{cases}a^2-b^2>0;\\4b^2-a^2>0,\end{cases}$ то есть при $b<a<2b$.

Ответ: $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$; $b<a<2b$.

11.171. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить объем куба.

Решение.

Рассмотрим сечение указанных полушара и куба плоско-

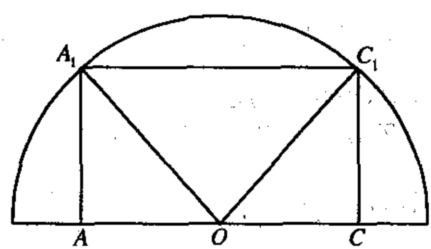


Рис. 11.65

стью, проходящей через противоположные боковые ребра AA_1 и CC_1 куба (рис. 11.65), O — центр полушара и принадлежит диагонали AC основания куба. Пусть ребро куба $AA_1 = x$. Тогда $OA = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ и из ΔA_1AO ($\angle A_1AO = 90°$): $OA_1 = \sqrt{AA_1^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{2}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$. Так как $OA_1 = R$, то $x\sqrt{\frac{3}{2}} = R$; $x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ и объем куба $V = x^3 = \frac{2}{3}R^3\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2R^3\sqrt{6}}{9}$.

Ответ: $\frac{2R^3\sqrt{6}}{9}$.

11.172. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 30°. Боковая поверхность конуса равна $3\pi\sqrt{3}$ кв. ед. Определить объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус.

Решение.

Правильный шестиугольник $ABCDEF$ — основание правильной пирамиды, вписанной в конус с высотой MO (рис. 11.66). Тогда $\angle MEO$ — угол между образующей конуса и плоскостью основания, $\angle MEO = 30°$. Пусть $EO = R$, $ME = l$.

Тогда из ΔMOE ($\angle MOE = 90°$) $l = ME = \frac{OE}{\cos\angle MEO} = \frac{R}{\cos 30°} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; $OM = OE\,tg\angle MEO = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Боковая поверхность конуса $S_б = \pi Rl = 3\pi\sqrt{3}$.

Тогда $R \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$; $R^2 = \frac{9}{2}$; $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Площадь основания пирамиды $S = 6S_{\Delta EOF} = 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (кв. ед.); $OM = \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S\cdot OM = \frac{1}{3}\cdot\frac{27\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{27}{4\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$ (куб. ед.)

Ответ: $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ куб. ед.

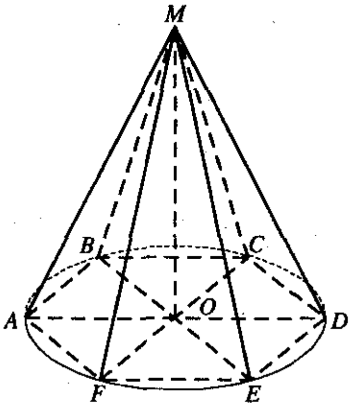


Рис. 11.66

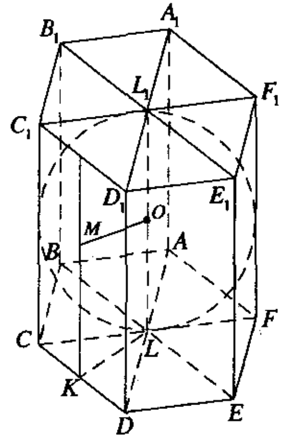


Рис. 11.67

11.173. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

Решение.

Правильный шестиугольник $ABCDEF$ — основание правильной призмы, описанной около шара с центром O (рис. 11.66). Точка O — середина оси LL_1 призмы, $LL_1 = 2R$. M — точка касания шара с гранью CC_1D_1D призмы, K — середина CD. Тогда OM и LK перпендикуляры грани CC_1D_1D и, следовательно, $OM \| LK$, а так как LO параллельна грани CC_1D_1D, то $LK = OM = R$. LK — высота равностороннего ΔCLD.

Тогда $CD = \frac{2LK\sqrt{3}}{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, $S_{\Delta CLD} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3}$.

Площадь основания призмы $S_{\text{осн}} = 6S_{\Delta CLD} = 2R^2\sqrt{3}$, периметр основания $P_{\text{осн}} = 6CD = 4R\sqrt{3}$, боковая поверхность призмы $S_6 = P_{\text{осн}} \cdot LL_1 = 8R^2\sqrt{3}$.

Полная поверхность призмы $S = 2S_{\text{осн}} + S_6 = 12R^2\sqrt{3}$.

Ответ: $12R^2\sqrt{3}$.

11.174. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем пирамиды.

Решение.

По условию, $\angle OAA_1 = 60^\circ$ (рис. 11.68); значит, $\angle O_1OA_1 = 30^\circ$ и $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1O = \frac{R}{2}$, $OO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Находим $S_{\text{нижн.осн}} = 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\text{верхн.осн}} = \frac{1}{4}S_{\text{нижн.осн}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$.

Получаем, что $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \sqrt{\frac{9R^4\cdot 3}{16}}\right) = \frac{21R^3}{16}$.

Ответ: $\frac{21R^3}{16}$.

11.175. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность параллелепипеда.

Решение.

Пусть радиус шара равен R. В сечении шара плоскостью, проходящей через его центр и параллельной основанию параллелепипеда, получим параллелограмм, описанный около окружности радиуса R. Поскольку суммы противоположных сторон такого описанного параллелограмма равны, он представляет собой ромб. Пусть сторона ромба равна m; тогда искомая полная поверхность $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2m\cdot 2R + 4m\cdot 2R = 6m\cdot 2R = 6S_{\text{осн}}$.

Но $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}ab$ и окончательно получим $S = 3ab$.

Ответ: $3ab$.

11.176. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен r.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$, вписанной в шар радиуса R (рис. 11.69), $OC = r$. Точки A, E, C принадлежат поверхности шара. Следовательно, R — радиус круга, описанного около ΔAEC. Тогда $R = \frac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{\Delta AEC}} = \frac{EC^2\cdot AC}{4\cdot\frac{1}{2}AC\cdot EO} = \frac{EC^2}{2EO}$. Пусть

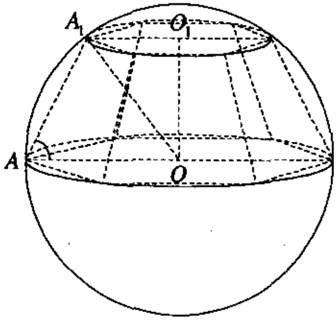


Рис. 11.68

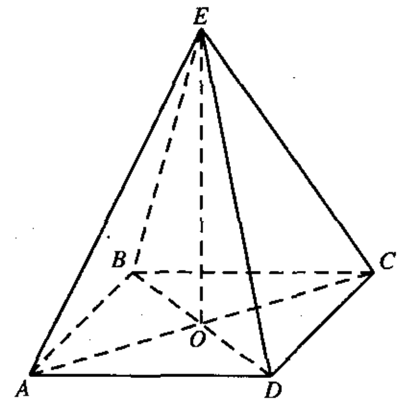


Рис. 11.69

$EO = H$. Тогда из ΔEOC: $EC^2 = H^2 + r^2$. Значит, $\dfrac{H^2 + r^2}{2H} = R$; $H^2 - 2HR + r^2 = 0$; $H = R + \sqrt{R^2 - r^2}$ или $H = R - \sqrt{R^2 - r^2}$.

Площадь основания пирамиды $S = \dfrac{1}{2}AC^2 = 2r^2$, а ее объем

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{2r^2\left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2r^2\left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)}{3}$.

11.177. Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью S вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

Решение.

Искомый объем $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Пусть конус образован вращением ΔABC вокруг катета BC (рис. 11.70); тогда $AC = r$, $BC = h$. По условию $\dfrac{1}{2}rh = S$; тогда $V = \dfrac{2}{3}\pi r S$. Далее, по условию, $2\pi \cdot DN = L$, где D —

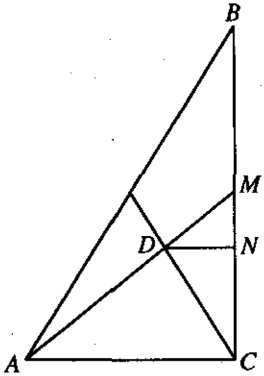


Рис. 11.70

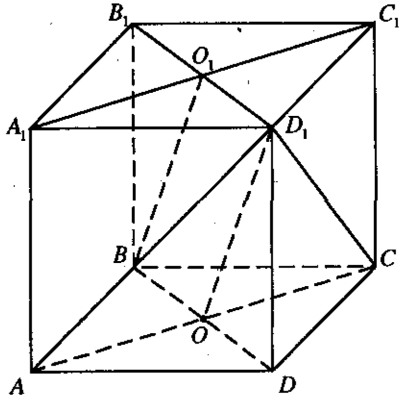


Рис. 11.71

точка пересечения медиан, $DN \perp BC$. Но $DN : AC = DM : AM = 1:3$, $\Rightarrow$

$DN = \frac{r}{3}$; следовательно, $\frac{2}{3}\pi r = L$, $r = \frac{3L}{2\pi}$. Имеем $V = \frac{2}{3}\pi S \cdot \frac{3L}{2\pi} = SL$.

Ответ: SL.

11.178. Треугольник со сторонами, равными a, b и c, вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом фигур.

Решение.

Пусть объемы тел вращения вокруг сторон a, b, c равны V_a, V_b, V_c; тогда $V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a$, $V_b = \frac{2}{3}\pi h_b^2 b$, $V_c = \frac{1}{3}\pi h_c^2 c$, где h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты.

Учитывая, что $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, имеем $V_a = \frac{2}{3}\pi S h_a$, $V_b = \frac{2}{3}\pi S h_b$, $V_c = \frac{2}{3}\pi S h_c$ или $V_a = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{a}$, $V_b = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{b}$, $V_c = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{c}$. Окончательно $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Ответ: $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

11.179. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость, параллельная

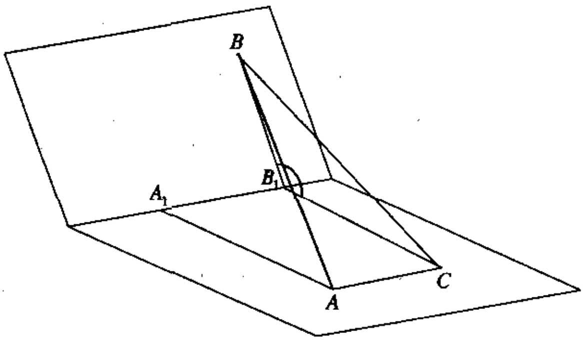


Рис. 11.72

прямой BO_1, где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найти площадь полученного сечения.

Решение.

Пусть O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 11.71). В четырехугольнике BO_1D_1O $BO \| O_1D_1$, $BO = O_1D_1$. Следовательно, BO_1D_1O — параллелограмм, $OD_1 \| BO_1$, и тогда прямая BO_1 параллельна плоскости AD_1C, а треугольник AD_1C — сечение куба искомой площади. Из

ΔODD_1 ($\angle ODD_1 = 90^\circ$): $OD_1 = \sqrt{OD^2 + DD_1^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\Delta AD_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot OD_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

11.180. На ребре двугранного угла 120° взят отрезок длиной c, и из его концов проведены перпендикуляры к нему, лежащие в различных гранях данного двугранного угла и имеющие длины a и b. Найти длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

Решение.

Пусть прямая A_1B_1 — ребро данного двугранного угла (рис. 11.72), $A_1B_1 = c$, $AA_1 \perp A_1B_1$, $BB_1 \perp A_1B_1$, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$. В плоскости AA_1B_1 проведем перпендикуляр B_1C к A_1B_1, $B_1C = A_1A$. Тогда $\angle BB_1C$ —

линейный угол данного двугранного угла, $\angle BB_1C = 120^\circ$, $AC \| A_1B_1$, $AC = A_1B_1 = c$. Так как A_1B_1 — перпендикуляр к плоскости BB_1C_1, то $A_1B_1 \perp BC$. $A_1B_1 \| AC$. Тогда $AC \perp BC$. Из ΔBB_1C: $BC^2 = BB_1^2 + B_1C^2 - 2BB_1 \cdot B_1C \cdot \cos\angle BB_1C = b^2 + a^2 - 2ab\cos 120^\circ = a^2 + ab + b^2$.

Из ΔBCA ($\angle BCA = 90^\circ$): $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab}$.

11.181. Полная поверхность конуса равна πS кв. ед. Развернутая на плоскости боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом 60°. Определить объем конуса.

Решение.

Пусть R — радиус основания конуса, l — его образующая, H — высота. Развертка боковой поверхности конуса — сектор круга радиуса l с центральным углом 60°, длина дуги которого $2\pi R$. Тогда $2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi l$; $l = 6R$. $H = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{35}$. Полная поверхность конуса $\pi S = \pi Rl + \pi R^2$. Следовательно, $S = R \cdot 6R + R^2 = 7R^2$, $R = \sqrt{\frac{S}{7}}$,

$H = \sqrt{\frac{S}{7}} \cdot \sqrt{35} = \sqrt{5S}$. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \frac{S}{7}\sqrt{5S} = \frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$.

Ответ: $\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$.

11.182. Радиус основания конуса равен R, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

Решение.

Пусть H — высота, l — образующая конуса. Тогда $l = \sqrt{H^2 + R^2}$, площадь осевого сечения $S_1 = RH$, площадь основания $S_2 = \pi R^2$, боковая поверхность $S_3 = \pi Rl = \pi R\sqrt{H^2 + R^2}$. По условию $S_3 = S_1 + S_2$.

Тогда $\pi R\sqrt{H^2 + R^2} = RH + \pi R^2$; $\pi\sqrt{H^2 + R^2} = H + \pi R$;

$\pi^2(H^2+R^2)=H^2+2\pi RH+\pi^2R^2$; $\pi^2H^2=H^2+2\pi RH$; $(\pi^2-1)H=2\pi R$;

$H=\dfrac{2\pi R}{\pi^2-1}$. Объем конуса $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2H=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot\dfrac{2\pi R}{\pi^2-1}=\dfrac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$.

11.183. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

Решение.

Пусть r и R — радиусы вписанного и описанного шаров (рис. 11.73); тогда $BD=3r$, $AD^2+BD^2=AB^2=4AD^2$, $BD^2=3AD^2$, $AD^2=3r^2$.

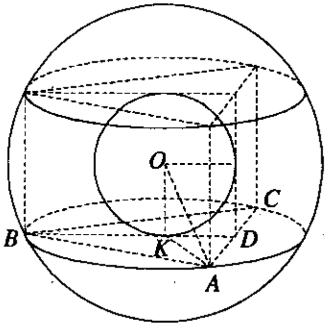


Рис. 11.73

Из ΔAKD находим, что

$KA^2=KD^2+AD^2=r^2+3r^2=4r^2$, а

из ΔOKA — что $OA^2=OK^2+KA^2=r^2+4r^2=5r^2=R^2$. Обозначив поверхности вписанного и описанного шаров через s и S, имеем $s=4\pi r^2$, $S=4\pi R^2$, тогда $S:s=R^2:r^2=5:1$.

Ответ: 5:1.

11.184. Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как $m:n$. Найти отношение их объемов.

Решение.

Пусть R — радиус основания цилиндра и радиус шара, H — высота, S_1 — полная поверхность, V_1 — объем цилиндра, S_2 — поверхность, V_2 — объем шара. Тогда $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\pi R^2+2\pi RH}{4\pi R^2}=\dfrac{R+H}{2R}=\dfrac{m}{n}$.

Пусть $R+H=m$. Тогда $2R=n$, $R=\dfrac{n}{2}$ и $H=m-R=\dfrac{2m-n}{2}$. Следовательно, $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi R^2H}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{3H}{4R}=\dfrac{3(2m-n)}{2}:2n=\dfrac{6m-3n}{4n}$.

Ответ: $\dfrac{6m-3n}{4n}$.

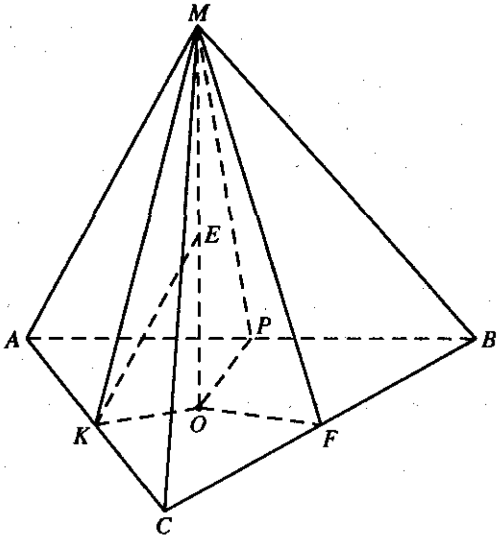


Рис. 11.74

11.185. Найти площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

Решение.

Пусть MO — высота пирамиды $MABC$ (рис. 11.74), $AC = 13$ см, $BC = 14$ см, $AB = 15$ см, $MK \perp AC$, $MP \perp AB$, $MF \perp BC$, $MK = MP = MF = 5$ см.

Тогда $OK \perp AC$, $OP \perp AB$, $OF \perp BC$, $OK = OP = OF$ и, следовательно, точка O — центр круга, вписанного в ΔABC, а $OK = r$ — радиус этого круга. Полупериметр треугольника ABC $p = 21$, его площадь вычисляем по формуле Герона $S_\Delta = 84$ см², $r = \dfrac{S_\Delta}{p} = 4$ см.

Из ΔKOM ($\angle KOM = 90°$): $MO = \sqrt{KM^2 - KO^2} = 3$ см. $\angle MKO$, $\angle MPO$, $\angle MFO$ — линейные углы двугранных углов при ребрах основания, и так как $\angle MKO = \angle MPO = \angle MFO$, центр E шара, вписанного в пирамиду, принадлежит и высоте MO, а KE является биссектрисой $\angle MKO$. Пусть радиус шара $EO = R$. По свойству биссектрисы треугольника из ΔMKO: $\frac{EO}{ME} = \frac{OK}{MK}$; $\frac{R}{3-R} = \frac{4}{5}$; $R = \frac{4}{3}$. Площадь

поверхности шара $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi}{9}$ см².

Ответ: $\frac{64\pi}{9}$ см².

11.186. Высота конуса равна h. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислить объем конуса.

Решение.

Пусть R — радиус основания конуса, l — ее образующая. Длина

дуги развертки боковой поверхности равна $2\pi R$ или $\frac{2\pi l}{3}$. Тогда

$2\pi R = \frac{2}{3}\pi l$, $l = 3R$. Так как $l^2 = R^2 + h^2$, то $9R^2 = R^2 + h^2$, $R^2 = \frac{h^2}{8}$.

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{8} \cdot h = \frac{\pi h^3}{24}$.

Ответ: $\frac{\pi h^3}{24}$.

11.187. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

Решение.

Проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему (рис. 11.75). Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны a, то $SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из ΔSOD находим

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Обозначим радиус шара через r, тогда $SO_1 = SO - r$.

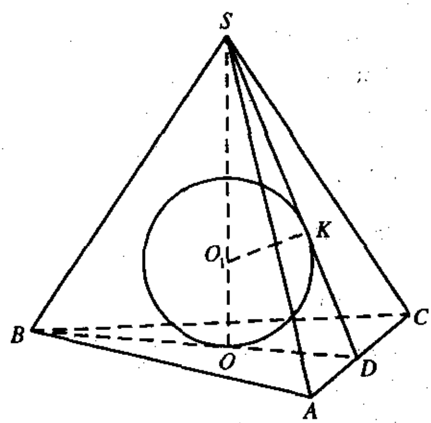


Рис. 11.75

В ΔSKO_1 имеем $O_1K^2 = SO_1^2 - SK^2$ или $r^2 = (SO - r)^2 - \frac{a^2}{3}$, откуда

$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2ar\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^2}{3}$, т.е. $r = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

Получили $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{6}$.

11.188. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной l, описанного около шара радиуса r.

Решение.

Для нахождения боковой поверхности усеченного конуса воспользуемся формулой $S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований усеченного конуса. Проведем плоскость через высоту конуса. В сечении получим равнобедренную трапецию, описанную около круга радиуса r, причем $AD = 2r_2$, $BC = 2r_1$ (рис. 11.76). Для описанного четырехугольника имеем $BC + AD = AB + CD$, т.е. $2r_1 + 2r_2 = 2l$, откуда $S_{\text{бок}} = \pi l^2$. Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi H\left((r_1 + r_2)^2 - r_1r_2\right)$, где $H = 2r$, $r_1 + r_2 = l$, $r_1r_2 = r^2$. Последнее соотношение получается из прямоугольного треугольника OCD, в котором $OK^2 = CK \cdot KD$ ($\angle COD = 90°$, поскольку OC и OD — биссектрисы углов трапеции и, значит, $\angle OCD + \angle CDO = 90°$). Итак, $V = \frac{2}{3}\pi r\left(l^2 - r^2\right)$.

Ответ: πl^2; $\frac{2\pi r\left(l^2 - r^2\right)}{3}$.

11.189. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 4$ см, помещен шар радиуса $r = 3$ см. В сосуд наливается вода так, что ее свободная поверхность касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если вынуть шар из сосуда.

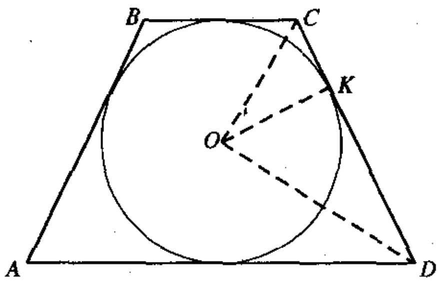


Рис. 11.76

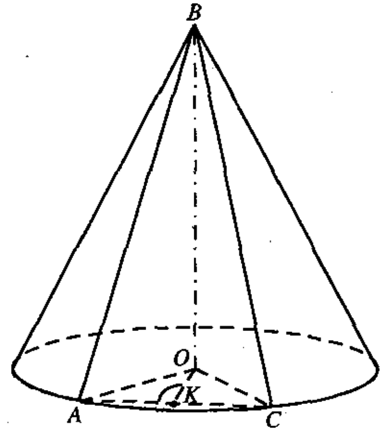


Рис. 11.77

Решение.

Пусть V_0 — объем воды в сосуде, когда в него помещен шар, V_1 — объем шара, V_2 — объем жидкости в сосуде после того, как вынули шар, h — высота искомого слоя жидкости, H — высота слоя жидкости с шаром, V — объем воды и шара вместе.

$$H = 2r = 6 \text{ см}; \; V = \pi R^2 H = 96\pi \text{ см}^3; \; V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \text{ см}^3;$$

$$V_0 = V - V_1 = 60\pi \text{ см}^3; \; V_2 = \pi R^2 h.$$

Так как $V_2 = V_0$, то $h = \dfrac{V_0}{\pi R^2} = \dfrac{60\pi}{\pi R^2} = \dfrac{60\pi}{16\pi} = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$ (см).

Ответ: 3,75 см.

11.190. Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении 1:2. Найти объем конуса.

Решение.

BO — высота данного конуса, BA и BC — образующие, о которых говорится в условии задачи (рис. 11.77). Пусть $BA = l$. Так как $BA = BC$ и $\angle ABC = 90^\circ$, то $AC = l\sqrt{2}$. Так как по условию образующие BA и BC делят площадь боковой поверхности конуса в отношении 1:2, то длина дуги, опирающейся на AC, составляет 1/3 длины окружности основания и $\angle AOC = 120°$. Пусть K — середина AC. Тогда $AK = \frac{l\sqrt{2}}{2}$, $\angle AOK = 60°$ и $AK = OA \cdot \sin\angle AOK$; $\frac{l\sqrt{2}}{2} = R\sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $l = R\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Высота конуса $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\frac{3}{2}R^2 - R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$.

11.191. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся как $m:n$. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

Решение.

Рассмотрим равнобокую трапецию MM_1K_1K и вписанный в нее круг с центром E — сечение данной комбинации тел плоскостью, проходящей через середины противоположных сторон оснований усеченной пирамиды (рис. 11.78). Пусть $MK = m$, r — радиус вписанного шара. Тогда $M_1K_1 = n$, высота усеченной пирамиды $H = 2r$, объем усеченной пирамиды $V_1 = \frac{2r}{3}\left(m^2 + n^2 + mn\right)$, объем шара $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

P — точка касания круга, вписанного в MM_1K_1K со стороной K_1K. Тогда $EP = r$, $EP \perp K_1K$, и так как ΔK_1EK прямоугольный, то $r^2 = EP^2 = K_1P \cdot PK$. $K_1P = K_1O_1 = \frac{n}{2}$; $KP = KO = \frac{m}{2}$. Тогда $r^2 = \frac{mn}{4}$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2r}{3}\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{2\pi r^2} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{2\pi\frac{mn}{4}} = \frac{2\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{\pi mn}.$$

Ответ: $\frac{2\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{\pi mn}$.

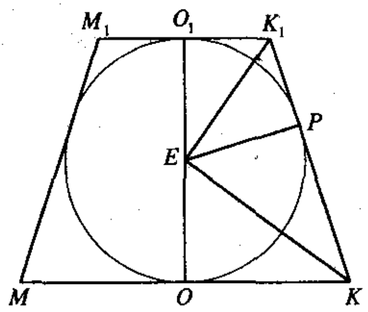


Рис. 11.78

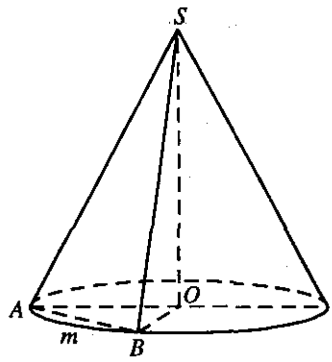


Рис. 11.79

11.192. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

Решение.

Пусть $AO = r$, $SO = h$ (рис. 11.79), V — объем конуса, V_1 и V_2 — объемы его частей. Найдем V_1 как разность между объемами части конуса, основанием которой является сектор AOB, и пирамиды, в основании которой лежит ΔAOB. Согласно условию, $AB = r$, т.е. AB — сторона правильного вписанного шестиугольника и, значит,

$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} h = \frac{1}{3} S_1 h$, где S_1 — площадь сегмента AmB.

Тогда $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3} S_2 h$, где $S_2 = \pi r^2 - S_1$. Таким образом, $V_1 : V_2 = S_1 : S_2$. Далее находим $S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$, $S_2 = \pi r^2 - \frac{r^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12} = \frac{r^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12} \Rightarrow V_1 : V_2 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

11.193. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30 и 60°. Найти объем описанного около пирамиды конуса, если высота пирамиды равна h.

Решение.

Пусть DO — высота пирамиды $DABC$ (рис. 11.80), $\angle ACB = 90°$, $DO = h$. Так как боковые ребра данной пирамиды равны, то O — центр окружности, описанной около ΔABC, и так как ΔABC прямоугольный, то O — середина гипотенузы AB. Опустим перпендикуляры OF и OE соответственно на катеты AC и BC основания. Так как OF — проекция DF на плоскость основания, OE — проекция DE, то $DF \perp AC$, $DE \perp BC$, $\angle DFO$ — угол наклона грани ADC к плоскости основания, $\angle DFO = 60°$, $\angle DEO$ — угол наклона грани BDC к плоскости основания, $\angle DEO = 30°$.

Из ΔDOF ($\angle DOF = 90°$): $OF = DO \operatorname{ctg} \angle DFO = h\sqrt{3}$. Из ΔDOE ($\angle DOE = 90°$): $OE = DO \operatorname{ctg} \angle DEO = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$. Радиус круга, описанного около ΔABC, $R = OC = \sqrt{OF^2 + OE^2} = \sqrt{3h^2 + \dfrac{h^2}{3}} = h\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

Объем конуса, описанного около данной пирамиды,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{10h^2}{3} \cdot h = \frac{10\pi h^3}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{10\pi h^3}{9}$.

11.194. Параллелограмм, периметр которого равен $2p$, вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длиной d и проходящей через ее конец. Найти поверхность фигуры вращения.

Решение.

Поверхность S тела вращения состоит из боковых поверхностей двух усеченных конусов, полученных при вращении отрезков BC и CD (рис. 11.81), и двух конусов, полученных при вращении отрезков AB и AD.

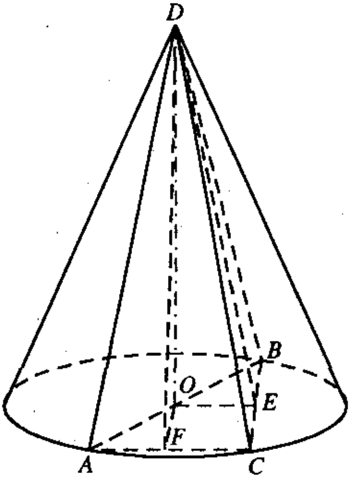


Рис. 11.80

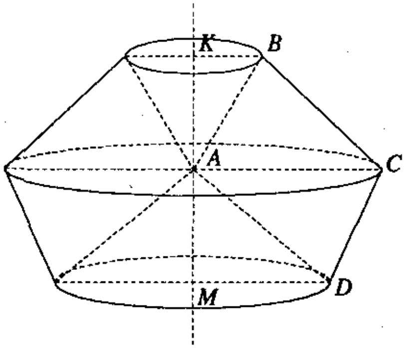


Рис. 11.81

Отсюда $S=\pi(KB+AC)BC+\pi(MD+AC)CD+\pi KB\cdot AB+\pi MD\cdot AD$. Учитывая, что $AD=BC$, $CD=AD$ и $KB+MD=AC$, имеем.

$$\pi(KB\cdot BC+AC\cdot BC+MD\cdot AB+AC\cdot AB+KB\cdot AB+MD\cdot BC)=$$
$$=\pi((KB+MD)BC+(KB+MD)AB+AC\cdot BC+AC\cdot AB)=$$
$$=\pi(2BC+2AB)AC.$$

По условию $AC=d$, $2BC+2AB=2p$, отсюда $S=2\pi dp$.

Ответ: $2\pi dp$.

11.195. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

Решение.

Пусть l — образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то

$2\pi R=\frac{2\pi l}{4}$ (по условию развертка представляет собой четверть круга),

откуда $l=4R$.

Найдем высоту конуса: $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{16R^2-R^2}=R\sqrt{15}$. Далее, $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R\sqrt{15}=\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$.

Решения к главе 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 12.1) можно вычислить по следующим формулам:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A; \tag{а}$$

$$S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD, \tag{б}$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

2. Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими (рис. 12.2). Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой

$$l_a = \frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}.$$

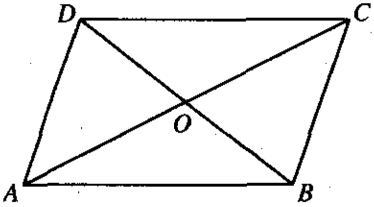


Рис 12.1

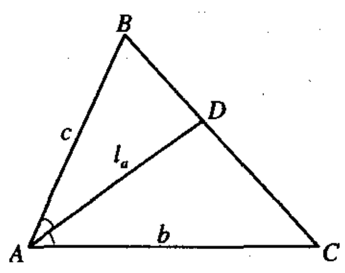


Рис 12.2

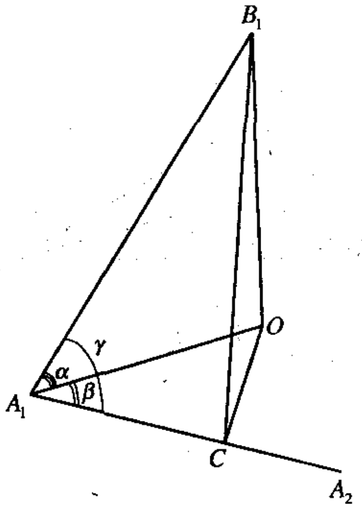


Рис 12.3

3. Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса:

$$l = 2R\sin\alpha; \quad \text{(а)}$$

$$l^2 = 2RH, \quad \text{(б)}$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания.

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

4. Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания, $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$ (рис. 12.3). Тогда справедливо равенство $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Доказательство этих соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

12.131. В остроугольном треугольнике ABC высота $AD = a$, высота $CE = b$, острый угол между AD и CE равен α. Найти AC.

Решение.

Так как ΔABC остроугольный, то точка O пересечения его высот находится внутри треугольника, $\angle AOE = \alpha$ (рис. 12.4).

ΔAEO и ΔADB — прямоугольные с общим углом $\angle DAB$. Отсюда, $\angle B = \angle AOE = \alpha$.

Из ΔCEB ($\angle CEB = 90°$): $CB = \dfrac{CE}{\sin\angle B} = \dfrac{b}{\sin\alpha}$.

Из ΔADB ($\angle ADB = 90°$): $AB = \dfrac{AD}{\sin\angle B} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Из ΔABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{b^2}{\sin^2\alpha} - \frac{2ab\cos\alpha}{\sin^2\alpha};$$

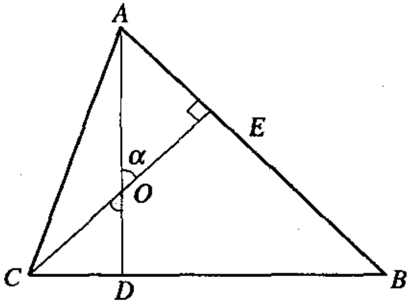


Рис. 12.4

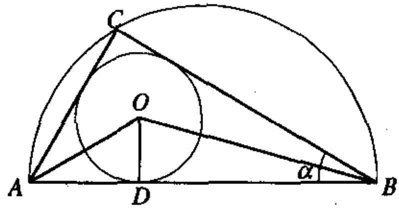


Рис. 12.5

$$AC=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

12.132. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение является наибольшим?

Решение.

В ΔABC (рис. 12.5) $\angle ABC=90°$, $\angle ABC=\alpha$, O — центр вписанной окружности, D — точка ее касания с гипотенузой AB.

Пусть радиус вписанной окружности $OD=r$.

Тогда из $\Delta BDO(\angle BDO=90°)$: $BD=OD\operatorname{ctg}\angle OBD=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Из $\Delta ADO(\angle ADO=90°)$: $AD=OD\operatorname{ctg}\angle OAD-r\operatorname{ctg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Радиус описанной окружности будет равен

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AD+BD)=\frac{1}{2}r\left(\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{r}{2}\cdot\frac{\sin 45°}{\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{2\sqrt{2}\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда $\dfrac{r}{R} = 2\sqrt{2}\sin\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

$$2\sqrt{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}(\cos(45° - \alpha) - \cos 45°) = \sqrt{2}\cos(45° - \alpha) - 1.$$

Полученное отношение принимает наибольшее значение, когда $\cos(45° - \alpha) = 1$, то есть, так как $0 < \alpha < 90°$, при $\alpha = 45°$.

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}; \alpha = 45°$.

12.133. Дуга AB сектора AOB содержит α радианов. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении она делит площадь сектора?

Решение.

Обозначим радиус данного сектора через R.

Площадь сектора AOB (рис. 12.6) $S = \dfrac{R^2\alpha}{2}$.

$$S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2}OC \cdot OB\sin\angle BOC = \frac{R^2\sin\alpha}{4}.$$

Площадь фигуры ABC

$$S_1 = S - S_{\Delta BCO} = \frac{R^2\alpha}{2} - \frac{R^2\sin\alpha}{4} = \frac{R^2}{4}(2\alpha - \sin\alpha).$$

Тогда $\dfrac{S_{\Delta BCO}}{S_1} = \dfrac{\sin\alpha}{2\alpha - \sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{\sin\alpha}{2\alpha - \sin\alpha}$.

12.134. Основания равнобедренной трапеции равны a и b $(a > b)$, угол при большем основании равен α. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

Решение.

Пусть BL — высота данной трапеции $ABCD$ (рис. 12.7), $BC = b$, $AD = a$, $\angle A = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$.

Тогда $AL = \dfrac{a - b}{2}$ и из ΔALB $(\angle ALB = 90°)$:

$$AB = \frac{a - b}{2\cos\alpha}.$$

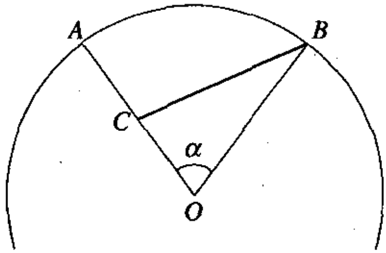


Рис. 12.6

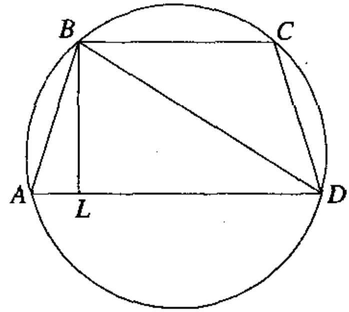


Рис. 12.7

Далее, из ΔABD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle A = \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} + a^2 - \frac{2a(a-b)}{2\cos\alpha}\cdot\cos\alpha =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4\cos^2\alpha} + a^2 - a^2 + ab = \frac{a^2-2ab+b^2+4ab\cos\alpha}{4\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{4\cos^2\alpha} = \frac{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}{4\cos^2\alpha}.$$

$$BD = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2a}}{2\cos\alpha}.$$

Радиус окружности, описанной около ΔBAD, будет равен

$$R = \frac{BD}{2\sin\angle A} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$.

12.135. Найти отношение площади сектора с данным центральным углом α радианов к площади вписанного в него круга.

Решение.

Пусть O — центр данного сектора AOB (рис. 12.8), центр O_1 вписанного в него круга принадлежит биссектрисе OK угла AOB.

Далее, пусть R — радиус сектора, r — радиус круга.

Тогда площадь сектора $S_1 = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, площадь круга $S_2 = \pi r^2$.

D — точка касания круга и радиуса OB.

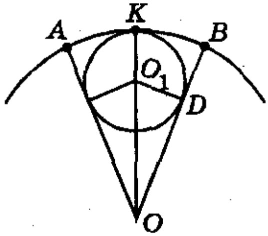


Рис. 12.8

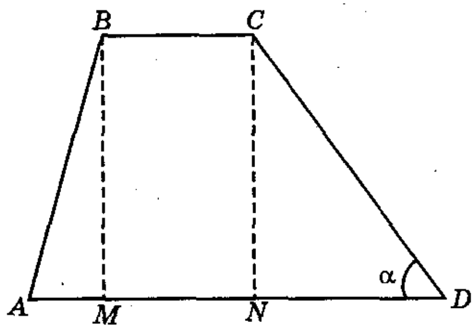


Рис. 12.9а

Тогда $O_1D \perp OB, O_1D = r$.

Из $\Delta O_1DO\left(\angle O_1DO = \frac{\pi}{2}\right): OO_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$R = OK = OO_1 + O_1K = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r = \frac{r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2r\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{R^2}{r^2} = \frac{4\alpha\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{2\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\alpha\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{2\alpha\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.136. Боковые стороны трапеции равны p и q ($p < q$), большее основание равно a. Углы при большем основании относятся как 2:1.
Найти меньшее основание.

Решение.

Пусть BM и CN — высоты трапеции $ABCD$ (рис. 12.9. а), $AB = p$, $CD = q$, $AD = a$.

Тогда $\angle A : \angle D = 2:1$, $MN = BC = x$. Пусть $\angle D = \alpha$. Тогда $\angle A = 2\alpha$.

В $\Delta\, AMB$ ($\angle AMB = 90°$)$: BM = p\sin 2\alpha$; $AM = p\cos 2\alpha$.

В $\Delta\, DNC$ ($\angle DNC = 90°$)$: CN = q\sin\alpha$; $DN = q\cos\alpha$.

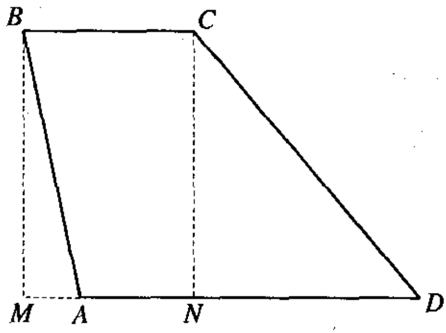


Рис.12.9б

Так как $BM = CN$, то $p\sin 2\alpha = q\sin\alpha$; $2p\sin\alpha\cos\alpha = q\sin\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{q}{2p}$.

$AD = AM + MN + ND$; $a = p\cos 2\alpha + x + q\cos\alpha$;

$$x = a - p\cos 2\alpha - q\cos\alpha = a - p\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - q\cos\alpha =$$

$$= a - p\left(2\cdot\frac{q^2}{4p^2} - 1\right) - q\cdot\frac{q}{2p} = a - \frac{q^2}{2p} + p - \frac{q^2}{2p} = \frac{p^2 + ap - q^2}{p}.$$

В случае, если $90° < 2\alpha < 180°$ (рис. 12.9 б) $AD = ND + MN - AM = q\cos\alpha + x - p\cos(180° - 2\alpha) = q\cos\alpha + x + q\cos 2\alpha$, и получаем тот же ответ.

Ответ: $\dfrac{p^2 + ap - q^2}{p}$.

12.137. Площадь равнобедренной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

Решение.

Пусть O — точка пересечения диагоналей данной трапеции $ABCD$, $AB = CD$ (рис. 12.10), $\angle AOB = \alpha$.

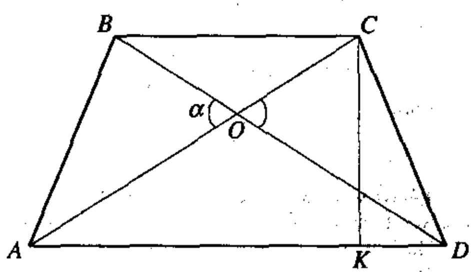


Рис. 12.10

Так как $\angle AOB$ — внешний угол ΔAOD, $AO = OD$, то $\angle CAD = \dfrac{\alpha}{2}$.

Пусть $CK = H$ — высота трапеции.

Из ΔAKC ($\angle AKC = 90°$): $AK = H \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда площадь трапеции $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CK = AK \cdot CK = H^2 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Окончательно, $H = \sqrt{S \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{S \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.138. Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при основании равен α. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит ее высоту?

Решение.

Пусть основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 12.11) есть диаметр круга, описанного около трапеции, тогда центр O круга — середина AD.

Высота KO трапеции проходит через точку L пересечения диагоналей, $\Delta BLC \sim \Delta ALD$, $\dfrac{KL}{LO} = \dfrac{LC}{LD}$.

$\angle ACD$ — вписанный, опирающийся на диаметр, поэтому $\angle ACD = 90°$.

$\angle ACD$ и $\angle AOL$ — прямоугольные с общим острым углом при вершине A. Отсюда, $\angle ALO = \angle ADC = \alpha$.

Тогда $\angle KLC = \angle OLD = a$, $\angle CLD = 180° - 2\alpha$, из $DLCD$ ($\angle LCD = 90°$):

$$\frac{LC}{LD} = \cos\angle CLD = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Ответ: $-\cos 2\alpha$.

12.139. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 — на стороне AC и точка C_1 — на стороне AB. Угол A_1B_1C равен α. Найти отношение AB к A_1B_1.

Решение.

В ΔA_1B_1C (рис. 12.12) $\angle C = 60°$, $\angle B_1A_1C = 120° - \alpha$.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{A_1C + B_1C}{A_1B_1} = \frac{A_1C}{A_1B_1} + \frac{B_1C}{A_1B_1} = \frac{\sin\angle A_1B_1C}{\sin\angle C} + \frac{\sin\angle B_1A_1C}{\sin\angle C} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin(120° - \alpha)}{\sin 60°} = \frac{2\sin 60° \cos(60° - \alpha)}{\sin 60°} = 2\sin(30° + \alpha).$$

Ответ: $2\sin(30° + \alpha)$.

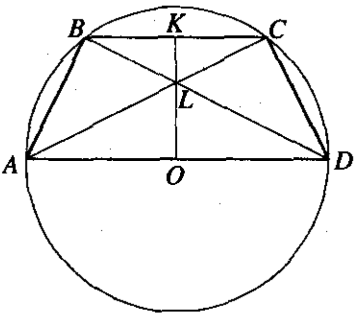


Рис. 12.11

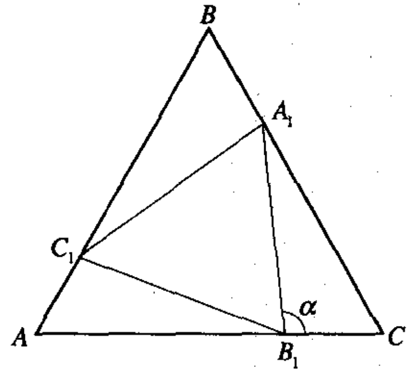


Рис. 12.12

12.140. В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника ABC точка O, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом ($\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$), если угол при основании треугольника равен $\alpha\left(\alpha > \frac{\pi}{6}\right)$?

Решение.

Пусть BD — высота, биссектриса и медиана ΔABC (рис.12.13).

$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \frac{2\pi}{3}$.

$\angle AOK = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{\pi}{3}$.

Пусть $OK = 1$, тогда из $\Delta ADO\left(\angle ADO = \frac{\pi}{2}\right)$:

$AD = OD \operatorname{tg}\angle AOD = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Из $\Delta ADB\left(\angle ADB = \frac{\pi}{2}\right)$: $BD = AD\operatorname{tg}\angle BAD = \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BD - OD}{OD} = \frac{BD}{OD} - 1 = \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1 = \sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$, считая от вершины.

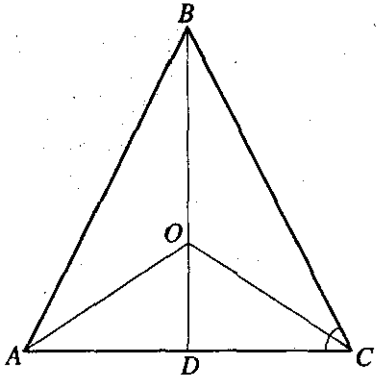


Рис. 12.13

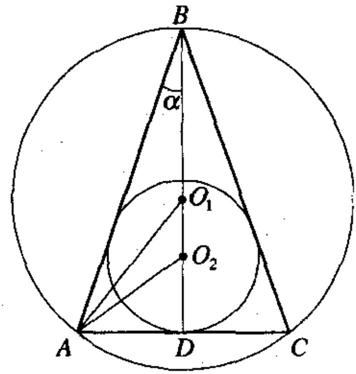


Рис. 12.14

12.141. Высота равнобедренного треугольника равна h и составляет с боковой стороной угол $\alpha\left(\alpha \le \dfrac{\pi}{6}\right)$. Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

Решение.

Пусть BD — высота ΔABC, $AB = BC$, $BD = h$, $\angle ABD = \alpha$, O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

Так как $\angle ABC = 2\alpha \le \dfrac{\pi}{3}$, то точки O_1 и O_2 расположены на отрезке BD так, что O_1 лежит между точками B и O_2 (рис.12.14).

В $\Delta ADB\left(\angle ADB = \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$AD = BD\,\text{tg}\,\angle ABD = h\,\text{tg}\,\alpha$.

$$\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha, \angle DAO_2 = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \Delta ADO_2\left(\angle ADO_2 = \frac{\pi}{2}\right): AO_2 = \frac{AD}{\cos\angle DAO_2} = \frac{h\,\text{tg}\,\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как $\angle AO_1O_2$ — внешний угол равнобедренного треугольника AO_1B $(O_1A = O_1B)$, то $\angle AO_1O_2 = 2\,\angle ABD = 2\alpha$.

$$\angle O_1AO_2=\angle BAD-(\angle BAO_1+\angle DAO_2)=\frac{\pi}{2}-\alpha-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}.$$

$$\text{В}\,\Delta O_1AO_2:\frac{O_1O_2}{\sin\angle O_1AO_2}=\frac{AO_2}{\sin\angle AO_1O_2}\Rightarrow O_1O_2=AO_2\cdot\frac{\sin\angle O_1AO_2}{\sin\angle O_2O_1A}=$$

$$=\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}=\frac{h\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{h\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.142. В окружность радиуса R вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении 2 : 5 : 17. Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть $\cup AB=2x$ (рис. 12.15), $\cup BC=5x$, $\cup AmC=17x$ и $2x+5x+17x=360°, x=15°$ $\Rightarrow\angle AOB=\cup AB=30°, \angle BOC=\cup BC=75°$, $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=105°$.

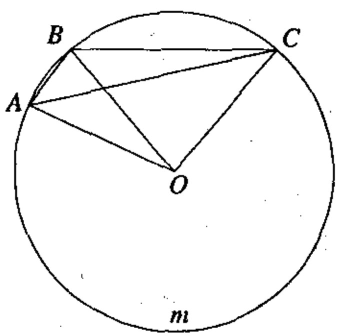


Рис. 12.15

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}-S_{\Delta AOC}=$$

$=\frac{1}{2}R^2\sin 30°+\frac{1}{2}R^2\sin 75°-\frac{1}{2}R^2\sin 105°$. Так как $\sin 75°=\sin 105°$, то $S_{\Delta ABC}=\dfrac{R^2}{4}$.

Ответ: $\dfrac{R^2}{4}$.

12.143. Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен 3/4. Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

Решение.

В ΔABC $AB=BC$, AM — биссектриса, AN — медиана, BD — высота, (рис.12.16). $\angle C=\alpha, \mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{3}{4}$.

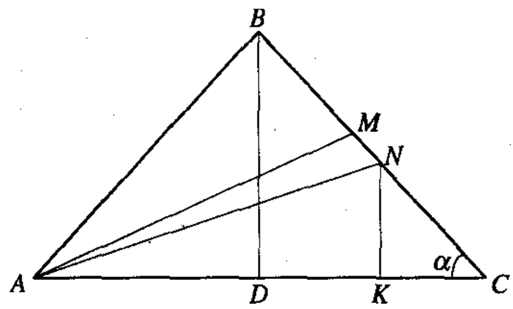


Рис. 12.16

Пусть $BD = 3x \Rightarrow CD = BD\operatorname{ctg}\alpha = 4x$.

Проведем $NK \parallel BD$. Так как $BN=NC$, то $DK=KC=2x$, $NK = \frac{1}{2}BD = 1{,}5x$,

$AK = AD + DK = 6x$ $\angle MAC = \frac{\alpha}{2}$.

Пусть $\angle MAN = \gamma$, тогда $\angle NAC = \frac{\alpha}{2} - \gamma$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) = \frac{NK}{AK} = \frac{1{,}5x}{6x} = \frac{1}{4}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{4}; 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 3 = 0; \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -3.$$

Так как α — угол острый, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$. Таким образом

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{4}; \quad \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{13}.$$

Ответ: $\frac{1}{13}$.

12.144. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен $\frac{3}{5}$.

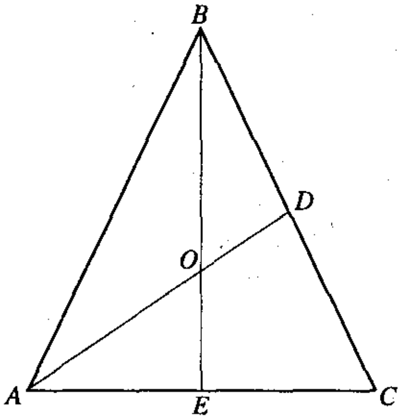


Рис. 12.17

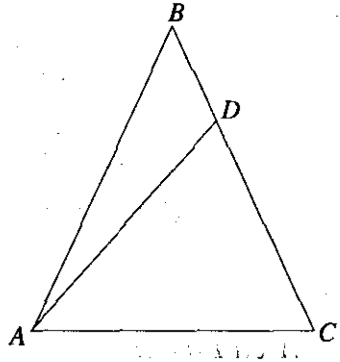


Рис. 12.18

Решение.

В ΔABC $AB = BC$, BE — высота, медиана, биссектриса. AD — медиана, O — точка пересечения AD и BE (рис. 12.17), $\sin\angle OAE = \dfrac{3}{5}$.

Пусть $AO = 5x$, тогда $OE = 3x$, $OE = 3x$, $AE = 4x$.

$BE = 3OE = 9x$.

Если $\angle ABC = \alpha$, то из $\Delta AEB\left(\angle AEB = 90^\circ\right)$: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{4}{9}$.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{8}{9}}{1+\frac{16}{81}} = \frac{72}{97}.$$

Ответ: $\dfrac{72}{97}$.

12.145. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противоположную боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

Решение.

В ΔABC $AB = BC$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ (рис. 12.18)

Тогда $\angle BAD = \alpha - \beta$.

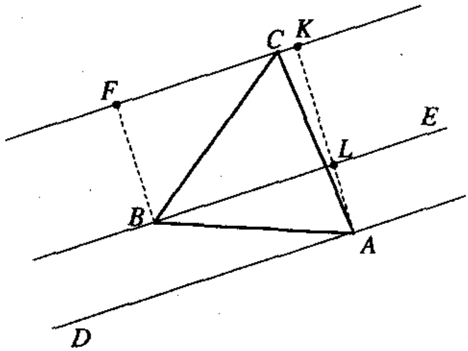


Рис. 12.19

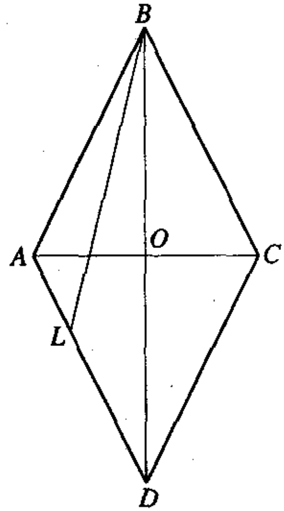


Рис. 12.20

Пусть $AB = a \Rightarrow AC = 2a\cos\alpha$ и

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta CAD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD\sin\angle CAD} = \frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2a\cos\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}.$$

Ответ: $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$.

12.146. Через вершину равностороннего треугольника ABC проведены параллельные прямые AD, BE и CF. Прямая BE лежит между прямыми AD и CF и делит расстояние между ними в отношении $m:n$, считая от прямой AD. Найти угол BCF.

Решение.

Пусть AK — общий перпендикуляр данных параллельных прямых, L — точка пересечения BE и AK, $AL:LK=m:n$, $BF \perp FK$ (рис. 12.19).

Пусть $BC = a$, $\angle BCF = \alpha$.

В ΔBFC $\left(\angle BFC = 90^0\right)$: $BF = a\sin\alpha$, $KL = BF = a\sin\alpha$,

$\angle CBL = \angle BCF = \alpha$,

$\angle ABL = 60^\circ - \alpha$, и из ΔALB $\left(\angle ALB = 90^\circ\right)$: $AL = a\sin\left(60^\circ - \alpha\right)$.

Тогда $\dfrac{a\sin\left(60^\circ - \alpha\right)}{a\sin\alpha} = \dfrac{m}{n}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{n}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2m+n}{n\sqrt{3}}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{n\sqrt{3}}{2m+n}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{n\sqrt{3}}{2m+n}$.

12.147. Найти косинус острого угла ромба, если прямая, проведенная через его вершину, делит угол в отношении 1:3, а противолежащую сторону — в отношении 3:5.

Решение.

Пусть L — точка пересечения данной прямой BL со стороной AD ромба $ABCD$, $\angle ABL : \angle CBL = 1:3, AL : LD = 3:5$ (рис. 12.20).

$\angle ABL = \alpha$, $AL = 3x$.

Тогда $\angle CBL = 3\alpha$, $LD = 5x$, $AB = 8x$, $\angle ABC = 4\alpha$, $\angle ABO = 2\alpha$.

Если BL — биссектриса $\angle ABD$, то из ΔABD: $\dfrac{AL}{LD} = \dfrac{AB}{BD}$;

$BD = \dfrac{LD \cdot AB}{AL} = \dfrac{5x \cdot 8x}{3x} = \dfrac{40x}{3}$.

В ΔAOB $\left(\angle AOB = 90^0\right)$: $\cos 2\alpha = \cos\angle ABO = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{20x}{3} : 8x = \dfrac{5}{6}$.

$\cos\angle ABC = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \dfrac{7}{18}$.

Ответ: $\dfrac{7}{18}$.

12.148. Отношение площади прямоугольника $ABCD$ $\left(BC \parallel AD\right)$ к квадрату его диагонали равно k. Найти $\angle EAF$, где E и F — соответственно середины сторон BC и CD.

Решение.

Пусть $AB = y$, $AD = x$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle DAF = \beta$, $\angle EAF = \gamma$ (рис. 12.21).

Диагональ прямоугольника равна $\sqrt{x^2 + y^2}$, площадь xy, $\dfrac{xy}{x^2 + y^2} = k \Rightarrow$

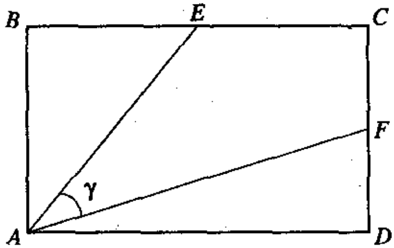


Рис. 12.21

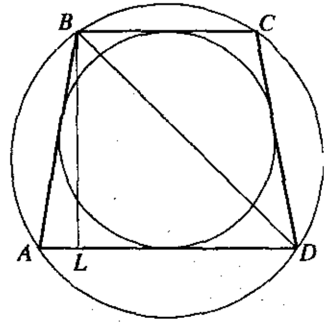


Рис. 12.22

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(90^\circ - (\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \frac{1-\frac{x}{2y}\cdot\frac{y}{2x}}{\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right) : \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{3xy}{2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{3k}{2};\ \gamma = \operatorname{arctg}\frac{3k}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3k}{2}$.

12.149. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найти радиус круга, описанного около трапеции.

Решение.

Пусть BL — высота данной равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 12.22), тогда $BL = 2r$. В ΔALB $\left(\angle ALB = 90^\circ\right)$: $AB = \frac{BL}{\sin\angle BAL} = \frac{2r}{\sin\alpha}$. Так как в данную трапецию вписан круг, то $AB + BC = AB + CD = 2AB$, $AB = CD \Rightarrow LD = \frac{AD+BC}{2} = AB = \frac{2r}{\sin\alpha}$. В ΔBLD $\left(\angle BLD = 90^\circ\right)$: $BD = \sqrt{BL^2+LD^2} = \sqrt{4r^2+\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{2r}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. Радиус R круга, описанного около ΔABD: $R = \frac{BD}{2\sin\angle A} = \frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

Ответ: $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

12.150. Высота треугольника делит угол треугольника в отношении 2:1, а основание — на отрезки, отношение которых (большего к меньшему) равно k. Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения k.

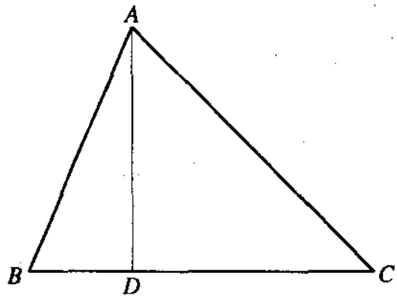


Рис. 12.23

Решение.

Пусть AD — высота ΔABC (рис. 12.23), $\angle CAD : \angle BAD = 2:1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AC > AB$, $CD > BD$, $CD:BD=k$.

Если $\angle BAD = \alpha$, то $\angle CAD = 2\alpha$. В ΔADB $\left(\angle ADB = 90^\circ\right)$: $BD = AD\operatorname{tg}\alpha$.

Из ΔADC $\left(\angle ADC = 90^\circ\right)$: $CD = AD\operatorname{tg}2\alpha$.

Тогда $k = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AD\operatorname{tg}2\alpha}{AD\operatorname{tg}a} = \dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)} = \dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{k-2}{k} \Rightarrow k > 2$.

Далее,

$$\sin\angle C = \sin\left(90^\circ - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\dfrac{k-2}{k}}{1+\dfrac{k-2}{k}} = \frac{2}{2k-2} = \frac{1}{k-1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{k-1}$, $k > 2$.

12.151. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанного круга на отрезки, отношение которых равно k. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\angle BAC = \pi/2$, D — точка касания этой окружности и гипотенузы BC (рис. 12.24), $BD : DC = k$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle OBD = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle OCD = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$.

В ΔODC $\left(\angle ODC = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $OD = DC\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Из ΔODB $\left(\angle ODB = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $OD = DB\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = kDC\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

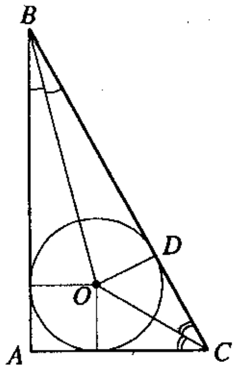


Рис. 12.24

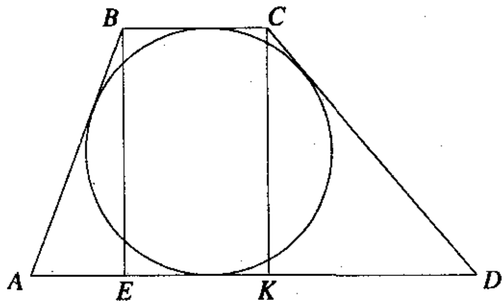


Рис. 12.25

$$\Rightarrow k\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow\ \frac{k\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+k\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=k\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot(k+1)=\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}.$$

$$\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}$.

12.152. Отношение боковых сторон трапеции равно отношению ее периметра к длине вписанной окружности и равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 12.25) $BC \parallel AD$,

$BC < AD$, BE и CK — высоты трапеции , R — радиус окружности, вписанной в трапецию, $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$.

Тогда $BE = CK = 2R$, $AB = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$, $CD = \dfrac{2R}{\sin\beta}$.

Так как $AB + CD = BC + AD$, то периметр трапеции равен

$$2(AB+CD),\ k = \frac{2(AB+CD)}{2\pi R} = \frac{\dfrac{2R}{\sin\alpha}+\dfrac{2R}{\sin\beta}}{\pi R} = \frac{2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\pi\sin\alpha\sin\beta}.$$

По условию $AB = kCD$. Тогда $\dfrac{2R}{\sin\alpha} = \dfrac{2kR}{\sin\beta}$, $\sin\beta = k\sin\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\pi\sin\alpha\sin\beta} = k \Leftrightarrow \frac{2(\sin\alpha+k\sin\alpha)}{\pi k\sin^2\alpha} = k \Leftrightarrow \frac{2(k+1)}{\pi k\sin\alpha} =$$

$$= k \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{2(k+1)}{\pi k^2}.$$

Тогда $\sin\beta = k\sin\alpha = \dfrac{2(k+1)}{\pi k}$.

Таким образом, углы трапеции $\arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k^2}, \pi - \arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k^2}$,

$\arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k}, \pi - \arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k}$.

При этом $\begin{cases} \dfrac{2k+2}{\pi k} \le 1, \\ \dfrac{2k+2}{\pi k^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(\pi-2) \ge 2, \\ \pi k^2 - 2k - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{2}{\pi-2}, \\ k \ge \dfrac{1+\sqrt{2\pi+1}}{\pi} \end{cases} \Rightarrow k \ge \dfrac{2}{\pi-2}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k^2}, \pi - \arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k^2}, \arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k}$,

$\pi - \arcsin\dfrac{2(k+1)}{\pi k}, k \ge \dfrac{2}{\pi-2}$.

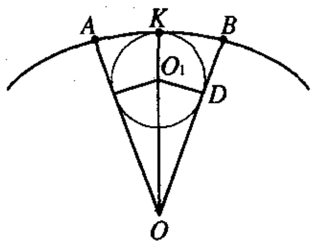


Рис. 12.26

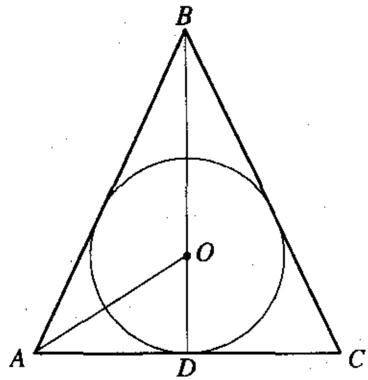


Рис. 12.27

12.153. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r. Найти периметр сектора.

Решение.

Пусть D — точка касания окружности, вписанной в сектор AOB (рис. 12.26), центр O_1 находится на биссектрисе OK угла AOB.

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle DOK = \frac{\alpha}{2}$ и из $\Delta ODO_1 \left(\angle ODO_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O_1D}{OO_1} = \frac{r}{R-r}$. Следовательно, $\alpha = 2\arcsin\frac{r}{R-r}$, длина дуги AKB равна $\alpha R = 2R\arcsin\frac{r}{R-r}$ и периметр сектора равен $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.

Ответ: $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.

12.154. В остроугольном равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC $(AB = BC)$ $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, BD — высота, O — центр вписанной окружности, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей (рис. 12.27)

В ΔADO $\left(\angle ADO = 90^\circ\right)$:

$$r = OD = AD\operatorname{tg}\angle OAD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \quad R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{a}{2\sin 2\alpha}.$$

Так как $R = 4r$, то $\dfrac{a}{2\sin\alpha} = 4\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; $\Leftrightarrow 4\sin 2\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$16\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow 16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow 8(1-\cos\alpha)\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 1 = 0; \quad \cos\alpha = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\angle ABC = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha.$$

Если $\cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, то $\cos\angle ABC = 1 - 2\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{4} < 0$, что противоречит условию, так как данный треугольник остроугольный.

Таким образом, $\cos\alpha = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\angle ABC = 1 - 2\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$; $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$.

12.155. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ $(\alpha > \gamma)$, прилежащие к стороне AC. Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BE. Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC.

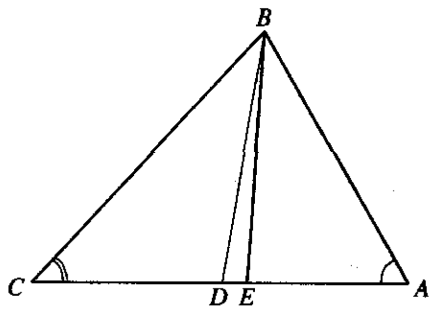


Рис. 12.28

Решение.

В ΔABC $\angle A = \alpha, \angle C = \gamma$ (рис. 12.28). Так как $\alpha > \gamma$, то точка D находится между точками A и E.

ΔABC и ΔBDE имеют общую высоту, поэтому $\dfrac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{DE}{AC}$.

$AC = CE + AE$. $AD = AE + DE$, $CD = CE - DE$. Так как $AD = CD$, то $AE + DE = CE - DE$, $DE = \dfrac{CE - AE}{2}$.

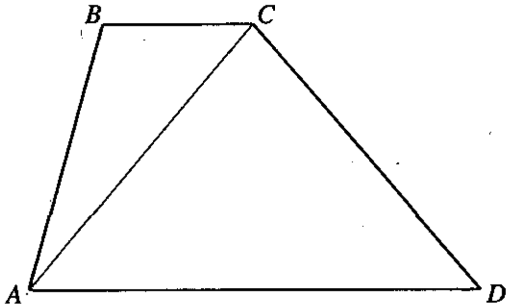


Рис. 12.29

Так как BE — биссектриса ΔABC, то $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Таким образом, $\dfrac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{CE-AE}{2(CE+AE)}=\dfrac{\dfrac{CE}{AE}-1}{2\left(\dfrac{CE}{AE}+1\right)}=$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}-1}{2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+1\right)}=\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{2(\sin\alpha+\sin\gamma)}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{4\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$.

12.156. Угол при вершине A трапеции $ABCD$ равен α. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.

Решение. Пусть $\angle BAC=\beta$ (рис. 12.29).

Тогда $\angle BCA=\angle CAD=\alpha-\beta$. Из ΔABC: $\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\ \Leftrightarrow\ 2=\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta-\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=2+\cos\alpha;\ \beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$.

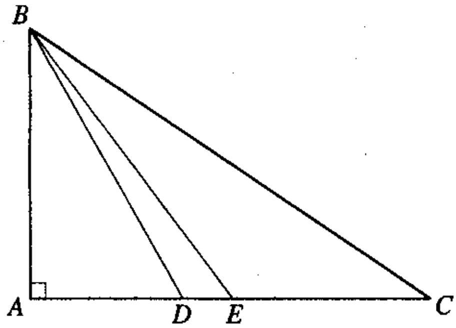


Рис. 12.30

12.157. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 12.30) $\angle A = 90°, \angle ABC = \alpha$,

BD — биссектриса, BE — медиана. Так как $\angle A > \angle C$, то точка D находится между точками A и E. Если $AB=x$, то $AC = x\operatorname{tg}\alpha$,

$AE = \frac{1}{2}x\operatorname{tg}\alpha$. В $\Delta BAE: \operatorname{tg}\angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\angle ABE = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$.

$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}$.

12.158. Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что произведение тангенсов половин этих углов равно 1/6.

Решение.

Пусть один из углов равен α. Тогда второй угол будет $90° - \alpha$ и по

условию $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$;

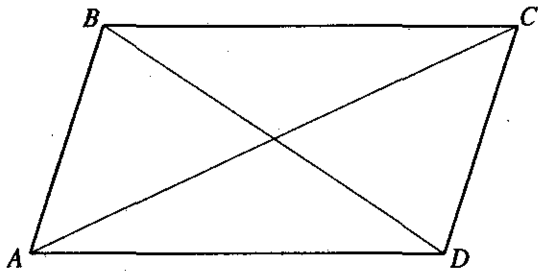


Рис. 12.31

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

Так как $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, то 1) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{4}{5}$ или $\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

12.159. Стороны параллелограмма относятся как $p{:}q$, а диагонали — как $m{:}n$. Найти углы параллелограмма.

Решение.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 12.31) $AD=py$, $BD=mx$. Тогда $AB=qy$, $AC=nx$. Из ΔBAD и ΔABC по теореме косинусов: $m^2x^2=p^2y^2+q^2y^2-2pqy^2\cos\angle A; m^2x^2=p^2y^2+q^2y^2+2pqy^2\cos\angle A$.

$\Rightarrow\ (n^2-m^2)x^2=4pqy^2\cos\angle A$; $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{4pq\cos\angle A}{n^2-m^2}$. По свойству диагоналей параллелограмма: $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$,

$m^2x^2+n^2x^2=2(p^2y^2+q^2y^2)$; $x^2(m^2+n^2)=2y^2(p^2+q^2)$;

$\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{2(p^2+q^2)}{m^2+n^2}\Rightarrow\ \dfrac{4pq\cos\angle A}{n^2-m^2}=\dfrac{2(p^2+q^2)}{m^2+n^2}$;

$$\angle A = \arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(m^2+n^2)}.$$

$$\angle ABC = \pi - \angle A = \pi - \arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(m^2+n^2)}.$$

Ответ: $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(m^2+n^2)}$; $\pi - \arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(m^2+n^2)}$.

12.160. Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно k. Найти углы ромба и допустимые значения k.

Решение.

Пусть сторона ромба $ABCD$ равна a, острый угол α (рис. 12.32). Тогда диагонали ромба $2a\sin\frac{\alpha}{2}$ и $2a\cos\frac{\alpha}{2}$.

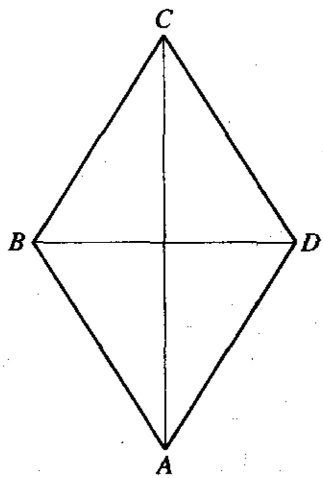


Рис. 12.32

По условию

$$k = \frac{4a}{2a\sin\frac{\alpha}{2} + 2a\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+\sin\alpha}}.$$

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $1 < 1 + \sin a \le 2$, $\sqrt{2} \le \frac{2}{\sqrt{1+\sin\alpha}} < 2$, $\sqrt{2} \le k < 2$.

Таким образом $k^2 = \frac{4}{1+\sin\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{4-k^2}{k^2}$; $\alpha = \arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$, $\pi - \arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2} \le k < 2$.

12.161. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

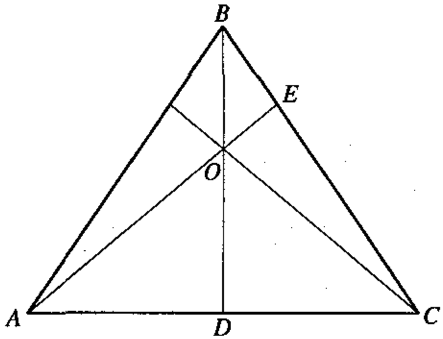


Рис. 12.33

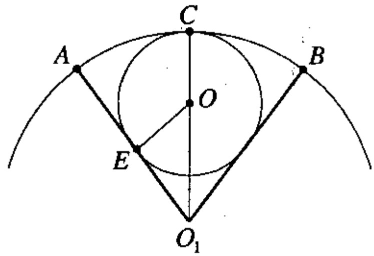


Рис. 12.34

Решение.

В ΔABC (рис. 12.33) $AB=BC$, BD и AE — высоты, O — точка пересечения высот, $BO=OD$.

Пусть $\angle ACB=\alpha$, $BO=OD=1$. ΔBDC и ΔBEO — прямоугольные с общим острым углом $\angle DBC$. Имеем $\angle BOE=\angle ACB=\alpha$.

$\angle COD=\angle AOD=\angle BOE=\alpha$, $\angle COE=180^\circ-2\alpha$.

В $\Delta BEO(\angle BEO=90^\circ)$: $OE=OB\cos\angle BOE=\cos\alpha$.

В $\Delta ODC(\angle ODC=90^\circ)$: $OC=\dfrac{OD}{\cos\angle COD}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

В $\Delta OEC(\angle OEC=90^\circ)$: $\cos\angle COE=\dfrac{OE}{OC}$;

$\cos(180^\circ-2\alpha)=\cos^2\alpha \Leftrightarrow -\cos2\alpha=\cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2\cos^2\alpha=\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{3}$; $\cos=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\cos\angle ABC=\cos(180^\circ-2\alpha)=-\cos2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

12.162. Периметр сектора равен l. Найти расстояние от вершины центрального угла сектора до центра окружности, вписанной в этот сектор, если радиус дуги сектора равен R.

Решение.

Пусть E — точка касания вписанной окружности и радиуса O_1A сектора, центр O окружности лежит на биссектрисе O_1C угла AO_1B (рис. 12.34). Если $\angle AO_1B=\alpha$, то длина дуги ACB равна αR и $l=2R+R\alpha$, $\alpha=\dfrac{l-2R}{R}$. Пусть $OO_1=x$. В $\Delta OEO_1\left(\angle OEO_1=\dfrac{\pi}{2}\right)$: $OE=x\sin\dfrac{\alpha}{2}$. $OC=OE=x\sin\dfrac{\alpha}{2}$. $O_1C=OO_1+OC$, $R=x+x\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

$$x=\frac{R}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{R}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{R}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l-2R}{4R}\right)}=$$

$$=\frac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}.$$

Ответ: $\dfrac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}$.

12.163. Показать, что если в треугольнике отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла, то треугольник прямоугольный.

Решение.

Пусть α, β, γ — углы данного треугольника и $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\sin\gamma$.

Тогда $\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\sin\gamma\Leftrightarrow$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\gamma\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\gamma}{2}=\sin\gamma\Leftrightarrow\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}-2\sin\frac{\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}=0\Leftrightarrow\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cos\gamma=0.$$

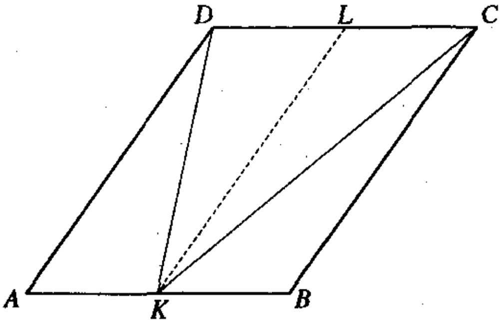


Рис. 12.35

Так как $0°<\gamma<180°$, то $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \neq 0, \cos\gamma = 0$ при $\gamma = 90°$, что и требовалось доказать.

12.164. Найти синус угла ромба, если из середины его стороны противоположная сторона видна под углом α.

Решение.

Пусть K — середина стороны AB, L — середина стороны CD ромба $ABCD$ (рис. 12.35) $\angle CKD = \alpha$, $\angle DKL = \gamma$, $\angle CKL = \beta$.

Тогда $\beta + \gamma = \alpha$, $\angle ADK = \gamma$, $\angle BCK = \beta$.

В ΔADK:

$$\frac{\sin\angle AKD}{\sin\angle ADK} = \frac{\sin(180° - (\angle A + \gamma))}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\angle A + \gamma)}{\sin\gamma} = \frac{AD}{AK} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\angle A\cos\gamma + \sin\gamma\cos\angle A}{\sin\gamma} = 2 \Leftrightarrow \sin\angle A\operatorname{ctg}\gamma + \cos\angle A = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2 - \cos\angle A}{\sin\angle A} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\angle A}{2 - \cos\angle A}.$$

В ΔBCK:

$$\frac{\sin\angle CKB}{\sin\angle BCK} = \frac{\sin(180° - (\angle B + \beta))}{\sin\beta} = \frac{\sin(180° - (180° - \angle A + \beta))}{\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\angle A - \beta)}{\sin\beta} = \frac{BC}{BK} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin\angle A\cos\beta - \cos\angle A\sin\beta}{\sin\beta} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\angle A\operatorname{ctg}\beta - \cos\angle A = 2 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\beta = \frac{2 + \cos\angle A}{\sin\angle A} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\angle A}{2 + \cos\angle A}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\gamma+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta}=\frac{\dfrac{\sin\angle A}{2-\cos\angle A}+\dfrac{\sin\angle A}{2+\cos\angle A}}{1-\dfrac{\sin\angle A}{2-\cos\angle A}\cdot\dfrac{\sin\angle A}{2+\cos\angle A}}=$$

$$=\frac{\sin\angle A(2+\cos\angle A+2-\cos\angle A)}{4-\cos^2\angle A-\sin^2\angle A}=\frac{4\sin\angle A}{3};$$

$$\sin\angle A=\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

12.165. Сторона треугольника равна a, разность углов, прилежащих к данной стороне, равна $\frac{\pi}{2}$. Найти углы треугольника, если его площадь равна S.

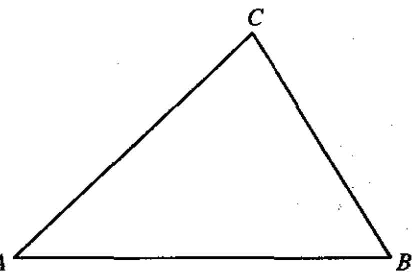


Рис. 12.36

Решение.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 12.36) $BC=a$, $S_{\Delta ABC}=S$, $\angle B=\alpha$, $AC=b$.

Тогда $\angle C=\frac{\pi}{2}+\alpha, \angle A=\pi-(\angle B+\angle C)=\frac{\pi}{2}-2\alpha$.

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}\Leftrightarrow\frac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{b}{\sin\alpha}\Leftrightarrow b=\frac{\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha}.$$

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle C=\frac{1}{2}ab\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos2\alpha}\cdot\cos\alpha=\frac{a^2\operatorname{tg}2\alpha}{4}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4S}{a^2},\angle B=\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2},\angle C=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2},\angle A=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2};\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2};\frac{\pi}{2}-arctg\frac{4S}{a^2}$.

12.166. Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен k. Найти углы треугольника и допустимые значения k.

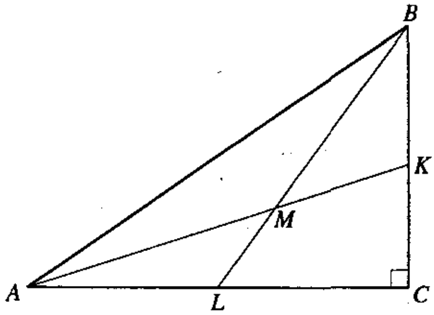


Рис. 12.37

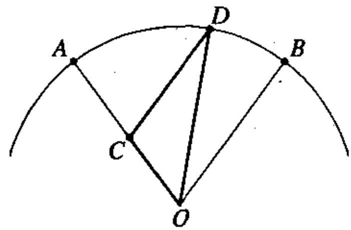


Рис. 12.38

Решение.

Пусть AK и BL — медианы ΔABC, проведенные к его катетам, M — их точка пересечения.

$\angle AML = \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = k$, $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 12.37), $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BLC = \beta$, $\angle KAC = \gamma$.

Тогда $\sin\angle BAC = \dfrac{a}{c}$, $\cos\angle BAC = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{BC}{LC} = \dfrac{2a}{b}$, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{KC}{AC} = \dfrac{a}{2b}$.

Так как β — внешний угол треугольника AML, то $\beta = \alpha + \gamma$ и

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\frac{2a}{b} - \frac{a}{2b}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{3a}{2b} : \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{3a}{2b}\cdot\frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} =$$

$$= \frac{3}{2}\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC = \frac{3}{4}\sin 2\angle BAC \Rightarrow \sin 2\angle BAC = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}k.$$

Отсюда

$$0 < \frac{4}{3}k \le 1, 0 < k \le \frac{3}{4};\ \angle BAC = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{3}k;\ \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{3}k.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{3}k;\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{3}k;\ 0 < k \le \dfrac{3}{4}$.

12.167. Радиус дуги сектора равен R, центральный угол AOB равен α. Через середину C радиуса OA проведена прямая, параллельная радиусу OB и пересекающая дугу AB в точке D. Найти площадь треугольника OCD.

Решение.

Пусть $\angle BOD = \beta$ (рис. 12.38). Тогда $\angle CDO = \beta$, $\angle DOC = \alpha - \beta$, $\angle DCO = 180° - \alpha$.

В ΔCOD: $\dfrac{DO}{\sin\angle DCO}=\dfrac{CO}{\sin\angle CDO}\Leftrightarrow\dfrac{R}{\sin(180^\circ-a)}=\dfrac{R}{2\sin\beta};\sin\beta=\dfrac{\sin\alpha}{2}$.

Так как $OC=\dfrac{1}{2}OD$, то $\angle ODC=\beta$ не является наибольшим углом треугольника COD и $\cos\beta>0$,

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{4}}=\frac{\sqrt{4-\sin^2\alpha}}{2}.$$

$$S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\angle COD=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot R\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{R^2}{4}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\frac{R^2}{4}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{4-\sin^2\alpha}}{2}-\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{R^2\sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right).$$

Ответ: $\dfrac{R^2\sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right)$.

12.168. В треугольнике даны сторона a, противолежащий ей угол α и высота h, проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

Решение.

Пусть b и c — неизвестные стороны треугольника. Тогда площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ah, bc=\dfrac{ah}{\sin\alpha}$.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2+2bc\cos\alpha\Leftrightarrow(b+c)^2=$$

$$=b^2+c^2+2bc=a^2+2bc\cos\alpha+2bc=a^2+2bc(1+\cos\alpha)=$$

$$=a^2+\frac{2ah}{\sin\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=a^2+\frac{4ah\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=a^2+2ah\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{a^2+2ah\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.169. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF; точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE=EF$. Тангенс угла AEF равен 2. Найти тангенс угла FEC.

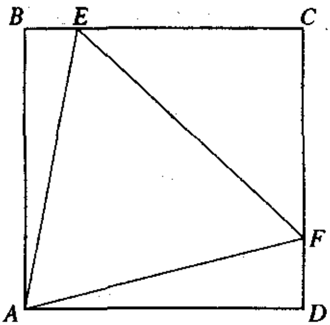


Рис. 12.39

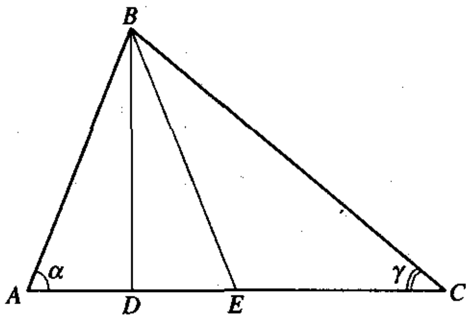


Рис. 12.40

Решение.

Пусть $AB = a$, $\angle AEF = \alpha$, $\angle FEC = x$ (рис. 12.39).

Тогда $\angle BEA = 180° - (\alpha + x)$.

В ΔABE ($\angle ABE = 90°$):

$$AE = \frac{AB}{\sin\angle BEA} = \frac{a}{\sin(\alpha + x)};$$

$$BE = AB\operatorname{ctg}\angle BEA = -a\operatorname{ctg}(\alpha + x).$$

$$EF = AE = \frac{a}{\sin(\alpha + x)}.$$

В $\Delta ECF(\angle ECF = 90°): EC = EF\cos\angle FEC = \dfrac{a\cos x}{\sin(\alpha + x)}$.

$BE + EC = BC$.

Тогда $\dfrac{a\cos x}{\sin(\alpha + x)} - a\operatorname{ctg}(\alpha + x) = a \Leftrightarrow \cos x - \cos(\alpha + x) = \sin(\alpha + x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$\cos x - \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos\alpha} - 1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x =$

$= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}x \Leftrightarrow \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - 1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}x$. Так как по условию

$\operatorname{tg}\alpha = 2$, то $\sqrt{5} - 1 + 2\operatorname{tg}x = 2 + \operatorname{tg}x; \operatorname{tg}x = 3 - \sqrt{5}$.

Ответ: $3 - \sqrt{5}$.

12.170. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha > \gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и медиана BE.

Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ACB равна S.

Решение.

В ΔABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$ (рис. 12.40).

Так как $\alpha > \gamma$, то точка D находится между точкам A и E.

$AE = AD + DE$, $CD = CE + DE$. Так как $CE = AE$, то $CD = (AD + DE) + DE$,

$$DE = \frac{CD - AD}{2}.$$

Пусть $BD = H$. Тогда из ΔABD получаем, что $AD = H\operatorname{ctg}\alpha$, а из ΔCDB — $CD = H\operatorname{ctg}\gamma$.

ΔABC и ΔDBE имеют общую высоту BD, отсюда

$$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{DE}{AC} = \frac{CD - AD}{2(CD + AD)} = \frac{H\operatorname{ctg}\gamma - H\operatorname{ctg}\alpha}{2H(\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha)} = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{2\sin(\alpha + \gamma)};$$

$$S_{\Delta DBE} = \frac{S\sin(\alpha - \gamma)}{2\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Ответ: $\dfrac{S\sin(\alpha - \gamma)}{2\sin(\alpha + \gamma)}$.

12.171. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол при вершине A равен α. Через середину D гипотенузы AB проведена прямая, пересекающая катет AC в точке E. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если $\angle DEA = \beta$, $AE > 0{,}5\,AC$?

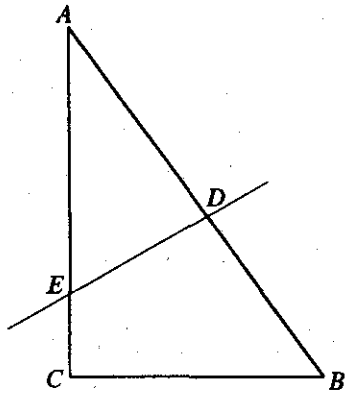


Рис. 12.41

Решение.

Пусть S_1 — площадь треугольника ADE, S_2 — площадь четырехугольника $BCED$, S — площадь треугольника ABC (рис. 12.41).

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} AE \cdot AD \sin\angle A = \frac{1}{4} AE \cdot AB \sin\angle A,\ S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin\angle A,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S - S_1}{S_1} = \frac{S}{S_1} - 1 = \frac{2AC}{AE} - 1.$$

Если $AB = c$, то из ΔACB ($\angle ACB = 90°$): $AC = c\cos\alpha$.

В ΔAED:

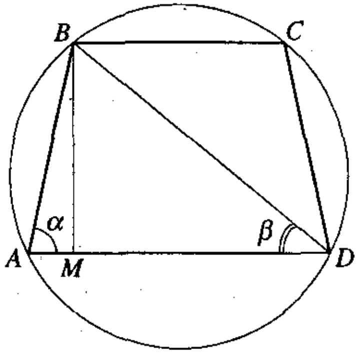


Рис. 12.42

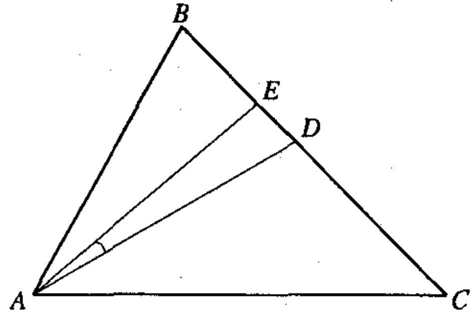


Рис. 12.43

$$\frac{AE}{\sin\angle ADE}=\frac{AD}{\sin\angle DEA}\Leftrightarrow\frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c}{2\sin\beta}\Leftrightarrow AE=\frac{c\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}.$$

Тогда $\frac{S_2}{S_1}=\frac{2AC}{AE}-1=\frac{4\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}-1=\frac{4\sin\beta\cos\alpha-\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$

$$=\frac{3\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Ответ: $\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$.

12.172. В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга к площади трапеции.

Решение.

Пусть AD — большее основание данной трапеции $ABCD$, $\angle BAD=\alpha$, $\angle BDA=\beta$ (рис. 12.42), BN — высота трапеции и $BD=1$.

Тогда из ΔBMD ($\angle BMD=90°$):

$BM=BD\sin\angle BDM=\sin\beta$;

$DM=BD\cos\angle BDM=\cos\beta$.

Площадь трапеции

$$S_1=\frac{AD+BC}{2}\cdot BM=DM\cdot BM=\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}\sin 2\beta.$$

Радиус R круга, описанного около ΔBAD: $R=\frac{BD}{2\sin\angle A}=\frac{1}{2\sin\alpha}$.

Тогда площадь круга $S_2 = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{4\sin^2\alpha}$.

Таким образом, $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$.

12.173. В треугольнике ABC угол A равен α и сторона $BC = a$. Найти длину биссектрисы AD, если угол между биссектрисой AD и высотой AE равен β.

Решение.

Если $AD = x$ (рис. 12.43), то из ΔAED ($\angle AED = 90°$):
$AE = AD\cos\angle EAD = x\cos\beta$, а из ΔAEB ($\angle AEB = 90°$):

$$BE = AE\,\mathrm{tg}\,\angle BAE = x\cos\beta\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right).$$

В ΔAEC ($\angle AEC = 90°$): $EC = AE\,\mathrm{tg}\angle EAC = x\cos\beta\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)$.

Так как $BC = BE + EC$, то:

$$a = x\cos\beta\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right) = \frac{x\cos\beta\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)} \Leftrightarrow x =$$

$$= \frac{a\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\beta\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{a\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\beta\sin\alpha}$.

12.174. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине пересечен прямой, проходящей через вершину угла при основании и составляющей с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

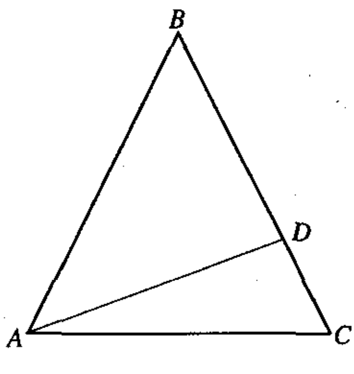


Рис. 12.44

Решение.

Пусть в DABC (рис. 12.44) $AB=BC=a$, $\angle ABC=\alpha$, AD — прямая, о которой говорится в условии задачи, $\angle DAC=\beta$, $CD=x$. Тогда $BD=a-x$. В силу того, что ΔBAD и ΔCAD имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины A, то $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta CAD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}-1$.

$$\angle BAC=90^\circ-\frac{\alpha}{2}, \angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=90^\circ-\frac{\alpha}{2}-\beta,$$

$$\angle ADB=180^\circ-(\angle BAD+\angle B)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}-\beta+\alpha\right)=90^\circ+\beta-\frac{\alpha}{2}.$$

Из ΔADB:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}; \frac{a-x}{x}=\frac{\sin\left(90^\circ-\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right)}{\sin\left(90^\circ-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}\Leftrightarrow 1-\frac{x}{a}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=1-\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}.$$

Тогда $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta CAD}}=\frac{a}{x}-1=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}-1=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$.

Ответ: $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$.

12.175. Радиус дуги сектора AOB равен R, центральный угол AOB равен α. В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги AB, а две другие вершины лежат соответственно на радиусах OA и OB. Найти стороны треугольника.

Решение.

Пусть M — середина дуги AB, ΔLMK — правильный, о котором говорится в условии задачи (рис. 12.45).

Тогда $\angle LOM=\frac{\alpha}{2}, \angle MLK=60^\circ, \angle OLK=90^\circ-\frac{\alpha}{2}, \angle OLM=$

$$=\angle OLK+\angle MLK=150^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

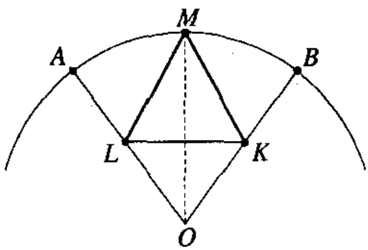


Рис. 12.45

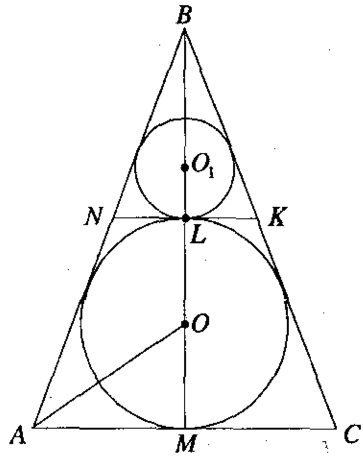


Рис. 12.46

Из $\Delta\, OLM$:

$$\frac{LM}{\sin\angle LOM}=\frac{OM}{\sin\angle OLM};\ LM=\frac{OM\sin\angle LOM}{\sin\angle OLM}=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(150^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.176. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 12.46) $AB = BC$, $AC = a, \angle BAC = \alpha$, O — центр вписанной окружности, R — ее радиус, O_1 — центр окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника, r — ее радиус. Точки O и O_1 находятся на высоте BM данного треугольника.

В ΔAMB ($\angle AMB = 90^\circ$): $BM = AM\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

В $\Delta AMO\,(\angle AMO = 90°)$: $R = OM = AM\,\text{tg}\angle OAM = \frac{a}{2}\text{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Пусть L — точка касания окружностей с центрами O и O_1, а NK — их общая касательная, проходящая через точку L.

$$BL = BM - LM = BM - 2R = \frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha - a\,\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\left(\text{tg}\,\alpha - 2\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{2\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 2\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\cdot\frac{2\,\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

$\Delta ABC \sim \Delta NBK$.

Тогда $\frac{r}{R} = \frac{BL}{BM}$; $r = R\cdot\frac{BL}{BM} = \frac{a}{2}\text{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha} = \frac{a}{2}\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

12.177. Внутри данного угла α расположена точка на расстоянии a от вершины и на расстоянии b от одной стороны. Найти расстояние этой точки от другой стороны.

Решение.

Пусть OA — расстояние от точки O до вершины A данного угла, OB — до одной из сторон, $OA = a$, $OB = b$, OC — расстояние до другой стороны, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 12.47), $\angle OAB = x$.

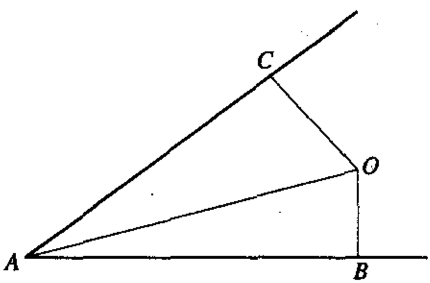


Рис. 12.47

В $\Delta ABO\,(\angle ABO = 90°)$: $\sin x = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$. Из $\Delta OCA\,(\angle OCA = 90°)$:

$$OC = OA\sin\angle OAC = a\sin(\alpha - x) = a(\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x) =$$

$$= a\left(\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2 x} - \cos\alpha\sin x\right) = a\left(\sin\alpha\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} - \frac{b}{a}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sin\alpha\sqrt{a^2-b^2} - b\cos\alpha.$$

Ответ: $\sin\alpha\sqrt{a^2-b^2} - b\cos\alpha$.

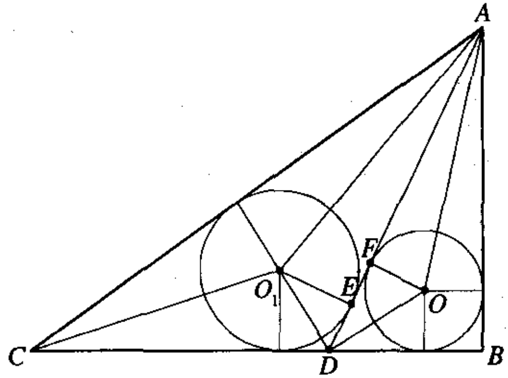


Рис. 12.48

12.178. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD острого угла A, равного α. Найти отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC.

Решение.

Пусть O — центр окружности, вписанной в ΔABD, F — точка касания этой окружности с AD, O_1 — центр окружности, вписанной в ΔADC, E — точка касания этой окружности с AD (рис. 12.48).

$$\angle BAD=\frac{\alpha}{2}, \angle ADB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}, \angle O_1AE=\angle FAO=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{\alpha}{4},$$

$$\angle FDO=45^\circ-\frac{\alpha}{4}.$$

$\angle O_1DO=90^\circ$, так как он образован биссектрисами смежных углов ADC и ADB. Тогда $\angle EO_1D=\angle FDO$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Если $OF=r$, $O_1E=R$, то из ΔAFO ($\angle AFO=90^\circ$): $AF=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$;

из ΔOFD ($\angle OFD=90^\circ$): $DF=r\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$;

из ΔO_1ED ($\angle O_1ED=90^\circ$): $DE=R\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=R\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)$;

из ΔO_1EA ($\angle O_1EA=90^\circ$): $AE=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

$$AF+FD=AE+ED\Rightarrow r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+r\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+$$

$$+R\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\Leftrightarrow r\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}=R\cdot\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{R}{r}=\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin 45^\circ}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{2\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}.$

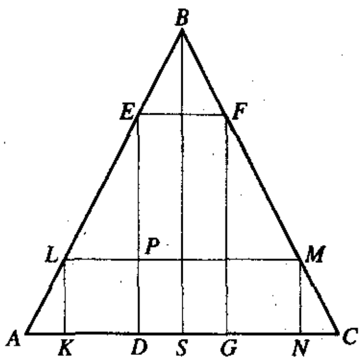


Рис. 12.49

12.179. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, имеет постоянную величину.

Решение.

Пусть $KLMN$ и $DEFG$ — два произвольных прямоугольника, вписанных в ΔABC, $AB=BC$ (рис. 12.49), $LK=x_1$, $LM=y_1$, $ED=x_2$, $DG=y_2$, $\angle ABC=\alpha$. По условию $x_1+y_1=x_2+y_2$.

Тогда $x_2-x_1=y_1-y_2$.

Если BS — высота ΔABC, P — точка пересечения LM и ED, то

$LP=\dfrac{y_1-y_2}{2}, EP=x_2-x_1.$

$\Delta LPE \sim \Delta ASB$.

Отсюда $\dfrac{AS}{BS} = \dfrac{LP}{EP} = \dfrac{y_1 - y_2}{2(x_2 - x_1)} = \dfrac{1}{2}$.

Так как $\dfrac{AS}{BS} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, то $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\dfrac{4}{5}$.

12.180. Сторона треугольника равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной в треугольник окружности равен 4.

Решение.

Пусть a — данная сторона треугольника, $a = 15$, b и c — две другие стороны, $b + c = 27$, $c = 27 - b$. Для определенности будем считать, что $b > c$.

Полупериметр треугольника $p = \dfrac{a + b + c}{2} = 21$, его площадь $S = pr = 84$.

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, таким образом

$$\sqrt{21\cdot(21-15)(21-b)(21-27+b)} = 84 \Leftrightarrow \sqrt{21\cdot 6(21-b)(b-6)} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (21-b)(b-6) = 56 \Leftrightarrow b^2 - 27b + 182 = 0,$$

$b_1 = 14$, $b_2 = 13$.

Имеем $b = 14$, $c = 13$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{13}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{13}$.

12.181. Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой AB, содержит $\alpha°$. Через середину C хорды AB проведена хорда DE так, что $DC : CE = 1 : 3$. Найти острый угол ACD и допустимые значения α.

Решение.

Пусть $AC = BC = 1$, $DC = x$ (рис. 12.50).

Тогда $CE = 3x$.

Если L — середина DE, то $OC \perp AB$, $OL \perp DE$, $\angle COL = \angle ACD$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами, $DL = EL = 2x$, $CL = x$. Так как $DC \cdot CE = AC \cdot BC$, то $x \cdot 3x = 1\cdot 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

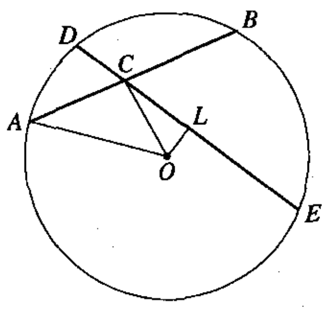


Рис. 12.50

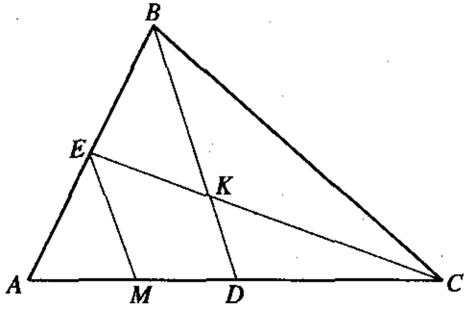


Рис. 12.51

$\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\alpha}{2}$ и из $\Delta ACO(\angle ACO = 90°)$:

$OC = AC\,\mathrm{ctg}\,\angle AOC = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Из ΔOLC $(\angle OLC = 90°)$: $\sin\angle COL = \frac{CL}{OC} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, $\angle ACD = \angle COL = \arcsin\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

Так как $\sin\angle COL \le 1$, то $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \le 1$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \le \sqrt{3}$; $\alpha \le 120°$.

Ответ: $\arcsin\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$, $\alpha \le 120°$.

12.182. Медиана BD треугольника ABC пересекается с биссектрисой CE в точке K. Найти CK: KE, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Решение.

Проведем $EM \| BD$ (рис. 12.51).

Тогда $\frac{CK}{KE} = \frac{CD}{DM} = \frac{AD}{DM}$; $\frac{CK}{KE} - 1 = \frac{AD}{DM} - 1 = \frac{AD - DM}{DM} = \frac{AM}{DM} = \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

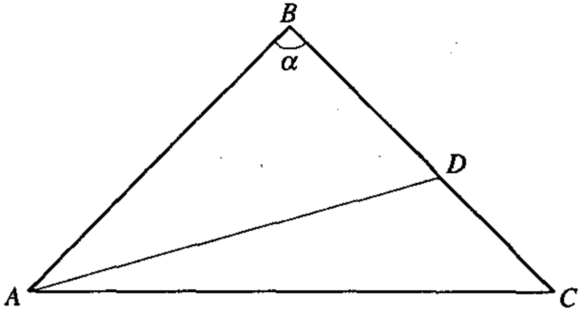


Рис. 12.52

Таким образом, $\dfrac{CK}{KE}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}+1=\dfrac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

12.183. Площадь равнобедренного тупоугольного треугольника равна 8, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна $\sqrt{37}$. Найти косинус угла при вершине.

Решение.

Пусть ΔABC $AB = BC$, AD — медиана, $AD=\sqrt{37}$ (рис. 12.52), $\angle B=\alpha$, $BD = x$. Тогда $AB = 2x$.

Из ΔABD:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\,AB \cdot BD\cos\angle B;$

$37 = 4x^2 + x^2 - 4x^2\cos\alpha;$

$37 = x^2(5 - 4\cos\alpha).$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2\sin\angle B$. Тогда $2x^2\sin\alpha=8;\ x^2=\dfrac{4}{\sin\alpha}\Rightarrow$

$$\frac{4}{\sin\alpha}(5-4\cos\alpha)=37\Leftrightarrow 37\sin\alpha+16\cos\alpha+20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{74\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{16\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+20=0\Leftrightarrow 18\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-37\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2=0;$$

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{18}$.

Тогда $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{3}{5}$ при $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$, $\cos\alpha=\frac{323}{325}$ при $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{18}$.

Так как по условию α — тупой угол, то $\cos\alpha=-3/5$.

Ответ: $-3/5$.

12.184. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Найти радиус описанного круга.

Решение.

В ΔABC (рис. 12.53) $AB=BC$, $\angle BAC=\alpha$, BD — высота, O — центр вписанного круга.

Тогда по условию $BO=BD-OD=m$. $\angle BAO=\angle DAO=\frac{\alpha}{2}$, $\angle AOB=$

$=\angle OAD+\angle ADO=\frac{\alpha}{2}+90^\circ$ как внешний угол треугольника AOB.

По теореме синусов, из ΔAOB: $\dfrac{AB}{\sin\angle AOB}=\dfrac{BO}{\sin\angle BAO}\Rightarrow AB=$

$$=\frac{BO\sin\angle AOB}{\sin\angle BAO}=\frac{m\sin\left(\frac{\alpha}{2}+90^\circ\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда радиус окружности, описанной около треугольника ABC,

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle ACB}=\frac{m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.185. В треугольнике известны площадь S, сторона a и противолежащий ей угол α. Найти сумму двух других сторон.

Решение.

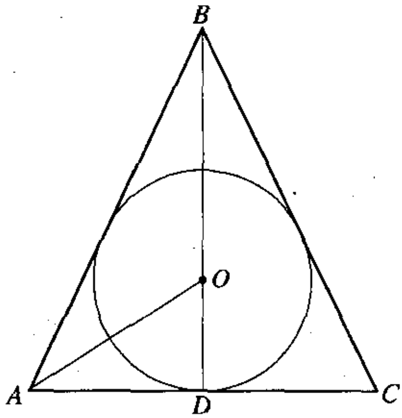


Рис. 12.53

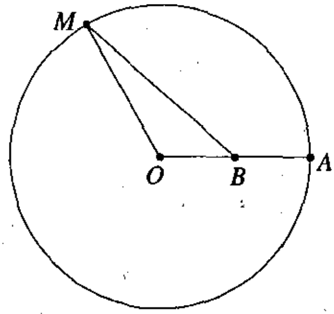


Рис. 12.54

Пусть x и y — неизвестные стороны данного треугольника.

Тогда $\begin{cases} S = \frac{1}{2}xy\sin\alpha; \\ a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + 2xy\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$(x+y)^2 = a^2 + 2xy\cos\alpha + 2xy = a^2 + 2xy(1+\cos\alpha) =$$

$$= a^2 + 2\cdot\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = a^2 + 4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x + y = \sqrt{a^2 + 4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + 4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

12.186. Пусть OA — неподвижный радиус окружности с центром в точке O; B — середина радиуса OA; M — произвольная точка окружности. Найти наибольшее значение угла OMB.

Решение.

Пусть $\angle OMB = \alpha$, $\angle OBM = \beta$ (рис. 12.54).

Из ΔMOB: $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OM}{OB} = 2; \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\beta$.

Наибольшее значение $\sin\beta$ равно 1, следовательно наибольшее значение $\sin\alpha$ равно 1/2.

Так как $OB < OM$, то $\alpha < \beta$, то есть α не является наибольшим углом треугольника MOB.

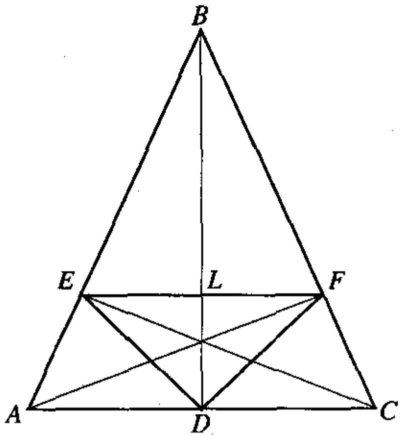


Рис. 12.55

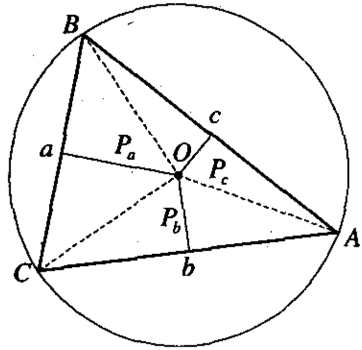


Рис. 12.56

Таким образом, $0 < \alpha < \pi/2$, а на промежутке $(0;\pi/2)$ $y = \sin x$ монотонно возрастает и угол α принимает наибольшее значение в той же точке, где $\sin\alpha$ принимает свое наибольшее значение. Отсюда $\alpha = \pi/6$.

Ответ: $\pi/6$.

12.187. В равнобедренном остроугольном треугольнике угол при основании равен α, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

Решение.

В ΔABC (рис. 12.55) $AB = BC$, $\angle BAC = \alpha$; BD, AF, CE — высоты.

Пусть $AB = a$, тогда из ΔADB ($\angle ADB = 90°$): $AD = a\cos\alpha$, $BD = a\sin\alpha$.

$AC = 2AD = 2a\cos\alpha$.

В ΔAEC ($\angle AEC = 90°$):

$AE = AC\cos\angle BAC = 2a\cos^2\alpha \Rightarrow BE = AB - AE = a(1-2\cos^2\alpha) = -a\cos 2\alpha$.

Пусть L — точка пересечения EF и BD. Так как $\Delta EBF \sim \Delta ABC$, то

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BL}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow EF = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{2a\cos\alpha \cdot \left(-a\cos 2\alpha\right)}{a} =$$

$$= -2a\cos\alpha\cos 2\alpha;\ BL = \frac{BD \cdot BE}{AB} = -a\sin\alpha\cos 2\alpha.$$

$$DL = BD - BL = a\sin\alpha + a\sin\alpha\cos 2\alpha = a\sin\alpha\left(1 + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= 2a\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} EF \cdot DL = -2a^2 \sin\alpha \cos^3\alpha \cos 2\alpha = -a^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos^2\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 \sin 4\alpha \cos^2\alpha.$$

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin^2\alpha.$$

Таким образом $a^2 = \dfrac{2S}{\sin 2\alpha} = \dfrac{S}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

$$S_{\Delta EDF} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \sin 4\alpha \cos^2\alpha = -\frac{1}{2} S \sin 4\alpha \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2} S \sin 4\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

12.188. Пусть a, b, c – длины сторон остроугольного треугольника; A, B, C – углы, противолежащие сторонам; P_a, P_b, P_c – расстояния от центра описанной окружности до соответствующих сторон. В предположении, что $A < B < C$, расположить в возрастающем порядке P_a, P_b, P_c.

Решение.

Пусть R — радиус описанной окружности (рис. 12.56), тогда

$$P_c^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}; P_b^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}; P_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Так как $A < B < C$, то $a < b < c \Rightarrow P_c < P_b < P_a$.

Ответ: $P_a > P_b > P_c$.

12.189. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m : n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

Решение.

Луч BD делит сторону AC равностороннего треугольника ABC в отношении $m : n$ (рис. 12.57).

Пусть $\angle BDC = \alpha$ — острый угол между лучом и основанием и будем считать, что $n > m$. Тогда $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{m}{n}$.

Если $AD = mx$, то $DC = nx$, $AB = AC = (m+n)x$.

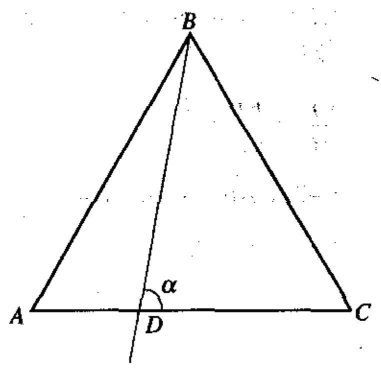


Рис. 12.57

$\angle A=\frac{\pi}{3}, \angle ABD=\alpha-\frac{\pi}{3}$. По теореме синусов, из ΔADB:

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}\Rightarrow\frac{(m+n)x}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{mx}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{m}{m+n}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{m}{m+n}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{m}{m+n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha=1-\frac{2m}{m+n}=\frac{n-m}{n+m}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\cdot\frac{n+m}{n-m}.$$

Отсюда, $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{n+m}{n-m}\right)$ и искомый тупой угол равен

$\pi-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{n+m}{n-m}\right)$.

Ответ: $\pi-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{n+m}{n-m}\right)$.

12.190. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении 2 : 1. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

Решение.

Прямая BD делит сторону AC равностороннего треугольника ABC в отношении 2 : 1, $CD : AD = 2 : 1$.

Пусть $AD=x$, $\angle ABD=\alpha$, тогда $CD=2x$, $AB=3x$, $\angle ADB=120°-\alpha$. Из ΔADB:

$$\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{\sin(120°-\alpha)}{\sin\alpha}=3\Leftrightarrow\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{2}=3\Leftrightarrow\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Таким образом, $\angle ABD=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\angle CBD=60°-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}, 60°-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.

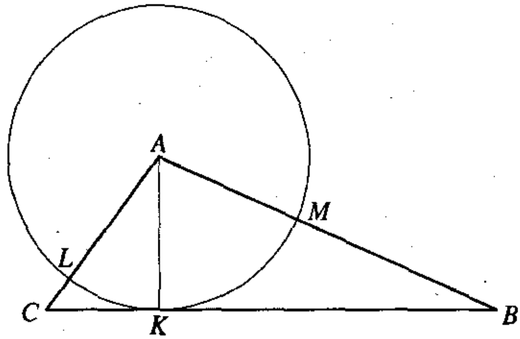


Рис. 12.58

12.191. Основание треугольника равно a, а углы при основании равны α и β радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис.12.58) $BC=a, \angle C=\alpha, \angle B=\beta, AK$ — высота, $AK=H$.

$$\text{В } \Delta AKC\left(\angle AKC=\frac{\pi}{2}\right): CK=H\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\text{Из } \Delta BKA\left(\angle BKA=\frac{\pi}{2}\right): BK=H\operatorname{ctg}\beta.$$

Так как $CK+BK=BC$, то $H\operatorname{ctg}\alpha+H\operatorname{ctg}\beta=a$,

$$\frac{H\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=a, H=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Длина дуги $l=\gamma R$, где γ — радианная мера дуги, R — ее радиус; $\gamma=\angle BAC=\pi-\alpha-\beta, R=H,$

$$l=a(\pi-\alpha-\beta)\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $a(\pi-\alpha-\beta)\cdot\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

12.192. Даны две стороны a и b треугольника и биссектриса l угла между ними. Найти этот угол.

Решение.

Пусть BD — биссектриса ΔABC, $BD=l$, $BC=a$, $AB=b$ (рис. 12.59), $\angle ABC=\alpha$.

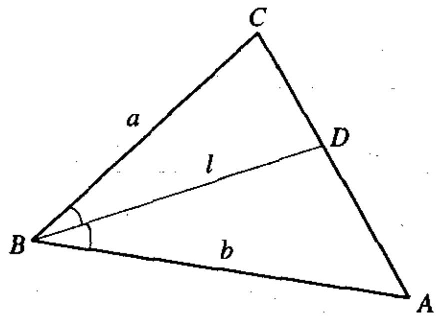


Рис. 12.59

Тогда $\angle ABD = \angle CBD = \dfrac{\alpha}{2}$.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} \Rightarrow \frac{ab}{2}\sin\alpha = \frac{al}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{bl}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(a+b) \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab};\ \alpha = 2\arccos\frac{l(a+b)}{2ab}.$$

Ответ: $2\arccos\dfrac{l(a+b)}{2ab}$.

12.193. Основание треугольника равно 4, а его медиана равна $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Один из углов при основании равен 15°. Показать, что острый угол между основанием треугольника и его медианой равен 45°.

Решение.

Пусть BD — медиана ΔABC, $BD = \sqrt{6}-\sqrt{2}$, $AC = 4, \angle A = 15°$ (рис. 12.60), $\angle ADB = x$.

Тогда $\angle ABD = 180° - (x + 15°)$.

По теореме синусов

из ΔABD:

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{BD}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{2}{\sin(x+15°)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin 15°} \Leftrightarrow \sin(x+15°) = \frac{2\sin 15°}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}.$$

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

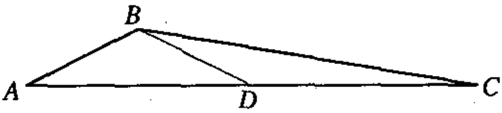


Рис. 12.60

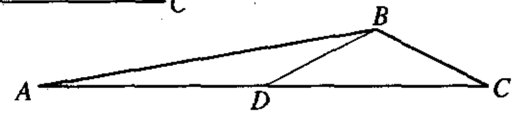


Рис. 12.60,а

Отсюда $\sin(x+15°)=\dfrac{2\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x+15°=30°$ или $x+15°=$ $=150°$; $x=15°$ или $x=135°$.

Таким образом, существует два треугольника, удовлетворяющих данным условиям. В первом из них меньший угол между медианой и основанием треугольника — угол ADB равен 15° (рис. 12.60), а во втором — $\angle BDC=180°-\angle ADB=45°$ (рис. 12.60, а).

12.194. В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы — по 135°. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150°. Найти площадь трапеции.

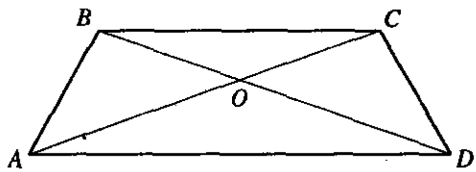


Рис. 12.61

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $BC=2$, $\angle ABC=\angle DCB=135°$, O — точка пересечения диагоналей, $\angle BOC=150°$ (рис. 12.61).

В ΔBOC: $\angle ACB=\angle DBC=15°$, тогда $\angle BAC=180°-(\angle ABC+$ $+\angle ACB)=30°$.

По теореме синусов из ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}\Rightarrow AC=\frac{BC\sin\angle ABC}{\sin\angle ABC}=\frac{2\sin 135°}{\sin 30°}=2\sqrt{2}.$$

$$S_{\Delta ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle BOC=\frac{1}{2}AC^2\sin\angle BOC=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2\sin 150°=2.$$

Ответ: 2.

12.195. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен 120°.

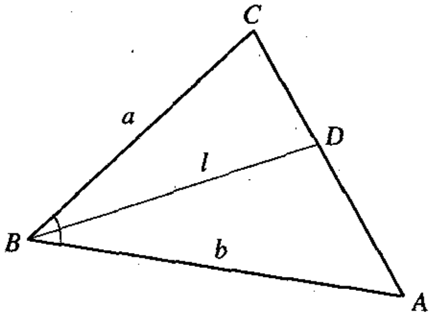


Рис. 12.62

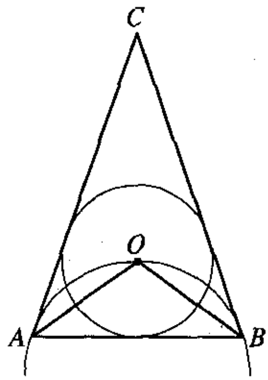


Рис. 12.63

Решение.

Пусть BD — биссектриса ΔABC (рис.12.62), $BC = a$, $AB = b$, $BD = l$, $\angle ABC = \alpha$.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} \Rightarrow \frac{ab}{2}\sin\alpha = \frac{al}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{bl}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = l(a+b)\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab}.$$

По условию $l = \dfrac{ab}{a+b}$ и $0° < \dfrac{\alpha}{2} < 90°$, следовательно $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} = 60°, \alpha = 120°$, что и требовалось доказать.

12.196. Известно, что в треугольнике ABC $AB = a$, $\angle C = \alpha$. Найти радиус окружности, проведенной через вершины A, B и центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр окружности, вписанной в ΔABC (рис.12.63).

$\angle BAC + \angle ABC = 180° - \alpha$.

$$\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Радиус окружности, описанной около ΔAOB:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AOB} = \frac{a}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

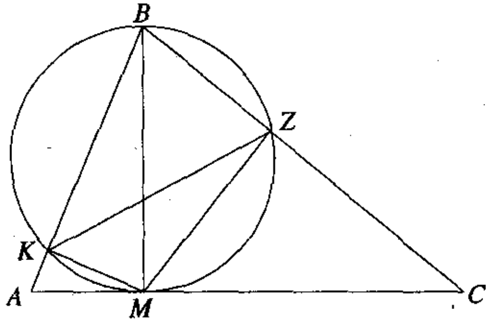


Рис. 12.64

12.197. В треугольнике ABC проведена высота BM и на ней, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке Z. Найти отношение площади треугольника KZM к площади треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$ и $\angle C = \beta$.

Решение.

$\angle ABC = 180° - (\alpha + \beta)$ (рис. 12.64)

$DAMB$ и ΔMKB, ΔCMB и ΔMZB — прямоугольные с общими острыми углами при вершине B.

Таким образом, $\angle KMB = \angle A = \alpha$, $\angle ZMB = \angle C = \beta$, $\angle KMZ = \alpha + \beta$.

Пусть $BM = 1$, тогда из ΔAMB ($\angle AMB = 90°$):

$$AB = \frac{BM}{\sin\angle A} = \frac{1}{\sin\alpha};\ \text{в}\ \Delta CMB\ (\angle CMB = 90°):\ BC = \frac{BM}{\sin\angle C} = \frac{1}{\sin\beta};$$

Из ΔBKM ($\angle BKM = 90°$): $MK = BM\cos\angle KMB = \cos\alpha$;

В ΔBZM ($\angle BZM = 90°$): $MZ = BM\cos\angle ZMB = \cos\beta$. Отсюда

$$\frac{S_{\Delta KMZ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}MK\cdot MZ\sin\angle KMZ}{\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC} = \frac{\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\beta}\sin(180° - (\alpha+\beta))} =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

12.198. В ромб вписана окружность. В образовавшийся криволинейный треугольник (с острым углом) снова вписана окружность. Найти ее радиус, если высота ромба равна h, а острый угол равен α.

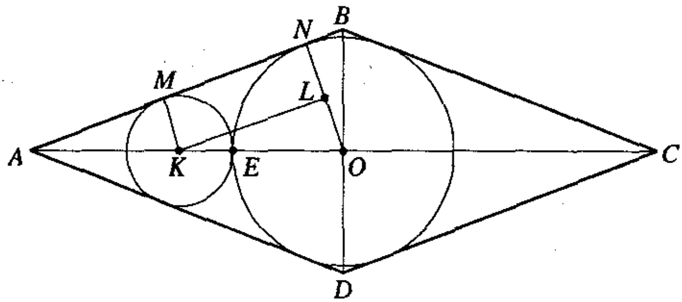


Рис. 12.65

Решение.

Пусть в ромбе $ABCD$ (рис. 12.65) $\angle BAD = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$, O — точка пересечения диагоналей — центр вписанной окружности, K — центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник.

N и M — точки касания построенных окружностей со стороной AB ромба.

Тогда $KM \perp AB, ON \perp AB, ON = \frac{h}{2}$.

Пусть $MK = r$. Проведем $KL \perp ON$.

Тогда $KL \| AB$, $\angle OKL = \angle OAB = \frac{\alpha}{2}, OL = ON - KM = \frac{h}{2} - r, OK = \frac{h}{2} + r$.

В ΔOLK ($\angle OLK = 90°$): $\sin \angle OKL = \frac{OL}{OK}$.

Тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{h}{2} - r}{\frac{h}{2} + r} \Leftrightarrow \left(\frac{h}{2} + r\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2} - r \Leftrightarrow r\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{h}{2} tg^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{h}{2} tg^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$.

12.199. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат 45° и 15°. Из вершины, противоположной основанию,

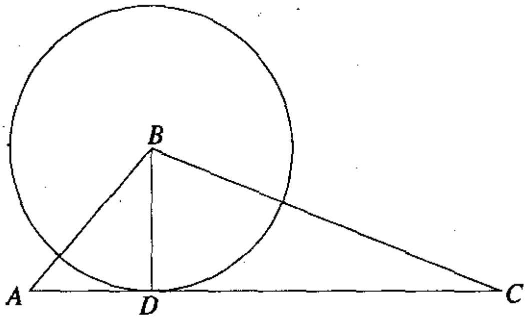


Рис. 12.66

проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC (рис. 12.66) $\angle A = 45°$, $\angle C = 15°$, $AC = a$, BD — высота и радиус круга, о котором говорится в условии задачи, $\angle ABC = 180° - (\angle A + \angle C) = 120°$.

Таким образом, искомая площадь равна 1/3 площади построенного круга.

Пусть $BD = h$.

Из ΔABD ($\angle ADB = 90°$, $\angle A = 45°$): $AD = BD = h$.

В ΔCDB ($\angle CDB = 90°$): $CD = h\text{ctg}15° = h\text{tg}75°$.

$$\text{tg}\,75° = \text{tg}(45° + 30°) = \frac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,30°}{1 - \text{tg}\,45°\,\text{tg}\,30°} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$AD + CD = AC.$

Отсюда $h + h\,\text{tg}\,75° = a \Rightarrow h = \dfrac{a}{1+\text{tg}\,75°} = \dfrac{a}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}.$

Искомая площадь

$$S = \frac{1}{3}\pi h^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{12} = \frac{\pi a^2\left(4-2\sqrt{3}\right)}{36} = \frac{\pi a^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{18}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{18}$.

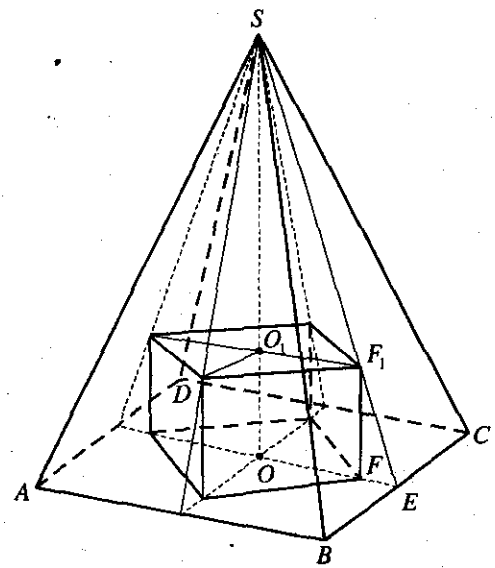


Рис. 12.67

12.200. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, четыре — на основании пирамиды. Найти ребро куба.

Решение.

Пусть в правильной пирамиде $SABCD$ (рис. 12.67) $AB = a$, SO — высота, $\angle SCO = \alpha$, SE — апофема, F и F_1 — вершины куба, о котором говорится в условии задачи. Тогда ребро куба FF_1 перпендикулярно OE.

$CO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, OE = \dfrac{a}{2}$. В $\Delta SOC(\angle SOC = \pi/2)$: $SO = CO \operatorname{tg} \angle SOC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$

Пусть ребро куба равно x. Тогда $OF = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}, EF = OE - OF = \dfrac{a - x\sqrt{2}}{2}.$

Прямоугольные треугольники SOE и F_1FE подобны, следовательно

$$\frac{FF_1}{SO} = \frac{FE}{OE} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{a - x\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2(1 + \operatorname{tg}\alpha)}.$$

$$\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}=\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,\alpha\right)}=\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

12.201. Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна S. Плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть C — вершина правильной двенадцатиугольной пирамиды (рис. 12.68), AB — сторона ее основания, $\angle ACB=\alpha$, $S_{\Delta ACB}=S$, CO — высота пирамиды, $CA=d$, $\angle CAO=x$.

Тогда $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha=S$, $d=\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$,

$\angle CAB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$.

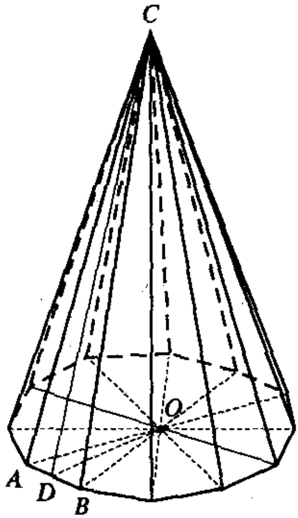


Рис. 12.68

В ΔAOC ($\angle AOC=90^\circ$):
$AO=d\cos x$, $CO=d\sin x$.

$$S_{осн.}=12S_{\Delta AOB}=12\cdot\frac{1}{2}AO^2\sin\angle AOB=6d^2\cos^2 x\sin 30^\circ=3d^2\cos^2 x.$$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot CO=d^3\cos^2 x\sin x$.

$\angle CAO$ — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, $\angle OAB$ — угол между проекцией бокового ребра на плоскость основания и стороной основания, $\angle CAB$ — угол между боковым ребром и стороной основания.

Тогда $\cos\angle CAB=\cos\angle CAO\cdot\cos\angle OAB$;

$$\cos x=\frac{\cos\angle CAB}{\cos\angle OAB}=\frac{\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos 75^\circ}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 15^\circ}\Rightarrow V=d^3\cos^2 x\sqrt{1-\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2S}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ}\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ}}=\frac{2S\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin^2 15^\circ}\cdot\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\sin^2 15^\circ-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ}}=\frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\cdot\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}\left(\frac{1-\cos 30^\circ}{2}-\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^3 15^\circ}\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 30^\circ}{2}}=$$

$$=\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^3 15^\circ}\sqrt{\frac{2S\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{S}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$

12.202. В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.

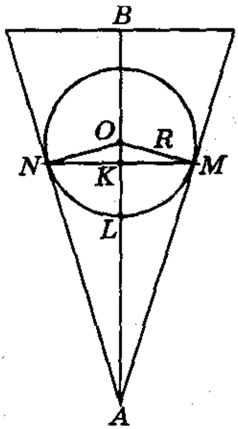


Рис. 12.69

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности конуса и шара (рис. 12.69).

Пусть A — вершина конуса, AB —его высота, O — центр шара, O принадлежит AB, N и M — точки касания большого круга шара с образующими конуса, K — точка пересечения AO и MN, L — точка пересечения поверхности шара и AO. Тогда $ON=OM=OL=R$, $\angle ONA=90^\circ$, $NK\perp AO$, K — середина NM, $\angle OAN=\angle ONK=\alpha$.

Искомый объем $V=V_2-V_1$, где V_2 — объем конуса, осевое сечение которого ΔNAM, V_1 — объем сегмента шара, осевое сечение которого — круговой сегмент NLM с высотой KL.

В $\Delta OKN\,(\angle OKN = 90°)$: $OK = ON\sin\angle ONK = R\sin\alpha$;
$NK = ON\cos\angle ONK = R\cos\alpha$.

Из $\Delta AKN\,(\angle AKN = 90°)$: $AK = NK\operatorname{ctg}\angle KAN = \dfrac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

$KL = OL - OK = R - R\sin\alpha = R(1-\sin\alpha)$.

Таким образом

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot NK^2\cdot AK - \pi\cdot KL^2\left(ON - \frac{KL}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^3\cos^2\alpha\cdot\frac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha} -$$

$$-\pi R^2(1-\sin\alpha)^2\left(R - \frac{R(1-\sin\alpha)}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha} - (1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3\left(\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)^2}{\sin\alpha} - (1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)\right) = \frac{1}{3}\pi R^3(1-\sin\alpha)^2\left(\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} -\right.$$

$$\left.-(2+\sin\alpha)\right) = \frac{\pi R^3\left(1-\cos(90°-\alpha)\right)^2}{3\sin\alpha}\left(1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha-\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3\frac{\sin^4\left(45° - \frac{a}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{\sin^4\left(45° - \frac{a}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

12.203. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания a и середину ее высоты, наклонена к основанию под углом φ.

Решение.

Пусть в правильной пирамиде $SABC$ (рис. 12.70) $AB = a$, SO — высота, M — середина SO, ΔAKB — сечение из условия задачи, D — середина AB.

Тогда $OD \perp AB$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

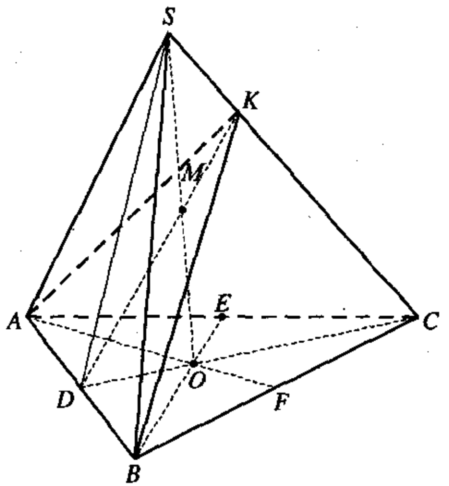


Рис. 12.70

Прямая DO — проекция прямой DM на плоскость ABC. Тогда $DM \perp AB$. Таким образом, $\angle MDO$ — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания пирамиды, $\angle MDO = \varphi$.

В ΔDOM $(\angle DOM = 90°)$: $MO = DO\operatorname{tg}\angle MDO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi$.

$$SO = 2MO = \frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi.$$

Объем пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a^3}{12}\operatorname{tg}\varphi$.

Из ΔDOS $(\angle DOS = 90°)$:

$$SD = \sqrt{DO^2 + SO^2} = a\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\varphi + 1}{12}} = \frac{a}{6}\sqrt{3\left(4\operatorname{tg}^2\varphi + 1\right)}.$$

Площадь боковой поверхности

$$S_б = 3S_{\Delta ASB} = \frac{3}{2}AB\cdot SD = \frac{a^2}{4}\sqrt{3\left(4\operatorname{tg}^2\varphi + 1\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3}{12}\operatorname{tg}\varphi; \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3\left(4\operatorname{tg}^2\varphi + 1\right)}$.

12.204. Найти объем правильной четырехугольной призмы, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α, а сторона основания равна a.

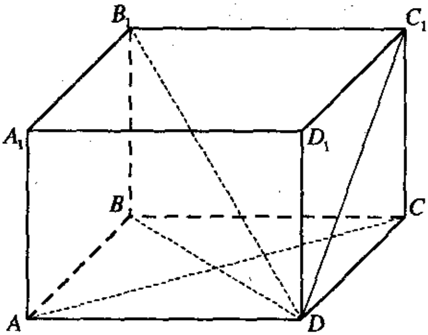


Рис. 12.71

Решение.

В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.71) $B_1C_1 = CD = a$.

$B_1C_1 \perp D_1C_1$, $B_1C_1 \perp C_1C$. Тогда B_1C_1 перпендикулярно плоскости грани DD_1C_1C и, следовательно, DC_1 — проекция DB_1 на эту боковую грань призмы и $\angle B_1DC_1 = \alpha$. В ΔB_1C_1D $(\angle B_1C_1D = 90°)$: $DC_1 = B_1C_1\operatorname{ctg}\angle B_1DC_1 = \alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

Из ΔC_1CD $(\angle C_1CD = 90°)$:

$$CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - CD^2} = \sqrt{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Объем призмы $V = S_{ABCD}\cdot CC_1 = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

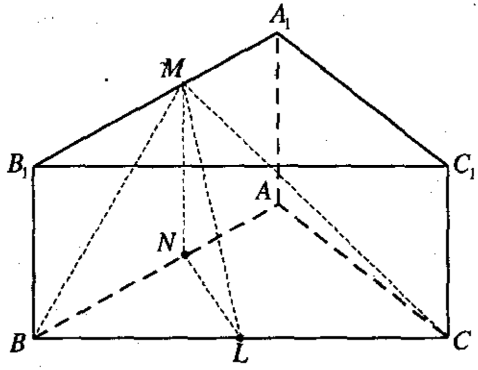


Рис. 12.72

12.205. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого больший катет AB равен a, а противолежащий ему угол C равен α. Гипотенуза BC является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре A_1B_1. Найти высоту конуса, если $AA_1 = a/2$.

Решение.

Пусть M — вершина, L — центр основания, MB и MC — образующие конуса (рис. 12.72) из условия задачи. Конус размещается так, что его высота ML перпендикулярна BC. Опустим из точки M перпендикуляр MN на плоскость ABC. Тогда $MN \| AA_1, MN \| AA_1, MN = AA_2 = \dfrac{\alpha}{2}$,

NL — проекция ML на плоскость ABC и $NL \perp BC$.

$\angle BNL = \angle ACB = \alpha$.

В ΔBAC ($\angle BAC = 90°$):

$$BC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{a}{\sin\alpha}. \quad LB = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

В ΔBLN ($\angle BLN = 90°$): $LN = BL \operatorname{ctg} \angle BNL = \dfrac{a \operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\alpha}$.

Из ΔMNL ($\angle MNL = 90°$):

$$ML = \sqrt{LN^2 + MN^2} = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}{4\sin^2\alpha} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

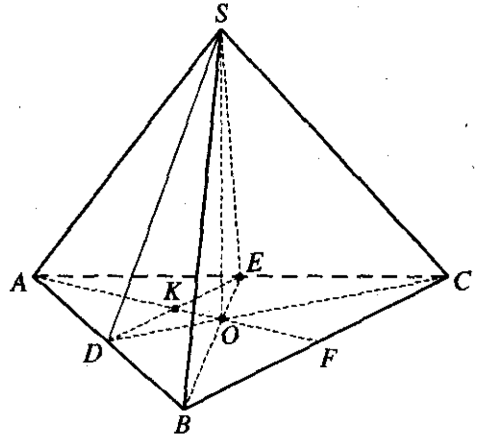


Рис. 12.73

12.206. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти площадь сечения и объем пирамиды, если известны сторона a основания и угол α между сечением и основанием.

Решение.

Пусть D и E — середины сторон AB и AC основания правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.73), ΔDSE — сечение этой пирамиды, SO — высота пирамиды, K — точка пересечения AO и DE. Тогда $OK \perp DE$,

$$DE = \frac{a}{2}, AK = \frac{a\sqrt{3}}{4}, OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OK = OA - AK = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Прямая KO — проекция KS на плоскость основания, поэтому, $KS \perp DE$ $\angle SKO$ — угол между сечением и основанием, $\angle SKO = \alpha$.

ΔDOE — проекция ΔDSE на плоскость основания пирамиды, следовательно

$$S_{\Delta DSE} = \frac{S_{\Delta DOE}}{\cos\angle SKO} = \frac{\frac{1}{2} DE \cdot OK}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}.$$

В ΔSOK ($\angle SOK = 90°$): $SO = OK \operatorname{tg}\angle SKO = \frac{a\sqrt{3}}{12}\operatorname{tg}\alpha.$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} tg\alpha = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{48}.$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}; \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{48}.$

12.207. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

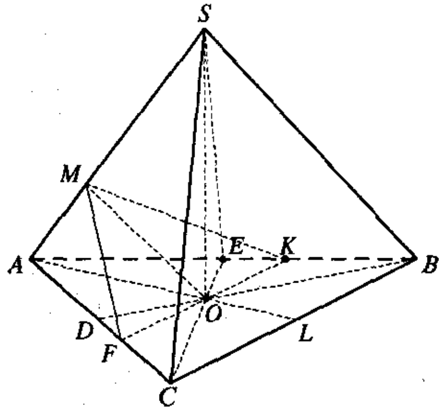


Рис. 12.74

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.74), $OM \perp SA$, $OM = p$, AL — высота ΔABC.

В плоскости ABC через точку O проведем FK параллельно BC.

Прямая AL — проекция SA на плоскость ABC, $AL \perp BC$. Таким образом, $SA \perp BC$. $SA \perp BC$, $FK \| BC$, отсюда $SA \perp FK$.

$SA \perp FK$, $SA \perp OM$. Следовательно, плоскость MFK перпендикулярна ребру SA, O — центр правильного ΔABC и $FK \| BC \Rightarrow O$ — середина $FK \Rightarrow MO$ — высота и медиана $\Delta FMK \Rightarrow \Delta FMK$ — равнобедренный, $\angle FMO = \frac{1}{2}\angle FMK = \frac{\alpha}{2}$.

В ΔFOM ($\Delta FOM = 90°$): $FO = MO\,\mathrm{tg}\angle FMO = p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$\Delta ALC \sim \Delta AOF$ и так как $AL = \frac{3}{2}AO$, то $CL = \frac{3}{2}FO = \frac{3p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$.

$BC = 2CL = 3p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9p^2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}$.

Пусть $\angle SAO = \beta$.

В $\Delta FOM(\angle FOM = 90°)$: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{FO}{MO}$.

Из $\Delta AMO(\angle AMO = 90°)$: $\sin\beta = \frac{MO}{AO}$.

Тогда $\sin\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{MO}{AO}\cdot\frac{FO}{MO} = \frac{FO}{AO} = \mathrm{tg}\angle FAO = \mathrm{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

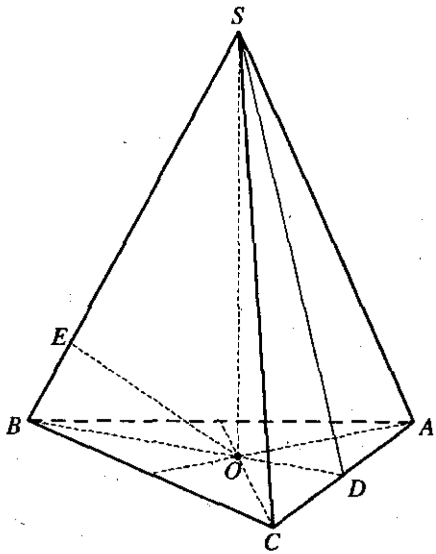


Рис. 12.75

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

OM — высота прямоугольного $\Delta AOS \Rightarrow \angle MOS=\angle SAO=\beta$.

$$\text{В } \Delta SMO(\angle SMO=90^\circ): SO=\frac{OM}{\cos\angle MOC}=\frac{p\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{9p^2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}\cdot\frac{p\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}=\frac{9p^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Ответ: $\dfrac{9p^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

12.208. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.75) $OE \perp BS$, $OE = p$, D — середина AC. Тогда $\angle ODS = \alpha$.

Пусть $AC = a$. Тогда $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

В $\Delta DOS(\angle DOS = 90^\circ): SO = OD \operatorname{tg} \angle ODS = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\alpha$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot OS = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{24}$.

В $\Delta BOS(\angle BOS = 90^\circ): BS = \sqrt{BO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12}\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

$$S_{\Delta BOS} = \frac{1}{2} BO \cdot SO = \frac{1}{2} BS \cdot OE \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{6} \operatorname{tg}\alpha = \frac{p\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{2\sqrt{3}};$$

$$a = \frac{\sqrt{3} p \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow V = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{24} = \frac{\sqrt{3} p^3 \sqrt{\left(4 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)^3}}{8 \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{3} p^3 \sqrt{\left(4 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)^3}}{8 \operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.209. Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, если его высота равна h, диагонали составляют с основанием углы α и β, а основанием служит ромб.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание прямой призмы

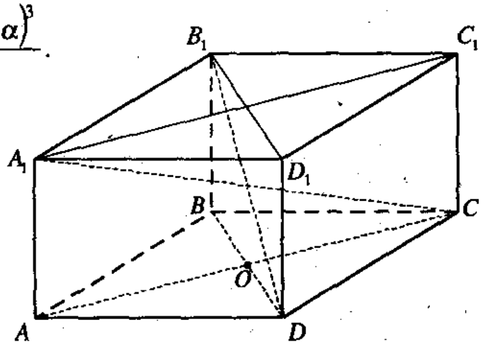


Рис. 12.76

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.76), $AA_1 = BB_1 = h$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD ромба, $\angle A_1CA = \alpha$, $\angle B_1DB = \beta$.

В $\Delta B_1BD(\angle B_1BD = 90°)$: $BD = BB_1 \operatorname{ctg} \angle B_1DB = h \operatorname{ctg} \beta$.

Из $\Delta A_1AC(\angle A_1AC = 90°)$: $AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle A_1CA = h \operatorname{ctg} \alpha$.

Площадь основания призмы $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow$ объем призмы $V = Sh = \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

$$OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \alpha, OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \beta.$$

В $\Delta AOD(\angle AOD = 90°)$: $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \frac{1}{2} h \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$.

Боковая поверхность призмы: $S_б = 4AD \cdot h = 2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$.

Ответ: $2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}; \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

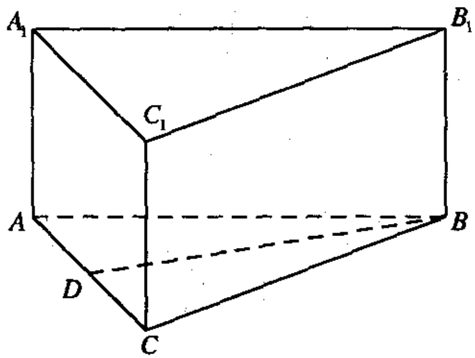


Рис. 12.77

12.210. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

Решение.

Пусть в ΔABC — основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.77). $AB = BC$, $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, BD — высота.

В $\Delta ADB(\angle ADB = 90°)$: $BD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha, AB = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Если H — высота призмы, то площадь ее боковой поверхности равна

$$S_б = \left(\frac{a}{\cos\alpha} + a\right) H = aH \cdot \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2aH \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Площадь основания призмы $S_{осн.} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

По условию $S_б = 2\ S_{осн}$, следовательно $\frac{2aH\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = \frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Объем призмы $V = S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{8}a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{8}a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

12.211. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Найти объем пирамиды, если ее боковые грани образуют с основанием один и тот же двугранный угол β и радиус вписанного в нее шара равен r.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание пирамиды $SABCD$ (рис. 12.78), SO — ее высота, $\angle BCD = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$.

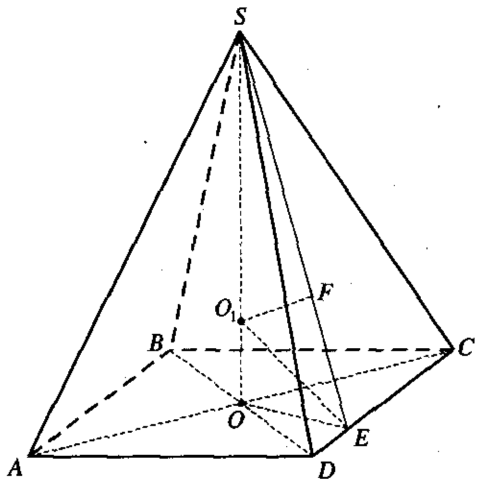


Рис. 12.78

Из вершины S пирамиды опустим перпендикуляр SE на сторону CD основания. Тогда $OE \perp CD$ и $\angle SEO$ — линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью CSD с основанием, $\angle SEO = \beta$. Так как все грани данной пирамиды образуют с основанием один и тот же угол, то точка O — центр окружности, вписанной в ромб $ABCD$ — точка пересечения его диагоналей AC и BD.

Тогда $\angle DOE = \angle OCE = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{\alpha}{2}$.

Пусть O_1 — точка пересечения биссектрисы $\angle SEO$ и высоты SO

пирамиды. Опустим в плоскости SOE перпендикуляр O_1F на прямую SE. Так как DC перпендикулярно плоскости SOE, то плоскости SOE и DSC перпендикулярны и, следовательно, O_1F — перпендикуляр к плоскости DSC. $O_1F = O_1O$ и так как грань DSC выбрана произвольно, то O_1 равноудалена от всех граней пирамиды, то есть O_1 — центр шара, вписанного в данную пирамиду, и $O_1O = O_1F = r$.

В ΔO_1OE ($\angle O_1OE = 90°$): $OE = O_1O \operatorname{ctg}\angle OEO_1 = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

Из ΔSOE ($\angle SOE = 90°$): $SO = OE \operatorname{tg}\angle SEO = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta$.

В ΔOEC ($\angle OEC = 90°$): $CO = \dfrac{OE}{\sin\angle OCE} = \dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Из ΔOED ($\angle OED = 90°$): $DO = \dfrac{OE}{\cos\angle DOE} = \dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Площадь основания пирамиды

$$S_{осн} = \frac{1}{2}AC\cdot BD = 2CO\cdot DO = \frac{2r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO = \dfrac{4r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha} = \dfrac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}$.

12.212. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

Решение.

Пусть боковые грани SAB и SAC пирамиды $SABC$ (рис. 12.79) перпендикулярны плоскости ABC ее основания. Тогда их общее ребро SA является высотой пирамиды. В ΔABC $AB = AC = b$, $\angle BAC = \alpha$.

Если E — середина BC, то $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$, $AE \perp BC \Rightarrow SE \perp BC$ и $\angle SEA$ — угол наклона грани BSC к плоскости основания, $\angle SEA = \alpha$.

Пусть O — центр шара, вписанного в данную пирамиду. Так как шар касается граней двугранного угла с ребром BC, то O лежит на биссектрисе линейного угла SEA этого двугранного угла.

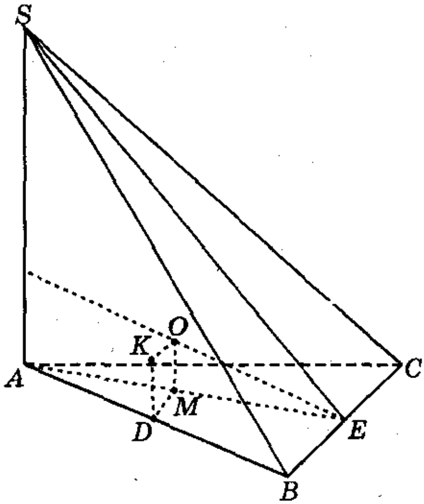


Рис. 12.79

Пусть M и K — соответственно точки касания шара с гранями ABC и SAB пирамиды. Таким образом, $OM \perp ABC$, $OK \perp SAB$, $OM = OK = r$, где r — искомый радиус шара.

В плоскости SAB проведем перпендикуляр KD к прямой AB. Так как плоскости SAB и ABC перпендикулярны, то $KD \perp ABC \Rightarrow KD \perp MD$. В четырехугольнике $OKDM$ углы при вершинах K, D, M — прямые, поэтому он является прямоугольником и так как $OK = OM$, то $OKDM$ — квадрат, $DM = OM = r$.

В $\Delta AEB(\angle AEB = 90°)$: $AE = AB\cos\angle BAE = b\cos\frac{\alpha}{2}$.

Из $\Delta ADM(\angle ADM = 90°)$: $AM = \frac{DM}{\sin\angle BAE} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

В $\Delta OME(\angle OME = 90°)$: $ME = OM\operatorname{ctg}\angle OEM = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$AM + ME = AE \Rightarrow \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow r = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}};\ r = \frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Ответ: $\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}$

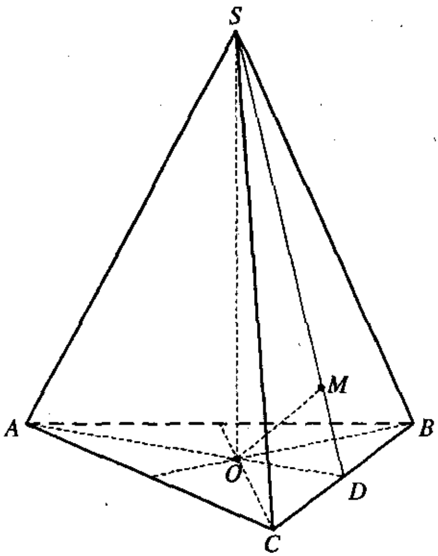


Рис. 12.80

12.213. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис.12.80), $\angle SCO=\alpha$, D — середина BC. Тогда $AD \perp BC$, $SD \perp BC$ и ребро BC перпендикулярно плоскости ADS. Плоскости ADS и BSC перпендикулярны.

В плоскости ADS из точки O проведем перпендикуляр OM к SD. Так как плоскости ADS и BSC перпендикулярны, то OM перпендикулярен плоскости BSC и равен a.

Пусть $BC = x$, $\angle ODS = \varphi \Rightarrow OC = \frac{x\sqrt{3}}{3}, OD = \frac{x\sqrt{3}}{6}, S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

В ΔSOC ($\angle SOC = 90°$): $SO = OC \operatorname{tg} \angle SCO = \frac{x\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha$.

Из ΔSOD ($\angle SOD = 90°$): $SO = OD \operatorname{tg} \angle ODS = \frac{x\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\varphi$.

Тогда $\frac{x\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\alpha$.

В ΔOMD ($\angle OMD = 90°$):

$$OD = \frac{OM}{\sin\angle ODM} = \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{a}{\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{12}x^3\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{3\sqrt{3}a^3\sqrt{\left(1+4\operatorname{tg}^2\alpha\right)}}{\operatorname{tg}^3\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}a^3\sqrt{\left(1+4\operatorname{tg}^2\alpha\right)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}a^3\sqrt{\left(1+4\operatorname{tg}^2\ddot{\alpha}\right)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.214. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

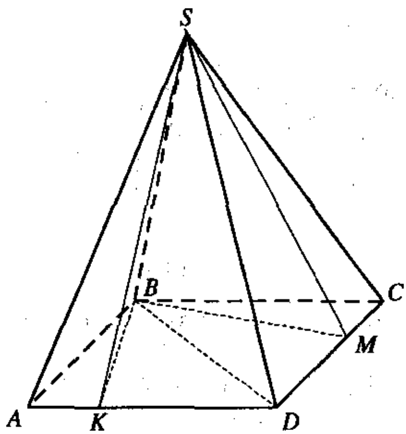


Рис. 12.81

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание пирамиды $SABCD$ (рис. 12.81), $AB=a$, острый угол ромба α.

Тогда площадь ромба $S=a^2\sin\alpha$, а его высота $h=a\sin\alpha$.

Боковые грани ABS и CBS пирамиды перпендикулярны плоскости основания, следовательно их общее ребро SB — высота пирамиды. Проведем из точки B перпендикуляры BK и BM к прямым AD и CD. Тогда $BK=BM=h=a\sin\alpha$, $SK\perp AD$, $SM\perp CD$, $\angle SKB=\angle SMB=\varphi$.

Из ΔSBK ($\angle SBK=90°$): $BS=BK\operatorname{tg}\angle SKB=a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Объем пирамиды $V=\dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot BS=\dfrac{1}{3}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi$.

ΔABD и ΔCBD — проекции граней ASD и CSD на плоскость основания, следовательно $S_{\Delta ASD}=S_{\Delta CSD}=\dfrac{S_{\Delta ABD}}{\cos\varphi}=\dfrac{a^2\sin\alpha}{2\cos\varphi}$.

$$S_{\Delta ABS}=S_{\Delta CBS}=\frac{1}{2}BS\cdot AB=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2\sin\alpha\sin\varphi}{2\cos\varphi}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_{бок}=2(S_{\Delta ASD}+S_{\Delta ABS})=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\varphi}+\frac{a^2\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{a^2\sin\alpha(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}=$$

$$=\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos(90^\circ-\varphi))}{\cos\varphi}=\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi;\ \frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}.$

12.215. В правильной треугольной пирамиде с углом α между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра параллельно боковой грани. Зная площадь S этого сечения, найти объем пирамиды. Каковы возможные значения α?

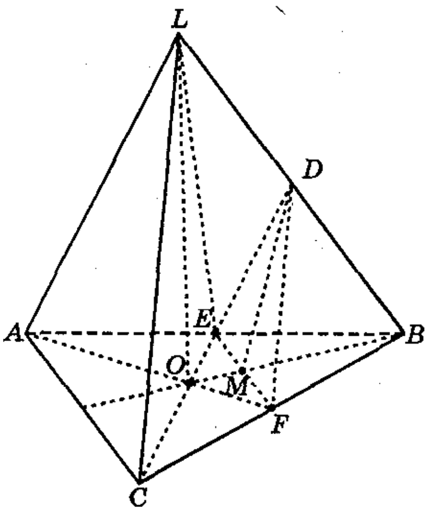


Рис. 12.82

Решение.

Пусть D — середина бокового ребра BL правильной пирамиды $LABC$ (рис. 12.82), ΔEDF — проведенное сечение этой пирамиды, $\angle LAC=\alpha$.

Так как плоскости EDF и ALC параллельны, то $DE\parallel AL$, $DF\parallel LC$ и так как D — середина BL, то E — середина AB, F — середина BC, $EF\parallel AC$,

$DE=DF=\frac{1}{2}AL$. Так как $DE\parallel LA$, $EF\parallel AC$, то $\angle DEF=\angle LAC=\alpha$.

Пусть LO — высота пирамиды $LABC$, M — точка пересечения BO и EF. Тогда M — середина EF, $DM\perp EF$.

Если $AC=a$, то $EF=\frac{a}{2}, DM=\frac{a}{4}\mathrm{tg}\,\alpha, DE=\frac{a}{4\cos\alpha}$.

$$S_{\Delta EDF}=\frac{1}{2}EF\cdot DM\Rightarrow\frac{a^2}{16}\mathrm{tg}\,\alpha=S,\ a=4\sqrt{S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

$$AO=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ AL=2DE=\frac{a}{2\cos\alpha}.$$

В $\Delta AOL\left(\angle AOL=\frac{\pi}{2}\right)$: $OL=\sqrt{AL^2-AO^2}=a\sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha}-\frac{1}{3}}=$

$$=a\sqrt{\frac{\frac{3}{4}-\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha}}=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OL=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{a^3}{12\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{64S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}}{12\cos\alpha}=$$

$$=\frac{16S\operatorname{ctg}\alpha}{3}\sqrt{\frac{S\operatorname{ctg}\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}}=\frac{16}{3}S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}},$$

где $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha>0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha<\frac{1}{2}$, откуда $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{16}{3}S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

12.216. Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается около оси конуса. Найти угол между его образующей и осью, если поверхность вращения делит объем конуса пополам.

Решение.

Пусть ΔABC — осевое сечение данного конуса (рис. 12.83), BO — его высота, OM — перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую AB. В результате вращения OM около прямой BO получится конус, осевое сечение которого ΔMOL, $ML\perp BO$. Плоскость основания полученного конуса отсекает от данного конус, осевое сечение которого ΔMBL. Точка K пересечения ML и BO — центр общего основания конуса, полученного в результате вращения отрезка OM, и конуса, отсеченного от данного. Сумма объемов V_1 и V_2 этих конусов равна 1/2 объема V данного конуса.

Пусть $\angle ABO=\alpha, 0°<\alpha<90°, AO=R$.

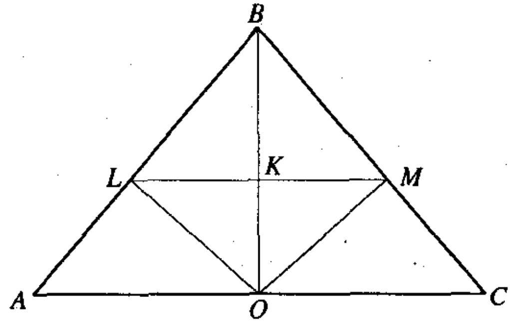


Рис. 12.83

$\angle KLO = \angle AOL = \angle ABO = \alpha$.

В $\Delta ALO\ (\angle ALO = 90°)$: $OL = OA \cdot \cos\angle AOL = R\cos\alpha$.

Из $\Delta LKO\ (\angle LKO = 90°)$: $LK = OL \cdot \cos\angle KLO = R\cos^2\alpha$.

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi LK^2 \cdot OK + \frac{1}{3}\pi LK^2 \cdot BK = \frac{1}{3}\pi LK^2(OK + BK) = \frac{1}{3}\pi LK^2 \cdot BO.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot BO.$$

Так как $V_1 + V_2 = \frac{1}{2}V$, то $\frac{1}{3}\pi LK^2 \cdot BO = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot BO; LM^2 = \frac{1}{2}OA^2$;

$$R^2\cos^4\alpha = \frac{1}{2}R^2;\ \cos^4\alpha = \frac{1}{2};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}};\ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right).$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

12.217. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

Решение.

Пусть трапеция $ABCD$, $AB = CD$ (рис. 12.84) — осевое сечение данного усеченного конуса, O — центр вписанного шара, M, N, K — точки касания шара с диаметрами BC и AD оснований конуса и его образующей CD.

Если r и R — радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса, l — образующая, x — радиус вписанного шара, $\angle CDN = \alpha$, то $CM = CK = r$, $DN = DK = R$, $l = CD = CK + KD = R + r$, $MN = 2xl$

Полная поверхность усеченного конуса

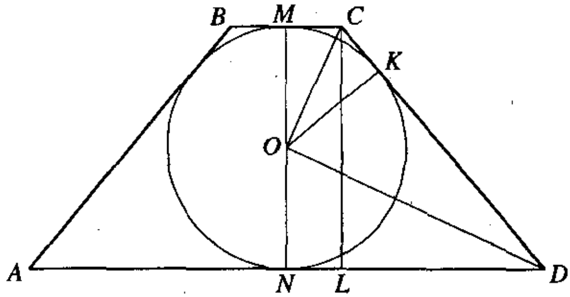


Рис. 12.84

$S = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(l^2 + R^2 + r^2) = \pi(l^2 + (R + r)^2 - 2Rr) = \pi(2l^2 - 2Rr) = 2\pi(l^2 - Rr)$.

Пусть CL — высота трапеции $ABCD$, $CL = MN = 2x$, тогда из ΔCLD $l = CD = \dfrac{CL}{\sin\angle CDN} = \dfrac{2x}{\sin\alpha}$.

$$\angle COD = 90°, OK \perp CD, OK = x, CK \cdot KD = OK^2, Rr = x^2 \Rightarrow S = 2\pi\left(\frac{4x^2}{\sin^2\alpha} - x^2\right) = 2\pi x^2\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right).$$

Поверхность шара $S_1 = 4\pi x^2$.

Так как $S = 2S_1$, то $2\pi x^2\left(\dfrac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right) = 8\pi x^2 \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{4}{5}; \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}; \alpha = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

12.218. Основанием прямой призмы служит треугольник со стороной a и прилежащими к ней углами α и β. Через сторону основания под углом φ к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти объем полученной треугольной пирамиды.

Решение.

Пусть ΔABC — основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис.12.85), $\angle ACB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $BC = a$, E — точка пересечения сечения призмы, проходящего через BC, с ее боковым ребром AA_1. Тогда AE — высота

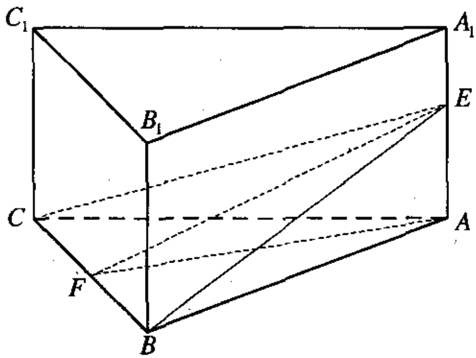


Рис. 12.85

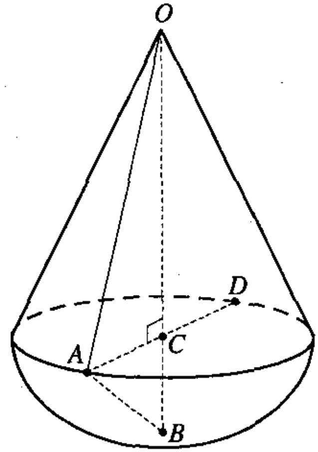


Рис. 12.86

полученной пирамиды и ее объем $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EA$, AF — высота ΔABC и проекция EF на плоскость ABC. Таким образом $EF \perp BC$ и $\angle EFA = \varphi$.

В ΔABC: $\angle BAC = 180° - (\alpha + \beta)$;

$$AB = \frac{CB \sin \angle ACB}{\sin \angle BAC} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC =$$

$$= \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AF$, то $AF = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

В $\Delta EAF (\angle EAF = 90°)$: $EA = AF \operatorname{tg} \angle EFA = \frac{a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Отсюда $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} \varphi}{6 \sin^2(\alpha + \beta)}$.

Ответ: $\frac{a^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} \varphi}{6 \sin^2(\alpha + \beta)}$.

12.219. При вращении кругового сектора около одного из крайних радиусов получилось тело, площадь сферической поверхности которого равна площади конической поверхности. Найти синус центрального угла кругового сектора.

Решение.

В результате вращения получилось тело, состоящее из конуса и шарового сегмента, имеющих общее основание (рис. 12.86): центр O кругового сектора — вершина конуса, радиус OB, около которого осуществлялось вращение — ось полученного тела, радиус OA — образующая конуса, B — вершина шарового сегмента.

Точка C — центр основания конуса. Тогда $\angle ACO = 90°$, CB — высота шарового сегмента, $\angle AOB$ — центральный угол кругового сектора.

Пусть $OA = OB = R$, $\angle AOB = \alpha$, тогда из ΔACO: $OC = R\cos\alpha$, $CA = R\sin\alpha$.
$BC = OB - OC = R(1 - \cos\alpha)$.

Площадь конической поверхности $S_1 = \pi \cdot CA \cdot OA = \pi R^2 \sin\alpha$.

Площадь поверхности шарового сегмента
$S_2 = 2\pi \cdot OB \cdot CB = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha)$.

Так как $S_1 = S_2$, то $\pi R^2 \sin\alpha = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha)$; $\sin\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$; $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} =$

$= 2; \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\dfrac{4}{5}$.

12.220. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Через вершину основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

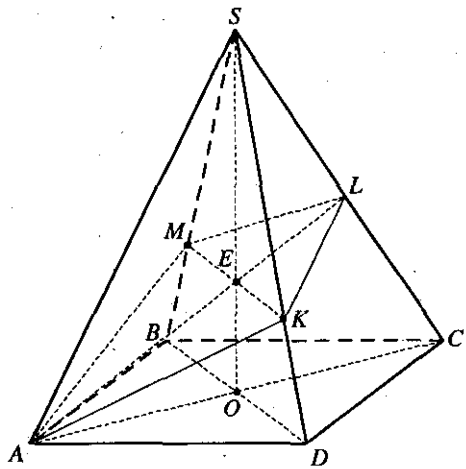


Рис. 12.87

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды

$SABCD$ (рис. 12.87), L — середина SC, $\angle SCA = \alpha$, M и K — точки пересечения сечения, проходящего через точки A и L параллельно BD с ребрами SB и SD, MK — линия пересечения сечения и плоскости BSD, отсюда $MK \parallel BD$.

$BD \perp AC$, $BD \perp SO$. Таким образом, прямая BD перпендикулярна плоскости ASC.

AL — линия пересечения сечения и плоскости ASC. Тогда $BD \perp AL$.

$AL \perp BD$, $AC \perp BD$, BD параллельна прямой пересечения сечения и плоскости основания, которая проходит через точку A. Отсюда, AL и AC перпендикулярны этой прямой и $\angle LAC$ — искомый угол наклона секущей плоскости к плоскости основания.

Пусть $\angle LAC = x$, E — точка пересечения медиан SO и AL треугольника ASC. Тогда $EO = \frac{1}{3}SO$. Из ΔAOE ($\angle AOE = 90°$): $EO = OA \operatorname{tg} x$.

В ΔSOC ($\angle SOC = 90°$): $SO = OC \operatorname{tg} \angle SOC = OA \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow OA \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} OA \operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha; x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}$.

12.221. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, проходящая через середину одной стороны верхнего основания и середину параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Большее боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего оснований.

Решение.

Пусть O и O_1 — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ данной усеченной пирамиды (рис. 12.88), D — середина BC, D_1 — середина B_1C_1, прямая DD_1 перпендикулярна плоскостям оснований. Точки B и B_1 симметричны точкам C и C_1 относительно прямой DD_1 и $BB_1 = CC_1$.

Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1E на плоскость ABC.

Пусть $BC = x$, $B_1C_1 = y$, тогда проекции BB_1 и CC_1 на плоскость будут равны $\frac{x-y}{2}$ и $B_1C_1 \perp A_1D_1, B_1C_1 \perp DD_1$, то есть B_1C_1 перпендикулярен плоскости AA_1D_1D и так как $B_1D_1 = C_1D_1$, то B и B_1 симметричны относительно этой плоскости.

Аналогично, точки B и C также симметричны относительно плоскости AA_1D_1D.

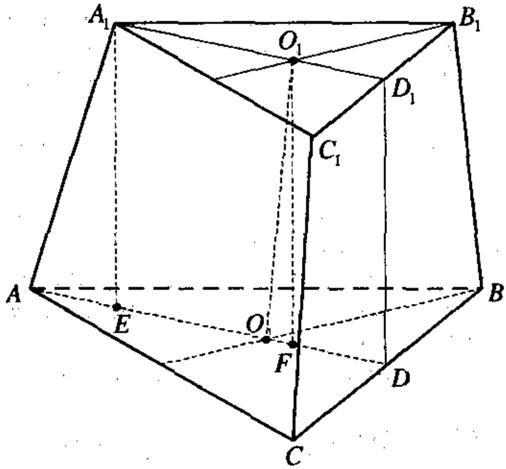


Рис. 12.88

Таким образом, трапеции AA_1C_1C и AA_1B_1B симметричны относительно плоскости AA_1D_1D и, следовательно, равны. Тогда $\angle A_1AC = \angle A_1AB$ и точка E находится на биссектрисе AD угла BAC.

$$AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}, ED = A_1D_1 = \frac{y\sqrt{3}}{2}, AE = AD - ED = \frac{(x-y)\sqrt{3}}{2}.$$

AE — проекция бокового ребра AA_1 усеченной пирамиды на плоскость ABC. Так как $\frac{(x-y)\sqrt{3}}{2} > \frac{x-y}{2}$, то AA_1 — большее боковое ребро и $AA_1 = l$, $\angle A_1AE = \alpha$.

Тогда $DD_1 = A_1E = l\sin\alpha$, $AE = l\cos\alpha$.

Проведем в плоскости $AA_1D_1DO_1F \parallel A_1E$. Тогда $O_1F \perp AD$, $O_1F = A_1E = l\sin\alpha$.

$$OF = OD - FD = OD - O_1D_1 = \frac{1}{3}(AD - A_1D_1) = \frac{1}{3}AE = \frac{l\cos\alpha}{3}.$$

В ΔOFO_1 ($\angle OFO_1 = 90°$):

$$OO_1 = \sqrt{OF^2 + O_1F^2} = \sqrt{\frac{l^2\cos^2\alpha}{9} + l^2\sin^2\alpha} = \frac{l}{3}\sqrt{\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{l}{3}\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha} = \frac{l}{3}\sqrt{1 + 4(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{l}{3}\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{l}{3}\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$.

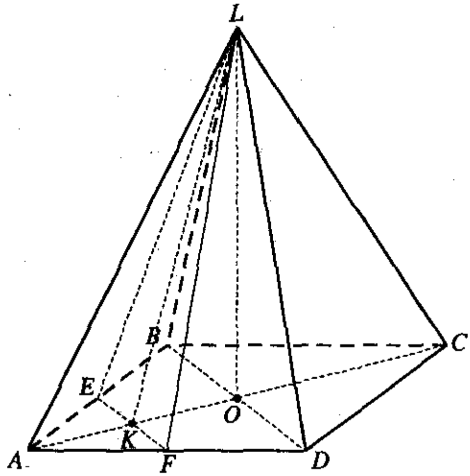


Рис. 12.89

12.222. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Площадь полученного сечения равна S. Найти сторону ромба.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание пирамиды $LABCD$ (рис. 12.89), $\angle BAD = \alpha$, LO — высота пирамиды. Так как боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то O — центр круга, вписанного в ромб, — точка пересечения его диагоналей. Пусть E — середина AB, F — середина AD, $S_{ELF} = S$, K — точка пересечения EF и AC, $AB = a$.

$$EF \| BD, EF = \frac{1}{2}BD = BO = a\sin\frac{\alpha}{2}, EF \perp KO, K \text{ — середина } EF. \ KO \text{ —}$$

проекция KL на плоскость основания. Тогда $KL \perp EF$, $\angle LKO$ — угол между плоскостью ELF сечения и плоскостью основания пирамиды, $\angle LKO = \beta$. $KO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}a\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$\text{В } \Delta KOL \ (\angle KOL = 90^\circ)\text{: } KL = \frac{KO}{\cos\angle LKO} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\beta}.$$

$$S_{\Delta ELF} = \frac{1}{2}EF \cdot LK \Rightarrow \frac{1}{2}a\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\beta} = S; \frac{a^2\sin\alpha}{8\cos\beta} = S; a = 2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}.$$

Ответ: $2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$.

12.223. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β.

Площадь сечения, проведенного через большую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание пирамиды $LABCD$ (рис. 12.90), $\angle BCD = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$, LO — высота пирамиды. Все боковые грани имеют с плоскостью основания один и тот же угол, поэтому O — центр круга, вписанного в ромб, — точка пересечения диагоналей ромба.

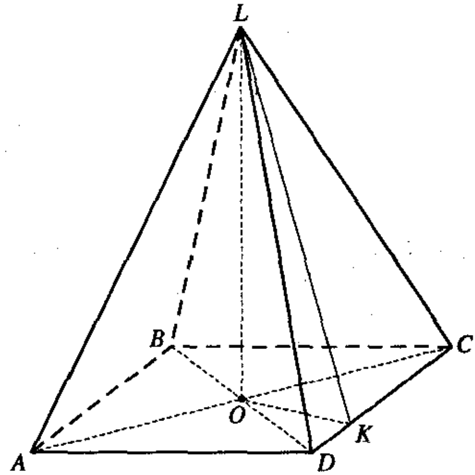


Рис. 12.90

$\angle BCD$ острый, поэтому AC — большая диагональ ромба, $S_{\Delta ALC} = S$.

В плоскости DLC опустим перпендикуляр LK на CD. Тогда $OK \perp CD$ $\angle LKO = \beta$.

Плоскость ALC делит данную пирамиду на две равных пирамиды $DALC$ и $BALC$ с общим основанием ALC.

$DO \perp AC$, $DO \perp LO$. Отсюда DO перпендикулярен плоскости ALC и является высотой пирамиды $DALC$.

Объем данной пирамиды $V = 2V_{DALC} = \dfrac{2}{3} S \cdot DO$.

Пусть $DO = a$, $\angle DOK = \angle DCO = \dfrac{1}{2}\angle BCD = \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда $OK = a\cos\dfrac{\alpha}{2}, OC = a\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}, MO = a\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

$$S = \frac{1}{2} LO \cdot AC = LO \cdot OC \Rightarrow a\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta \cdot a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = S; a = \sqrt{\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow V = \frac{2S\sqrt{S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{2S\sqrt{S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}$.

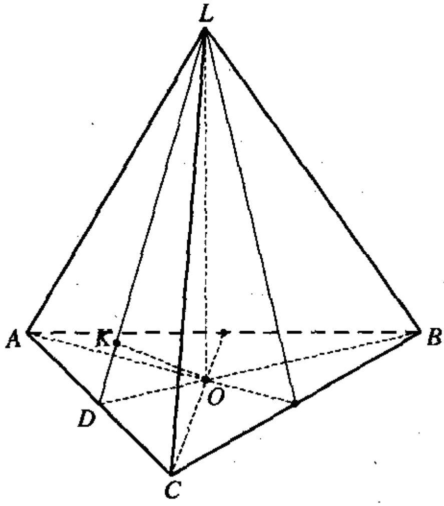


Рис. 12.91

12.224. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, боковая поверхность равна S. Найти расстояние от центра основания до боковой грани.

Решение.

Пусть LO — высота правильной пирамиды $LABC$ (рис. 12.91). Проведем в грани ALC перпендикуляр LD на AC. Тогда $OD \perp AC$, $\angle LDO = \alpha$, сторона AC перпендикулярна плоскости LDO, плоскости LDO и ALC перпендикулярны.

В плоскости LDO проведем перпендикуляр OK на LD. Тогда OK перпендикулярен плоскости ALC и его длина есть расстояние от точки O до грани ALC. Так как пирамида правильная, то все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания и $S_{\Delta ABC} = S\cos\alpha$.

Если $AC = a$, то $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = S\cos\alpha, a = 2\sqrt{\dfrac{S\cos\alpha}{\sqrt{3}}}$.

$OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{1}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Из ΔOKD ($\angle OKD = 90°$): $OK = OD\sin\angle ODK = \dfrac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$.

12.225. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

Решение.

Пусть MO — высота правильной пирамиды $MABC$ (рис. 12.92), $MO = H, F$ — середина BC. Тогда $AF \perp BC$, $MF \perp BC$ $\angle AFM = \alpha$.

В $\Delta MOF (\angle MOF = 90°)$: $OF = H\text{ctg}\ \alpha$. K — середина AM. В плоскости AMF проведем $KL \parallel MO$, тогда $KL \perp AF$ и KL — средняя линия ΔAOM.

$$KL = \frac{1}{2}MO = \frac{H}{2}, AL = LO.$$

Так как $AO = 2OF$, то $AL = LO = OF$, $LF = 2OF = 2H\text{ctg}\,\alpha$.

Пусть LF — проекция KF на плоскость ABC, $LF \perp BC$, тогда $KF \perp BC$.

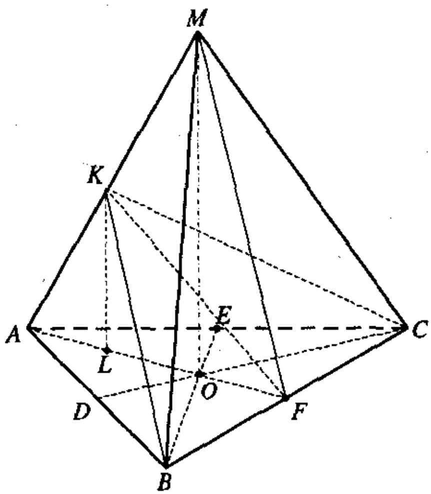


Рис. 12.92

В ΔBFO $(\angle BFO = 90°)$:

$$BF = OF\,\text{ctg}\,\angle OBF = H\,\text{ctg}\,\alpha\,\text{ctg}\,30° = H\sqrt{3}\,\text{ctg}\,\alpha.$$

В ΔKLF $(\angle KLF = 90°)$:

$$KF = \sqrt{KL^2 + LF^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + 4H^2\,\text{ctg}^2\,\alpha} = \frac{H}{2}\sqrt{1 + 16\,\text{ctg}^2\,\alpha}.$$

$$S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}BC \cdot KF = BF \cdot KF = \frac{1}{2}H^2\sqrt{3}\,\text{ctg}\,\alpha\sqrt{1 + 16\,\text{ctg}^2\,\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}H^2\sqrt{3}\,\text{ctg}\,\alpha\sqrt{1 + 16\,\text{ctg}^2\,\alpha}$.

12.226. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S и угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

Решение.

Пусть DO — высота пирамиды $DABC$ (рис. 12.93), $\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = \beta$, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, $S_{\Delta ABC} = S$.

$\Delta AOM = \Delta BOM = \Delta COM \Rightarrow OA = OB = OC$, O — центр окружности, описанной около ΔABC, OA — ее радиус.

$$\text{Если } OA = R, \text{ то } AB = BC = 2R\sin\angle BAC = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

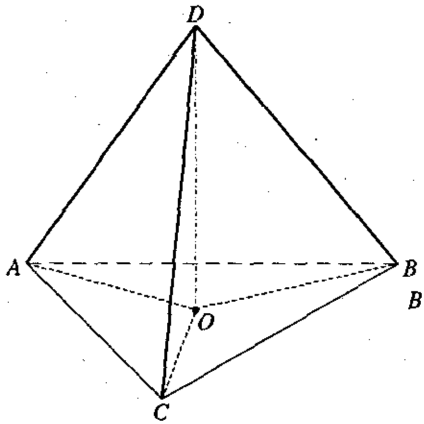


Рис. 12.93

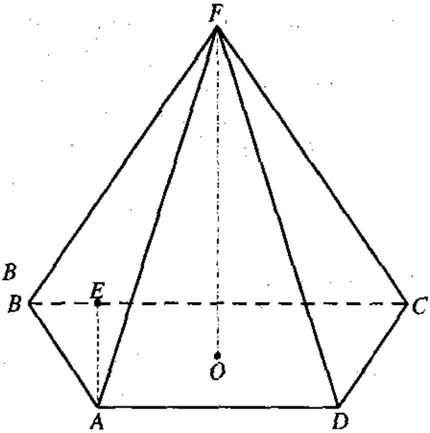


Рис. 12.94

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB^2\sin\angle ABC\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=S\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{\frac{S}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}}=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}.$$

В ΔAOD ($\angle AOD=90°$):

$$DO=OA\operatorname{ctg}\angle ADO=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}.$$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot DO=\dfrac{S\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2S\sin\alpha}}{6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{S\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2S\sin\alpha}}{6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$.

12.227. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол β. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть трапеция $ABCD$ — основание пирамиды $FABCD$ (рис. 12.94), FO — высота, $AB=CD=a$, $\angle ABC=\alpha$, $0°<\alpha<90°$.

Так как все боковые грани пирамиды образуют с основанием один и тот же угол β, то точка O равноудалена от всех сторон трапеции $ABCD$ и является центром окружности, вписанной в эту трапецию. Отсюда $AD + BC = AB + CD = 2a$.

Если AE — высота трапеции $ABCD$, то $AE = a\sin\alpha$.

Площадь трапеции $ABCD$ $S = \dfrac{AD+BC}{2}\cdot AE = a^2\sin\alpha$, а площадь боковой поверхности пирамиды $S_{бок.} = \dfrac{S}{\cos\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n = S + S_б = S + \frac{S}{\cos\beta} = \frac{S(1+\cos\beta)}{\cos\beta} = \frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

12.228. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α, боковая поверхность пирамиды равна S. Найти расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани.

Решение.

Пусть FO — высота правильной пирамиды $FABC$ (рис. 12.95), D — середина AC. Тогда $FD \perp AC$, $OD \perp AC$, $\angle FDO = \alpha$.

Если E — середина апофемы FD, то OE — медиана прямоугольного ΔFOD, проведенная к гипотенузе, $OE = \dfrac{1}{2}FD$.

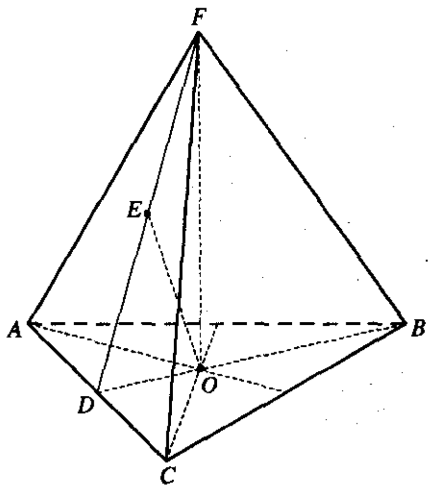


Рис. 12.95

$S_{\Delta ABC} = S\cos\alpha$.

Если $AC = a$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S\cos\alpha \Rightarrow a = 2\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{3}}}.$$

$$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

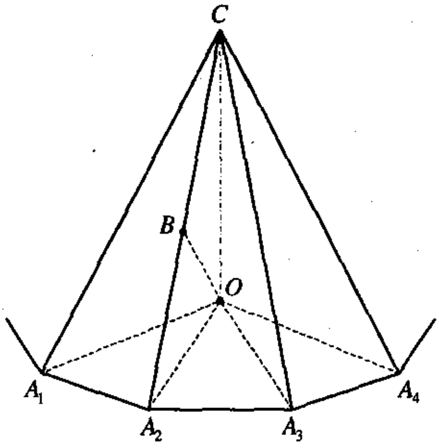


Рис. 12.96

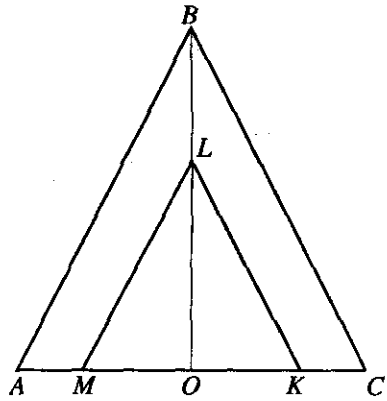


Рис. 12.97

В ΔFOD ($\angle FOD = 90°$):

$$FD = \frac{OD}{\cos\angle FDO} = \frac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{3\cos\alpha} \Rightarrow OE = \frac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$.

12.229. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Отрезок прямой, соединяющий центр основания пирамиды с серединой бокового ребра, равен a. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть CO — высота правильной пирамиды $CA_1A_2...A_n$ (рис. 12.96), $\angle A_1CA_2 = \alpha$, B — середина CA_2, $OB = a$.

OB — медиана прямоугольного $\angle COA_2$, проведенная к гипотенузе, следовательно $CA_2 = 2a$, $S_{\Delta A_1CA_2} = \frac{1}{2}A_1C^2\sin\alpha = 2a^2\sin\alpha$.

Площадь боковой поверхности пирамиды

$S_1 = nS_{\Delta A_2CA_2} = 2na^2\sin\alpha$.

Если $\angle CA_2A_1$ — угол между прямой A_1A_2, лежащей в плоскости основания пирамиды и наклонной CA_2 к этой плоскости, OA_2 — проекция CA_2 на эту плоскость, то $\cos\angle CA_2A_1 = \cos\angle OA_2A_1 \cdot \cos\angle CA_2O \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\cos\angle CA_2O \Rightarrow \cos\angle CA_2O=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

В $\Delta A_2OC\left(\angle A_2OC=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$OA_2=CA_2\cos\angle CA_2O=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}} \Rightarrow S_{\Delta A_1OA_2}=\frac{1}{2}OA_2^2\sin\angle A_1OA_2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}=4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S_2=nS_{\Delta A_1OA_2}=4a^2n\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Тогда площадь полной поверхности пирамиды

$$S=S_1+S_2=2na^2\sin\alpha+4na^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=$$

$$=4na^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)=\frac{4na^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Ответ: $\dfrac{4na^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

12.230. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный α, между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в два раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

Решение.

Пусть ΔABC — осевое сечение внешнего конуса (рис. 12.97), ΔMLK — осевое сечение внутреннего конуса, O — общий центр их оснований, $OA=R$, $\angle ABO=\angle MLO=\alpha$.

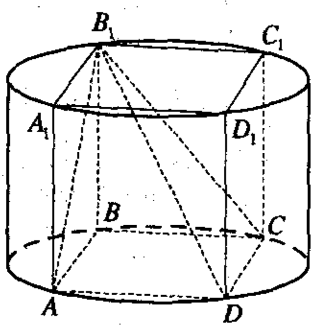


Рис. 12.98

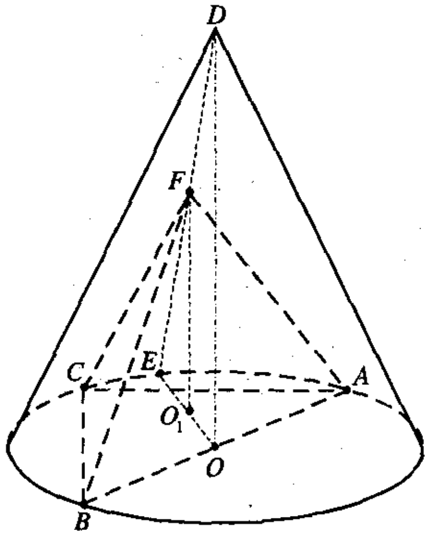


Рис. 12.99

Образующая внешнего конуса $l_1 = AB = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, его полная поверхность

$$S_1 = \pi R(R + l_1) = \pi R\left(R + \frac{R}{\sin\alpha}\right) = \frac{\pi R^2(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\pi R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$

Если радиус внутреннего конуса $OM = r$, то его образующая $l_2 = ML = \dfrac{r}{\sin\alpha}$, а его боковая поверхность $S_2 = \pi r l_2 = \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$.

По условию $S_2 = \dfrac{1}{2}S_1 \Rightarrow \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha} = \dfrac{\pi R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} \Rightarrow r = R\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Высота внутреннего конуса $h = LO = r\operatorname{ctg}\alpha$, а его объем

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$

12.231. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы α и β. Найти отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.

Решение.

Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.98), вписанном в цилиндр, $\angle B_1DA=\alpha$, $\angle B_1DC=\beta$, $AD=a$, $CD=b$, радиус основания цилиндра R, общая высота цилиндра и параллелепипеда H, $B_1D=d$, AB — проекция AB_1 на плоскость основания параллелепипеда, $AB\perp AD$. Тогда $AB_1\perp AD$.

В ΔB_1AD ($\angle B_1AD=90°$): $a=d\cos\alpha$, и так как $B_1C\perp CD$, то из ΔB_1CD: $b=d\cos\beta$.

Объем параллелепипеда $V_1=abH=d^2\cos\alpha\cos\beta H$.

$$BD^2=(2R)^2=4R^2=a^2+b^2=d^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right).$$

Объем цилиндра

$$V_2=\pi R^2H=\frac{1}{4}\pi d^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)H\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{d^2\cos\alpha\cos\beta H}{\frac{1}{4}\pi d^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)H}=\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)}.$$

Ответ: $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)}.$

12.232. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему призмы.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC, являющемся основанием пирамиды $FABC$ (рис. 12.99), $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$, O — центр основания, D — вершина конуса, в который вписана данная пирамида. Тогда O — центр круга, описанного около прямоугольного ΔABC. Отсюда, O — середина гипотенузы AB.

Если F — середина образующей DE конуса, FO_1 — высота пирамиды $FABC$, то FO_1 — средняя линия ΔDOE и $FO_1=\frac{1}{2}DO$.

Пусть $DO=H$, $OA=R$, тогда $AB=2R$, $AC=2R\cos\alpha$, $BC=2R\sin\alpha$,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2R^2\sin\alpha\cos\alpha=R^2\sin2\alpha.$$

Объем конуса $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H$.

Объем пирамиды $V_2=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot FO_1=\frac{1}{6}R^2H\sin2\alpha$.

Тогда $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2H}{\frac{1}{6}R^2H\sin2\alpha}=\frac{2\pi}{\sin2\alpha}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{\sin2\alpha}$.

12.233. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис.12.100), $\angle SAO=\alpha$, $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — куб из условия задачи, $MNKL$ — его нижнее, $M_1N_1K_1L_1$ — его верхнее основание, O_1 — точка пересечения SO и M_1K_1.

Пусть ребро куба равно a.

$M_1K_1 \| AC$, $\angle SM_1O_1=\angle SAO=\alpha$.

Тогда объем куба $V_1=a^3$, $M_1O_1=\frac{a\sqrt2}{2}$, $SO_1=\frac{a\sqrt2}{2}tg\alpha$.

$$SO=SO_1+O_1O=a+\frac{a\sqrt2}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sqrt2}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\sqrt2\operatorname{ctg}\alpha+1\right)$$

В ΔSOA ($\angle SOA=90°$):

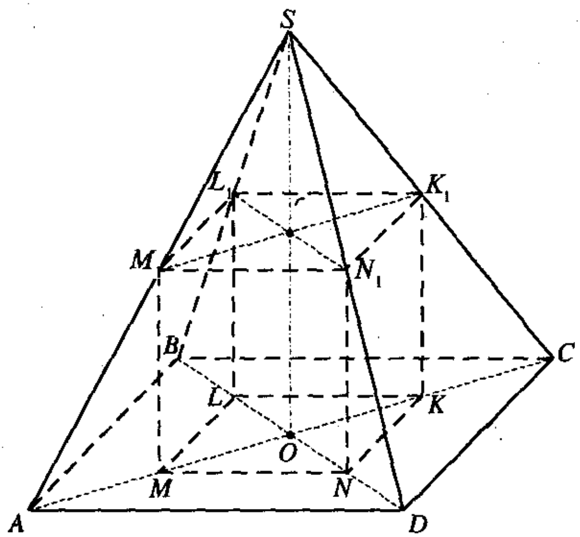


Рис. 12.100

$$AO = SO\operatorname{ctg}\angle SAO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = 2AO^2 = a^2\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)^2.$$

Объем пирамиды

$$V_2 = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO = \frac{1}{3}a^2\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)^2\cdot\frac{a\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)}{\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= \frac{a^3\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)^3}{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Тогда $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)^3}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+1\right)^3}$.

12.234. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a; боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти радиус описанного шара.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.101), $AB=a$, M — середина CD. Тогда $OM\perp CD$, $SM\perp CD$, $\angle SMO=\alpha$.

Радиус R шара будем искать как радиус круга, описанного около ΔASC.

Если $\angle ASC=x$, то

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle ASC}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin x}.$$

В ΔSOM ($\angle SOM=90°$): $SO=OM\operatorname{tg}\angle SMO=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha.$

В ΔSOA ($\angle SOA=90°$): $\operatorname{tg}\angle ASO=\frac{AO}{SO}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{1+2\operatorname{ctg}^2\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin x}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+2\operatorname{ctg}^2\alpha}{2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{a\left(\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha\right)}{4\operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{a\left(1+\cos^2\alpha\right)}{4\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{a\left(1+\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)}{2\sin2\alpha}=\frac{a(3+\cos2\alpha)}{4\sin2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{a(3+\cos2\alpha)}{4\sin2\alpha}$.

12.235. Величина угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.102), $\angle SDO=\angle CSD$, E — середина CD. Тогда $OE\perp CD$, $SE\perp CD$, $\angle SEO$ — искомый угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

Если $OE=1$, $SO=H$, то $CD=2$, $OC=\sqrt{2}$.

Пусть DF — высота ΔDSC, тогда $\Delta SOD=\Delta DFS$ — по гипотенузе и острому углу и $DF=SO=H$.

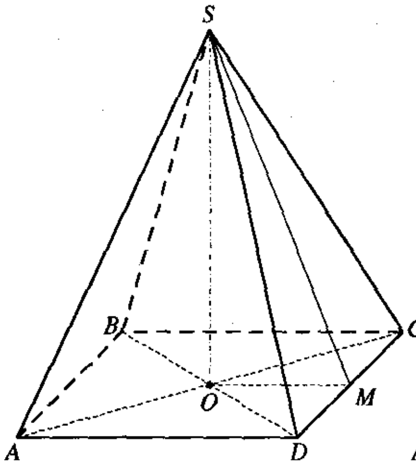


Рис. 12.101

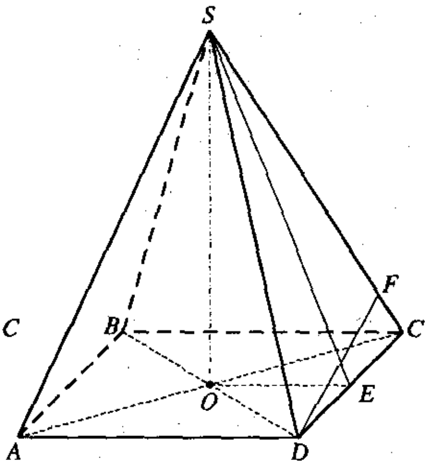


Рис. 12.102

В ΔSOE ($\angle SOE = 90°$): $SE = \sqrt{OE^2 + SO^2} = \sqrt{1+H^2}$.

Из ΔSOC ($\angle SOC = 90°$): $SC = \sqrt{OC^2 + SO^2} = \sqrt{2+H^2}$.

$$S_{\Delta CSD} = \frac{1}{2} SC \cdot DF = \frac{1}{2} CD \cdot SE \Rightarrow SC \cdot DF = CD \cdot SE \Rightarrow H\sqrt{2+H^2} =$$

$$= 2\sqrt{1+H^2} \Leftrightarrow H^2\left(2+H^2\right) = 4 + 4H^2 \Leftrightarrow H^4 - 2H^2 - 4 = 0; H^2 = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Так как $H_2 > 0$, то $H^2 = 1+\sqrt{5}; H = \sqrt{1+\sqrt{5}}$.

В ΔSOE ($\angle SOE = 90°$):

$$\operatorname{tg} \angle SEO = \frac{SO}{OE} = H = \sqrt{1+\sqrt{5}} \Rightarrow \angle SEO = \operatorname{arctg} \sqrt{1+\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{1+\sqrt{5}}$.

12.236. Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному α.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данного шара, O — его центр, $\angle AOC = \alpha$, K — вершина сегмента, D — точка пересечения AC и радиуса OK, KD — высота сегмента (рис. 12.103).

Если R — радиус данного шара, то его объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

В $\Delta ADO(\angle ADO=90°)$:

$$DO=OA\cos\angle AOD=R\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow KD=OK-OD=R-R\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Объем сегмента

$$V_2=\pi\cdot KD^2\cdot\left(R-\frac{1}{3}KD\right)=\pi R^2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\left(R-\frac{1}{3}R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(3-\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{4}{3}\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Отсюда $\dfrac{V_2}{V_1}=\sin^4\dfrac{\alpha}{4}\left(2+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $\sin^4\dfrac{\alpha}{4}\left(2+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.237. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, его острый угол равен α. Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

Решение.

Пусть в ΔACB $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}, \angle BAC=\alpha, AB=c$ (рис. 12.104). Тогда $AC=c\cos\alpha$, $BC=c\sin\alpha$.

При вращении ΔACB вокруг биссектрисы O_1O_2 получится тело, осевое сечение которого показано на рис. 12.104.

Объем V этого тела равен разности объема V_1 усеченного конуса, осевое сечение которого — трапеция ABB_1A_1, и суммы объемов V_2 и V_3 конусов, осевые сечения которых — треугольники ACA_1 и BCB_1.

$$\angle ACA_1=\angle BCB_1=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\angle O_1BC=\angle O_2AC=\frac{\pi}{4}, CO_2=O_2A=$$

$$=\frac{c\cos\alpha}{\sqrt{2}}, CO_1=O_1B=\frac{c\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Если $O_2A=R$, $O_1B=r$, то

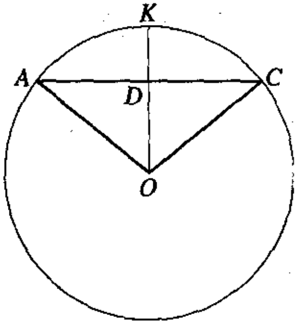


Рис. 12.103

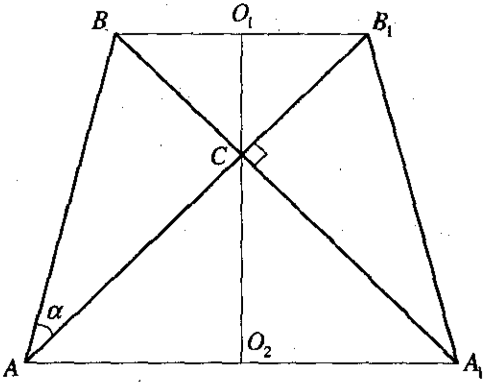


Рис. 12.104

$$V=V_1-(V_2+V_3)=\frac{1}{3}\pi\cdot O_1O_2\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{1}{3}\pi R^2\cdot CO_2+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot CO_1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi(R+r)\left(R^2+Rr+r^2\right)-\frac{1}{3}\pi\left(R^3+r^3\right)=\frac{1}{3}\pi(R+r)\left(R^2+Rr+r^2-\right.$$

$$\left.-\left(R^2-Rr+r^2\right)\right)=\frac{2}{3}\pi(R+r)Rr=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{c\cos\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{c\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{c\cos\alpha}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c\sin\alpha}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{c^3}{6}\pi\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

Ответ: $\frac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

12.238. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в пять раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

Решение.

Пусть равнобедренная трапеция $ABCD$ — осевое сечение данного усеченного конуса, E и F — центры его нижнего и верхнего оснований, O — центр вписанного шара, EF — его диаметр и высота трапеции $ABCD$ (рис. 12.105). Если R — радиус шара, то $EF=2R$, $AD+BC=5R$.

$$BC+AD=AB+CD=2CD\Rightarrow CD=\frac{5R}{2}.$$

CK — высота трапеции $ABCD$, $CK=EF=2R$.

$\angle CDK$ — угол между образующей CD конуса и плоскостью основания.

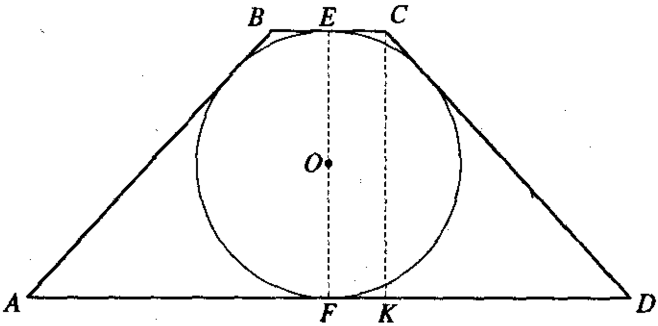


Рис. 12.105

Из ΔCKD $(\angle CKD = 90°)$: $\sin\angle CDK = \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{4}{5}; \angle CDK = \arcsin\dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

12.239. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

Решение.

Пусть ΔABC — осевое сечение конуса (рис. 12.106), D — центр его основания, BD — высота, O — центр вписанного шара, $\angle BAD$ — угол между образующей конуса и плоскостью его основания, $\angle BAD = \alpha$, $DA = R$, $OD = r$.

$$\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\alpha}{2} \text{ и } r = R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поверхность шара $S_1 = 4\pi r^2 = 4\pi R^2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Площадь основания конуса $S_2 = \pi R^2$.

Тогда $\dfrac{S_1}{S_2} = 4\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow 4\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = k \Rightarrow 4\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = k \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4-k}{4+k}$.
Так как α — острый угол, то $0 < \cos\alpha < 1$.

Тогда $0 < \dfrac{4-k}{4+k} < 1; 0 < k < 4$.

Ответ: $\dfrac{4-k}{4+k}; 0 < k < 4$.

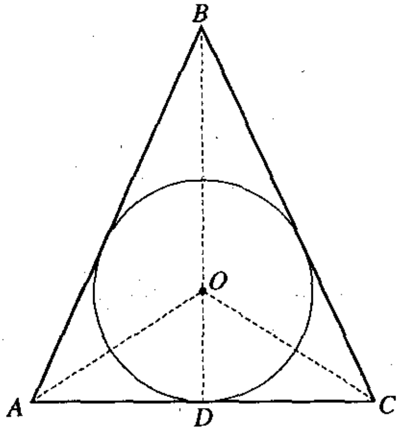


Рис. 12.106

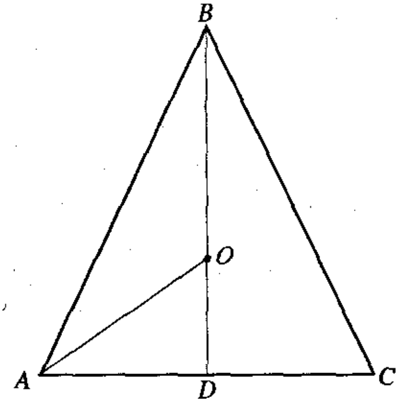


Рис. 12.107

12.240. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

Решение.

Пусть ΔABC — осевое сечение конуса, D — центр его основания, BD — высота, O — центр вписанного шара (рис. 12.107), $\angle BAD$ — искомый угол между образующей BA конуса и плоскостью его основания.

$\angle BAO = \alpha$, r и R — радиусы вписанного и описанного шаров.

В ΔADO ($\angle ADO = 90°$):

$$DA = DO \operatorname{ctg} \angle OAD = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\ AC = 2r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Радиус круга, описанного около треугольника ABC,

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

Объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов.

Таким образом,

$$\frac{r^3}{R^3} = k \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow \frac{r\sin 2\alpha}{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha -$$

$$-2\cos\alpha + \sqrt[3]{k} = 0;$$

$$\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2};\alpha=\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$$

Так как $k>0$ и $1-2\sqrt[3]{k}\ge 0$, то $0<k\le\frac{1}{8}$.

Ответ: $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}, 0<k\le\frac{1}{8}$.

12.241. В шар, радиус которого равен R, вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел. BC — образующая конуса, FE — образующая цилиндра, D — центр основания конуса и нижнего основания цилиндра, K — центр верхнего основания цилиндра, $\angle BCD=\alpha$ (рис. 12.108).

Если радиус основания цилиндра равен r, то $FE=2r$, а площадь полной поверхности цилиндра $S=2\pi r^2+2\pi r\cdot FE=2\pi r^2+4\pi r^2=6\pi r^2$.

Радиус данного шара является радиусом окружности, описанной около ΔABC.

Отсюда $AC=2R\sin\angle ABC=2R\sin(180°-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$,

$CD=R\sin 2\alpha$.

В ΔFEC ($\angle FEC=90°$):

$$CE=FE\operatorname{ctg}\angle ECF=2r\operatorname{ctg}\alpha, CD=CE+ED=2r\operatorname{ctg}\alpha+r=r(2\operatorname{ctg}\alpha+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(2\operatorname{ctg}\alpha+1)=R\sin 2\alpha\Leftrightarrow r=\frac{R\sin 2a}{1+2\operatorname{ctg}\alpha};S=\frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2ctg\alpha)^2}.$$

Ответ: $\frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2ctg\alpha)^2}$.

12.242. В полушар вписано тело, состоящее из цилиндра и поставленного на него конуса. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости большого круга полушара; верхнее основание цилиндра совпадает с основанием конуса и касается поверхности шара. Вершина конуса лежит на поверхности шара. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол α. Найти отношение объема тела к объему полушара.

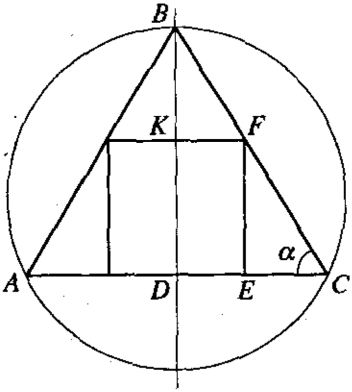


Рис. 12.108

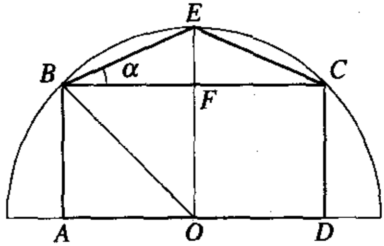


Рис. 12.109

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел. O — центр полушара и нижнего основания цилиндра, F — центр верхнего основания цилиндра и основания конуса, E — вершина конуса, $\angle EBF = \alpha$, (рис. 12.109).

Пусть $FB = r$. Тогда $EF = r\operatorname{tg}\alpha$.

$OB = OE$ — радиусы данного полушара, следовательно

$$\angle BOE = \pi - 2\angle BEF = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha.$$

В $\Delta BFO\left(\angle BFO = \frac{\pi}{2}\right)$: $OF = r\operatorname{ctg}2\alpha; OB = \frac{r}{\sin 2\alpha}$.

Объем конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot FB^2 \cdot EF = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha$.

Объем цилиндра $V_2 = \pi \cdot FB^2 \cdot OF = \pi r^3 \operatorname{ctg}2\alpha$.

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha + \pi r^3 \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\pi r^3}{3}(\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{ctg}2\alpha) =$$

$$= \frac{\pi r^3}{3}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha) = \frac{\pi r^3}{3}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi r^3(1 + 2\cos 2\alpha)}{3\sin 2\alpha} = \frac{2\pi r^3\left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right)}{3\sin 2\alpha} = \frac{2\pi r^3\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha\right)}{3\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{4\pi r^3 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{3\sin 2\alpha}.$$

Объем полушара $V_3 = \frac{2}{3}\pi \cdot OB^3 = \frac{2\pi r^3}{3\sin^3 2\alpha}$.

Таким образом $\frac{V_1+V_2}{V_3} = 2\sin^2 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: $2\sin^2 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

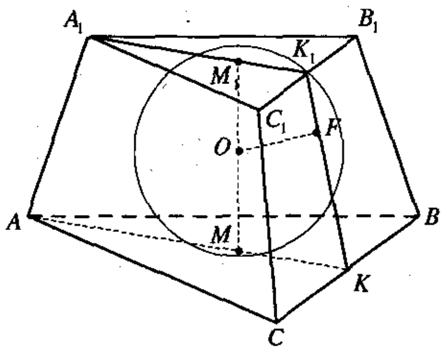


Рис. 12.110

12.243. Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

Решение.

Пусть M — центр нижнего, M_1 — центр верхнего оснований правильной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.110), O — центр вписанного в нее шара, O находится на MM_1, K — середина BC, K_1 — середина B_1C_1. $\angle K_1KM = \alpha$, точка F касания шара с гранью BCC_1B_1 находится на K_1K.

Рассмотрим сечение данной совокупности тел плоскостью AA_1K_1K (рис. 12.110, а).

$$\angle MKO = \frac{1}{2}\angle K_1KM = \frac{\alpha}{2}; \angle M_1K_1O = \frac{1}{2}\angle M_1K_1F = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть радиус шара $OM = OM_1 = r$, $BC = \alpha$, $B_1C_1 = b$.

$$В\ \Delta OMK(\angle OMK = 90°): MK = r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}\cdot MK = 2\sqrt{3}r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$В\ \Delta OM_1K_1(\angle OM_1K_1 = 90°): M_1K_1 = r\,\mathrm{ctg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow b =$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot M_1K_1 = 2\sqrt{3}r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \leftrightarrow S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

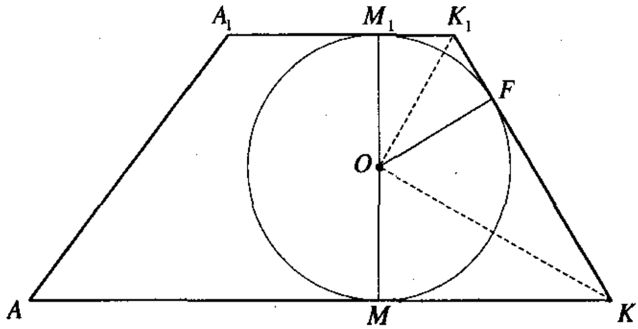


Рис. 12.110,а

$$K_1K = K_1F + FK = K_1M_1 + KM = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Площадь боковой поверхности

$$S_{бок.} = \frac{3}{2}(a+b)\cdot K_1K = \frac{3}{2}\left(2\sqrt{3}r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{3}r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{2r}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3}r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2\alpha}.$$

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды

$$S = S_{бок.} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2\alpha} + 3\sqrt{3}r^2\left(ctg^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2\alpha} + 3\sqrt{3}r^2\cdot\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2\alpha} + 12\sqrt{3}r^2\cdot\frac{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}r^2\left(2 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{6\sqrt{3}r^2\left(4 - \sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Поверхность шара $S_ш = 4\pi r^2$.
Тогда

$$\frac{S}{S_ш} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(4\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)-1\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(4\operatorname{ctg}^2\alpha + 3\right)$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(4\operatorname{ctg}^2\alpha + 3\right)$

12.244. В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, проходящая через центр шара и произвольную точку окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

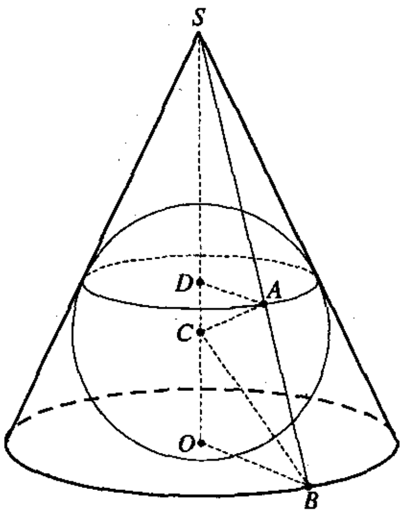


Рис. 12.111

Решение.

Пусть S — вершина конуса, O — центр его основания (точка касания вписанного шара с плоскостью основания), C — центр шара, D — центр круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса, AD — радиус этого шара, $AD = r$, SB — образующая конуса, на которой находится точка A, $\angle OCB = \alpha$ (рис. 12.111), радиус шара $CO = CA = R$, A — точка касания прямой SB и поверхности шара. Тогда $CA \perp SB$, $\Delta COB = \Delta CAB$ по катету и гипотенузе.

Таким образом $\angle ACB = \angle OCB = \alpha$, $\angle DCA = 180° - 2\alpha$, $\angle OBS = 2\angle OBC = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$.

$$В\ \Delta CDA\left(\angle CDA = 90°\right): R = \frac{r}{\sin\left(180° - 2\alpha\right)} = \frac{r}{\sin 2\alpha},$$

$$В\ \Delta COB\left(\angle COB = 90°\right): OB = CO\operatorname{tg}\angle OCB = R\operatorname{tg}\alpha.$$

Из ΔSOB $(\angle SOB = 90°)$:

$$SO = OB\operatorname{tg}\angle OBS = R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(180° - 2\alpha\right) = -R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha.$$

Объем конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot OB^{\ 2}\cdot SO=-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^3}{\sin^3 2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha=$$
$$=-\frac{\pi r^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{24\sin^3\alpha\cos^3\alpha\cos^3\alpha}=-\frac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$.

12.245. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения k.

Решение.

Пусть ΔABC — осевое сечение данного конуса (рис. 12.112), D — центр его основания, O — центр вписанного шара, $\angle BAD$ — искомый угол между образующей и плоскостью основания конуса, $\angle BAD=\alpha$, радиус основания конуса $OA=R$.

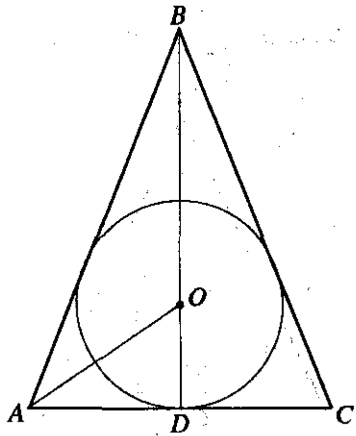


Рис. 12.112

В ΔADB ($\angle ADB=90°$):

$BD=AD\operatorname{tg}\angle BAD=R\operatorname{tg}\alpha$,

$\angle OAD=\dfrac{1}{2}\angle BAD=\dfrac{\alpha}{2}$.

В ΔADO ($\angle ADO=90°$): $DO=AD\operatorname{tg}\angle OAD=R\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Объем конуса $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\cdot OA^2\cdot OB=\dfrac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$,

объем шара $V_2=\dfrac{4}{3}\pi\cdot DO^3=\dfrac{4}{3}\pi R^3 tg^3\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}=k;\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\left(1-tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}=k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}-2k\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1=0;\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k^2-2k\ge 0,\\ k>0\end{cases}\Leftrightarrow k\ge 2.$$

Отсюда $\alpha = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$; $k \geq 2$.

12.246. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания, если боковая поверхность конуса равна сумме площадей основания и осевого сечения.

Решение.

Пусть R — радиус основания, l — образующая, H — высота данного конуса, α — искомый угол между его образующей и плоскостью основания.

Тогда $H = R\operatorname{tg}\alpha, l = \frac{R}{\cos\alpha}$.

Площадь боковой поверхности конуса $S_1 = \pi R l = \frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$. Площадь основания $S_2 = \pi R^2$, площадь осевого сечения $S_3 = RH = R^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Так как $S_1 = S_2 + S_3$, то $\frac{\pi R^2}{\cos\alpha} = \pi R^2 + R^2 \operatorname{tg}\alpha$:

$\pi = \pi\cos\alpha + \sin\alpha; \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \pi;\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pi;\ \alpha = 2\operatorname{arcctg}\pi.$

Ответ: $2\operatorname{arcctg}\pi$.

12.247. Угол между высотой и образующей конуса равен α. В конус вписана правильная треугольная призма ; нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы — квадраты. Найти отношение боковых поверхностей призмы и конуса.

Решение.

Пусть S — вершина, O — центр основания данного конуса, SA — образующая конуса, проходящая через вершину C вписанной правильной призмы (рис. 12.113), $\angle ASO = \alpha$. Боковое ребро CB призмы параллельно SO, поэтому $\angle ACB = \angle ASO = \alpha$.

Если ребро призмы равно 1, то площадь ее боковой поверхности $S_1 = 3$, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. В $\Delta CBA\left(\angle CBA = \frac{\pi}{2}\right)$: $BA = CB\operatorname{tg}\angle ACB = \operatorname{tg}\alpha$.

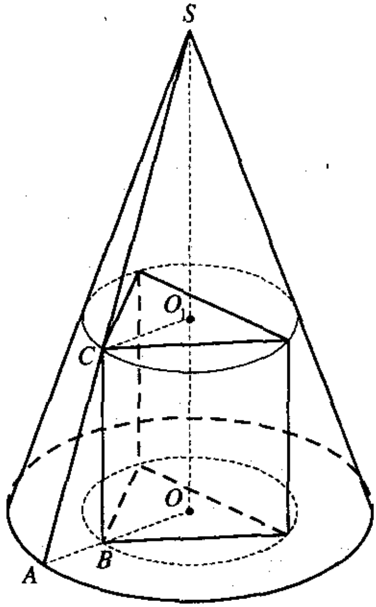


Рис. 12.113

$$OA = OB + BA = \frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha} = \frac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

В $\Delta SOA\left(\angle SOA = \frac{\pi}{2}\right)$: $SA = \dfrac{OA}{\sin\angle ASO} = \dfrac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha} = \dfrac{4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}\sin 2\alpha}$.

Боковая поверхность конуса $S_2 = \pi \cdot OA \cdot SA = \dfrac{8\pi\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{3\sin 2\alpha\cos\alpha}$.

Тогда $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$.

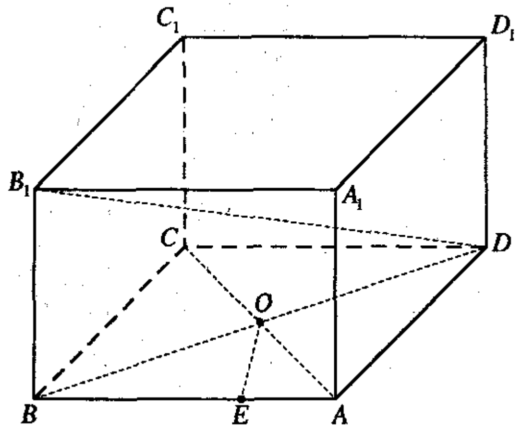


Рис. 12.114

12.248. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол α. Найти острый угол ромба.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание данной прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, описанной около шара (рис. 12.114), и радиус шара равен R. Тогда высота призмы $BB_1 = 2R$.

Если B_1D — большая диагональ призмы, то $\angle B_1DB = \alpha$ и BD — большая диагональ основания $\Rightarrow \angle ABC$ — искомый острый угол ромба.

В $\Delta\, B_1BD$: $BD = 2R\operatorname{ctg}\alpha$.

Если через середину высоты призмы провести перпендикулярное сечение, то получится ромб, равный основанию призмы, в который будет вписан большой круг данного шара. Отсюда, радиус шара равен радиусу круга, вписанного в ромб $ABCD$.

Центр этого круга — точка O пересечения диагоналей ромба.

E — точка касания этого круга со стороной AB ромба.

Тогда $OE \perp AB$, $OE = R$. $BO = \frac{1}{2}BD = R\operatorname{ctg}\alpha$. В ΔBEO ($\angle BEO = 90°$):

$\sin\angle OBE = \frac{OE}{OB} = \frac{R}{R\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$

$\angle OBE = \arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$

$\angle ABC = 2\angle OBE = 2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$

Ответ: $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$

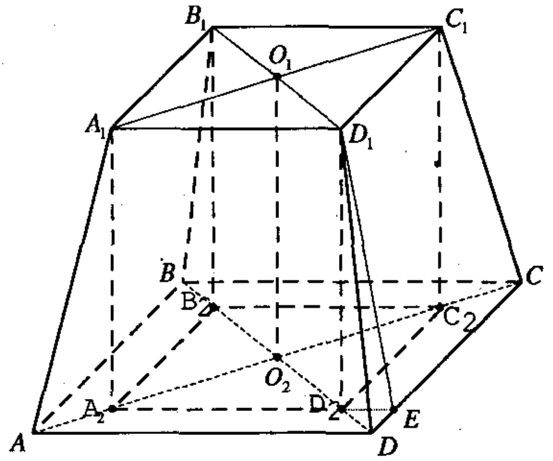


Рис. 12.115

12.249. Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что верхнее его основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковых поверхностей пирамиды и параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол β.

Решение.

Пусть в правильной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.115) $\angle D_1DB=\alpha$. $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2A_2$ — вписанный прямоугольный параллелепипед $\angle B_1D_2B_2=\beta$.

Положим боковое ребро параллелепипеда равным 1, тогда из $\Delta B_1B_2D_2$ ($\angle B_1B_2D_2=90°$): $B_2D_2=B_1B_2\operatorname{ctg}\angle B_1D_2B_2=\operatorname{ctg}\beta$,

$$C_2D_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

Боковая поверхность параллелепипеда

$$S_1=4C_2D_2\cdot D_1D_2=2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

В ΔD_1D_2D ($\angle D_1D_2D=90°$): $D_2D=D_1D_2\operatorname{ctg}\angle D_1DD_2=\operatorname{ctg}\alpha$.

$$BD=B_2D_2+2D_2D=\operatorname{ctg}\beta+2\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow DC=\frac{1}{\sqrt{2}}BD=\frac{\operatorname{ctg}\beta+2\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Если D_2E — высота трапеции DD_1C_1C, то $D_2E\perp CD$.

Из равнобедренного прямоугольного ΔD_2ED:

$$D_2E = \frac{1}{\sqrt{2}} D_2D = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha.$$

В ΔD_1D_2E ($\angle D_1D_2E = 90°$):

$$D_1E = \sqrt{D_1D_2^2 + +D_2E^2} = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sqrt{2}}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_2 = 4S_{DD_1C_1C} = 4 \cdot \frac{CD \cdot C_1D_1}{2} \cdot D_1E = 2\left(\frac{\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sqrt{2}} =$$

$$= 2(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha)\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = 2 \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \sin \beta}.$$

Тогда $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{2\sin(\alpha + \beta)\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \sin \beta} : 2\sqrt{2} \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)\sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)}}{2\sin^2 \alpha \cos \beta}$.

Ответ: $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)\sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)}}{2\sin^2 \alpha \cos \beta}$.

12.250. В конус помещена пирамида; основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α $\left(\alpha \geq \frac{\pi}{3}\right)$ при вершине. Найти отношение объемов конуса и пирамиды.

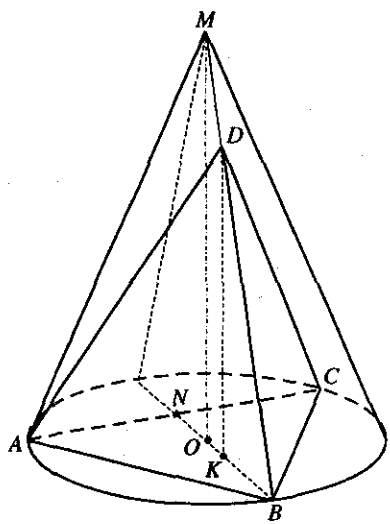


Рис. 12.116

Решение.

Пусть MO — высота данного конуса, центр O основания конуса — центр круга, описанного около основания ABC пирамиды $DABC$ (рис. 12.116), $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$.

DK — высота пирамиды и, так

как все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, K — центр окружности, вписанной в ΔABC.

Так как в треугольнике ABC $AB = BC$, то точки O и K принадлежат прямой BN, где N — середина AC.

$MO \parallel DK$, так как прямые MO и DK перпендикулярны плоскости оснований конуса и пирамиды.

Пересечением плоскости MOB, проходящей через две параллельные прямые MO и DK, и боковой поверхности конуса является отрезок MB — образующая конуса. Следовательно, точка D этой плоскости, лежащая на боковой поверхности конуса, принадлежит образующей MB.

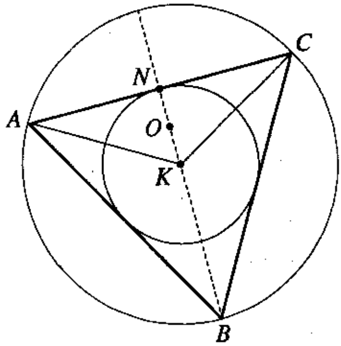


Рис. 12.116,а

$\Delta MOB \sim \Delta DKB$. Тогда $\dfrac{MO}{DK} = \dfrac{OB}{BK}$.

Пусть радиус основания конуса $OB = R$.

Тогда $AB = BC = 2R \sin \angle BAC = 2R \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 2R \cos \dfrac{\alpha}{2}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha =$$

$$= 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

В ΔBKC (рис. 12.116, а): $\angle CBK = \dfrac{\alpha}{2}$,

$$\angle BCK = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{\pi - \alpha}{4},$$

$$\angle BKC = \pi - (\angle CBK + \angle BCK) = \pi - \frac{\pi + \alpha}{4}.$$

$$\frac{BK}{\sin \angle BCK} = \frac{BC}{\sin \angle BKC};$$

$$BK = \frac{BC \sin \angle BCK}{\sin \angle BKC} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi + \alpha}{4}\right)} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sin \frac{\pi + \alpha}{4}} =$$

$$=\frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi+\alpha}{4}}{\sin\frac{\pi+\alpha}{4}}=2R\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi+\alpha}{4}.$$

Объем конуса $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot MO.$

Объем пирамиды $V_2=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot DK.$

Тогда

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot MO}{S_{\Delta ABC}\cdot DK}=\frac{\pi R^2\cdot OB}{2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot BK}=$$

$$=\frac{\pi R^3}{4R^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi+\alpha}{4}\sin\alpha}=\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{4\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{4\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$.

12.251. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении $m:n$, считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

Решение.

Центр шара M, вписанного в правильную пирамиду $SABCD$, находится на высоте SO (рис. 12.117) $SM:MO=m:n$.

$OC\perp BD$, OC — проекция SC на основание пирамиды. Тогда $SC\perp BD$.

В плоскости SDC проведем $DK\perp SC$.

Так как $DK\perp SC$, $BD\perp SC$, то плоскость BKD перпендикулярна SC и $\angle BDK$ — искомый угол между смежными боковыми гранями BSC и DSC.

Пусть $\angle BKD=\alpha$, $\angle DCK=\beta$.

Так как пирамида правильная, то $\Delta DKC=\Delta BKC$ — по гипотенузе и острому углу и $DK=BK$, а KO — медиана, биссектриса и высота треугольника BKD.

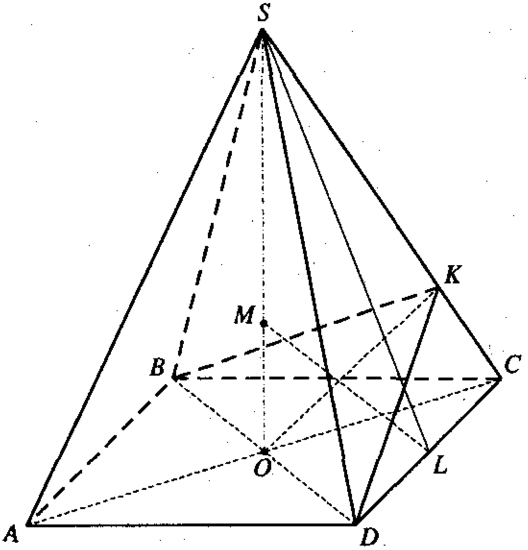


Рис. 12.117

Пусть L — середина CD, тогда LM — биссектриса $\angle SLO$ и $OL : SL = OM : SM = n : m$.

Так как $CL = OL$, то $\operatorname{ctg}\beta = \frac{CL}{SL} = \frac{OL}{SL} = \frac{n}{m}$.

$\sin\beta = \frac{DK}{DC}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OD}{DK}$. Тогда $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta = \frac{OD}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta = \frac{1}{2}; (1-\cos\alpha)\sin^2\beta = 1; \cos\alpha = 1 - \frac{1}{\sin^2\beta} =$$

$$= -\operatorname{ctg}^2\beta = -\frac{n^2}{m^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{n^2}{m^2}\right) = \pi - \arccos\frac{n^2}{m^2}.$$

Ответ: $\pi - \arccos\frac{n^2}{m^2}$.

12.252. Отношение стороны основания правильной n-угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно k. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания и допустимые значения k.

Решение.

Пусть O — центр шара, описанного около правильной пирамиды $SA_1A_2...A_n$ с высотой SB (рис. 12.118). Проведем из точки O перпендикуляр OD на боковое ребро SA_1 пирамиды. Точка O лежит на SO. $\angle SA_1B$ — искомый угол между боковым ребром и плоскостью основания. Пусть $SA_1B = \alpha$.

Независимо от того, лежит ли точка O на отрезке BS, его продолжению за точку B или совпадает с точкой B, прямоугольные треугольники A_1SB и ODS имеют общий острый угол $\angle SOD = \angle SA_1B = \alpha$.

Если C — середина A_1A_2, то $\angle A_1BC = \dfrac{\pi}{n}$.

Пусть $A_1S = a$, $SO = OA_1 = R$, тогда из

$$\Delta SDO \quad \left(\angle SDO = \frac{\pi}{2}\right): SD = SO\sin\angle SOD = R\sin\alpha.$$

Так как ΔA_1OS — равнобедренный, то $A_1S = 2SD = 2R\sin\alpha$.

В $\Delta A_1BS\left(\angle A_1BS = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $A_1B = A_1S\cos\angle SA_1B = 2R\sin\alpha\cos\alpha = R\sin 2\alpha$.

Из $\Delta A_1CB\left(\angle A_1CB = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $A_1B = \dfrac{A_1C}{\sin\angle A_1BC} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \Rightarrow R\sin 2\alpha = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.

Так как $\dfrac{a}{R} = k$, то $R\sin 2\alpha = \dfrac{kR}{2\sin\frac{\pi}{n}}$; $\sin 2\alpha = \dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$; $\alpha = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.

При этом $\dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}} \le 1 \Rightarrow k \le 2\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Так как по условию задачи $k > 0$, то $\alpha = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, $0 < k \le 2\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, $0 < k \le 2\sin\dfrac{\pi}{n}$.

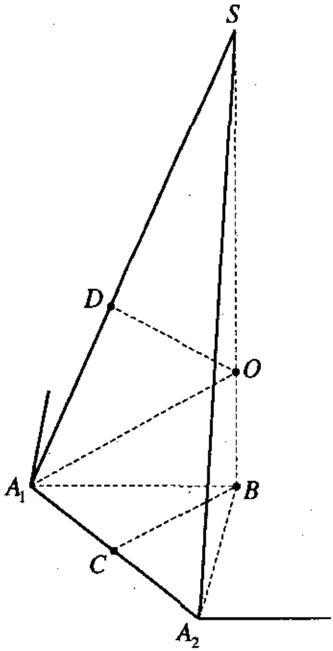


Рис. 12.118

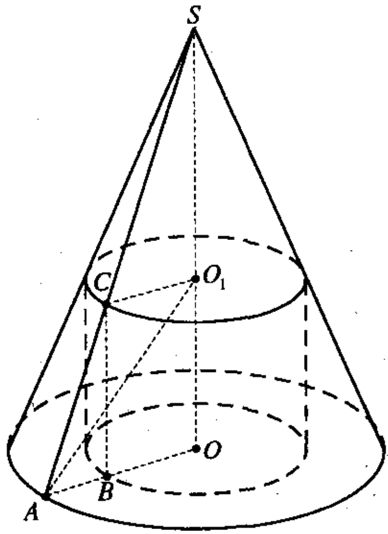


Рис. 12.119

12.253. В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, проходящая через центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение объемов конуса и цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β.

Решение.

Пусть O — центр оснований данного конуса и вписанного в него цилиндра, O_1 — центр верхнего основания цилиндра, SA — образующая конуса, CB — образующая цилиндра, $\angle ASO=\beta$, $\angle O_1AO=\alpha$, (рис. 12.119).

Если радиус основания конуса $OA=1$, то из ΔAOS ($\angle AOS=90°$): $SO=OA\operatorname{ctg}\angle ASO=\operatorname{ctg}\beta$.

Объем конуса $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\cdot OA^2\cdot SO=\dfrac{1}{3}\pi\operatorname{ctg}\beta$.

В ΔO_1OA ($\angle O_1OA=90°$): $O_1O=OA\operatorname{tg}\angle O_1AO=\operatorname{tg}\alpha$.

$BC=OO_1=\operatorname{tg}\alpha$.

$\angle ACB=\angle ASO=\beta$.

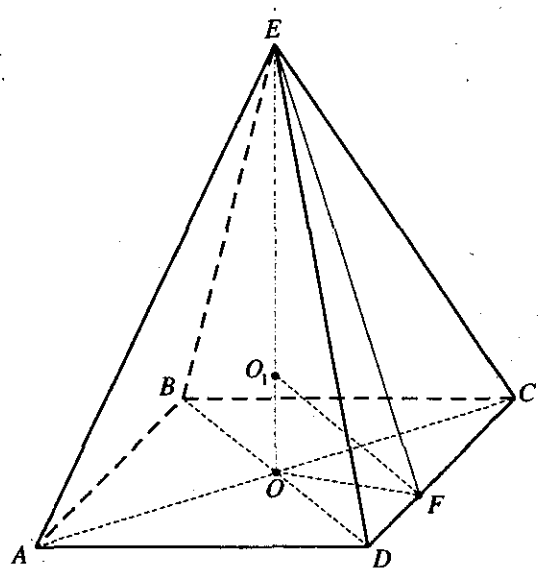


Рис. 12.120

Из $\Delta ABC\,(\angle ABC = 90^\circ)$: $AB = BC\operatorname{tg}\angle ACB = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

$$OB = OA - AB = 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Объем цилиндра $V_2 = \pi\cdot OB^2\cdot OO_1 = \dfrac{\pi\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

Тогда $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta\cos^2\alpha\cos^2\beta}{3\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$.

Ответ: $\dfrac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$.

12.254. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен V.

Решение.

Пусть ромб $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$, $\angle BCD = \alpha, 0° < < \alpha < 90°$, EO — ее высота (рис. 12.120). Так как все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β, то точка O — центр круга, вписанного в ромб $ABCD$, — точка пересечения его диагоналей, а точки высоты EO равноудалены от боковых граней пирамиды.

В плоскости CED опустим перпендикуляр EF на CD. OF — это проекция EF на плоскость основания. Тогда $OF \perp CD$ и $\angle EFO$ — угол наклона грани CED к плоскости основания, $\angle EFO = \beta$.

Если O_1 — точка пересечения биссектрисы $\angle EFO$ с высотой пирамиды, то O_1 — центр шара, вписанного в пирамиду, O_1O — его радиус.

Пусть $CD = \alpha$, тогда из

$$\Delta COD(\angle COD = 90°): CO = CD\cos\angle OCD = a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

В $\Delta OFC(\angle OFC = 90°)$:

$$OF = OC\sin\angle OCD = a\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

В $\Delta EOF(\angle EOF = 90°): EO = OF\operatorname{tg}\angle EFO = \frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta.$

Площадь основания пирамиды $S = CD^2\sin\angle BCD = a^2\sin\alpha$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S\cdot EO = \frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}}{\sin\alpha}$.

В $\Delta O_1OF(\angle O_1OF = 90°)$:

$$OO_1 = OF\operatorname{tg}\angle OFO_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}.$

12.255. Две грани треугольника пирамиды — равные между собой прямоугольные треугольники с общим катетом, равным d. Угол между этими гранями равен α. Две другие грани пирамиды образуют двугранный угол β. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

Решение.

Пусть грани SAB и SAC пирамиды $SABC$ (рис. 12.121) равны, $\angle SAB = \angle SAC = 90°$, $SA = d$. Тогда отрезок SA перпендикулярен

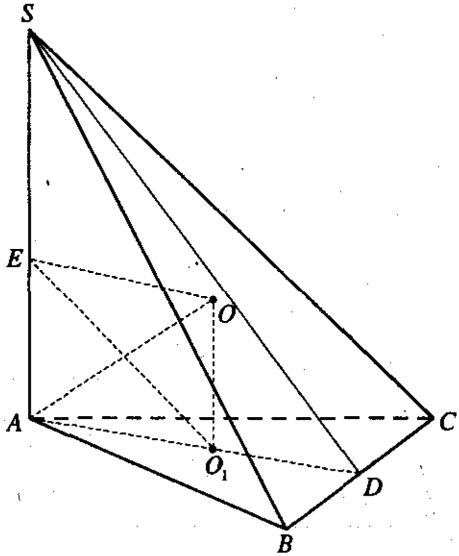


Рис. 12.121

плоскости основания пирамиды и является высотой пирамиды, ΔBAC — равнобедренный. Если D — это середина BC, то $AD \perp BC$, $DS \perp BC$, $\angle SDA$ — линейный угол двугранного угла, образованного гранями BSC и BAC пирамиды, $\angle SDA = \beta$. $BA \perp SA$, $CA \perp SA \Rightarrow \angle BAC$ — угол между гранями SAB и SAC, $\angle BAC = \alpha$.

O_1 — центр круга, описанного около ΔABC, E — середина SA, $EA = \frac{d}{2}$.

Центр O шара, описанного около пирамиды, — точка пересечения перпендикуляра, восстановленного к плоскости ABC в точке O_1 и серединного перпендикуляра отрезка SA, лежащего в плоскости SAD, OA — радиус шара.

В четырехугольнике $AEOO_1$ углы при вершинах A, E, O_1 — прямые, поэтому $AEOO_1$ — прямоугольник и $OA = EO_1$.

В ΔSAD ($\angle SAD = 90°$): $AD = SA \operatorname{ctg} \angle SDA = d \operatorname{ctg} \beta$.

В ΔADB ($\angle ADB = 90°$): $BD = AD \operatorname{tg} \angle BAD = d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$BC = 2BD = 2d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

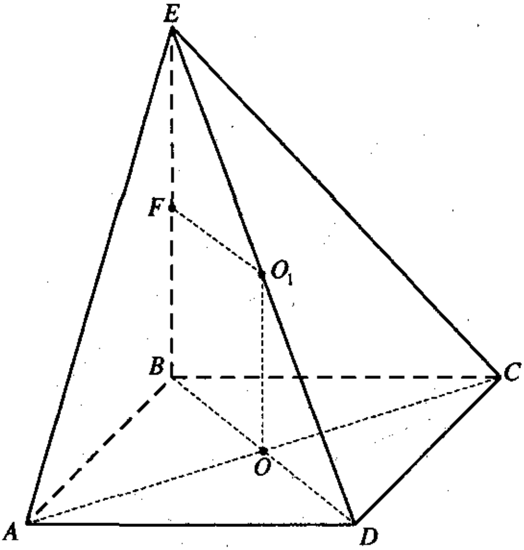


Рис. 12.122

O_1A — радиус круга, описанного около ΔABC. Тогда

$$O_1A=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{2d\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{d\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{d\operatorname{ctg}\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

В ΔEAO_1 ($\angle EAO_1=90°$):

$$EO_1=\sqrt{EA^2+AO_1^2}=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{d^2\operatorname{ctg}\beta}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}}=\frac{d}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^4\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{d}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^4\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\beta}.$

12.256. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее ребро составляет с плоскостью основания угол β. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$ (рис. 12.122), угол между его диагоналями равен α, боковое ребро EB перпендикулярно плоскости основания пирамиды и является его высотой, AB, CB, DB — проекции боковых ребер AE, EC, DE на плоскость основания, $DB > AB$, $DB > CB \Rightarrow DE$ — наибольшее боковое ребро и $\angle EDB = \beta$.

Точки O_1 — середина ED, точка O пересечения диагоналей прямоугольника — середина BD. Таким образом OO_1 — средняя линия ΔEDB и $OO_1 \parallel BE$. Тогда прямая OO_1 перпендикулярна плоскости основания и ее точки равноудалены от вершин основания. Так как O_1 удалена от вершины пирамиды на расстояние $O_1E = O_1D$, то O_1 равноудалена от всех вершин пирамиды и является центром описанного шара, $O_1D = O_1E = R$.

В ΔEBD ($\angle EBD = 90°$):

$$EB = ED \sin \angle EDB = 2R \sin \beta;$$

$$BD = ED \cos \angle EDB = 2R \cos \beta.$$

Площадь основания пирамиды $S = \frac{1}{2} BD^2 \sin \alpha = 2R^2 \cos^2 \beta \sin \alpha$.

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot EB = \frac{2}{3} R^2 \cos^2 \beta \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta = \frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha.$$

Ответ: $\frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha$.

12.257. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти отношение объемов пирамиды и конуса.

Решение.

Пусть DO — общая высота данных пирамиды $DABC$ и конуса (рис. 12.123). Так как O — центр круга,

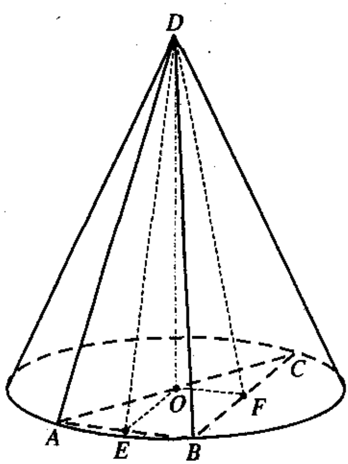


Рис. 12.123

описанного около прямоугольного треугольника ABC, то O — середина гипотенузы AC.

Проведем в плоскости основания из точки O перпендикуляры OE и OF на катеты AB и BC.

OE и OF — проекции DE и DF на плоскость основания. Тогда $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, $\angle DEO$ и $\angle DFO$ — углы наклона боковых граней DAB и BDC к плоскости основания, $\angle DEO = \beta$, $\angle DFO = \alpha$.

Если $DO = a$, то из $\Delta DOE(\angle DOE = 90°)$: $EO = DO\,\mathrm{ctg}\angle DEO = a\,\mathrm{ctg}\beta$.

Из $\Delta DOF(\angle DOF = 90°)$: $FO = DO\,\mathrm{ctg}\,\angle DFO = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

$AB = 2 \cdot FO = 2a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $BC = 2 \cdot EO = 2a\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

В $\Delta ABC(\angle ABC = 90°)$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$.

Площадь основания пирамиды $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 2a^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$, а ее объем $V_1 = \frac{1}{3} S \cdot DO = \frac{2}{3} a^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

Радиус основания конуса $R = \frac{1}{2} AC = a\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$, его объем $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot DO = \frac{1}{3}\pi a^3\left(\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta\right)$.

Таким образом, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\pi\left(\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta\right)}$.

Ответ: $\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\pi\left(\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta\right)}$.

12.258. Сторона квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна a. В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма; вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$, $AD = \alpha$, $\angle ECA = \alpha$, $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — правильная призма, $\angle M_1KM = \varphi$ (рис. 12.124). Вершины нижнего основания призмы принадлежат диагоналям квадрата $ABCD$.

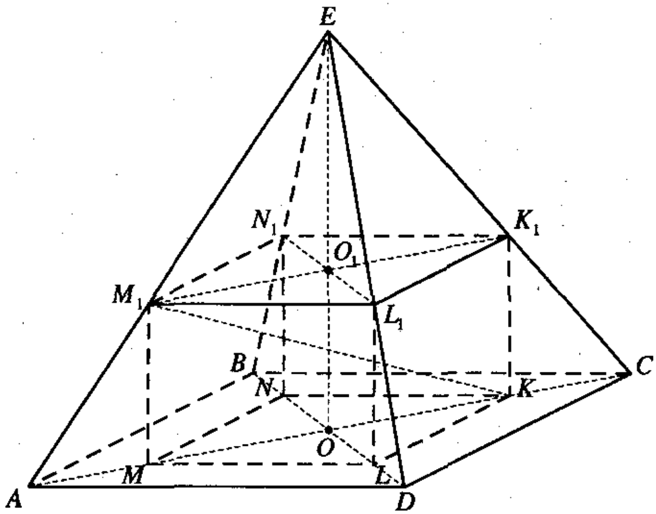


Рис. 12.124

Если $MN = b$, то $MK = b\sqrt{2}$.

$\Delta AMM_1 = \Delta CKK_1$ — по катету и острому углу ($MM_1 = KK_1$, $\angle M_1AM = \angle K_1CK = \alpha$).

Отсюда $CK = \dfrac{AC - MK}{2} = \dfrac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

В ΔM_1MK $(\angle M_1MK = 90°)$: $MM_1 = MK \operatorname{tg} \angle M_1KM = b\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$.

В $\Delta K_1KC(\angle K_1KC = 90°)$:$CK = K_1K \operatorname{ctg} \angle K_1CK = b\sqrt{2} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{2} = b \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\alpha;\ b = \frac{a}{1 + 2\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{a \operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi + 2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Объем призмы

$$V = S_{MNKL} \cdot MM_1 = b^3\sqrt{2} \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3 \operatorname{ctg}^3\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi + 2\operatorname{ctg}\alpha)^3} \cdot \sqrt{2} \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2} \operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi + 2\operatorname{ctg}\alpha)^3}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{2} \operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi + 2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$.

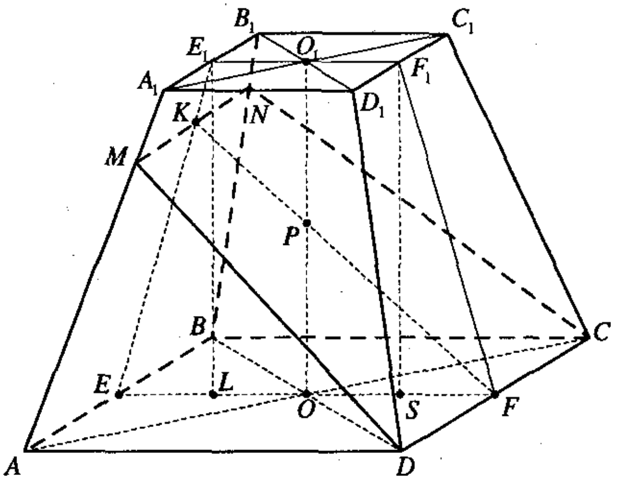


Рис. 12.125

12.259. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна a, сторона верхнего основания равна b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону нижнего основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, проведена плоскость, пересекающая противоположную боковую грань по некоторой прямой. Найти расстояние от этой прямой до нижнего основания.

Решение.

Пусть точка P — середина отрезка OO_1, соединяющего центры оснований правильной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = a$, $A_1D_1 = b$ (рис. 12.125), MN — прямая, по которой плоскость, проходящая через сторону CD нижнего основания и точку P, пересекает плоскость грани AA_1B_1B. Так как $CD \parallel AB$, то $MN \parallel AB$ и прямая MN параллельна плоскости основания.

E — середина AB, E_1 — середина A_1B_1, F — середина CD, F_1 — середина C_1D_1. Тогда плоскость четырехугольника EE_1F_1F перпендикулярна плоскости основания, $\angle E_1EO = \angle F_1FO = \alpha$.

K — точка пересечения MN и EE_1. Длина перпендикуляра KL, опущенного из точки K на нижнее основание, — искомое расстояние.

Проведем из точки F_1 перпендикуляр F_1S на нижнее основание.

$$SF = \frac{EF - E_1F_1}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

В $\Delta F_1SF(\angle F_1SF = 90°): F_1S = SF\,\text{tg}\,\angle F_1FS = \frac{a-b}{2}\text{tg}\,\alpha.$

$OP = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{1}{2}F_1S = \frac{a-b}{4}tg\alpha.$

Если $KL = x$, то из

$\Delta KLE\ (\angle KLE = 90°)$: $EL = KL\ \text{ctg}\ \angle KEL = x\ \text{ctg}\ \alpha.$

$LF = EF - EL = a - x\ \text{ctg}\ \alpha.$

$\Delta KLF \sim \Delta\ POF \Rightarrow$

$$\Delta KLF \sim \Delta POF \Rightarrow \frac{KL}{LF} = \frac{PO}{OF}; \frac{x}{a - x\,\text{ctg}\,\alpha} = \frac{\frac{a-b}{4}\text{tg}\,\alpha}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax = (a - x\,\text{ctg}\,\alpha)(a-b)\text{tg}\,\alpha \Leftrightarrow 2ax = a^2\ \text{tg}\,\alpha - ab\,\text{tg}\,\alpha - ax + bx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(3a-b) = a(a-b)tg\alpha; x = \frac{a(a-b)\text{tg}\,\alpha}{3a-b}.$$

Ответ: $\frac{a(a-b)\text{tg}\,\alpha}{3a-b}$.

12.260. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды — равные прямоугольные трапеции с острым углом α и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен β. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть общее боковое ребро AA_1 равных боковых граней AA_1C_1C и AA_1B_1B усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.126) перпендикулярно плоскости ABC, а $\angle BAC$ — линейный угол двугранного угла между этими гранями, $\angle BAC = \beta$, D — середина BC. Тогда, так как $AC = AB$,

$$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\beta}{2}, AD \perp BC.$$

Если $SABC$ — полная пирамида, соответствующая данной усеченной и AD — проекция SD на плоскость ABC, то $SD \perp BC$ и $\angle SDA$ — искомый угол между боковой гранью BB_1C_1C и плоскостью основания.

$\angle ABS = \angle ACS = \alpha.$

Если $AB = x$, то из

$\Delta SAB\ (\angle SAB = 90°)$: $SA = AB\text{tg}\ \angle ABS = x\text{tg}\,\alpha.$

В $\Delta ADB\ (\angle ADB = 90°)$: $AD = AB\cos\angle DAB = x\cos\frac{\beta}{2}.$

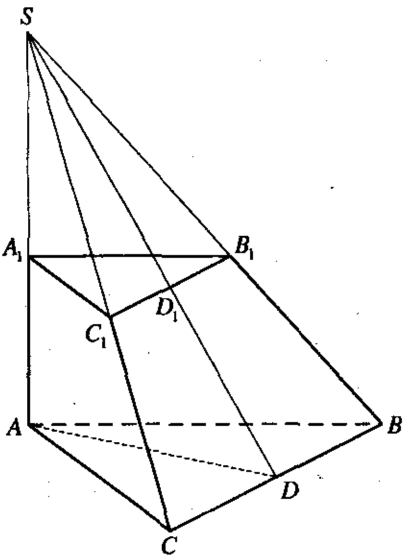


Рис. 12.126

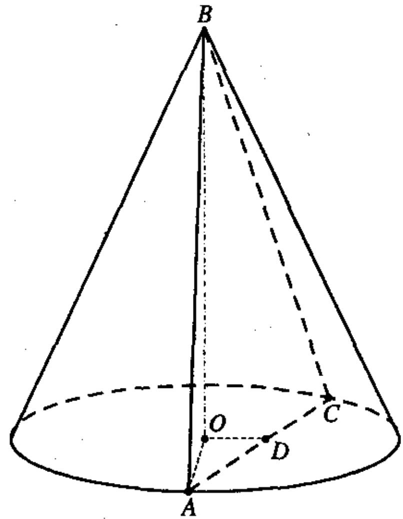


Рис. 12.127

В $\Delta SAD (\angle SAD = 90°)$: $\operatorname{tg} \angle SDA = \frac{AS}{AD} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$; $\angle SDA = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$.

12.261. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса как $2 : \pi$. Найти угол между образующей и высотой конуса.

Решение.

Пусть BO — высота конуса, ΔABC — сечение конуса, $\angle ABC = \alpha$, (рис. 12.127), $AB = d$.

Тогда площадь сечения

$$S_1 = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

Если искомый угол ABC равен β, то из

$\Delta AOB \left(\angle AOB = 90°\right)$: $AO = d \sin \beta$.

Площадь полной поверхности конуса

$$S_2 = \pi \cdot OA^2 + \pi \cdot OA \cdot AB = \pi d^2 (1+\sin\beta)\sin\beta.$$

Тогда $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{1}{2}d^2 \sin\alpha}{\pi d^2 (1+\sin\beta)\sin\beta} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{2\pi(1+\sin\beta)\sin\beta} = \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\beta + 4\sin\beta - \sin\alpha = 0,$$

$$\sin\beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\sin\alpha}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+\cos(90^\circ - \alpha)}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2}.$$

Учитывая, что угол β острый, $\sin\beta > 0 \Rightarrow$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos 45^\circ\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right);$$

$$\beta = \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right).$$

Ответ: $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right)$.

12.262. Боковая грань правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Плоскость, проведенная через сторону нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Боковая поверхность пирамиды равна S. Найти стороны верхнего и нижнего оснований.

Решение.

Пусть трапеция $DA_1B_1C_1$ — сечение правильной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.128), точки E, E_1, F_1, F — середины соответственно отрезков AB, A_1B_1, C_1D_1, CD.

Тогда $E_1E \perp AB$, $EF \perp AB$, $\angle E_1EF = \alpha$ и плоскость трапеции EE_1F_1F перпендикулярна плоскостям оснований усеченной пирамиды.

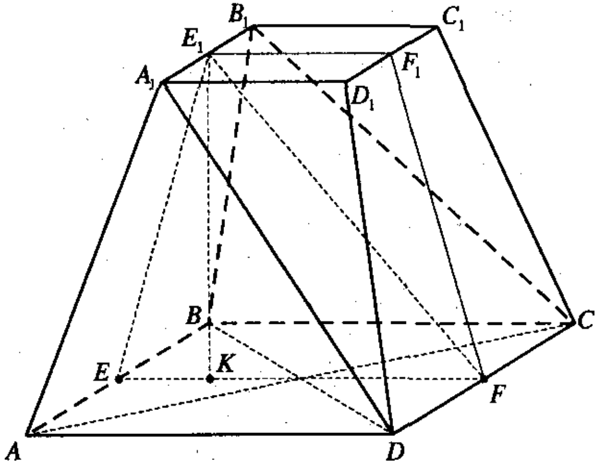


Рис. 12.128

E_1K — высота трапеции EE_1F_1F.

$KF \perp CD$, KF — проекция E_1F на плоскость квадрата $ABCD$. Тогда $E_1F \perp CD$, $\angle E_1FK = \beta$.

Если $CD = \alpha$, $C_1D_1 = \beta$,

$$EK = \frac{EF - E_1F_1}{2} = \frac{a-b}{2};\ KF = \frac{EF + E_1F_1}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

В ΔE_1KE ($\angle E_1KE = 90°$):

$$EE_1 = \frac{EK}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\cos\alpha};\ E_1K = EK\ \mathrm{tg}\ \angle E_1EK = \frac{a-b}{2}\ \mathrm{tg}\ \alpha.$$

В $\Delta E_1KF\ (\angle E_1KF = 90°)$: $E_1K = KF\ \mathrm{tg}\ \angle E_1FK = \dfrac{a+b}{2}\ \mathrm{tg}\ \beta$,

таким образом $\dfrac{a-b}{2}\ \mathrm{tg}\ \alpha = \dfrac{a+b}{2}\ \mathrm{tg}\ \beta$; $a(\mathrm{tg}\ \alpha - \mathrm{tg}\ \beta) = b(\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}\ \beta)$;

$$\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ b = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды

$$S = 4\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2\cos\alpha} = \frac{a^2-b^2}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{a^2 - \dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}}{\cos\alpha} = S;$$

$$S=a^2\cdot\frac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\beta)}\Leftrightarrow a^2\cdot\frac{\cos(2\alpha-2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta)}{2\cos\alpha\sin^2(\alpha+\beta)}=$$

$$=S\Leftrightarrow a^2\cdot\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\beta)}=S\Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{S\cos\alpha\sin^2(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\beta}}=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}.\ b=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\sin(\alpha-\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}.$$

Ответ: $\sin(\alpha+\beta)\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}};\ \sin(\alpha-\beta)\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}.$

12.263. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна H и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть a и β — стороны оснований данной усеченной пирамиды, причем $a>\beta$.

Тогда $H=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}-\dfrac{b\sqrt{3}}{3}\right)\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha,\ a-b=H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha,$

площади оснований $S_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4},\ S_2=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4},\ H^2=ab.$

Объем усеченной пирамиды

$$V=\frac{H}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\frac{H}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}\right)=$$

$$=\frac{H\sqrt{3}}{12}\left(a^2+b^2+ab\right)=\frac{H\sqrt{3}}{12}\left((a-b)^2+3ab\right)=$$

$$=\frac{H\sqrt{3}}{12}\left(3H^2\operatorname{ctg}^2\alpha+3H^2\right)=\frac{H^3\sqrt{3}}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\alpha+1\right)=\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}.$

12.264. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $m:n$ $(m>n)$. Высота пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с плоскостью оснований угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

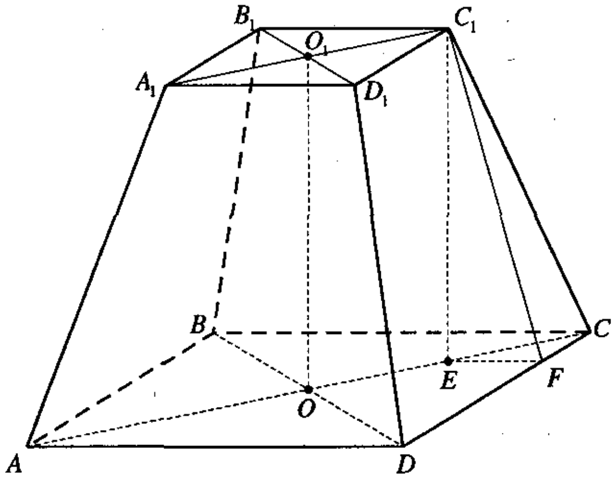


Рис. 12.129

Решение.

Пусть сторона верхнего основания усеченной пирамиды равна nx. Тогда сторона нижнего основания равна mx.

Если C_1E — высота правильной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.129), $C_1E = H$, то точка E принадлежит диагонали AC квадрата $ABCD$, $\angle C_1CE = \alpha$.

В $\Delta C_1EC(\angle C_1EC = 90°)$: $CC_1 = \dfrac{H}{\sin\alpha}$; $CE = H\operatorname{ctg}\alpha$.

Пусть C_1F — высота боковой грани CC_1D_1D.

Тогда в ΔEFC $\angle EFC = 90°$, $EF = CF = \dfrac{EC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{2}$,

$$CF = \frac{CD - C_1D_1}{2} = \frac{(m-n)x}{2} \Rightarrow \frac{(m-n)x}{2} = \frac{H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{2};$$

$$x = \frac{H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{m-n}.$$

В ΔC_1FC $(\angle C_1FC = 90°)$:

$$C_1F = \sqrt{C_1C^2 - CF^2} = \sqrt{\frac{H^2}{\sin^2\alpha} - \frac{H^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{H}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{H}{\sqrt{2}}\sqrt{2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{H}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды

$$S=4\cdot\frac{CD+C_1D_1}{2}\cdot C_1F=2(mx+nx)\cdot\frac{H}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=$$

$$=2(m+n)\cdot\frac{H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{m-n}\cdot\frac{H}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{2(m+n)H^2\operatorname{ctg}\alpha}{m-n}\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2(m+n)H^2\operatorname{ctg}\alpha}{m-n}\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

12.265. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p:q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстоянии a и составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

Решение.

Пусть BO — высота конуса, ΔABC — сечение конуса, $\angle AOC=\frac{360^\circ q}{p+q}$ (рис. 12.130), D — середина AC, тогда $OD\perp AC$, $\angle AOD=\frac{180^\circ q}{p+q}$, $BD\perp AC$.

Проведем из точки O перпендикуляр OE на плоскость ABC, $OE=a$, DE — проекция DO на плоскость ABC, $DO\perp AC$. Тогда $DE\perp AC$. Таким образом, точка E на отрезке BD, прямая BD — проекция прямой BO на плоскость ABC, $\angle OBD=\alpha$.

В ΔBEO ($\angle BEO=90^\circ$): $BO=\frac{OE}{\sin\angle OBD}=\frac{a}{\sin\alpha}$.

В ΔBOD ($\angle BOD=90^\circ$): $OD=BO\operatorname{tg}\angle OBD=\frac{a}{\cos\alpha}$.

В ΔADO ($\angle ADO=90^\circ$): $OA=\frac{OD}{\cos\angle AOD}=\frac{a}{\cos\alpha\cos\frac{180^\circ q}{p+q}}$.

Объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot OA^2\cdot BO=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{\cos^2\alpha\cos^2\frac{180^\circ q}{p+q}}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2\pi a^3}{3\sin2\alpha\cos\alpha\cos^2\frac{180^\circ q}{p+q}}.$$

Ответ: $\frac{2\pi a^3}{3\sin2\alpha\cos^2\frac{180^\circ q}{p+q}\cdot\cos\alpha}$.

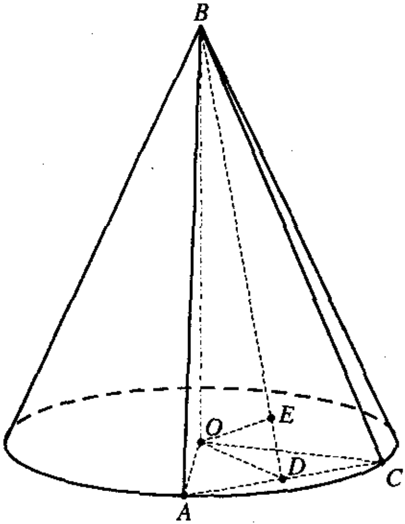


Рис. 12.130

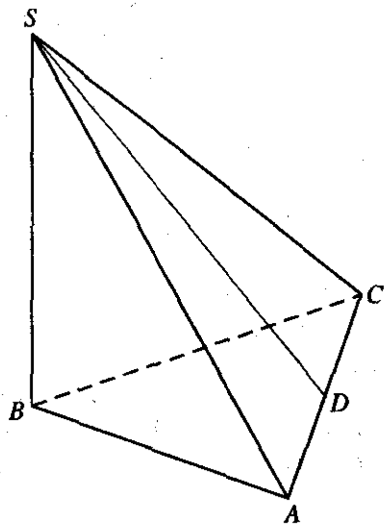


Рис. 12.131

12.266. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Сумма двух неравных между собой плоских углов при вершине равна $\frac{\pi}{2}$. Найти эти углы.

Решение.

Пусть грани SBA и SBC пирамиды $SABC$ перпендикулярны плоскости ABC основания (рис. 12.131), ΔABC — равносторонний. Тогда $\Delta SBA = \Delta SBC$ — по двум катетам и $\angle ASB = \angle CSB$, $AS = SC$.

Если $\angle ASC = \alpha$, то $\angle ASB = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

D — середина AC.

В $\Delta ADS \left(\angle ADS = \frac{\pi}{2}\right): AD = AS \sin\frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta ABS \left(\angle ABS = \frac{\pi}{2}\right): AB = AS \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Так как $AB = 2\,AD$, то $AS \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2AS \sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

$0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} > 0, \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \cos\alpha = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$\cos^2\alpha = 2(1-\cos\alpha)$; $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0$; $\cos\alpha = -1 \pm \sqrt{3}$.

Учитывая, что $0 < \cos\alpha < 1$, имеем $\cos\alpha = \sqrt{3}-1, \alpha = \arccos(\sqrt{3}-1)$,

$\angle ASB = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3}-1)$

Ответ: $\arccos(\sqrt{3}-1); \frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3}-1)$

12.267. Отношение полной поверхности конуса к площади его осевого сечения равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

Решение.

Пусть α — угол между высотой и образующей конуса, l — образующая, r — радиус основания конуса.

Тогда $r = l\sin\alpha$ и площадь полной поверхности конуса

$$S_1 = \pi r^2 + \pi rl = \pi l^2 \sin^2\alpha + \pi l^2 \sin\alpha = \pi l^2 \sin\alpha(\sin\alpha + 1).$$

Угол при вершине осевого сечения равен 2α и площадь сечения

$$S_2 = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$$

Таким образом

$$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi l^2 \sin\alpha(\sin\alpha+1)}{\frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha} = \frac{\pi(\sin\alpha+1)}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\pi}{\kappa} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{\kappa} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\kappa} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\kappa},$$

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}; 0 < tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) < 1; 0 < \frac{\pi}{\kappa} < 1; k > \pi.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\kappa}, k > \pi.$

12.268. Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с прилежащими к ней сторонами основания призмы углы α и β. Найти объем призмы, если высота цилиндра равна H.

Решение.

Пусть грань AA_1B_1B призмы $ABCA_1B_1C_1$ проходит через ось OO_1 цилиндра, в который она вписана (рис. 12.132), $AA_1 = H$, $\angle ABA_1 = \alpha$, $\angle CBA_1 = \beta$, центр O основания цилиндра является серединой стороны AB треугольника ABC, вписанного в это основание. Отсюда $\angle ACB = 90°$.

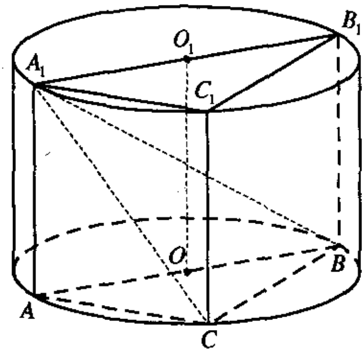


Рис. 12.132

AC — проекция A_1C на плоскость ABC, $AC \perp BC$. Значит, $A_1C \perp BC$.

В ΔA_1AB ($\angle A_1AB = 90°$):

$$AB = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ABA_1 = H \operatorname{ctg} \alpha; \; A_1B = \frac{AA_1}{\sin \angle ABA_1} = \frac{H}{\sin \alpha}.$$

В ΔA_1CB ($\angle A_1CB = 90°$): $BC = A_1B \cos \angle CBA_1 = \dfrac{H \cos \beta}{\sin \alpha}$.

Из ΔABC ($\angle ACB = 90°$):

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{H^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} =$$

$$= \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\beta}{2}} = \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}.$$

Объем призмы:

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)} \times$$

$$\times \frac{H \cos \beta}{\sin \alpha} \cdot H = \frac{H^3 \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}.$$

Ответ: $\dfrac{H^3 \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.

12.269. Две вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

Решение.

Пусть сторона BC равностороннего треугольника ABC (рис. 12.133) лежит на верхнем основании цилиндра, вершина A на окружности нижнего основания, $BC = a$, AM — образующая цилиндра, K — середина BC. Тогда $BM = CM$, $MK \perp BC$, $AK \perp BC$. Отсюда, прямая BC перпендикулярна плоскости AMK, значит, плоскости AMK и ABC перпендикулярны.

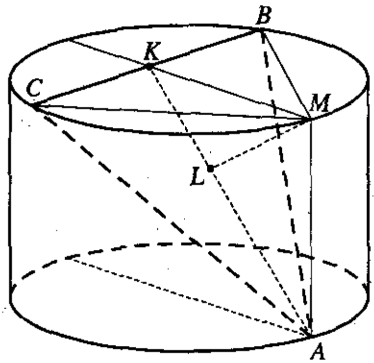


Рис. 12.133

В плоскости AMK проведен перпендикуляр ML на AK. Тогда AK — проекция прямой AM на плоскость ABC и $\angle MAK = \alpha$.

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

В ΔAMK ($\angle AMK = 90°$):

$$AM = AK\cos\angle MAK = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\alpha;\ MK = AK\sin\angle MAK = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

В ΔAMB ($\angle AMB = 90°$):

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4}\cos^2\alpha = \frac{a^2}{4}\left(4 - 3\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(1 + 3\sin^2\alpha\right)$$

Радиус круга, описанного около ΔBMC:

$$R = \frac{BM\cdot CM\cdot BC}{4S_{\Delta BMC}} = \frac{BM^2\cdot BC}{4\cdot\frac{1}{2}BC\cdot MK} = \frac{BM^2}{2MK} = \frac{\frac{a^2}{4}\left(1+3\sin^2\alpha\right)}{a\sqrt{3}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{a\left(3\sin^2\alpha + 1\right)}{4\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S = 2\pi R\cdot AM = 2\pi\cdot\frac{a\left(3\sin^2\alpha+1\right)}{4\sqrt{3}\sin\alpha}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{1}{4}\pi a^2\operatorname{ctg}\alpha\left(3\sin^2\alpha+1\right).$$

Ответ: $\frac{1}{4}\pi a^2\operatorname{ctg}\alpha\left(3\sin^2\alpha+1\right)$.

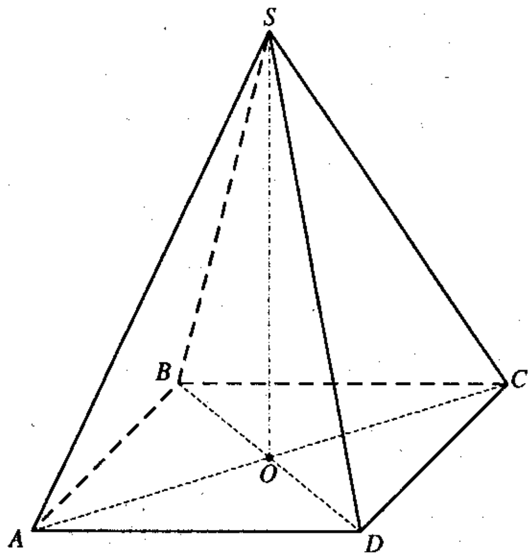


Рис. 12.134

12.270. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.134), $\angle SDO = \angle CSD$, $\angle SDO = \angle CSD = \alpha$.

Тогда $\angle SDC = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

SO — наклонная к плоскости основания пирамиды, OD — ее проекция на эту плоскость, CD — прямая, лежащая в этой плоскости.

Получаем

$$\cos\angle SDC = \cos\angle SDO \cdot \cos\angle ODC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha\cos 45° \Rightarrow \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha.$$

Так как угол α острый, то $\cos\alpha > 0, \sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ и

$$\cos^2\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \cos^2\alpha = 1 - \cos\alpha; \cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0;$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

12.271. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат. Каковы возможные значения α?

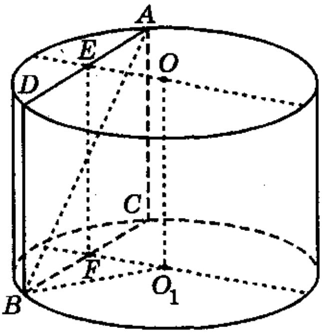


Рис. 12.135

Решение.

Пусть OO_1 — ось данного цилиндра, AB — отрезок, о котором говорится в условии задачи (рис. 12.135), $AB = l$.

Прямые AB и OO_1 — скрещивающиеся. Проведем через AB плоскость, параллельную OO_1. Сечение $ABCD$ цилиндра этой плоскостью — прямоугольник. Если F — середина BC, то отрезок O_1F — перпендикуляр к плоскости сечения и его длина — искомое расстояние.

Пусть BC — проекция BA на плоскость основания цилиндра, $\angle ABC = \alpha$.

В $\Delta ACB\,(\angle ACB = 90°)$:

$AC = AB\cos\angle ABC = l\sin\alpha$; $BC = AB\cos\angle ABC = l\cos\alpha$.

Так как осевое сечение цилиндра — квадрат, то радиус его основания

$O_1B = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}l\sin\alpha$. В $\Delta BFO_1\,(\angle BFO_1 = 90°)$:

$$OF = \sqrt{O_1B^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{1}{4}l^2\sin^2\alpha - \frac{1}{4}l^2\cos^2\alpha} = \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Учитывая, что $\cos 2\alpha < 0$, имеем $\dfrac{\pi}{2} < 2\alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, т.е. $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

12.272. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно l и составляет с прилежащими сторонами основания углы α и β. Найти объем пирамиды.

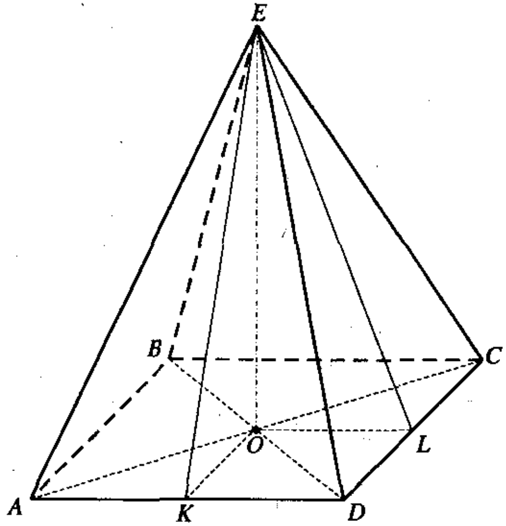


Рис. 12.136

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$ (рис. 12.136), EO — ее высота. Так как $EA = EB = EC = ED = l$, то O — центр окружности, описанной около основания, — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

$\angle ADE = \alpha$, $\angle CDE = \beta$.

Если K — середина AD, L — середина CD, то $EK \perp AD$, $EL \perp CD$, $OL = KD$.

В ΔEKD ($\angle EKD = 90°$) : $EK = l\sin\alpha$, $KD = l\cos\alpha$.

В ΔELD ($\angle ELD = 90°$): $DL = l\cos\beta$.

Площадь основания пирамиды

$$S = AD \cdot CD = 2l\cos\alpha \cdot 2l\cos\beta = 4l^2\cos\alpha\cos\beta.$$

В ΔEOL ($\angle EOL = 90°$):

$$EO = \sqrt{EL^2 - OL^2} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta} = l\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\beta}{2}} =$$

$$= l\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot EO = \frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

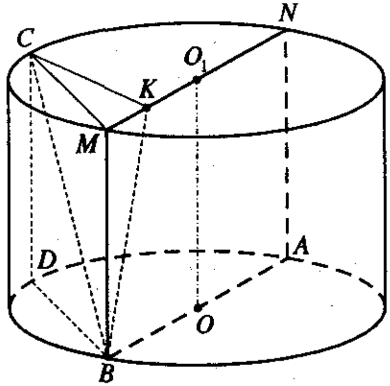


Рис. 12.137

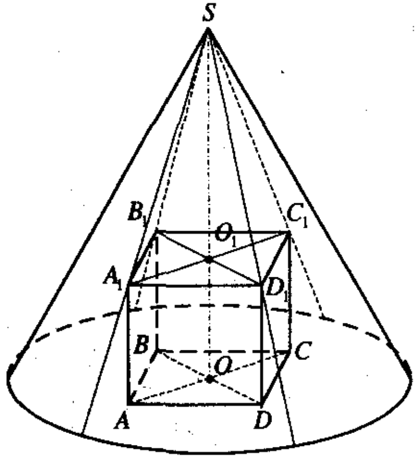


Рис. 12.138

12.273. Точка A лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка B — на окружности нижнего основания. Прямая AB составляет с плоскостью основания угол α, а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку B, — угол β. Найти объем цилиндра, если длина отрезка AB равна l.

Решение.

Пусть O и O_1 — центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, CD — его образующая (рис. 12.137), тогда BD — проекция BC на плоскость нижнего основания и $\angle CBD = \alpha$.

Плоскость осевого сечения $BMNA$ перпендикулярна плоскостям оснований. Проведем перпендикуляр CK на MN, тогда BK — проекция BC на плоскость осевого сечения и $\angle CBK = \beta$.

MN — диаметр верхнего основания цилиндра, поэтому $\angle MCN = 90°$.

В ΔCDB ($\angle CDB = 90°$): $CD = l\sin\alpha$; $BD = l\cos\alpha$.

В ΔCKB ($\angle CKB = 90°$): $CK = l\sin\beta$.

$CM = BD = l\cos\alpha$.

В ΔCKM ($\angle CKM = 90°$):

$$MK = \sqrt{CM^2 - CK^2} = l\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = l\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} =$$

$$= l\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

В ΔMCN ($\angle MCN = 90°$, CK — высота):

$$CM^2 = MK \cdot MN;\ MN = \frac{CM^2}{MK} = \frac{l\cos^2\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}.$$

Радиус основания цилиндра

$$R = \frac{1}{2}MN = \frac{l\cos^2\alpha}{2\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}},$$

высота цилиндра $H = CD = l\sin\alpha$.

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi l^3\cos^4\alpha\sin\alpha}{4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

12.274. В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно k. Найти угол между образующей и высотой конуса.

Решение.

Пусть ребро куба равно a (рис.12.138).

Тогда $O_1C_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SO = ka, SO_1 = SO - OO_1 = a(k-1)$.

В ΔSO_1C_1 ($\angle SO_1C_1 = 90°$):

$$\operatorname{ctg}\angle O_1SC_1 = \frac{SO_1}{O_1C_1} = \frac{a(k-1)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(k-1);$$

$$\angle O_1SC_1 = \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}(k-1)\right).$$

Ответ: $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}(k-1)\right)$.

12.275. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, две другие составляют с ней углы α и β. Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна H.

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — основание пирамиды $KACBD$ (рис. 12.139).

Боковые грани ABK и CBK перпендикулярны плоскости основания пирамиды, их общее ребро KB — высота пирамиды, $KB = H$.

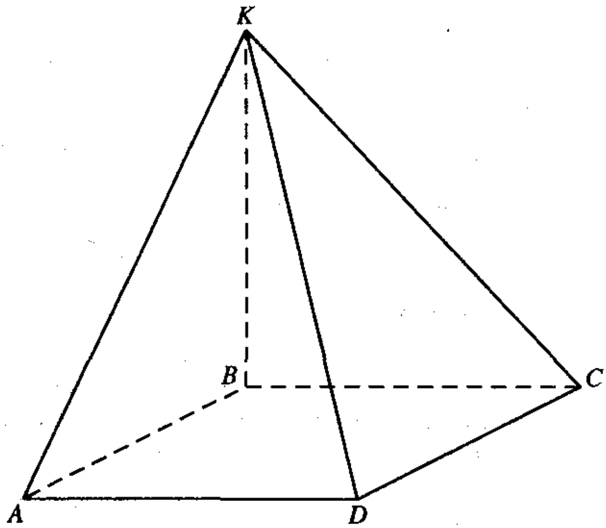


Рис. 12.139

BA и BC — проекции боковых ребер KA и KC на плоскость основания, $BA \perp AD$, $BC \perp CD$. Отсюда, $KA \perp AD$, $KC \perp CD$, $\angle KAB$ и $\angle KCB$ — углы наклона боковых граней KAD и KCD к плоскости основания, $\angle KAB = \alpha$, $\angle KCB = \beta$.

В ΔABK ($\angle ABK = 90°$): $AB = H \operatorname{ctg}\alpha$, $AK = \dfrac{H}{\sin\alpha}$.

В ΔCBK ($\angle CBK = 90°$): $BC = H \operatorname{ctg}\beta$, $KC = \dfrac{H}{\sin\beta}$.

Боковая поверхность пирамиды

$$S = S_{\Delta ABK} + S_{\Delta CBK} + S_{\Delta DAK} + S_{\Delta DCK} = \frac{1}{2} AB \cdot KB + \frac{1}{2} BC \cdot KB + \frac{1}{2} AK \cdot AD +$$

$$+ \frac{1}{2} KC \cdot CD = \frac{H^2}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\beta}\right) = \frac{H^2}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} +\right.$$

$$\left. + \frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) = \frac{H^2}{2\sin\alpha\sin\beta}\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} +\right.$$

$$+\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Bigg)=\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

12.276. Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a, а прилежащие к ней углы равны α и β. Найти боковую поверхность призмы, если ее объем равен V.

Решение.

Если b и c — стороны основания призмы, противолежащие соответственно его углам β и α, γ — угол основания, противолежащий стороне a, то

$$b=\frac{a\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{a\sin\beta}{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$c=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Площадь основания призмы $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

периметр основания:

$$P=a+b+c=a+\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}(\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta)=$$

$$=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=\frac{2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Высота призмы $H=\dfrac{V}{S}=\dfrac{2V\sin(\alpha+\beta)}{a^2\sin\alpha\sin\beta}$.

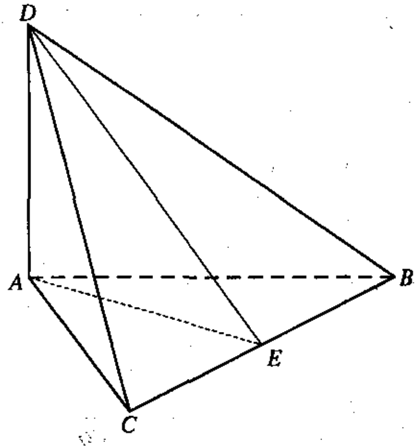


Рис. 12.140

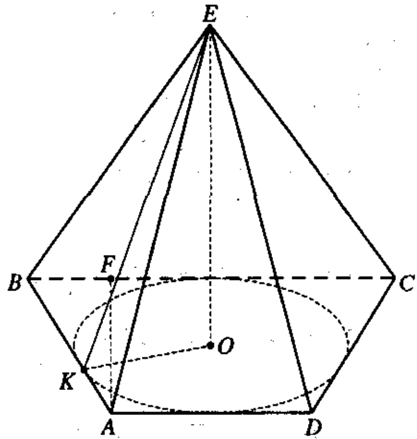


Рис. 12.141

Боковая поверхность призмы:

$$S_б = P \cdot H = \frac{2V \sin(\alpha+\beta)}{a^2 \sin\alpha \sin\beta} \cdot \frac{2a \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \frac{8V \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{a \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2V \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{2V \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}$.

12.277. Одно боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют между собой угол α, а с плоскостью основания — один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть боковое ребро $DA = l$ пирамиды $DABC$ (рис. 12.140), перпендикулярное плоскости основания, является ее высотой, AB и AC — проекции боковых ребер DB и DC пирамиды на плоскость основания. Тогда $\angle ABD = \angle ACD = \beta$, $\angle BDC = \alpha$.

$\Delta DAB = \Delta DAC$ — по катету и острому углу. Таким образом, $AB = AC$, $DB = DC$.

Если E — середина BC, то $AE \perp BC$, $DE \perp DC$, $\angle BDE = \frac{\alpha}{2}$.

В ΔDAB ($\angle DAB = 90°$): $AB = l \operatorname{ctg}\beta$, $DB = \frac{l}{\sin\beta}$.

В ΔDEB ($\angle DEB = 90°$): $BE = DB \sin\angle BDE = \frac{l \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$.

В ΔAEB ($\angle AEB = 90°$):

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{l^2 \operatorname{ctg}^2\beta - \frac{l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}} = \frac{l}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{l}{\sin\beta}\sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{l}{\sin\beta}\sqrt{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AE = BE \cdot AE = \frac{l^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\sin^2\beta}.$$

Объем призмы

$$V = \frac{1}{3} S \cdot DA = \frac{l^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{3\sin^2\beta}.$$

Ответ: $\frac{l^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{3\sin^2\beta}$.

12.278. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть трапеция $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$ (рис. 12.141), $AB = CD$, $\angle ABC = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$, EO — высота пирамиды.

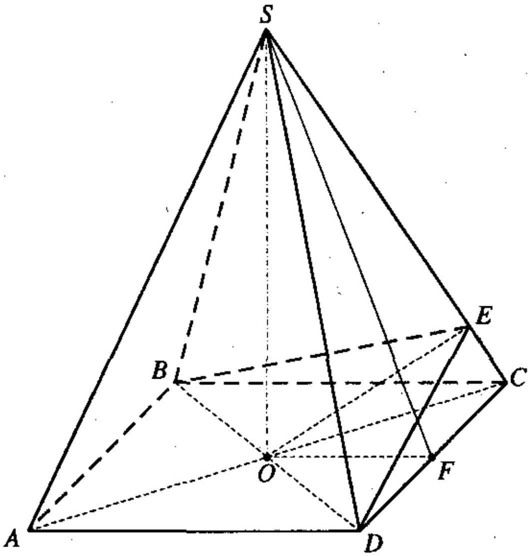


Рис. 12.142

Так как все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$.

Тогда $AD + BC = AB + CD = 2AB$. Если высота трапеции $ABCD$ $AF = h$, то из ΔAFB ($\angle AFB = 90°$):

$$AB = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot AF = AB \cdot AF = \frac{h^2}{\sin\alpha}.$$

Тогда $h = \sqrt{S\sin\alpha}$.

В плоскости основания проведем перпендикуляр OK на AB. Тогда $EK \perp AB$ $\angle EKO = \beta$, радиус окружности, вписанной в трапецию $ABCD$,

$$OK = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{S\sin\alpha}.$$

В ΔEOK ($\angle EOK = 90°$):

$$EO = KO \operatorname{tg}\angle EKO = \frac{\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{2}.$$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S\cdot EO=\frac{S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{6}$.

Ответ: $\frac{S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{6}$.

12.279. Косинус угла между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен k. Найти косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания и допустимые значения k.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис.12.142), $\angle BED$ — угол между боковыми гранями BSC и DSC, F — середина CD, $\angle SFO$ — угол между боковой гранью и плоскостью основания, $\angle BED=\alpha$, $\angle SCD=\beta$, $\angle SFO=\gamma$.

По теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной C:

$$\cos\alpha=\frac{\cos 90^\circ-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\beta}=-\operatorname{ctg}^2\beta.$$

В ΔSFC $(\angle SFC=90^\circ)$: $\operatorname{ctg}\beta=\frac{CF}{SF}$.

В ΔSOF $(\angle SOF=90^\circ)$: $\cos\gamma=\frac{OF}{SF}$.

Так как $CF=OF$, то $\cos\gamma=\operatorname{ctg}\beta\Rightarrow\cos\alpha=-\cos^2\gamma$,

$\cos\gamma=\sqrt{-\cos\alpha}=\sqrt{-k}$.

Так как $0<\cos g<1$, то $0<\sqrt{-k}<1, 0<-k<1, -1<k<0$.

Ответ: $\sqrt{-k}; -1<k<0$.

12.280. Основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$ ($AB\parallel CD$). Боковое ребро OA перпендикулярно основанию. Ребра OB и OC составляют с основанием углы, соответственно равные α и β. Найти угол между ребром OD и основанием.

Решение.

Ребро OA является высотой пирамиды $OABCD$ (рис. 12.143), $\angle OBA=\alpha$, $\angle OCA=\beta$, $\angle ODA$ — искомый угол между ребром OD и основанием.

Пусть $OA=1$, $\angle ODA=\gamma$, тогда из ΔOAB $(\angle OAB=90^\circ)$: $AB=OA$ $\operatorname{ctg}\angle OBA=\operatorname{ctg}\alpha$.

В ΔOAC $(\angle OAC=90^\circ)$: $AC=OA\operatorname{ctg}\angle OCA=\operatorname{ctg}\beta$.

В ΔOAD $(\angle OAD=90^\circ)$: $AD=OA\operatorname{ctg}\angle ODA=\operatorname{ctg}\gamma$.

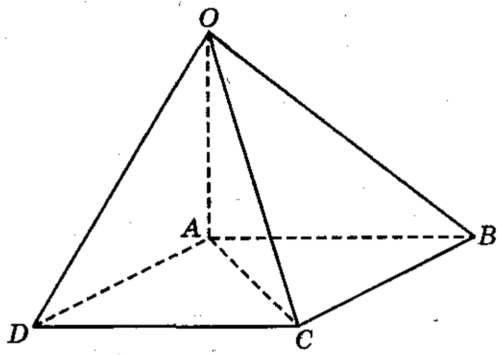


Рис. 12.143

Из $\Delta ADC(\angle ADC = 90°)$: $AD^2 = AC^2 - CD^2$;

$\text{ctg}^2\gamma = \text{ctg}^2\beta - \text{ctg}^2\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ctg}^2\gamma = (\text{ctg}\beta - \text{ctg}\alpha)(\text{ctg}\beta + \text{ctg}\alpha) = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}};$$

$$\gamma = \text{arctg}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}.$$

Ответ: $\text{arctg}\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}$.

12.281. Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней и допустимые значения k.

Решение.

Пусть SO — высота, SE и SF — апофемы противоположных боковых граней правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.144), $AD = a$, $\angle SFO = \alpha$.

Тогда $AC = a\sqrt{2}$, а из $\Delta SOF(\angle SOF = 90°)$:

$$SO = OF\,\text{tg}\angle SFO = \frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha.$$

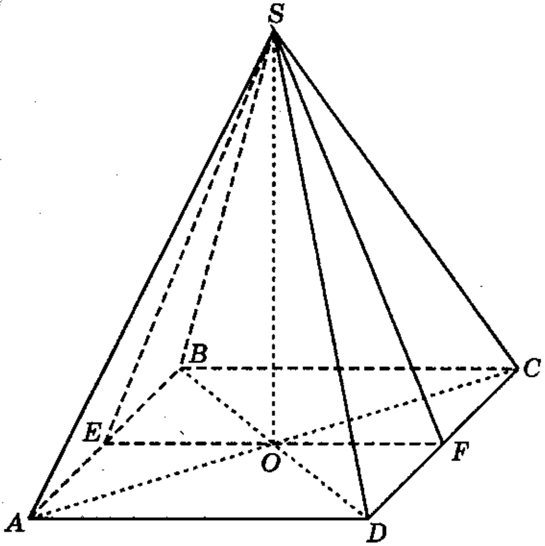


Рис. 12.144

Площадь сечения ΔASC:

$$S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot SO = \frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{4}.$$

Площадь основания пирамиды $S_{\text{осн}} = a^2$, площадь боковой поверхности $S_2 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha} = \frac{a^2}{\cos\alpha}$.

Так как $\frac{S_1}{S_2} = k$, то $\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{4}\cos\alpha = k$, $\sin\alpha = \frac{4k}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,k$.

Искомый $\cos\angle ESF = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1 = 2(2\sqrt{2}k)^2 - {}$ $-1 = 16k^2 - 1$, где $16k^2 - 1 < 1$, или $k^2 < 0{,}125$; т. е. $0 < k < 0{,}25\sqrt{2}$.

Ответ: $16k^2 - 1$; $0 < k < 0{,}25\sqrt{2}$.

12.282. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой пирамиды и не пересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

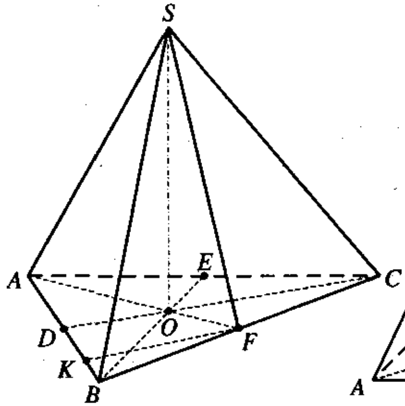


Рис. 12.145

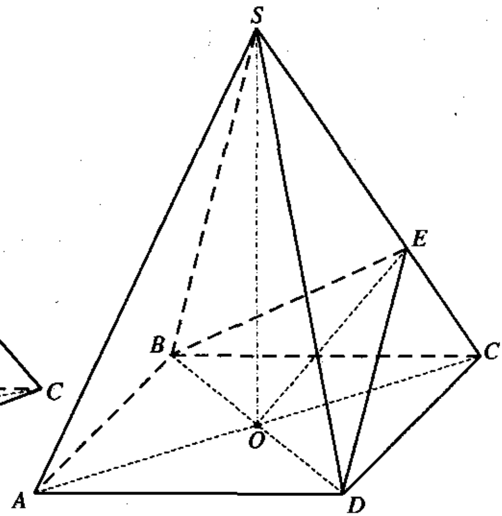


Рис. 12.146

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$, SF — ее апофема, CD — высота основания пирамиды (рис. 12.145), $AD = BD = 1$. Тогда $AB = BC = 2$, $SB = 2AB = 4$, $OF = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

В ΔBFS $(\angle BFS = 90°)$:

$$SF = \sqrt{SB^2 - BF^2} = \sqrt{15}.$$

Проведем перпендикуляр FK на AB. Тогда $\angle BFK = \angle BCD = 30°$, $\angle OFK = 90° - \angle BFK = 60°$.

Так как $FK \parallel CD$, то $\angle SFK$ равен углу между скрещивающимися прямыми SF и CD.

Если OF — проекция наклонной SF на плоскость основания, а FK — прямая, лежащая в этой плоскости, то

$$\cos\angle SFK = \cos\angle SFO \cdot \cos\angle OFK = \frac{OF}{SF}\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{30},$$

$$\angle SFK = \arccos\frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{30}$.

12.283. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти боковую поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.146), $AD=\alpha$.

В плоскости грани SDC проведем перпендикуляр DE на SC.

$SO\perp BD$, $AC\perp BD$, поэтому прямая BD перпендикулярна плоскости ASC. Отсюда $BD\perp SC$.

$SC\perp BD$, $SC\perp DE$. Получили, что прямая SC перпендикулярна плоскости BED. Тогда $\angle BED$ — угол между смежными боковыми гранями SCD и SCB, $\angle BED=\alpha$ и $OE\perp SC$.

Прямоугольные треугольники DEC и BEC ($\angle DEC=\angle BEC=90°$) равны по катету и гипотенузе. Тогда $BE=ED$.

O — середина $BD \Rightarrow\ OE\perp BD, \angle OED=\frac{1}{2}\angle BED=\frac{\alpha}{2}$.

Если $\angle SOC=\beta$, тогда из ΔEOD ($\angle EOD=90°$):

$$DE=\frac{OD}{\sin\angle OED}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; EO=OD\operatorname{ctg}\angle OED=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В ΔOEC ($\angle OEC=90°$):

$$EO=OC\sin\angle SCO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\beta \Rightarrow \sin\beta=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В ΔSOC ($\angle SOC=90°$):

$$SC=\frac{OC}{\cos\angle SCO}=\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\beta}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\sin^2\beta}}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

$$S_{\Delta DSC}=\frac{1}{2}SC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos\alpha}}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^2}{4\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_б=4S_{\Delta DSC}=\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

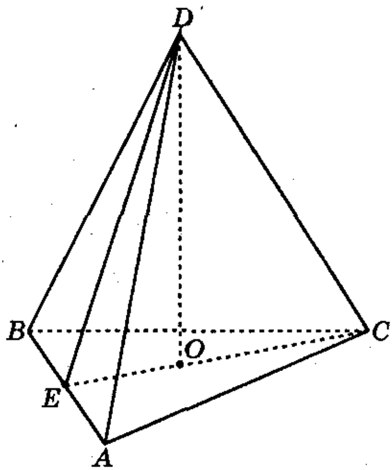


Рис. 12.147

12.284. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k. Найти двугранный угол при основании и допустимые значения k.

Решение.

Пусть ΔDEC — сечение правильной пирамиды $DABC$ (рис. 12.147.) плоскостью, проходящей через боковое ребро DC и высоту пирамиды DO. Тогда E — середина AB, $\angle DEO$ — линейный угол двугранного угла при основании.

Если $\angle DEO = \alpha, AB = 1$, то площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, площадь боковой поверхности $S_б = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$, полная поверхность пирамиды

$$S_1 = S_{\text{осн}} + S_б = S_{\text{осн}} + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}.$$

$$OE = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \; CE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В $\Delta DOE(\angle DOE = 90°): DO = OE \operatorname{tg} \angle DEO = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\alpha.$

Площадь сечения $S_2 = \frac{1}{2} CE \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{8}.$

Так как $\frac{S_2}{S_1} = k$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{8} \cdot \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = k; \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 4k\sqrt{3}; \; \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$

$= 4k\sqrt{3}; \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2k\sqrt{3}; \alpha = 2\operatorname{arctg}(2k\sqrt{3}); \; 0 < 2k\sqrt{3} < 1$, т.е. $0 < k < \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}(2k\sqrt{3}); \; 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{6}$.

12.285. Угол между высотой и образующей конуса равен α. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая угол β с высотой ($\beta < \alpha$). В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

Решение.

Пусть SO — высота данного конуса, ΔASB — его сечение плоскостью (рис. 12.148), $\angle OSB = \alpha$.

Если C — середина AB, то $SC \perp AB$,

$$OC \perp AB,\ \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

Проведем из точки O перпендикуляр OD на плоскость ASB. Тогда DC — проекция OC на плоскость ASB, $OC \perp AB \Rightarrow DC \perp AB$ и точка D находится на прямой SC и SC — проекция SO на плоскость ASB, $\angle OSC = \beta$.

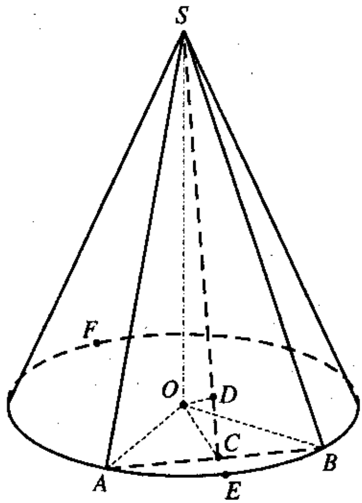


Рис. 12.148

$$\text{В } \Delta SOB\left(\angle SOB = \frac{\pi}{2}\right): SO = OB\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\text{В } \Delta SOC\left(\angle SOC = \frac{\pi}{2}\right): SO = OC\operatorname{ctg}\beta \Rightarrow OB\operatorname{ctg}\alpha = OC\operatorname{ctg}\beta;\ \frac{OC}{OB} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пусть $\angle BOC = \gamma$, тогда из

$$\Delta OCB\left(\angle OCB = \frac{\pi}{2}\right): \cos\gamma = \frac{OC}{OB} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha};\ \gamma = \arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \cup AEB = 2\gamma =$$

$$= 2\arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha};\ \cup AFB = 2\pi - 2\arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha};\ \frac{\cup AEB}{\cup AFB} = \frac{\arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{\pi - \arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Ответ: $\dfrac{\arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{\pi - \arccos\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

12.286. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого острый угол между равными сторонами равен α. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Через

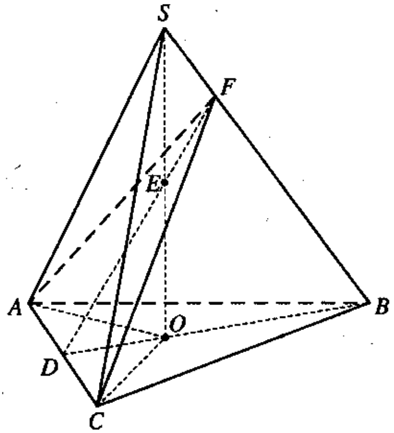


Рис. 12.149

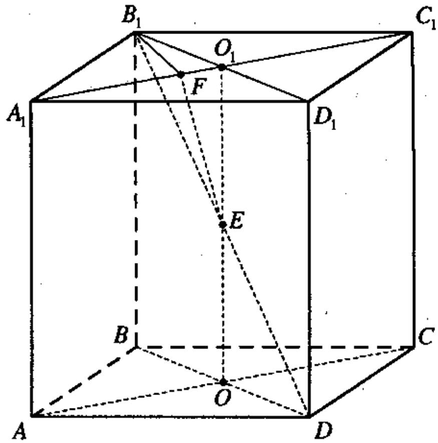


Рис. 12.150

сторону основания, противолежащую данному углу α, и середину высоты пирамиды проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть ΔABC — основание пирамиды $SABC$ (рис. 12.149), $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$, SO — ее высота, $\angle SAO = \beta$.

Так как все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка O — центр круга, описанного около ΔABC, а так как этот треугольник равнобедренный и остроугольный, то точка O принадлежит высоте, медиане и биссектрисе BD этого треугольника.

Пусть точка E — середина высоты SO, ΔAFC — сечение пирамиды, $OD \perp AC$, OD — проекция ED на плоскость основания. Отсюда, $ED \perp AC$ и $\angle EDO$ — угол между плоскостями сечения и основания.

Если R — радиус круга, описанного около ΔABC, то $AC = 2R\sin\alpha$, $AD = R\sin\alpha$, $OA = R$.

В ΔADO ($\angle ADO = 90°$):

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\alpha} = R\cos\alpha.$$

В ΔAOS ($\angle AOS = 90°$): $SO = OA\,\mathrm{tg}\,\angle SAO = R\,\mathrm{tg}\,\beta$.

$$EO = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}R\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

В ΔEOD ($\angle EOD = 90°$):

$$\mathrm{tg}\,\angle EDO = \frac{EO}{OD} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos\alpha};\ \angle EDO = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos\alpha}\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}\right)$.

12.287. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 4 : 12. Через большее ребро проведено диагональное сечение. Найти синус угла между плоскостью этого сечения и не лежащей в ней диагональю параллелепипеда.

Решение.

Пусть O и O_1 — точки пересечения диагоналей оснований прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.150), $A_1B_1 = 3$; $B_1C_1 =$ $= 4$; $BB_1 = 12$.

Тогда $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = 5$;

$$B_1D = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + BB_1^2} = 13.$$

Проведем в плоскости прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикуляр B_1F на A_1C_1. Так как плоскость диагонального сечения AA_1C_1C перпендикулярна плоскостям оснований, то B_1F перпендикулярен плоскости сечения, а прямая FE (F — точка пересечения B_1D и сечения — середина OO_1) — проекция B_1D на плоскость сечения и $\angle B_1EF$ искомый угол между плоскостью сечения AA_1C_1C и B_1D.

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot B_1C_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1F \Rightarrow B_1F = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{12}{5}.$$

В ΔB_1FE ($\angle B_1FE = 90°$):

$$\sin\angle B_1EF = \frac{B_1F}{B_1E} = \frac{12}{5} : \frac{13}{2} = \frac{24}{65}.$$

Ответ: $\dfrac{24}{65}$.

12.288. Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен k. Найти тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.

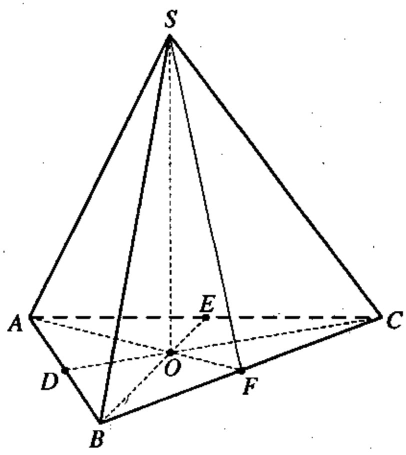


Рис. 12.151

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.151), F — середина BC.

Тогда $\angle SFO$ — угол между боковой гранью и плоскостью основания, $\angle SAO$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания, $\angle ASF$ — угол между боковым ребром SA и апофемой SF противолежащей грани.

Пусть $\angle SFO = \alpha$, $\angle SAO = \beta$, $\angle ASF = \gamma$.

По условию $\operatorname{tg}\alpha = k$.

В ΔSOF ($\angle SOF = 90°$): $SO = OF\operatorname{tg}\alpha$.

В ΔSOA ($\angle SOA = 90°$): $SO = OA\operatorname{tg}\beta = 2OF\operatorname{tg}\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta = \frac{k}{2}.$$

В $\Delta ASF: \gamma = 180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(180° - (\alpha+\beta)) = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1} = \frac{k + \frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k^2 - 1} = \frac{3k}{k^2 - 2}.$$

Ответ: $\frac{3k}{k^2-2}$.

12.289. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равно k. При каких значениях k задача имеет *решение*?

Решение.

Пусть S — полная поверхность, S_1 — боковая поверхность пирамиды, S_2 — площадь ее основания.

Так как все боковые грани образуют с плоскостью основания один и тот же угол α, то $S_1 = \frac{S_2}{\cos\alpha}$.

Далее $S = S_1 + S_2 = \frac{S_2}{\cos\alpha} + S_2 = \frac{S_2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

По условию $\frac{S_1}{S_2} = k \Rightarrow \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = k \Leftrightarrow (k-1)\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{k-1}$.

Так как $k > 0$ и $0 < \cos\alpha < 1$, то $0 < \frac{1}{k-1} < 1, k > 2$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{k-1}, k > 2$.

12.290. Отношение полной поверхности правильной n-угольной пирамиды к площади основания равно t. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

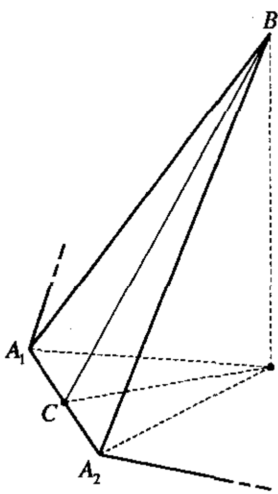


Рис. 12.152

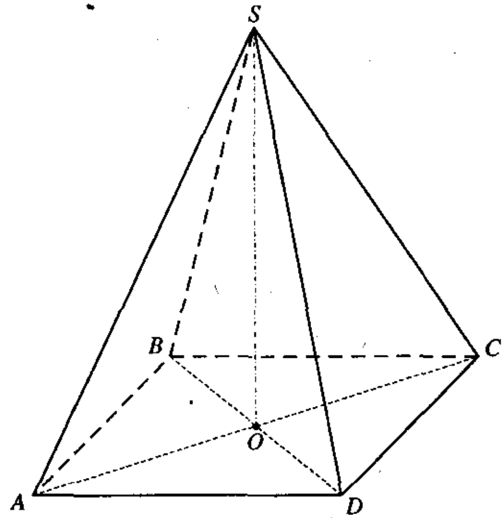


Рис. 12.153

Решение.

Пусть BO — высота правильной пирамиды $BA_1A_2...A_n$ (рис. 12.152), BC — апофема грани A_1BA_2. Тогда $\angle BCO$ — угол между боковой гранью и плоскостью основания, $\angle BA_1O$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

$$\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{n}, \angle A_1OC = \frac{1}{2}\angle A_1OO_2 = \frac{\pi}{n}.$$

Пусть $\angle BCO = \alpha, \angle BA_1O = \beta$. Полная поверхность пирамиды:

$$S = S_б + S_{осн} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha} + S_{осн} = S_{осн}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) \Rightarrow \frac{S}{S_{осн}} = \frac{1}{\cos\alpha} + 1 = t; \alpha = \frac{1}{t-1}.$$

$$В\ \Delta BOC\left(\angle BOC = \frac{\pi}{2}\right): BO = OC\operatorname{tg}\alpha.$$

$$В\ \Delta BOA_1\left(\angle BOA_1 = \frac{\pi}{2}\right): BO = OA_1\operatorname{tg}\beta.$$

$$В\ \Delta A_1CO\left(\angle A_1CO = \frac{\pi}{2}\right): OC = OA_1\cos\frac{\pi}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC\operatorname{tg}\alpha = OA_1\operatorname{tg}\beta; OA_1\operatorname{tg}\beta = OA_1\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\alpha \text{ и } \operatorname{tg}\beta = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{(t-1)^2 - 1} = \sqrt{t^2 - 2t} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{t^2 - 2t}\right).$$

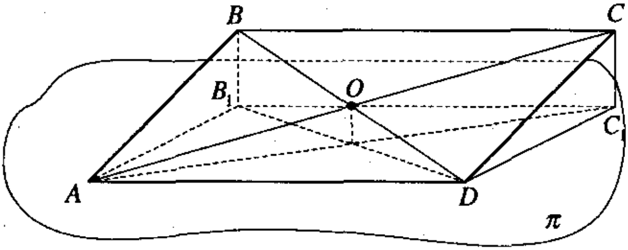


Рис. 12.154

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{t^2-2t}\right)$.

12.291. Косинус угла между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.153), $\cos\angle ASC = k$.

Если $\angle ASC = \alpha$, то $\angle DSO = \angle CSO = \frac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим плоскость SOC. SD — наклонная к этой плоскости, SO — проекция SD на эту плоскость, SC — прямая, лежащая в плоскости SOC.

Тогда $\cos\angle DSC = \cos\angle DSO \cdot \cos\angle CSO = \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+k}{2}$.

Ответ: $\frac{1+k}{2}$.

12.292. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Найти острый угол ромба.

Решение.

Пусть $ABCD$ — ромб, через сторону которого проведена плоскость π (рис. 12.154), O — точка пересечения диагоналей ромба.

Проведем к плоскости π перпендикуляры BB_1 и CC_1, $\angle CAC_1 = \alpha$, $\angle BDB = 2\alpha$.

$BC \parallel AD$, AD принадлежит плоскости π. Таким образом, прямая BC параллельна плоскости π и $BB_1 = CC_1$.

В прямоугольных треугольниках AC_1C и DB_1B с равными катетами CC_1 и BB_1 $\angle CAC_1 < \angle BDB_1 \Rightarrow AC > BD \Rightarrow \angle BAD$ — острый угол ромба.

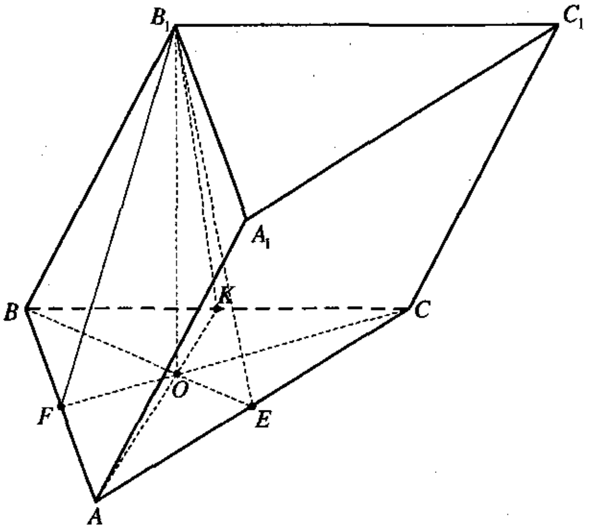


Рис. 12.155

$B\ \Delta AC_1C(\angle AC_1C = 90°): AC = \dfrac{CC_1}{\sin\alpha}$.

$B\ \Delta DB_1B(\angle DB_1B = 90°): BD = \dfrac{BB_1}{\sin 2\alpha}$.

$$B\ \Delta AOD(\angle AOD = 90°): ctg\angle OAD = \frac{AO}{OD} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BD} = \frac{CC_1}{\sin\alpha} : \frac{BB_1}{\sin 2\alpha} =$$

$= 2\cos\alpha \Rightarrow \angle OAD = \operatorname{arctg}(2\cos\alpha)$,

$\angle BAD = 2\angle OAD = 2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$.

Ответ: $2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$.

12.293. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) служит равнобедренный треугольник, у которого $AB = AC = a$ и $\angle CAB = \alpha$. Вершина B_1 верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а ребро B_1B составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Проведем из точки B_1 перпендикуляр B_1O на плоскость ABC и перпендикуляры B_1F, B_1K, B_1E — на стороны AB, BC, AC треугольника ABC (рис. 12.155), $\angle B_1BO = \beta$.

OF, OK, OE — проекции B_1F, B_1K, B_1E на плоскость ABC, $OF \perp AB$, $OK \perp BC$, $OE \perp AC$ и, так как $B_1F = B_1K = B_1E$, то $OF = OK = OE \Rightarrow O$ — центр круга, вписанного в ΔABC, и лежит на его высоте, медиане и биссектрисе AK.

$$\angle ABK = \frac{\pi}{2} - \angle BAK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

$$\angle OBK = \frac{1}{2} \angle ABK = \frac{\pi - \alpha}{4}.$$

В $\Delta AKB \left(\angle AKB = \frac{\pi}{2} \right)$: $BK = AB \sin \angle BAK = a \sin \frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta BKO \left(\angle BKO = \frac{\pi}{2} \right)$: $BO = \frac{BK}{\cos \angle OBK} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\pi - \alpha}{4}}$.

В $\Delta B_1OB \left(\angle B_1OB = \frac{\pi}{2} \right)$: $B_1O = BO \operatorname{tg} \angle B_1BO = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\cos \frac{\pi - \alpha}{4}}$.

Площадь основания призмы $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$, а ее объем $V = S \cdot B_1O =$

$$= \frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\pi - \alpha}{4}}.$$

Ответ: $\frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\pi - \alpha}{4}}$.

12.294. Основанием наклонной призмы служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона и меньшее основание равны a, а острый угол равен β. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Пусть трапеция $ABCD$ — нижнее основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.156), $AB = BC = CB = a$, $\angle BAD = \beta$, $0° < \beta < 90°$, вершина B_1 призмы равноудалена от всех вершин трапеции $ABCD$, B_1O — высота призмы, $\angle B_1BO = \alpha$.

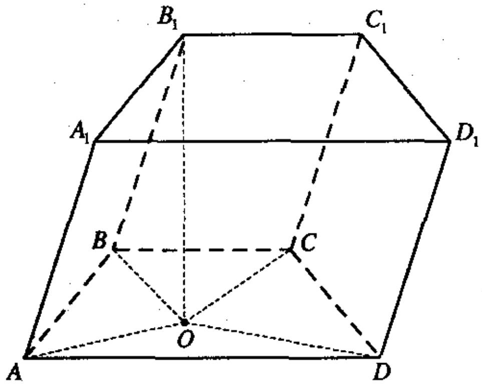


Рис. 12.156

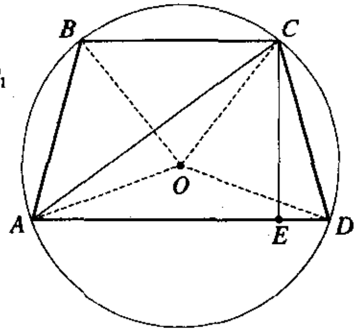


Рис. 12.156,а

OA, OB, OC, OD — проекции соответственно B_1A, B_1B, B_1C, B_1D на плоскость нижнего основания и, так как $B_1A = B_1B = B_1C = B_1D$, то $OA = OB = OC = OD$, и O — центр круга, описанного около трапеции $ABCD$, OB — его радиус.

Так как $AB = BC$, то $\angle BAC = \angle BCA$ (рис. 12.156, а) $BC \parallel AD \Rightarrow$

$$\angle BCA = \angle DAC \Rightarrow \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\beta}{2}.$$

Пусть CE — высота трапеции $ABCD$.

Так как $AB = CD$, то $AE = \dfrac{AD + BC}{2}$.

В $\Delta CED(\angle CED = 90^\circ)$: $CE = CD\sin\angle CDA = a\sin\beta$.

В $\Delta CEA(\angle CEA = 90^\circ)$: $AE = CE\operatorname{ctg}\angle DAC = a\sin\beta\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$.

Площадь основания призмы $S = \dfrac{AD+BC}{2}\cdot CE = AE\cdot CE = a^2\sin^2\beta\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$.

Радиус круга, описанного около ΔABC:

$$OB = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

В ΔB_1OB ($\angle B_1OB = 90^\circ$): $B_1O = BO\operatorname{tg}\angle B_1BO = \dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Объем призмы

$$V = S \cdot B_1O = \frac{a^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{4a^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha}{2\sin^2\frac{\beta}{2}} = 2a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $2a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

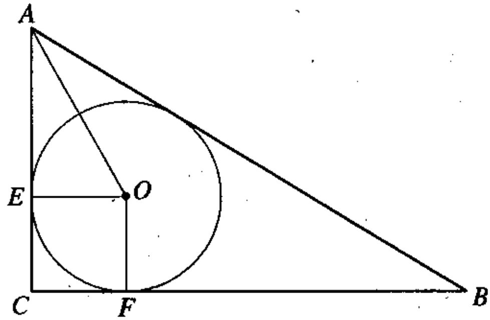


Рис. 12.157

12.295. Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса r, служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть ΔABC — нижнее основание данной прямой призмы, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 12.157), высота призмы $H = 2r$, проекция шара на плоскость ABC — круг, вписанный в ΔABC, радиуса r, O — центр этого круга, E и F — точки касания круга с катетами AC и BC.

Тогда $OE = OF = EC = CF = r, \angle OAE = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}, OE \perp AC$.

В $\Delta AEO\left(\angle AEO = \frac{\pi}{2}\right)$: $AE = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$AC = AE + EC = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

В $\Delta ACB\left(\angle ACB = \frac{\pi}{2}\right)$: $BC = AC \operatorname{tg}\alpha = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

Площадь основания призмы

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha =$$

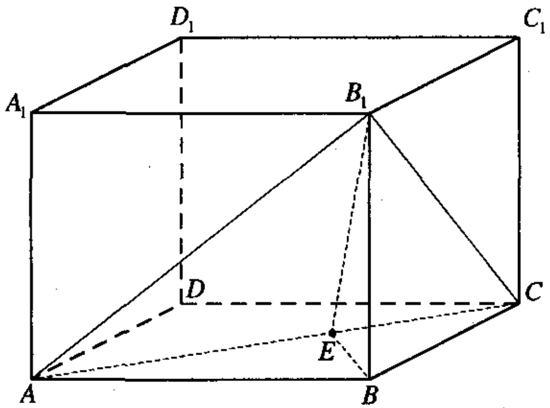


Рис. 12.158

$$=\frac{1}{2}r^2:\frac{1+\sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=r^2\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=r^2\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Объем призмы $V=S\cdot H=2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.296. Диагонали AB_1 и CB_1 двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, равные соответственно α и β. Найти угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания.

Решение.

Проведем в плоскости AB_1C перпендикуляр B_1E на AC (рис. 12.158) $\angle B_1AE=\alpha$, $\angle B_1CE=\beta$.

BE — проекция B_1E на плоскость основания $ABCD$. Тогда $BE\perp AC$ и $\angle B_1EB$ — угол между плоскостью ΔAB_1C и плоскостью основания.

Пусть $B_1E=1$.

В ΔB_1EA ($\angle B_1EA=90°$): $AE=B_1E\operatorname{ctg}\angle B_1AE=\operatorname{ctg}\alpha$.

В ΔB_1EC ($\angle B_1EC = 90°$): $CE = B_1E\text{ctg}\,\angle B_1CE = \text{ctg}\,\beta$.

BE — высота прямоугольного $\Delta ABC \Rightarrow BE = \sqrt{AE \cdot CE} = \sqrt{\text{ctg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\beta}$.

В ΔB_1BE ($\angle B_1BE = 90°$): $\cos\angle B_1EB = \dfrac{BE}{B_1E} = \sqrt{\text{ctg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\beta}$;

$\angle B_1EB = \arccos\sqrt{\text{ctg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\beta}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\text{ctg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\beta}$.

12.297. В правильной треугольной призме сторона основания равна a, угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен α. Найти высоту призмы.

Решение.

Достроим правильную призму $ABCA_1B_1C_1$ до параллелепипеда $ADBCA_1D_1B_1C_1$ (рис. 12.159) $BD_1 \| CA_1$ и угол между скрещивающимися прямыми A_1C и BC_1 равен $\angle C_1BD_1 = \alpha$.

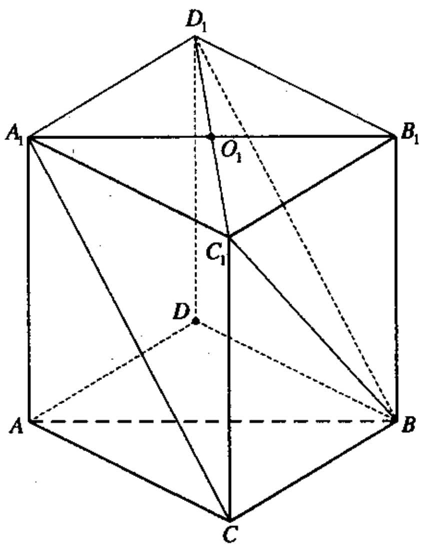


Рис. 12.159

Так как $\Delta A_1B_1C_1$ правильный, то $A_1D_1B_1C_1$ — ромб, C_1O_1 — высота $\Delta A_1B_1C_1$, $C_1O_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, C_1D_1 = a\sqrt{3}$.

Пусть $BC_1 = BD_1 = x$.

В $\Delta C_1BD_1 : C_1D_1^2 = BC_1^2 + BD_1^2 - 2BC_1 \cdot BD_1 \cos\angle C_1BD_1$.

Имеем $3a^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha \Leftrightarrow 4x^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 3a^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3a^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

В $\Delta BB_1C_1\left(\angle BB_1C_1 = \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$BB_1 = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{3}}{2}-\frac{1-\cos\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a}{\sin\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

12.298. В прямоугольном треугольнике через его гипотенузу проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол α, а с одним из катетов — угол β. Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

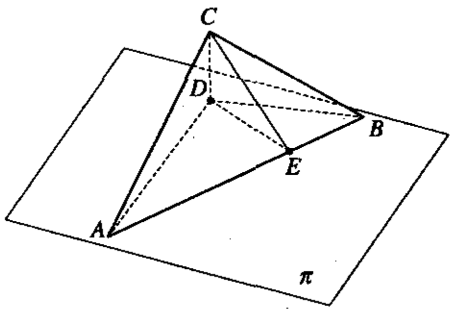


Рис. 12.160

Решение.

Через гипотенузу AB треугольника ABC проведена плоскость π (рис. 12.160).

$CD\perp\pi$. Тогда $\angle CAD$ и $\angle CBD$ — углы между этой плоскостью и катетами треугольника, $\angle CBD=\beta$.

Пусть $\angle CAD=\gamma$, $CD=1$, CE — высота ΔABC, проведенная к его гипотенузе. Тогда ее проекция DE на плоскость π перпендикулярна AB и $\angle CED$ — угол между плоскостями ABC и π, $\angle CED=\alpha$.

В $\Delta ADC\,(\angle ADC=90°)$: $AC=\frac{CD}{\sin\gamma}=\frac{1}{\sin\gamma}$.

В $\Delta BDC\,(\angle BDC=90°)$: $BC=\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\beta}$.

В $\Delta CDE\,(\angle CDE=90°)$: $CE=\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$.

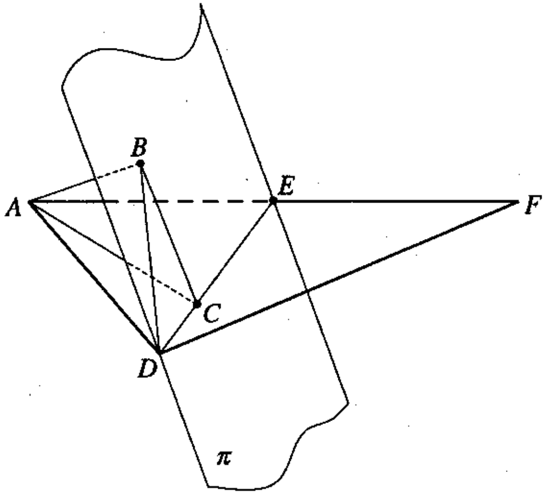


Рис. 12.161

В ΔACB ($\angle ACB = 90°$):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\gamma} + \frac{1}{\sin^2\beta}} = \frac{\sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}}{\sin\gamma\sin\beta}.$$

Площадь треугольника ABC: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\gamma\sin\beta} = \frac{\sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}}{\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} = \sqrt{\frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$\gamma = \arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ответ: $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

12.299. В прямоугольном треугольнике с острым углом α через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол β. Найти углы между этой плоскостью и катетами треугольника.

Решение.

Пусть медиана DE, проведенная к большей стороне треугольника

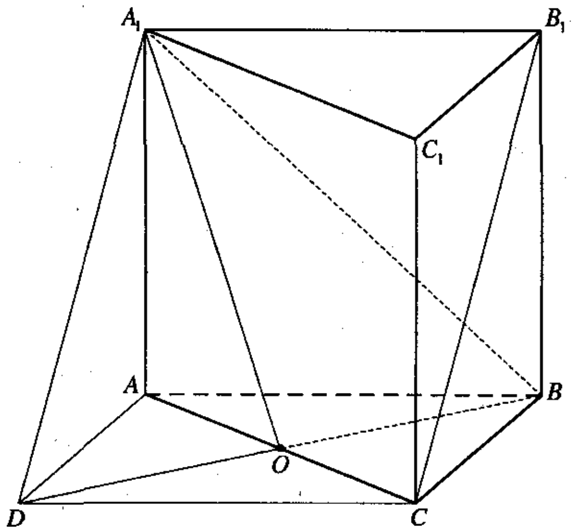


Рис. 12.162

ADF — его гипотенузе AF — меньшая медиана данного треугольника (рис. 12.161), через которую проходит плоскость π, $\angle AFD = \alpha$.

Из точки A проведем перпендикуляры AB и AC на плоскость π и на DE. Тогда BC — проекция AC на плоскость π, DB — проекция DA на плоскость π, $BC \perp DE$, $\angle ACB$ — угол между плоскостями ADF и π, $\angle ACB = \beta$, $\angle ADB$ — угол между катетом AD и плоскостью π.

Пусть $\angle ADB = \gamma$, $AC = 1$.

Так как $DE = EF$, то $\angle CDF = \angle DFE = \alpha \Rightarrow \angle ADE = 90° - \alpha$, $\angle DAC = \alpha$.

В ΔABC ($\angle ABC = 90°$): $AB = AC \sin \angle ACB = \sin\beta$.

В ΔACD ($\angle ACD = 90°$): $AD = \dfrac{AC}{\cos \angle DAC} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

В ΔABD ($\angle ABD = 90°$): $\sin\gamma = \dfrac{AB}{AD} = \sin\beta\cos\alpha, \gamma = \arcsin(\sin\beta\cos\alpha)$.

Чтобы найти угол между плоскостью π и вторым катетом, заменяем угол α на угол $90° - \alpha$, и получаем, что он равен $\arcsin(\sin\beta\sin\alpha)$.

Ответ: $\arcsin(\sin\beta\cos\alpha)$; $\arcsin(\sin\beta\sin\alpha)$.

12.300. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

Решение.

Проведем через вершину A_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ прямую, параллельную диагонали B_1C боковой грани (рис. 12.162), D — точка пересечения этой прямой с плоскостью ABC.

Так как прямая A_1B_1 параллельна плоскости ABC и CD — линия пересечения плоскости ABC и плоскости четырехугольника A_1B_1CD, то $A_1B_1 \parallel CD$ и A_1B_1CD — параллелограмм, а так как $AB \parallel A_1B_1$ и $AB = A_1B_1$, то $AB \parallel CD$, $AB = CD$ и четырехугольник $ABCD$ — ромб.

Точка O пересечения AC и BD их середина, $AO \perp BD$, $A_1O \perp BD \Rightarrow$

$\angle BA_1O = \dfrac{1}{2}\angle BA_1D.$

Угол между скрещивающимися прямыми B_1C и A_1B равен $\angle BA_1D$.

Пусть $AB = BB_1 = x$.

Тогда $A_1B = x\sqrt{2}; OB = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} : \sin\angle BA_1O = \dfrac{OB}{A_1B} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$

$\cos\angle BA_1D = 1 - 2\sin^2\angle BA_1O = 1 - 2\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}.$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

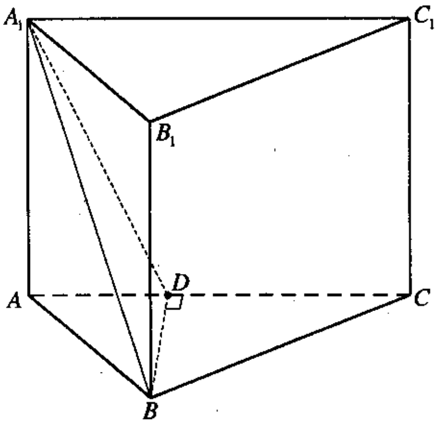


Рис. 12.163

12.301. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α между боковыми сторонами. Диагональ боковой грани, противолежащей данному углу, составляет со смежной боковой гранью угол φ. Найти объем призмы.

Решение.

В ΔABC, являющемся основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.163), $AC = BC = a$, $\angle ACB = \alpha$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$, $AB = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$. В плоскости ABC проведем перпендикуляр BD на AC. Так как плоскости основания и боковой грани прямой призмы перпендикулярны, то BD перпендикулярен боковой грани $AA_1C_1C \Rightarrow A_1D$ — проекция A_1B на плоскость боковой грани AA_1C_1C, $\angle BA_1D$ — угол между A_1B и этой гранью, $\angle BA_1D = \varphi$, $BD \perp A_1D$.

В $\Delta BDC(\angle BDC=90^\circ): BD=BC\sin\angle BCD=a\sin\alpha$.

В $\Delta A_1DB(\angle A_1DB=90^\circ): A_1B=\dfrac{BD}{\sin\angle BA_1D}=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\varphi}$.

В $\Delta A_1AB(\angle A_1AB=90^\circ)$:

$$AA_1=\sqrt{A_1B^2-AB^2}=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\sin^2\varphi}-4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}}=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}.$$

Объем призмы

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.302. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла равны α и β, а площадь равна S. Прямая, проходящая через вершину верхнего основания и центр круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

Решение.

В треугольнике ABC, являющемся основанием прямой призмы $ABCB_1C_1$ (рис. 12.164), $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, точка O — центр описанного круга, $S_{\Delta ABC}=S$.

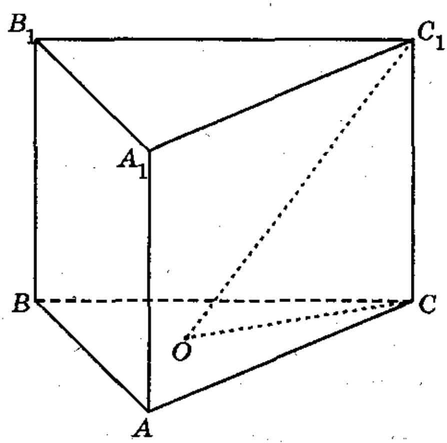


Рис. 12.164

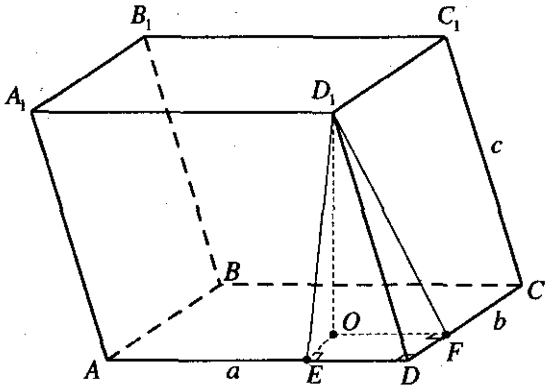


Рис. 12.165

Пусть R — радиус описанного круга.
Тогда $BC = 2\,R\sin\alpha$,
$AC = 2R\sin\beta$,

$$S = \frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\sin(180^\circ - (\alpha+\beta)) =$$
$$= 2R^2\sin\alpha\sin\beta(\alpha+\beta)$$

и $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.

OC — проекция OC_1 на плоскость ABC, $\angle C_1OC = \varphi$.
В ΔC_1CO ($\angle C_1OC = 90^\circ$): $CC_1 = OC\,\mathrm{tg}\,\angle C_1OC = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Объем призмы $V = S_{\Delta ABC}\cdot CC_1 = S\,\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.

Ответ: $S\,\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.

12.303. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти объем призмы, если боковое ребро равно c.

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = a$, $CD = b$, $DD_1 = c$, D_1O — высота призмы (рис. 12.165).

Проведем в гранях AA_1D_1D и CC_1D_1D перпендикуляры D_1E на AD и

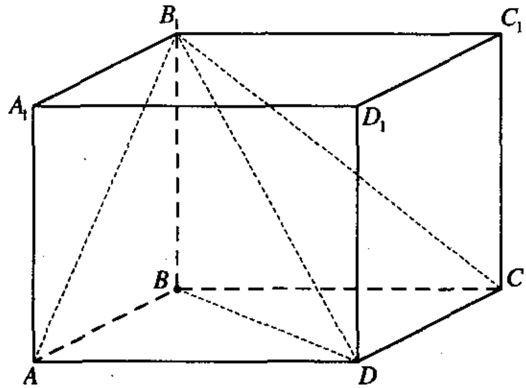


Рис. 12.166

D_1F на CD. Тогда $OE \perp AD$, $OF \perp CD$, $\angle D_1EO$ и $\angle D_1FO$ — углы наклона граней AA_1D_1D и CC_1D_1D к плоскости основания, $\angle D_1EO = \alpha$, $\angle D_1FO = \beta$.

Пусть $D_1O = d$, тогда из

$\Delta D_1OF\ (\angle D_1OF = 90°)$: $D_1F = \dfrac{D_1O}{\sin \angle D_1FO} = \dfrac{d}{\sin\beta}$.

В $\Delta D_1OE\ (\angle D_1OE = 90°)$: $EO + D_1O\operatorname{ctg} \angle D_1EO = d\operatorname{ctg}\alpha$.

$EOFD$ — прямоугольник и $DF = EO = d\operatorname{ctg}\alpha$.

В $\Delta D_1FD\ (\angle D_1FD = 90°)$: $D_1F^2 + DF^2 = DD_1^{\,2} \Rightarrow \dfrac{d^2}{\sin^2\beta} + d^2\operatorname{ctg}^2\alpha = c^2$;

$$d^2\left(\frac{1}{\sin^2\beta} + \operatorname{ctg}^2\alpha\right) = c^2;$$

$$d = \frac{c}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + ctg^2\beta}}.$$

Объем призмы $V = S_{ABCD} \cdot d = \dfrac{abc}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + ctg^2\beta}}$.

Ответ: $\dfrac{abc}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + ctg^2\beta}}$.

12.304. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с двумя смежными гранями углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $B_1D = l$ (рис. 12.166).

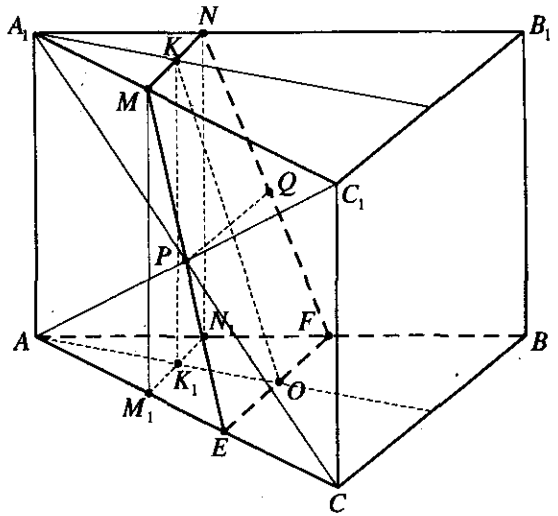


Рис. 12.167

Так как ребра DA и DC перпендикулярны граням AA_1B_1B и CC_1B_1B, то AB_1 и B_1C — проекции B_1D на эти грани, $\angle AB_1D = \alpha$, $\angle CB_lD = \beta$.

В ΔB_1AD ($\angle B_1AD = 90°$): $AD = B_1D \sin \angle AB_1D = l \sin \alpha$.

В ΔB_1CD ($\angle B_1CD = 90°$): $CD = B_1D \sin \angle CB_1D = l \sin \beta$.

В прямоугольнике $ABCD$: $BD^2 = AD^2 + CD^2 = l^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$.

В ΔB_1BD ($\angle B_1BD = 90°$):

$$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = l\sqrt{1-\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta\right)} = l\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$$

$$= l\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} = l\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} = l\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = AD \cdot CD \cdot BB_1 =$

$= l^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

Ответ: $l^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

12.305. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрии двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна a.

Решение.

Пусть O — центр основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, точки P и Q пересечения диагоналей граней AA_1C_1C и AA_1B_1B — их центры симметрий (рис. 12.167). Секущая плоскость, проходящая через точки O, P и Q, пересекает параллельные грани ABC и $A_1B_1C_1$ по отрезкам EF и MN соответственно, K — середина MN.

Проведем перпендикуляры MM_1, NN_1, KK_1 к плоскости ABC. Трапеция EM_1N_1F — проекция трапеции $EMNF$ на плоскость основания.

Так как O — центр ΔABC, то $EC = \frac{1}{3}AC = \frac{a}{3}, EF = \frac{2a}{3}$.

$\Delta A_1MP = \Delta CEP$. Тогда $AM_1 = A_1M = EC = \frac{a}{3}, M_1N_1 = \frac{a}{3}$.

$K_1O = AK_1 = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$S_{EM_1N_1F} = \frac{EF + M_1N_1}{2} \cdot K_1O = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Тогда $S_{EMNF} = \frac{S_{EM_1N_1F}}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.

12.306. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) стороны основания AB и BC равны соответственно a и b, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания острый угол β. Найти площадь сечения.

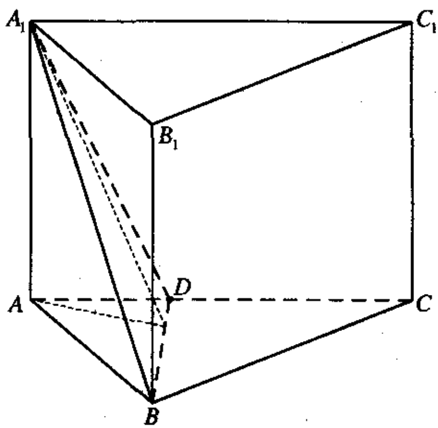


Рис. 12.168

Решение.

Пусть BD — биссектриса ΔABC, ΔA_1BD — сечение данной призмы (рис. 12.168) $\frac{AC}{AD} =$

$= \frac{AD + DC}{AD} = 1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}$.

Так как ΔABD и ΔABC имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины B, то $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{a+b}$. Тогда $S_{\Delta ABD} = \frac{a}{a+b} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{a+b} \times$ $\times \frac{1}{2} ab \sin\alpha = \frac{a^2 b \sin\alpha}{2(a+b)}$, ΔABD — проекция ΔA_1BD на плоскость основания призмы, т.е. $S_{\Delta A_1BD} = \frac{S_{\Delta ABD}}{\cos\beta} = \frac{a^2 b \sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

Ответ: $\frac{a^2 b \sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

12.307. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α между равными сторонами AB и AC. Отрезок прямой, соединяющий вершину A_1 верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

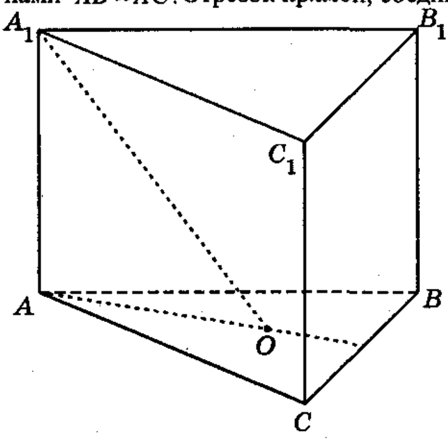


Рис. 12.169

Решение.

Пусть O — центр круга, описанного около основания ABC данной прямой призмы (рис. 12.169). Тогда AO — проекция A_1O на плоскость ABC и $\angle AOA_1 = \beta$.

Если радиус описанного круга $OA = R$, то из ΔA_1AO $AO = A_1O \cos\angle AOA_1 = l\cos\beta$, $AA_1 = A_1O \sin\angle AOA_1 = l\sin\beta$.

В ΔABC $\angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

$$AC = 2R\sin\angle ABC = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2l\cos\beta\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC^2 \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4l^2 \cos^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha =$$

$$= 2l^2\cos^2\beta \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

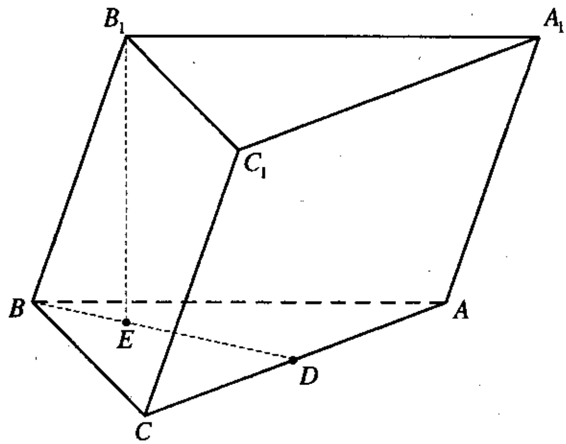


Рис. 12.170

Объем призмы $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 2l^3 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta =$

$= l^3 \sin 2\beta \cos\beta \sin\alpha \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ: $l^3 \sin 2\beta \cos\beta \sin\alpha \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

12.308. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы, каждый из которых равен α. Найти объем призмы и допустимые значения α.

Решение.

Пусть правильный треугольник ABC — основание призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.170); $AB = a$, $BB_1 = b$, B_1E — высота призмы.

Так как $\angle B_1BC = \angle B_1BA = \alpha$, то точка E лежит на биссектрисе BD угла ABC.

$\angle B_1BE$ — угол наклона BB_1 к плоскости основания, $\angle B_1BC$ — угол между BB_1 и прямой BC этой плоскости, $\angle EBC$ — угол между прямой BC и проекцией прямой BB_1 на плоскость основания.

Тогда $\cos\angle B_1BC = \cos\angle B_1BE \cdot \cos\angle EBC$;

$$\cos\angle B_1BE = \frac{\cos\angle B_1BC}{\cos\angle EBC} = \frac{\cos\alpha}{\cos 30^\circ} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$

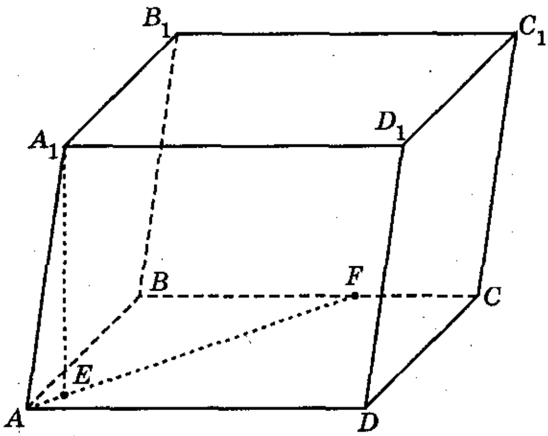


Рис. 12.171

$$\sin\angle B_1BE=\sqrt{1-\cos^2\angle B_1BE}=\sqrt{1-\frac{4\cos^2\alpha}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4}-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos^2 30^\circ-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}.$$

В $\Delta B_1EB(\angle B_1EB=90^\circ)$:

$$B_1E=BB_1\sin\angle B_1BE=\frac{2b}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}.$$

Объем призмы $V=S_{\Delta ABC}\cdot B_1E=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2b}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}=$

$=\frac{a^2b}{2}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}$, где $\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos 60^\circ-\cos 2\alpha>0\Leftrightarrow\cos 2\alpha<0{,}5\Leftrightarrow 60^\circ<2\alpha<300^\circ$, т.е.

$30^\circ<\alpha<150^\circ$.

Ответ: $\frac{a^2b}{2}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}, 30^\circ<\alpha<150^\circ$.

12.309. Основанием призмы служит прямоугольник. Боковое ребро составляет равные углы со сторонами основания и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол между боковым ребром и стороной основания.

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — основание призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, A_1E — высота призмы (12. 171). Тогда $\angle A_1AE$ — угол наклона ребра

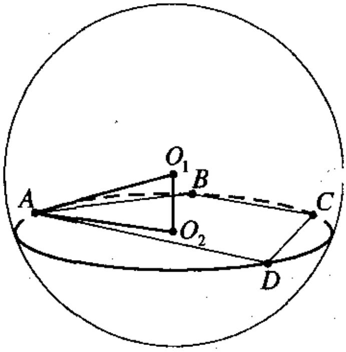


Рис. 12.172

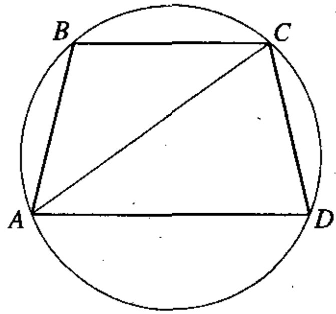


Рис. 12.172,а

AA_1 к плоскоти основания, $\angle A_1AE=\alpha$. Так как $\angle A_1AD=\angle A_1AB$, точка E лежит на биссектрисе AF угла BAD.

Тогда $\cos\angle A_1AD=\cos\angle A_1AE\cdot\cos\angle EAD=\cos\alpha\cos45°$, $\angle A_1AD=$ $\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$.

12.310. На шаровой поверхности радиуса R лежат все вершины равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а острый угол равен α. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

Решение.

Пусть данная равнобедренная трапеция $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AD = R$, $AB=$ $=BC=CD$, $\angle BAD=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, вписана в сечение данного шара, O_1 — центр шара, O_2 — центр сечения (рис. 12.172). Тогда O_1O_2 — искомое расстояние от центра шара до плоскости трапеции.

$\angle BAC=\angle BCA$, так как $AB=BC$ (рис. 12.172, а), $\angle BCA=\angle CAD$, так как $BC \parallel AD$. $\angle CAD=\angle BAC=\frac{\alpha}{2}$, $\angle ACD=\pi-(\angle CAD+\angle ADC)=\pi-\frac{3\alpha}{2}$.

Радиус круга, описанного около ΔACD:

$$r=\frac{AD}{2\sin\angle ACD}=\frac{R}{2\sin\left(\pi-\frac{3\alpha}{2}\right)}=\frac{R}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

В $\Delta O_1O_2A\left(\angle O_1O_2A=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$O_1O_2=\sqrt{O_1A^2-O_2A^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4\sin^2\frac{3\alpha}{2}}}=\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{3\alpha}{2}-\sin^2\frac{\pi}{6}}=\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos3\alpha}{2}-\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{2}}=$$

$$=\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos3\alpha\right)}=\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ответ: $\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}.$

12.311. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

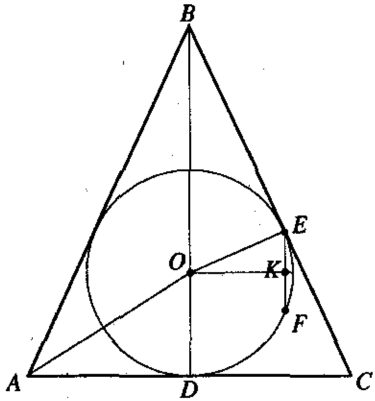


Рис. 12.173

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.173): ΔABC — осевое сечение конуса, BD — его высота, $BD=H$, $\angle BAD=\alpha$, O — центр шара, вписанного в конус, E — точка касания шара и образующей BC конуса, EF — диаметр сечения искомой площади.

Проведем перпендикуляр OK на EF. Тогда EK — радиус сечения искомой площади.

В ΔADB ($\angle ADB=90°$): $AD=BD\operatorname{ctg}\angle BAD=\frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}$.

В ΔADO ($\angle ADO=90°$):

$$OD=AD\operatorname{tg}\angle OAD=\frac{H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$= \frac{H\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)}{2} = \frac{H\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{H\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$\angle BOE = \angle BCD = \alpha.$

$\angle EOK = 90^\circ - \angle BOE = 90^\circ - \alpha.$

$$OE = OD = \frac{H\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$\Delta OKE\,(\angle OKE = 90^\circ)$:

$$EK = OE\sin\angle EOK = \frac{H\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin(90^\circ-\alpha) = \frac{H\cos^2\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Площадь сечения $S = \pi\cdot EK^2 = \dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

12.312. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Площадь сечения равна боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Найти расстояние от секущей плоскости до основания пирамиды.

Решение.

Пусть DO — высота правильной пирамиды $DABC$ (рис. 12.174), $A_1B_1C_1$ — сечение пирамиды, E — середина AB, E_1 — середина A_1B_1, O_1 — центр $A_1B_1C_1$.

Тогда EE_1 — апофема правильной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, OO_1 — расстояние между параллельными плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$; $\angle E_1EO = \alpha$.

Пусть $A_1B_1 = b$, $EE_1 = d$.

Проведем перпендикуляр E_1F к плоскости ABC.

Тогда точка F находится на OE, $E_1F = OO_1$, $EF = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$, $d = EE_1$

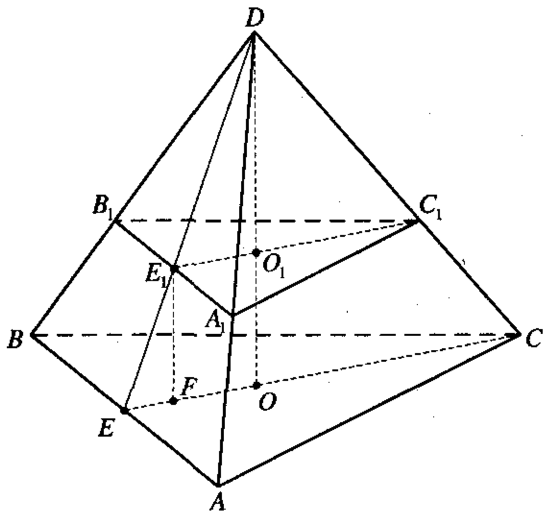


Рис. 12.174

$=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$. Боковая поверхность усеченной пирамиды $S=3\cdot\frac{a+b}{2}d=$ $=3\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6\cos\alpha}=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

Так как $S=S_{\Delta A_1B_1C_1}$, то $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow a^2-b^2=b^2\cos\alpha\Rightarrow$

$$\Rightarrow b=\frac{a}{\sqrt{1+\cos\alpha}}=\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow E_1F=EF\operatorname{tg}\angle E_1EF=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{6\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{6\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{3\cos\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{3\cos\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$.

12.313. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Полная поверхность этого конуса делится пополам плоскостью, перпендикулярной его высоте. Найти расстояние от этой плоскости до основания конуса.

Решение.

Пусть R — радиус основания данного конуса, L — его образующая, r, l, h — соответственно радиус основания, образующая и высота отсеченного конуса.

Тогда $R = H\operatorname{ctg} a$, $L = \dfrac{H}{\sin\alpha}$, $r = h\operatorname{ctg}\alpha$, $l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, полная поверхность конуса $S = \pi R(R+L) = \pi\cdot H\operatorname{ctg}\alpha\left(H\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{H}{\sin\alpha}\right) = \dfrac{\pi H^2\cos\alpha(\cos\alpha+1)}{\sin^2\alpha}$,

боковая поверхность отсеченного конуса $S_1 = \pi rl = \dfrac{\pi h^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\pi h^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Так как по условию $S = 2S_1$, то $H^2(\cos\alpha+1) = 2h^2$;

$$h^2 = H^2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} = H^2\cos^2\frac{\alpha}{2};\ h = H\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Расстояние от секущей плоскости до основания конуса $x = H - h =$

$$= H\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2H\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $2H\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

12.314. Найти угол между апофемой правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, если разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.175), SD — ее апофема — высота грани BSC, $\angle SDO = \beta$. Тогда $\angle SCO = \beta - \alpha$.

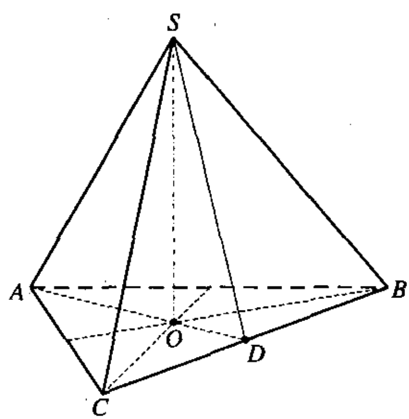


Рис. 12.175

Если $OD = a$, то из $\Delta SOD(\angle SOD = 90°)$: $SO = OD\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{tg}\beta$.
В $\Delta SOC(\angle SOC = 90°)$: $SO = OC\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = 2a\operatorname{tg}(\beta-\alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$;

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{tg}\alpha = 0;$$

$$tg^2\beta - \operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha + 2 = 0;$$

$$tg\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 8}}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 8}}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 8}}{2}$.

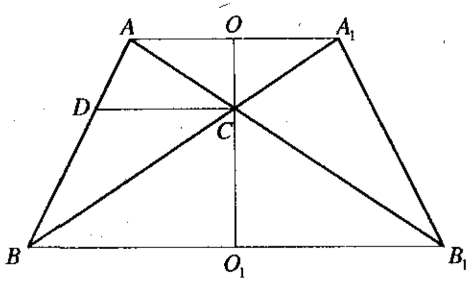


Рис. 12.176

12.315. Катет прямоугольного треугольника равен a, противолежащий ему угол равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение полученного тела вращения (рис. 12.176). Его объем V равен разности объема V_1 усеченного конуса с осевым сечением BAA_1B_1 и суммы объемов V_2 и V_3 конусов с осевыми сечениями ACA_1 и BCB_1 соответственно.

Пусть CD — биссектриса $\angle ACB = \alpha$ данного треугольника BAC. O — центр основания конуса с сечением ACA_1, O_1 — центр основания конуса с сечением BCB_1, $OC = h$, $O_1C = H$, $OA = r$, $O_1B = R$.

$$\angle OAC = \angle O_1BC = \frac{\alpha}{2}.$$

В $\Delta BAC(\angle BAC = 90°)$: $AC = a\operatorname{ctg}\alpha; BC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

В $\Delta AOC(\angle AOC = 90°)$:

$$r = AC\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha};\ h = AC\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$

В $\Delta BO_1C(\angle BO_1C = 90^\circ)$:

$$R = BC\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha};\ H = BC\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$

$$V = V_1 - (V_2 + V_3) = \frac{\pi}{3}(H+h)\left(R^2 + Rr + r^2\right) - \frac{\pi}{3}HR^2 - \frac{\pi}{3}hr^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(HR^2 + HRr + Hr^2 + hR^2 + hRr + hr^2 - HR^2 - hr^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(HRr + Hr^2 + hR^2 + hRr\right) = \frac{\pi}{3}\left(Hr(R+r) + hR(R+r)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}(R+r)(Hr+hR) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} + \frac{a\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot\frac{a\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} + \frac{a\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\right) = \frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}\times$$

$$\times\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{2\cos^3\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$

12.316. Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно k. Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k.

Решение.

Пусть R — радиус данного шара, α — угол в основании данного параллелепипеда. Тогда высота параллелепипеда $H = 2R$, объем шара $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Проекция данного шара на плоскость основания параллелепипе-

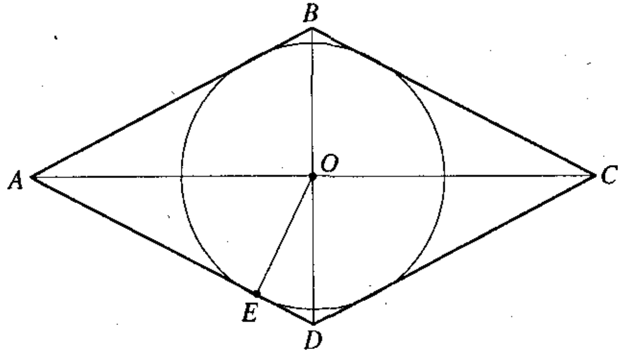


Рис. 12.177

да — круг радиуса R, вписанный в основание, поэтому основание является ромбом (рис. 12.177).

Тогда $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$, а из $\Delta AEO\left(\angle AEO = \frac{\pi}{2}, OE = R\right) AO = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, из $\Delta DEO\left(\angle DEO = \frac{\pi}{2}, \angle DOE = \angle OAD = \frac{\alpha}{2}\right) DO = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Площадь основания параллелепипеда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2 \cdot AO \cdot DO =$

$= \frac{2R^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R^2}{\sin\alpha}$, а его объем $V_2 = S \cdot H = \frac{8R^2}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{8R}{\sin\alpha} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} =$
$= \frac{6}{\pi\sin\alpha} = k; \sin\alpha = \frac{6}{\pi k}$.

Таким образом, один из углов основания равен $\arcsin\frac{6}{\pi k}$, а второй $\pi - \arcsin\frac{6}{\pi k}$.

Так как $0 < \sin\alpha \le 1$, то $0 < \frac{6}{\pi k} \le 1, k \ge \frac{6}{\pi}$.

Ответ: $\arcsin\frac{6}{\pi k}; \pi - \arcsin\frac{6}{\pi k}; k \ge \frac{6}{\pi}$.

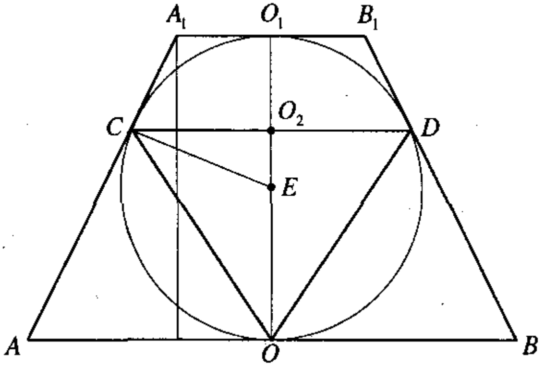


Рис. 12.178

12.317. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна a, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.178): равнобокую трапецию AA_1B_1B ($AA_1 = a$, $\angle A_1AB = \alpha$), вписанный в нее круг с центром E, касающийся AA_1, BB_1, AB и A_1B_1 соответственно в точках C, D, O и O_1, ΔCOD — осевое сечение конуса искомого объема.

Середина O_2 отрезка CD — центр основания конуса искомого объема V. Тогда $V = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2C^2 \cdot OO_2$.

Пусть радиус шара равен R: $EO = EC = R$.

В четырехугольнике $ACEO$ $\angle CAO = \alpha$, $\angle ACE = \angle AOE = 90° \Rightarrow \angle CEO = 180° - \alpha$ и $\angle CEO_2 = \alpha$.

В $\Delta CO_2E(\angle CO_2E = 90°)$: $CO_2 = R\sin\alpha$; $EO_2 = R\cos\alpha$.

$$OO_2 = OE + EO_2 = R + R\cos\alpha = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2\sin^2\alpha \cdot 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

A_1K — высота трапеции AA_1B_1B. Тогда $A_1K = 2R$.

Из ΔAKA_1 ($\angle AKA_1 = 90°$): $A_1K = AA_1\sin\angle A = a\sin\alpha \Rightarrow R = \frac{1}{2}a\sin\alpha$ и

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{8}a^3\sin^3\alpha \cdot \sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

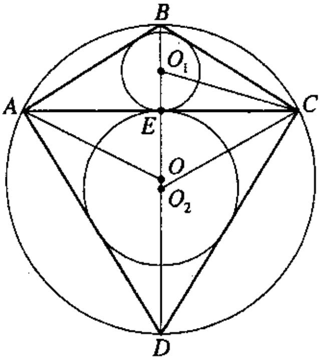


Рис. 12.179

12.318. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную $\alpha°$. Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

Решение.

Данная совокупность тел имеет ось симметрии, рассмотрим ее осевое сечение (рис. 12.179): O — центр данного шара, ΔABC — осевое сечение меньшего конуса, ΔADC — осевое сечение большего конуса, E — центр их общего основания, O_1 и O_2 — центры вписанных в них шаров, $\angle AOC = \alpha°$.

Из ΔAEO $(\angle AEO = 90°)$: $AE = OA\sin\angle AOE = R\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

$\angle BCA$ — вписанный и опирается на дугу, равную $\dfrac{\alpha}{2}$. Таким образом, $\angle BCA = \dfrac{\alpha}{4}, \angle O_1CE = \dfrac{1}{2}\angle BCA = \dfrac{\alpha}{8}$.

В ΔO_1EC $(\angle O_1EC = 90°)$: $O_1E = EC\operatorname{tg}\angle O_1CE = R\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{8}$.

$\angle BCD$ — вписанный и опирается на диаметр.

Отсюда $\angle BCD = 90°, \angle ECD = \angle BCD - \angle BCA = 90° - \dfrac{\alpha}{4}, \angle ECO_2 = = \dfrac{1}{2}\angle ECD = 45° - \dfrac{\alpha}{8}$.

Из ΔO_2EC $(\angle O_2EC = 90°)$:

$$O_2E = EC\operatorname{tg}\angle ECO_2 = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{8}\right).$$

Искомое расстояние:

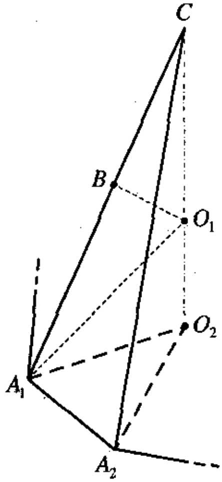


Рис. 12.180

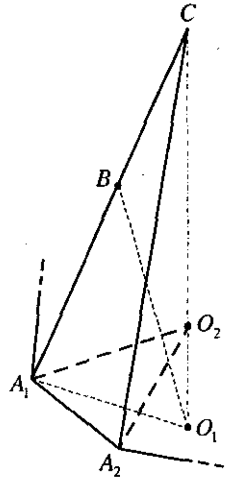


Рис. 12.180,а

$$O_1O_2 = O_1E + O_2E = R\sin\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8} + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{8}\right)\right) = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}\sin 45^\circ}{\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{8}\right)} =$$

$$= \frac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{8}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{8}\right)}$.

12.319. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему описанного шара, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен α.

Решение.

Пусть CO_2 — высота правильной n-угольной пирамиды, A_1A_2 — сторона ее основания. Тогда $\angle CA_1O_2 = \alpha, \angle AO_1B = \dfrac{2\pi}{n}$.

Центр O_1 описанного шара — точка пересечения отрезка CO_1 (рис. 12.180) или его продолжения за точку O_1 (рис. 12.180,а) и серединного перпендикуляра O_1B бокового ребра A_1C пирамиды.

ΔA_1O_2C и ΔO_1BC — прямоугольные с общим острым углом при вершине C. Тогда $\angle BO_1C = \angle CA_1O_2 = \alpha$.

Если радиус шара $O_1C = R$, то из $\Delta CBO_1\left(\angle CBO_1 = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $CB =$

$= CO_1 \sin\angle BO_1C = R\sin\alpha$.

$A_1C = 2CB = 2R\sin\alpha$.

В $\Delta A_1O_2C\left(\angle A_1O_2C = \dfrac{\pi}{2}\right)$: $CO_2 = AC\sin\angle CA_1O_2 = 2R\sin^2\alpha$;

$A_1O_2 = A_1C\cos\angle CA_1O_2 = 2R\sin\alpha\cos\alpha = R\sin 2\alpha$.

Площадь основания пирамиды:

$$S = nS_{\Delta A_1O_2A_2} = \frac{n}{2}A_1O_2^2\sin\angle A_1O_2A_2 = \frac{n}{2}R^2\sin^2 2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Объем пирамиды $V_1 = \dfrac{1}{3}S\cdot CO_2 = \dfrac{1}{3}nR^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha\sin\dfrac{2\pi}{n}$, объем шара $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ и $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{n\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4\pi}$.

Ответ: $\dfrac{n\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4\pi}$.

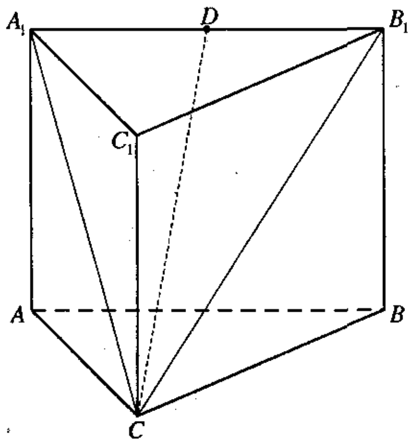


Рис. 12.181

12.320. Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и не пересекающей ее стороной основания призмы.

Решение.

Угол между боковой диагональю B_1C боковой грани правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.181) и стороной AB основания равен углу между B_1C и A_1B_1.

Если длина ребра призмы равна 1, то диагональ квадрата $B_1C = \sqrt{2}$.

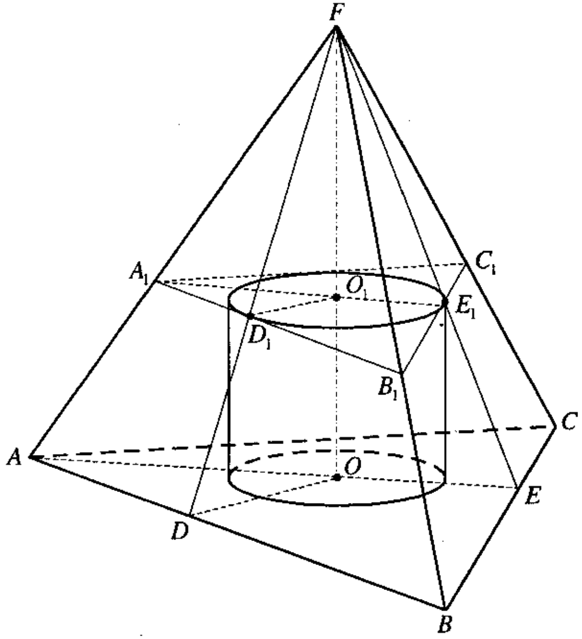


Рис. 12.182

Пусть D — середина A_1B_1. Тогда CD — высота и медиана равнобедренного ΔA_1CB_1.

В ΔCDB_1 ($\angle CDB_1 = 90°$):

$$\cos\angle A_1B_1C = \frac{B_1D}{B_1C} = \frac{1}{2} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle A_1B_1C = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

12.321. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением (основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды). Найти объем цилиндра.

Решение.

Пусть FO — высота данной правильной пирамиды $FABC$, $\Delta A_1B_1C_1$ — сечение пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра (рис. 12.182).

Тогда $\angle FA_1O_1 = \angle FAO = \alpha$, $FO = FA\sin\angle FAO = a\sin\alpha$, $\Delta A_1B_1C_1$ — правильный.

Если радиус основания цилиндра равен r, то высота цилиндра $OO_1 = 2r$, $A_1O_1 = 2r$, $FO_1 = A_1O_1 \operatorname{tg} \angle FA_1O_1 = 2r\operatorname{tg}\alpha$. $FO = FO_1 + OO_1$; $a\sin\alpha = 2r\operatorname{tg}\alpha + 2r$;

$$r = \frac{a\sin\alpha}{2(\operatorname{tg}\alpha+1)} = \frac{a\sin\alpha}{2\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a\sin\alpha\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{2}\sin 2\alpha}{8\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot OO_1 = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{2}a^3\sin^3 2\alpha}{8^3\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

12.322. В треугольнике ABC угол A равен α, угол C равен β и биссектриса BD равна l. Треугольник ABD вращается вокруг прямой BD. Найти объем тела вращения.

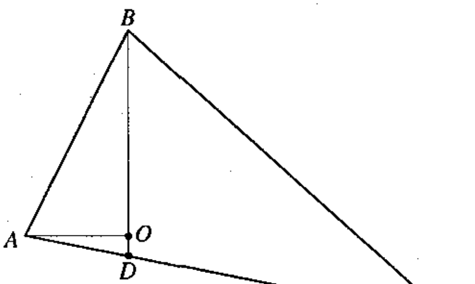


Рис. 12.183

Решение.

При вращении треугольника ABD (рис. 12.183) образуется два конуса с общим основанием радиуса OA ($OA \perp BD$), BO — высота конуса объема V_1, DO — высота конуса объема V_2. Искомый объем тела вращения $V = V_1 + V_2 =$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot BO + \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot DO = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2(BO+DO) = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot BD.$$

В ΔABC: $\angle ABC = 180° - (\alpha+\beta) \Rightarrow \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

В ΔABD:

$$\angle ADB = 180° - (\angle BAD + \angle ABD) = 180° - \left(\alpha + 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

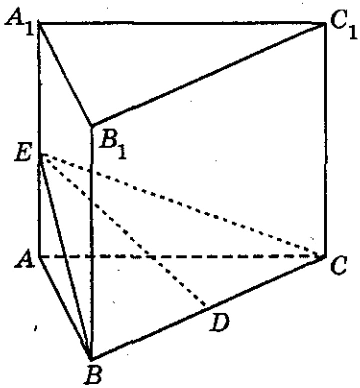


Рис. 12.184

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}\Rightarrow AB=\frac{l\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

В $\Delta AOB(\angle AOB=90°)$:

$$AO=AB\sin\angle ABD=\frac{l\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}\cdot\sin\left(90°-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{l\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot BD=\frac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$.

12.323. Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен V. Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен α.

Решение.

Пусть ΔBEC — сечение правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.184),

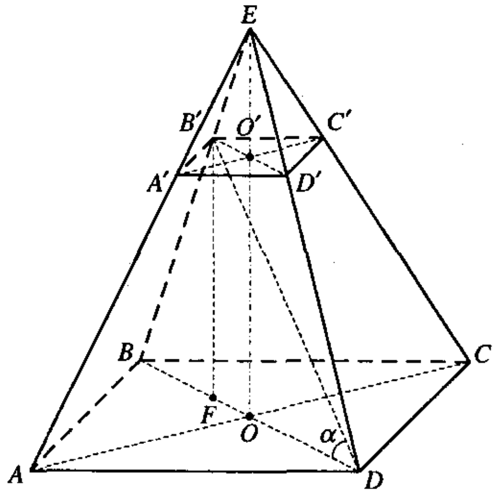


Рис. 12.185

D — середина BC. Тогда $\angle EDA = \alpha$, EA — высота пирамиды $EABC$.

$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EA = \frac{1}{3}S_{\Delta BEC}\cdot\cos\alpha\cdot EA.$

Если $EA = h$, $AB = a$, то $S_{\Delta BEC} = \frac{3V}{h\cos\alpha}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{3V}{h} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

В ΔEAD ($\angle EAD = 90°$): $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $a = \frac{2h\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3V}{h} = \frac{4h^2\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\alpha = 9V \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}V\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta BEC} = \frac{3V}{h\cos\alpha} = \frac{3V}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}V\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\cos\alpha} = \sqrt[3]{\frac{27V^3}{3\sqrt{3}V\operatorname{tg}^2\alpha\cos^3\alpha}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}.$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}.$

12.324. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, параллельное основанию. Прямая, проходящая через вершину основания и противолежащую (т.е. не принадлежащую той же грани) вершину сечения, составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно диагонали основания и равно a.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$, квадрат $A'B'C'D'$ — сечение пирамиды, $\angle BDB' = \alpha$ (рис. 12.185).

Так как $BE = DE = BD$, то $\angle EBD = \frac{\pi}{3}, \angle BB'D = \frac{2\pi}{3} - \alpha.$

В $\Delta BB'D$: $\frac{DB'}{\sin \angle EBD} = \frac{BD}{\sin \angle BB'D} \Rightarrow DB' = \frac{a \sin \frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$

Если $B'F$ — высота равнобокой трапеции $BB'D'D$, то из

$$\Delta B'FD\left(\angle B'FD = \frac{\pi}{2}\right): FD = B'D \cos \angle BDB' = \frac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

Так как $FD = \frac{BD + B'D'}{2}$, то

$$B'D' = 2FD - BD = \frac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} - a = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

Площадь сечения $S = \frac{1}{2}B'D'^2 = \frac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$

Ответ: $\frac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$

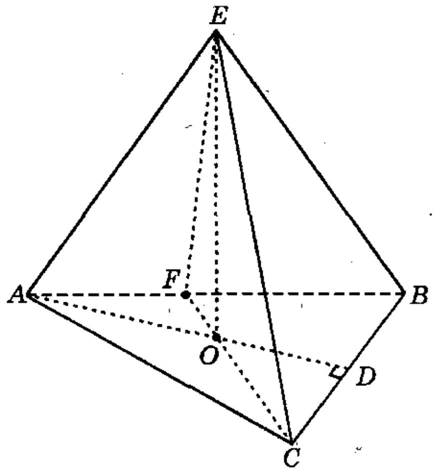


Рис. 12.186

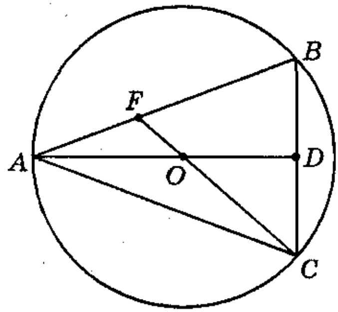


Рис. 12.186, а

12.325. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину данного угла α и высоту пирамиды.

Решение.

Пусть EO — высота пирамиды $EABC, AC = AB = b, \angle ACB = \alpha$ (рис. 12.186). Так как все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка O — центр окружности, описанной около ΔABC, и так как ΔABC — равнобедренный и остроугольный, то точка O лежит на его высоте и биссектрисе AD (рис. 12.186, а).

Если ΔCEF — сечение пирамиды, то $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EO$.

В $\Delta ABC: \angle BAC = 180° - 2\alpha$, $\angle OAC = 90° - \alpha$.

$OA = OC = R$ — радиус окружности, описанной около ΔABC.

Тогда $\angle ACO = \angle OAC = 90° - \alpha, \angle AFC = 180° - (\angle BAC + \angle ACO) =$ $= 180° - (180° - 2\alpha + 90° - \alpha) = 3\alpha - 90°$.

В $\Delta AFC: \dfrac{FC}{\sin\angle FAC} = \dfrac{AC}{\sin\angle AFC}; FC = \dfrac{b\sin(180° - 2\alpha)}{\sin(3\alpha - 90°)} = -\dfrac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}$.

В $\Delta ABC: OA = R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC} = \dfrac{b}{2\sin\alpha}$.

В $\Delta AOE (\angle AOE = 90°)$:

$$EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EO = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}\right) \cdot \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} = -\frac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}.$$

Ответ: $-\frac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}$.

12.326. Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Длина каждого отрезка ломаной равна a. Эта линия вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

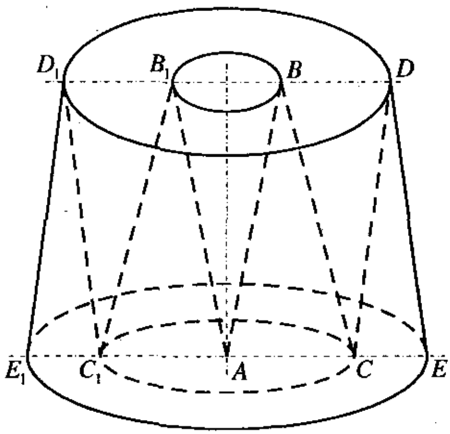


Рис. 12.187

Решение.

Первый отрезок, имеющий с осью вращения общую точку, описывает боковую поверхность полного конуса S_1, а все остальные — боковые поверхности усеченных конусов S_2, S_3... S_n (рис. 12.187).

Пусть r — радиус основания первого конуса. Тогда первый усеченный конус имеет радиусы оснований r и $2r$, второй — $2r$ и $3r$, третий — $3r$ и $4r$ и т.д.

Таким образом

$$S_1 = \pi ra,$$

$$S_2 = \pi(r + 2r)a = 3\pi ra,$$

$$S_3 = \pi(2r + 3r)a = 5\pi ra,$$

....

$$S_n = (2n - 1)\pi ra.$$

Поверхность тела вращения $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \pi ra(1 + 3 + 5 + {}$

$+ \ldots + 2n - 1) = \pi ra \cdot \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \pi ran^2.$

Так как $r = a\sin\frac{\alpha}{2}$, то $S = \pi a^2 n^2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\pi a^2 n^2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

12.327. Два конуса имеют общую высоту; их вершины лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна l и составляет с высотой угол α. Образующая другого конуса составляет с высотой угол β. Найти объем общей части обоих конусов.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности конусов (рис. 12.188): ΔABC — осевое сечение конуса с образующей l, ΔMLK — осевое сечение второго конуса, BL — их общая высота, $\angle ABL = \alpha$, $\angle MLB = \beta$.

Общая часть этих конусов — два конуса с общим основанием, ΔEBF и ΔELF — их осевое сечение, O — центр их общего основания, r — радиус этого основания.

Пусть $BO = h_1$, $LO = h_2$, $BL = H$.

Тогда искомый объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

В ΔEOB ($\angle EOB = 90°$): $h_1 = r\operatorname{ctg}\alpha$.

В ΔEOL ($\angle EOL = 90°$): $h_2 = r\operatorname{ctg}\beta$.

Тогда $H = h_1 + h_2 = r(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \Rightarrow r = \frac{H\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

В ΔALB ($\angle ALB = 90°$): $H = l\cos\alpha$. Таким образом

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{\pi H^3 \sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\pi l^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\pi l^3 \sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $\frac{\pi l^3 \sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.328. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противолежащая ему сторона треугольника равна a.

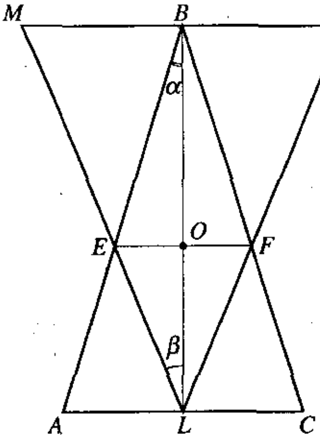


Рис. 12.188

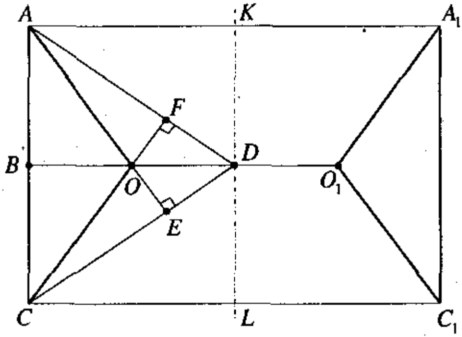


Рис. 12.189

Решение.

В ΔAOC (рис. 12.189) $OA = OC$, $\angle AOC = \alpha$, $90° < \alpha < 180°$, $AC = a$, D — точка пересечения его высот, прямая KL — ось вращения, OB, CF, AE — высоты ΔAOC.

Искомый объем V тела вращения равен разности объема V_1 цилиндра, осевое сечение которого — прямоугольник CAA_1C_1, и удвоенного объема V_2 усеченного конуса, осевое сечение которого — равнобокая трапеция AOO_1A_1.

Высота цилиндра $H = a$, высота усеченного конуса $h = \frac{a}{2}$. Радиус основания цилиндра и большего основания усеченного конуса $R = DB$, радиус меньшего основания усеченного конуса $r = DO$.

В четырехугольнике $EOFD$ $\angle OFD = \angle OED = 90°$, $\angle FOE = \angle AOC = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADC = 180° - \alpha,\ \angle ADB = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

В ΔABO ($\angle ABO = 90°$): $OB = AB \operatorname{ctg} \angle AOB = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

В ΔABD ($\angle ABD = 90°$):

$$R = DB = AB \operatorname{ctg} \angle ADB = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$r = DO = DB - OB = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = -a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда

$$V=V_1-2V_2=\pi R^2H-\frac{2}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)=\pi R^2a-\frac{1}{3}\pi\alpha\left(R^2+Rr+r^2\right)=$$

$$=\frac{\pi a}{3}\left(3R^2-R^2-Rr-r^2\right)=\frac{\pi a}{3}\left(2R^2-Rr-r^2\right)=$$

$$=\frac{\pi a}{3}\left(2\cdot\frac{a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}+\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\frac{a}{2}-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha\right)=\frac{\pi a^3}{6}\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-2\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=\frac{\pi a^3}{6}\left(\frac{1-\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^3}{6}\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\pi a^3}{6}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\pi a^3}{6}\cdot\frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)^2}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^3}{6}\cdot\frac{3\cos^2\frac{\alpha}{2}-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\pi a^3\left(3-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3\left(3-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.329. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противолежащую основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

Решение.

В ΔBAC $BA=AC=a$, $\angle ACB=\alpha$, CD — биссектриса $\angle ACB$. Рассмотрим осевое сечение полученного тела вращения (рис. 12.190). Его поверхность S равна сумме боковой поверхности S_1 конуса с осевым сечением

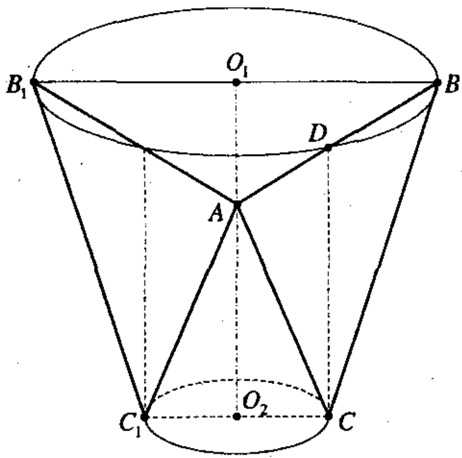


Рис. 12.190

BAB_1, боковой поверхности S_2 конуса с осевым сечением CAC_1 и боковой поверхности S_3 усеченного конуса с осевым сечением BCC_1B_1.

O_1 — середина BB_1, O_2 — середина CC_1. Пусть $O_1B=R$, $O_2C=r$, $BC=b$.

В ΔBAC: $b=2a\cos\alpha$, $\angle BAC=\pi-2\alpha$.

Так как ось вращения O_1O_2 параллельна CD, то $\angle O_2AC=\angle ACD=\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow\angle BAO_1=\pi-(\angle O_2AC+\angle BAC)=\dfrac{3\alpha}{2}$.

$B\ \Delta AO_2C\left(\angle AO_2C=\dfrac{\pi}{2}\right): r=a\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

$B\ \Delta AO_1B\left(\angle AO_1B=\dfrac{\pi}{2}\right): R=a\sin\dfrac{3\alpha}{2}$.

$$S=S_1+S_2+S_3=\pi Ra+\pi ra+\pi b(R+r)=\pi a(R+r)+\pi b(R+r)=$$
$$=\pi(R+r)(a+b)=\pi\left(a\sin\frac{3\alpha}{2}+a\sin\frac{\alpha}{2}\right)(a+2a\cos\alpha)=\pi a^2\cdot 2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\times$$
$$\times(1+2\cos\alpha)=4\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=4\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\right)=8\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $8\pi a^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.330. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен r, а острый угол равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть EO — высота пирамиды $EABC$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}, \angle BAC=\alpha$, O_1 — центр окружности, вписанной в ΔABC, L и K — точки касания этой окружности со сторонами AC и BC соответственно (рис. 12.191).

Тогда $O_1L\perp AC, O_1K\perp BC, O_1L=O_1K=CL=CK=r, \angle O_1AL=\frac{\alpha}{2}$,

$\angle O_1BK=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$. В $\Delta ALO_1: AL=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. В $\Delta BKO_1: BK=r\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$AC=AL+LC=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=r\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{r\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}. BC=BK+KC=r\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+1\right)=$$

$$=r\left(ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=r\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{r\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=r^2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В $\Delta ABC\left(\angle ACB=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$AB=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}=\frac{r\sqrt{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

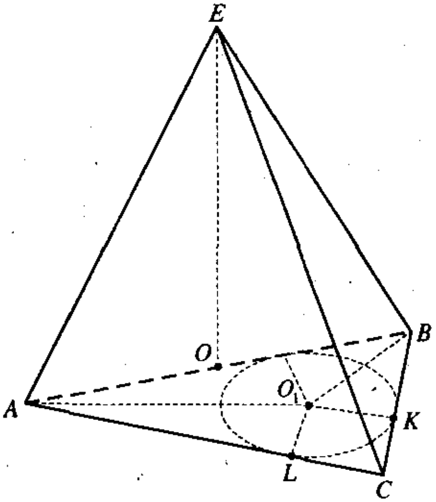


Рис. 12.191

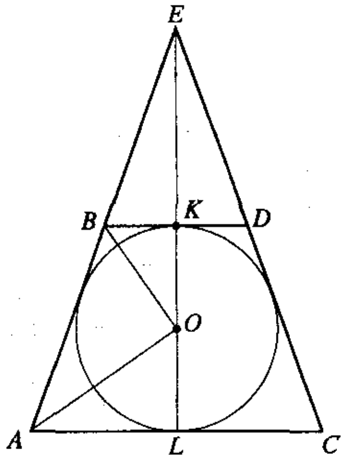


Рис. 12.192

Так как все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол b, то точка O — центр окружности, описанной около ΔABC, и, так как ΔABC — прямоугольный, то O — середина AB, $OA = \frac{1}{2} AB = \frac{r\sqrt{2}}{4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

В $\Delta AOE \left(\angle AOE = \frac{\pi}{2}\right)$: $EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = \frac{r\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S'_{\Delta ABC} \cdot EO = \frac{r^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\frac{r^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

12.331. В конус вписан шар и к шару проведена касательная плоскость, параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α?

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.192): ΔAEC — осевое сечение данного конуса с боковой поверхностью S_1, O — центр данного шара — центр круга, вписанного в трапецию $ABCD$, являющейся осевым сечением усеченного конуса с боковой поверхностью S_2, ΔBED — осевое сечение конуса с боковой поверхностью S_3, отсекаемого от данного конуса касательной плоскостью шара, L — середина AC, K — середина BD, $\angle EAC = \alpha$.

Искомое отношение $\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{S_1 - S_3}{S_3} = \dfrac{S_1}{S_3} - 1 = \left(\dfrac{LA}{KB}\right)^2 - 1.$

$$\angle LAO = \frac{1}{2}\angle EAC = \frac{\alpha}{2}, \angle KBO = \frac{1}{2}\angle ABD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Если $OA = R$, то из $\Delta ALO(\angle ALO = 90^\circ)$: $OL = R\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.$

$$OK = OL = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

В $\Delta BKO(\angle BKO = 90^\circ)$:

$$BK = OK\operatorname{ctg}\angle KBO = R\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_3} = \left(\frac{R}{R\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 1 = \frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\alpha}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{\cos^4\frac{\alpha}{4} - \sin^4\frac{\alpha}{4}}{\sin^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}.$

12.332. В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна S, а острый угол равен α. Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный β.

Решение.

Пусть D — центр основания шарового сегмента, из условия ED — его высота, O — центр шара (рис. 12.193). ΔACB вписан в основание сегмента, $S_{\Delta ACB} = S, \angle BAC = \alpha, \angle BCA = 90°$.

Тогда D — середина AB, РAOB — центральный угол осевого сечения сегмента, $\angle AOB = \beta$. $OB = OE$ — радиусы шара, $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\beta}{2}$.

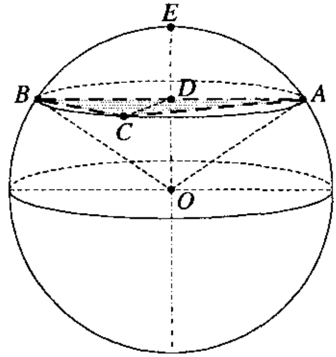


Рис. 12.193

Если $AD = \alpha$, то $AB = 2a$, $AC = 2a\cos\alpha$,

$BC = 2a\sin\alpha, S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = a^2 \sin 2\alpha, a = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$.

В ΔBDO ($\angle BDO = 90°$):

$$OD = BD \operatorname{ctg}\angle BOD = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2};$$

$$OB = \frac{BD}{\sin\angle BOD} = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$ED = OE - OD = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} - \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$.

12.333. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), у которого периметр равен $2p$, а угол при вершине A равен α. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть AD — высота ΔABC (рис. 12.194). Тогда $\angle A_1DA$ — угол наклона сечения BA_1C к плоскости основания, $\angle A_1DA = \beta$.

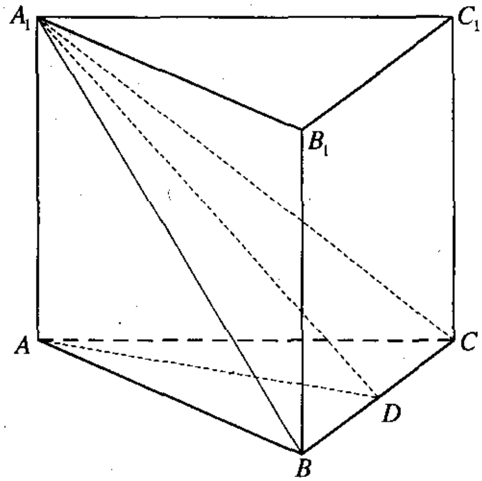


Рис. 12.194

В $\Delta ADB\left(\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}\right)$: $BD=AB\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда $BC=2AB\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $2p=2AB+2AB\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $AB=AC=\dfrac{p}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2\sin\alpha=\dfrac{p^2\sin\alpha}{2\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$. В ΔADB: $AD=AB\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{p\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

В $\Delta A_1AD\left(\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{2}\right)$: $AA_1=AD\operatorname{tg}\beta=\dfrac{p\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Объем призмы:

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{p^3\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^3}=\frac{p^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^3}=$$

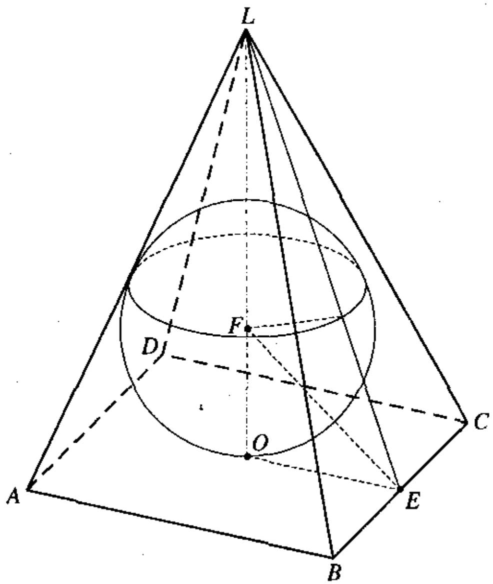


Рис. 12.195

$$=\frac{p^3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3\cos\frac{\alpha}{2}}=p^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^3=$$

$$=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Ответ: $p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$

12.334. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть LO — высота правильной пирамиды $LABCD$, E — середина BC (рис. 12.195). Тогда $\angle MEO=\alpha$, центр F вписанного шара принадлежит отрезку LO, $\angle OEF=\angle LEF=\frac{\alpha}{2}$. $\angle LFE$ — внешний угол треугольника FOE, $\angle LFE=\angle FOE+\angle OEF=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

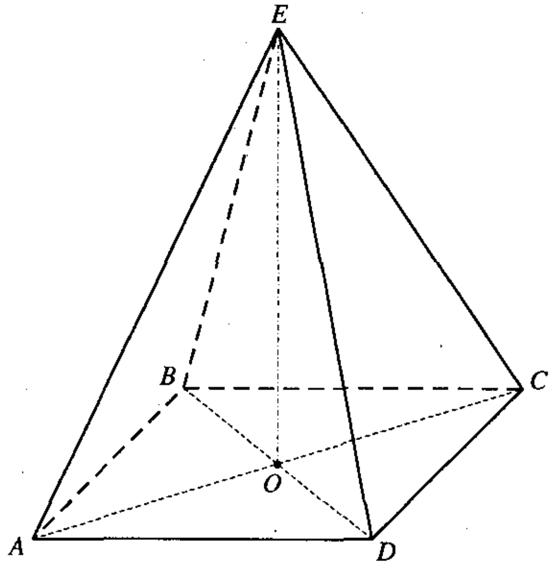


Рис. 12.196

В ΔLFE:

$$\frac{LF}{\sin\angle LEF}=\frac{LE}{\sin\angle LFE}\Rightarrow LE=\frac{LF\sin\angle LFE}{\sin\angle LEF}=\frac{a\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В $\Delta LOE(\angle LOE=90^\circ)$: $OE=LE\cos\angle LEO=a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

Сторона основания пирамиды $AB=2\cdot OE=2a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$, площадь ее основания $S_{осн}=AB^2=4a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha$.

Полная поверхность пирамиды:

$$S=S_{осн}+S_б=S_{осн}+\frac{S_{осн}}{\cos\alpha}=S_{осн}\cdot\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}=4a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$$

$$=8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

12.335. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Около этой пирамиды описан шар радиуса R. Найти объем пирамиды, если все ее боковые ребра образуют с основанием угол β.

Решение.

Пусть EO — высота пирамиды $EABCD$, прямоугольник $ABCD$ — ее основание (рис. 12.196). Так как все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка O — центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, — точка пересечения его диагоналей, и центр шара, описанного около пирамиды, принадлежит лучу EO, ΔAEC вписан в большой круг шара. Тогда $AC = 2R\sin\angle AEC = 2R\sin(180° - \beta) = 2R\sin 2\beta$, $OA = R\sin 2\beta$.

Площадь основания пирамиды $S = \frac{1}{2}AC^2\sin\alpha = 2R^2\sin^2 2\beta\sin\alpha$.

Из ΔAOE ($\angle AOE = 90°$): $EO = AO\operatorname{tg}\angle EAO = R\sin 2\beta\operatorname{tg}\beta$.

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S\cdot EO = \frac{2}{3}R^3\sin^3 2\beta\sin\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha$.

12.336. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

Решение.

Пусть SO — высота данного конуса, ΔASB — сечение конуса, $\angle ASO = \alpha$, $AS = l$, $\angle ASB = \beta$, центр O_1 вписанного шара принадлежит отрезку SO (рис. 12.197).

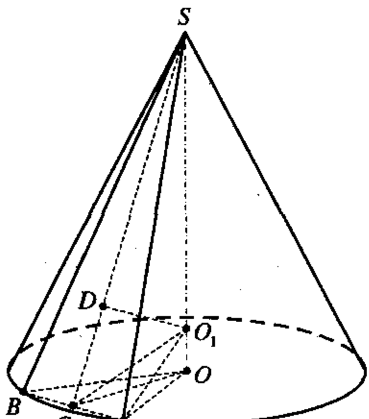


Рис. 12.197

C — середина AB. Тогда $OC\perp AB$, $SC\perp AB$. Тогда прямая AB перпендикулярна плоскости SCO и плоскости SCO и ASB перпендикулярны, SC — линия их пересечения.

В плоскости SCO — проведем перпендикуляр O_1D на SC. Тогда отрезок O_1D перпендикулярен плоскости ASB и его длина — искомое расстояние.

В $\Delta SOA\left(\angle SOA=\frac{\pi}{2}\right)$: [illegible] $=l\sin\alpha; SO=l\cos\alpha$.

В $\Delta SCA\left(\angle SCA=\frac{\pi}{2}\right)$: [illegible]$C=l\sin\frac{\beta}{2}; SC=l\cos\frac{\beta}{2}$.

В $\Delta ACO\left(\angle ACO=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$CO=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{l^2\sin^2\alpha-l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}=l\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos\beta}{2}}=$$

$$=l\sqrt{\frac{\cos\beta-\cos2\alpha}{2}}=l\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Так как шар, вписанный в конус, касается сторон угла SAO, то AO_1 — биссектриса этого угла, $\angle OAO_1=\frac{1}{2}\angle SAO=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta AOO_1\left(\angle AOO_1=\frac{\pi}{2}\right)$: $OO_1=AO\operatorname{tg}\angle OAO_1=l\sin\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$SO_1=SO-OO_1=l\cos\alpha-l\sin\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=l\cdot\frac{\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=l\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=l\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

$\Delta SDO_1\sim\Delta SOC$ — по двум углам.

Тогда $\frac{SC}{SO_1}=\frac{OC}{DO_1}$;

$$O_1D=\frac{SO_1\cdot OC}{SC}=\frac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot l\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{l\cos\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{l\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$.

12.337. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол между боковыми сторонами равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если объем пирамиды равен V.

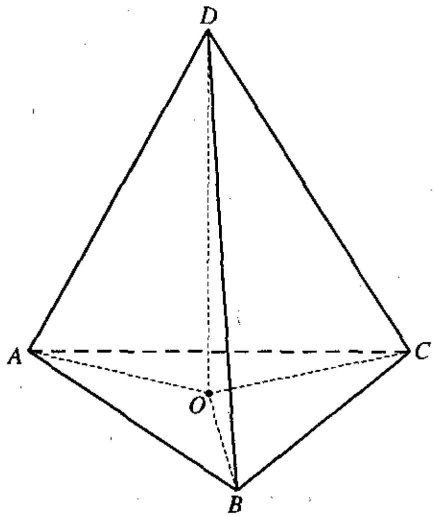


Рис. 12.198

Решение.

Пусть DO — высота пирамиды $DABC$, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 12.198). Так как $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO$, то O — центр окружности, описанной около ΔABC.

Если радиус этой окружности равен R, то $AB = 2R\sin\angle ACB = 2R\sin\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$$S=\frac{1}{2}AB^2\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha; R=\frac{\sqrt{2S}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\alpha}}.$$

Пусть H — высота пирамиды. Так как $V=\dfrac{1}{3}SH$, то $H=\dfrac{3V}{S}$.

В ΔAOD ($\angle AOD = 90°$):

$$\operatorname{tg}\angle EAO=\frac{DO}{OA}=\frac{H}{R}=\frac{3V}{S}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{2S}}=\frac{3V\cos\frac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{3V\cos\dfrac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha}{S}}$.

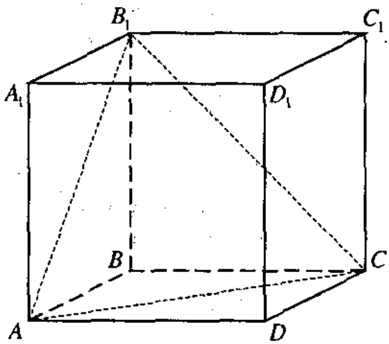


Рис. 12.199

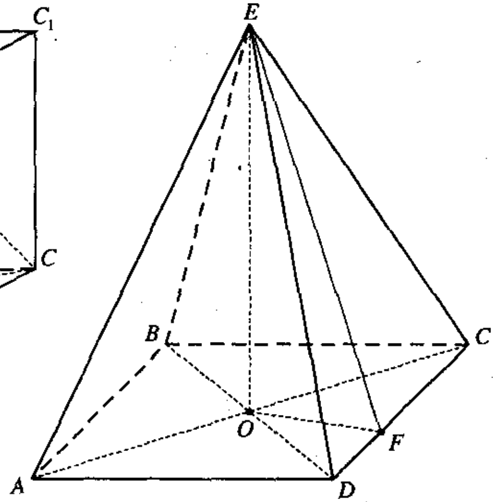


Рис. 12.200

12.338. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, ее объем равен V. Найти косинус угла между диагоналями двух смежных боковых граней.

Решение.

Боковое ребро призмы (рис. 12.199) $BB_1 = \dfrac{V}{S_{осн.}} = \dfrac{V}{a^2} \Rightarrow AB_1^2 = B_1C^2 =$

$= \dfrac{V^2}{a^4} + a^2 = \dfrac{V^2 + a^6}{a^4}$.

В ΔAB_1C:

$AC^2 = AB_1^2 + B_1C^2 - 2AB_1 \cdot B_1C \cos\angle AB_1C$;

$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2AB_1^2 - 2AB_1^2 \cos\angle AB_1C$;

$2a^2 = 2 \cdot \dfrac{V^2 + a^6}{a^4} - 2 \cdot \dfrac{V^2 + a^6}{a^4} \cos\angle AB_1C$;

$a^6 = V^2 + a^6 - \left(V^2 + a^6\right)\cos\angle AB_1C$;

$\cos\angle AB_1C = \dfrac{V^2}{V^2 + a^6}$.

Ответ: $\dfrac{V^2}{V^2 + a^6}$.

12.339. Острый угол ромба, лежащего в основании четырехугольной пирамиды, равен α. Отношение полной поверхности пирамиды к квадрату стороны основания равно k. Найти синус угла между апофемой и высотой пирамиды, если все ее боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Каковы допустимые значения k?

Решение.

Если EO — высота пирамиды $EABCD$ (рис. 12.200), EF — высота ее боковой грани CED, то $\angle EFO$ — угол наклона этой боковой грани к плоскости основания и, так как все боковые грани одинаково к ней наклонены, то O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды, — точка пересечения диагоналей ромба, $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\beta}$, где $\beta = \angle EFO$.

Пусть $AB = a$. Тогда $S_{осн} = a^2 \sin\alpha$ и полная поверхность пирамиды $S = S_{осн} + S_б = S_{осн} + \dfrac{S_{осн}}{\cos\beta} = S_{осн} \cdot \dfrac{1+\cos\beta}{\cos\beta} = \dfrac{a^2(1+\cos\beta)\sin\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow k =$

$$= \frac{S}{a^2} = \frac{(1+\cos\beta)\sin\alpha}{\cos\beta} \Leftrightarrow k\cos\beta = \sin\alpha + \cos\beta\sin\alpha; \cos\beta = \frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}.$$

В $\Delta EOF(\angle EOF = 90°)$ искомый $\sin\angle OEF = \cos\angle EFO = \dfrac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$.

Так как $\dfrac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha} < 1$, то $\sin\alpha < k - \sin\alpha$, т.е. $k > 2\sin\alpha$.

Ответ: $\dfrac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}; k > 2\sin\alpha$.

12.340. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.201), OF — расстояние от точки O до бокового ребра EC, $\angle ECO = \beta$. Так как $\angle CED = \alpha$, то $\angle ECD = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

OC — проекция EC на плоскость основания пирамиды, CD — прямая, лежащая в этой плоскости.

Тогда $\cos\angle ECD = \cos\angle ECO \cdot \cos\angle OCD$;

$$\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\beta \cdot \cos 45° \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos 45°} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

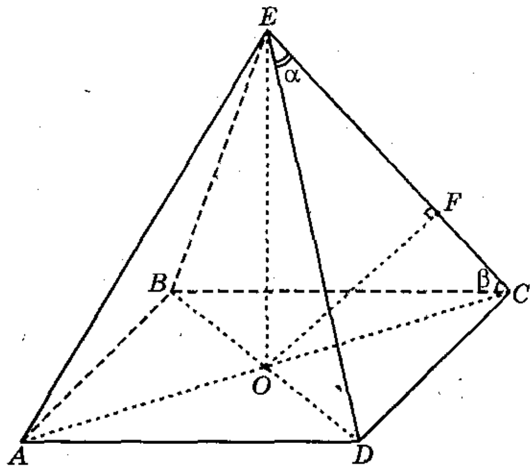


Рис. 12.201

В $\Delta OFC(\angle OFC = 90°)$:

$$OF = OC \cdot \sin\beta = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$.

12.341. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.202), площадь основания пирамиды $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}BD^2 = 2 \cdot OD^2$.

$$S_{\Delta BED} = \frac{1}{2}BD \cdot EO = OD \cdot EO.$$

Тогда $k = \frac{S_{\Delta BED}}{S_{\text{осн}}} = \frac{OD \cdot EO}{2 \cdot OD^2} = \frac{EO}{2 \cdot OD}$; $\frac{EO}{OD} = 2k$.

Пусть $\angle DEO = \angle CEO = \alpha, \angle CED = \beta$.

Из $\Delta EOD\,(\angle EOD = 90°)$: $\operatorname{tg}\angle DEO = \frac{OD}{EO} = \frac{1}{2k}$.

EO — проекция ED на плоскость AEC, EC — прямая, лежащая в этой плоскости.

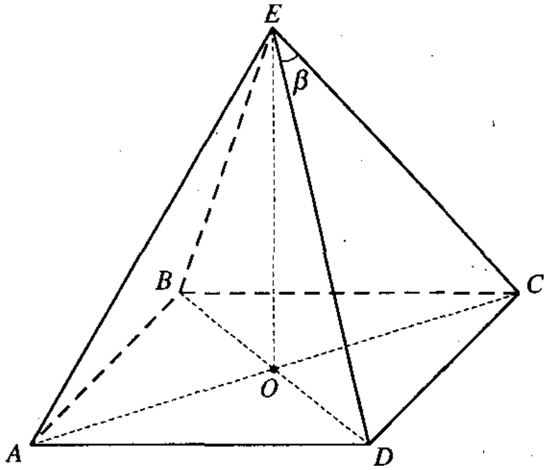


Рис. 12.202

Тогда $\cos\angle CED = \cos\angle DEO \cdot \cos\angle OEC$;

$$\cos\beta = \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{4k^2}} = \frac{4k^2}{4k^2+1}.$$

Ответ: $\frac{4k^2}{4k^2+1}$.

12.342. Расстояние от стороны основания правильной треугольной пирамиды до непересекающего ее ребра в два раза меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$, E — середина AC (рис. 12.203).

Тогда $SE \perp AC$, $BE \perp AC$, $\angle SEB$ — искомый угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды, прямая AC перпендикулярна плоскости SEB.

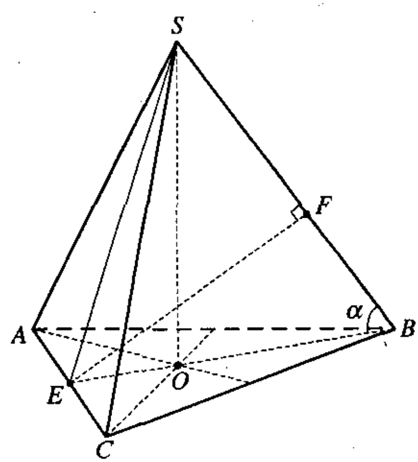


Рис. 12.203

Проведем в плоскости SEB перпендикуляр EF на SB (если $\angle ESB < 90°$, то F лежит на отрезке SB, если $\angle ESB > 90°$, то F лежит на продолжении отрезка SB за точку S).

Тогда $EF \perp SB$, $EF \perp AC$ и длина отрезка EF — это расстояние между скрещивающимися прямыми SB и AC.

Если $AC = a$, то $EF = \frac{a}{2}, EB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Пусть $\angle SEO = \beta, \angle SBO = \alpha$.

В ΔSOE ($\angle SOE = 90°$): $SO = EO \cdot \operatorname{tg} \beta$.

В ΔSOB ($\angle SOB = 90°$): $SO = OB \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Так как $OB = 2 \cdot OE$, то $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

Из ΔEFB ($\angle EFB = 90°$):

$$\sin\alpha = \frac{EF}{EB} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \sqrt{2};\ \beta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

12.343. Линейный угол двугранного угла, составленного двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, в два раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.204), $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями BSC и DSC. Тогда $DE \perp SC, EO \perp BD, \angle OED = \frac{1}{2}\angle BED$.

Если F — середина CD, то $SF \perp CD, \angle DSF = \frac{1}{2}\angle DSC$.

Пусть $SD = a$, $\angle DSC = \alpha$. Тогда $\angle BED = 2\alpha$, $\angle OED = \alpha$.

В ΔDFS ($\angle DFS = 90°$): $DF = a\sin\frac{\alpha}{2}$, а из ΔDES ($\angle DES = 90°$): $DE = a\sin\alpha$.

В ΔEOD ($\angle EOD = 90°$): $OD = DE\sin\alpha = a\sin\alpha$.

Так как $ABCD$ — квадрат, то $OD = DF\sqrt{2} \Rightarrow$

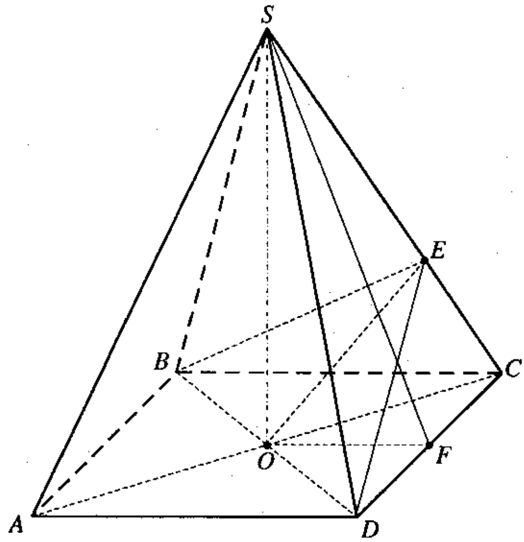


Рис. 12.204

$$\Rightarrow a\sin^2\alpha = a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^4\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha) = 1-\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1-\cos\alpha.$$

Так как $\cos\alpha \neq 1$, то $(1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha) = 1 \Leftrightarrow$

$$1+\cos\alpha - \cos^2\alpha - \cos^3\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha = 0.$$

Так как $0 < \cos\alpha < 1$, то $\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$;

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

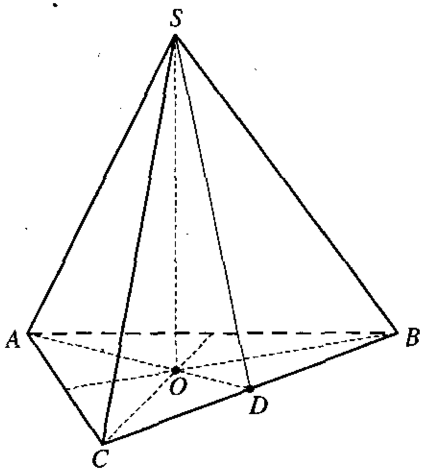


Рис. 12.205

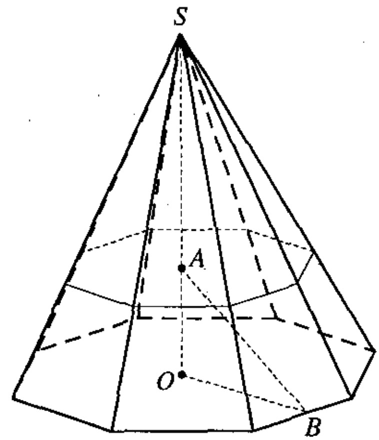


Рис. 12.206

12.344. В правильной треугольной пирамиде сумма углов, образованных апофемой пирамиды с плоскостью основания и боковым ребром с той же плоскостью, равна $\frac{\pi}{4}$. Найти эти углы.

Решение.

Пусть SO — высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.205), D — середина BC. $\angle SCO = \alpha$, $\angle SDO = \beta$. По условию $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

В $\Delta SOC\left(\angle SOC=\frac{\pi}{2}\right)$: $SO = OC\cdot\operatorname{tg}\alpha$. В $\Delta SOD\left(\angle SOD=\frac{\pi}{2}\right)$: $SO = OD\cdot\operatorname{tg}\beta$.

Тогда $OC\cdot\operatorname{tg}\alpha = OD\cdot\operatorname{tg}\beta$ и, так как $OC = 2\cdot OD$, то $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Так как $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha, \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, α — острый угол, то получаем:

$$\frac{3\operatorname{tg}\alpha}{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}=1; 2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-1=0; \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{17}-3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}, \beta=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}, \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

12.345. Объем правильной пирамиды равен V. Через центр вписанного в пирамиду шара проведена плоскость, параллельная ее основанию. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды этой плоскостью, если двугранный угол при основании равен α.

Решение.

Пусть SO — высота данной правильной пирамиды, SB — ее апофема, A — центр вписанного шара (рис. 12.206).

Тогда $\angle SBO=\alpha, \angle OBA=\frac{\alpha}{2}$.

Так как отсекаемая пирамиды, подобна данной, то $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{SA}{SO}\right)^3$, где V_1 — искомый объем.

В ΔSOB ($\angle SOB=90°$): $SO=OB\operatorname{tg}\alpha$.

В ΔAOB ($\angle AOB=90°$): $OA=OB\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$SA=SO-OA=OB\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=OB\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{OB\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\left(\frac{OB\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}:OB\operatorname{tg}\alpha\right)^3=\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}\right)^3=\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{1}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow V_1=\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

12.346. Найти углы прямоугольного треугольника, если объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг меньшего катета, равен сумме объемов тел, полученных от вращения треугольника вокруг его гипотенузы и вокруг большего катета.

Решение.

В ΔABC (рис. 12.207, а) $\angle ACB=90°$, $BC>AC$.

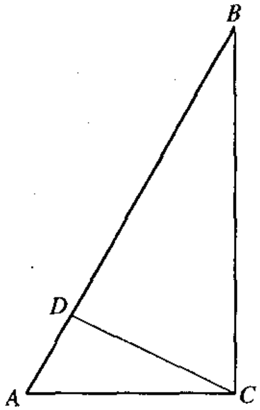


Рис. 12.207,а

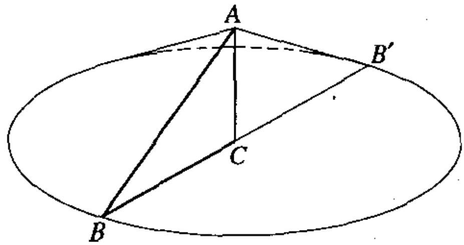


Рис. 12.207,б

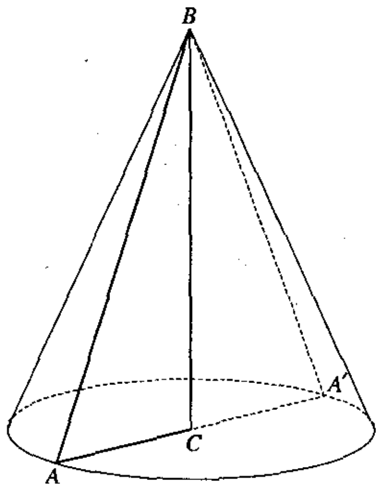


Рис. 12.207,в

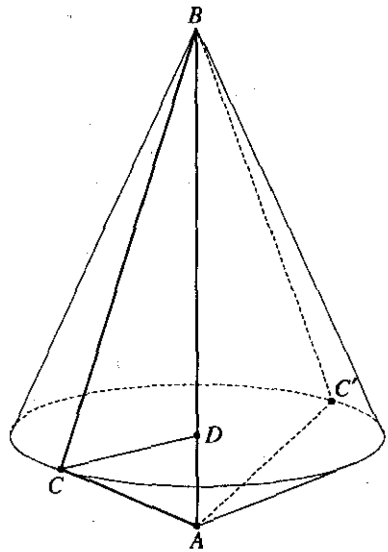


Рис. 12.207,г

Если $AB = 1$, $\angle BAC = \alpha$, то $BC = \sin\alpha$, $AC = \cos\alpha$.

При вращении треугольника вокруг меньшего катета AC получим конус (рис. 12.207, б) объем которого $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot BC^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\pi \sin^2\alpha\cos\alpha$. При вращении треугольника вокруг большего катета BC получим конус (рис. 12.207, в), объем которого $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \sin\alpha\cos^2\alpha$.

Высота данного треугольника, опущенная на гипотенузу, $CD = AC$ $\sin\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$.

При вращении треугольника ABC вокруг гипотенузы AB получим тело, состоящее из двух конусов с общим основанием радиуса CD и высотами BD и AD (рис. 12.208, г). Объем этого тела $V_3 = \frac{1}{3}\pi\cdot CD^2\cdot BD +$

$+\frac{1}{3}\pi\cdot CD^2\cdot AD = \frac{1}{3}\pi\cdot CD^2(BD+AD) = \frac{1}{3}\pi\cdot CD^2\cdot AB = \frac{1}{2}\pi\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

По условию $V_1 = V_2 + V_3$, следовательно,

$$\frac{1}{3}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}\pi\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\pi\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha\cos^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha; \sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha - 1 = 0; \sin 2\alpha = -2 + 2\sqrt{2}$$

или $\sin 2\alpha = -2 - 2\sqrt{2}$.

$$-2 - 2\sqrt{2} < -1 \Rightarrow 2\alpha = \arcsin\left(2\sqrt{2} - 2\right);$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)\right); 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$.

12.347. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, ее боковая поверхность равна S. Найти угол между смежными боковыми гранями.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.208), $BD \perp AC, BD \perp EO \Rightarrow BD \perp$ пл.AEC $BD \perp EC$.

Проведем в грани DEC перпендикуляр DK на $EC \Rightarrow$ *пл.*$BKD \perp EC$ и $\angle BKD$ — угол между смежными гранями CED и CEB.

$BK = DK$, как высоты боковых граней правильной пирамиды $\Rightarrow$ KO — высота, медиана и биссектриса ΔBKD.

Если $\angle BKD = 2\alpha$, то $\angle DKO = \alpha$.

В ΔKOD $(\angle KOD = 90^\circ)$: $DK = \dfrac{DO}{\sin\angle DKO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$.

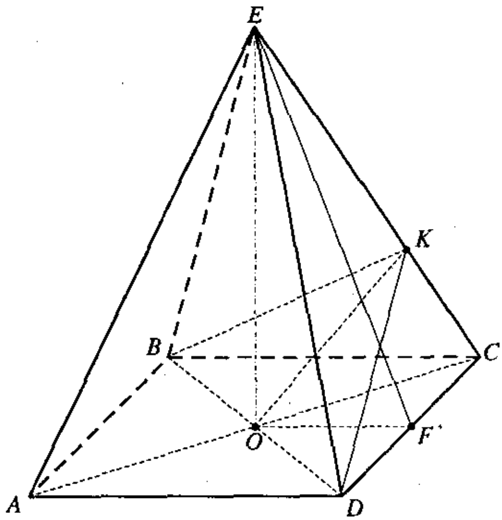


Рис. 12.208

$$S_{\Delta CED} = \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}EC \cdot DK \Rightarrow EC = \frac{\frac{S}{2}}{DK} = \frac{S\sin\alpha}{a\sqrt{2}}.$$

Если F — середина CD, то из ΔEFC ($\angle EFC = 90°$):

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{S^2\sin^2\alpha}{2a^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2S^2\sin^2\alpha - a^4}}{2a}.$$

$$S_{\Delta CED} = EF \cdot FC.$$

Таким образом

$$\frac{\sqrt{2S^2\sin^2\alpha - a^4}}{2a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{S}{4} \Rightarrow 2S^2\sin^2\alpha - a^4 = S^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S^2\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) = -a^4 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{a^4}{S^2};$$

$$2\alpha = \arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right).$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right)$.

12.348. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

Решение.

Пусть EO_2 — высота правильной пирамиды $EABC$ (рис. 12.209), ED — апофема ее боковой грани BEC. Тогда $\angle BED = \frac{1}{2}\angle BEC = \frac{\alpha}{2}$. Так как пирамида правильная, то центр O_1 вписанного шара лежит на высоте EO_2. Если $\angle EDO_2 = \gamma$, то $\angle O_1DO_2 = \frac{\gamma}{2}$, а из $\Delta O_1O_2D\left(\angle O_1O_2D = \frac{\pi}{2}\right)$ радиус вписанного шара $r = O_2O_1 =$

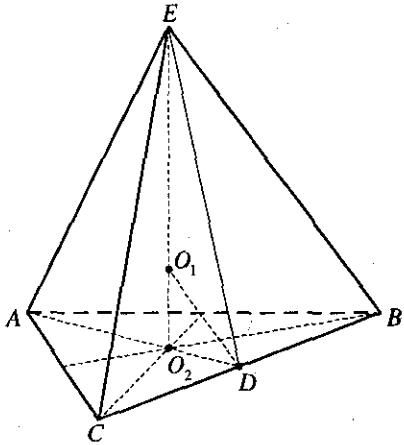


Рис. 12.209

$$= O_2Dtg\angle O_1DO_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\text{tg}\,\frac{\gamma}{2}.$$

В $\Delta EDB\left(\angle EDB = \frac{\pi}{2}\right)$: $ED = BD\,\text{ctg}\,\angle BED = \frac{a}{2}\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta EOD\left(\angle EOD = \frac{\pi}{2}\right)$: $ED = \frac{OD}{\cos\angle EDO} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\gamma};\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \text{tg}\,\frac{\pi}{6}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

$$tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{1-\text{tg}\,\frac{\pi}{6}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}\,\frac{\pi}{6}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\text{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Ответ: $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$

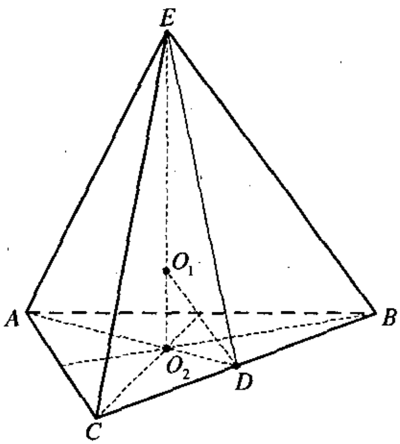


Рис. 12.210

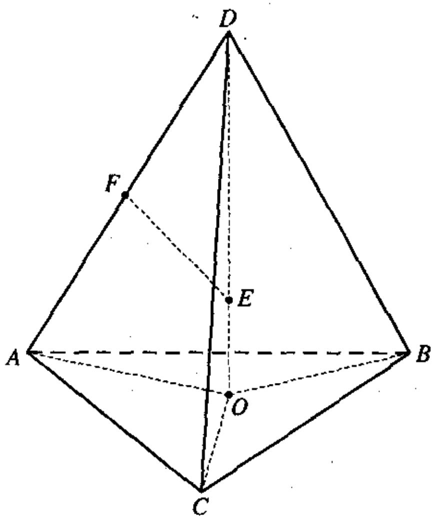


Рис. 12.211

12.349. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в четыре раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть EO_2 — высота правильной пирамиды $EABC$ (рис. 12.210), ED — апофема ее боковой грани BEC. Если $\angle BEC = \alpha$, то $\angle DEC = \dfrac{\alpha}{2}$.

Так как пирамида правильная, то центр O_1 вписанного шара лежит на ее высоте EO_2, O_1O_2 — радиус шара. Если $BC = a$, $\angle O_2DO_1 = \beta$, то

$O_2D = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; O_1O_2 = \dfrac{a}{4}$, из $\Delta\, O_1O_2D\ (\angle O_1O_2D = 90°)$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{O_1O_2}{O_2D} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\angle EDO_2 = 2\angle O_1DO_2 = 2\beta; \cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1}{7}.$$

В $\Delta EO_2D\ (\angle EO_2D = 90°)$: $ED = \dfrac{O_2D}{\cos\angle EDO_2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos 2\beta} = \dfrac{7a\sqrt{3}}{6}$.

В $\Delta EDC\ (\angle EDC = 90°)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{CD}{ED} = \frac{a}{2} : \frac{7a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1-\dfrac{3}{49}}{1+\dfrac{3}{49}} = \frac{23}{26}.$$

Ответ: $\frac{23}{26}$.

12.350. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды имеют одну и ту же длину a, а угол между равными сторонами основания равен α. Найти радиус описанного шара.

Решение.

Пусть DO — высота пирамиды $DABC$, $DA = DB = DC = BA = BC = a$ (рис. 12.211). Тогда точка O — центр окружности, описанной около основания пирамиды, точки прямой DO равноудалены от вершин ΔABC. Радиус этой окружности $OA = R_1 = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

В $\Delta AOD\left(\angle AOD = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$DO = \sqrt{DA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\pi}{3}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1+\cos\frac{2\pi}{3}}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\cos\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Центр E шара, описанного около пирамиды $DABC$, лежит на полупрямой DO.

Если F — середина DA, то $EF \perp DA$ и $\Delta EFD \sim \Delta AOD$, $\frac{DO}{AD} = \frac{FD}{DE}$.

Радиус описанного шара

$$R = DE = \frac{AD\cdot FD}{DO} = \frac{\frac{a}{2}\cdot a}{\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

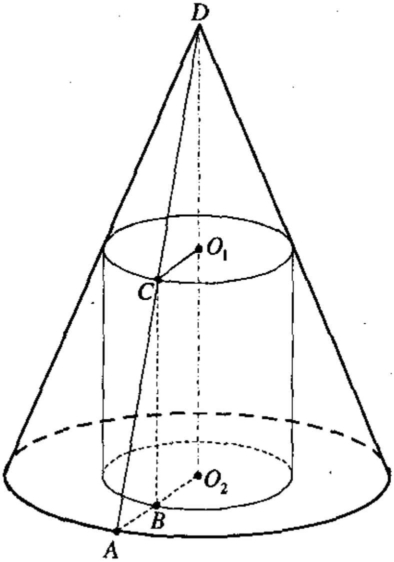


Рис. 12.212

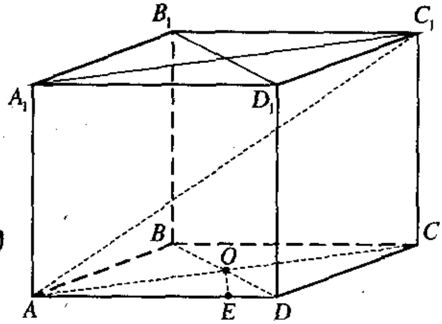


Рис. 12.213

Ответ: $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$.

12.351. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Полная поверхность цилиндра равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Решение.

Пусть DO_2 — высота данного конуса, O_2 — общий центр основания конуса и нижнего основания цилиндра, O_1 — центр верхнего основания цилиндра, DA — образующая конуса, CB — образующая цилиндра, C — принадлежит DA (рис. 12.212), $O_2B = r$, $O_2A = R$, $O_1O_2 = BC = H$. По условию $H = 2R$.

Полная поверхность цилиндра $S = 2\pi rH + 2\pi r^2 = 4\pi rR + 2\pi r^2$.

По условию

$$4\pi rR + 2\pi r^2 = \pi R^2 \Rightarrow 2r^2 + 4rR - R^2 = 0;\ r = \frac{-2R \pm R\sqrt{6}}{2}.$$

Так как $r>0$, то $r=\frac{R\left(\sqrt{6}-2\right)}{2}$.

$\angle DAO_2=\alpha$ — искомый угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Из $\Delta ABC(\angle ABC=90°)$:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{O_2A-O_2B}{BC}=\frac{R-r}{H}=\frac{R-\frac{R\left(\sqrt{6}-2\right)}{2}}{2R}=\frac{1-\frac{\sqrt{6}-2}{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{6}}{4};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{4-\sqrt{6}}=\frac{4\left(4+\sqrt{6}\right)}{\left(4-\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{6}\right)}=\frac{4\left(4+\sqrt{6}\right)}{10}=\frac{2\left(4+\sqrt{6}\right)}{5};$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2\left(4+\sqrt{6}\right)}{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\left(4+\sqrt{6}\right)}{5}$.

12.352. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб с острым углом α. Найти угол между большей диагональю призмы и плоскостью основания.

Решение.

Ромб $ABCD$ — основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из условия, $\angle BAC=\alpha$, $0°<\alpha<90°$ (рис. 12.213). Тогда AC_1 — большая диагональ призмы, а $\angle C_1AC$ — искомый угол.

Проекцией шара, вписанного в призму, на плоскость основания является круг, вписанный в ромб $ABCD$, OE — радиус этого круга, E — точка касания круга со стороной AD ромба.

Если радиус шара равен R, то $CC_1=2R$, $OE=R$.

В $\Delta AEO\,(\angle AEO=90°)$: $AO=\frac{OE}{\sin\angle CAD}=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$AC=2AO=\frac{2R}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

В ΔACC_1 $(\angle ACC_1=90°)$: $\operatorname{tg}\angle C_1AC=\frac{CC_1}{AC}=\sin\frac{\alpha}{2}$;

$$\angle C_1AC=\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

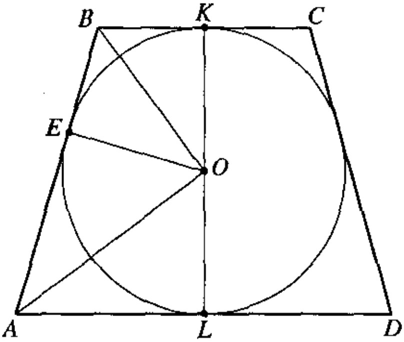


Рис. 12.214

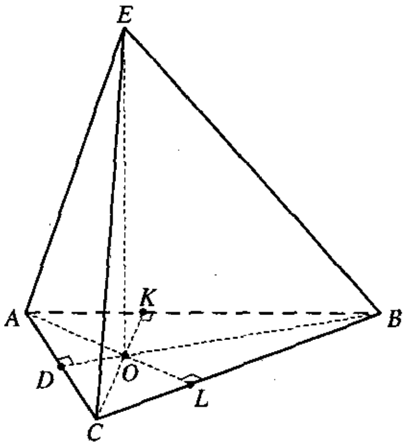


Рис. 12.215

12.353. В усеченный конус вписан шар, объем которого в два раза меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Решение.

Пусть равнобокая трапеция $ABCD$ — осевое сечение данного усеченного конуса, O — центр шара, вписанного в него, — центр круга, вписанного в трапецию $ABCD$: K, L, E — точки касания этого круга со сторонами BC, AD, AB трапеции (рис. 12.214). Тогда $\angle BAD = \alpha$ — искомый угол, $LA = R_1$ и $KB = R_2$ — радиусы оснований усеченного конуса, $OK = OL = OE = R$ — радиусы шара, высота конуса $H = 2R = (R_1 - R_2)\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow R_1 - R_2 = 2R\operatorname{ctg}\alpha$.

$AE = AL = R_1$, $BK = BE = R_2$, $\angle BOA = 90°$. Тогда $R^2 = R_1R_2$. Объем усеченного конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 R_1R_2 - R_2^2\right) = \frac{2}{3}\pi R\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$, объем шара $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$ и, по условию, $V_1 = 2V_2$.

Тогда

$$\frac{2}{3}\pi R\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right) = \frac{8}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2 = 4R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R_1 - R_2)^2 + 3R_1R_2 = 4R^2 \Rightarrow 4R^2\operatorname{ctg}^2\alpha + 3R^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R^2\operatorname{ctg}^2\alpha = R^2;\ \operatorname{tg}^2\alpha = 4.$$

Так как α — острый угол, то $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2$.

12.354. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого основание равно a, а противолежащий угол равен α. Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину данного угла, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания.

Решение.

Пусть EO — высота пирамиды $EABC$, $AB = BC$, $AC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$, $\angle EBO = \beta$, O — точка пересечения высот BD, CK, AL — основания (рис. 12.215).

Так как ΔABC остроугольный, то точка O лежит внутри треугольника, точки L и K лежат на отрезках BC и AB.

В ΔADB ($\angle ADB = 90°$):

$$AB = \frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};\ BD = AD\operatorname{ctg}\angle ABD = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В ΔALB ($\angle ALB = 90°$): $BL = AB\cos\angle ABC = \dfrac{a\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

В ΔOLB ($\angle OLB = 90°$): $BO = \dfrac{BL}{\cos\angle OBL} = \dfrac{a\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = a\operatorname{ctg}\alpha$.

В ΔEOB ($\angle EOB = 90°$): $EO = OB\operatorname{tg}\angle EBO = a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

$$S_{\Delta ABC} = AD\cdot BD = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EO = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{a^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Ответ: $\dfrac{a^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

12.355. Площадь сегмента равна S, а дуга сегмента равна α радианам. Этот сегмент вращается вокруг своей оси симметрии. Найти поверхность тела вращения.

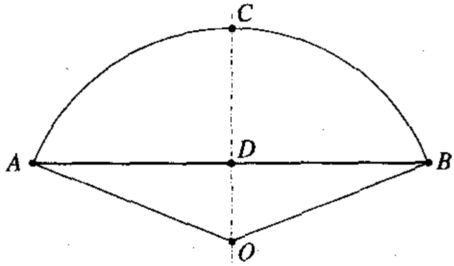


Рис. 12.216

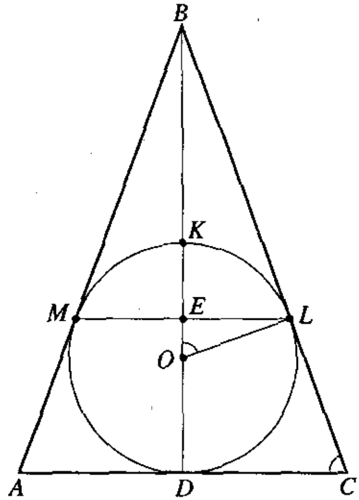


Рис. 12.217

Решение.

При вращении данного кругового сегмента (рис. 12.216) получится шаровой сегмент, поверхность которого $S_1 = S_2 + S_3$, где S_2 — площадь его сферической поверхности, S_3 — площадь круга радиуса DA.

$$S = S_{\text{сект } OACB} - S_{\Delta AOB} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

и $R^2 = \dfrac{2S}{\alpha - \sin\alpha}$, где R — радиус сегмента.

$S_2 = 2\pi RH$, где H — высота сегмента, $H = R - DO$.

В $\Delta ADO \left(\angle ADO = \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$OD = OA \cos\angle AOD = R\cos\frac{\alpha}{2};\ AD = OA\sin\angle AOD = R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$H = R - DO = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Тогда

$$S_1 = 2\pi RH + \pi\cdot AD^2 = 2\pi R\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} + \pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{4} +$$

$$+ 4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4} = 4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha - \sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{8\pi S\sin^2\dfrac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$.

12.356. *В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении 1:4. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.*

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.217). Пусть радиус шара $OL = R$. ΔOLB и ΔCDB — прямоугольные с общим острым углом при вершине B. Значит, $\angle BOL = \angle BCD = \alpha$.

В $\Delta OEL\,(\angle OEL = 90°): OE = R\cos\alpha$.

Высота меньшего из шаровых сегментов $KE = OK - OE = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$.

Сферическая поверхность этого сегмента $S_{\text{сегм}} = 2\pi R\cdot KE = 2\pi R^2\times(1-\cos\alpha)$, поверхность шара $S = 4\pi R^2$.

Из условия получаем $S_{\text{сегм}} : S = 1:5$. Тогда

$$\frac{2\pi R^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1-\cos\alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5};\ \alpha = \arccos\frac{3}{5}.$$

Ответ: arccos 0,6.

12.357. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а каждое из боковых ребер равно l. Найти плоские углы при вершине, зная, что *они образуют арифметическую прогрессию с разностью* $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение.

Пусть средний по величине плоский угол равен α. Тогда два других угла равны $\alpha-\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha+\dfrac{\pi}{6}$.

Так как площади боковых граней равны

$\dfrac{1}{2}l^2\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6}), \dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha$ и $\dfrac{1}{2}l^2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$, то получим уравнение

$\dfrac{1}{2}l^2\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha+\dfrac{1}{2}l^2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6}) = S$, или $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})+\sin\alpha+\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{2S}{l^2}$. Но $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})+\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6}) = 2\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}\sin\alpha$

и, значит, $\sqrt{3}\sin\alpha+\sin\alpha = \dfrac{2S}{l^2}$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{2S}{(\sqrt{3}+1)l^2} = \dfrac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$.

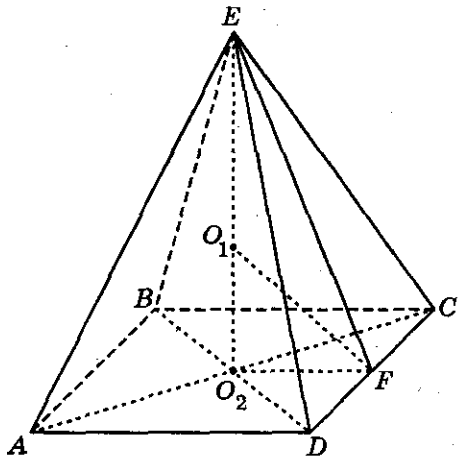


Рис. 12.218

Итак, $\alpha = \arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}, \alpha \pm \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$.

Ответ: $\arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$.

12.358. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R.

Решение.

Пусть EO_2 — высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.218), центр O_1 вписанного шара лежит на отрезке EO_2, $O_1O_2 = R$, F — середина CD, $\angle EFO$ наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды равен β. Тогда $\angle O_1FO_2 = \frac{1}{2}\angle EFO_2 = \frac{\beta}{2}$, а из $\Delta O_1O_2F\left(\angle O_1O_2F = \frac{\pi}{2}\right)$ находим $O_2F = R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, откуда $DF = O_2F = R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

В $\Delta DFE\left(\angle DFE = \frac{\pi}{2}\right)$: $EF = DF\operatorname{ctg}\angle DEF = R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Боковая поверхность пирамиды:

$S = 4S_{\Delta CED} = 4\cdot DF\cdot EF = 4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta EO_2F\left(\angle EO_2F = \frac{\pi}{2}\right)$: $O_2F = EF\cos\beta$.

В $\Delta DFE\left(\angle DFE=\frac{\pi}{2}\right)$:$DF=EF\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\cos\beta=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}=\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=4R^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ответ: $4R^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.359. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен апофеме пирамиды. Найти угол между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

Решение.

Рассмотрим правильную пирамиду $DABC$ (рис. 12.219), центр O_1 вписанного шара лежит на ее высоте DO_2, E — середина AD.

Пусть R — радиус шара, $DO_1=$ $=AO_1=R$, H — высота, $DA=L$, $\angle AO_1O_2=\alpha$.

В ΔAO_2O_1 $(\angle AO_2O_1=90^\circ)$: $O_2O_1=R\cos\alpha$.

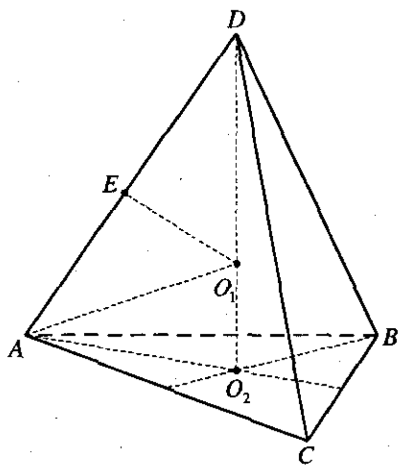


Рис. 12.219

Тогда $H=DO_1+O_1O_2=R+R\cos\alpha=R(1+\cos\alpha)=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$\angle AO_1D=180^\circ-\alpha;\angle AO_1E=\frac{1}{2}\angle AO_1D=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, а из ΔAEO_1 $(\text{Р}AEO_1=90^\circ)$:

$$AE=AO_1\sin\angle AO_1E\Rightarrow\frac{L}{2}=R\cos\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{L}{2R}.$$

Тогда $H=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}=2R\cdot\frac{L^2}{4R^2}=\frac{L^2}{2R}$.

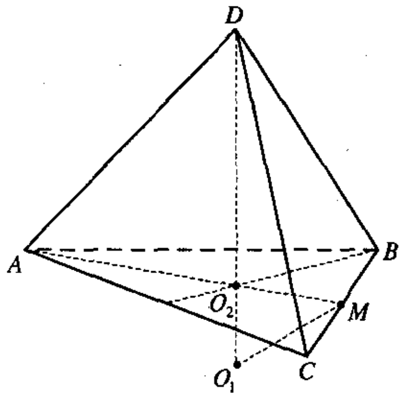


Рис. 12.219,а

Это же верно и в том случае, если точка O_1 лежит на продолжении отрезка DO_2 за точку O_2.

Рассмотрим данную правильную пирамиду $DABC$ (рис. 12.219, а), DO_2 — ее высота, M — середина BC, $\angle DMO_2 = \gamma$ — искомый угол между апофемой и плоскостью основания.

$DM > DO_2$ поэтому центр O_1 описанного шара лежит вне пирамиды. Если радиус шара и апофемы равны b, то из ΔDOM ($\angle DOM = 90°$): $O_2M = b\cos\gamma$, $DO_2 = b\sin\gamma$.

$O_2B = 2 \cdot OM = 2b\cos\gamma$.

Из $\Delta DO_2B(\angle DO_2B = 90°)$: $DB^2 = DO_2^2 + O_2B^2 = b^2\sin^2\gamma + 4b^2\cos^2\gamma$.

Так как $DO_2 = \dfrac{DB^2}{2b}$, то

$$b\sin\gamma = \frac{b^2\sin^2\gamma + 4b^2\cos^2\gamma}{2b};$$

$$2\sin\gamma = \sin^2\gamma + 4\cos^2\gamma,$$

$$2\sin\gamma = \sin^2\gamma + 4 - 4\sin^2\gamma;$$

$$3\sin^2\gamma + 2\sin\gamma - 4 = 0; \sin\gamma = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}.$$

Подходит только положительное значение $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{13}-1}{3}$, $\gamma = \arcsin\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}$.

12.360. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. В этот конус вписан шар, а в шар вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны между собой. Найти объем призмы.

Решение.

Центр K шара, вписанного в конус, лежит на его высоте SO, SE — образующая конуса, $SE = l$, $\angle SEO = \alpha$, (рис. 12.220) $\angle KEO = \dfrac{1}{2}\angle SEO = \dfrac{\alpha}{2}$.

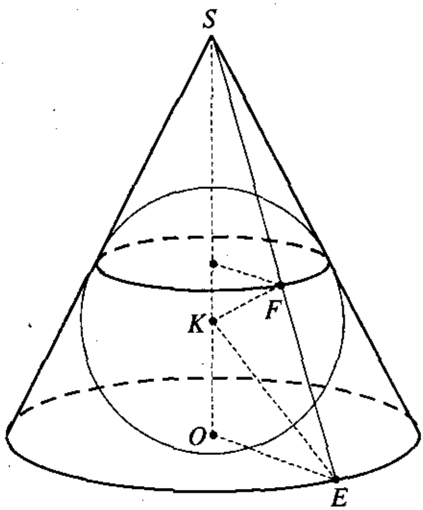


Рис. 220

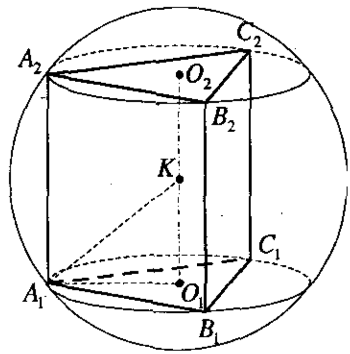


Рис.220,а

KO — радиус шара. Пусть $KO = r$.

В ΔSOE ($\angle SOE = 90°$): $OE = l\cos\alpha$.

В ΔKOE ($\angle KOE = 90°$): $r = l\cos\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

O_1 и O_2 — центры оснований $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ правильной призмы, вписанной в шар (рис. 12.220, а).

Точка K — середина O_1O_2, $AK = r$.

Пусть ребро призмы равно b.

Тогда $O_1A_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}, KO_1 = \dfrac{b}{2}$.

В $\Delta A_1O_1K_1$ ($\angle A_1O_1K = 90°$):

$$A_1K^2 = A_1O_1^2 + O_1K^2; r^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{4}; b^2 = \frac{12r^2}{7}; b = \frac{2\sqrt{3}r}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{7}}.$$

Объем призмы:

$$V = S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot A_1A_2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{7\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$.

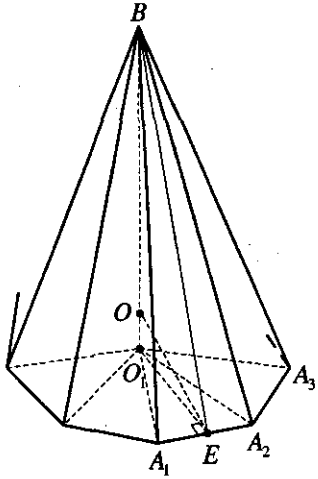


Рис. 12.221

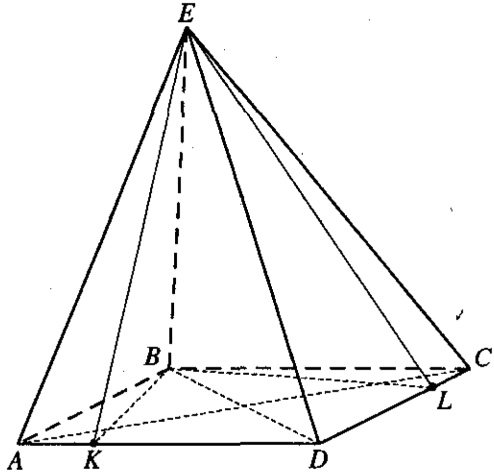


Рис. 12.222

12.361. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

Решение.

Боковая поверхность правильной пирамиды $S_б = \dfrac{S}{\cos\alpha}$, где S — площадь основания, α — угол между боковой гранью и плоскостью основания.

BO_1 — высота данной правильной пирамиды $BA_1A_2...A_n$, BE — апофема ее боковой грани A_1BA_2, $\angle BEO_1 = \alpha$ (рис. 12.221).

Центр O вписанного шара лежит на высоте BO_1, $OO_1 = R$, $\angle OEO_1 = \dfrac{1}{2}\angle BEO_1 = \dfrac{\alpha}{2}$.

В ΔOO_1E ($\angle OO_1E = 90°$): $O_1E = R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

В ΔA_1EO_1 ($\angle A_1EO_1 = 90°$): $A_1E = O_1E\operatorname{tg}\angle A_1O_1E = R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$.

Тогда

$$S = nS_{\Delta A_1O_1A_2} = n\cdot A_1E\cdot O_1E = nR^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n};$$

$$S_б = \frac{nR^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{nR^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\alpha}$.

12.362. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол β. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

Решение.

Ромб $ABCD$ — основание пирамиды $EABCD$ (рис. 12.222), грани ABE и CBE перпендикулярны плоскости основания, таким образом, их общее ребро EB — высота пирамиды.

Тогда $EB \perp AB$, $EB \perp BC$, $\angle ABC$ — угол между гранями ABE и CBE, $\Delta ABC = \beta$.

BK — высота ромба $ABCD$. Тогда $EK \perp AD$ и $\angle EKB$ — угол наклона грани AED к плоскости основания, $\angle EKB = \alpha$.

ΔABD — проекция ΔAED на плоскость основания.

Тогда $S_{\Delta AED} = S_{\Delta CED} = \dfrac{S_{\Delta ABD}}{\cos\alpha}$;

$$2S_{\Delta AED} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

$BK = a\sin\beta$.

Из $\Delta EBK(\angle EBK = 90^\circ)$: $EB = BK\operatorname{tg}\angle EKB = a\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$.

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}AB\cdot EB = \frac{1}{2}a^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha.$$

Боковая поверхность пирамиды:

$$S = 2S_{\Delta ABE} + 2S_{\Delta AED} = a^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha + \frac{a^2\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sin\beta(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{a^2\sin\beta\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{\cos\alpha} = \frac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$.

12.363. Расстояние от середины высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно d. Найти полную поверхность

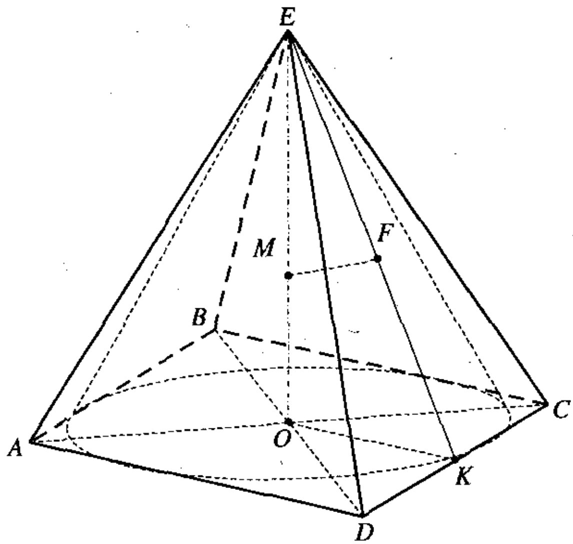


Рис. 12.223

вписанного в пирамиду конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.223), M — ее середина, середина K стороны CD — точка касания основания вписанного конуса с этой стороной, EK — образующая конуса, $\angle EKO = \alpha$.

Основание F перпендикуляра, проведенного из точки M на грань CED, лежит на отрезке EK, $MF = d$.

В ΔEFM $(\angle EFM = 90°)$: $EM = \dfrac{MF}{\sin\angle MEF} = \dfrac{d}{\sin(90° - \alpha)} = \dfrac{d}{\cos\alpha}$.

$$EO = 2EM = \frac{2d}{\cos\alpha}.$$

В ΔEOK $(\angle EOK = 90°)$:

$$OK = EO\operatorname{ctg}\angle EKO = \frac{2d\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2d}{\sin\alpha};$$

$$EK = \frac{EO}{\sin\angle EKO} = \frac{2d}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Полная поверхность конуса:

$$S=\pi\cdot OK(OK+EK)=\pi\cdot\frac{2d}{\sin\alpha}\left(\frac{2d}{\sin\alpha}+\frac{2d}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=\frac{4\pi d^2(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{4\pi d^2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{a}{2}\cos\alpha}=\frac{2\pi d^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi d^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$.

12.364. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найти угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как 11 : 4.

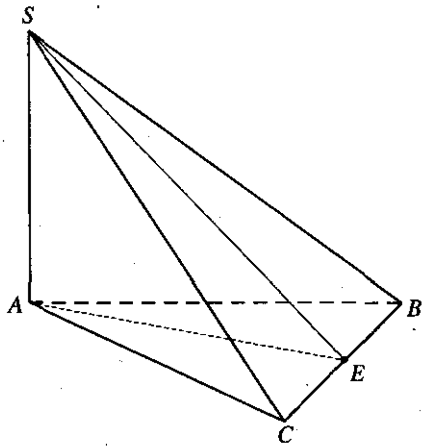


Рис. 12.224

Решение.

Пусть E — середина BC (рис. 12.224). Тогда $AE\perp BC$, $SE\perp BC$ и $\angle SEA$ — угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания пирамиды.

Пусть $\angle SEA=\alpha$, $AE=1$.

Тогда из ΔSAE ($\angle SAE=90°$):

$AS=AE\operatorname{tg}\angle SEA=\operatorname{tg}\alpha$.

$$SE=\frac{AE}{\cos\angle SEA}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Боковая поверхность пирамиды $S_б=2S_{\Delta ASC}+S_{\Delta BSC}=SA\cdot AC+$

$+\frac{1}{2}BC\cdot SE=BC\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$, площадь основания $S_{осн}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=$

$=\frac{1}{2}BC$. Так как $S_б=\frac{11}{4}S_{осн}$, то $BC\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)=\frac{11}{8}BC\Rightarrow$

$$\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{11}{8}\Leftrightarrow 8\sin\alpha+4=11\cos\alpha\Rightarrow$$

$$\frac{16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+4=11\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow 16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+4+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=11-11\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 15\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-7=0\Rightarrow$$

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{7}{5}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

Так как $0°<\alpha<90°$, то $0°<\frac{\alpha}{2}<45°$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0\Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}, \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4},\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

12.365. Радиус основания конуса равен R, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. Через точку P, лежащую на окружности касания шаровой и конической поверхностей, проведена касательная прямая к этой окружности, а через эту прямую проведена плоскость параллельно образующей конуса, проходящей через точку, диаметрально противоположную точке P. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел, проходящее через точку P, перпендикулярное касательной прямой из условия задачи (рис. 12.225). PD – диаметр сечения шара искомой площади.

$\angle BAC=\angle BCA=\alpha$.

Так как $PD \| BA$, то $\angle CPD=\angle CBA=180°-2\alpha$.

$OP\perp BC$ и $\angle OPD=90°-\angle CPD=90°-(180°-2\alpha)=2\alpha-90°$.

$\angle OCO_2=\frac{1}{2}\angle BCA=\frac{\alpha}{2}$, $CO_2=R$, из $\Delta OO_2C\left(\angle OO_2C=90°\right)$:

$OO_2=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. $OP=OO_2=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

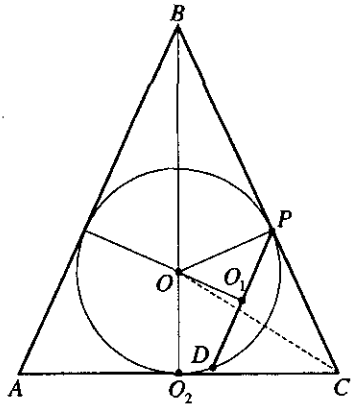


Рис. 12.225

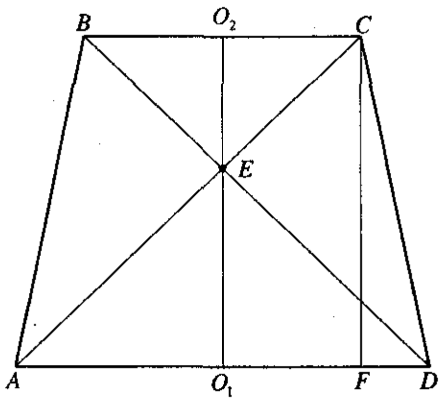


Рис. 12.226

O_1 — середина. PD – центр сечения искомой площади.

В $\Delta OO_1P(\angle OO_1P = 90°)$:

$$O_1P = OP\cos\angle OPD = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cos(2\alpha - 90°) = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha.$$

Площадь сечения $S = \pi O_1P^2 = \pi R^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$.

Ответ: $\pi R^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$.

12.366. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность усеченного конуса.

Решение.

Равнобокая трапеция $ABCD$ (рис. 12.226) – осевое сечение данного усеченного конуса, $AC \perp BD$, $AC = BD = a, \angle CDA = \alpha$, O_1 — середина AD – центр нижнего основания усеченного конуса, O_2 — середина BC – центр верхнего основания.

Пусть $O_2B = r, O_1A = R, CD = L$.

Боковая поверхность усеченного конуса $S_б = \pi(R + r)L$, а полная $S = \pi((R + r)L + R^2 + r^2)$.

ΔAED и ΔBEC — равнобедренные и прямоугольные, $EO_2=r$, $EO_1=R$.

CF – высота трапеции, $CF=O_1O_2=R+r$. ΔAFC — прямоугольный с углом 45°. Отсюда $AF=CF=R+r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. $FD=\dfrac{AD-BC}{2}=R-r$.

В $\Delta CFD(\angle CFD=90^\circ)$: $R-r=FD=CF\operatorname{ctg}\angle CDA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\alpha$;

$L=CD=\dfrac{CF}{\sin\angle CDA}=\dfrac{R+r}{\sin\alpha}$. $R+r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}, R-r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$

$R^2+2Rr+r^2=\dfrac{a^2}{2}; R^2-2Rr+r^2=\dfrac{a^2}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$. Складывая, имеем

$2R^2+2r^2=\dfrac{a^2}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)\Leftrightarrow\ R^2+r^2=\dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}$.

Тогда

$$S=\pi\left((R+r)L+R^2+r^2\right)=\pi\left(\frac{(R+r)^2}{\sin\alpha}+R^2+r^2\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{2\sin\alpha}+\frac{a^2}{4\sin^2\alpha}\right)=\frac{\pi a^2}{2\sin^2\alpha}\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{2\sin^2\alpha}\left(\sin\alpha+\sin 30^\circ\right)=\frac{\pi a^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)}{\sin^2\alpha}$.

12.367. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно l. Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен α. Найти полную поверхность конуса, вписанного в пирамиду.

Решение.

Пусть EO – высота правильной пирамиды $EABC$ (рис. 12.227) и конуса, вписанного в эту пирамиду, D – середина AB. Тогда $ED\perp AB, CD\perp AB, \angle EDC=\alpha$, ED – образующая конуса, *пл.* $AEB\perp$ *пл.* EDC. В плоскости EDC проведем перпендикуляр CF на ED. Тогда

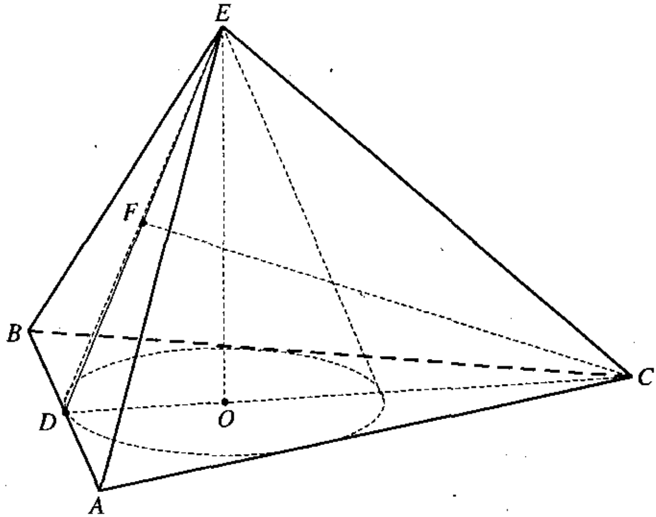


Рис. 12.227

$CF \perp \text{пл} AEB$ и CF – расстояние от вершины C основания пирамиды до противолежащей боковой грани AEB, $CF=l$.

В $\Delta DFC(\angle DFC = 90^\circ)$: $CD = \dfrac{CF}{\sin \angle CDF} = \dfrac{l}{\sin\alpha}$.

$OD = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{l}{3\sin\alpha}$.

В $\Delta EOD(\angle EOD = 90^\circ)$: $ED = \dfrac{DO}{\cos\angle EDO} = \dfrac{l}{3\sin\alpha\cos\alpha}$.

Полная поверхность конуса

$$S = \pi \cdot OD(OD + ED) = \pi \cdot \frac{l}{3\sin\alpha}\left(\frac{l}{3\sin\alpha} + \frac{l}{3\sin\alpha\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi l^2(1+\cos\alpha)}{9\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\pi l^2 \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\pi l^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi l^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$.

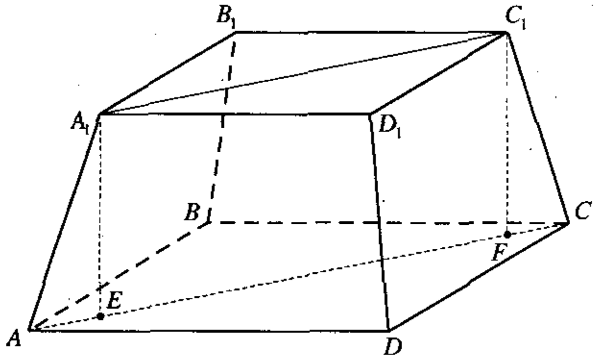


Рис. 12.228

12.368. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно a. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен α. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

Решение.

Диагональное сечение данной правильной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобокая трапеция AA_1C_1C (рис. 12.228). Высоты A_1E и C_1F этой трапеции являются высотами данной усеченной пирамиды.

Пусть $\angle C_1CO = \beta$

CO – проекция CC_1 на плоскость нижнего основания, CD – прямая, лежащая в этой плоскости. Тогда $\cos\angle C_1CD = \cos\angle C_1CO \cos\angle ACD$;

$\cos\alpha = \cos\beta\cos 45°$; $\cos\beta = \sqrt{2}\cos\alpha$;

В $\Delta C_1FC\left(\angle C_1FC = 90°\right)$: $FC = CC_1\cos\angle C_1CF = a\cos\beta$;

$FC_1 = CC_1\sin\angle C_1CF = a\sin\beta$.

$EC = EF + FC = A_1C_1 + FC = a\sqrt{2} + a\cos\beta = a\left(\sqrt{2} + \cos\beta\right)$.

Площадь сечения

$$S = \frac{AC + A_1C_1}{2}C_1F = EC \cdot C_1F = a\left(\sqrt{2} + \cos\beta\right) \cdot a\sin\beta =$$

$$= a^2\left(\sqrt{2} + \cos\beta\right)\sqrt{1 - \cos^2\beta} = a^2\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\alpha\right)\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} =$$

$$= a^2\sqrt{2}\left(1 + \cos\alpha\right)\sqrt{-\cos 2\alpha} = 2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha} \cdot$$

Ответ: $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$.

12.369. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом $\beta\left(\beta>\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ к плоскости основания. Найти площадь сечения, если высота конуса равна h.

Решение.

Пусть BO – высота данного конуса, ΔABC — сечение конуса. Из условия: $\angle OBC=\alpha, BO=h$ (рис. 12.229), E — середина AC.

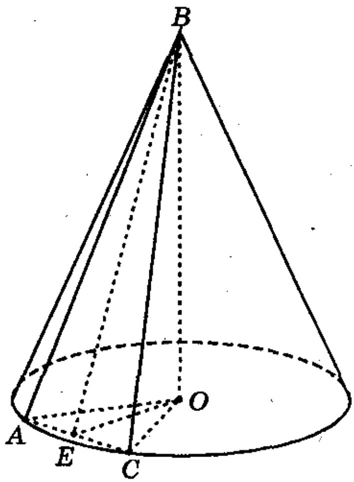


Рис. 12.229

Тогда $OE\perp AC, BE\perp AC, \angle BEO$ — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания конуса, $\angle BEO=\beta$.

В $\Delta BOC\left(\angle BOC=\frac{\pi}{2}\right)$: $BC=\frac{BO}{\cos\angle OBC}=\frac{h}{\cos\alpha}$.

В $\Delta BOE\left(\angle BOE=\frac{\pi}{2}\right)$: $BE=\frac{BO}{\sin\angle BEO}=\frac{h}{\sin\beta}$.

В $\Delta BEC\left(\angle BEC=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$EC=\sqrt{BC^2-BE^2}=h\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\beta}}=$$

$$=\frac{h}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\alpha}=\frac{h}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2}-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{h}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}}=\frac{h\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Площадь сечения $S=BE\cdot EC=\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$.

Ответ: $\dfrac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$.

12.370. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти двугранные углы при основании, если высота пирамиды равна гипотенузе треугольника, лежащего в ее основании.

Решение.

Пусть SO – высота пирамиды $SABC$, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$ и, так как $\angle SAO=\angle SBO=\angle SCO$, то O — центр окружности, описанной около основания пирамиды, — середина гипотенузы AB (рис. 12.230), таким образом, пл.$ASB\perp$пл.ABC.

$OD\perp AC, OE\perp BC$. Тогда $SD\perp AC$, $SE\perp BC$;

$\angle SDO=\varphi$ и $\angle SEO=\gamma$ — искомые линейные углы двугранных углов при основании пирамиды.

Пусть $SO=AB=1$. Тогда $AO=BO=\dfrac{1}{2}$.

В $\Delta ADO(\angle ADO=90°): OD=OA\sin\angle AOD=\dfrac{\sin\alpha}{2}$.

В $\Delta BEO(\angle BEO=90°)$:

$OE=OB\sin\angle OBE=\dfrac{\sin(90°-\alpha)}{2}=\dfrac{\cos\alpha}{2}$.

В $\Delta SOD(\angle SOD=90°): \mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{SO}{OD}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;

$\varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

В $\Delta SOE(\angle SOE=90°): \mathrm{tg}\,\gamma=\dfrac{SO}{OE}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

$\gamma=\mathrm{arctg}\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

Ответ: $90°; \mathrm{arctg}\dfrac{2}{\sin\alpha}; \mathrm{arctg}\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

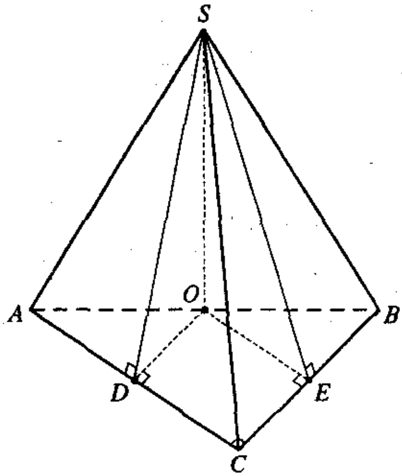


Рис. 12.230

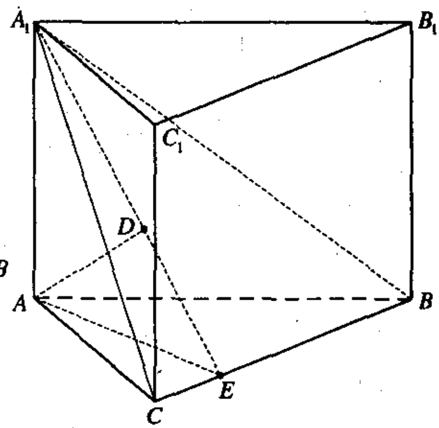


Рис. 12.231

12.371. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1\,(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ лежит равнобедренный треугольник, у которого $AB = BC = a$ и $\angle ABC = \alpha$. Высота призмы равна H. Найти расстояние от точки A до плоскости, проведенной через точки B, C и A_1.

Решение.

Проведем из точки A перпендикуляр AE на BC(рис. 12.231). Тогда $A_1E \perp BC$ и, следовательно, $BC \perp$ *пл.*AEA_1. Таким образом *пл.*$AEA_1 \perp$ *пл.*BA_1C.

В плоскости AEA_1 опустим перпендикуляр AD на A_1E. Тогда $AD \perp$ *пл.*BA_1C и длина перпендикуляра AD — искомое расстояние.

Из $\Delta AEB\left(\angle AEB = 90^\circ\right)$: $AE = AB\sin\angle ABC = a\sin\alpha$.

Из $\Delta A_1AE\left(\angle A_1AE = 90^\circ\right)$: $A_1E = \sqrt{AE^2 + AA_1^2} = \sqrt{H^2 + a^2\sin^2\alpha}$.

$$S_{\Delta AA_1E} = \frac{1}{2}A_1E \cdot AD = \frac{1}{2}AA_1 \cdot AE.$$

Тогда $AD = \dfrac{AA_1 \cdot AE}{A_1E} = \dfrac{aH\sin\alpha}{\sqrt{H^2 + a^2\sin^2\alpha}}$.

Ответ: $\dfrac{aH\sin\alpha}{\sqrt{H^2 + a^2\sin^2\alpha}}$.

12.372. В пирамиде, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, через центр вписанного шара параллельно основанию проведена плоскость. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно k. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

Решение.

Так как все боковые грани данной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то центр O_1 шара, вписанного в эту пирамиду, лежит на ее высоте DO (рис. 12.232).

$\angle DEO$ — угол наклона боковой грани к плоскости основания. Пусть $\angle DEO = \alpha$.

Тогда из $\Delta DOE\left(\angle DOE = 90^\circ\right)$:

$$DO = EO\operatorname{tg}\alpha; \angle O_1EO = \frac{1}{2}\angle DEO = \frac{\alpha}{2};$$

из $\Delta O_1OE\left(\angle O_1OE = 90^\circ\right)$: $OO_1 = EO\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

S — площадь основания пирамиды, S_1 — площадь сечения.

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{DO_1}{DO}\right)^2 = \left(\frac{DO - OO_1}{DO}\right)^2 = \left(\frac{EO\operatorname{tg}\alpha - EO\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{EO\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \frac{\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

По условию $\frac{S_1}{S} = k$.

Тогда $\cos^4\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4k}$ и $\alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$.

Ответ: $\alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$.

12.373. Высота правильной треугольной пирамиды равна H и составляет с боковым ребром угол α. Через сторону основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под углом

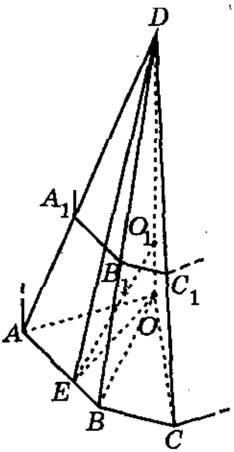


Рис. 12.232

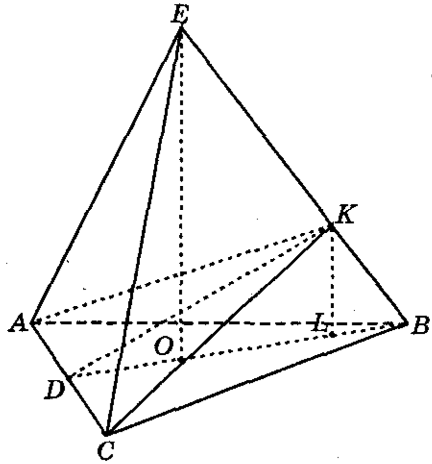


Рис. 12.233

$\beta\left(\beta<\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Найти объем той части пирамиды, которая заключена между этой плоскостью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть EO — высота правильной пирамиды $EABC$ (рис. 12.233), тогда $EO=H$, $\angle OEB=\alpha$, ΔAKC — сечение пирамиды из условия задачи, D — середина AC, $\angle BKD=\beta$.

$$B\ \ \Delta EOB\left(\angle EOB=\frac{\pi}{2}\right): OB=EO\operatorname{tg}\angle OEB=H\operatorname{tg}\alpha.$$

$$BD=\frac{3}{2}OB=\frac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha, BD=\frac{BC\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha, BC=H\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha, S_{\Delta ABC}=\dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3H^2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha}{4}.$

$$\angle KBD=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ \angle KDB=\pi-(\angle KBD+\angle DKB)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta).$$

$$B\ \ \Delta DKB: \frac{DK}{\sin\angle KBD}=\frac{BD}{\sin\angle BKD};$$

$$DK=\frac{BD\sin\angle KBD}{\sin\angle BKD}=\frac{3H\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin\beta}=\frac{3H\sin\alpha}{2\sin\beta}.$$

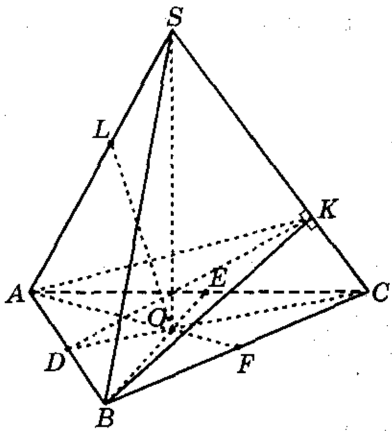


Рис. 12.234

KL — высота пирамиды $KABC$, L лежит на BD.

В $\Delta DLK\left(\angle DLK=\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$KL=DK\sin\angle KDB=\frac{3H\sin\alpha}{2\sin\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta)\right)=\frac{3H\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}.$$

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot KL=\frac{1}{3}\cdot\frac{3H^2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{4}\cdot\frac{3H\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}H^3\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos(\alpha-\beta)}{8\sin\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}\,H^3\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos(\alpha-\beta)}{8\sin\beta}$.

12.374. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями.

Решение.

Пусть SO – высота правильной пирамиды $SABC$, L — середина SA, $OL=AB$ (рис. 12.234), $OL=a$.

Так как OL — медиана прямоугольного $\Delta AOS(\angle AOS=90°)$, то $AS=2OL=2a$.

$\angle AKB$ — угол между смежными гранями SAC и SBC пирамиды.

Пусть $\angle AKB = \alpha, CK = b$.

Тогда $SK = 2a - b$.

В $\Delta BKC(\angle BKC = 90°): BK^2 = BC^2 - KC^2 = a^2 - b^2$.

В $\Delta BKS(\angle BKS = 90°): BK^2 = BS^2 - KS^2 = 4a^2 - (2a-b)^2$.

Тогда $a^2 - b^2 = 4a^2 - (2a-b)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4ab - b^2 \Rightarrow b = \frac{a}{4}$.

Отсюда $BK = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

D — середина AB. Тогда $KD \perp AB$, $\angle BKD = \frac{\alpha}{2}$.

В $\Delta KDB: \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BD}{BK} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$.

Ответ: $\frac{7}{15}$.

12.375. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед; одно его основание лежит в плоскости основания пирамиды, вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Квадрат $ABCD$ — основание пирамиды $SABCD$ (рис. 12.375), боковые грани SBA и SBC перпендикулярны плоскости основания, поэтому их общее ребро SB — высота пирамиды.

BA, BC, BD – проекции ребер SA, SC, SD на плоскость основания, $BA = BC < BD$. Таким образом, SD — большее боковое ребро и $\angle SDB = \beta$.

E_1, B_1, F_1, K_1 — вершины прямоугольного параллелепипеда из условия задачи, принадлежащие ребрам SA, SB, SC, SD пирамиды. Боковое ребро параллелепипеда, проходящее через вершину B_1 (отрезок B_1B), является частью ребра SB пирамиды.

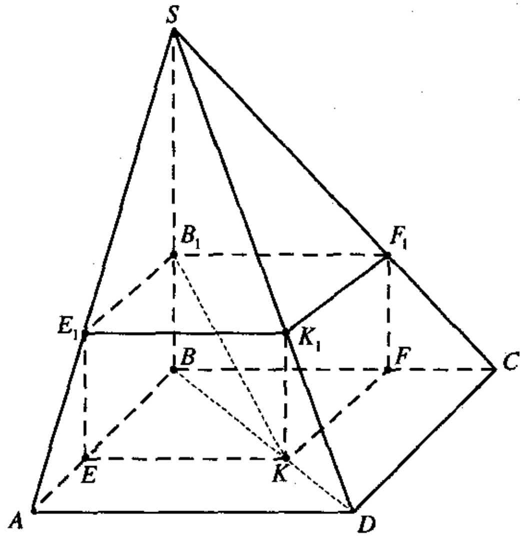


Рис. 12.235

В плоскости SBD проведем перпендикуляр K_1K на BD. Так как плоскость SBD перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то K_1K также перпендикулярен этой плоскости, поэтому K_1K — боковое ребро параллелепипеда. Боковые ребра E_1E и F_1F параллелепипеда лежат в гранях SBA и SBC пирамиды.

BK – диагональ основания параллелепипеда и, так как точка K лежит на отрезке BD, то $\angle ABK = 45^\circ$ и $EBFK$ квадрат.

$\angle B_1KB = \alpha$.

Если $BB_1 = KK_1 = b$, то из $\Delta B_1BK\left(\angle B_1BK = 90^\circ\right)$: $BK = b\operatorname{ctg}\alpha$.

$BD = a\sqrt{2}; KD = BD - BK = a\sqrt{2} - b\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\Delta SBD \sim \Delta K_1KD \Rightarrow \frac{KK_1}{KD} = \frac{SB}{BD} = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \frac{b}{a\sqrt{2} - b\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b\operatorname{ctg}\beta = a\sqrt{2} - b\operatorname{ctg}\alpha \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{a\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$EK = \frac{BK}{\sqrt{2}} = \frac{b\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Объем параллелепипеда

$$V = EK^2 \cdot KK_1 = \frac{a^2\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \cdot \frac{a\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$.

12.376. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Боковая грань пирамиды, проходящая через сторону основания, противолежащую данному углу α, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем конуса, описанного около этой пирамиды, если все ее боковые ребра равны между собой.

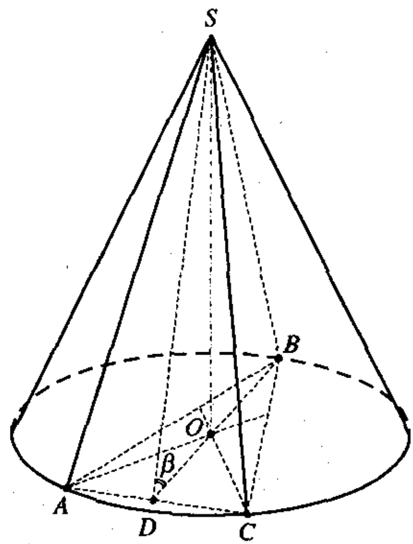


Рис. 12.236

Решение.

Пусть SO – высота пирамиды $SABC$, $AB=BC=a$, $\angle ABC = \alpha, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$, D — середина AC (рис. 12.236).

Так как $SA=SB=SC$, то O – центр окружности, описанной около ΔABC, он лежит на отрезке BD, $\angle SDO$ — угол наклона грани ASC к плоскости основания пирамиды, $\angle SDO = \beta$. Радиус конуса, описанного около пирамиды, $R = OB = \dfrac{AB}{2\sin\angle ACB} = \dfrac{a}{2\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

В $\Delta BDC\left(\angle BDC = 90^\circ\right)$: $BD = BC\cos\angle CBD = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$$OD = BD - OB = a\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

В $\Delta SOD(\angle SOD = 90^\circ)$: $SO = OD \operatorname{tg} \angle SDO = \dfrac{a \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Объем конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \dfrac{\pi a^3 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^3 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

12.377. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

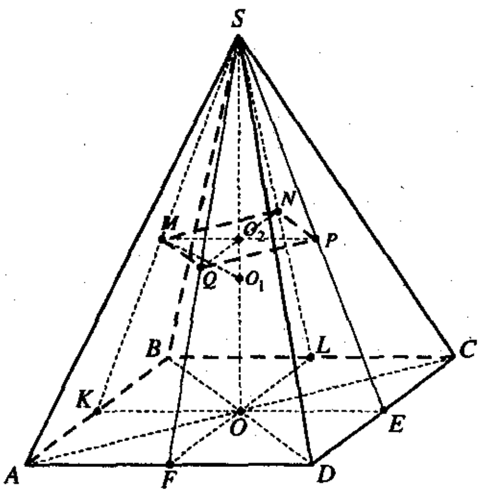


Рис. 12.237

Решение.

Пусть SO – высота правильной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.237), O_1 — центр шара, вписанного в пирамиду, лежащий на высоте SO, $AD = a$.

M, N, P, Q – точки касания шара с боковыми гранями ASB, BSC, CSD, ASD, лежащие на их апофемах SK, SL, SE,

SF, $EP = EO = \dfrac{a}{2}$, $\angle SEO = \alpha$.

$O_1M = O_1N = O_1P = O_1Q$ — радиусы шара, вписанного в пирамиду. Тогда прямоугольные треугольники $O_1MS, O_1NS, O_1PS, O_1QS$ равны по катету и гипотенузе, $SM = SN = SP = SQ$. Так как $\Delta FSE, \Delta FSK, \Delta KSL, \Delta LSE$ — равные и равнобедренные, то $PQ \parallel FE, MQ \parallel FK, MN \parallel KL, NP \parallel LE$. Таким образом, плоскость четырехугольника $MNPQ$ параллельна плоскости основания пирамиды и пирамида $SMNPQ$ подобна пирамиде $SKLEF$. Так как $SKLEF$ – правильная пирамида, то $MNPQ$ – квадрат, SO_2 — высота пирамиды $SMNPQ$, O_2 — центр $MNPQ$.

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{KLEF}}=\left(\frac{SO_2}{SO}\right)^2. \quad S_{KLEF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{a^2}{2}.$$

В плоскости KSE проведем перпендикуляр PP_1 на плоскость $ABCD$. Тогда PP_1 — высота пирамиды искомого объема.

В $\Delta PP_1E\left(\angle PP_1E=90^\circ\right)$: $PP_1=PE\sin\angle PEP_1=\frac{a}{2}\sin\alpha.$

В $\Delta SOE\left(\angle SOE=90^\circ\right)$: $SO=OE\operatorname{tg}\angle SEO=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha.$

$$SO_2=SO-OO_2=SO-PP_1=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha-\frac{a}{2}\sin\alpha=$$

$$=\frac{a\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{SO_2}{SO}\right)^2=\left(\frac{\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=4\sin^4\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{MNPQ}=S_{KLEF}\cdot 4\sin^4\frac{\alpha}{2}=2a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}S_{MNPQ}\cdot PP_1=\frac{1}{3}\cdot 2a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}a^3\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{3}a^3\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

12.378. В шар радиуса R вписана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем усеченной пирамиды.

Решение.

Большее основание $ABCD$ правильной усеченной пирамиды

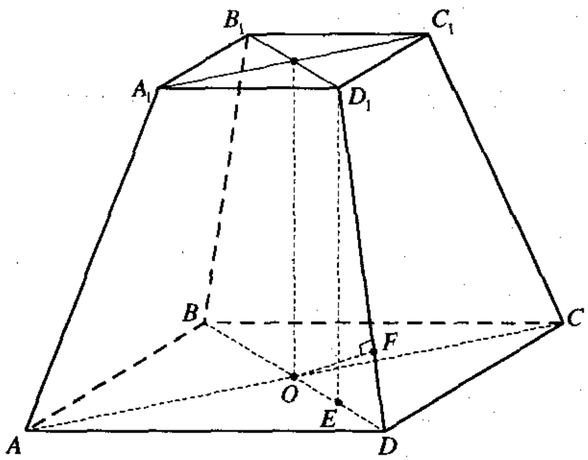


Рис. 12.238

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.238), проходит через центр O шара и вписано в большой круг этого шара, поэтому O – центр квадрата $ABCD$, $OD = OD_1 = R$.

D_1E — высота усеченной пирамиды. $\angle D_1DE = \beta$.

F – середина DD_1 и, так как $OD = OD_1$, то $OF \perp DD_1$.

В $\Delta OFD\left(\angle OFD = 90^\circ\right)$: $DF = OD\cos\angle D_1DE = R\cos\beta$.

$DD_1 = 2DF = 2R\cos\beta$.

В $\Delta DED_1\left(\angle DED_1 = 90^\circ\right)$:

$D_1E = DD_1 \sin\angle D_1DE = 2R\cos\beta\sin\beta = R\sin 2\beta;$

$DE = DD_1 \cos\angle D_1DE = 2R\cos^2\beta.$

$OE = OD - DE = R - 2R\cos^2\beta = -R\cos 2\beta. \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta < 0, 90^\circ < 2\beta < 180^\circ, 45^\circ < \beta < 90^\circ.$

$B_1D_1 = 2\cdot OE = -2R\cos 2\beta.$

Площадь верхнего основания $S_1 = \dfrac{1}{2}B_1D_1^{\,2} = 2R^2\cos^2 2\beta$, площадь нижнего основания $S_2 = \dfrac{1}{2}BD^2 = 2R^2$, высота пирамиды $h = D_1E = R\sin 2\beta$, а ее объем

$$V=\frac{h}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\frac{1}{3}R\sin 2\beta\times$$

$$\times\left(2R^2\cos^2 2\beta+2R^2+2R^2\sqrt{\cos^2 2\beta}\right)=\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\left(1+\cos^2 2\beta-\cos 2\beta\right).$$

Ответ: $\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\left(1+\cos^2 2\beta-\cos 2\beta\right)$.

12.379. На отрезке AB, равном $2R$, построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда CD параллельно AB. Найти объем тела, образованного вращением треугольника ACD вокруг диаметра AB, если вписанный угол, опирающийся на дугу AC, равен α $(AC<AD)$.

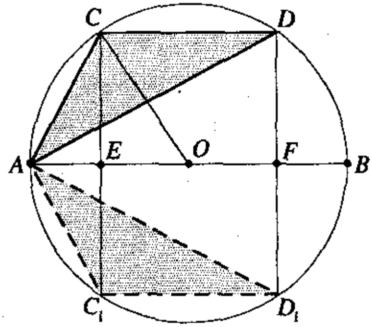


Рис. 12.239

Решение.

Пусть C_1 и D_1 — точки, симметричные C и D относительно диаметра AB (рис. 12.239), E и F – точки пересечения CC_1 и DD_1 с AB, O—центр полуокружности, V_1 — объем конуса, осевое сечение которого — ΔCAC_1, V_2 —объем цилиндра с осевым сечением CDD_1C_1, V_3 —объем конуса с осевым сечением DAD_1.

Искомый объем тела вращения

$$V=V_1+V_2-V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot CE^2\cdot AE+\pi\cdot CE^2\cdot EF-\frac{1}{3}\pi\cdot CE^2\cdot AF=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot CE^2\left(AE+3EF-\left(AE+EF\right)\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot CE^2\cdot EF.$$

Вписанный угол ADC и центральный угол AOC опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle AOC=2\angle ADC=2\alpha$.

В $\Delta CEO\left(\angle CEO=90^\circ\right)$: $CE=CO\sin\angle AOC=R\sin 2\alpha$;

$OE=CO\cos\angle AOC=R\cos 2\alpha$. $EF=2\cdot OE=2R\cos 2\alpha$.

$$V=\frac{2}{3}\pi\cdot CE^2\cdot EF=\frac{2}{3}\pi\cdot R^2\sin^2 2\alpha\cdot 2R\cos 2\alpha=\frac{2}{3}\pi R^3\sin 4\alpha\sin 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R^3\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

12.380. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Наибольшая по площади боковая грань призмы – квадрат. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

Решение.

Пусть ΔABC — основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.240) $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$.

Так как $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AB > AC$ и $AB > BC$, то грань AA_1B_1B, имеющая наибольшую площадь, — квадрат.

Пусть искомый $\angle A_1CB_1 = \beta, AB = A_1B_1 = AA_1 = 1$.

В $\Delta ABC(\angle ACB = 90°)$:

$AC = AB\cos\angle BAC = \cos\alpha$; $BC = AB\sin\angle BAC = \sin\alpha$.

В $\Delta A_1AC(\angle A_1AC = 90°)$: $A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{1+\cos^2\alpha}$.

В $\Delta B_1BC(\angle B_1BC = 90°)$: $B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$.

Из ΔA_1CB_1 по теореме косинусов:

$$A_1B_1^2 = A_1C^2 + B_1C^2 - 2A_1C \cdot B_1C\cos\angle A_1CB_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1+\cos^2\alpha + 1 + \sin^2\alpha - 2\sqrt{(1+\cos^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)}\cdot\cos\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}\cdot\cos\beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}\cdot\cos\beta = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos\beta\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$.

12.381. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α ($\alpha > \pi/4$). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (т.е. ребру, не лежащему с этой вершиной в одной боковой грани).

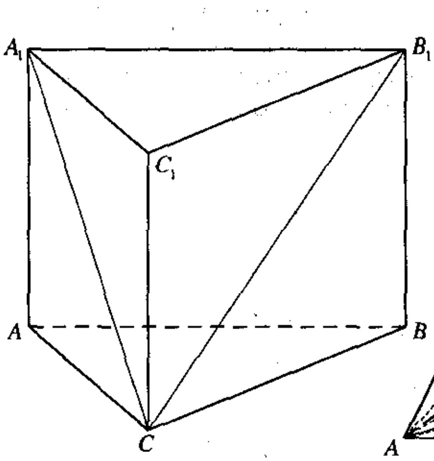


Рис. 12.240

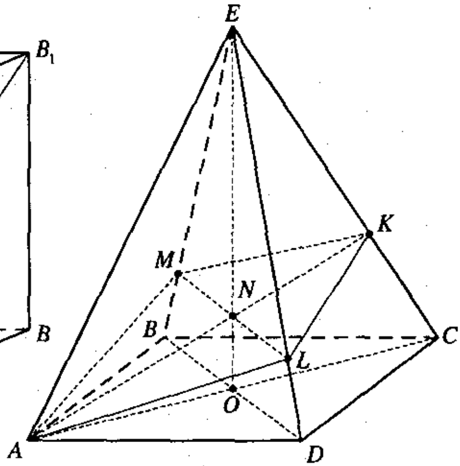


Рис. 12.241

Решение.

Пусть OE – высота правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 12.241), $AD = a$, $\angle ECO = \alpha$.

В плоскости AEC проведем перпендикуляр AK на EC. N – точка пересечения AK и EO. В плоскости BED проведем прямую ML через точку N параллельно BD.

OC – проекция EC на плоскость основания, $OC \perp BD$, поэтому $EC \perp BD$ и, так как $ML \parallel BD$, то $MN \perp EC$.

Следовательно, $EC \perp ML$, $EC \perp AK$ и четырехугольник $AMKL$ – сечение пирамиды из условия задачи.

$BD \perp пл. AEC \Rightarrow BD \perp AK$.

$BD \perp AK, BD \parallel ML \Rightarrow$

$\Rightarrow AK \perp ML$ и площадь сечения $S = \frac{1}{2} AK \cdot ML$.

В $\Delta AKC \left(\angle AKC = \frac{\pi}{2} \right)$: $AK = AC \sin \angle ACK = a\sqrt{2} \sin \alpha$.

В $\Delta EOC \left(\angle EOC = \frac{\pi}{2} \right)$: $EO = OC \operatorname{tg} \angle ECO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

В $\Delta AON \left(\angle AON = \frac{\pi}{2} \right)$:

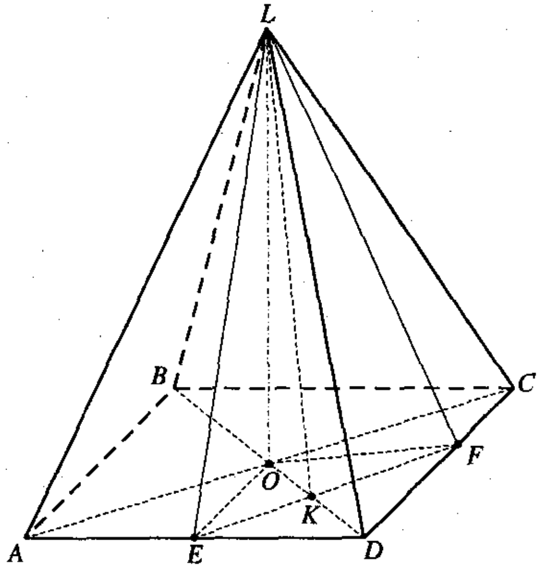


Рис. 12.232

$$NO = AO\,\mathrm{tg}\angle NAO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

$$EN = EO - NO = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\mathrm{tg}\alpha\text{-}\mathrm{ctg}\alpha) = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

$$\Delta MEL \sim \Delta BED \Rightarrow \frac{ML}{BD} = \frac{EN}{EO} \Rightarrow ML = \frac{BD\cdot EN}{EO} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha} =$$

$$= -\frac{2a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{2a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} \Rightarrow S = \frac{1}{2}AK\cdot ML =$$

$$= -\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $-\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.

12.382. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковым ребром угол α. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость, составляющая угол β со второй диагональю. Площадь полученного сечения равна S. Найти высоту пирамиды.

Решение.

Пусть LO – высота правильной пирамиды $LABCD$, ΔELF — сечение пирамиды из условия, $\angle OLD = \alpha, \angle OKL = \beta$ (рис. 12.232), $LO = H$.

В $\Delta LOK(\angle LOK = 90^\circ)$: $OK = H\operatorname{ctg}\beta, LK = \dfrac{H}{\sin\beta}$.

В $\Delta LOD(\angle LOD = 90^\circ)$: $OD = H\operatorname{tg}\alpha$.

ΔEKD — прямоугольный и равнобедренный,

$$EK = KD = OD - OK = H(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) =$$

$$= H\frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = -\frac{H\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = S_{\Delta ELF} = EK \cdot LK = -\frac{H^2\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin^2\beta}; H = \sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}.$$

Ответ: $\sin\beta\sqrt{-\dfrac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$.

12.383. Вершина конуса находится в центре шара, а основание конуса касается поверхности шара. Полная поверхность конуса равна поверхности шара. Найти угол между образующей и высотой конуса.

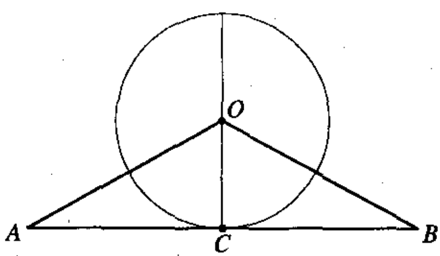


Рис. 12.233

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.233). Пусть образующая конуса $OA = l$, радиус его основания $CA = r$, радиус шара $OC = R$, $\angle AOC$ между образующей и высотой конуса равен α.

В $\Delta ACO(\angle ACO = 90^\circ)$: $r = R\operatorname{tg}\alpha, l = \dfrac{R}{\cos\alpha}$.

Полная поверхность конуса $S_1 = \pi r(r + l) = \pi R^2\operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$,

поверхность шара $S_2 = 4\pi R^2$.

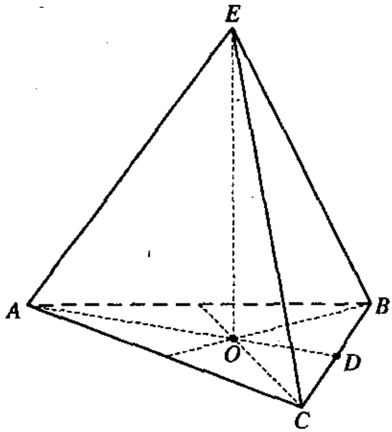


Рис. 12.234

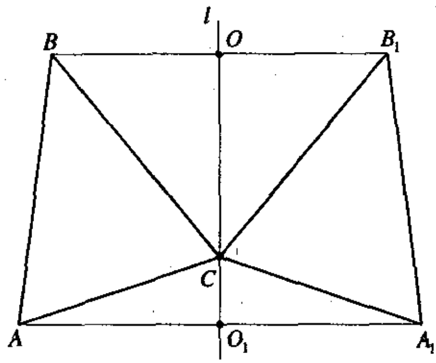


Рис. 12.235

Так как $S_1 = S_2$ и $0° < \alpha < 90°$, то

$$\pi R^2 \operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 4\pi R^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 4 - \operatorname{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right) = \left(4 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha = 16 - 8\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha \Leftrightarrow 9\operatorname{tg}^2\alpha = 16 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}; \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

12.384. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна c, а меньший из острых углов равен α. Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

Решение.

Пусть EO – высота пирамиды $EABC$ (рис. 12.234), O – точка пересечения медиан треугольника ABC, $\angle ACB = 90°, AB = c, \angle BAC = \alpha, 0° < \alpha < 45°$.

Тогда BC – наименьшая сторона основания, а медиана AD, проведенная к этой стороне, — наибольшая медиана, $OA > OB$ и $OA > OC$ $\Rightarrow EA$ – наибольшее боковое ребро пирамиды и $\angle EAO = \beta$.

В $\Delta ABC\left(\angle ACB = 90°\right)$: $BC = c\sin\alpha; AC = c\cos\alpha \Rightarrow$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha;$$

$$CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}c\sin\alpha.$$

В $\Delta ACD(\angle ACD=90^\circ)$: $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{c^2\cos^2\alpha+\frac{1}{4}c^2\sin^2\alpha}=$

$=\frac{1}{2}c\sqrt{4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}c\sqrt{1+3\cos^2\alpha}.$

$$OA=\frac{2}{3}AD=\frac{1}{3}c\sqrt{1+3\cos^2\alpha}.$$

В $\Delta AOE(\angle AOE=90^\circ)$: $EO=AO\operatorname{tg}\angle EAO=\frac{1}{3}c\operatorname{tg}\beta\sqrt{1+3\cos^2\alpha}.$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EO=\frac{c^3}{36}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta\sqrt{1+3\cos^2\alpha}.$

Ответ: $\frac{c^3}{36}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

12.385. *Сторона правильного треугольника равна a. Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол α. Найти объем тела вращения и выяснить, при каком значении α этот объем является наибольшим.*

Решение.

Точки B_1 и A_1 симметричны точкам B и A относительно прямой l, проходящей через вершину C равностороннего $\Delta ABC(AB=a)$ и являющейся осью вращения из условия задачи (рис. 12.235), O – середина BB_1, O_1 — середина AA_1, $\angle BCO=\alpha$. Тогда $\angle ACO_1=120^\circ-\alpha$.

V_1 — объем усеченного конуса с осевым сечением ABB_1A_1,

V_2 и V_3 — объемы конусов с осевыми сечениями BCB_1 и ACA_1.

Объем тела вращения $V=V_1-(V_2+V_3)$.

Если $OC=h_1, O_1C=h_2, OB=r, O_1A=R$, то

$$V=V_1-(V_2+V_3)=\frac{1}{3}\pi(h_1+h_2)(R^2+Rr+r^2)-\frac{1}{3}\pi r^2h_1-$$

$$-\frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h_1 + Rrh_1 + r^2 h_1 + R^2 h_2 + Rrh_2 + r^2 h_2 - r^2 h_1 - R^2 h_2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(R^2 h_1 + Rrh_1 + r^2 h_2 + Rrh_2\right) = \frac{\pi}{3}(R+r)(h_1 R + h_2 r).$$

В $\Delta BOC(\angle BOC = 90^\circ)$: $r = a\sin\alpha; h_1 = a\cos\alpha$.

В $\Delta AO_1C(\angle AO_1C = 90^\circ)$: $R = a\sin(120^\circ - \alpha); h_2 = a\cos(120^\circ - \alpha)$.

Таким образом

$$V = \frac{1}{3}\pi a^3(\sin\alpha + \sin(120^\circ - \alpha))(\cos\alpha\sin(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha)\sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 \cdot 2\sin 60^\circ \cos(60^\circ - \alpha)\sin 120^\circ =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \sin^2 60^\circ \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\pi a^3 \cos(60^\circ - \alpha).$$

Свое наибольшее значение объем принимает при $\cos(60^\circ - \alpha) = 1, \alpha = 60^\circ$.

Ответ: $\frac{\pi a^3}{2}\cos(60^\circ - \alpha); \alpha = 60^\circ$.

12.386. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону BC основания и точку D на боковом ребре AS проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $AD:DS=k$.

Решение.

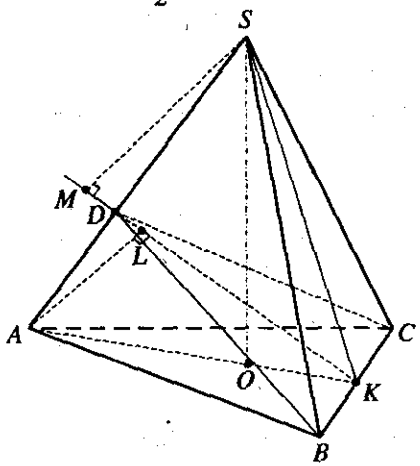


Рис. 12.236

Пусть SO – высота правильной пирамиды $SABC$ (рис. 12.236), K – середина BC, ΔBCD — сечение пирамиды, $\angle SKO = \alpha, AB = a$, искомый $\angle DKA = \gamma$.

Тогда $\angle SKD = \alpha - \gamma, AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и из $\Delta SOK(\angle SOK = 90^\circ)$:

$$SK = \frac{OK}{\cos\angle SKO} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}.$$

$BC \perp$ пл.ASK, пл.$BDC \perp$ пл.ASK. В плоскости ASK проведем перпендикуляры AL и SM на прямую DK. Тогда $AL \perp$ пл.BDC, $SM \perp$ пл.BDC

Если $CM = h_1, AL = h_2$, то из $\Delta ALK(\angle ALK = 90^\circ)$: $h_2 = AK\sin\gamma = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\gamma$.

В $\Delta SMK(\angle SMK = 90^\circ)$: $h_1 = SK\sin(\alpha-\gamma) = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\sin(\alpha-\gamma)$.

$\Delta SMD \sim \Delta AMD \Rightarrow$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AD}{DS} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\gamma}{\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\sin(\alpha-\gamma)} = k \Leftrightarrow \frac{3\cos\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos\alpha\sin\gamma = k\sin\alpha\cos\gamma - k\cos\alpha\sin\gamma \Leftrightarrow (k+3)\sin\gamma\cos\alpha = k\sin\alpha\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha;\ \gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

12.387. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен V. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть a – боковая сторона основания пирамиды, h – высота пирамиды, H – высота цилиндра, R – радиус основания цилиндра – радиус окружности, описанной около основания пирамиды.

Тогда $a = 2R\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, площадь основания пирамиды $S = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = 2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$, $H = \frac{V}{\pi R^2}$, $h = \frac{H}{2} = \frac{V}{2\pi R^2}$.

Объем пирамиды

$$V_1 = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot 2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot\frac{V}{2\pi R^2} = \frac{V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{3\pi}.$$

Ответ: $\frac{V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{3\pi}$.

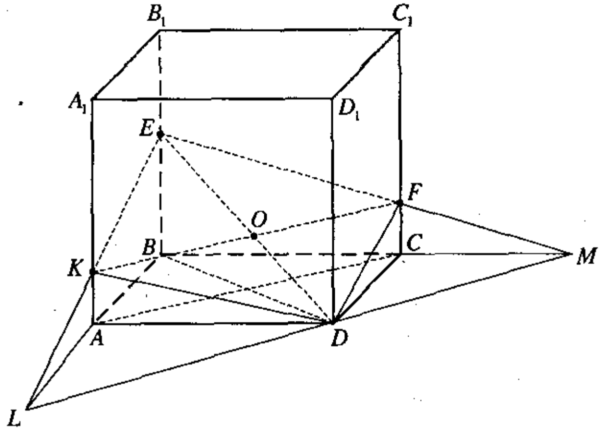


Рис. 12.237

12.388. Через вершину квадрата, лежащего в основании правильной призмы, проведена плоскость параллельно противолежащей диагонали квадрата под углом α к плоскости основания. Найти углы многоугольника в сечении призмы этой плоскостью (предполагается, что высота призмы достаточно велика для того, чтобы этим сечением оказался четырехугольник).

Решение.

Пусть четырехугольник $DKEF$ – сечение правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, из условия задачи (рис. 12.237), L –точка пересечения прямых AB и KE, M – прямых BC и EF. Таким образом, прямая ML есть линия пересечения плоскости основания и плоскости сечения, проходит через точку D и параллельна прямой AC.

$BD \perp AC, AC \parallel LM \Rightarrow BD \perp LM$. Так как BD – проекция ED на плоскость основания, то $ED \perp LM, \angle EDB$ — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания призмы, $\angle EDB = \alpha, AC \perp ED$. Противолежащие грани призмы параллельны, следовательно $EK \parallel FD, EF \parallel KD \Rightarrow KDEF$ — параллелограмм.

Так как прямая AC параллельна плоскости сечения, прямая KF – линия пересечения секущей плоскости с плоскостью A_1AC, то $AC \parallel KF \Rightarrow$ $\Rightarrow KF \perp ED \Rightarrow DKEF$ –ромб.

Если $AC = BD = KF = a$, то из $\Delta EBD \left(\angle EBD = 90^\circ\right)$: $ED = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

O – точка пересечения KF и ED. $\text{tg}\angle KDO = \frac{KO}{DO} = \frac{KF}{DE} = \cos\alpha$. Таким образом, $\angle KDO = \text{arctg}(\cos\alpha)$, $\angle KDF = 2\angle KDO = 2\,\text{arctg}(\cos\alpha)$, $\angle EKD = 180^\circ - 2\,\text{arctg}(\cos\alpha)$.

Ответ: $2\,\text{arctg}(\cos\alpha), 180^\circ - 2\,\text{arctg}(\cos\alpha)$.

12.389. Большее основание равнобедренной трапеции равно a, а острый угол равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большего основания. Найти объем тела вращения.

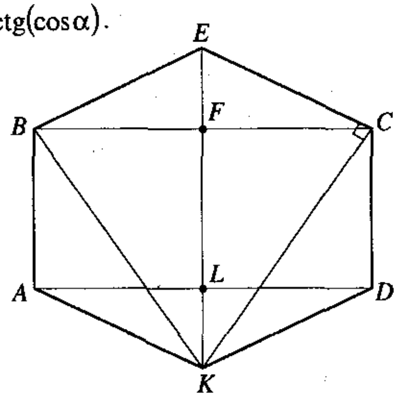


Рис. 12.238

Решение.

Шестиугольник $ABECDK$ (рис. 12.238) – осевое сечение тела, полученного в результате вращения равнобокой трапеции $ECDK$ около ее большего основания, $EK = a$, $\angle KEC = \alpha$, $KC \perp EC$ (рис. 12.238). DL и CF – высоты трапеции $ECDK$.

В $\Delta ECK\left(\angle ECK = \frac{\pi}{2}\right)$: $EC = EK\cos\angle KEC = a\cos\alpha$.

В $\Delta EFC\left(\angle EFC = \frac{\pi}{2}\right)$: $EF = EC\cos\angle KEC = a\cos^2\alpha$; $CF =$
$= EC\sin\angle KEC = a\sin\alpha\cos\alpha$.

V_1 — объем цилиндра с осевым сечением $ABCD$, V_2 — объем конуса с осевым сечением BEC.

Искомый объем тела вращения:

$$V = V_1 + 2V_2 = \pi\cdot FC^2\cdot CD + \frac{2}{3}\pi\cdot FC^2\cdot EF = \pi\cdot FC^2\left(CD + \frac{2}{3}EF\right) =$$

$$= \pi\cdot FC^2\left(CD + 2EF - 2EF + \frac{2}{3}EF\right) = \pi\cdot FC^2\left(EK - \frac{4}{3}EF\right) =$$

$$= \pi a^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\left(a - \frac{4}{3}a\cos^2\alpha\right) = \frac{\pi a^3}{4}\sin^2 2\alpha\left(1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\left(\frac{3}{4} - \cos^2\alpha\right) = \frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\left(\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\alpha\right) =$$

$$=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

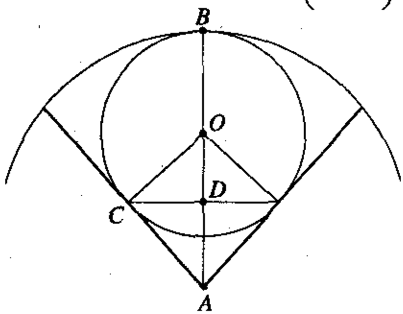


Рис. 12.239

12.390. В шаровой сектор радиуса R вписан шар (рис. 12.239). Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен α.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел.

В $\Delta OCA\left(\angle OCA=\frac{\pi}{2}\right)$:

$OA=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, где r – радиус данного шара.

$$R=AB=AO+OB=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+r=r\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$r=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

ΔCDO и ΔACO — прямоугольные с общим острым углом при вершине O. Тогда $\angle OCD=\angle OAC=\frac{\alpha}{2}$. В $\Delta CDO\left(\angle CDO=\frac{\pi}{2}\right)$ искомый радиус окружности касания $DC=CO\cos\angle OCD=r\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

Ответ: $\frac{R\sin\alpha}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

Решения к главе 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

13.211. Цифры некоторого трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z образуют геометрическую прогрессию, это значит $xz=y^2$. Из условия получаем:

$$100z+10y+x=100x+10y+z-594 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-z=6;\ 10y+z=10z+y+18 \Rightarrow y-z=2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xz=y^2, \\ x-z=6, \\ y-z=2, \end{cases} \Rightarrow x=8, y=4, z=2.$$

Ответ: 842.

13.212. На покупку велосипедов спортивный клуб выделил n руб. Так как вследствие снижения цен стоимость каждого велосипеда уменьшилась на a руб., то велосипедов было куплено на b больше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов?

Решение.

Пусть купили x велосипедов, хотели купить — $(x-b)$. Цена одного велосипеда до снижения цен: $\frac{n}{x-b}$, после снижения: $\frac{n}{x-b}-a$.

Тогда $\left(\frac{n}{x-b}-a\right)x=n$, откуда $x=\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4nba}}{2a}=$

$$=\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}.$$

Ответ: $\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$.

13.213. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительность этих механизмов не одинакова и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однако на этот раз совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно с присущей ему производительностью?

Решение.

Пусть весь объем работы равен единице, первый механизм выполняет задание за x часов, а второй — за y часов. Тогда производительность первого механизма $\frac{1}{x}$, а второго — $\frac{1}{y}$, общая производительность при совместной работе $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{30},\\ 1-6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{40}{y},\end{cases}\Rightarrow x=75\text{ ч}, y=50\text{ ч}.$$

Ответ: за 75 и 50 ч.

13.214. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник прилажены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 13.1). Найти отношение сторон прямоугольника, если известно, что его периметр в 4 раза больше радиуса окружности.

Решение.

Пусть $AB = x$; $CB = y$.

Тогда (см. рис. 13.1): $QC = a$,

$x = 2QC = 2a$, $y = R + \sqrt{R^2 - a^2}$.

По условию $2x + 2y = 4R$ или

$x + y = 2R$.

Значит $2a + R + \sqrt{R^2 - a} = 2R$, откуда $a = \frac{4}{5}R$. Значит $x = \frac{8}{5}R$; $y = \frac{2}{5}R$,

откуда $\frac{x}{y} = \frac{4}{1}$.

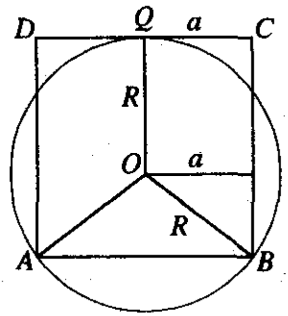


Рис.13.1

Ответ: 4 : 1.

13.215. От пункта A вдоль шоссе удаляется гонщик, поддерживающий все время постоянную скорость a км/ч. Спустя 30 мин из того же пункта стартовал второй гонщик с постоянной скоростью 1,25 a км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик, если известно, что он развил скорость 1,5 a км/ч и одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

Решение.

Пусть t — время, которое проехал третий гонщик до того, как догнал первого. Значит он проехал $(1{,}5a \cdot t)$ км. Первый гонщик ехал t_1 ч.

Значит $t_1 \cdot a = t \cdot 1{,}5a$.

Второй гонщик ехал $\left(t_1 - \frac{1}{2}\right)$ ч и проехал $1{,}25a\left(t_1 - \frac{1}{2}\right)$ км.

Решив систему $\begin{cases} a \cdot t_1 = 1{,}5at, \\ 1{,}25a\left(t_1 - \frac{1}{2}\right) = 1{,}5at, \end{cases}$ находим $t = \frac{5}{3}$ ч; $t_1 = 2{,}5$ ч.

Значит третий гонщик выехал после старта первого через $t_1 - t = \frac{5}{6}$ ч = 50 мин.

Ответ: через 50 минут.

13.216. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если первый мотоциклист приходит в B на 3 ч раньше, чем второй в A.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первого мотоциклиста; y км/ч — скорость второго. Первый проходит 250 км за $\frac{250}{x}$ ч; второй — 200 км за $\frac{200}{y}$ ч. По условию $\frac{250}{x}=\frac{200}{y}$.

Первый приходит в B за $\frac{600}{x}$ ч; второй в A за $\frac{600}{y}$ ч.

По условию $\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}$.

Решив систему $\begin{cases}\frac{250}{x}=\frac{200}{y},\\ \frac{600}{x}+3=\frac{600}{y},\end{cases}$ находим $x = 50$ км/ч, $y = 40$ км/ч.

Ответ: 40 и 50 км/ч.

13.217. Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от A до B ровно t ч, а на обратный путь от B до A — половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста на подъеме, $(x + a)$ км/ч — на спуске.

Пусть y км — длина подъема, $(b - y)$ км — спуска. Тогда:

$$\begin{cases}\frac{y}{x}+\frac{b-y}{x+a}=t,\\ \frac{b-y}{x}+\frac{y}{x+a}=\frac{t}{2}.\end{cases}$$

Решив систему, находим $x=\frac{4b-3at+\sqrt{9t^2a^2+16b^2}}{6t}$.

$$x+a=\frac{4b+3at+\sqrt{9t^2a^2+16b^2}}{6t}.$$

Ответ: $\frac{4b\pm3at+\sqrt{9t^2a^2+16b^2}}{6t}$ км/ч; $4b > 3at$.

13.218. Результат умножения двух положительных чисел, полученный вычислителем, показался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось17 и в остатке 8. Тогда вычислитель понял свою ошибку: оказалось, что цифра десятков, записанная им в произведении, больше истинной цифры десятков на 6. Какие числа перемножал вычислитель, если известно, что их разность равна 36?

Решение.

Пусть a — меньшее число; $(a+36)$ — большее.

Правильное произведение этих чисел: (a^2+36a), а число, полученное вычислителем: $(a^2+36a+60)$.

По условию $17(a+36)+8=a^2+36a+60$, откуда $a=16$, $a+36=52$.

Ответ: 16 и 52.

13.219. Население города ежегодно увеличивается на 1/50 наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

Решение.

Используя формулу сложных процентов $x\left(\frac{1}{50}+1\right)^n=3x$, находим $n=\log_3 1{,}02\approx 55$.

Ответ: ≈ 55 лет.

13.220. Юноша пошел к железнодорожной станции, до которой от его дома было 10,5 км. Через полчаса из того же дома вслед за юношей по той же дороге вышел его брат, который, идя со скоростью 4км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и пошел с прежней скоростью. С какой скоростью шел юноша, если известно, что он шел всю дорогу равномерно, а его брат вернулся домой в тот момент, когда юноша подошел к станции?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость юноши. Брат догнал юношу через t ч после выхода из дома. Тогда юноша дошел до железной дороги за $(2t+0{,}5)$ ч.

По условию $\begin{cases} x(2t+0{,}5)=10{,}5, \\ x(t+0{,}5)=4t, \end{cases}$ откуда $x=3$ км/ч.

Ответ: 3 км/ч.

13.221. Из пунктов A и C в пункт B выехали одновременно два всадника и несмотря на то, что C отстоял от B на 20 км дальше, чем A от B, прибыли в B одновременно. Найти расстояние от C до B, если всадник, выехавший из C, проезжал каждый километр на 1 мин 15 с скорее, чем всадник, выехавший из A, и всадник, выехавший из A, приехал в B через 5 ч.

Решение.

Пусть $AB = x$ км, $BC = x + 20$ км.

Скорость всадника из A — $\frac{x}{5}$ км/ч, всадника из C — $\frac{x+20}{5}$ км/ч.

По условию $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+20} = \frac{1}{48}$, откуда $x = 60$ км.

Тогда $CB = x + 20 = 80$ км.

Ответ: 80 км.

13.222. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся до B путь проходил со скоростью, на 4 км/ч большей прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся до B путь был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

Решение.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость поезда, t ч — время до его остановки.

Тогда $\begin{cases} x \cdot t = 40, \\ (x+4)\left(t + \frac{1}{4}\right) = 63, \end{cases}$ откуда $x = 80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

13.223. Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. В другой раз рыбак воспользовался моторной лодкой, увеличив тем самым собственную скорость передвижения относительно воды втрое, и дошел от A до B за 45 мин. Требуется определить скорость течения, считая ее постоянной.

Решение.

Пусть υ_T км/ч — скорость течения; $\upsilon_Л$ км/ч — скорость лодки; a км/ч — расстояние между A и B. Тогда по условию

$$\begin{cases} (\upsilon_Л + \upsilon_T) \cdot 4 = 12 + a, \\ (\upsilon_Л - \upsilon_T) \cdot 6 = 12 + a, \\ a = (3\upsilon_Л + \upsilon_T) \cdot 0{,}75, \end{cases} \text{ откуда } \upsilon_T = 1 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 1 км/ч.

13.224. Юноша, возвращаясь на велосипеде из отпуска, проехал 246 км и потратил на этот путь на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальные 276 км так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на h км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, превысив ее лишь один раз — в последний день пути — на $2h$ км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой, если известно, что искомое число дней — целое?

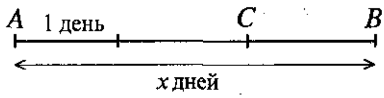


Рис.13.2

Решение.

Пусть отрезок AB (рис. 13.2) соответствует всему пути юноши и количеству x дней, за которые он должен проехать при его норме V км в день. По условию, отрезок времени AC на 1 больше половины отрезка времени CB.

Таким образом, $AC-1=\dfrac{CB}{2} \Leftrightarrow x-CB-1=\dfrac{CB}{2} \Leftrightarrow CB=\dfrac{2x-2}{3}$ дней.

Возьмем за 1 путь, соответствующий отрезку CB. В случае первого варианта $\dfrac{2x-2}{3}(V+h)=1$, а в случае второго $\left(\dfrac{2x-2}{3}-1\right)V+(V+2h)=1$. Исключая из этих двух уравнений V, учитывая, что x — целое, получаем $x = 4$.

Ответ: за 4 дня.

13.225. Некоторый заказ выполняют в мастерской №1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской №2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской №3. Если при тех же условиях работы мастерские №1 и №2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения окажется таким же, как в одной мастерской №3. На сколько часов больше или меньше одного семичасового рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской №3?

Решение.

Пусть x ч — время выполнения заказа в мастерской №3. Тогда в 1-й мастерской это время равно $x + 10$ ч, во второй — $x + 6,4$ ч.

По условию $\dfrac{1}{x+10}+\dfrac{1}{x+6,4}=\dfrac{1}{x}$, откуда $x = 8$ ч.

Значит выполнение заказа в мастерской №3 длится на 1 час дольше семичасового рабочего дня.

Ответ: больше на 1 ч.

13.226. Рукопись в 80 страниц отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет перепечатывать рукопись через 3 ч после второй, то каждая из них перепечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся неперепечатанными 15 страниц. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

Решение.

Пусть 1-я машинистка может перепечатать рукопись за x ч; 2-я — за y ч. 1-я печатает одну страницу за $\frac{x}{80}$ ч, 2-я — за $\frac{y}{80}$ ч. Скорость работы 1-й: $\frac{80}{x}$ стр./ч, 2-й: $\frac{80}{y}$ стр./ч.

По условию: $\begin{cases} \frac{40y}{80} - \frac{40x}{80} = 3, \\ \frac{80}{x} \cdot 5 + \frac{80}{y} \cdot 5 = 80 - 15, \end{cases}$ откуда $x = 10$ ч, $y = 16$ ч.

Ответ: 16 и 10 ч.

13.227. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 ч после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение.

Пусть 1-й рабочий может выполнить всю работу за x ч, второй — за y ч. Производительность 1-го: $\frac{1}{x}$; 2-го: $\frac{1}{y}$.

По условию $\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot 3 + \frac{1}{y} \cdot 2 = 1 - \frac{9}{20}, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1, \end{cases}$ откуда $x = 10$ ч, $y = 8$ ч.

Ответ: 10 и 8 ч.

13.228. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 ч, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какой промежуток времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение.

Пусть 1-й рабочий может выполнить всю работу за x ч, второй — за y ч.

Производительность 1-го: $\frac{1}{x}$, второго — $\frac{1}{y}$.

По условию $\begin{cases}\frac{1}{x}\cdot 2+\frac{1}{y}\cdot 5=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 3=1-0{,}05,\end{cases}$ откуда $x = 12$ ч; $y = 15$ ч.

Ответ: 12 и 15 ч.

13.229. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

Решение.

Пусть пропорция имеет вид $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. По условию $a+d=14$, $c+b=11$, $a^2+b^2+c^2+d^2=221$.

Решив систему $\begin{cases}ad=bc,\\ a+d=14,\\ b+c=11,\\ a^2+b^2+c^2+d^2=221,\end{cases}$

находим $a = 12$; $b = 8$; $c = 3$; $d = 2$.

Ответ: 12, 8, 3, 2.

13.230. Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

Решение.

Так как одно число больше другого на 50, то число единиц у обоих чисел одинаково. Пусть $10x_1+y$, $10x_2+y$ — искомые числа.

По условию $10x_1+y-(10x_2+y)=50$, откуда $x_1-x_2=5$ (1), также имеем систему

$\begin{cases}10x_1+y=x_1^2+x_1y+y^2,\\ 10x_2+y=x_2^2+x_2y+y^2,\end{cases}$ откуда

$10(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 + (x_1 - x_2)y$ или $50 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 5y$, откуда $10 = x_1 + x_2 + y$ (2).

Из (1) имеем $x_1 = 5 + x_2$. Значение x_1 подставляем в (2):

$10 = 5 + 2x_2 + y$, откуда $x_2 = \dfrac{5 - y}{2}$.

Так как $1 \le x_2 \le 9$ и x_2 — натуральное число, то $y = 1$ или $y = 3$.

Если $y = 1$, то $x_2 = 2$ и из (1) $x_1 = 7$, т.е. получаем числа 71 и 21. Но для них не выполняется наша система.

Если $y = 3$, то $x_2 = 1$ и $x_1 = 6$, т.е. имеем числа 63 и 13, для которых верна наша система.

Ответ: 13 и 63.

13.231. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

Решение.

Пусть в одном сплаве x% хрома, во втором y%, т.е. x кг хрома в 1 кг чугуна одного сорта, y кг — в 1 кг другого сорта.

По условию $\begin{cases} 5x + y = 6 \cdot 2y, \\ x + y = 2 \cdot 0{,}08, \end{cases}$

откуда $x = 0{,}11 = 11\%$, $y = 0{,}05 = 5\%$.

Ответ: 5 и 11%.

13.232. От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся от пляжа, и успел пройти еще 9/28 км от места первой встречи с автобусом, как его догнал тот же автобус, который дошел до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что они постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

Решение.

Пусть $v_м$, $v_а$ — скорости мальчика и автобуса соответственно.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{15}{60} v_м + \frac{15-4}{60} v_а = 2 \cdot 4{,}5, \\ \frac{9}{28 v_м} = \frac{4}{60} + \frac{2\frac{15}{60} v_м + \frac{9}{28}}{v_а}, \end{cases}$$

откуда $v_м = 3$ км/ч, $v_а = 45$ км/ч.

Ответ: 3 и 45 км/ч.

13.233. Турист возвращался из отпуска на велосипеде. На первом участке пути, составляющем 246 км, он проезжал в среднем за каждый день на 15 км меньше, чем проезжал за каждый день на последнем участке пути, составляющем 276 км. Он прибыл домой точно в срок — к концу последнего дня отпуска. Известно также, что на преодоление первого участка пути ему потребовалось на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. За сколько дней до конца отпуска отправился турист домой?

Решение.

Пусть турист проехал 267 км за x дней; и 246 км за $\frac{x}{2}+1$. На первом участке в 246 км его скорость была υ км/день, на втором в 276 км — $(\upsilon+15)$ км/день.

Тогда $\begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right)\upsilon = 246, \\ x(\upsilon+15) = 276, \end{cases}$

откуда $x=2$.

Значит, турист отправился домой за $x+\frac{x}{2}+1=4$ дня до конца отпуска.

Ответ: за 4 дня.

13.234. Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

Решение.

Пусть в первом сплаве 6 кг меди составляют x%, во втором 12 кг — y%; m_1 — масса первого сплава, m_2 — масса второго. По условию

$$\begin{cases} 0{,}01x \cdot m_1 = 6, \\ 0{,}01y \cdot m_2 = 12, \\ 0{,}36(m_1 + m_2) = 18, \\ x + 40 = y, \end{cases}$$

откуда $x = 20\%$, $y = 60\%$.

Ответ: 20 и 60%.

13.235. В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю на всю дистанцию потребовалось на 1 мин больше, чем первому. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на 1/6 часть дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию меньше, чем за 10 мин?

Решение.

Пусть l — длина дистанции, v_1, v_2, $v_м$ — скорости первого, второго автомобилей и мотоцикла соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{l}{v_2} - \dfrac{l}{v_1} = \dfrac{1}{60}, \\ v_1 = 4v_м, \\ \dfrac{v_2}{60} - \dfrac{v_м}{60} = \dfrac{l}{6}, \end{cases}$$

откуда $v_1 = 120l$, $v_2 = 40l$, $v_м = 30l$ или $v_1 = 20l$, $v_2 = 15l$, $v_м = 5l$.

Так как $\dfrac{l}{v_м} < \dfrac{10}{60}$, то значение $v_м = 5l$ не подходит, поэтому $v_2 = 40l$.

Тогда второй автомобиль за 1 мин проходит $\dfrac{40l}{60l} = \dfrac{2}{3}$ дистанции.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

13.236. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. К концу первых двух часов он выиграл 10% от числа всех играемых партий, а 8 противников свели вничью свои партии с мастером. За следующие два часа мастер выиграл 10% партий у оставшихся противников, две партии проиграл, а остальные 7 партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

Решение.

Пусть игра шла на x досках. Когда за первые 2 часа было сыграно $(0{,}1x + 8)$ партий, за вторые 2 ч: $0{,}1(x - 0{,}1x - 8) + 7 + 2$.

Тогда

$0{,}1x+8+0{,}1(x-0{,}1x-8)+7+2=x,$

откуда $x = 20$.

Ответ: на 20 досках.

13.237. Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

Решение.

Если было задумано число x, то приписав справа цифру y, мы получаем число $10x + y$.

По условию $10x+y-x^2=8x \Leftrightarrow x^2-2x-y=0, \quad x=1\pm\sqrt{1+y}.$
Тогда возможные значения y таковы: 0, 3, 8. Отсюда задуманное число есть 2, 3, 4 соответственно.

Ответ: приписали 0, либо 3, либо 8; было задумано соответственно 2, 3, 4.

13.238. Стрелку в тире были предложены следующие условия: каждое попадание в цель вознаграждается пятью жетонами, но за каждый промах отбирается три жетона. Стрелок был не очень метким. После последнего (n-го) выстрела у него не осталось ни одного жетона. Из скольких выстрелов состояла серия и сколько было удачных выстрелов, если $10 < n < 20$?

Решение.

Пусть было k попаданий, а значит $n-k$ промахов.

Тогда $5k-3(n-k)=0, \quad 8k=3n \Rightarrow k=\frac{3n}{8}$. Так как n и k — натуральные числа, то $n = 8m$. Для $10 < n < 20$ подходит только значение $n = 16$. Итак, было сделано 16 выстрелов, из них 6 удачных.

Ответ: из 16 выстрелов 6 удачных.

13.239. К цифровой записи некоторого задуманного двузначного числа приписали справа это же число и из полученного таким образом числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа; в частном получили половину задуманного числа, а в остатке — задуманное число. Какое число задумано?

Решение.

Пусть a — задуманное число. Тогда новое число $100a + a = 101a$.

По условию $101a-a^2=0{,}04a^2\cdot\frac{1}{2}a+a$, откуда $a = 50$.

Ответ: 50.

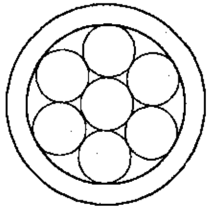


Рис. 13.3

13.240. В плоское кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, вложено семь равных соприкасающихся дисков (рис. 13.3). Площадь кольца равна сумме площадей всех семи дисков. Доказать, что ширина кольца равна радиусу одного диска.

Решение.

Пусть r — радиус диска; R_1 — радиус внешней окружности; R_2 — внутренней окружности. Площадь дисков — $7 \cdot \pi r^2$; площадь кольца — $\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)$.

По условию $7 \cdot \pi r^2 = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)$ (1), $R_2 = 3r$ (рис. 13.3).

Тогда допустим $R_1 - R_2 = r$, откуда $R_1 = 4r$.

Подставив в (1), получим

$16r^2 - 9r^2 = 7r^2$,

$7r^2 = 7r^2$,

$0 = 0$.

Что и требовалось доказать.

13.241. К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число и из полученного таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до 11. Доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

Решение.

Пусть a — задуманное число, x — приписанное; $10a + x$ — новое.

По условию $10a + x - a^2 = (11 - x)a$, откуда $a = x$.

Что и требовалось доказать.

13.242. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30 м^3 больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

Решение.

Пусть $x + 30$ м^3/ч — скорость наполнения первого бассейна, x м^3/ч — второго; V м^3 — объем бассейнов; t — время, когда в бассейнах было V м^3.

По условию $\begin{cases} (x+30)t + xt = V, \\ \left(t+2\dfrac{2}{3}\right)(x+30) = V, \\ (t+6)x = V, \end{cases}$

откуда $x = 60$.

Ответ: 60 и 90 м^3.

13.243. Одна из трех бочек наполнена водой, а остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется 1/4 часть бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется 2/9 количества содержавшейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения потребуется еще 50 ведер. Определить вместимость каждой бочки.

Решение.

Пусть x ведер — вместимость первой бочки, тогда вместимость второй — $\dfrac{3}{4}x$, третьей — $\dfrac{7}{9}\left(\dfrac{3}{4}x\right)$.

По условию $\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3}{4}x + 50 = x$,

откуда $x = 120$ ведер,

$\dfrac{3}{4}x = 90$ ведер,

$\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3}{4}x = 70$ ведер.

Ответ: 120, 90 и 70 ведер.

13.244. Два шарика помещены в цилиндрическую банку, диаметр которой 22 см (рис. 13.4). Если влить в банку 5 л воды, то покроются ли полностью водой оба шарика, диаметры которых 10 и 14 см?

Решение.

Рассмотрим плоскость β, которая перпендикулярна основанию цилиндра и содержит прямую, на которой лежат центры шаров O_1 и O_2. ΔO_1BO_2 — прямоугольный, $O_1O_2 = 5 + 7 = 12$ см, $O_2B = 22 - (5 + 7) = 10$ см.

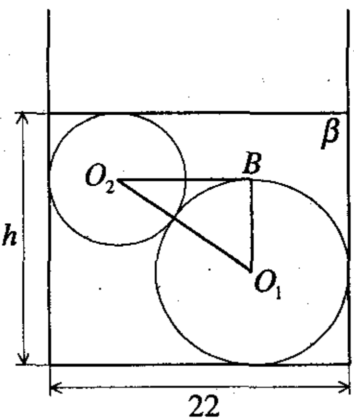


Рис. 13.4

По теореме Пифагора: $BO_1 = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}$ см.

Тогда $h = 7 + 2\sqrt{11} + 5 = 12 + 2\sqrt{11}$ см. Объем воды, необходимый для покрытия шаров: $V = h \cdot \pi \cdot \frac{22^2}{4} - \frac{4}{3}\pi\left(7^3 + 5^3\right) \approx 5123$ см³.

Так как 5123 > 5000 (см³), то шарики полностью не покроются водой.

Ответ: немного не покроются.

13.245. Цистерну в течение 5 ч наполнили водой. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим. Оказалось, что в первые четыре часа было налито воды вдвое больше, чем в последние четыре часа. Каков объем цистерны, если известно еще, что за первые два часа в нее было налито 48 м³ воды?

Решение.

Пусть в первый час в цистерну поступило b м³ воды. Тогда во второй час поступило bq м³, где $q > 0$, $q < 1$, в третий — bq^2 м³, в четвертый — bq^3 м³, в пятый — bq^4 м³.

По условию

$$\begin{cases} b + bq + bq^2 + bq^3 = 2\left(bq + bq^2 + bq^3 + bq^4\right), \\ b + bq = 48, \end{cases}$$

откуда $q = \frac{1}{2}$, $b = 32$ м³.

Тогда объем цистерны

$$V = \frac{b\left(1 - q^5\right)}{1 - q} = 62 \text{ м}^3.$$

Ответ: 62 м³.

13.246. Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым количеством равных кругов, касающихся друг друга и сторон этих фигур. Сколько кругов для этого потребуется, если к стороне треугольника примыкает на 14 кругов больше, чем к стороне квадрата (рис. 13.5).

Решение.

Пусть к стороне квадрата примыкает n кругов, тогда в квадрате имеется n^2 кругов. К стороне треугольника примыкает $n + 14$ кругов, следовательно, в треугольнике содержится

$$1 + 2 + \ldots + (n + 14) = \frac{(n+15)(n+14)}{2} \text{ кругов.}$$

По условию $n^2 = \frac{(15+n)(n+14)}{2} \Rightarrow n = 35.$

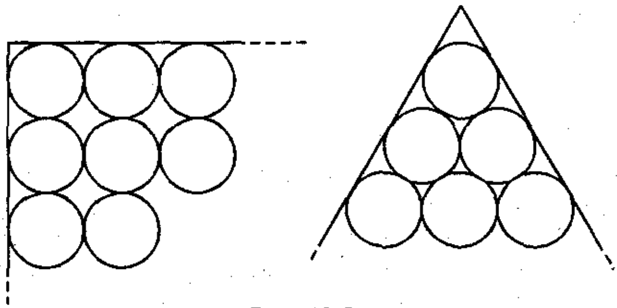


Рис. 13.5

Таким образом, каждая фигура содержит по1225 кругов.

Ответ: 1225 кругов на каждую фигуру.

13.247. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из 1 т молока?

Решение.

Пусть получено x т творога жирностью 15,5%, тогда останется $(1-x)$ т сыворотки жирностью 0,5% . Отсюда в 1 т молока содержится

$\frac{15{,}5x}{100}+\frac{0{,}5(1-x)}{100}=\frac{15x+0{,}5}{100}$ т жира.

По условию $\frac{15x+0{,}5}{100}=\frac{5}{100}$, откуда $x=0{,}3=300$ кг.

Ответ: 300 кг.

13.248. Имеются два одинаковых куска тканей. Стоимость всего первого куска на 126 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 135 руб. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 382руб. 50 коп. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

Решение.

Пусть x руб. — стоимость второго куска, $x+126$ — стоимость первого, y м — длина одного куска.

Тогда стоимость 1 м первой ткани $\frac{x+126}{y}$ руб., 1 м второй — $\frac{x}{y}$ руб.

По условию $\begin{cases} 4\frac{x+126}{y}-3\frac{x}{y}=135, \\ 3\frac{x+126}{y}+4\frac{x}{y}=382{,}5, \end{cases}$

откуда $\begin{cases} \dfrac{x+126}{y}=67{,}5, \\ \dfrac{x}{y}=45, \end{cases}$ и, значит, $y=5{,}6$ м.

Ответ: 5,6 м; 67 руб. 50 коп. и 45 руб.

13.249. Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Однако выяснилось, что сотрудников, достойных премии, на три человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 400 руб. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 9000 руб., в результате чего каждый премированный получил 2500 руб. Сколько человек получили премию?

Решение.

Пусть премию должны были получить x человек и y — первоначальная общая сумма премии.

По условию

$$\begin{cases} (x+3)\left(\dfrac{y}{x}-400\right)=y, \\ y+9000=2500(x+3), \end{cases}$$

откуда $x=15$ человек.

Значит, премию получили $x+3=15+3=18$ человек.

Ответ: 18.

13.250. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

Решение.

Пусть бригада должна была заготовлять x м^3 древесины в день и должна была работать $\dfrac{216}{x}$ дней. За 3 первых дня она заготовила $3x$ м^3, а за остальные $(x+8)\left(\dfrac{216}{x}-4\right)$.

По условию $3x+(x+8)\left(\dfrac{216}{x}-4\right)=232$, откуда $x=24$ м^3.

Ответ: 24 м^3.

13.251. Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые снова совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

Решение.

Скорость минутной стрелки примем за 1, тогда скорость часовой стрелки — $\frac{1}{12}$. Стрелки совпадут, когда $\frac{1}{12}\cdot t+60=t$, где t — время движения стрелок.

Решая уравнение, находим $t=\frac{720}{11}$ (мин).

Ответ: 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

13.252. Дежурный монтер спустился по движущемуся вниз эскалатору метро. Весь его путь от верхней площадки до нижней продолжался 24 с. Затем он поднялся и в том же темпе снова спустился вниз, но теперь уже по неподвижному эскалатору. Известно, что спуск продолжался 42 с. За сколько секунд спустился бы человек по движущемуся вниз эскалатору, стоя на ступеньке?

Решение.

Пусть l — путь по неподвижному эскалатору, $v_{эск.}$ — скорость эскалатора, $v_{монт.}$ — скорость монтера по неподвижному эскалатору.

Тогда $\frac{l}{v_{монт.}}=42$, $\frac{l}{v_{монт.}+v_{эск.}}=24$. Нужно найти $\frac{l}{v_{эск.}}$. Получаем

$$\frac{v_{монт.}}{l}=\frac{1}{42},\ \frac{v_{монт.}}{l}+\frac{v_{эск.}}{l}=\frac{1}{24};\ \frac{v_{эск.}}{l}=\frac{1}{24}-\frac{1}{42}=\frac{1}{56}\Rightarrow\frac{l}{v_{эск.}}=56 \text{ с.}$$

Ответ: за 56 с.

13.253. Для гидродинамических исследований изготовлена небольшая модель канала. К этой модели подведено несколько труб одинакового сечения, вводящих воду, и несколько труб другого, но тоже одинакового сечения, предназначенных для удаления воды. Если сразу открыть четыре вводящих и три выводящих трубы, то через 5 ч в модели прибавится 1000 м^3 воды. Если одновременно открыть на 2 ч две вводящих и две выводящих трубы, то увеличение объема воды составит 180 м^3. Сколько воды пропускает за час одна вводящая и сколько пропускает одна выводящая труба?

Решение.

Пусть x м^3/ч пропускает вводящая труба, y м^3/ч — выводящая. По условию

$$\begin{cases}5(4x-3y)=1000,\\2(2x-2y)=180,\end{cases}$$

откуда $x = 65$ м^3, $y = 20$ м^3.

Ответ: 65 и 20 м^3.

13.254. Первым отправился по намеченному маршруту путешественник A. Второй путешественник $Б$ отправился следом за A спустя 45 мин. Намереваясь догнать путешественника A, скорость которого υ_1 км/ч, путешественник $Б$ поехал со скоростью υ_2 км/ч ($\upsilon_2 > \upsilon_1$). Через сколько минут после момента отправления путешественника A с турбазы должен выехать $В$, чтобы догнать A одновременно с $Б$, если известно, что $В$ поедет со скоростью υ_3 км/ч ($\upsilon_3 > \upsilon_2$).

Решение.

Пусть x мин. — искомое время, t мин. — время, за которое путешественник A дошел до места встречи.

По условию

$$\begin{cases}\upsilon_1 t=\upsilon_2(t-45),\\\upsilon_1 t=\upsilon_3(t-x),\end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{45\cdot\upsilon_2(\upsilon_3-\upsilon_1)}{\upsilon_3(\upsilon_2-\upsilon_1)}$ мин.

Ответ: через $\dfrac{45\cdot\upsilon_2(\upsilon_3-\upsilon_1)}{\upsilon_3(\upsilon_2-\upsilon_1)}$ мин.

13.255. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого — в 7 м от конца дорожки. Найти скорость третьего пловца.

Решение.

Пусть t — время, за которое третий пловец догнал двух первых; v_1, v_2, v_3 — скорости пловцов. Тогда $v_1(t+10)=v_2(t+5)=v_3 t$, откуда

$$\frac{v_2}{v_3-v_2}=\frac{2v_1}{v_3-v_1}\quad(1).$$

По условию $$\begin{cases}\dfrac{50+4}{v_3}=\dfrac{50-4}{v_2}-5,\\[2mm]\dfrac{50+7}{v_3}=\dfrac{50-7}{v_1}-10.\end{cases}$$

Используя уравнение (1), решаем систему и найдем $v_3 = \frac{22}{15}$ (м/с).

Ответ: $\frac{22}{15}$ м/с.

13.256. Прибор, применяемый для определения диаметра крупной детали ($D > 2$ м), указывает высоту H сегмента при постоянном расстоянии $2L$ между центрами опорных шариков прибора (рис. 13.6). Требуется выразить формулой соответствие между искомым диаметром D детали и измеряемой высотой H ее сегмента при постоянных L и d, где d — диаметр каждого из опорных шариков.

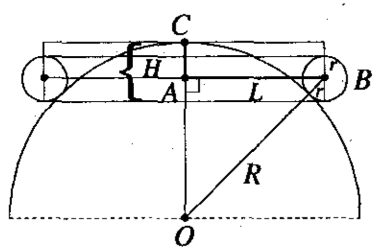


Рис. 13.6

Решение.

Сделаем более геометрический рисунок и построения на нем. Пусть

$R = \frac{D}{2}$, $r = \frac{d}{2}$. Из ΔOAB ($\angle OAB = 90°$) имеем

$$(R+r)^2 = L^2 + (R-(H-r))^2 \Leftrightarrow 2RH = L^2 + H^2 - H \cdot d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{H}\left(L^2 + H^2 - Hd\right).$$

Ответ: $\frac{1}{H}\left(L^2 + H^2 - Hd\right)$.

13.257. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 1 ч после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

Решение.

Пусть v км/ч — скорость первого курьера; до места встречи он ехал t ч. По условию $vt = 50(t-1)$. В B курьер приехал через $\frac{120}{v}$ ч, а второй курьер возвратился в A через $\left(\frac{2vt}{50} + 1\right)$ ч.

По условию $\frac{2vt+1}{50} + 1 = \frac{120}{v}$.

Решив систему $\begin{cases} vt = 50(t-1), \\ \dfrac{2vt}{50} + 1 = \dfrac{120}{v}, \end{cases}$

находим $v = 30$ км/ч.

Ответ: 30 км/ч.

13.258. Поезд идет от станции A к станции B. На некотором участке пути, примыкающем к станции B, производились ремонтные работы, и на этом участке поезду разрешена скорость, составляющая только $1/n$ часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию B с опозданием на a ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции B на b км, и при тех же условиях поезд опоздал только на c ч. Найти скорость поезда.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость поезда, t ч — время, которое затрачивает поезд на прохождение от A к B без остановки, S км — расстояние, которое прошел поезд после остановки.

По условию $\begin{cases} \dfrac{xt-S}{x} + \dfrac{S}{\frac{x}{n}} = t + a, \\ \dfrac{xt-(S-b)}{x} + \dfrac{S-b}{\frac{x}{n}} = t + c, \end{cases}$

откуда $x = \dfrac{b(n-1)}{a-c}$, $n > 1$, $a > c$.

Ответ: $\dfrac{b(n-1)}{a-c}$ км/ч, $n > 1$, $a > c$.

13.259. Пароход через 2 ч после отправления от пристани A останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной 0,8 первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани B на 3,5 ч. Если бы остановка произошла на 180 км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найти расстояние AB.

Решение.

Пусть $AB = x$ км, v км/ч — скорость парохода.

По условию $\begin{cases} \dfrac{x}{v} + 3{,}5 = 2 + 1 + \dfrac{x-2v}{0{,}8v}, \\ \dfrac{x}{v} + 1{,}5 = \dfrac{2v+180}{v} + 1 + \dfrac{x-2v-180}{0{,}8v}, \end{cases}$

откуда $x = 270$ км.

Ответ: 270 км.

13.260. Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 м одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую — на 3 м больше, чем в предыдущую. На какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи?

Решение.

Пусть до встречи частиц прошло t с. За это время первая частица прошла $15t$ м, а вторая $\frac{2+3(t-1)}{2}\cdot t$ (использовалась формула суммы n членов арифметической прогрессии).

По условию $\frac{2+3(t-1)}{2}\cdot t+15t=295,$ откуда $t=10$ с.

Угол отклонения стрелки $\alpha=\frac{360°}{\frac{60}{10}}=60°.$

Ответ: 60°.

13.261. В полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

Решение.

Пусть v_1 км/ч — скорость пешехода, $2v_1$ км/ч — велосипедиста, v_3 км/ч — верхового, x км — расстояние AB.

По условию $\begin{cases} 2v_1\cdot 2+2v_3=x, \\ 2{,}8v_1+2{,}8v_3=x, \\ 2v_3=\frac{x}{2}-3, \\ 2v_1\cdot 2=\frac{x}{2}+3, \end{cases}$

откуда $v_1=6$ км/ч;
$2v_1=12$ км/ч;
$v_3=9$ км/ч;
$x=42$ км.

Ответ: 6, 9 и 12 км/ч; 42 км.

13.262. Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Если два тела начали падать с одной высоты спустя 5 с одно после другого, то через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

Решение.

Пусть t с — искомое время. За это время первое тело пролетит $4{,}9t^2$ м, второе $4{,}9(t-5)^2$ м.

По условию $4{,}9t^2 - 4{,}9(t-5)^2 = 220{,}5$, откуда $t = 7$ с.

Ответ: через 7 с после начала падения первого тела.

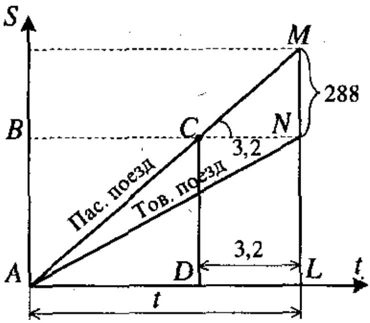


Рис. 13.7

13.263. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определить расстояние от A до B.

Решение.

На рис. 13.7 рассматриваются графики движения поездов до изменения скоростей.

Имеем $\operatorname{tg}\angle MCN = v^{(0)}_{\text{пас.}} = 288 : 3{,}2 = 90$ км/ч. Если $v^{(0)}_{\text{тов.}} = x$ км/ч, то $AB = NL = xt$ км; $CD = 90(t-3{,}2) = xt \Rightarrow t = \dfrac{288}{90-x}$. После изменения скоростей получаем $v^{(1)}_{\text{пас.}} = 100$ км/ч, $v^{(1)}_{\text{тов.}} = x + 10$ км/ч. По условию $\dfrac{xt}{x+10} - \dfrac{xt}{100} = 2{,}4$. Подставляя сюда $t = \dfrac{288}{90-x}$ и решая полученное уравнение, находим $x = 50$ км/ч, $t = 7{,}2$ ч. Отсюда $AB = xt = 50 \cdot 7{,}2 = 360$ км.

Ответ: 360 км.

13.264. Для того чтобы подняться на обычном лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 м) при двух 6-секундных промежуточных остановках, нужно затратить столько же времени, сколько его потребуется, чтобы подняться на лифте высотного здания при одной 7-секундной промежуточной остановке на 20-й этаж (высота 81 м). Определить подъемную скорость лифта в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 м/с, но не достигает 5 м/с.

Решение.

Пусть v_1 м/с — скорость обычного лифта ($v_1 \le 3{,}5$ м/с), v_2 м/с — лифта в высотном здании, $v_2 = v_1 + 1{,}5$ м/с.

По условию

$$\frac{33}{v_1} + 2 \cdot 6 = \frac{81}{v_1 + 1{,}5} + 7, \text{ откуда } v_1 = 1{,}5 \text{ м/с}, \ v_2 = v_1 + 1{,}5 = 3 \text{ м/с}.$$

Ответ: 3 м/с.

13.265. По внутренней области угла 60° прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый промежуток времени оказалась на расстоянии a от одной стороны угла и на расстоянии b от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если $a < b$.

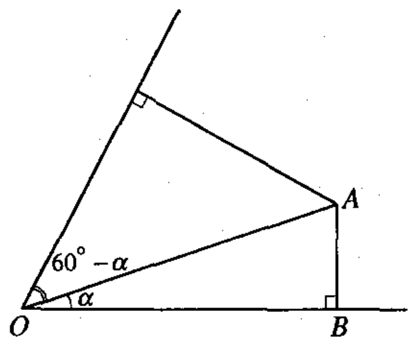


Рис. 13.8

Решение.

Длина пути, пройденного точкой, равна сумме длин отрезков OA и $AB = a$ (рис. 13.8). Получаем

$$OA = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ или } OA = \frac{b}{\sin(60^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2b + a}{a\sqrt{3}}.$$

Так как $\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$.

Таким образом, искомая длина равняется

$$a + \frac{a}{\sin\alpha} = a + 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

Ответ: $a + 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

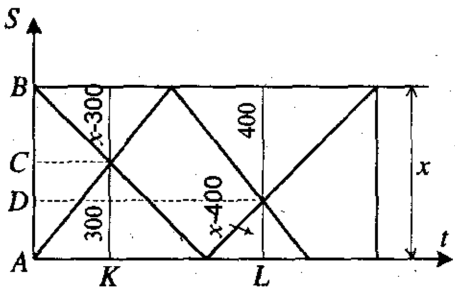


Рис. 13.9

13.266. Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из A в B, второй из B в A. Они бегут с не одинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 м от B. Найти длину AB.

Решение.

Рассмотрим графики бега двух спортсменов (рис. 13.9). Пусть $AB = x$ м, C и D — точки первой и второй встреч, v_1 и v_2 — скорости первого и второго спортсмена. Тогда $\frac{300}{v_1} = \frac{x-300}{v_2}$ (*). За время, прошедшее между встречами (KL), спортсмены пробежали:

первый $(x-300)+400 = x+100$ м;

второй $300+(x-400) = x-100$ м.

Таким образом $\frac{x+100}{v_1} = \frac{x-100}{v_2}$ (**).

Из (*) и (**) получаем $\frac{x+100}{300} = \frac{x-100}{x-300} \Rightarrow x = 500$ м.

Ответ: 500 м.

13.267. С одного старта в одном и том же направлении одновременно начали гонки два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти его скорость, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость третьего гонщика. Он догнал первого гонщика через t_1 ч, второго — через t_2 ч. По условию

$$\begin{cases} 80t_1 = x(t_1 - 0{,}5), \\ 60t_2 = x(t_2 - 0{,}5), \\ t_1 - t_2 = 1{,}25, \end{cases}$$

откуда $x = 100$ км/ч.

Ответ: 100 км/ч.

13.268. Спортсмен стреляет в мишень, отстоящую от него на d м. Наблюдатель, находящийся на расстоянии a м от стрелка и b м от мишени (рис. 13.10), слышит одновременно звук выстрела и звук удара пули в мишень. Найти скорость пули, если скорость звука равна υ м/с.

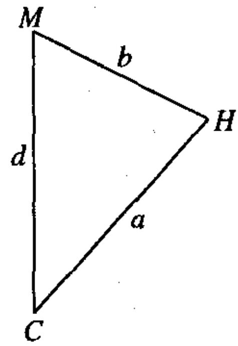


Рис. 13.10

Решение.

Пусть x км/ч — скорость пули. Время, за которое звук выстрела достиг наблюдателя $\frac{a}{\upsilon}$ с.

По условию $\frac{a}{\upsilon}=\frac{d}{x}+\frac{b}{\upsilon}$, откуда $x=\frac{d\upsilon}{a-b}$, $a>b$.

Ответ: $\frac{d\upsilon}{a-b}$ м/с, $a>b$.

13.269. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них первую половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч и пришел в поселок на 1 мин раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

Решение.

Пусть x км — расстояние между пристанью и поселком, t ч — время, за которое второй пассажир дошел до поселка.

По условию $\begin{cases}\frac{x}{2\cdot 5}+\frac{x}{2\cdot 4}=t+\frac{1}{60},\\ 5\cdot\frac{t}{2}+4\cdot\frac{t}{2}=x,\end{cases}$

откуда $x=6$ км; $t=\frac{4}{3}$ ч $=1$ ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 21 мин; 1 ч 20 мин; 6 км.

13.270. В Одéссу должны прибыть два теплохода с разрывом в 1 ч. Оба теплохода идут с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на t_1 мин, а второй на t_2 мин. Получив по радио указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана одновременно увеличили скорости теплоходов: первый — на υ_1 км/ч, второй — на υ_2 км/ч, в результате чего оба теплохода прибы-

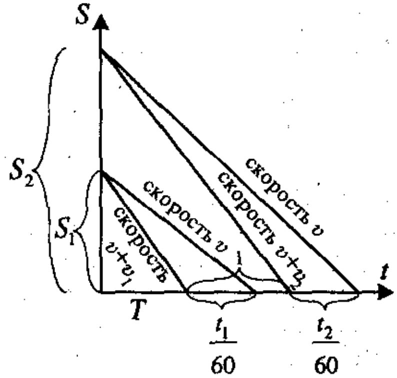


Рис. 13.11

ли в Одессу точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радио?

Решение.

Графическое изображение условий задачи на рис.13.11.

Получаем $S_1 = (v + v_1)T$, $S_2 = (v_1 + v_2)(T+1) = v\left(T + 1 + \frac{t_2}{60}\right)$. Упрощая и исключая T, имеем $v = \frac{60v_1v_2}{v_1t_2 - v_2t_1}$ км/ч.

Ответ: $\frac{60v_1v_2}{v_1t_2 - v_2t_1}$ км/ч.

13.271. Трасса соревнований по велосипеду представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определить протяженность трассы.

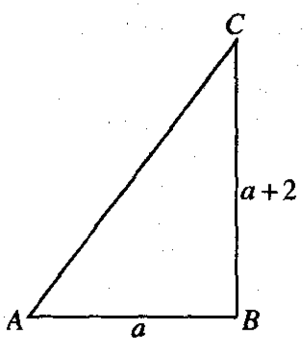


Рис. 13.12

Решение.

Протяженность трассы

$$S = AB + BC + AC = a + a + 2 + \sqrt{a^2 + (a+2)^2} \text{ (см. рис. 13.12).}$$

По условию $\frac{\sqrt{a^2+(a+2)^2}}{30}=\frac{a+a+2}{42}$, откуда $a = 8$ км.

$S=8+8+2+\sqrt{8^2+10^2}=24$ км.

Ответ: 24 км.

13.272. От почтамта A отправилась автомашина по направлению к почтовому отделению B. Через 20 мин за ней выезжает мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Догнав автомашину, мотоциклист передал шоферу пакет и тотчас повернул обратно. Автомашина прибыла в B в тот момент, когда мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с автомашиной до A. Определить скорость автомашины, если путь от A до B составляет 82,5 км.

Решение.

Пусть t — время, за которое мотоциклист догнал автомашину, v — скорость автомобилиста. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} v\left(t+\frac{20}{60}\right)=60\cdot t, \\ \frac{82{,}5-60\cdot t}{v}=\frac{t}{2}, \end{cases}$$

откуда $v = 45$ (км/ч).

Ответ: 45 км/ч.

13.273. Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он догнать до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

Решение.

Пусть t с — искомое время. За это время мяч прокатится $\frac{2\cdot 4-0{,}75(t-1)}{2}\cdot t$ м, а футболист пробежит $\frac{2\cdot 3{,}5+0{,}5(t-1)}{2}\cdot t$ м. (Использовалась формула суммы n членов арифметической прогрессии).

По условию

$$\frac{2\cdot 3{,}5+0{,}5(t-1)}{2}\cdot t-\frac{2\cdot 4-0{,}75(t-1)}{2}\cdot t=10,$$ откуда $t = 5$ с.

Футболист догонит мяч, пробежав $\frac{2 \cdot 3{,}5 + 0{,}5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 22{,}5$ м, на расстоянии 0,5 м до боковой линии.

Ответ: через 5 с; за 0,5 м до линии поля.

13.274. По графику поезд проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если в конечный пункт этого перегона поезд снова прибыл по расписанию?

Решение.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость поезда. Учитывая остановку, он пройдет вторую половину перегона за $\frac{1}{12} + \frac{60}{x+10}$, откуда $x = 80$ км/ч.

Пусть v км/ч — скорость поезда сегодня. Тогда $\frac{60}{80} = 0{,}15 + \frac{60}{v}$, откуда $v = 100$ км/ч.

Ответ: 100 км/ч.

13.275. Расстояние между городом A и станцией F по железной дороге равно 185 км. Пригородный электропоезд идет от A первые 40 км в гору, следующие 105 км по ровному месту и остальные 40 км снова в гору. В гору поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции B, C, D и E на расстояниях 20, 70, 100 и 161 км от A (рис. 13.13), и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в B, C, D и E, если известно, что он вышел из A в 8 ч и пришел в F в 10 ч 22 мин того же дня.

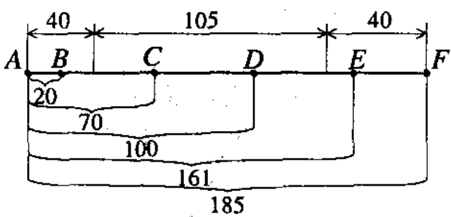


Рис. 13.13

Решение.

Пусть v км/ч — скорость поезда на подъеме, $(v + 10)$ км/ч — на ровной местности.

По первому подъему поезд шел $\left(\frac{40}{v} + 0{,}05\right)$ ч, по ровной местности $\left(\frac{105}{v+10} + 0{,}1\right)$ ч и по второму подъему $\left(\frac{40}{v} + 0{,}05\right)$ ч.

По условию

$$\frac{40}{v}+0{,}05+\frac{105}{v+10}+0{,}1+\frac{40}{v}+0{,}05=\frac{71}{30},$$

откуда $v=80$ км/ч.

До станции B поезд шел $\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$ ч = 15 мин и пришел в B в 8 ч 15 мин;

до C из B:

$$0{,}05+\frac{20}{80}+\frac{30}{80+10}=38 \text{ мин, в } C \text{ пришел в 8 ч 53 мин;}$$

из C в D:

$$0{,}05+\frac{30}{90}=23 \text{ мин, в } D \text{ пришел в 9 ч 16 мин;}$$

из D в E:

$$0{,}05+\frac{45}{90}+\frac{16}{80}=0{,}75 \text{ ч} = 45 \text{ мин, в } E \text{ пришел в 10 ч 01 мин.}$$

Ответ: 8 ч 15 мин; 8 ч 53 мин; 9 ч 16 мин; 10 ч 01 мин.

13.276. По шоссе от завода C до станции B железной дороги на 28 км дальше, чем от станции A той же дороги. Расстояние от A до B через C на 2 км больше, чем длина участка AB железной дороги (рис. 13.14). Доставка тонны груза из C в A стоит 130 руб., а по железной дороге из A в B — 260 руб. Перевозка тонны груза на 1 км автотранспортом стоит на 32 руб. дороже, чем по железной дороге. Определить расстояния AC, BC, AB.

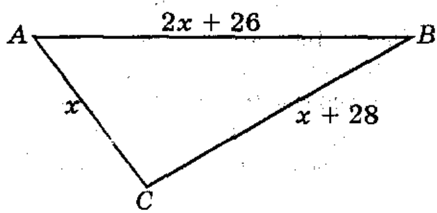


Рис. 13.14

Решение.

Пусть $AC = x$ км, $BC = x + 28$ км, $AB = 2x + 26$ км; y руб. — цена перевозки тонны груза на 1 км по железной дороге; $y + 32$ руб. — автотранспортом.

По условию

$$\begin{cases} x(y+32)=130, \\ (2x+26)y=260, \end{cases}$$

откуда $x=3{,}25$. Итак, $AC=3{,}25$ км;

$BC = 3{,}25 + 28 = 31{,}25$ км; $AB = (31{,}25 + 3{,}25) - 2 = 32{,}5$ км.

Ответ: 3,25; 31,25 и 32,5 км.

13. 277. Учебный самолет летел со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

Решение.

Пусть самолет со скоростью 220 км/ч пролетел x км, со скоростью 330 км/ч — $(x - 385)$ км. На это он затратил $\left(\frac{x}{220} + \frac{x-385}{330}\right)$ ч.

По условию $\frac{x}{220} + \frac{x-385}{330} = \frac{2x-385}{250}$, где $(2x - 385)$ км — весь путь.

Из уравнения находим $x = 880$ км. Значит, все расстояние равно $2 \cdot 880 - 385 = 1375$ км.

Ответ: 1375 км.

13.278. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

Решение.

Пусть x — скорость встречного поезда.

По условию $(40 + x) \cdot \frac{3}{3600} = 75 \cdot 10^{-3}$, откуда $x = 50$(км/ч).

Ответ: 50 км/ч.

13.279. Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью a м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, он прошел со средней скоростью b м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника на всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.

Решение.

Длину одного участка трассы примем за 1. Пусть t_1, t_2, t_3 — время, за которое лыжник проходит каждый участок трассы. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{2}{t_1+t_2}=a, \\ \dfrac{2}{t_2+t_3}=b, \\ \dfrac{1}{t_2}=\dfrac{2}{t_1+t_3}, \end{cases} \text{ откуда } t_1=\frac{3b-a}{2ab},\ t_2=\frac{a+b}{2ab},\ t_3=\frac{3a-b}{2ab}.$$

Средняя скорость на всей трассе будет $\dfrac{3}{t_1+t_2+t_3}=\dfrac{2ab}{a+b}$; на первом участке — $\dfrac{1}{t_1}=\dfrac{2ab}{3b-a}$; на втором — $\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{2ab}{a+b}$; на третьем — $\dfrac{1}{t_3}=\dfrac{2ab}{3a-b}$.

Задача имеет реальное решение, если $\begin{cases} 3a-b>0, \\ 3b-a>0, \end{cases}$ откуда $\dfrac{b}{3}<a<3b.$

Ответ: $\dfrac{2ab}{a+b}$; $\dfrac{2ab}{3b-a}$; $\dfrac{2ab}{a+b}$; $\dfrac{2ab}{3a-b}$ м/мин, где $\dfrac{b}{3}<a<3b.$

13.280. Для контроля за движением лыжника тренер разделил трассу на три участка равной длины. Стало известно, что средние скорости лыжника на этих трех отдельных участках были различными. При этом на пробег первого и второго участков вместе лыжнику потребовалось 40,5 мин, а на пробег второго и третьего — 37,5 мин. Выяснилось также, что средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. За какое время лыжник достиг финиша?

Решение.

Пусть x — длина участка, t_1, t_2, t_3 — время пробега первого, второго и третьего участка соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} t_1+t_2=40{,}5, \\ t_2+t_3=37{,}5, \\ \dfrac{x}{t_2}=\dfrac{2x}{t_1+t_3}, \end{cases} \text{откуда } t_1+t_2+t_3=58{,}5 \text{ (мин).}$$

Ответ: за 58,5 мин.

13.281. Два велосипедиста стартовали одновременно из одного и того же места в одном направлении. Следом за ними, через 10 мин с того же места начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 мин, пока

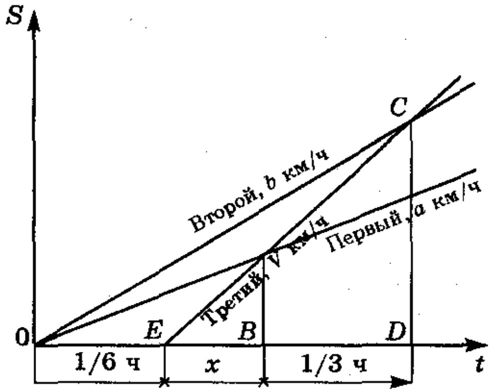


Рис. 13.15

догнал второго. Начиная от самого старта и до конца пути, каждый велосипедист шел с постоянной скоростью: a км/ч — первый велосипедист и b км/ч — второй. Найти скорость третьего велосипедиста.

Решение.

Графики движения велосипедистов изображены на рис. 13.15. Выразим пройденные ими расстояния: для первого $AB=\left(\frac{1}{6}+x\right)a$; для третьего $AB=xV$, где V — искомая скорость; $CD=\left(x+\frac{1}{3}\right)V$; для второго $CD=\left(\frac{1}{6}+x+\frac{1}{3}\right)b$.

Имеем систему уравнений относительно x и V:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{6}+x\right)a=xV,\\ \left(\frac{1}{2}+x\right)b=\left(x+\frac{1}{3}\right)V.\end{cases}$$

Исключив x, находим

$$V=\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}}{4}\text{ (км/ч)}.$$

Ответ: $\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}}{4}$ (км/ч).

13.282. Связист получил задание прибыть в пункт B из пункта A в назначенный срок. Расстояние между A и B равно s км. Когда связист добрался до пункта C, расположенного точно на полпути от A до B, то рассчитал, что опоздает на 2 ч, если будет продолжать движение с той же скоростью. Если же в пункте C он отдохнет 1 ч, а на оставшейся половине пути увеличит скорость на υ км/ч, то прибудет в B в назначенный срок. Какой срок был назначен связисту?

Решение.

Пусть x — назначенный срок, V' — скорость связиста. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{S}{V'} = x + 2, \\ \dfrac{S}{2V'} + 1 + \dfrac{S}{2(V' + \upsilon)} = x, \end{cases} \text{откуда } x = \frac{v + \sqrt{9\upsilon^2 + 6\upsilon S}}{\upsilon} \text{ (ч).}$$

Ответ: $\dfrac{\upsilon + \sqrt{9\upsilon^2 + 6\upsilon S}}{\upsilon}$ ч.

13.283. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задержался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил скорость на 1 км/ч, и встреча произошла на расстоянии 4 км от того места, где задержался первый. Найти скорости пешеходов.

Решение.

Так как пешеходы могли бы встретиться на полпути, то их скорости равны. Пусть V — первоначальная скорость одного из пешеходов.

По условию $\dfrac{9}{V} + \dfrac{4}{V+1} + 1 = \dfrac{28 - (9 + 4)}{V}$, откуда $V = 3$ (км/ч).

Ответ: первоначально оба шли с одной скоростью 3 км/ч.

13.284. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы пройти с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

Решение.

Пусть l — длина поезда, V — его скорость.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} 7V = l, \\ 25V = 378 + l, \end{cases} \text{откуда } l = 147 \text{ (м)}, V = 21 \text{ (м/с)} = 75{,}6 \text{ (км/ч).}$$

Ответ: 75,6 км/ч; 147 м.

13.285. На участке шоссе протяженностью 10 км, лишенном перекрестков, автобус останавливается только для выхода и входа пассажиров. Всего он делает 6 промежуточных остановок, затрачивая на каждую из них по 1 мин, а движется всегда с одной и той же скоростью. Если бы автобус двигался без остановок, то тот же путь он прошел бы со скоростью, превышающей среднюю скорость своего движения с остановками на 5 км/ч. Сколько минут автобус находится в движении на этом участке шоссе?

Решение.

Пусть t мин автобус находится в движении на участке. Тогда его средняя скорость движения без остановок — $\frac{10}{t}$, а с остановками — $\frac{10}{t+\frac{1}{60}\cdot 6}$.

По условию, $\frac{10}{t+0{,}1}+5=\frac{10}{t}$, откуда $t = 24$ (мин).

Ответ: 24 мин.

13.286. Шхуна идет от A до B по озеру, а от B до C вверх по реке и затем отправляется обратно. Скорость шхуны относительно неподвижной воды все время поддерживается равной c км/ч. От A до C шхуна идет α ч, а обратный путь занимает β ч, причем на путь от C до B шхуне нужно втрое меньше времени, чем на путь от B до A. Найти расстояния AB и BC.

Решение.

Пусть x, y — расстояния AB и BC соответственно, V — скорость течения воды в реке. По условию имеем

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{c-V}=\alpha,\ (1)\quad \frac{y}{c+V}+\frac{x}{c}=\beta,\ (2)\quad \frac{y}{c+\nu}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{c}\ (3).$$

Из уравнений (2),(3) находим $x=\frac{3\beta c}{4}$, а из уравнений(1),(3), зная выражение для x, находим $y=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$.

Ответ: $AB=\frac{3\beta c}{4}$ км; $BC=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ км $(\alpha>\beta)$.

13.287. Два цеха молокозавода совместно должны обработать поровну определенное количество литров молока. Второй цех приступил к выполнению задания на a рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на m л молока больше, чем первый. Прошло еще $5a/9$ рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполненной 1/3 всего задания. Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения задания, если работа была окончена одновременно и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть x — производительность труда за 1 ч первого цеха, n — количество дней, необходимых для выполнения задания. По условию (1) $nx = (n-a)(x+m)$, (2) $ax + \frac{5a}{9}x + \frac{5a}{9}(x+m) = 1 - \frac{1}{3}$ (ч).

Из (1) $m = \frac{ax}{n-a}$ подставляем в (2) и находим $n = \frac{14a^2x - 6a}{19ax - 6}$ (3). Так как каждый цех обработал половину заданного количества литров молока, то

$nx = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{1}{2n}$ (4). В (3) подставляем (4) и находим $n = 2a$.

Ответ: $2a$.

13.288. Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 ч, а ученик 4 ч, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что остается выполнить 1/18 всей работы. За какой промежуток времени выполнил бы всю работу ученик, работая один?

Решение.

Весь объем работ примем за 1. Пусть x, y — производительности труда за 1 ч мастера и ученика соответственно. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} 7x + 4y = \frac{5}{9}, \\ 7x + 4y + 4(x+y) = 1 - \frac{1}{18}, \end{cases} \text{откуда } y = \frac{1}{24}.$$

Время выполнения всей работы учеником — $\frac{1}{y} = 24$ (ч).

Ответ: за 24 ч.

13.289. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

Решение.

Пусть x — процентное содержание цинка в первом сплаве. По условию $\frac{x}{100}\cdot 150+\frac{x}{100}\cdot 250=\frac{30}{100}(150+250)$, откуда $x=30\%$. Тогда во втором сплаве содержится $100\%-(26\%+30\%)=44\%$ олова, а новый сплав содержит $\frac{40}{100}\cdot 150+\frac{44}{100}\cdot 250=170$ (кг) олова.

Ответ: 170 кг.

13.290. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение 1/4 времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение 1/4 времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить 11/24 полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение.

Весь объем бассейна примем за 1. Пусть x, y (л) в час протекает по первой и второй трубе соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2\frac{24}{60}x+2\frac{24}{60}y=1, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}\right)x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)y=1-\frac{11}{24}, \end{cases} \text{ откуда } x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{6}.$$

Тогда для первой трубы необходимо $\frac{1}{x}=4$ (ч) для наполнения бассейна, а $\frac{1}{y}=6$ (ч) — для второго.

Ответ: 4 и 6 ч.

13.291. Если выполнение заказа по набору нескольких книг возложить на одного из трех наборщиков, то первый справится с работой на 10 ч быстрее, а третий — на 6 ч быстрее, чем второй. Если же одну из заказанных книг будет набирать первый наборщик, а другую книгу одновременно будет набирать второй, то за 9 ч они наберут столько страниц, сколько за 10 ч наберут второй и третий, работая вместе при тех же условиях. Сколько времени потребуется каждому наборщику для набора всех заказанных книг при раздельной работе?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть α, β, γ — производительность труда (количество набранных страниц в час) первого, второго и третьего наборщиков соответственно.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=10, \\ \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}=6, \\ 9(\alpha+\beta)=10(\beta+\gamma), \end{cases} \quad \text{откуда } \alpha=\frac{1}{20},\ \beta=\frac{1}{30},\ \gamma=\frac{1}{24}.$$

Тогда первый наборщик всю работу выполнит за $\frac{1}{\alpha}=20$ (ч), второй — за $\frac{1}{\beta}=30$ (ч), а третий — за $\frac{1}{\gamma}=24$ (ч).

Ответ: 20, 30 и 24 ч.

13.292. Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 5 дней. В действительности же оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем первый прорыл 1/3, а второй — остальные 2/3 его длины. На выполнение всей работы ушло при этом 10 дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

Решение.

Длину тоннеля примем за 1. Пусть x, y — мощности первого и второго «кротов» соответственно.

По условию имеем систему $\begin{cases} 5(x+y)=1, \\ \frac{1}{3x}+\frac{2}{3y}=10, \end{cases}$ откуда $x=\frac{1}{15}$, $y=\frac{2}{15}$.

Тогда первый «крот» самостоятельно пророет тоннель за $\frac{1}{x}=15$ (дней), а второй — за $\frac{1}{y}=7{,}5$ (дней).

Ответ: 15 и 7,5 дней.

13.293. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна — равномерно подающая, другая — равномерно отводящая воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполнённом на 1/3 бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн? .

Решение.

Значения искомых и заданных велечин запишем в форме таблицы:

Труба	Время, ч	Вместимость	Производительность
Подающая	$x+2$	1	$\frac{1}{x+2}$
Отводящая	x	1	$\frac{1}{x}$
Обе вместе	8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$

По условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{24}$, откуда $x=6$.

Ответ: за 8 и 6 ч.

13.294. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй $0{,}6a$ ч, оказалось, что они выполнили $5/n$ всей работы. Проработав совместно еще $0{,}6a$ ч, они установили, что им осталось изготовить еще $1/n$ часть всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n натуральное; найти его.

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть x, y — производительность труда (количество изготовленных деталей в час) первого и второго рабочих соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} ax+0{,}6ay=\frac{5}{n}, \\ ax+0{,}6ay+0{,}6a(x+y)=1-\frac{1}{n}, \end{cases} \text{откуда } x=\frac{11-n}{0{,}4an},\ \ y=\frac{n-9}{0{,}24an}.$$

Тогда первый рабочий все детали изготовит за $\frac{1}{x}=\frac{0{,}4an}{11-n}$ (ч), а второй — за $\frac{1}{y}=\frac{0{,}24an}{n-9}$ (ч). Значение n должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} 11-n>0, \\ n-9>0, \end{cases} \text{т.е. } n=10.$$

Ответ: $\frac{0{,}4an}{11-n}; \frac{0{,}24an}{n-9}; n=10.$

13.295. Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода равномерно выливается, через второй — равномерно вливается. За сколько часов через первый канал пройдет n л воды, если известно, что через второй вольется в два раза больше тогда, когда он будет открыт на a ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет n л? Если оба канала открыть одновременно, то каждый час в водоем прибывает a л воды.

Решение.

Значения искомых и заданных величин запишем в форме таблицы:

Канал	Время, ч	Объем воды, л	Производительность
Первый	x	n	$\frac{n}{x}$
Второй	$x-a$	$2n$	$\frac{2n}{x-a}$

По условию $\frac{2n}{x-a} - \frac{n}{x} = a,$

откуда $x = \frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$ (ч).

Ответ: за $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$ ч.

13.296. Два экскаваторщика должны выполнить некоторую работу. После того как первый проработал 15 ч, начинает работать второй и заканчивает эту работу за 10 ч. Если бы при раздельной работе первый выполнил 1/6 часть, а второй — 1/4 часть работы, то для ее окончания потребовалось бы еше 7 ч их совместной работы. За сколько часов может выполнить работу каждый экскаваторщик в отдельности?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть x, y — производительность труда первого и второго экскаваторщика соответственно.По условию имеем систему $\begin{cases} 15x+10y=1, \\ 7(x+y)=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right), \end{cases}$ откуда $x=\frac{1}{30}, y=\frac{1}{20}.$

Тогда первый экскаваторщик всю работу выполнит за $\frac{1}{x}=30$ (ч), а второй — за $\frac{1}{y}=20$ (ч).

Ответ: за 20 и 30 ч.

13.297. Длина круговой дорожки ипподрома равна b км. Из двух наездников A и B, начавших скачки одновременно, наездник A прибыл к финишу на 2 мин раньше. В другой раз наездник B увеличил скорость на c км/ч, в то время как наездник A уменьшил скорость на c км/ч и потому B прибыл к финишу на 2 мин раньше, чем A. Найти скорости наездников в первом заезде.

Решение.

Пусть x, y — скорости наездников A и B в первом заезде. По условию имеем систему $\begin{cases}\frac{b}{y}-\frac{b}{x}=\frac{2}{60},\\ \frac{b}{x-c}-\frac{b}{y+c}=\frac{2}{60},\end{cases}$

откуда $x=\frac{c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ (км/ч), $y=\frac{-c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ (км/ч).

Ответ: $\frac{c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ и $\frac{-c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ км/ч.

13.298. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости спортсменов, l — длина дорожки. По условию, имеем систему $\begin{cases}\frac{l}{V_2}-\frac{l}{V_1}=10,\\ 720V_1-720V_2=l,\end{cases}$ откуда $\frac{l}{V_1}=80$, $\frac{l}{V_2}=90$.

Тогда первый спортсмен пробегает $\dfrac{\frac{l}{V_1}}{l}=\dfrac{1}{80}$ часть длины всей дорожки в секунду, а второй $\dfrac{\frac{l}{V_2}}{l}=\dfrac{1}{90}$.

Ответ: $\frac{1}{80}$ и $\frac{1}{90}$.

13.299. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать на два оборота в минуту больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить, какова будет величина угла между лучами через 1 с.

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости вращения точек, l — длина окружности, x — длина дуги окружности между точками после 1 с вращения. Тогда величина угла между лучами будет $\alpha=\dfrac{x\cdot 360^\circ}{l}$ (1). По условию имеем систему $\begin{cases}\dfrac{l}{V_2}-\dfrac{l}{V_1}=5,\\ 60(V_1-V_2)=2l,\end{cases}$ откуда $V_1=\dfrac{l}{10}$, $V_2=\dfrac{l}{15}$.

Если точки вращаются в одном направлении, то $x=V_1-V_2=\dfrac{l}{30}$ и $\alpha=12^\circ$; если в противоположных, то $x=V_1+V_2=\dfrac{l}{6}$ и $\alpha=60^\circ$.

Ответ: 12 или 60°.

13.300. Меньшая дуга между точками *A* и *B*, находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться навстречу друг к другу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 14 с. Определить скорости движения точек и длину окружности, если известно, что точка *A* может обежать всю окружность в то время, как *B* пройдет только 90 м.

Решение.

Пусть V_a и V_b — скорости точек A и B, l — длина окружности. По условию, имеем систему $\begin{cases} 10(V_a+V_b)=150, \\ 14(V_a+V_b)=l-150, \\ \dfrac{l}{V_a}=\dfrac{90}{V_b}, \end{cases}$

откуда $V_a=12$ (м/с), $V_b=3$ (м/с), $l=360$ (м).

Ответ: 12 м/с и 3 м/с; 360 м.

13.301. В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

Решение.

Пусть x, y, z — число зубцов трех шестеренок, причем $x>y>z$ и $x+y+z=60$ (1). За время вращения шестеренок в соприкосновение придет одинаковое число зубцов каждой шестеренки, т.е. $10z=5y=4x-20$ (2). Решив систему уравнений (1),(2), находим $x=30, y=20, z=10$.

Ответ: 10, 20 и 30 зубцов.

13.302. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости точек. По условию, имеем систему

$\begin{cases} \dfrac{60}{V_2}-\dfrac{60}{V_1}=5, \\ 60(V_1-V_2)=60, \end{cases}$ откуда $V_1=4$ (м/с), $V_2=3$ (м/с).

Ответ: 3 и 4 м/с.

13.303. Два колеса соединены бесконечным ремнем; меньшее из них делает на 300 оборотов в минуту больше второго. Большое колесо совершает 10 оборотов в промежуток времени, на 1 с больший, чем время такого же числа оборотов меньшего колеса. Сколько оборотов в минуту совершает каждое колесо?

Решение.

Пусть x — число оборотов большего колеса за 1 мин. Тогда меньшее колесо делает $x + 300$ оборотов. По условию, имеем $\frac{10}{x} - \frac{1}{60} = \frac{10}{x+300}$, откуда $x = 300$.

Ответ: 300 и 600.

13.304. Две сцепляющиеся шестерни A и B насажены плотно: первая на вал O_1, а вторая на вал O_2. Шестерня A имеет на 10 зубцов больше, чем B. При некоторой скорости вращения вала O_1 вал O_2 совершает 63 оборота в минуту. Если шестерни поменять местами, то при той же скорости вала O_1 вал O_2 совершает 28 оборотов. Определить число зубцов каждой шестерни.

Решение.

Пусть шестерня B имеет x зубцов, а A — $(x + 10)$, V — скорость вращения вала O_1. По условию, имеем систему $\begin{cases}(x+10)V = 63x,\\ xV = 28(x+10),\end{cases}$ откуда $x = 20$.

Ответ: 20 и 30.

13.305. Найти два двузначных числа A и B по следующим условиям. Если число A написать впереди записи числа B и полученное четырехзначное число разделить на число B, то в частном получится 121. Если же число B написать впереди числа A и полученное четырехзначное число разделить на A, то в частном получится 84 и в остатке 14.

Решение.

По условию, имеем систему $\begin{cases}100A + B = 121B,\\ 100B + A = 84A + 14,\end{cases}$ откуда $A = 42, B = 35$.

Ответ: 42 и 35.

13.306. Через 2 ч после отправления поезд остановился на 30 мин. На оставшемся до станции участке пути производились ремонтные работы и поезду была разрешена скорость, составляющая 1/3 первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию с опозданием на 1 ч 10 мин. На другой день остановка поезда произошла на 14 км ближе к конечной станции и при тех же условиях опоздание сократилось до 50 мин. Определить расстояние между станциями и скорость поезда.

Решение.

Пусть x — расстояние между станциями, V — скорость поезда. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2+\dfrac{30}{60}+\dfrac{x-2V}{\frac{1}{3}V}=\dfrac{x}{V}+1+\dfrac{10}{60}, \\ \dfrac{2V+14}{V}+\dfrac{30}{60}+\dfrac{x-(2V+14)}{\frac{1}{4}V}=\dfrac{x}{V}+\dfrac{50}{60}, \end{cases}$$

откуда $x = 196$ (км), $V = 84$ (км/ч).

Ответ: 196 км; 84 км/ч.

13.307. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

Решение.

Пусть $100x+10y+z$ — искомое число. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} xz=y^2, \\ 100x+10y+z-495=100z+10y+x, \\ (z-1)+(x-2)=2(y-1), \end{cases}$$ откуда $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$.

Ответ: 964.

13.308. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

Решение.

Пусть $10x + y$ — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=10x+y+11, \\ 2xy=10x+y-5; \end{cases}$$

вычитая из первого уравнения второе, находим $(x-y)^2=16$ и получаем две системы:

$$\begin{cases} x-y=4, \\ 2xy=10x+y-5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-y=-4, \\ 2xy=10x+y-5, \end{cases}$$

решения которых $x = 9, y = 5$ и $x = 1, y = 5$.

Ответ: 95 или 15.

13.309. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1:2, в другом — 2:3.

Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7:12?

Решение.

Пусть взяли x (г) первого сплава, в котором содержится $\frac{1}{3}x$ золота и $\frac{2}{3}x$ серебра. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x+y=19, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y=\frac{7}{12}\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right) \end{cases}$$ откуда $x = 9$ (г), $y = 10$ (г).

Ответ: 9 и 10 г.

13.310. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с 30%-м содержанием никеля?

Решение.

Пусть x, y — масса взятого металла каждого из сортов. По условию имеем систему $$\begin{cases} x+y=140, \\ \frac{x+y}{100}=\frac{0{,}05x+0{,}4y}{30}, \end{cases}$$ откуда $x = 40$ (т), $y = 100$ (т).

Ответ: 40 и 100 т.

13.311. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выходят одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости пассажирского и скорого поездов соответственно, t — время движения поездов до встречи. По условию имеем систему $$\begin{cases} t(V_1+V_2)=2400, \\ 2V_2(t-3)=2400, \\ 2V_1(t+5)=2400, \end{cases}$$ откуда $V_1 = 60$ (км/ч), $V_2 = 100$ (км/ч).

Ответ: 60 и 100 км/ч.

13.312. При разгрузке баржи сначала 2 ч действовали четыре подъемных крана одинаковой мощности. Затем добавочно ввели в действие еще два крана меньшей, но одинаковой мощности. После этого для окончания разгрузки потребовалось еще 3 ч. Если бы все эти краны начали работать одновременно, то разгрузка была бы произведена за 4,5 ч. Если бы один кран большей и один кран меньшей мощности работали совместно, то за какое время они разгрузили бы баржу?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть для ее выполнения в одиночку крану большей мощности нужно x дней, крану меньшей мощности — y дней, а при совместной работе одного крана большей и одного крана меньшей мощности — z дней. Производительность труда соответственно равна $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{8}{x}+\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{y}\right)\cdot 3=1, \\ \frac{4}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{4{,}5}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}, \end{cases}$$ откуда $x = 24$, $y = 36$, $z = 14{,}4$.

Ответ: за 14,4 ч.

13.313. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше 1/4; если от числителя и знаменателя первоначальной дроби отнять по 3, то значение дроби будет равно 1/12. Найти эту дробь.

Решение.

Пусть $\frac{x}{y}$ — искомая дробь. По условию имеем систему $\begin{cases} y=x^2-1, \\ \frac{x-3}{y-3}=\frac{1}{12}, \end{cases}$

откуда искомая дробь $\frac{4}{15}$, а дробь $\frac{8}{63}$ не удовлетворяет неравенству $\frac{x+2}{y+2}>\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{4}{15}$.

13.314. Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Колесо A имеет 12 зубьев, а колесо B — 54. Сколько оборотов сделает каждое колесо до того, как оба они вернутся в исходное положение?

Решение.

Пусть колесо A сделает x оборотов, а колесо B – y. Так как колеса сцеплены, то за время их вращения придет в соприкосновение одинаковое число зубьев каждого колеса, т.е. $12x = 54y$, откуда $x = \frac{9}{2}y$. Число x — натуральное, поэтому наименьшее значение $y = 2$.

Ответ: 9 и 2.

13.315. Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 50 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 48 руб. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

Решение.

Пусть себестоимость единицы продукции повышалась на x процентов. После повышения себестоимость стала равной $50 + \frac{x}{100} \cdot 50 = 50 + \frac{x}{2}$, а после снижения — $\left(50+\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{100} \cdot \left(50+\frac{x}{2}\right) = \left(50+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)$. По условию имеем $\left(50+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right) = 48$, откуда $x = 20\%$.

Ответ: 20%.

13.316. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в два раза.

Решение.

Пусть x — объем выпускаемой продукции, а y — число процентов. За один год объем выпускаемой продукции стал $x + \frac{y}{100} = x\left(1+\frac{y}{100}\right)$, а за второй — $x\left(1+\frac{y}{100}\right) + \frac{y}{100}\left(x\left(1+\frac{y}{100}\right)\right) = x\left(1+\frac{y}{100}\right)^2$. По условию имеем $x\left(1+\frac{y}{100}\right)^2 = 2x$, откуда $y = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot 100$ или $y \approx 41{,}4\%$.

Ответ: $\approx 41{,}4\%$.

13.317. Один турист вышел в 6 ч, а второй — навстречу ему в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости первого и второго туристов соответственно, x — время, за которое второй турист проходит то расстояние, которое первый проходит за 2 часа. По условию, имеем систему $\begin{cases} xV_2 = 120V_1, \\ V_2x + 60V_2 = 120V_1 + V_1(x+28). \end{cases}$ Из первого уравнения выражаем $\frac{V_1}{V_2}$ и подставляем во второе. Из полученного уравнения находим $x = 72$ (мин). Тогда первый турист затратил на весь путь $120 + 72 + 28 = 220$ (мин), а второй — $60 + 72 = 132$ (мин).

Ответ: 3 ч 40 мин и 2 ч 12 мин.

13.318. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на $x\%$. Каким должно быть число x, чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

Решение.

Пусть z — первоначальная цена продукта. После первого снижения цена стала $z - 0{,}15z = 0{,}85z$, а после второго — $0{,}85z - 0{,}85 \cdot 0{,}15z = 0{,}85^2 z$. По условию $z - \frac{x}{100} z = 0{,}85^2 z$, откуда $x = \left(1 - 0{,}85^2\right) \cdot 100 = 27{,}75\%$.

Ответ: 27,75%.

13.319. Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

Решение.

Первоначально в сосуде содержалось $16 \cdot \frac{8}{100} = \frac{32}{25}$ л кислорода. Выпущенные x л смеси содержат $\frac{16x}{100}=\frac{4x}{25}$ л кислорода. Теперь в сосуде на 8 л смеси приходится $\frac{32-4x}{25}$ л кислорода, что составляет $(16-2x)\%$. Вторично выпущенные x л смеси содержат $(16-2x)\frac{x}{100}=(8-x)\frac{x}{50}$ л кислорода. По условию, $\frac{32-4x}{25}-\frac{(8-x)x}{50}=9\cdot\frac{8}{100}$, откуда $x_1=2$, $x_2=14$.

Ответ: 2 л.

13.320. Примеси составляют 20% от общего объема раствора. Каково наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%, если каждый фильтр поглощает 80% примесей? (Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

Решение.

Примеси составляют $\frac{1}{5}$ раствора. После первой фильтрации останется $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ примесей, а после k-ой фильтрации — $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$. По условию $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\le 10^{-4}$; $-(k+1)\lg 5\le -4$, откуда $k\ge 4{,}7$.

Ответ: 5 фильтров.

13.321. Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

Решение.

Пусть $100x+10y+z$ — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases}100x+10y+z+100z+10y+x=1252,\\ x+y+z=14,\\ x^2+y^2+z^2=84,\end{cases}$$

откуда $x=8$, $y=2$, $z=4$.

Ответ: 824 и 428.

13.322. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

Решение.

Пусть1 кг меда получается из x кг нектара. После удаления воды из нектара останется 300 г прочих веществ на каждый килограмм, а после удаления воды из меда — 830 г на килограмм. Имеем $300x = 830$, откуда $x = 2{,}77$ (кг).

Ответ: $x \approx 2{,}77$ кг.

13.323. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т. е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

Решение.

Пусть x — масса муки для пшеничного хлеба, $(x+10)$ — для ржаного.

По условию $x + x\cdot\dfrac{x}{100} + (x+10) + \dfrac{x+10}{100}(x+10) = 112{,}5$ откуда $x = 35$.

Ответ: 35 и 45 кг.

13.324. Инженер в первую неделю отпуска израсходовал на несколько рублей меньше, чем 3/5 количества взятых с собой денег; во вторую неделю 1/4 остатка и еще 30 руб.; в третью неделю 2/5 нового остатка и еще 12 руб.; после чего осталось 6/35 от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недель, убывало в арифметической прогрессии. Сколько денег было израсходовано за три недели отпуска?

Решение.

Пусть S — сумма взятых денег. Заполним таблицу:

Период	Израсходовано, руб	Остаток, руб
первая неделя	x	$S-x$
вторая неделя	$\dfrac{S-x}{4}+30$	$\dfrac{3(S-x)}{4}-30$
третья неделя	$\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3(S-x)}{4}-30\right)+12$	$\dfrac{6}{35}S$

По условию $\begin{cases} x < \dfrac{3}{5}S, \\ \dfrac{S - x + \dfrac{6}{35}\cdot S}{2} = \dfrac{3(S-x)}{4} - 30, \\ \dfrac{3(S-x)}{4} - 30 - \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3(S-x)}{4} - 30\right) - 12 = \dfrac{6}{35}S, \end{cases}$

откуда $S = 1400$ руб.

Тогда израсходовано $S - \dfrac{6}{35}S = 1160$ (руб).

Ответ: 1160 руб.

13.325. Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. Можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько всего было станков?

Решение.

Пусть x деталей изготовляется на одном новом станке, $\dfrac{x}{2}$ — на старом, n — количество станков. По условию имеем систему

$\begin{cases} (n-1)x + \dfrac{x}{2} = 9000, \\ \dfrac{9000}{n} = x - 200, \end{cases}$ откуда $n = 5$.

Ответ: 5.

13.326. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомашины. Они прибывают в B одновременно, затем выезжают в пункт C, находящийся на расстоянии 120 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Определить скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины машины была неизменной.

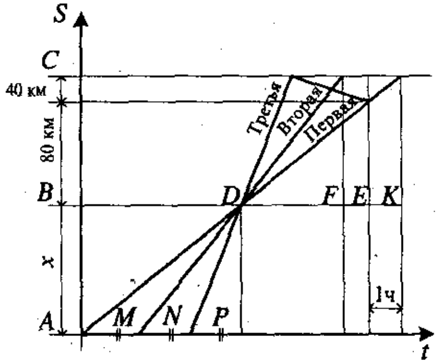


Рис. 13.16

Решение.

Пусть V_1, V_2, V_3 — скорости автомашин. Сравним промежутки времени (см. рис. 13.16), выразив их через отношения пути к скорости:

$$AP=\frac{x}{V_1},\quad MP=\frac{x}{V_2},\quad NP=\frac{x}{V_3}.$$

По условию:

$\frac{x}{V_1}-\frac{x}{V_2}=\frac{x}{V_2}-\frac{x}{V_3}$, откуда $\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_3}=\frac{1}{V_2}$ (1). Далее, $DE=\frac{80}{V_1}$ и $DE=\frac{80+40}{V_3}$, откуда $\frac{80}{V_1}=\frac{120}{V_3}$ (2); $DK=\frac{120}{V_1}$; $DF=\frac{120}{V_2}$, откуда $\frac{120}{V_1}-\frac{120}{V_2}=1$ (3). Решив систему уравнений (1), (2), (3), находим $V_1=30$ км/ч.

Ответ: 30 км/ч.

13.327. По трем сосудам распределено 24 л жидкости. Сначала из первого сосуда перелили в два другие столько, сколько было в каждом из них. Затем из второго перелили в два другие столько, сколько стало в каждом из них после первого переливания. Наконец, из третьего перелили в остальные столько, сколько стало в каждом из них после второго переливания. В результате в каждом сосуде оказалось одинаковое количество жидкости. Сколько жидкости было в каждом сосуде первоначально?

Решение.

Заполним таблицу:

Сосуд	Первоначально	После первого переливания	После второго переливания	После третьего переливания
Первый	x	$x-y-z$	$2(x-y-z)$	$4(x-y-z)$
Второй	y	$2y$	$3y-x-z$	$6y-2x-2z$
Третий	z	$2z$	$4z$	$7z-y-x$

По условию имеем систему $\begin{cases} x+y+z=24, \\ 4(x-y-z)=6y-2x-2z, \\ 4(x-y-z)=7z-y-x, \end{cases}$ откуда $x=13$, $y=7$, $z=4$.

Ответ: 13, 7 и 4 л.

13.328. Бригада рыбаков планировала выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. В течение 1/3 этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы планировалось вылавливать ежедневно?

Решение.

Пусть x — срок по плану, y — количество центнеров в день по плану. По условию имеем систему $\begin{cases} xy=1800, \\ \frac{x}{3}(y-20)+\left(\frac{2x}{3}-1\right)(y+20)=1800, \end{cases}$ откуда $y=100$.

Ответ: 100 ц.

13.329. Двое рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на a дней меньше срока и получил r руб., а второй проработал на a дней больше срока и получил s руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы.

Решение.

Пусть x — срок работы. Тогда первый зарабатывал $\frac{r}{x-a}$ руб. в день, а второй — $\frac{s}{x+a}$. Допустим, $s>r$.

По условию имеем $\frac{r}{x-a}(x+a)=\frac{s}{x+a}(x-a)$, откуда $x=\frac{a(\sqrt{r}+\sqrt{s})}{\sqrt{s}-\sqrt{r}}$.

Ответ: $\frac{a(\sqrt{r}+\sqrt{s})}{\sqrt{s}-\sqrt{r}}$ дней, где $s>r$.

13.330. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 3/5 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Пусть x, y — масса груза, перевозимая каждой машиной за один рейс. По условию имеем систему $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=6, \\ \dfrac{3}{5x}+\dfrac{2}{5y}=12, \end{cases}$ откуда $x=\dfrac{1}{10}$, $y=\dfrac{1}{15}$ или $x=y=\dfrac{1}{12}$. Тогда первая машина перевезет весь груз за 10 ч, а вторая — за 15 ч или каждая за 12 ч.

Ответ: 10 и 15 ч или по 12 ч.

13.331. Из металла определенной марки изготовлено несколько шариков, равных по массе, для подшипников и несколько поршневых колец, также равных по массе. Если бы число, выражающее массу каждого шарика в граммах, было на 2 меньше числа сделанных колец, а число, выражающее массу каждого кольца в граммах, на 2 больше числа сделанных шариков, то число, выражающее их общую массу, превышало бы удвоенную разность числа колец и шариков на 800, а если бы число, выражающее массу каждого предмета в граммах, было равно числу сделанных предметов того же рода, то общая их масса равна была бы 881 г. Сколько было сделано шариков и колец?

Решение.

Пусть x — количество шариков, m_x — масса одного шарика, y — количество колец, m_y — масса одного кольца. По условию имеем систему

$$\begin{cases} m_x+2=y, \\ m_y=x+2, \\ x\cdot m_x+y\cdot m_y-800=2(y-x), \\ x^2+y^2=881, \end{cases}$$

откуда $x=25, y=16$ или $x=16, y=25$.

Ответ: 25 шариков и 16 колец или 16 шариков и 25 колец.

13.332. Три мальчика *А*, *Б* и *В* условились, что при совместном путешествии на катере каждый побывает в должности капитана, причем величина времени пребывания каждого в этой должности будет пропорциональна числу очков, которые он получит, участвуя в географической викторине. В итоге *А* получил на 3 очка больше, чем *В*; *Б* и *В* вместе получили 15 очков. Число, выражающее 1/10 всего времени путешествия (в часах), на 25 больше числа очков, полученных мальчиками. Сколько времени были капитанами A и B, если $Б$ исполнял эту обязанность 160 ч?

Решение.

Пусть x, $18-x$, $x-3$ очков получили мальчики A, $Б$ и B соответственно, k — коэффициент пропорциональности. По условию имеем

систему $\begin{cases} \frac{1}{10}k(x+18-x+x-3)=x+18-x+x-3+25, \\ k\cdot(18-x)=160, \end{cases}$

откуда $x = 10$, $k = 20$. Тогда $kx = 200$, $k(x-3)=140$.

Ответ: 200 и 140 ч.

13.333. Мяч падает с высоты 2 м 43 см и, ударяясь о землю, отскакивает вновь, поднимаясь всякий раз на 2/3 высоты, с которой он в очередной раз падает. После скольких ударов мяч поднимется на высоту 32 см?

Решение.

Числа, выражающие высоту поднятия мяча, составляют геометрическую прогрессию с $b_1 = 243q$ и $q = \frac{2}{3}$. По условию $q_n = 32 = b_1 q^{n-1}$, откуда $n = 5$.

Ответ: после 5 ударов.

13.334. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей вместе. Сколько метров ткани было в каждом куске?

Решение.

Пусть x, $x+6$, $x+15$ — длина синего, зеленого и черного куска ткани, α, β, γ — стоимости одного метра синей, зеленой и черной ткани соответственно. По условию имеем систему

$\begin{cases} \alpha x = \beta(x+6), \\ \alpha x = \gamma(x+15), \\ 4{,}5\gamma = 3\beta + 0{,}5\gamma, \end{cases}$ откуда $x = 30$.

Ответ: 45, 36 и 30 м.

13.335. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если число, составленное из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти это число.

Решение.

Пусть $10x + y$ — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 10x + y = 3xy + 8, \\ 10y + x = 2xy + 5, \end{cases} \text{откуда } x = 5, y = 3.$$

Ответ: 53.

13.336. Уголь, привезенный на склад, предназначен для двух заводов. На первый завод начали доставлять уголь с 1-го июня по m т ежедневно, не исключая воскресений, на второй завод — с 8-го июня по n т ежедневно, не исключая воскресений. К концу дня 16-го июня на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа был вывезен со склада весь уголь, если оба завода получили угля поровну?

Решение.

Массу всего угля примем за 1. Пусть z — количество дней, необходимых для доставки половины всего угля на два завода одновременно.

По условию имеем систему $\begin{cases} (8-1)m + (16-8+1)(n+m) = \dfrac{1}{2}, \\ z(n+m) = \dfrac{1}{2}, \\ (16+z)m = (16-8+1+z)n, \end{cases}$

откуда $z = 12$, а весь уголь был перевезен к $16 + 12 = 28$ июня.

Ответ: 28 июня.

13.337. На предприятие, где изготовляют растворимый кофе, в последних числах мая привезли партию зерен кофе для переработки. Один механизм, перемалывающий зерна, был приведен в действие в понедельник 1-го июня и перемалывал ежедневно по m кг. С 6-го июня к выполнению этой работы подключили второй механизм, который перемалывал ежедневно по n кг. К концу рабочего дня 10-го июня осталась не перемолотой только половина первоначального количества зерен. Когда была закончена переработка всей партии зерен, если известно, что оба механизма перемололи поровну и, кроме воскресений, других перерывов в работе не имели?

Решение.

Массу всей партии зерен примем за 1. Пусть z — количество дней, необходимых для перемалывания половины всех зерен двумя механизмами одновременно. По условию имеем систему

$$\begin{cases}(6-1)m+(10-6)(n+m)=\dfrac{1}{2},\\ z(n+m)=\dfrac{1}{2},\\ (10-1+z)m=(10-6+z)n,\end{cases}$$ откуда $z = 6$, а все зерна были

перемолоты за $10 - 1 + 6 = 15$ рабочих дней, или к $10 + 1 + 6 = 17$ июня.

Ответ: через 15 рабочих дней, или 17 июня.

13.338. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Решение.

Первоначальное шестизначное число имеет вид $2\cdot10^5+x$. После перенесения цифры 2 на последнее место, получим число $10x + 2$. По условию $10x+2=3\left(2\cdot10^5+x\right)$, откуда $x = 85714$.

Ответ: 285714.

13.339. Нужно было взять несколько литров жидкости при температуре $a°$ и другое количество литров той же жидкости при температуре $b°$, чтобы получить температуру смеси $c°$. Однако второй жидкости было взято столько, сколько предполагалось взять первой, и наоборот. Какая температура смеси получилась?

Решение.

Пусть m_a, m_b — объем взятой жидкости при температуре $a°$ и $b°$ соответственно, x — температура полученной смеси. По условию, имеем систему $\begin{cases}m_a(a-c)+m_b(b-c)=0,\\ m_b(a-x)+m_a(b-x)=0,\end{cases}$ откуда $x = a + b - c$.

Ответ: $a + b - c$.

13.340. Известно, что разность переменных величин z и y пропорциональна величине x, а разность величин x и z пропорциональна величине y. Коэффициент пропорциональности один и тот же и равен целому положительному числу k. Некоторое значение величины z в 5/3 раза больше разности соответствующих значений x и y. Найти числовое значение коэффициента k.

Решение.

По условию имеем систему $\begin{cases} z-y=kx, \\ x-z=ky, \\ x-y=\dfrac{3}{5}z. \end{cases}$

Из первых двух уравнений выражаем $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ через k, затем подставляем полученные выражения $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ в третье уравнение и находим $k=3$.

Ответ: 3.

13.341. Трое рабочих участвовали в соревновании. Первый и третий из них произвели продукции в два раза больше, чем второй, а второй и третий — в три раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в соревновании?

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 — объем произведенной продукции первым, вторым и третьим рабочим соответственно. По условию имеем систему

$\begin{cases} x_1+x_3=2x_2, \\ x_2+x_3=3x_1, \end{cases}$ откуда $x_3:x_2:x_1=5:4:3$.

Ответ: на первом месте — третий, на втором — второй, на третьем — первый. Количества выработанной ими продукции относятся как 5:4:3.

13.342. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через 2 ч после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

Решение.

Пусть V_A, V_B — скорости поездов, вышедших из A и B соответственно. По условию имеем систему

$\begin{cases} V_A \le \dfrac{360}{5}, \\ \dfrac{360}{\frac{3}{2}V_A+V_B}<2, \end{cases}$ откуда $V_A \le 72$ (км/ч)

и $V_B > 180-\frac{3}{2}V_A$. При максимальной скорости $V_A=72$ км/ч имеем

$V_B-V_A>0$, откуда $V_B>V_A$.

Ответ: вышедшего из B.

13.343. Есть предположение, что выражение

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

является квадратом трехчлена вида $x^2+px+qa^2$. Как можно проверить это утверждение и найти коэффициенты p и q?

Решение.

Чтобы проверить данное утверждение, приравняем выражения:

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4=\left(x^2+px+qa^2\right)^2;$$

раскроем скобки

$$x^4+10ax^3+35a^2x^2+50a^3x+25a^4=x^4+2px^3+\left(2qa^2+p^2\right)x^2+$$
$$+2pqa^2x+q^2a^4;$$

проверяем, совпадают ли коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x и равны ли свободные члены $25a^4$ и q^2a^4. Если утверждение верно, то $10a=2p$, откуда $p=5a$, и $35a^2=2qa^2+p^2$, откуда $q=5$. Далее убеждаемся, что при найденных значениях p и q верно $50a^3=2pqa^2$ и $25a^4=q^2a^4$.

Ответ: $p=5a$; $q=5$.

13.344. Модули двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и модуль их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся модули сил.

Решение.

По условию $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$, т.е. $3d^2+2ad-a^2=0$. Пусть $d=ak$ ($k>0$); тогда $3a^2k^2+2a^2k-a^2=0$, откуда $3k^2+2k-1=0$. Годится лишь корень $k=\frac{1}{3}$.

Находим искомые отношения:

$$\frac{a+d}{a}=1+\frac{d}{a}=\frac{4}{3};\ \frac{a+2d}{a}=1+\frac{2d}{a}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: 3 : 4 : 5.

13.345. Предполагая, что стрелки часов движутся без скачков, установить, через сколько минут после того, как часы показывали 8 ч, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.

Пусть t — время, за которое минутная стрелка догонит часовую. Скорость минутной стрелки примем за 1, тогда скорость часовой — $\frac{1}{12}$. По условию $\frac{1}{12}\cdot t+40=1\cdot t$, откуда $t=\frac{480}{11}$ (мин).

Ответ: через $43\frac{7}{11}$ мин.

13.346. Объем вещества A составляет половину суммы объемов веществ B и C, а объем вещества B составляет 1/5 часть суммы объемов веществ A и C. Найти отношение объема вещества C к сумме объемов веществ A и B.

Решение.

По условию, $2V_A=V_B+V_C$ и $5V_B=V_A+V_C$. Пусть $V_A=xV_C$ и $V_B=yV_C$. Тогда получаем систему $\begin{cases}2x-y=1,\\-x+5y=1,\end{cases}$ откуда $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$.

Следовательно, $\frac{V_C}{V_A+V_B}=\frac{1}{x+y}=1$.

Ответ: 1.

13.347. Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то получатся два равных числа.

Решение.

Пусть x, y — искомые числа. По условию имеем систему

$$\begin{cases}x+y=1244,\\10x+3=\frac{y-2}{10},\end{cases}$$

откуда $x=12$, $y=1232$.

Ответ: 12 и 1232.

13.348. От станции A по направлению к станции B отошел пассажирский поезд (рис. 13.17). Через a ч от станции B по направлению к станции A отошел поезд «Стрела». Поезда встретились на станции C.

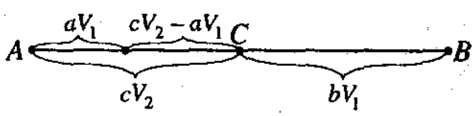


Рис. 13.17

После встречи пассажирский поезд шел b ч, поезд «Стрела» шел c ч. Сколько времени потребовалось каждому из этих поездов на весь путь между станциями A и B? Предполагается, что скорость поездов постоянная на всем пути.

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости поезда и «Стрелы» соответственно. По условию $\frac{cV_2 - aV_1}{V_1} = b\frac{V_1}{V_2}$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}$. Тогда поезд двигался от станции A к B $a + \left(c\frac{V_2}{V_1} - a\right) + b = \frac{a}{2} + b + \frac{\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ (ч), а «Стрела» двигалась от станции B к A — $c + b\frac{V_1}{V_2} = c - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ (ч).

Ответ: $\frac{a+2b+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ и $\frac{2c-a+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ ч.

13.349. От почты A до поселка B надо пройти 9 км. Почтальон проходит весь путь туда и обратно, не задерживаясь в поселке, за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если в гору почтальон идет со скоростью 4 км/ч, по ровному месту 5 км/ч, а под гору 6 км/ч?

Решение.

Пусть x, y, z — длина дороги в гору, по ровному месту и под гору соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}+\frac{z}{4}+\frac{y}{5}+\frac{x}{6}=3\frac{41}{60}, \\ x+y+z=9, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 25x+24y+25z=221, \\ 25x+25y+25z=225, \end{cases}$$

откуда $y = 4$ (км).

Ответ: 4 км.

13.350. Два автомобилиста встретились на полпути между городами A и B. При встрече выяснилось, что первый из A выехал раньше, чем второй из B, на столько часов, сколько составит половина того времени (также в часах), которое прошло бы до их встречи при одновременном выезде из тех же пунктов, по той же дороге, с теми же скоростями, постоянными на всем пути. Во сколько раз второй автомобилист ехал быстрее первого?

Решение.

Пусть V_1, V_2 — скорости автомобилей из городов A и B соответственно, x — расстояние между городами A и B. Тогда автомобилист из A выехал на

$\frac{x}{2(V_1+V_2)}$ (ч) раньше, чем автомобилист из B и проехал $\frac{xV_1}{2(V_1+V_2)}$ (км).

По условию, $\frac{\frac{x}{2}-\frac{xV_1}{2(V_1+V_2)}}{V_1}=\frac{\frac{x}{2}}{V_2}$, откуда $\frac{V_2}{V_1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз.

13.351. Дорога от почты A до поселка B идет сначала в гору на протяжении 2 км, потом по ровному месту 4 км и затем под гору 3 км. Почтальон проходит от A до B за 2 ч 16 мин, а обратно — за 2 ч 24 мин. Если бы конечный пункт его пути был расположен по той же дороге, но вдвое ближе к A, то на весь путь туда и обратно почтальону было бы достаточно 2 ч 19 мин. Сколько километров в час проходит почтальон, когда он идет: а) в гору; б) по ровному месту; в) под гору?

Решение.

Пусть V_1, V_2, V_3 — скорости почтальона на участке в гору, по ровному месту, под гору соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2V_1+4V_2+3V_3=2\frac{16}{60}, \\ 3V_1+4V_2+2V_3=2\frac{24}{60}, \\ 2V_1+\left(\frac{2+4+3}{2}-2\right)V_2+\left(\frac{2+4+3}{2}-2\right)V_2+2V_3=2\frac{19}{60}, \end{cases}$$

откуда $V_1=3$ (км/ч), $V_2=4$ (км/ч), $V_3=5$ (км/ч).

Ответ: а) 3 км/ч; б) 4 км/ч; в) 5 км/ч.

13.352. Навстречу движущемуся трамваю шла девушка — знакомая юноши, сидевшего у окна трамвая. Через 8 с после того, как она поравнялась с окном, юноша вышел из трамвая и пошел следом за ней. Сколько прошло времени с этого момента до того, как он догнал девушку? Скорость юноши в два раза больше скорости девушки и в пять раз меньше скорости трамвая.

Решение.

Пусть x, $2x$, $10x$ — скорости девушки, юноши, трамвая соответственно. По условию $8\cdot x+8\cdot 10x+t\cdot x=t\cdot 2x$, где t — искомое время. Решив уравнение, находим $t=88$ (с).

Ответ: 88 с.

13.353. При умножении двух положительных чисел, из которых одно на 75 больше другого, по ошибке получилось произведение на 1000 меньше истинного. Вследствие этого, деля (при проверке) ошибочное произведение на меньший из множителей, получили в частном 227 и в остатке 113. Найти оба числа.

Решение.

Пусть x, y — искомые числа, z — ошибочное произведение чисел x и y.

По условию имеем систему $\begin{cases} x-y=75, \\ xy=z+1000, \\ z=227y+113, \end{cases}$ откуда $x=234, y=159$.

Ответ: 159 и 234.

13.354. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

Решение.

Пусть x,y — множители, z — ошибочное произведение чисел x и y.

По условию имеем систему $\begin{cases} x-y=10, \\ xy=z+40, \\ z=39y+22, \end{cases}$ откуда $x=41, y=31$.

Ответ: 31 и 41.

13.355. Автомобиль, пройдя путь от A до B, равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь от A до B. Найти первоначальную скорость автомобиля.

Решение.

Пусть V — первоначальная скорость автомобиля. По условию имеем

$$\frac{300}{V}-\left(1\frac{12}{60}+\frac{300-1\frac{12}{60}V}{V+16}\right)=\frac{48}{60},\quad \text{откуда } V=60\,(\text{км/ч}).$$

Ответ: 60 км/ч.

13.356. Расстояние между пунктами A и B равно 308 м. Из пункта A по направлению к B движется точка, которая в первую секунду проходит 15 м, а в каждую следующую секунду на 1 м меньше. Из пункта B в противоположном направлении движется точка, которая в первую секунду проходит 20 м, а в каждую следующую на 3 м больше. На каком расстоянии от пункта A произойдет встреча, если точка, вышедшая из пункта B, начала двигаться на 3 с позже точки, вышедшей из пункта A?

Решение.

Найдем законы движения точек.

Для точки из A: $\begin{cases} 15 = 1 \cdot V_1 - \dfrac{a_1 \cdot 1^2}{2}, \\ 15 + 14 = 2V_1 - \dfrac{a_1 \cdot 2^2}{2}, \end{cases}$ откуда $V_1 = 15{,}5$ (м/с),

$a_1 = 1$ (м/с^2), и закон ее движения — $S_A = 15{,}5t - \dfrac{t^2}{2}$.

Для точки из B: $\begin{cases} 20 = 1 \cdot V_2 + \dfrac{a_1 \cdot 1^2}{2}, \\ 20 + 23 = 2V_2 + \dfrac{a_1 \cdot 2^2}{2}, \end{cases}$ откуда $V_2 = 18{,}5$ (м/с),

$a_2 = 3$ (м/с^2), и закон ее движения — $S_B = 18{,}5t + \dfrac{3t^2}{2}$.

Точка из A за 3 с пройдет $15{,}5 \cdot 3 - \dfrac{3^2}{2} = 42$ (м) и скорость ее станет

$V = V_1 - 3a_1 = 12{,}5$ (м/с). По условию, $42 + 12{,}5t - \dfrac{t^2}{2} + 18{,}5t + \dfrac{3t^2}{2} = 308$, откуда $t = 7$ (с).

Тогда точки встретятся на расстоянии $42 + 12{,}5 \cdot 7 - \dfrac{7^2}{2} = 105$ (м) от пункта A.

Ответ: 105 м.

13.357. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

Решение.

Пусть V — скорость, с которой ехал велосипедист, $\frac{1\cdot V-1}{1\frac{15}{60}}$ — скорость, с которой велосипедист предполагал ехать. По условию

$$\frac{96}{V}+2=\frac{96}{\frac{V-1}{1\frac{1}{4}}},$$ откуда $V=16$ (км/ч).

Ответ: 16 км/ч.

13.358. Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец , то получится число, в три раза больше искомого.

Решение.

Первоначальное шестизначное число имеет вид $1\cdot 10^5+x$. После перенесения цифры 1 на последнее место получим число $10x+1$. По условию, $10x+1=3(1\cdot 10^5+x)$, откуда $x=42857$.

Ответ: 142857.

13.359. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из полученных таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

Решение.

Пусть x, y — искомые числа. По условию имеем систему

$$\begin{cases}1000x+y=2(1000y+10x)+590,\\ 2x+3y=72,\end{cases}$$ откуда $x=21$, $y=10$.

Ответ: 21 и 10.

13. 360. Велосипедист отправляется из A в B . Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B , он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость V велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем на путь от A до B ?

Решение.

Пусть V — скорость велосипедиста.

По условию, $\frac{60}{V} \geq 1 + \frac{20}{60} + \frac{60 - 1 \cdot V}{V + 4}$, откуда $0 < V \leq 20$ (км/ч).

Ответ: $0 < V \leq 20$ км/ч.

13.361. Красный карандаш стоит 27 коп., синий — 23 коп. На покупку карандашей можно затратить не более 9 руб. 40 коп. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на 10. Сколько красных и сколько синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

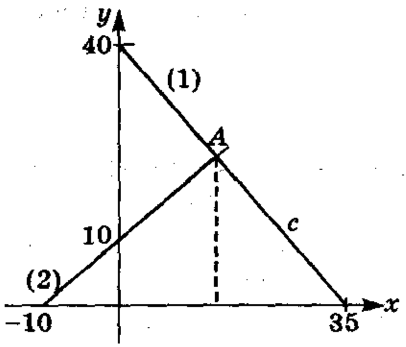


Рис. 13.18

Решение.

Пусть было куплено x красных и y синих карандашей. По условию, $27x + 23y \leq 940$ и $y - x \leq 10$. Построим прямые $27x + 23y = 940$ (1) и $y - x = 10$ (2). Из рис. 13.18 видно, что эти прямые пересекаются в точке A, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1) и (2), и при этом достигается максимально возможная сумма $x + y$. Решив систему (1), (2) и учитывая, что числа x и y — натуральные, получаем $x = 14$, $y = 24$.

Ответ: 14 красных и 24 синих.

13.362. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

Решение.

Пусть взято x частей первого металла и y частей второго. Тогда

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{17}{44}(x + y)$, откуда $\frac{y}{x} = \frac{35}{9}$.

Ответ: 9 и 35 частей.

13.363. Некоторый сплав содержит металлы A и B в отношении $m:n$, другой — те же металлы в отношении $p:q$. Какие количества первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов A и B?

Решение.

Пусть x — масса первого сплава, в котором $\frac{m}{n+m}x$ металла A и $\frac{n}{n+m}x$ металла B; $(1-x)$ — масса второго сплава, в котором $\frac{p}{p+q}(1-x)$ металла A и $\frac{q}{p+q}(1-x)$ металла B.

По условию $\frac{n}{n+m}x+\frac{p}{p+q}(1-x)=\frac{n}{n+m}x+\frac{q}{p+q}(1-x)$, откуда $x=\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$.

Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$.

13.364. Основание степени увеличили в k раз, а показатель степени уменьшили во столько же раз, в результате чего сама степень не изменилась. Найти основание степени, обладающей таким свойством.

Решение.

Пусть x, y — основание и показатель степени. По условию, $(kx)^{\frac{y}{k}}=x^y$ или $(kx)^{\frac{1}{k}}=x$, откуда $x=\sqrt[k-1]{k}$.

Ответ: $\sqrt[k-1]{k}$.

13.365. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник, а после того как второе судно прошло 80 км — прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна

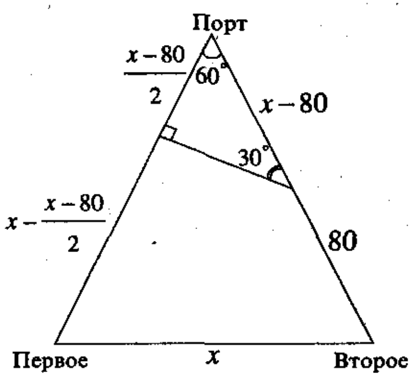


Рис. 13.19

в порт второму остается пройти 120 км. Найти расстояние между судами в начальный момент времени.

Решение.

Пусть x — расстояние между судами в начальный момент времени (рис. 13.19); V_1, V_2 — скорости движения первого и второго судов соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{x-80}{2}}{V_1}=\dfrac{80}{V_2}; \\ \dfrac{\dfrac{x-80}{2}}{V_1}=\dfrac{x-80-120}{V_2}. \end{cases}$$

Из каждого уравнения выражаем $\dfrac{V_1}{V_2}$, приравниваем полученные выражения и находим $x = 240$ (км).

Ответ: 240 км.

13.366. На реке, скорость течения которой 5 км/ч, в направлении ее течения расположены пристани A, B и C, причем B находится посередине между A и C. От пристани B одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани C, и катер, который идет к пристани A, причем скорость катера в стоячей воде равна V км/ч. Дойдя до пристани A, катер разворачивается и движется по направлению к пристани C. Найти все те значения υ, при которых катер приходит в C позже, чем плот.

Решение.

Пусть x — половина расстояния между A и C.

По условию $\dfrac{x}{V-5}+\dfrac{2x}{V+5}>\dfrac{x}{2}$, откуда $5<V<15$ (км/ч).

Ответ: $5<V<15$ км/ч.

13.367. Несколько студентов решили купить магнитофон ценой от 170 до 195 долларов. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 доллар больше. Сколько стоил магнитофон?

Решение.

Пусть x — сумма, которую первоначально должен был внести каждый студент; y — количество студентов. По условию

$$\begin{cases} 2x = y-2, \\ xy \ge 170, \\ xy \le 195, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{y}{2}-1, \\ y\left(\dfrac{y}{2}-1\right) \ge 170, \\ y\left(\dfrac{y}{2}-1\right) \le 195. \end{cases}$$

Решая неравенства, находим $y = 20$, тогда $x = \dfrac{20}{2} - 1 = 9$ (долларов), и стоимость магнитофона $xy = 180$ долларов.

Ответ: 180 долларов.

13.368. Для перевозки груза из одного места в другое было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

Решение.

Пусть масса перевезенного груза составляет x т, а число машин равно n. По условию $x = \left(\dfrac{x}{n} - \dfrac{1}{2}\right)(n+4)$ или $n^2 + 4n - 8x = 0$, откуда $n = 2(-1 + \sqrt{1+2x})$ (n — натуральное). В промежутке $55 \le x \le 64$ подходит только $x = 60$. Тогда $n = 2(-1+11) = 20$. Итак, было 24 машины, на каждую из которых грузили по $\dfrac{60}{24} = 2{,}5$ т.

Ответ: 2,5 т.

13.369. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше, чем лип. Если же количество берез увеличить вдвое, не изменяя количества лип, то лип теперь будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

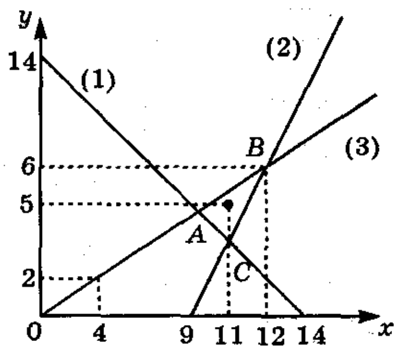


Рис. 13.20

Решение.

Пусть x, y — количество лип и берез соответственно. По условию,

имеем систему неравенств $\begin{cases} x+y>14, \\ y+18>2x, \\ x>2y. \end{cases}$

Построим прямые $x + y = 14$ (1), $y + 18 = 2x$ (2), $x = 2y$ (3). Из рис. 13.20 видно, что точка (11;5) — единственная точка с натуральными координатами, которая лежит внутри треугольника ABC, т.е. удовлетворяет нашей системе неравенств.

Ответ: 11 лип и 5 берез.

13.370. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение.

Пусть x — количество листов в альбоме, y — количество марок у школьника. По условию имеем систему $\begin{cases} 20x<y, \\ 23x>y, \\ 21x+y=500, \end{cases}$ откуда находим $\frac{500}{44}<x<\frac{500}{41}$.

Ответ: 12.

13.371. Сооружается участок железнодорожной насыпи длиной 100 м, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция с нижним основанием 5 м, верхним основанием, не меньшим 2 м, и углом откоса 45°. Какую высоту h должна иметь эта насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее 400 м^3 но не более 500 м^3?

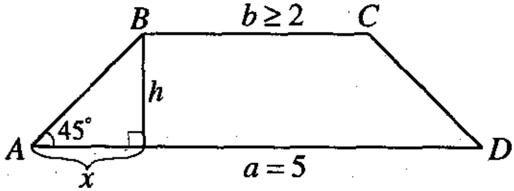


Рис. 13.21

Решение.

Из рис. 13.21 имеем $x=\dfrac{a-b}{2}$; $h=x\operatorname{tg}45^\circ=\dfrac{a-b}{2}$. Площадь трапеции $ABCD$ $S=\dfrac{a+b}{2}h=\dfrac{a^2-b^2}{4}$.

По условию $400\le\dfrac{a^2-b^2}{4}\cdot 100\le 500$, откуда $\sqrt{5}\le b\le 3$ (м). Тогда $\dfrac{a-3}{2}\le h\le\dfrac{a-\sqrt{5}}{2}$ (м) или $1\le h\le\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ (м).

Ответ: $1\le h\le\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ м.

Учебное издание

ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ГРУППА Б

КНИГА 2

Под редакцией М. И. Сканави

Подписано в печать с готовых диапозитивов 22.04.03.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Бумага
типографская. Усл. печ. л. 52,0. Тираж 4000 экз.
Заказ 1023.

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001 г.
109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru

ООО «Харвест». Лицензия ЛВ № 32
от 27.08.2002. РБ, 220013, Минск, ул. Кульман,
д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Открытое акционерное общество
«Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
220600, Минск, ул. Красная, 23.