ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ для поступающих В ВУЗЫ

группа Б

КНИГА 1

Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

Москва
«Мир и Образование»
Минск
«Харвест»
2003

УДК 51(076.1)
ББК 22.11
П51

Полный сборник решений задач для поступающих в вузы.
П51 Группа Б / Под ред. М. И. Сканави. В 2 кн. кн. 1. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2003. — 400 с.: ил.

ISBN 5-9466-034-9 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-0911-7 (ООО «Харвест»)

Впервые в помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Книги помогут учащимся научиться решать экзаменационные задачи различного уровня сложности любого вуза.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию «Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, 6-е издание (М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование).

УДК 51(076.1)
ББК 22.11

ISBN 5-9466-034-9
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-0911-7
(ООО «Харвест»)

Решения к главе 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ТОЖДЕСТВО И ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют *целым рациональным выражением*. Если кроме указанных действий, входит действие деления, то выражение называют *дробно-рациональным*.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются *рациональными*. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют *иррациональным*.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Действия над степенями

Действия над степенями производятся по нижеследующим правилам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (2.1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};\qquad(2.2)$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{mn};\qquad(2.3)$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n;\qquad(2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.\qquad(2.5)$$

Одночлен

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\qquad(2.6)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\qquad(2.7)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\qquad(2.8)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;\qquad(2.9)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;\qquad(2.10)$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3;\qquad(2.11)$$

$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3;\qquad(2.12)$$

$$(a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = a^4 - b^4;\qquad(2.13)$$

$$(a-b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right) = a^5 - b^5;\qquad(2.14)$$

$$(a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right) = a^5 + b^5;\qquad(2.15)$$

$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+a^5)=a^6-b^6; \qquad (2.16)$$

$$(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)=a^7-b^7; \qquad (2.17)$$

$$(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)=a^7+b^7; \qquad (2.18)$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n-b^n, \qquad (2.19)$$

где n — любое целое число;

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n+b^n, \qquad (2.20)$$

где $n=2k+1$, k — натуральное число;

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc; \qquad (2.21)$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc; \qquad (2.22)$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd;\end{aligned} \qquad (2.23)$$

$$\begin{aligned}(a+b-c-d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd;\end{aligned} \qquad (2.24)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c, \qquad (2.25)$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Формулы (2.16) — (2.24) остаются верными, если вместо одночленов ***a*, *b*, *c*, *d*** подставить любые выражения.

Многочлен $P_n(x)$ относительно переменной x вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_0,$$

где a_0, a_1, a_2, ... a_n — действительные числа и $a_0\neq 0$, называется *многочленом, расположенным по убывающим степеням x,* или многочленом, представленным в *каноническом виде*.

Числа a_0, a_1, a_2, ... a_n называются его коэффициентами, одночлен a_0x^n — его *старшим членом*, a_0 — *свободным членом*, число n — *степенью многочлена* (n — натуральное число).

Корнями многочлена $P_n(x)$ будем называть такие значения переменной x, при которых многочлен $P_n(x)$ превращается в нуль.

Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ ($m\leq n$) значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы $P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x)$ и степень многочлена $R_k(x)$ была меньше степени делителя $Q_m(x)$, т.е. $k<m$. При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ называют частным, а многочлен $R_k(x)$ — остатком.

Для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ ($m \le n$ и $Q_m(x) \ne 0$) всегда найдется, и притом единственная пара многочленов $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x) \qquad (k<m),$$

т.е. если делитель не нуль — многочлен, то действие деления многочленов всегда выполнимо.

Теорема Безу. Если многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ разделить на двучлен $x-a$, то в остатке получим число R, равное значению данного многочлена при $x=a$, т.е. $R=P_n(a)$.

Схема сокращенного деления многочлена на двучлен. При делении многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$, расположенного по убывающим степеням x, на двучлен $x-a$ применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера.*

Имеют место следующие формулы для нахождения коэффициентов частного $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка R:

$$\begin{aligned} &b_1=a_1+aa_0,\\ &b_2=a_2+ab_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2},\\ &R=a_n+ab_{n-1}. \end{aligned}$$

Практически вычисление коэффициентов частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R проводится по следующей схеме (схеме Горнера).

Пусть требуется разделить многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+$ $+\ldots+a_0$ на двучлен $x-a$.

Значение a двучлена, коэффициенты многочлена ($b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$) и остаток запишем в следующей форме:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+$ $+ab_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+$ $+ab_{n-2}$	...	$b_0=a_1+ab_1$	$R=a_0+ab_0$

Отсюда записываем частное

$$Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0,$$

если $R=0$, и результат деления

$$P_n(x):(x-a)\equiv Q_{n-1}(x)+\frac{R}{x-a} \text{ или } P_n(x)\equiv(x-a)Q_{n-1}(x)+R,$$

если $R\neq 0$.

Понятие корня. Основные свойства корня

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются *иррациональными.*

Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a ($n\geq 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a — подкоренное выражение (или число), n — показатель корня ($n\geq 2; n\in N$).

По определению $\sqrt[n]{a}=b$, если $b^n=a$, или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

Основные свойства корня

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени из данного числа a, называется извлечением корня n-й степени из числа a, а результат извлечения корня в виде $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом.*

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

Арифметический корень и его свойства

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n ($n \geq 2; n \in N$) из положительного числа a называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$ есть арифметический корень, где $a \geq 0, b \geq 0$ и $b^n = a$.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа a и натурального числа n ($n > 1$) всегда найдется, и при том только одно, такое неотрицательное число b, что $b^n = a$.

Правила действий над корнями

Для любых действительных чисел a, b и c и натуральных n и k имеют место следующие правила действий над корнями:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} = \sqrt[2n+1]{abc}, \qquad (2.26)$$

$$\sqrt[2n+1]{abc} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c}, \qquad (2.27)$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \qquad (2.28)$$

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} \quad (b \neq 0), \qquad (2.29)$$

$$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k = \sqrt[2n+1]{a^k}, \tag{2.30}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^k} = \left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k, \tag{2.31}$$

$$\sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a}, \tag{2.32}$$

$$\sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}}, \tag{2.33}$$

$$\sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b} \cdot \sqrt[2n]{c} = \sqrt[2n]{abc} \quad (a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0), \tag{2.34}$$

$$\sqrt[2n]{abc} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|} \cdot \sqrt[2n]{|c|} \quad (abc \ge 0), \tag{2.35}$$

$$\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = \sqrt[2n]{\frac{a}{b}} \quad (a \ge 0, b > 0), \tag{2.36}$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}} \quad \left(\frac{a}{b} \ge 0, b \ne 0\right), \tag{2.37}$$

$$\sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[2nk]{a} \quad (a \ge 0), \tag{2.38}$$

$$\sqrt[2nk]{a} = \sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} \quad (a \ge 0), \tag{2.39}$$

$$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^k = \sqrt[2n]{a^k} \quad (a \ge 0), \tag{2.40}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2k}} = \left(\sqrt[2n]{|a|}\right)^{2k} \quad (a \text{ — любое действительное число}). \tag{2.41}$$

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на *множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).*

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения A называют всякое не равное тождественно нулю выражение B, которое в произведении с A не содержит знака корня, т.е. AB рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}$, где $n>k, a>0$, A — некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, так как $\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}=a$.

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, получим

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}\quad(a>0).$$

2. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$.

Выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ взаимно сопряженные, так как $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$, поэтому

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\text{ при } a\geq 0, b\geq 0, a\neq b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A\sqrt{a}}{2a}=\frac{A\sqrt{b}}{2b}\text{, если } a>0, a=b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\text{ при } a\geq 0, b\geq 0, a\neq b.$$

3. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ и $\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

Выражения $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, а также $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ взаимно сопряжены, так как их произведения $(a+b)$ и $(a-b)$ рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b};$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

4. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ и $\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

Для выражения $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=x^n-y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a},\ y=\sqrt[n]{b}$, то получим

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b},$$

где $a \neq b$ ($a \geq 0, b \geq 0$, если n — четное; a, b — любые действительные числа, если n — нечетное).

Для выражения $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x+y)\left(x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots+x(-y)^{n-2}+(-y)^{n-1}\right)=x^n+(-1)^n y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a}, y=\sqrt[n]{b}$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+(-1)^{n-1}b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[2k]{a}+\sqrt[2k]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[2k]{a^{2k-1}}-\sqrt[2k]{a^{2k-2}b}+\ldots+\sqrt[2k]{ab^{2k-2}}-\sqrt[2k]{b^{2k-1}}\right)}{a-b}$$

при $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$;

$$\frac{A}{\sqrt[2k+1]{a}+\sqrt[2k+1]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[2k+1]{a^{2k}}-\sqrt[2k+1]{a^{2k-1}b}+\ldots-\sqrt[2k+1]{ab^{2k-1}}-\sqrt[2k+1]{b^{2k}}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа и $a+b \neq 0$.

5. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Умножив знаменатель на $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, получим

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

Умножив последнее выражение на $a+b-c-2\sqrt{ab}$, найдем

$$\left((a+b-c)+2\sqrt{ab}\right)\left((a+b-c)-2\sqrt{ab}\right)=(a+b-c)^2-4ab.$$

Таким образом, множителем, сопряженным со знаменателем данной дроби, является $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\times\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)$. Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2-4ab},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, (a+b-c)^2-4ab \neq 0$.

Аналогично исключают иррациональность из знаменателей дробей

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби — сумма четырех квадратных корней $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, причем $ab=cd$, то исключить иррациональность из знаменателя этой дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}{a+b-c-d},$$

где $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0, a+b\neq c+d$.

6. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

Найдем сопряженный со знаменателем множитель. Для этого воспользуемся тождеством

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Если принять $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$, то

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.$$

Умножив полученное выражение на

$$B=(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2},$$

получим

$$\left(a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\right)\cdot B=(a+b+c)^3-27abc.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\cdot B}{(a+b+c)^3-27abc}$$

при $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0, (a+b+c)^3\neq 27abc$.

Преобразование сложного квадратного корня (радикала)

Выражения вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ называются сложными квадратными корнями (радикалами). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A>0, B>0$ и $A^2-B>0$; знаки берутся либо только верхние, либо только нижние. В правильности этой формулы можно убедиться, возведя обе части формулы в квадрат. Эта формула упрощает сложный радикал, если A^2-B — точный квадрат.

Упростить выражения и вычислить их, если даны значения параметров **(2.158 — 2.284):**

2.158. $\sqrt[4]{\left(1-2a+a^2\right)\left(a^2-1\right)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}a+1>0,\\ a\neq-3,\\ a\neq1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a>-1,\\ a\neq-3,\\ a\neq1.\end{cases}$$

$$\sqrt[4]{\left(1-2a+a^2\right)\left(a^2-1\right)(a-1)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}=$$

$$=\sqrt[4]{(a-1)^2(a-1)(a+1)(a-1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{a+1}}{a^2+2a-3}=\frac{\sqrt[4]{(a-1)^4(a+1)^2}}{(a-1)(a+3)}=$$

$$=\frac{|a-1|\sqrt[4]{(a+1)^2}}{(a-1)(a+3)}=\frac{|a-1|\sqrt{(a+1)}}{(a-1)(a+3)}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{a+3}\text{ при }-1<a<1\text{ (с учетом ОДЗ)},\\ \dfrac{\sqrt{a+1}}{a+3}\text{ при }1<a<\infty\text{ (с учетом ОДЗ)}.\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $-1<a<1$; $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $1<a<\infty$.

2.159. $\left(\left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):\left(a^{1/4}+b^{1/4}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \\ b>0. \end{cases}$

$$\left(\left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):\left(a^{1/4}+b^{1/4}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^{3/2}\left(\sqrt[3]{b}\right)^{3/2}}{b^{3/2}\left(\sqrt{a^3}\right)^{3/2}}+\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{a^2\left(\sqrt[8]{b^3}\right)^2}\right):\left(a^{1/4}+b^{1/4}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^{3/2}b^{1/2}}{a^{9/4}b^{3/2}}+\frac{a}{a^2b^{3/4}}\right)\frac{1}{a^{1/4}+b^{1/4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{a^{3/4}b}+\frac{1}{ab^{3/4}}\right)\frac{1}{a^{1/4}+b^{1/4}}=\frac{a^{1/4}+b^{1/4}}{ab}\cdot\frac{1}{a^{1/4}+b^{1/4}}=\frac{1}{ab}.$$

Ответ: $\frac{1}{ab}$.

2.160. $\frac{\left(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4}\right)^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a^{1/3}b^{1/4}\neq 2, \\ a\neq 0, \\ b\neq 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4}\right)^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(a^2b^{3/2}-6a^{5/3}b^{5/4}+12a^{4/3}b-8ab^{3/4}\right)^{2/3}}{a^{4/3}b-4ab^{3/4}+4a^{2/3}b^{1/2}}=$$

$$=\frac{\left(ab^{3/4}\left(ab^{3/4}-6a^{2/3}b^{1/2}+12a^{1/3}b^{1/4}-8\right)\right)^{2/3}}{a^{2/3}b^{1/2}\left(a^{2/3}b^{1/2}-4a^{1/3}b^{1/4}+4\right)}=$$

$$=\frac{a^{2/3}b^{1/2}\left(\left(ab^{3/4}-8\right)-6a^{1/3}b^{1/4}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\right)^{2/3}}{a^{2/3}b^{1/2}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}\right)^3-2^3\right)-6a^{1/3}b^{1/4}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\left(a^{2/3}b^{1/2}+2a^{1/3}b^{1/4}+4\right)-6a^{1/3}b^{1/4}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\left(a^{2/3}b^{1/2}+2a^{1/3}b^{1/4}+4-6a^{1/3}b^{1/4}\right)\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\left(a^{2/3}b^{1/2}-4a^{1/3}b^{1/4}+4\right)\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=\frac{\left(\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^3\right)^{2/3}}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=\frac{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}{\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=1.$$

Ответ: 1

2.161. $\dfrac{a^3-3a^2+4+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}$; $a>1$, $a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение.

$$\frac{a^3-3a^2+4+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}=\frac{a^2(a-2)-\left(a^2-4\right)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}{a^2(a+2)+\left(a^2-4\right)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}=$$

$$=\frac{(a-2)\left(a^2-4-(a-2)\right)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}{(a+2)\left(a^2-4+(a+2)\right)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}=$$

$$=\frac{(a+1)(a-2)^2+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}{(a-1)(a+2)^2+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-1}}=\frac{(a+1)(a-2)^2+(a-2)(a+2)\sqrt{a^2-1}}{(a-1)(a+2)^2+(a-2)(a+2)\sqrt{a^2-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(a+1)^2}\cdot(a-2)^2+(a-2)(a+2)\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{(a-1)^2}\cdot(a+2)^2+(a-2)(a+2)\sqrt{(a-1)(a+1)}}=$$

$$=\frac{(a-2)\sqrt{a+1}\left(\sqrt{a+1}(a-2)+(a+2)\sqrt{a-1}\right)}{(a+2)\sqrt{a-1}\left(\sqrt{a+1}(a-2)+(a+2)\sqrt{a-1}\right)}=\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}.$$

Ответ: $\dfrac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$.

2.162. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq 0$.

$$\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{a^4-8a^2+16}{4a^2}+4}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{a^4-8a^2+16+16a^2}{4a^2}}}=$$

$$=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{a^4+8a^2+16}{4a^2}}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2+4}{2a}\right)^2}}=\frac{a^2+4}{\dfrac{a\left(a^2+4\right)}{2\cdot|a|}}=\frac{2\cdot|a|}{a}=\begin{cases}-2, \text{если } a<0,\\ 2, \text{если } a>0.\end{cases}$$

Ответ: -2 при $a\in(-\infty;0)$; 2 при $a\in(0;\infty)$.

2.163. $$\left(\frac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq \pm 2a, \\ x\neq 0, \\ a\neq 0. \end{cases}$

$$\left(\frac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\dfrac{x+2^{1/3}a^{1/3}x^{2/3}}{2a+2^{2/3}a^{2/3}x^{1/3}}-1}{x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\dfrac{x^{2/3}\left(x^{1/3}+2^{1/3}a^{1/3}\right)}{2^{2/3}a^{2/3}\left(2^{1/3}a^{1/3}+x^{1/3}\right)}-1}{x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=\left(\frac{\dfrac{x^{2/3}}{2^{2/3}a^{2/3}}-1}{x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=$$

$$=\left(\frac{x^{2/3}-2^{2/3}a^{2/3}}{2^{2/3}a^{2/3}\left(x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}\right)}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\left(x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}\right)\left(x^{1/3}+2^{1/3}a^{1/3}\right)}{2^{2/3}a^{2/3}\left(x^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}\right)}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=\left(\frac{x^{1/3}+2^{1/3}a^{1/3}}{2^{2/3}a^{2/3}}-\frac{1}{2^{1/3}a^{1/3}}\right)^{-6}=$$

$$=\left(\frac{x^{1/3}+2^{1/3}a^{1/3}-2^{1/3}a^{1/3}}{2^{2/3}a^{2/3}}\right)^{-6}=\left(\frac{x^{1/3}}{2^{2/3}a^{2/3}}\right)^{-6}=\left(\frac{2^{2/3}a^{2/3}}{x^{1/3}}\right)^{6}=\frac{16a^4}{x^2}.$$

Ответ: $\dfrac{16a^4}{x^2}$.

2.164. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}};\ x>3.$

Решение.

$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}=\frac{\left(x^2-1\right)+2(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{\left(x^2-1\right)-2(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-9}}=$$

$$=\frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{(x-3)(x+3)}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{(x-3)(x+3)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+3}\cdot\left((x-1)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-3}\cdot\left((x+1)\sqrt{x-3}+(x-1)\sqrt{x+3}\right)}=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}.$

2.165. $\dfrac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}};\ t>2.$

Решение.

$$\frac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}=\frac{\left(t^2-4\right)-(t+2)-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{\left(t^2-4\right)+(t-2)-(t-3)\sqrt{t^2-4}}=$$

$$=\frac{(t-3)(t+2)-(t+3)\sqrt{(t-2)(t+2)}}{(t+3)(t-2)-(t-3)\sqrt{(t-2)(t+2)}}=\frac{\sqrt{t+2}\cdot\left((t-3)\sqrt{t+2}-(t+3)\sqrt{t-2}\right)}{\sqrt{t-2}\cdot\left((t+3)\sqrt{t-2}-(t-3)\sqrt{t+2}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{t+2}\left((t+3)\sqrt{t-2}-(t-3)\sqrt{t+2}\right)}{\sqrt{t-2}\left((t+3)\sqrt{t-2}-(t-3)\sqrt{t+2}\right)}=-\frac{\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}=-\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\dfrac{t+2}{t-2}}.$

2.166. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\cdot|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

Решение.

ОДЗ: $b>0, b\neq 1$.

$$\frac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\cdot|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}=\frac{\dfrac{|b-1|+b^2\cdot|b-1|+2b-2}{b}}{\sqrt{\dfrac{b^2-2b+1}{b}}}=$$

$$=\frac{|b-1|\cdot(b^2+1)+2(b-1)}{b\sqrt{\dfrac{(b-1)^2}{b}}}=\frac{|b-1|\cdot(b^2+1)+2(b-1)}{|b-1|\sqrt{b}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-(b-1)(b^2+1)+2(b-1)}{-(b-1)\sqrt{b}}=\dfrac{-(b-1)(b^2+1-2)}{-(b-1)\sqrt{b}}=\dfrac{b^2-1}{\sqrt{b}}, \text{ если } 0<b<1;\\ \dfrac{(b-1)(b^2+1)+2(b-1)}{(b-1)\sqrt{b}}=\dfrac{(b-1)(b^2+1+2)}{(b-1)\sqrt{b}}=\dfrac{b^2+3}{\sqrt{b}}, \text{ если } b>1.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{b^2-1}{\sqrt{b}}$ при $b\in(0;1)$; $\dfrac{b^2+3}{\sqrt{b}}$ при $b\in(1;\infty)$.

2.167. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}m\neq\sqrt[3]{2},\\ m\neq 0.\end{cases}$

$$\frac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}=\frac{m^5+\sqrt[3]{2}\cdot m^4+\sqrt[3]{2^2}\cdot m^3}{|m^3-1|-1}=\frac{m^3(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2})}{|m^3-1|-1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{m^3\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)}{-(m^2-1)-1}=\dfrac{m^2\left(m^2+\sqrt[3]{2^2}\right)}{-m^3}= \\ =-m^2-\sqrt[3]{2m}-\sqrt[3]{2^2}, \text{ если } 0\neq m<1 \\ \dfrac{m^3\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)}{m^3-1-1}=\dfrac{m^2\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)}{m^3-\sqrt[3]{2^3}}= \\ \dfrac{m^3\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)}{(m-\sqrt[3]{2})\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\dfrac{m^2}{m-\sqrt[3]{2}}, \text{ если } 1\leq m\neq\sqrt[3]{2}.\end{cases}$$

Ответ: $-\left(m^2+\sqrt[3]{2}\cdot m+\sqrt[3]{2^2}\right)$ при $m\in(-\infty;0)\cup(0;1)$; $\dfrac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$ при $m\in[1;\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\infty)$.

2.168. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 3.\end{cases}$

$$\frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|=\frac{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2(x-3)}\cdot|x-3|=$$

$$=\frac{\left(x^2+x+1\right)\cdot|x-3|}{x-3}=\begin{cases}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)(x-3)}{x-3}=-\left(x^2+x+1\right), \text{ если } 1\neq x<3; \\ \dfrac{\left(x^2+x+1\right)(x-3)}{x-3}=x^2+x+1, \text{ если } x>3.\end{cases}$$

Ответ: $-(x^2+x+1)$ при $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$; x^2+x+1 при $x\in(3;\infty)$.

2.169. $\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq 0, \\ n\neq 0, \\ m\neq n^3, \\ n^2\neq -m. \end{cases}$

$$\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}=$$

$$=\left(m^{2/3}+nm^{1/3}+n^2\right)\cdot\frac{m^{4/3}-n^3+n^2m^{1/3}-mn}{\dfrac{m}{n}+n-\dfrac{n^4}{m}-n^2}=$$

$$=\left(m^{2/3}+nm^{1/3}+n^2\right)\cdot\frac{\left(m^{4/3}+n^2m^{1/3}\right)-(mn+n^3)}{\dfrac{m^2+mn^2-n^5-mn^3}{mn}}=$$

$$=\left(m^{2/3}+nm^{1/3}+n^2\right)\cdot\frac{m^{1/3}(m+n^2)-n(m+n^2)}{\dfrac{m(m+n^2)-n^3(m+n^2)}{mn}}=$$

$$=\left(m^{2/3}+nm^{1/3}+n^2\right)\cdot\frac{(m+n^2)(m^{1/3}-n)}{\dfrac{(m+n^2)(m-n^3)}{mn}}=$$

$$=\left(m^{2/3}+nm^{1/3}+n^2\right)\cdot\frac{(m^{1/3}-n)mn}{m-n^3}=\frac{(m-n^3)mn}{m-n^3}=mn.$$

Ответ: mn.

2.170. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq -2$.

$$\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}=\frac{a(a^2-1)+a(a-1)}{a|a+2|-a^2+4}=\frac{a(a+2)(a-1)}{a|a+2|-(a-2)(a+2)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a(a+2)(a-1)}{-a(a+2)-(a-2)(a+2)}=-\dfrac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a+a-2)}=-\dfrac{a}{2}, \text{ если } a<-2;\\ \dfrac{a(a+2)(a-1)}{a(a+2)-(a-2)(a+2)}=\dfrac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-a+2)}=\dfrac{a(a-1)}{2}, \text{ если } a>-2.\end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{a}{2}$ при $a\in(-\infty;-2)$; $\dfrac{a(a-1)}{2}$ при $a\in(-2;\infty)$.

2.171. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x\neq y.\end{cases}$

$$\frac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{\dfrac{(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-(x-y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}}{\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(x-y)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}{(x+y)(x-y)}}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y}-x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}}{\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+y\sqrt{y}+x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{(x+y)(x-y)}}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(x-\sqrt{xy}+y)}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{2}.$$

Ответ: $\frac{x+y}{2}$.

2.172. $\left(2-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{4}{a}\right)\cdot\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)\,(a-4)}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ a>-4, \\ a\neq 4. \end{cases}$

$$\left(2-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{4}{a}\right)\cdot\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)\,(a-4)}}\right)=$$

$$=\left(2-\frac{a}{4}-\frac{4}{a}\right)\cdot\left(\frac{a-4}{a+4}-\frac{\sqrt{(a+4)^3}}{\sqrt{(a+4)(a-4)^2}}\right)=\frac{8a-a^2-16}{4a}\cdot\left(\frac{a-4}{a+4}-\frac{a+4}{|a-4|}\right)=$$

$$=-\frac{a^2-8a+16}{4a}\cdot\left(\frac{a-4}{a+4}-\frac{a+4}{|a-4|}\right)=\frac{(a-4)^2}{4a}\cdot\left(\frac{a+4}{|a-4|}-\frac{a-4}{a+4}\right)=$$

$$=\begin{cases} -\frac{(a-4)^2}{4a}\cdot\left(\frac{a-4}{a+4}+\frac{a+4}{a-4}\right)=-\frac{(a-4)^2\left((a+4)^2+(a-4)^2\right)}{4a(a-4)\,(a+4)}= \\ \qquad =\frac{(4-a)2(a^2+16)}{4a(a+4)}=\frac{(4-a)\,(a^2+16)}{2a(a+4)} \text{ при } \begin{cases} -4<a<4, \\ a\neq 0; \end{cases} \\ \frac{(a-4)^2}{4a}\cdot\left(\frac{a+4}{a-4}-\frac{a-4}{a+4}\right)=\frac{(a-4)^2\left((a+4)^2-(a-4)^2\right)}{4a(a-4)\,(a+4)}=\frac{(a-4)16a}{4a(a+4)}= \\ \qquad =\frac{4a-16}{a+4} \text{ при } a>4. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(a+4)}$ при $a\in(-4;0)\cup(0;4)$ и $\frac{4a-16}{a+4}$ при $a\in(4;\infty)$.

2.173. $\dfrac{m\cdot|m-3|}{\left(m^2-m-6\right)\cdot|m|}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq 0, \\ m\neq -2, \\ m\neq 3. \end{cases}$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, рассматриваем три случая:

1) при $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)$

$$\frac{m\cdot|m-3|}{\left(m^2-m-6\right)\cdot|m|}=\frac{-m(m-3)}{-\left(m^2-m-6\right)m}=\frac{m-3}{(m-3)\,(m+2)}=\frac{1}{m+2};$$

2) при $m\in(0;3)$

$$\frac{m\cdot|m-3|}{\left(m^2-m-6\right)\cdot|m|}=\frac{-m(m-3)}{\left(m^2-m-6\right)m}=\frac{-(m-3)}{(m-3)(m+2)}=-\frac{1}{m+2};$$

3) при $m\in(3;\infty)$

$$\frac{m\cdot|m-3|}{\left(m^2-m-6\right)\cdot|m|}=\frac{m(m-3)}{(m-3)(m+2)m}=\frac{1}{m+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{m+2}$ при $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(3;\infty)$; $-\dfrac{1}{m+2}$ при $m\in(0;3)$.

2.174. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{\left(x^3-4x^2+3x\right)\cdot|x-2|}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq 2, \\ x\neq 3. \end{cases}$

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\left(x^3-4x^2+3x\right)\cdot|x-2|}=\frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{x(x-3)(x-1)\cdot|x-2|}=\frac{x-2}{x\cdot|x-2|}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{x-2}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{x} \text{ при } x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2);\\ \dfrac{x-2}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x} \text{ при } x\in(2;3)\cup(3;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{x}$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$; $\frac{1}{x}$ при $x\in(2;3)\cup(3;\infty)$.

2.175. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

Решение.

ОДЗ: $1\le x\ne 2$.

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}{\sqrt{x-1}-1}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}=-1 \text{ при } \sqrt{x-1}-1<0 \text{ или } 1\le x<2;\\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}=1 \text{ при } \sqrt{x-1}-1>0 \text{ или } x>2.\end{cases}$$

Ответ: -1 при $x\in[1;2)$; 1 при $x\in(2;\infty)$.

2.176. $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\ne 2,\\ a\ne -3,\\ a\ne -1.\end{cases}$

$$\frac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}=\frac{(a-2)(a+2)-|a-2|}{(a-2)(a+3)(a+1)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a-2)(a+2)+(a-2)}{(a-2)(a+3)(a+1)}=\dfrac{(a-2)(a+2+1)}{(a-2)(a+3)(a+1)}=\dfrac{a+3}{(a+3)(a+1)}=\dfrac{1}{a+1}\\ \qquad\text{при } a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;2);\\ \dfrac{(a-2)(a+2)-(a-2)}{(a-2)(a+3)(a+1)}=\dfrac{(a-2)(a+2-1)}{(a-2)(a+3)(a+1)}=\dfrac{a+1}{(a+3)(a+1)}=\dfrac{1}{a+3}\\ \qquad\text{при } a\in(2;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{a+1}$ при $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;2)$; $\dfrac{1}{a+3}$ при $a\in(2;\infty)$.

2.177. $\dfrac{2x-x\cdot|x-1|+x\cdot|x|+3}{|x|+x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq 1,\\ x\neq -1.\end{cases}$

$$\frac{2x-x\cdot|x-1|+x\cdot|x|+3}{|x|+x^2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x+x(x-1)-x^2+3}{-x+x^2}=\dfrac{x+3}{x^2-x}\text{ при } x\in(-\infty;0),\\ \dfrac{2x+x(x-1)+x^2+3}{x^2+x}=\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+x}\text{ при } x\in(0;1),\\ \dfrac{2x-x(x-1)+x^2+3}{x+x^2}=\dfrac{3(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{3}{x}\text{ при } x\in[1;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x+3}{x^2-x}$ при $x\in(-\infty;0)$; $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+x}$ при $x\in(0;1)$; $\dfrac{3}{x}$ при $x\in[1;\infty)$.

2.178. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

Решение.

ОДЗ: $a \neq 1$.

$$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}=\frac{(a^3+2a^2)-(4a^2+8a)+(13a+26)}{(a^3-a^2)-(4a^2-8a)+(13a-13)}=$$

$$=\frac{a^2(a+2)-4a(a+2)+13(a+2)}{a^2(a-1)-4a(a-1)+13(a-1)}=\frac{(a+2)(a^2-4a+13)}{(a-1)(a^2-4a+13)}=\frac{a+2}{a-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a+2}{a-1}$.

2.179. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

Решение.

ОДЗ: $a \neq 1$.

$$\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}=\frac{(2a^4+2a^2)+(a^3+a)+(2a^2+2)}{(2a^3-2a^2)+(a^2-a)+(2a-2)}=$$

$$=\frac{2a^2(a^2+1)+a(a^2+1)+2(a^2+1)}{2a^2(a-1)+a(a-1)+2(a-1)}=\frac{(a^2+1)(2a^2+a+2)}{(a-1)(2a^2+a+2)}=\frac{a^2+1}{a-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2+1}{a-1}$.

2.180. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \dfrac{1}{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}=\begin{cases} \dfrac{-x+1-x+x}{(x-1)(3x-1)}=-\dfrac{x-1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{1}{1-3x} \text{ при } x\in(-\infty;0); \\ \dfrac{-x+1+x+x}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)} \text{ при } x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right); \\ \dfrac{x-1+x+x}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{3x-1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{1}{x-1} \text{ при } x\in(1;\infty). \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{1-3x}$ при $x\in(-\infty;0)$; $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ при $x\in\left[0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$;

$\frac{1}{x-1}$ при $x\in(1;\infty)$.

2.181. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}$.

Решение.

ОДЗ: $a>1$.

$$\frac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}=\frac{\sqrt[3]{a-1+2\sqrt{a^2-1}+a+1}}{\left(\dfrac{\left(\sqrt{a-1}\right)^2+\left(\sqrt{a+1}\right)^2+2\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)^{1/3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{a-1}\right)^2+2\sqrt{(a-1)(a+1)}+\left(\sqrt{a+1}\right)^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)^2}{\sqrt{a^2-1}}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\sqrt[6]{a^2-1}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)^2}}=\sqrt[6]{a^2-1}.$$

Ответ: $\sqrt[6]{a^2-1}$.

2.182. $\dfrac{\left(ab\left(x^2+y^2\right)+xy\left(a^2+b^2\right)\right)\cdot\left((ax+by)^2-4abxy\right)}{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)\neq 0,\quad abx^2+\left(a^2-b^2\right)yx-aby^2\neq 0,$

$$x_{1,2} \neq \frac{-\left(a^2-b^2\right)y \pm y\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2 y^2+4a^2b^2y^2}}{2ab} =$$

$$= \frac{-\left(a^2-b^2\right)y \pm y\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}}{2ab} =$$

$$= \frac{-\left(a^2-b^2\right)y \pm y\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}}{2ab} =$$

$$= \frac{-\left(a^2-b^2\right)y \pm y\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}}{2ab} = \frac{-\left(a^2-b^2\right)y \pm \left(a^2+b^2\right)y}{2ab} =$$

$$= \frac{\left(-a^2+b^2 \pm \left(a^2+b^2\right)\right)y}{2ab};$$

$$\begin{cases} x_1 \neq \dfrac{\left(-a^2+b^2-\left(a^2+b^2\right)\right)y}{2ab} = \dfrac{-2a^2y}{2ab} = -\dfrac{ay}{b}, \\ x_2 \neq \dfrac{\left(-a^2+b^2+\left(a^2+b^2\right)\right)y}{2ab} = \dfrac{2b^2y}{2ab} = \dfrac{by}{a}, \end{cases} \text{т.е.} \begin{cases} x \neq -\dfrac{ay}{b}, \\ x \neq \dfrac{by}{a}, \\ ab \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{\left(ab\left(x^2+y^2\right)+xy\left(a^2+b^2\right)\right)\left((ax+by)^2-4abxy\right)}{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)} =$$

$$= \frac{\left(abx^2+\left(a^2+b^2\right)yx+aby^2\right)\left(a^2x^2+2abxy+b^2y^2-4abxy\right)}{abx^2+\left(a^2-b^2\right)yx-aby^2} =$$

$$= \frac{\left(abx^2+\left(a^2+b^2\right)yx+aby^2\right)(ax-by)^2}{abx^2+\left(a^2-b^2\right)yx-aby^2} \quad (*).$$

Разложим числитель $abx^2+\left(a^2+b^2\right)yx+aby^2$ как квадратный трехчлен относительно x:

$$x_{1,2} = \frac{-\left(a^2+b^2\right)y \pm \sqrt{\left(a^2+b^2\right)y^2-4a^2b^2y^2}}{2ab} =$$

$$= \frac{-\left(a^2+b^2\right)y \pm y\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}}{2ab} =$$

$$=\frac{-\left(a^2+b^2\right)y\pm y\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}}{2ab}=$$

$$=\frac{-\left(a^2+b^2\right)y\pm y\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2}}{2ab}=\frac{-\left(a^2+b^2\right)y\pm\left(a^2-b^2\right)y}{2ab};$$

или $x_1=\frac{\left(-a^2-b^2-a^2+b^2\right)y}{2ab}=\frac{-2a^2y}{2ab}=-\frac{ay}{b}$,

$x_2=\frac{\left(-a^2-b^2+a^2-b^2\right)y}{2ab}=\frac{-2b^2y}{2ab}=-\frac{by}{a}$;

тогда

$$abx^2+\left(a^2+b^2\right)yx+aby^2=ab\left(x+\frac{ay}{b}\right)\left(x-\frac{by}{a}\right)=\left(abx+a^2y\right)\left(abx-b^2y\right)$$

Аналогично преобразуем знаменатель. Тогда выражение (*) примет вид

$$\frac{\left(abx+a^2y\right)\left(abx+b^2y\right)(ax-by)^2}{\left(abx+a^2y\right)\left(abx-b^2y\right)}=\frac{\left(abx+b^2y\right)(ax-by)^2}{b(ax-by)}=$$

$$=\frac{b(ax+by)(ax-by)}{b}=a^2x^2-b^2y^2.$$

Ответ: $a^2x^2-b^2y^2$.

2.183. $\frac{x\cdot|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$.

Решение.

ОДЗ: $2x^3-3x^2-9x\neq 0,\ x\left(2x^2-3x-9\right)\neq 0,\ 2x\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)\neq 0,$

или $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq -\frac{3}{2}, \\ x\neq 3. \end{cases}$

$$\frac{x\cdot|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}=\frac{x\cdot|x-3|+x^2-9}{x\left(2x^2-3x-9\right)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-x(x-3)+x^2-9}{x\left(2x^2-3x-9\right)}=\dfrac{-x^2+3x+x^2-9}{2x\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-3)}=\dfrac{3(x-3)}{x(2x+3)(x-3)}=\dfrac{3}{x(2x+3)}\\ \text{при } x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2};0\right)\cup(0;3),\\ \dfrac{x(x-3)+x^2-9}{x\left(2x^2-3x-9\right)}=\dfrac{2x^2-3x-9}{x\left(2x^2-3x-9\right)}=\dfrac{1}{x}\text{ при } x\in(3;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\frac{3}{x(2x+3)}$, если $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};0\right)\cup(0;3)$; $\frac{1}{x}$; если $x\in(3;\infty)$.

2.184. $\dfrac{2\cdot|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\neq-5,\\ a\neq\dfrac{5}{3},\\ a\neq0.\end{cases}$

$$\frac{2\cdot|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}=\frac{2a\cdot|a+5|-a^2+25}{a\left(3a^2+10a-25\right)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-2a(a+5)-a^2+25}{a\left(3a^2+10a-25\right)}=\dfrac{-\left(3a^2+10a-25\right)}{a\left(3a^2+10a-25\right)}=-\dfrac{1}{a}\text{ при } a\in(-\infty;-5),\\ \dfrac{2a(a+5)-a^2+25}{a\left(3a^2+10a-25\right)}=\dfrac{a^2+10a+25}{a(a+5)(3a-5)}=\dfrac{(a+5)^2}{a(a+5)(3a-5)}=\dfrac{a+5}{a(3a-5)}\\ \text{при } a\in(-5;0)\cup\left(0;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};\infty\right)\end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{a}$, если $a\in(-\infty;-5)$; $\dfrac{a+5}{a(3a-5)}$, если

$a\in(-5;0)\cup\left(0;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};\infty\right)$.

2.185. $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 2. \end{cases}$

$$\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{x^2-1-(x+1)}{-x(x-2)}=\dfrac{x^2-x-2}{-x(x-2)}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{-x(x-2)}=-\dfrac{x+1}{x} \text{ при } x\in(-\infty;-1); \\ \dfrac{x^2-1+(x+1)}{-x(x-2)}=\dfrac{x^2+x}{-x(x-2)}=\dfrac{x(x+1)}{-x(x-2)}=\dfrac{x+1}{2-x} \text{ при } x\in[-1;0); \\ \dfrac{x^2-1+(x+1)}{x(x-2)}=\dfrac{x^2+x}{x(x-2)}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2} \text{ при } x\in(0;2)\cup(2;\infty). \end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{x+1}{x}$, если $x\in(-\infty;-1)$; $\dfrac{x+1}{2-x}$, если $x\in[-1;0)$; $\dfrac{x+1}{x-2}$, если $x\in(0;2)\cup(2;\infty)$.

2.186. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

Решение.

ОДЗ: $p\neq-2$.

Разложим на множители числитель первой дроби:

$p^3+4p^2+10p+12=(p^3+2p^2)+(2p^2+4p)+(6p+12)=p^2(p+2)+$
$+2p(p+2)+6(p+2)=(p+2)(p^2+2p+6)$.

Аналогично для знаменателя находим, что
$p^3-p^2+2p+16=(p+2)(p^2-3p+8)$. Тогда

$$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}=\frac{(p+2)(p^2+2p+6)}{(p+2)(p^2-3p+8)}\times$$
$$\times\frac{p(p^2-3p+8)}{p^2+2p+6}=p.$$

Ответ: p.

2.187. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 1, \\ a\geq 0, \\ a\neq 1\pm\sqrt{2}. \end{cases}$

$$\frac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=\frac{-(a^{2/4}-2a^{1/4}-1)}{-(a^{4/4}-1)+4(a^{3/4}-a^{2/4})}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$

$$=\frac{-(a^{2/4}-2a^{1/4}-1)}{-(a^{2/4}-1)(a^{2/4}+1)+4a^{2/4}(a^{1/4}-1)}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$
$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{(a^{1/4}-1)(a^{1/4}+1)(a^{2/4}+1)-4a^{2/4}(a^{1/4}-1)}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$
$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{(a^{1/4}-1)((a^{1/4}+1)(a^{2/4}+1)-4a^{2/4})}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$
$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{(a^{1/4}-1)(a^{3/4}+a^{2/4}+a^{1/4}+1-4a^{2/4})}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$

$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{(a^{1/4}-1)(a^{3/4}-3a^{2/4}+a^{1/4}+1)}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}=$$

$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{\left(a^{1/4}-1\right)\left(\left(a^{3/4}-a^{2/4}\right)-\left(2a^{2/4}-2a^{1/4}\right)-\left(a^{1/4}-1\right)\right)}+\frac{a^{1/4}-2}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{\left(a^{1/4}-1\right)\left(a^{2/4}\left(a^{1/4}-1\right)-2a^{1/4}\left(a^{1/4}-1\right)-\left(a^{1/4}-1\right)\right)}+\frac{a^{1/4}-2}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{a^{2/4}-2a^{1/4}-1}{\left(a^{1/4}-1\right)\left(a^{1/4}-1\right)\left(a^{2/4}-2a^{1/4}-1\right)}+\frac{a^{1/4}-2}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=\frac{1}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}+\frac{a^{1/4}-2}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{1+a^{1/4}-2}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=\frac{a^{1/4}-1}{\left(a^{1/4}-1\right)^2}=\frac{1}{a^{1/4}-1}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$.

2.188. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot\left|2x^2-x-1\right|}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

$$\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot\left|2x^2-x-1\right|}=\frac{\sqrt{4x+4+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\left|(x-1)(2x+1)\right|}=\frac{\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\left|(x-1)(2x+1)\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{x\cdot\left|(x-1)(2x+1)\right|}=\frac{2x+1}{x(2x+1)\cdot|x-1|}=\frac{1}{x\cdot|x-1|}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{x(x-1)}\ \text{при}\ x\in(0;1);\\[2mm] \dfrac{1}{x(x-1)}\ \text{при}\ x\in(1;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{x-x^2}$, если $x\in(0;1)$; $\dfrac{1}{x^2-x}$, если $x\in(1;\infty)$.

2.189. $\dfrac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}$.

Решение.

ОДЗ: $r \neq 1$.

$$\frac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}=\begin{cases}\dfrac{-(r-1)(-r)}{r^2-r+1+r}=\dfrac{r^2-r}{r^2+r} \text{ при } r\in(-\infty;0);\\ \dfrac{-(r-1)r}{r^2-r+1-r}=\dfrac{-(r-1)r}{(r-1)^2}=\dfrac{r}{1-r} \text{ при } r\in[0;1);\\ \dfrac{(r-1)r}{r^2-r+1-r}=\dfrac{(r-1)r}{(r-1)^2}=\dfrac{r}{r-1} \text{ при } r\in(1;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{r^2-r}{r^2+1}$, если $r\in(-\infty;\,0)$; $\dfrac{r}{1-r}$, если $r\in[0;\,1)$; $\dfrac{r}{r-1}$, если $r\in(1;\infty)$.

2.190. $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$.

Решение.

ОДЗ: $z \neq \pm 2$.

$$\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}=$$

$$=\left(\frac{z-2}{6z+z^2-4z+4}+\frac{z^2+8z+16-12}{(z-2)(z^2+2z+4)}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^2(z+2)+2(z+2)}{z^2(z-2)+2(z-2)}=$$

$$=\left(\frac{z-2}{z^2+2z+4}+\frac{z^2+8z+4}{(z-2)(z^2+2z+4)}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{(z+2)(z^2+2)}{(z-2)(z^2+2)}=$$

$$=\frac{(z-2)^2+z^2+8z+4-z^2-2z-4}{(z-2)(z^2+2z+4)}:\frac{z+2}{z-2}=\frac{z^2+2z+4}{(z-2)(z^2+2z+4)}\times$$

$$\times\frac{z-2}{z+2}=\frac{1}{z+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{z+2}$.

2.191. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq-1$.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{5+4\sqrt{5}+4}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{5-4\sqrt{5}+4}+a}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+a}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}+a}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}+a}=\frac{1+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{1+a}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+1}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$.

2.192. $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\neq0,\\ a\neq-1.\end{cases}$

$$\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{a}+a}=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{6}+2}+1+a^2}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2}+1+a^2}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}+1+a^2}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+1+a^2}=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+1+a^2}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}+1+a^2}=\frac{(a+1)a}{2a\sqrt[3]{3-2}+1+a^2}=\frac{(a+1)a}{a^2+2a+1}=$$

$$=\frac{(a+1)a}{(a+1)^2}=\frac{a}{a+1}.$$

Ответ: $\frac{a}{a+1}$.

2.193. $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\geq 0,\\ x\neq 9.\end{cases}$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4-4\sqrt{3}+3}+\sqrt[3]{x\sqrt{x}-9x+27\sqrt{x}-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{2^2-2\cdot 2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{4-3}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-\sqrt{4-3}}=\frac{1+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2-1}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$.

2.194. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq 2$.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{5\cdot 3}+3}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{5\cdot 3}+3}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{5-3}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2(5-3)}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2^2}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}$.

2.195. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ a\neq 0, \\ a\neq 1, \\ a\neq -2. \end{cases}$

$$\frac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\frac{a^4+2a^3-a-2}{1+\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}=$$

$$=\frac{(a^2-a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2-a-1)}:\frac{a^3(a+2)-(a+2)}{\frac{a^2+4a+4}{a^2}}=$$

$$=\frac{a^2+a+1}{a-1}:\frac{(a+2)(a^3-1)a^2}{(a+2)^2}=\frac{a^2+a+1}{a-1}:\frac{(a-1)(a^2+a+1)a^2}{a+2}=$$

$$=\frac{a^2+a+1}{a-1}\cdot\frac{a+2}{(a-1)(a^2+a+1)\,a^2}=\frac{a+2}{a^2(a-1)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{a+2}{a^2(a-1)^2}$.

2.196. $\dfrac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\dfrac{|x-1|}{x-1}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, рассматриваем три случая:

$$1)\begin{cases} x\in(-\infty;-1), \\ \dfrac{x^2-1+x^2}{2x^2-1}+\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{2x^2-1}{2x^2-1}+1=1+1=2; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x\in\left[-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right), \\ \dfrac{-(x^2-1)+x^2}{2x^2-1}+\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{1}{2x^2-1}+1=\dfrac{1+2x^2}{2x^2-1}=\dfrac{2x^2}{2x^2-1}; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x\in(1;\infty), \\ \dfrac{x^2-1+x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{2x^2-1}{2x^2-1}-1=1-1=0. \end{cases}$$

Ответ: 2, если $x\in(-\infty;-1)$; $\dfrac{2x^2}{2x^2-1}$, если $x\in\left[-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$; 0, если $x\in(1;\infty)$.

2.197. $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

Решение.

ОДЗ: $b\geq 2$.

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=\frac{\sqrt{b+2\sqrt{(b+2)(b-2)}+b}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=$$

$$=\frac{\sqrt{b+2+2\sqrt{(b+2)(b-2)}+b-2}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2})^2}}{\sqrt{(b+2)(b-2)}+\sqrt{(b+2)^2}}=\frac{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}\cdot(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{1}{\sqrt{b+2}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}$.

2.198. $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}};\ b>2.$

Решение.

$$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=$$

$$=\frac{\left(b^2-3b+2\right)-(b-1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}{\left(b^2+3b+2\right)-(b+1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=$$

$$=\frac{(b-2)(b-1)-(b-1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}{(b+2)(b+1)-(b+1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=$$

$$=\frac{(b-1)\sqrt{b-2}\cdot\left(\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2}\right)}{(b+1)\sqrt{b+2}\cdot\left(\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=-\frac{(b-1)\left(\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2}\right)}{(b+1)\left(\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2}\right)}=$$

$$=-\frac{b-1}{b+1}=\frac{1-b}{1+b}.$$

Ответ: $\dfrac{1-b}{1+b}$.

2.199. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):\left(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq n, \\ m\geq 0, \\ n\geq 0. \end{cases}$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):\left(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{mn}\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)^2}-2\sqrt[3]{n}+\frac{\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=\left(\frac{\sqrt[3]{mn}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{mn}-2\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)+\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=\frac{\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=\frac{\left(\sqrt[6]{m}\right)^2-\left(\sqrt[6]{n}\right)^2}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=\frac{\left(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}\right)\left(\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}\right)}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}=\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}.$$

Ответ: $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$.

2.200. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\geq 0,\\ \sqrt[3]{y}\neq\pm\sqrt[4]{x}.\end{cases}$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}-3\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\right)^{-1/2}\cdot\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2\right)^{-1/2}\cdot\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)=\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2}}=\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}{\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right|}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}=-\sqrt[4]{x} \text{ при } \sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0;\\ \dfrac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}=\sqrt[4]{x} \text{ при } \sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0.\end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0$.

2.201. $\sqrt{\dfrac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\left(p+\sqrt[6]{p^3q^2}\right)^{-1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}p>0,\\ \pm\sqrt{p}\neq\sqrt[3]{q},\\ \sqrt{p}+\sqrt[3]{q}>0.\end{cases}$

$$\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\left(p+\sqrt[6]{p^3q^2}\right)^{-1/2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{p}\left(\sqrt{p^3}-q\right)}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p+\sqrt[6]{p^3q^2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{p}\left(\sqrt{p^3}-\sqrt[3]{q^3}\right)}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}\right)\left(\sqrt{p^2}+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}\right)}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\right)}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{p}\left(\sqrt{p^2}+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}\right)+p\sqrt[3]{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{p}\left(\sqrt{p^2}+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}\right)}}{\sqrt{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\right)^2}{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}}=\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}.$$

Ответ: $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$.

2.202. $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m \ge 4, \\ m \ne 8. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{m-4+4\sqrt{m-4}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4-4\sqrt{m-4}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{m-4}+2\right)^2\left(\sqrt{m-4}+2\right)}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{m-4}-2\right)^2\left(\sqrt{m-4}-2\right)}}\cdot\frac{m-4-4\sqrt{m-4}+4}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{m-4}+2\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{m-4}-2\right)^3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{m-4}-2\right)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{m-4}+2\right)\left(\sqrt{m-4}-2\right)^2}{2\left(\sqrt{m-4}-2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m-4}+2\right)\left(\sqrt{m-4}-2\right)}{2}=\frac{\left(\left(\sqrt{m-4}\right)^2-2^2\right)}{2}=\frac{m-4-4}{2}=\frac{m-8}{2}.$$

Ответ: $\frac{m-8}{2}$.

2.203. $$\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}\cdot\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x>1$.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}\cdot\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-2}\cdot\left(x+1+\sqrt{x^2-1}+x-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+1)(x-1)}+\sqrt{(x-1)^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2\sqrt{(x+1)(x-1)}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}}\cdot\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{(x+1)(x-1)}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{(x+1)(x-1)}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x^2-1}}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$.

2.204. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

Решение.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-3}=$$
$$=\sqrt{1}=1.$$

Ответ: 1.

2.205. $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\dfrac{(4x^2-b^2)\cdot\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\dfrac{bx}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} b\neq 0, \\ x\neq 0, \\ x\neq \dfrac{b}{2}, \\ x\neq -\dfrac{2}{b}. \end{cases}$

$$\left(\frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+\left(b^2-4\right)x-2bx^2}+\frac{\left(4x^2-b^2\right)\cdot\frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\frac{bx}{2}=$$

$$=\left(\frac{\frac{b^2x^2+4bx+4}{bx}}{-\left(2bx^2-\left(b^2-4\right)x-2b\right)}+\frac{\frac{4x^2-b^2}{b}}{b^2+4bx+(2x)^2-8bx}\right)\cdot\frac{bx}{2}=$$

$$=\left(\frac{\frac{(bx+2)^2}{bx}}{-2b\left(x-\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{2}{b}\right)}+\frac{\frac{4x^2-b^2}{b}}{b^2-4bx+(2x)^2}\right)\cdot\frac{bx}{2}=$$

$$=\left(\frac{\frac{(bx+2)^2}{bx}}{-(2x-b)(bx+2)}+\frac{\frac{(2x-b)(2x+b)}{b}}{(2x-b)^2}\right)\cdot\frac{bx}{2}=$$

$$=\left(-\frac{bx+2}{(2x-b)bx}+\frac{2x+b}{(2x-b)b}\right)\cdot\frac{bx}{2}=-\frac{(bx+2)bx}{2(2x-b)bx}+\frac{(2x+b)bx}{2(2x-b)b}=$$

$$=-\frac{bx+2}{2(2x-b)}+\frac{(2x+b)x}{2(2x-b)}=\frac{-bx-2+2x^2+bx}{2(2x-b)}=\frac{x^2-1}{2x-b}.$$

Ответ: $\frac{x^2-1}{2x-b}$.

2.206. $$\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}\left(x^2-2y^2\right)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0, \\ x\neq \pm y. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}\cdot\left(x^2-2y^2\right)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^6\left(x^3-y^3\right)}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^3\left(x^3-y^3\right)}{y^3}}+xy\sqrt[3]{\frac{y^3\left(x^3-y^3\right)}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x^6}\cdot\left(x^2-2y^2\right)+\sqrt[3]{y^{12}}\right)}:$$

$$:\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}}{x+y}=\frac{x^2\sqrt[3]{x^3-y^3}-2xy\sqrt[3]{x^3-y^3}+y^2\sqrt[3]{x^3-y^3}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(x^2\left(x^2-2y^2\right)+y^4\right)}\times$$

$$\times\frac{x+y}{\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}}=\frac{\sqrt[3]{x^3-y^3}\left(x^2-2xy+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(x^4-2x^2y^2+y^4\right)}\cdot\frac{x+y}{\frac{\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^3-y^3}\,(x-y)^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}\cdot\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}\cdot\left(x^2-y^2\right)(x-y)}{\left(x^2-y^2\right)^2\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x-y}\,(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{\sqrt[3]{x-y}\,(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$.

2.207. $$\frac{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}-\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}+\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}-1+\frac{\left(x^4-5x^2+4\right)^{1/2}}{3x}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-2. \end{array}\right. \end{cases}$

$$\frac{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}-\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}+\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}-1+\frac{\left(x^4-5x^2+4\right)^{1/2}}{3x}=$$

$$=\frac{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}-\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}-\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}-\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}+\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}+$$

$$+\frac{\left(x^4-5x^2+4\right)^{1/2}}{3x}=\frac{-2\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}{\left(x^2-3x+2\right)^{-1/2}+\left(x^2+3x+2\right)^{-1/2}}+\frac{\left(x^4-5x^2+4\right)^{1/2}}{3x}=$$

$$=\frac{-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}}+\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}}:\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\right)+\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}}:\frac{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+3x+2\right)}}+\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}}:\frac{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^4-5x^2+4}}+\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4-5x+4}}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{\sqrt{x^4-5x+4}}{3x}=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)}+\frac{1}{3x}\right)=\sqrt{x^4-5x^2+4}\times$$

$$\times\left(-\frac{2\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{x^2+3x+2}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}+\frac{1}{3x}\right)=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\left(-\frac{2\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{x^2+3x+2}\cdot\left(\left(\sqrt{x^2+3x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2\right)}+\frac{1}{3x}\right)=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\left(-\frac{2\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{x^2+3x+2}\left(x^2+3x+2-x^2+3x-2\right)}+\frac{1}{3x}\right)=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\left(-\frac{2\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}{6x\sqrt{x^2+3x+2}}+\frac{1}{3x}\right)=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+3x+2}}{3x\sqrt{x^2+3x+2}}+\frac{1}{3x}\right)=$$

$$=\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+3x+2}}{3x\sqrt{x^2+3x+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}{3x\sqrt{x^2+3x+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+3x+2\right)}\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}{3x\sqrt{x^2+3x+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)^2}}{3x}=\frac{x^2-3x+2}{3x}.$$

Ответ: $\dfrac{x^2-3x+2}{3x}$.

2.208. $\dfrac{\left(\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2-\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2\right)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\dfrac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} n \neq 4m, \\ m > 0, \\ n > 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2-\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2\right)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}+2\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}-\sqrt{m}+2\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}\right)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}=$$

$$=\frac{\left(4\sqrt[4]{mn}\right)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}=\frac{16\sqrt{mn}-(16m+4n)}{4m-n}+$$

$$+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}=\frac{-4\left(4m-4\sqrt{mn}+n\right)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{-4\left(\left(2\sqrt{m}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{mn}+\left(\sqrt{n}\right)^2\right)}{\left(2\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{-4\left(2\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2}{\left(2\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(2\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{-4\left(2\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{-8\sqrt{m}+4\sqrt{n}+10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}=1.$$

Ответ: 1.

2.209. $\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

Решение.

ОДЗ: $0\le x\ne 9$.

$$\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}=\left(\frac{x-9}{\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+9}:\frac{\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}\right)^3-3^3}\right)^{0,5}-$$

$$-\sqrt{x}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-3^3}{\sqrt{x}+3}}-\sqrt{x}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+9\right)}{\sqrt{x}+3}}-\sqrt{x}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}-\sqrt{x}=\left|\sqrt{x}-3\right|-\sqrt{x}=$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{x}+3-\sqrt{x}=3-2\sqrt{x} \text{ при } x\in[0;9);\\ \sqrt{x}-3-\sqrt{x}=-3 \text{ при } x\in(9;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $3-2\sqrt{x}$, если $x\in[0;\,9)$; -3, если $x\in(9;\,\infty)$.

2.210. $$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\\ a\neq 1.\end{cases}$

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}=\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+a}{\sqrt{a}}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+a}{\sqrt{a}}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{4a}-1}}{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{4a}-1}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}}=\frac{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2-4a}{4a}}}{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2-4a}{4a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{1-2a+a^2}{4a}}}{2\sqrt{\frac{1-2a+a^2}{4a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{2\sqrt{a}}}{2\cdot\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{2\sqrt{a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}}=\frac{\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}}{\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}}=$$

$$=\frac{\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}}{\frac{2\cdot|1-a|-(1-a)}{2\sqrt{a}}}=\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2\sqrt{a}}{2\cdot|1-a|-(1-a)}=\frac{2\cdot|1-a|}{2\cdot|1-a|-(1-a)}=$$

$$=\begin{cases}\frac{2(1-a)}{2(1-a)-(1-a)}=\frac{2(1-a)}{1-a}=2, \text{ если } a\in(0;1);\\ \frac{-2(1-a)}{-2(1-a)-(1-a)}=\frac{-2(1-a)}{-3(1-a)}=\frac{2}{3}, \text{ если } a\in(1;\infty).\end{cases}$$

Ответ: 2, если $a\in(0;\ 1)$; $\frac{2}{3}$, если $a\in(1;\ \infty)$.

2.211. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+2\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $z\neq 0$.

$$(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+2\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}=$$

$$=(z^2-z+1):\left(\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right)^2+2\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}=$$

$$=(z^2-z+1):\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-4\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+4+2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}=$$

$$=(z^2-z+1):\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-2\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+1\right)^{1/2}=$$

$$=\left(z^2-z+1\right):\sqrt{\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1\right)^2}=\frac{z^2-z+1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1}=$$

$$=\frac{z^2-z+1}{\left(z+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{z}+1\right)}=\frac{z^2-z+1}{\frac{\left(z^2-z+1\right)\left(z^2+z+1\right)}{z^2}}=\frac{z^2}{z^2+z+1}.$$

Ответ: $\frac{z^2}{z^2+z+1}$.

2.212. $\left(x^4-7x^2+1\right)^{-2}\cdot\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right),\ x=\frac{\sqrt[4]{125}}{5}.$

Решение.

$$\left(x^4-7x^2+1\right)^{-2}\cdot\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-18\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+81\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\right)^2=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-9\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}-9\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\left(\frac{x^4+2x^2+1-9x^2}{x^2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}\cdot\frac{\left(x^4-7x^2+1\right)^2}{x^4}=\frac{1}{x^4}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[4]{125}}{5}\right)^4}=5.$$

Ответ: 5.

2.213. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{\sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}}}{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^2}}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{\frac{x^2+1}{2\cdot|x|}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{x}{2\cdot|x|}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{x}{2x}=-\dfrac{1}{2}, \text{ если } x\in(-\infty;0);\\ \dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}, \text{ если } x\in(0;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$, если $x \in (-\infty;\ 0)$; $\frac{1}{2}$, если $x \in (0;\ \infty)$.

2.214. $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$$\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\dfrac{x^4-8x^2+16}{4x^2}}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\dfrac{16x^2+x^4-8x^2+16}{4x^2}}}=$$

$$=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\dfrac{x^4+8x^2+16}{4x^2}}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\dfrac{\left(x^2+4\right)^2}{4x^2}}}=\frac{x^2+4}{\dfrac{x\left(x^2+4\right)}{2\cdot|x|}}=\frac{2\cdot|x|}{x}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2x}{x}=-2, \text{ если } x\in(-\infty;0);\\ \dfrac{2x}{x}=2, \text{ если } x\in(0;\infty).\end{cases}$$

Ответ: -2, если $x \in (-\infty; 0)$; 2, если $x \in (0; \infty)$.

2.215. $\left((z-3)(z+3)^{-1}-\dfrac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{\left(z^2-9\right)(z-3)}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{z}{18}-\dfrac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}z \neq 0,\\ z>-3,\\ z \neq 3.\end{cases}$

$$\left((z-3)(z+3)^{-1}-\frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)\,(z-3)}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{3}-\frac{z}{18}-\frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{\sqrt{(z+3)^3}}{\sqrt{(z-3)^2(z+3)}}\right)\cdot\frac{\frac{6z-z^2-9}{18z}}{\frac{1}{z+3}}=\left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{\sqrt{(z+3)^2}}{\sqrt{(z-3)^2}}\right)\times$$

$$\times\frac{-(z^2-6z+9)}{18z}:\frac{1}{z+3}=\left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{z+3}{|z-3|}\right)\cdot\frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}.$$

Раскрывая модуль с учетом ОДЗ, получаем два случая:

1) $\begin{cases} z\in(-3;0)\cup(0;3), \\ \left(\frac{z-3}{z+3}+\frac{z+3}{z-3}\right)\cdot\frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}=\frac{(z-3)^2+(z+3)^2}{(z+3)(z-3)}\cdot\frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}= \end{cases}$

$$=-\frac{2(z^2+9)(z-3)}{18z}=-\frac{(z^2+9)(z-3)}{9z}=\frac{(z^2+9)(3-z)}{9z};$$

2) $\begin{cases} z\in(3;\infty), \\ \left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{z+3}{z-3}\right)\cdot\frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}=\frac{(z-3)^2-(z+3)^2}{(z+3)(z-3)}\cdot\frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}= \end{cases}$

$$=\frac{12z(z-3)}{18z}=\frac{2(z-3)}{3}.$$

Ответ: $\frac{(z^2+9)(3-z)}{9z}$, если $z\in(-3;0)\cup(0;3)$; $\frac{2(z-3)}{3}$, если $z\in(3;\infty)$.

2.216. $\dfrac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m>2, \\ m<-2. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)^2}=\frac{\frac{m+2}{m-2}+2+\frac{m-2}{m+2}}{\frac{m+2}{m-2}-\frac{m-2}{m+2}}=$$

$$=\frac{\frac{(m+2)^2+2(m+2)(m-2)+(m-2)^2}{(m-2)(m+2)}}{\frac{(m+2)^2-(m-2)^2}{(m-2)(m+2)}}=\frac{(m+2+m-2)^2}{4m+4m}=\frac{4m^2}{8m}=\frac{m}{2}.$$

Ответ: $\frac{m}{2}$.

2.217. $\frac{b^{-1/6}\cdot\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\cdot\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} b\neq 0,\\ ab>0,\\ a\neq b,\\ a\neq -\frac{b}{2}.\end{cases}$

$$\frac{b^{-1/6}\cdot\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\cdot\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{b^{-1}}\cdot\sqrt[6]{a^9b^3}\cdot\sqrt[6]{a^6b^2}-\sqrt[6]{a^9b^6}\cdot\sqrt[6]{b^4}}{(a-b)(2a+b)\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\frac{3a^3}{(a-b)(2a+b)}-\frac{ab}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a^{15}b^5}-\sqrt[6]{a^9b^{10}}}{(a-b)(2a+b)\sqrt[6]{a^9b^4}}:\frac{3a^3-ab(2a+b)}{(a-b)(2a+b)}=\frac{\sqrt[6]{a^9b^4(a-b)}}{(a-b)(2a+b)\sqrt[6]{a^9b^4}}:$$

$$:\frac{3a^3-2a^2b-ab^2}{(a-b)(2a+b)}=\frac{1}{2a+b}\cdot\frac{(a-b)2a+b)}{3a^3-2a^2b-ab^2}=\frac{a-b}{(2a^3-2a^2b)+(a^3-ab^2)}=$$

$$=\frac{a-b}{2a^2(a-b)+a(a^2-b^2)}=\frac{a-b}{2a^2(a-b)+a(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a-b}{(a-b)(2a^2+a(a+b))}=\frac{1}{3a^2+ab}=\frac{1}{a(3a+b)}.$$

Ответ: $\frac{1}{a(3a+b)}$.

2.218. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 2$.

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=$$

$$=\sqrt{x-2+2\sqrt{2(x-2)}+2}+\sqrt{x-2-2\sqrt{2(x-2)}+2}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-2})^2+2\sqrt{2(x-2)}+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2})^2-2\sqrt{2(x-2)}+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{2}-\sqrt{x-2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2} \text{ при } \sqrt{x-2}-\sqrt{2}<0 \text{ или } 2\le x<4;\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}=2\sqrt{x-2} \text{ при } \sqrt{x-2}-\sqrt{2}\ge 0 \text{ или } x\ge 4.\end{cases}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$, если $x\in[2;4)$; $2\sqrt{x-2}$, если $x\in[4;\infty)$.

2.219. $\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\ne -8,\\ a\ne \pm 1.\end{cases}$

$$\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=$$

$$=\left(\frac{9}{\left(a^{1/3}+2\right)\left(a^{2/3}-2a^{1/3}+4\right)}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{1/3}(a+8)}{\left(1-a^{1/3}\right)\left(1+a^{1/3}\right)}+$$

$$+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=\frac{3^2-\left(a^{1/3}+2\right)^2}{\left(a^{1/3}+2\right)\left(a^{2/3}-2a^{1/3}+4\right)}\cdot\frac{a^{1/3}(a+8)}{\left(1-a^{1/3}\right)\left(1+a^{1/3}\right)}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=$$

$$=\frac{\left(3-a^{1/3}-2\right)\left(3+a^{1/3}+2\right)}{a+8}\cdot\frac{a^{1/3}(a+8)}{\left(1-a^{1/3}\right)\left(1+a^{1/3}\right)}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=$$

$$=\frac{\left(5+a^{1/3}\right)a^{1/3}}{1+a^{1/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=\frac{5a^{1/3}+a^{2/3}+5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}=\frac{5a^{1/3}+5}{1+a^{1/3}}=$$

$$=\frac{5\left(a^{1/3}+1\right)}{1+a^{1/3}}=5.$$

Ответ: 5.

2.220. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}.$

Решение.

ОДЗ: $a\ge b$.

$$\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a+b+2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b-2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b}+\sqrt{a-b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2}+\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}-\sqrt{a-b}}{\left|\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right|+\sqrt{a-b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+b}}{\left|\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right|+\sqrt{a-b}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+b}}{-\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}} \text{ при } \sqrt{a+b}<\sqrt{a-b}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{или } 0<-b\le a; \\ \dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=1 \text{ при } \sqrt{a+b}\ge\sqrt{a-b}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{или } 0\le b\le a.\end{cases}$$

Ответ: 1 при $0\le b\le a$, $a\ne 0$, $\dfrac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}$ при $0<-b\le a$.

2.221. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $-1\le x\le 1$.

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(1+x+\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x)}{2+\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=$$

$$=\sqrt{\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2}}\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\frac{1+x-1+x}{\sqrt{2}}=\frac{2x}{\sqrt{2}}=x\sqrt{2}.$$

Ответ: $x\sqrt{2}$.

2.222. $\left(\frac{2-n}{n-1}+4\cdot\frac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\frac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\frac{2-n}{m-2}\right)$; $m=\sqrt[4]{400}$, $n=\sqrt{5}$.

Решение.

$$\left(\frac{2-n}{n-1}+4\cdot\frac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\frac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\frac{2-n}{m-2}\right)=$$

$$=\frac{(2-n)(m-2)+4(m-1)(n-1)}{(n-1)(m-2)}:\frac{n^2(m-1)(m-2)+m^2(2-n)(n-1)}{(n-1)(m-2)}=$$

$$=\frac{3mn-2(m+n)}{(n-1)(m-2)}:\frac{(m-n)(3mn-2(m+n))}{(n-1)(m-2)}=$$

$$=\frac{3mn-2(m+n)}{(n-1)(m-2)}\cdot\frac{(n-1)(m-2)}{(m-n)(3mn-2(m+n))}=\frac{1}{m-n}=\frac{1}{\sqrt[4]{400}-\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{20}-\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2.223. $$\frac{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>2, \\ a\neq 3. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{a-2+2\sqrt{a-2}+1}}+\sqrt{\frac{1}{a-2-2\sqrt{a-2}+1}}}{\sqrt{\frac{1}{a-2+2\sqrt{a-2}+1}}-\sqrt{\frac{1}{a-2-2\sqrt{a-2}+1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}\right)^2+2\sqrt{a-2}+1}}+\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}\right)^2-2\sqrt{a-2}+1}}}{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}\right)^2+2\sqrt{a-2}+1}}-\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}\right)^2-2\sqrt{a-2}+1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}+1\right)^2}}+\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}-1\right)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}+1\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{a-2}-1\right)^2}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{a-2}+1}+\frac{1}{\left|\sqrt{a-2}-1\right|}}{\frac{1}{\sqrt{a-2}+1}-\frac{1}{\left|\sqrt{a-2}-1\right|}}=\frac{\frac{\left|\sqrt{a-2}-1\right|+\sqrt{a-2}+1}{\left(\sqrt{a-2}+1\right)\cdot\left|\sqrt{a-2}-1\right|}}{\frac{\left|\sqrt{a-2}-1\right|-\sqrt{a-2}-1}{\left(\sqrt{a-2}+1\right)\cdot\left|\sqrt{a-2}-1\right|}}=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{a-2}-1\right|+\sqrt{a-2}+1}{\left|\sqrt{a-2}-1\right|-\sqrt{a-2}-1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{a-2}+1+\sqrt{a-2}+1}{-\sqrt{a-2}+1-\sqrt{a-2}-1}=\dfrac{2}{-2\sqrt{a-2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{a-2}}\ \text{при}\ \sqrt{a-2}-1<0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{или}\ 2<a<3;\\ \dfrac{\sqrt{a-2}-1+\sqrt{a-2}+1}{\sqrt{a-2}-1-\sqrt{a-2}-1}=\dfrac{2\sqrt{a-2}}{-2}=-\sqrt{a-2}\ \text{при}\ \sqrt{a-2}-1>0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{или}\ a>3.\end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{a-2}}$, если $a \in (2;3)$; $-\sqrt{a-2}$, если $a \in (3;\infty)$.

2.224. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -2$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}}+|x-2|=\frac{1}{|x+2|}+|x-2|=$$

$$=\frac{1+|x+2|\cdot|x-2|}{|x+2|}=\frac{1+|(x+2)(x-2)|}{|x+2|}=\frac{1+|x^2-4|}{|x+2|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1+x^2-4}{-(x+2)}=\dfrac{x^2-3}{-(x+2)}=\dfrac{3-x^2}{x+2} \text{ при } x<-2;\\ \dfrac{1-(x^2-4)}{x+2}=\dfrac{5-x^2}{x+2} \text{ при } -2<x<2;\\ \dfrac{1+x^2-4}{x+2}=\dfrac{x^2-3}{x+2} \text{ при } x\geq 2.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{3-x^2}{x+2}$, если $x \in (-\infty;-2)$; $\dfrac{5-x^2}{x+2}$, если $x \in (-2;2)$;

$\dfrac{x^2-3}{x+2}$, если $x \in [2;\infty)$.

2.225. $$\left(x^2-6x+1+\left(\frac{\dfrac{x-3}{1+3x}-\dfrac{x-5}{1+5x}}{1+\dfrac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x \neq -\dfrac{1}{3},\\ x \neq -\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

$$\left(x^2-6x+1+\left(\frac{\frac{x-3}{1+3x}-\frac{x-5}{1+5x}}{1+\frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(x^2-6x+1+\left(\frac{\frac{(x-3)(1+5x)-(x-5)(1+3x)}{(1+3x)(1+5x)}}{\frac{(1+5x)(1+3x)+(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(x^2-6x+1+\left(\frac{(x-3)(1+5x)-(x-5)(1+3x)}{(1+5x)(1+3x)+(x-5)(x-3)}\right)^{-1}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(x^2-6x+1+\left(\frac{2x^2+2}{16x^2+16}\right)^{-1}\right)^{1/2}=\left(x^2-6x+1+\left(\frac{2(x^2+1)}{16(x^2+1)}\right)^{-1}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(x^2-6x+1+\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}\right)^{1/2}=(x^2-6x+1+8)^{1/2}=(x^2-6x+9)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=$$

$$=\begin{cases}-x+3=3-x, \text{ если } x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};3\right);\\ x-3, \text{ если } x\in[3;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $-(x-3)$, если $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};3\right)$; $x-3$, если $x\in[3;\infty)$.

2.226. $\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{(x+3)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -3.\end{cases}$

$$\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{(x+3)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\frac{x^2+9}{9x^2}+\frac{2}{(x+3)^3}\cdot\frac{x+3}{3x}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{x^2+9}{9x^2(x+3)^2}+\frac{2}{3x(x+3)^2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{x^2+9+6x}{9x^2(x+3)^2}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{(x+3)^2}{9x^2(x+3)^2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{9x^2}\right)^{-1/2}=\sqrt{9x^2}=3\cdot|x|=$$

$$=\begin{cases}-3x, \text{ если } x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0);\\ 3x, \text{ если } x\in(0;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $-3x$, если $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)$; $3x$, если $x\in(0;\infty)$.

2.227. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$.

Решение.

ОДЗ: $a\ge 3$.

$$\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}=\frac{\sqrt{a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}}{\sqrt{a+3-2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}\right)\left(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}\right)}{\left(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}\right)\left(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}\right)^2}{\left(\sqrt{a+3}\right)^2-\left(\sqrt{a-3}\right)^2}=$$

$$=\frac{a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}{a+3-a+3}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{6}=\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$.

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\frac{4}{y^2}\right)^2-8\cdot\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}.$

Решение.

ОДЗ: $y \neq 0$.

$$\sqrt{\left(y^2+\frac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}=\sqrt{\left(\left(y+\frac{2}{y}\right)^2-4\right)^2-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}=$$

$$=\sqrt{\left(y+\frac{2}{y}\right)^4-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+16-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}=$$

$$=\sqrt{\left(y+\frac{2}{y}\right)^4-16\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+64}=\sqrt{\left(\left(y+\frac{2}{y}\right)^2-8\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(y^2+4+\frac{4}{y^2}-8\right)^2}=\sqrt{\left(y^2-4+\frac{4}{y^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\left(y-\frac{2}{y}\right)^2\right)^2}=\left(y-\frac{2}{y}\right)^2.$$

Ответ: $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2$.

2.229. $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}$; $x=2$.

Решение.

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}=\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}+$$

$$+\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}=\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x+\sqrt{3}\right)}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^2}+$$

$$+\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x-\sqrt{3}\right)}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x+\sqrt{3}\right)}}{x-x-\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x-\sqrt{3}\right)}}{x-x+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x+\sqrt{3}\right)}}{-\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x-\sqrt{3}\right)}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-x\sqrt{x}+x\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{3x}+\sqrt{3\left(x+\sqrt{3}\right)}+x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}-\sqrt{3\left(x-\sqrt{3}\right)}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(x\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{3\left(x+\sqrt{3}\right)}\right)+\left(x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3\left(x-\sqrt{3}\right)}\right)-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)+\sqrt{x-\sqrt{3}}\left(x-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^3}-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^3}}{\sqrt{3}}-2\sqrt{x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2-3}+x-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}-2\sqrt{x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot 3}{\sqrt{3}}-2\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{2}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{2}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

2.230. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}};\ x=3.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}-\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}-\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-8}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}+3-2\sqrt{2}}=\sqrt{6-2\sqrt{9-8}}=$$

$$=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2.$$

Ответ: 2.

2.231. $\dfrac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{1-z}{1-\sqrt{1-z}};\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение.

$$\frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}}=\frac{(1+z)\left(1-\sqrt{1+z}\right)}{\left(1+\sqrt{1+z}\right)\left(1-\sqrt{1+z}\right)}-\frac{(1-z)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}{\left(1-\sqrt{1-z}\right)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{1+z}+z-z\sqrt{1+z}}{1-1-z}-\frac{1+\sqrt{1-z}-z-z\sqrt{1-z}}{1-1+z}=$$

$$=\frac{1+z-\sqrt{1+z}(1+z)}{-z}-\frac{1-z+\sqrt{1-z}(1-z)}{z}=$$

$$=\frac{-1-z+\sqrt{1+z}\cdot(1+z)-1+z-\sqrt{1-z}\cdot(1-z)}{z}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+z}\cdot(1+z)-\sqrt{1-z}\cdot(1-z)-2}{z}=\frac{\sqrt{(1+z)^3}-\sqrt{(1-z)^3}-2}{z}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+z}\right)^3-\left(\sqrt{1-z}\right)^3}{z}-\frac{2}{z}=\frac{\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)\left(1+z+\sqrt{1+z^2}+1-z\right)}{z}-\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+z-2\sqrt{1-z^2}+1-z}\cdot\left(2+\sqrt{1-z^2}\right)}{z}-\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-z^2}}\cdot\left(2+\sqrt{1-z^2}\right)}{z}-\frac{2}{z}=\frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{3}{4}}}\cdot\left(2+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)-2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{1\cdot\frac{5}{2}-2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.232. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm\sqrt{3}. \end{cases}$

$$\frac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}=\frac{a^2-3}{\sqrt{\frac{a^4+6a^2+9}{4a^2}-3}}=\frac{a^2-3}{\sqrt{\frac{a^4+6a^2+9-12a^2}{4a^2}}}=$$

$$=\frac{a^2-3}{\sqrt{\frac{a^4-6a^2+9}{4a^2}}}=\frac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2-3}{2a}\right)^2}}=\frac{a^2-3}{\left|\frac{a^2-3}{2a}\right|}=\frac{2\left(a^2-3\right)\cdot|a|}{\left|a^2-3\right|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-2(a^2-3)a}{a^2-3}=-2a, \text{ если } a<-\sqrt{3};\\ \dfrac{-2(a^2-3)a}{-(a^2-3)}=2a, \text{ если } -\sqrt{3}<a<0;\\ \dfrac{2(a^2-3)a}{-(a^2-3)}=-2a, \text{ если } 0<a<\sqrt{3};\\ \dfrac{2(a^2-3)a}{a^2-3}=2a, \text{ если } a>\sqrt{3}.\end{cases}$$

Ответ: $-2a$, если $a\in(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(0;\ \sqrt{3})$; $2a$, если $a\in(-\sqrt{3};\ 0)\cup(\sqrt{3};\ \infty)$.

2.233. $$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$$

Решение.

ОДЗ: $a>1$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2)=$$

$$=\frac{\frac{1-\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1}}}{\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a-1)(a+1)}\cdot\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right)}-(1-a^2)=$$

$$=\frac{1-\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}\cdot\frac{\sqrt{(a-1)(a+1)}\cdot\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right)}{\sqrt{a+1}}-$$

$$-(1-a^2)=\left(1-\sqrt{(a-1)(a+1)}\right)\cdot\sqrt{(a-1)(a+1)}-(1-a^2)=$$

$$=\left(1-\sqrt{a^2-1}\right)\sqrt{a^2-1}-1+a^2=\sqrt{a^2-1}-a^2+1-1+a^2=\sqrt{a^2-1}.$$

Ответ: $\sqrt{a^2-1}$.

2.234. $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$; $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}=\frac{x+x\sqrt{1+x}-1-\sqrt{1+x}+x+x\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{x^2-1}=$$

$$=\frac{2x-(1-x)\sqrt{1+x}+(1+x)\sqrt{1-x}}{x^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3}{4}-1}=$$

$$=(-4)\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}\right)=$$

$$=-4\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=$$

$$=-4\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3+2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3=-4\sqrt{3}-2.$$

Ответ: $-2-4\sqrt{3}$.

2.235. $\dfrac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}}$; $x=\dfrac{a^2+1}{2a}$.

Решение.

ОДЗ: $0<a\neq 1$.

$$\frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{x+1-x+1}=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2+1}{2a}-1}\left(\sqrt{\frac{a^2+1}{2a}+1}+\sqrt{\frac{a^2+1}{2a}-1}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{2a}}\left(\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}+\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{2a}}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{(a-1)^2}{2a}}\left(\sqrt{\frac{(a+1)^2}{2a}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{2a}}\right)}{2}=\frac{\frac{|a-1|}{\sqrt{2a}}\left(\frac{a+1}{\sqrt{2a}}+\frac{|a-1|}{\sqrt{2a}}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\frac{|a-1|\cdot(a+1+|a-1|)}{2a}}{2}=\frac{|a-1|\cdot(a+1)+(a-1)^2}{4a}=$$

$$=\begin{cases}\frac{-(a-1)(a+1)+(a-1)^2}{4a}=\frac{1-a}{2a}, \text{ если } 0<x<1;\\ \frac{(a-1)(a+1)+(a-1)^2}{4a}=\frac{a-1}{2}, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{1-a}{2a}$, если $a\in(0;\,1)$; $\frac{a-1}{2}$, если $a\in(1;\,\infty)$.

2.236. $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z}$; $z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $m>0$.

$$\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z}=\frac{\sqrt{z^2-1}\cdot\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)}{\left(\sqrt{z^2-1}-z\right)\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)}=\frac{\sqrt{z^2-1}\cdot\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)}{\left(\sqrt{z^2-1}\right)^2-z^2}=$$

$$=\frac{z^2-1+z\sqrt{z^2-1}}{z^2-1-z^2}=-\left(z^2+z\sqrt{z^2-1}-1\right)=1-z^2-z\sqrt{z^2-1}=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)^2-1}=$$

$$=1-\left(\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)^2-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\cdot\sqrt{\left(\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)^2-1}=$$

$$=1-\frac{m^2+2m+1}{4m}-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\cdot\sqrt{\frac{m^2+2m+1}{4m}-1}=$$

$$=\frac{4m-m^2-2m-1}{4m}-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\cdot\sqrt{\frac{m^2+2m+1-4m}{4m}}=$$

$$=\frac{-\left(m^2-2m+1\right)}{4m}-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\sqrt{\frac{m^2-2m+1}{4m}}=-\frac{(m-1)^2}{4m}-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\sqrt{\left(\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\right)^2}=$$

$$=-\frac{(m-1)^2}{4m}-\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\cdot\frac{|m-1|}{2\sqrt{m}}=-\frac{(m-1)^2}{4m}-\frac{(m+1)\cdot|m-1|}{4m}=$$

$$=\frac{-(m-1)^2-(m+1)\cdot|m-1|}{4m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-(m-1)^2+(m+1)(m-1)}{4m}=\dfrac{-(m-1)^2+m^2-1}{4m}=\dfrac{m-1}{2m}, \text{ если } m-1<0, \\ \text{или } 0<m<1; \\ \dfrac{-(m-1)^2-(m+1)(m-1)}{4m}=\dfrac{-(m-1)^2-\left(m^2-1\right)}{4m}=\dfrac{1-m}{2}, \text{ если } m\geq 1.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{m-1}{2m}$, если $m\in(0;\,1)$; $\frac{1-m}{2}$, если $m\in[1;\,\infty)$.

2.237. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2}$; $x=\frac{a^3+1}{a^3-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\neq 1,\\ a>0.\end{cases}$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2}=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}-2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2-2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}}=\frac{\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|}{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}}=$$

$$=\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|\cdot\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}=\left|\sqrt[3]{\frac{\frac{a^3+1}{a^3-1}+1}{\frac{a^3+1}{a^3-1}-1}}-1\right|\cdot\sqrt[6]{\frac{\frac{a^3+1}{a^3-1}-1}{\frac{a^3+1}{a^3-1}+1}}=$$

$$=\left|\sqrt[3]{\frac{\frac{a^3+1+a^3-1}{a^3-1}}{\frac{a^3+1-a^3+1}{a^3-1}}}-1\right|\cdot\sqrt[6]{\frac{\frac{a^3+1-a^3+1}{a^3-1}}{\frac{a^3+1+a^3-1}{a^3-1}}}=\left|\sqrt[3]{\frac{2a^3}{2}}-1\right|\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{2a^3}}=$$

$$=|a-1|\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\begin{cases}\frac{-(a-1)}{\sqrt{a}}=\frac{1-a}{\sqrt{a}}, \text{ если } 0<a<1;\\ \frac{a-1}{\sqrt{a}}, \text{ если } a>1.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$, если $a\in(0;\,1)$; $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, если $a\in(1;\,\infty)$.

2.238. $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}=$$

$$=\frac{x^2+2\sqrt{2x}+2-\sqrt{2x}}{\left(x^2+x\sqrt{2x}+2x\right)-\left(x\sqrt{2x}+\sqrt{2x}\sqrt{2x}+2\sqrt{2x}\right)+\left(x+\sqrt{2x}+2\right)}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{2x}+2}{x\left(x+\sqrt{2x}+2\right)-\sqrt{2x}\left(x+\sqrt{2x}+2\right)+\left(x+\sqrt{2x}+2\right)}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{2x}+2}{\left(x+\sqrt{2x}+2\right)\left(x-\sqrt{2x}+1\right)}=\frac{1}{x-\sqrt{2x}+1}.$$

Ответ: $\frac{1}{x-\sqrt{2x}+1}$.

2.239. $\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}$.

Решение.

$$X=\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}=\frac{\sqrt[12]{2^9}+\sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}}-\sqrt[12]{2^8}=\frac{\sqrt[12]{\left(2^3\right)^3}+\sqrt[12]{\left(2^4\right)^3}}{\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}}-\sqrt[12]{2^8}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}\right)\left(\sqrt[12]{2^6}-\sqrt[12]{2^3\cdot 2^4}+\sqrt[12]{2^8}\right)}{\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}}-\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[12]{2^6}-\sqrt[12]{2^7}=$$

$$=\sqrt[12]{2^6}\left(1-\sqrt[12]{2}\right)=\sqrt{2}\left(1-\sqrt[12]{2}\right).$$

$$Y=\sqrt{\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}}=\sqrt{\frac{\sqrt[12]{2^9}-\sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}}-3\sqrt[12]{2^7}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}\right)\left(\sqrt[12]{2^6}+\sqrt[12]{2^7}+\sqrt[12]{2^8}\right)}{\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}}-3\sqrt[12]{2^7}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt[12]{2^4}-\sqrt[12]{2^3}\right)^2}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\left(\sqrt[12]{2}-1\right)=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[12]{2}-1\right)$$

Тогда $\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(1-\sqrt[12]{2}\right)}{\sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[12]{2}-1\right)}=-\sqrt[4]{2}$.

Ответ: $-\sqrt[4]{2}$.

2.240. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{3^2-\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{27\cdot 4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{3^{12}}-\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}+\sqrt[6]{3^6\cdot 2^2}\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^6}+\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[6]{3^{12}}-\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}+\sqrt[6]{3^9\cdot 2^2}-\sqrt[6]{3^6\cdot 2^4}}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^6}+\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt[6]{3^9}-\sqrt[6]{2^6}+\sqrt[6]{3^6\cdot 2^2}-\sqrt[6]{3^3\cdot 2^4}\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt[6]{3^9}-\sqrt[6]{3^3\cdot 2^4}\right)+\left(\sqrt[6]{3^6\cdot 2^2}-\sqrt[6]{2^6}\right)}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^4}\right)+\sqrt[6]{2^2}\left(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^4}\right)}{\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^4}\right)\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}\right)\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}\right)^2}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=\frac{\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)}=1.$$

Ответ: 1.

2.241. $\left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\cdot(x+2).$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\pm2$.

$$\left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\cdot(x+2)=$$

$$=\left(-\frac{x^2-2x+4}{2(x-2)}-\frac{6x^2+12x+8}{(x-2)(x+2)}-\frac{x^2+2x+4}{2(x+2)}\right)^{-1/3}\cdot(x+2)=$$

$$=-\left(\frac{(x^2-2x+4)(x+2)+2(6x^2+12x+8)+(x^2+2x+4)(x-2)}{2(x-2)(x+2)}\right)^{-1/3}\times$$

$$\times(x+2)=-\left(\frac{2(x^3+6x^2+12x+8)}{2(x-2)(x+2)}\right)^{-1/3}\cdot(x+2)=-\left(\frac{(x+2)^3}{(x-2)(x+2)}\right)^{-1/3}\times$$

$$\times(x+2)=-\left(\frac{(x+2)^2}{x-2}\right)^{-1/3}\cdot(x+2)=-\sqrt[3]{\frac{x-2}{(x+2)^2}}\cdot(x+2)=$$

$$=-\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+2)^3}{(x+2)^2}}=-\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}=-\sqrt[3]{x^2-4}=\sqrt[3]{4-x^2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{4-x^2}$.

2.242. $\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z\neq \pm 2, \\ z\neq 1. \end{cases}$

$$\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{z^2+4z+4-8z}}{z+2}+\frac{z^2-2z+1+3}{(z+2)\left(z^2-2z+4\right)}\right):\frac{(z-2)(z-1)}{(z+2)(z-2)^2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{(z-2)^2}}{z+2}+\frac{1}{z+2}\right)\cdot\frac{(z+2)(z-2)}{z-1}=\left(\frac{|z-2|}{z+2}+\frac{1}{z+2}\right)\cdot\frac{(z+2)(z-2)}{z-1}=$$

$$=\frac{|z-2|+1}{z+2}\cdot\frac{(z+2)(z-2)}{z-1}=\frac{(|z-2|+1)(z-2)}{z-1}=$$

$$=\begin{cases} \frac{(-z+2+1)(z-2)}{z-1}=\frac{(-z+3)(z-2)}{z-1}=\frac{z^2-5z+6}{1-z}, \\ \qquad \text{если } z\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2); \\ \frac{(z-2+1)(z-2)}{z-1}=\frac{(z-1)(z-2)}{z-1}=z-2, \text{ если } z\in(2;\infty). \end{cases}$$

Ответ: $\frac{z^2-5z+6}{1-z}$, если $z\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2)$; $z-2$, если $z\in(2;\infty)$.

2.243. $\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

$$\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}=$$

$$=\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^4(x^2+3)}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x(x^2-4)+3(x^2-4)}{x^5}=$$

$$=\frac{x^4+5x^3+15x-9+9(x^2+3)}{x^4(x^2+3)}:\frac{(x^2-4)(x+3)}{x^5}=$$

$$=\frac{(x^2-3)(x^2+3)+5x(x^2+3)+9(x^2+3)}{x^4(x^2+3)}:\frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{x^5}=$$

$$=\frac{(x+3)(x+2)(x^2+3)}{x^4(x^2+3)}\cdot\frac{x^5}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\frac{x}{x-2}.$$

Ответ: $\frac{x}{x-2}$.

2.244. $\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right)$

Решение.

ОДЗ: $a \neq b,\ a \neq b+2.$

$$\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right)=$$

$$=\frac{a^2-2a-b^2-2b-\sqrt{ab}(a-b-2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1-2\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}\right)=$$

$$=\frac{\left(a^2-b^2\right)-(2a+2b)-\sqrt{ab}(a-b-2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1-2\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)-2(a+b)-\sqrt{ab}(a-b-2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1-\frac{2}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b-2)-\sqrt{ab}(a-b-2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\frac{a-b-2}{a-b}=$$

$$=\frac{(a-b-2)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}{a+b-\sqrt{ab}}\cdot\frac{a-b}{a-b-2}=a-b.$$

Ответ: $a-b$.

2.245. $$\frac{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}+\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}-\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x>2$.

$$\frac{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}+\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}-\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)^{-1}}{\left(\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)^{-1}-\left(\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)}{\sqrt{x^2-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}\right)}}{\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}\right)}}=\frac{\frac{2\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}}{\frac{-2\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.

2.246. $\frac{\left(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-y\sqrt[4]{y}\right)\left(x+y+\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2+\sqrt[4]{xy}\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-y\sqrt[4]{y}\right)\left(x+y+\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2+\sqrt[4]{xy}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[4]{x^2y^2}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-\sqrt[4]{y^5}\right)\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2y^2}+\sqrt[4]{y^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{xy}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[4]{x^3y^2}-\sqrt[4]{x^2y^3}-\sqrt[4]{y^5}\right)\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2y^2}+\sqrt[4]{y^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)+\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)\right)\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2y^2}+\sqrt[4]{y^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{y^3}\right)\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2y^2}+\sqrt[4]{y^4}\right)}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{y^3}}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2y^2}+\sqrt[4]{y^4}\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}\right)=$$

$$=\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}.$$

Ответ: $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$.

2.247. $\dfrac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}+1\right)^2-\sqrt[3]{a}\right)\left(b^{1/3}+1\right)}+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq\pm1, \\ a\neq 0, \\ b\neq -1, \\ b\neq 0. \end{cases}$

$$\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}+1\right)^2-\sqrt[3]{a}\right)\left(b^{1/3}+1\right)}+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right)=$$

$$=\frac{a\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+1-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{b}+1\right)}+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{b^2}\,(a-1)-(a-1)}{-\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{b}+1\right)}+\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}}+\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{b}}=$$

$$=\frac{(a-1)\left(\sqrt[3]{b^2}-1\right)}{-(a-1)(\sqrt[3]{b}+1)}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{b}+1)(\sqrt[3]{b}-1)}{-(\sqrt[3]{b}+1)}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}=$$

$$=-\sqrt[3]{b}+1+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}=1+\sqrt[3]{a}.$$

Ответ: $1+\sqrt[3]{a}$.

2.248. $\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{5+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4^2-\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{16-5-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{11-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(11+\sqrt{3})(11-\sqrt{3})}}{\sqrt{59}}=\frac{\sqrt{11^2-(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{59}}=\frac{\sqrt{118}}{\sqrt{59}}=\sqrt{\frac{118}{59}}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

2.249. $\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 2. \end{cases}$

$$\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2}\right)^2+\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:\frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x}\right)}{2-\sqrt[4]{2x^3}}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}}\cdot\frac{\sqrt[8]{x^2}-2\sqrt[8]{2x}+\sqrt[8]{2^2}+\sqrt[8]{x^2}+2\sqrt[8]{2x}+\sqrt[8]{2^2}}{\sqrt[8]{x^4}-\sqrt[8]{2^2x^2}}:$$

$$:\frac{\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}-\sqrt[8]{2x}\right)\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}+\sqrt[8]{2x}\right)}{\sqrt[8]{2^8}-\sqrt[8]{2^2x^6}}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}}\cdot\frac{2\sqrt[8]{x^2}+2\sqrt[8]{2^2}}{\sqrt[8]{x^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}:\frac{\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)^2-\left(\sqrt[8]{2x}\right)^2}{-\sqrt[8]{2^2}\left(\sqrt[8]{x^6}-\sqrt[8]{2^6}\right)}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}}\cdot\frac{2\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)}{\sqrt[8]{x^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}:\frac{\sqrt[8]{x^4}+2\sqrt[8]{2^2x^2}+\sqrt[8]{2^4}-\sqrt[8]{2^2x^2}}{-\sqrt[8]{2^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{2^2x^2}+\sqrt[8]{2^4}\right)}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}}\cdot\frac{2\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)}{\sqrt[8]{x^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}:\frac{\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{2^2x^2}+\sqrt[8]{2^4}}{-\sqrt[8]{2^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{2^2x^2}+\sqrt[8]{2^4}\right)}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}}\cdot\frac{2\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)}{\sqrt[8]{x^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}:\frac{1}{-\sqrt[8]{2^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{x^2}\cdot\sqrt[8]{2^2}\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)\cdot\left(-\sqrt[8]{2^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}{\sqrt[8]{2^{10}}\cdot\sqrt[8]{x^2}\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2}\right)}=-\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)=$$

$$=-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}\right).$$

Ответ: $-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}\right)$.

2.250. $\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{a^2+2a}}\right)^{1/2}-\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}\right)^{-1}\cdot\sqrt{a+2}.$

Решение.

ОДЗ: $a\geq 0$.

$$\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{a^2+2a}}\right)^{1/2}-\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}\right)^{-1}\cdot\sqrt{a+2}=$$

$$=\sqrt{\frac{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}}-\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a+2+2\sqrt{a(a+2)}+a}{2a+1-2\sqrt{a(2a+1)}+a}}-$$

$$-\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a+2}+\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}\right)^2}}-\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}-$$

$$-\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}-\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}$.

2.251. $\dfrac{\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)^2+\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y}\right)^2}{x-\sqrt{xy}}:\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{x^3y}-y}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y\ge 0, \\ x\ne y. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)^2+\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y}\right)^2}{x-\sqrt{xy}}:\frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{x^3y}-y}=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{x^2}+2\sqrt[8]{xy}+\sqrt[8]{y^2}+\sqrt[8]{x^2}-2\sqrt[8]{xy}+\sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^8}-\sqrt[8]{x^4y^4}}:$$

$$:\frac{\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{y^2}+\sqrt[8]{xy}\right)\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{y^2}-\sqrt[8]{xy}\right)}{\sqrt[8]{x^6y^2}-\sqrt[8]{y^8}}=$$

$$=\frac{2\sqrt[8]{x^2}+2\sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^4}\cdot\left(\sqrt[8]{x^4}-\sqrt[8]{y^4}\right)}:\frac{\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{y^2}\right)^2-\left(\sqrt[8]{xy}\right)^2}{\sqrt[8]{y^2}\cdot\left(\sqrt[8]{x^6}-\sqrt[8]{y^6}\right)}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{y^2}\right)}{\sqrt[8]{x^4}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{y^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}:$$

$$:\frac{\sqrt[8]{x^4}+2\sqrt[8]{x^2y^2}+\sqrt[8]{y^4}-\sqrt[8]{x^2y^2}}{\sqrt[8]{y^2}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^2y^2}+\sqrt[8]{y^4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[8]{x^4}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}:\frac{\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^2y^2}+\sqrt[8]{y^4}}{\sqrt[8]{y^2}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)\left(\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^2y^2}+\sqrt[8]{y^4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[8]{x^4}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}:\frac{1}{\sqrt[8]{y^2}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}=\frac{2\sqrt[8]{y^2}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}{\sqrt[8]{x^4}\cdot\left(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{y^2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^4}}=2\sqrt[4]{\frac{y}{x^2}}.$$

Ответ: $2\sqrt[4]{\dfrac{y}{x^2}}$.

2.252. $\dfrac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\dfrac{a^3}{b}-2a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{ab}}}$; $a=4{,}8$; $b=1{,}2$.

Решение.

ОДЗ: $c\geq 0$.

$$\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\dfrac{a^3}{b}-2a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{ab}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{\left(a-\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)\left(a+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)}}{\sqrt{\frac{a^4-2a^2b+b^2-c}{ab}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a^2-(\sqrt{b+\sqrt{c}})^2}}{\sqrt{\frac{(a^2-b)^2-c}{ab}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a^2-b-\sqrt{c}}}{\sqrt{\frac{(a^2-b-\sqrt{c})(a^2-b+\sqrt{c})}{ab}}}=\frac{\sqrt{(a^2-b+\sqrt{c})(a^2-b-\sqrt{c})}}{\frac{\sqrt{(a^2-b-\sqrt{c})(a^2-b+\sqrt{c})}}{\sqrt{ab}}}=\sqrt{ab}=$$

$$=\sqrt{4{,}8\cdot 1{,}2}=\sqrt{5{,}76}=2{,}4.$$

Ответ: 2,4.

2.253. $(4x-1)\cdot\left(\frac{1}{8x}\cdot(\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1}\right)^{1/2}.$

Решение.

ОДЗ: $x\geq\frac{1}{8},\ x\neq\frac{1}{4}.$

$$(4x-1)\cdot\left(\frac{1}{8x}\cdot(\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1}\right)^{1/2}=$$

$$=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{1}{8x}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{8x-1}+4x}-\frac{1}{\sqrt{8x-1}-4x}\right)}=$$

$$=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{8x-1}-4x-\sqrt{8x-1}-4x}{8x(\sqrt{8x-1}+4x)(\sqrt{8x-1}-4x)}}=$$

$$=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{-8x}{8x\left(\left(\sqrt{8x-1}\right)^2-(4x)^2\right)}}=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{-1}{8x-1-16x^2}}=$$

$$=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{1}{16x^2-8x+1}}=(4x-1)\cdot\sqrt{\frac{1}{(4x-1)^2}}=(4x-1)\cdot\frac{1}{|4x-1|}=$$

$$=\frac{4x-1}{|4x-1|}=\begin{cases}\dfrac{4x-1}{-(4x-1)}=-1,\text{ если } x\in\left[\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{4}\right);\\ \dfrac{4x-1}{4x-1}=1,\text{ если } x\in\left(\dfrac{1}{4};\infty\right).\end{cases}$$

Ответ: -1, если $x\in\left[\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right)$; 1, если $x\in\left(\frac{1}{4};\ \infty\right)$

2.254. $\left(\dfrac{x+2y}{8y^3\left(x^2+2xy+2y^2\right)}-\dfrac{(x-2y):8y^2}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\dfrac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\dfrac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right);$

$x=\sqrt[4]{6},\quad y=\sqrt[8]{2}.$

Решение.

$$\left(\frac{x+2y}{8y^3\left(x^2+2xy+2y^2\right)}-\frac{(x-2y):8y^2}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+2y}{8y^3\left(x^2+2xy+2y^2\right)}-\frac{x-2y}{8y^3\left(x^2-2xy+2y^2\right)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4y^2\left(x^2-2y^2\right)}-\frac{1}{4y^2\left(x^2+2y^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{(x+2y)\left(x^2+2y^2-2xy\right)-(x-2y)\left(x^2+2y^2+2xy\right)}{8y^3\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)}+$$

$$+\frac{x^2+2y^2-x^2+2y^2}{4y^2\left(x^2-2y^2\right)\left(x^2+2y^2\right)}=\frac{8y^3}{8y^3\left(\left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2\right)}+$$

$$+\frac{4y^2}{4y^2\left(\left(x^2\right)^2-\left(2y^2\right)^2\right)}=\frac{1}{x^4+4y^4}+\frac{1}{x^4-4y^4}=$$

$$=\frac{x^4-4y^4+x^4+4y^4}{\left(x^4+4y^4\right)\left(x^4-4y^4\right)}=\frac{2x^4}{x^8-16y^8}=\frac{2\left(\sqrt[4]{6}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{6}\right)^8-16\left(\sqrt[8]{2}\right)^8}=$$

$$=\frac{2\cdot 6}{36-16\cdot 2}=\frac{12}{36-32}=\frac{12}{4}=3.$$

Ответ: 3.

2.255.

$$\frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\ldots+2a)}{a^2+3a+2}+\frac{6\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:\left(\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)(a-b)^{-2/5}\right)^{-1}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\ge 0, \\ b\ge 0, \\ a\ne b. \end{cases}$

Выражение $a+(a+1)+(a+2)+\ldots+2a$ является суммой S_n членов арифметической прогрессии, у которой первый член $a_1=a$, разность $d=a+1-a=1$, n-й член $a_n=2a$, количество членов $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{2a-a}{1}+1=a+1$. Применив формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдем $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a+2a}{2}\cdot(a+1)=$ $=\frac{3a(a+1)}{2}$. Подставив это значение S_n в условие, получим

$$\frac{2\cdot\frac{3a(a+1)}{2}}{a^2+3a+2}+\frac{6\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:\left(\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)(a-b)^{-2/5}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{3a(a+1)}{(a+2)(a+1)}+\frac{6\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt[5]{(a-b)^3}\cdot(a+2)}:\frac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt[5]{(a-b)^{-2}}}=$$

$$=\frac{3a}{a+2}+\frac{6\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt[5]{(a-b)^3}\cdot(a+2)}:\frac{\sqrt[5]{(a-b)^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{3a}{a+2}+\frac{6\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt[5]{(a-b)^3}\cdot(a+2)\cdot\sqrt[5]{(a-b)^2}}=$$

$$=\frac{3a}{a+2}+\frac{6(a-b)}{(a+2)\cdot\sqrt[5]{(a-b)^5}}=\frac{3a}{a+2}+\frac{6}{a+2}=\frac{3a+6}{a+2}=3.$$

Ответ: 3.

2.256. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x}\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\left(x+x^{-1}-2\right)a^{-1/4}}-\dfrac{\left(x\sqrt{a}\right)^{3/2}}{\left(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x\right)^{-1/2}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ a>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x}\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\left(x+x^{-1}-2\right)a^{-1/4}}-\frac{\left(x\sqrt{a}\right)^{3/2}}{\left(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x\right)^{-1/2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}\left(1+\sqrt{x}\right)+x\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}}-\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\left(\dfrac{a}{x}+4\sqrt{a}+4x\right)^{-1/2}}=$$

$$=\frac{\left(\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a}+x\right)\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\dfrac{x^2-2x+1}{x\sqrt[4]{a}}}-\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\left(\dfrac{a+4\sqrt{a}x+4x^2}{x}\right)^{-1/2}}=$$

$$=\frac{\left(\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a}+x\right)\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2\cdot x\sqrt[4]{a}}{(x-1)^2}-\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{\dfrac{x}{\left(\sqrt{a}+2x\right)^2}}}=$$

$$=\frac{(1-x)^2\left(\sqrt{a}+x\right)^2\cdot x\sqrt[4]{a}}{(x-1)^2}-\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\left(\sqrt{a}+2x\right)}{\sqrt{x}}=$$

$$=\left(\sqrt{a}+x\right)^2\cdot x\sqrt[4]{a}-x\sqrt[4]{a^3}\cdot\left(\sqrt{a}+2x\right)=$$

$$=x\sqrt[4]{a}\cdot\left(\left(\sqrt{a}+x\right)^2-\sqrt[4]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a}+2x\right)\right)=$$

$$=x\sqrt[4]{a}\cdot\left(a+2\sqrt{a}\cdot x+x^2-a-2\sqrt{a}\cdot x\right)=x\sqrt[4]{a}\cdot\left(x^2\right)=x^3\cdot\sqrt[4]{a}.$$

Ответ: $x^3\cdot\sqrt[4]{a}$.

2.257. $\left(\left(a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}$.

Решение.

ОДЗ: $a>0$.

$$\left(\left(a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^{12}}-3\sqrt[12]{a^{10}}+9\sqrt[12]{a^8}}{\sqrt[12]{a^6}+3\sqrt[12]{a^4}+3\sqrt[12]{a^5}}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^8}\left(\sqrt[12]{a^4}-3\sqrt[12]{a^2}+9\right)}{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^2}+3+3\sqrt[12]{a}\right)}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^4}-3\sqrt[12]{a^2}+9\right)}{\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^4}-3\sqrt[12]{a^2}+9\right)+3\sqrt[12]{a^5}\left(\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3\right)}{\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^4}-3\sqrt[12]{a^2}+9+3\sqrt[12]{a^3}+9\sqrt[12]{a^2}+9\sqrt[12]{a}\right)}{\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^4}+3\sqrt[12]{a^3}+6\sqrt[12]{a^2}+9\sqrt[12]{a}+9\right)}{\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3\right)\left(\sqrt[12]{a^2}+3\right)}{\sqrt[12]{a^2}+3\sqrt[12]{a}+3}\right)^{-1}=\left(\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^2}+3\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[12]{a^4}\left(\sqrt[12]{a^2}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt[12]{a^6}+3\sqrt[12]{a^4}}=\frac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}}$.

2.258. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab}\right)\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}\right)}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:\dfrac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2+\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)b^{-1/4}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \ge 0, \\ b > 0, \\ a \ne b. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab}\right)\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}\right)}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2+\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)b^{-1/4}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[8]{a^2}+\sqrt[8]{b^2}-\sqrt[8]{ab}\right)\left(\sqrt[8]{a^2}+\sqrt[8]{b^2}+\sqrt[8]{ab}\right)}{\sqrt[8]{a^6b^2}-\sqrt[8]{b^8}}:$$

$$:\frac{\sqrt[8]{a^2}+2\sqrt[8]{ab}+\sqrt[8]{b^2}+\sqrt[8]{a^2}-2\sqrt[8]{ab}+\sqrt[8]{b^2}}{\left(\sqrt[8]{a^4}-\sqrt[8]{b^4}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{b^2}}}=\frac{\left(\sqrt[8]{a^2}+\sqrt[8]{b^2}\right)^2-\left(\sqrt[8]{ab}\right)^2}{\sqrt[8]{b^2}\left(\sqrt[8]{a^6}-\sqrt[8]{b^6}\right)}:$$

$$:\frac{\left(2\sqrt[8]{a^2}+2\sqrt[8]{b^2}\right)\sqrt[8]{b^2}}{\sqrt[8]{a^4}-\sqrt[8]{b^4}}=\frac{\sqrt[8]{a^4}+2\sqrt[8]{a^2b^2}+\sqrt[8]{b^4}-\sqrt[8]{a^2b^2}}{\sqrt[8]{b^2}\left(\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}\right)\left(\sqrt[8]{a^4}+\sqrt[8]{a^2b^2}+\sqrt[8]{b^4}\right)}:$$

$$:\frac{2\left(\sqrt[8]{a^2}+2\sqrt[8]{b^2}\right)\sqrt[8]{b^2}}{\left(\sqrt[8]{a^2}+\sqrt[8]{b^2}\right)\left(\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}\right)}=\frac{\sqrt[8]{a^4}+\sqrt[8]{a^2b^2}+\sqrt[8]{b^4}}{\sqrt[8]{b^2}\left(\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}\right)\left(\sqrt[8]{a^4}+\sqrt[8]{a^2b^2}+\sqrt[8]{b^4}\right)}:$$

$$:\frac{2\sqrt[8]{b^2}}{\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[8]{b^2}\left(\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt[8]{a^2}-\sqrt[8]{b^2}}{2\sqrt[8]{b^2}}=\frac{1}{2\sqrt[8]{b^4}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{b}}$.

2.259. $\left(\sqrt[3]{\frac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{8z^2-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}$.

Решение.

ОДЗ: $z\neq\pm\frac{3}{2}$, $z\neq 0$.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{8z^2-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2z(4z^2+12z+9)}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{2z(4z^2-12z+9)}{2z+3}}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4z^2-9}{54z}}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2z(2z+3)^2}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{2z(2z-3)^2}{2z+3}}-2\sqrt[3]{\frac{54z}{4z^2-9}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2z(2z+3)^2}}{\sqrt[3]{2z-3}}-\frac{\sqrt[3]{2z(2z-3)^2}}{\sqrt[3]{2z+3}}-\frac{2\sqrt[3]{54z}}{\sqrt[3]{(2z-3)(2z+3)}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2z(2z+3)^3}-\sqrt[3]{2z(2z-3)^3}-2\sqrt[3]{54z}}{\sqrt[3]{(2z-3)(2z+3)}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2z}(2z+3-2z+3-6)}{\sqrt[3]{4z^2-9}}=\frac{\sqrt[3]{2z}\cdot 0}{\sqrt[3]{4z^2-9}}=0.$$

Ответ: 0.

2.260. $$\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\frac{2q^2}{p^2-q^2}\right)\cdot\left(p^3-pq^2\right)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$$

Решение.

ОДЗ: $p > q > 0$.

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\frac{2q^2}{p^2-q^2}\right)\cdot\left(p^3-pq^2\right)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^2\left(p^2-q^2\right)}+\frac{2p^2}{p^2-q^2}\right)\cdot p\left(p^2-q^2\right)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p(p+q)-q(p-q)-2pq}{(p+q)(p-q)}}\cdot(p-q)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(p^4+q^4+2p^2q^2\right)p\left(p^2-q^2\right)}{p^2\left(p^2-q^2\right)}}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p^2+pq-pq+q^2-2pq}{(p+q)(p-q)}}\cdot(p-q)}=\frac{\sqrt{\frac{\left(p^2+q^2\right)^2}{p}}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p^2-2pq+q^2}{(p+q)(p-q)}}\cdot(p-q)}=$$

$$=\frac{\frac{p^2+q^2}{\sqrt{p}}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{(p-q)^2}{(p+q)(p-q)}}\cdot(p-q)}=\frac{\frac{p^2-2pq+q^2}{\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p-q}{p+q}}\cdot(p-q)}=\frac{\frac{(p-q)^2}{\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p-q}{p+q}}\cdot(p-q)}=$$

$$=\frac{p-q}{\sqrt{p}}\cdot\sqrt{\frac{p+q}{p-q}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\sqrt{\frac{(p-q)^2(p+q)}{p-q}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\sqrt{(p-q)(p+q)}=$$

$$=\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p}}.$

2.261. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\le 1$.

$$\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\frac{(x+1)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{4x^4}{81(1+2x+x^2)^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(1+x)^3(1-x)}{x^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9(1-x^2)}{4x^3}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{4x^4}{81(1+x)^4}\cdot\frac{(1+x)^3(1-x)}{x^3}\cdot\frac{9(1-x^2)}{4x^3}}=\sqrt[6]{\frac{36x^4(1+x)^4(1-x)^2}{324x^6(1+x)^4}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(1-x)^2}{9x^2}}=\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{3x}}$, если $x\in(0;\,1]$.

2.262. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{\left(2+\sqrt[3]{ab}\right)^2-\left(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b}\right)^2};\quad a=\sqrt[7]{3},\quad b=\sqrt{0{,}008}.$

Решение.

$$\frac{4-\sqrt[3]{a^2}}{\left(2+\sqrt[3]{ab}\right)^2-\left(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{4-\sqrt[3]{a^2}}{4+4\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[3]{ab}-4\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{4-\sqrt[3]{a^2}}{\left(4-\sqrt[3]{a^2}\right)-\sqrt[3]{b^2}\cdot\left(4-\sqrt[3]{a^2}\right)}=\frac{4-\sqrt[3]{a^2}}{\left(4-\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{1}{1-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{1}{1-\sqrt[3]{0{,}008}}=\frac{1}{1-0{,}2}=\frac{1}{0{,}8}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

2.263. $\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$.

Решение.

$$\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}=\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2-x^3\sqrt{2}+2x^2-2x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+2}=$$

$$=\frac{x^4-\sqrt{2}x^3+3x^2-\sqrt{2}x+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}=\frac{(x^2-\sqrt{2}x+2)(x^2+1)}{x^2-x\sqrt{2}+2}=x^2+1.$$

Ответ: x^2+1.

2.264. $\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq -3. \end{cases}$

$$\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}=\frac{(x^3+2x^2-3x)+(3x^2+6x-9)}{(x^3+2x^2-3x)-(x^2+2x-3)}=$$

$$=\frac{x(x^2+2x-3)+3(x^2+2x-3)}{x(x^2+2x-3)-(x^2+2x-3)}=\frac{(x^2+2x-3)(x+3)}{(x^2+2x-3)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}.$$

Ответ: $\frac{x+3}{x-1}$.

2.265. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}}}$; $a=1{,}21$.

Решение.

ОДЗ: $b\ge 0$.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{b}{a}-\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt{\frac{a+2\sqrt{ab}+b-4\sqrt{ab}-\sqrt{b}}{a}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt{\frac{a-2\sqrt{ab}+b-\sqrt{b}}{a}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2-\sqrt{b}}}{\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{a}=\sqrt{1{,}21}=1{,}1.$$

Ответ: 1,1.

2.266. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4b+1}{a}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}$; $a=2{,}25$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4b+1}{a}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{4b+1}{a}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab-a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2-a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{(a-b)^2-a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a-b-\sqrt{a}}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{(a-b)^2-a}}{a}}{\sqrt{\left(a-b+\sqrt{a}\right)\left(a-b-\sqrt{a}\right)}}=\frac{\sqrt{(a-b)^2-a}}{a\sqrt{(a-b)^2-a}}=\frac{1}{a}=\frac{1}{2{,}25}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

2.267. $\dfrac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot\left(xy^{-2}+y^{-3/2}\right)}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y>0, \\ y\neq 2x, \\ \sqrt{y}\neq -x. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot\left(xy^{-2}+y^{-3/2}\right)}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}=\frac{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{\sqrt{y^3}}\right)}{\left(2x^2+2x\sqrt{y}\right)-\left(xy+\sqrt{y^3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{4x^2-4xy+y^2}{4y^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{y}}{y^2}}{2x\left(x+\sqrt{y}\right)-y\left(x+\sqrt{y}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{(2x-y)^2}}{2y}\cdot\frac{x+\sqrt{y}}{y^2}}{\left(x+\sqrt{y}\right)(2x-y)}=\frac{|2x-y|}{2y^3(2x-y)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-(2x-y)}{2y^3(2x-y)}=-\dfrac{1}{2y^3} \text{ при } y>2x;\\[2mm] \dfrac{2x-y}{2y^3(2x-y)}=\dfrac{1}{2y^3} \text{ при } 0<y<2x.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{2y^3}$ при $0<y<2x$; $-\dfrac{1}{2y^3}$ при $y>2x$.

2.268. $\dfrac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}\right).$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

$$\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{3^2}-\sqrt[4]{12x}}-\left(\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{12x}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}\right)+\left(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{3^4}\right)}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}-\left(\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}+\frac{\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}-\left(\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}\right)=$$

$$=1+\frac{\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{3^4}-\left(\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}\right)}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}=$$

$$=1+\frac{\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{12x^3}+\sqrt[4]{144x^2}-\sqrt[4]{108x}-\sqrt[4]{9x^2}+\sqrt[4]{108x}-\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{3^2}}=$$

$$=1+\frac{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{12x^3}+\sqrt[4]{144x^2}-\sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{9}}=$$

$$=1+\frac{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{12x^3}+2\sqrt[4]{9x^2}-\sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{9}}=1+\frac{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{12x^3}+\sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{9}}=$$

$$=1+\frac{\sqrt[4]{x^2}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{9}\right)}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{12x}+\sqrt[4]{9}}=1+\sqrt[4]{x^2}=1+\sqrt{x}.$$

Ответ: $1+\sqrt{x}$.

2.269. $$\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-\left(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2}\right)}{\sqrt{2\left(a+1-\sqrt{a^2+2a}\right)}\cdot\left(a^2-a^{5/4}+a^{1/2}\right)^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ: $a>0$.

$$\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-\left(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2}\right)}{\sqrt{2\left(a+1-\sqrt{a^2+2a}\right)}\cdot\left(a^2-a^{5/4}+a^{1/2}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt[4]{a^3}-\left(\sqrt{a^2(a+2)}+\sqrt[4]{a(a+2)^2}\right)}{\sqrt{2\left(a+1-\sqrt{a(a+2)}\right)}\cdot\dfrac{1}{a^2-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt{a}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^6}+\sqrt[4]{a^3}-\left(\sqrt[4]{a^4(a+2)^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2}\right)}{\sqrt[4]{\left(2\left(a+1-\sqrt{a(a+2)}\right)\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^8}-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[4]{a^3}+1\right)-\sqrt[4]{a(a+2)^2}\left(\sqrt[4]{a^3}+1\right)}{\sqrt[4]{\left(2a+2-2\sqrt{a(a+2)}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^2}\left(\sqrt[4]{a^6}-\sqrt[4]{a^3}+1\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a^3}+1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{(a+2)^2}\right)\sqrt[4]{a^2}\left(\sqrt[4]{a^6}-\sqrt[4]{a^3}+1\right)}{\sqrt[4]{\left(a+2-2\sqrt{a(a+2)}+a\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[4]{a^3}+1\right)\left(\sqrt[4]{a^6}-\sqrt[4]{a^3}+1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{(a+2)^2}\right)}{\sqrt[4]{\left(\left(\sqrt{a+2}-\sqrt{a}\right)^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[4]{a^9}+1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+2}\right)}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{a+2}-\sqrt{a}\right)^4}}=\frac{-\left(\sqrt[4]{a^{12}}+\sqrt[4]{a^3}\right)\left(\sqrt{a+2}-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}=$$

$$=-\left(a^3+\sqrt[4]{a^3}\right).$$

Ответ: $-\left(a^3+\sqrt[4]{a^3}\right).$

2.270. $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}.$

Решение.

ОДЗ: $x>4.$

$$\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}=\frac{\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}+2}{\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\left(\sqrt{x-4}\right)-2\right)^2}+2}{\sqrt{\left(\left(\sqrt{x-4}\right)+2\right)^2}-2}=\frac{\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2}{\sqrt{x-4}+2-2}=\frac{\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2}{\sqrt{x-4}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{x-4}+4}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{4}{\sqrt{x-4}}-1, \text{ если } x\in(4;8);\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x-4}-2+2}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}=1, \text{ если } x\in[8;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, если $x\in(4;\ 8)$; 1, если $x\in[8;\ \infty)$.

2.271. $\left(\dfrac{3^{3/2}+\frac{1}{8}\cdot z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\dfrac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}.$

Решение.

ОДЗ: $z\neq-288\sqrt{3}.$

$$\left(\frac{3^{3/2}+\frac{1}{8}\cdot z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}=$$

$$=\left(\frac{8\left(\sqrt{3^3}+\frac{1}{8}\sqrt[5]{z^3}\right)}{8\left(3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}\right)}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{4\sqrt{3}+2\sqrt[5]{z}}=$$

$$=\left(\frac{24\sqrt{3}+\sqrt[5]{z^3}}{24+8\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+2\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)}=$$

$$=\left(\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3+\left(\sqrt[5]{z}\right)^3}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)^2}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}\cdot2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)\left(\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\left(\sqrt[5]{z}\right)^2\right)}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)^2}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}\cdot2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\left(\sqrt[5]{z}\right)^2+6\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)}\right)^{-1}\cdot2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\left(\sqrt[5]{z}\right)^2}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)}\right)^{-1}\cdot2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)^2}{2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)}\right)^{-1}\cdot 2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=\frac{2}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\cdot 2\left(2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}\right)=4.$$

Ответ: 4.

2.272. $$\frac{\left(\sqrt{p^3}:\sqrt{p}+p\right)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}+1\right)^{1/4}}.$$

Решение.

ОДЗ: $p>q>0$.

$$\frac{\left(\sqrt{p^3}:\sqrt{p}+p\right)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}+1\right)^{1/4}}=\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{p^3}}{\sqrt{p}}+p}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q^3}+\sqrt{p^3}}{\sqrt{p}}}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{pq}-\sqrt{pq}+q+p-\sqrt{pq}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}}}=\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q^3}+\sqrt{p^3}}{\sqrt{p}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{(p-q)^3}}}{\sqrt[4]{\frac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{\left(\frac{\sqrt{q^3}+\sqrt{p^3}}{\sqrt{p}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{(p-q)^3}}}{\sqrt[8]{\left(\frac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}\right)^2}}=\frac{\sqrt[8]{\frac{\left(\sqrt{q^3}+\sqrt{p^3}\right)^2}{p(p-q)^3}}}{\sqrt[8]{\frac{\left(p-\sqrt{pq}+q\right)^2}{p\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}}}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{\left(\sqrt{q^3}+\sqrt{p^3}\right)^2}{p(p-q)^3}\cdot\frac{p\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}{\left(p-\sqrt{pq}+q\right)^2}}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{\left(\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{pq}+q\right)\right)^2\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}{(p-q)^3\left(p-\sqrt{pq}+q\right)^2}}=$$

$$=\sqrt[8]{\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}{(p-q)^3}}=\sqrt[8]{\frac{(p-q)^2}{(p-q)^3}}=\sqrt[8]{\frac{1}{p-q}}=\frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[8]{p-q}}$.

2.273. $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq\dfrac{2}{3}$.

$$\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{9x^2+12x+4-24x}}{\dfrac{3x-2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{9x^2-12x+4}\cdot\sqrt{x}}{3x-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(3x-2)^2}\cdot\sqrt{x}}{3x-2}=\frac{|3x-2|\cdot\sqrt{x}}{3x-2}=\begin{cases}\dfrac{-(3x-2)\cdot\sqrt{x}}{3x-2}=-\sqrt{x}, \text{ если } x\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right);\\ \dfrac{(3x-2)\cdot\sqrt{x}}{3x-2}=\sqrt{x}, \text{ если } x\in\left(\dfrac{2}{3};\infty\right)\end{cases}$$

Ответ: $-\sqrt{x}$, если $x\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$; $\sqrt{x}$, если $x\in\left(\dfrac{2}{3};\infty\right)$.

2.274. $\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq 0, \\ m\neq \pm 8. \end{cases}$

$$\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt[3]{m})\left(4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}\right)}{\sqrt[3]{m}+2}:\frac{4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}+\frac{\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt[3]{m}-2)(\sqrt[3]{m}+2)}{\sqrt[3]{m}(\sqrt[3]{m}+2)}=\frac{(2-\sqrt[3]{m})\left(4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}\right)}{\sqrt[3]{m}+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{m}+2}{4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}}+\sqrt[3]{m}=$$

$$=2-\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m}=2.$$

Ответ: 2.

2.275. $x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^2y(7+4\sqrt{3})}$.

Решение.

ОДЗ: $xy\geq 0$.

$$x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^2y(7+4\sqrt{3})}=$$

$$=x\sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})}\cdot\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}=$$

$$=x\sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})}\cdot\sqrt[6]{x^3y(2+\sqrt{3})^2}=$$

$$=x\sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{|x|\sqrt{xy}(2+\sqrt{3})}=$$

$$=x\sqrt[3]{x|x||xy|(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=$$

$$=x\sqrt[3]{x|x||x||y|}=x\sqrt[3]{x^3|y|}=x\cdot x\cdot\left|\sqrt[3]{y}\right|=x^2\left|\sqrt[3]{y}\right|.$$

Ответ: $x^2\left|\sqrt[3]{y}\right|$.

2.276. $\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$

Решение.

ОДЗ: $a>1$.

$$\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}}{\sqrt{\sqrt{a}-1}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}}{\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}}{\sqrt{\sqrt{a}-1}}-\frac{\sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt{\sqrt{a}+1}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+1-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a-1}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=\left(\frac{2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=$$

$$=\frac{a-1}{4\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)}{4\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}$.

2.277.

$$\left(\frac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+\frac{3\sqrt{b}\left(a^{1/2}-b\right)}{a^{-1/4}\left(a^{1/4}-\sqrt{b}\right)}\right)^{-1/3}:\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq b^2, \\ a>0, \\ b>0. \end{cases}$

$$\left(\frac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+\frac{3\sqrt{b}\left(a^{1/2}-b\right)}{a^{-1/4}\left(a^{1/4}-\sqrt{b}\right)}\right)^{-1/3}:\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[4]{a^3}\sqrt{b}+\sqrt[4]{a}\sqrt{b^3}+\sqrt{b^4}}{\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}\sqrt{b}+\sqrt{b^2}}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+\frac{3\sqrt{b}\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt{b^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}\right)}\right)^{-1/3}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[4]{a}\sqrt{b^3}\right)+\left(\sqrt[4]{a^3}\sqrt{b}+\sqrt{b^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+\frac{3\sqrt[4]{a}\sqrt{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}\right)^{-1/3}\times$$

$$\times\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{b^3}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{b^3}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}}+3\sqrt[4]{a}\sqrt{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\right)^{-1/3}\times$$

$$\times\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}}+3\sqrt[4]{a^2}\sqrt{b}+3\sqrt[4]{a}\sqrt{b^2}\right)^{-1/3}\times$$

$$\times\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt[4]{a^3}+3\sqrt[4]{a^2}\sqrt{b}+3\sqrt[4]{a}\sqrt{b^2}+\sqrt{b^3}\right)^{-1/3}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^3\right)^{-1/3}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=1.$$

Ответ: 1.

2.278. $\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$

Решение.

ОДЗ: $0<n<1$.

$$\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(\sqrt[6]{\left(\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n^3}\right)^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{3n^2}{4(1-2n+n^2)}\right)^2}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^2}=$$

$$=\left(\sqrt[6]{\frac{(1-n)^3(1+n)}{n^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9n^4}{16(1-n)^4}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}}=$$

$$=\left(\sqrt[6]{\frac{(1-n)^3(1+n)\cdot 9n^4}{n^3\cdot 16(1-n)^4}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}}=$$

$$=\left(\sqrt[6]{\frac{9n(1+n)}{16(1-n)}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}}=\sqrt[6]{\frac{16(1-n)\cdot 9n^3}{9n(1+n)\cdot 4(1-n)(1+n)}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{4n^2}{(1+n)^2}}=\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}.$

2.279. $\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right);$

$a > b > 0.$

Решение.

$$\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{\left(3ab-3b^2\right)+\left(a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2-1}}+\frac{\sqrt{ab}\left(4a+9\sqrt{a}\sqrt{b}-9b\right)}{-\frac{1}{2}\left(4\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{3b(a-b)+\sqrt{ab}(a-b)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}-1}}-\frac{2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\left(4\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)}{4\sqrt{a}-3\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{(a-b)\left(3b+\sqrt{ab}\right)}{\frac{1}{4ab}\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2}}-2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\right)=$$

$$=\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{4ab(a-b)\left(3b+\sqrt{ab}\right)}{a^2-b^2}-2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\right)=$$

$$=\frac{a+b}{a-2\sqrt{ab}+b}\cdot 2\sqrt{ab}\left(\frac{2\sqrt{a}\left(3b+\sqrt{ab}\right)}{a+b}-\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{a-2\sqrt{ab}+b}\cdot\frac{6\sqrt{ab}+2a\sqrt{b}-a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-\sqrt{ab}-3b\sqrt{b}}{a+b}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{ab}\left(a\sqrt{a}-5\sqrt{ab}+a\sqrt{b}+3b\sqrt{b}\right)}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{-2\sqrt{ab}\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{a-2\sqrt{ab}+b}=$$

$$=-2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)=-2b\left(a+3\sqrt{ab}\right).$$

Ответ: $-2b\left(a+3\sqrt{ab}\right)$.

2.280. $\dfrac{2a\left(a+2b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)\left(a+4b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a^2+4ab\ge 0, \\ \sqrt{a^2+4ab}\ne -a, \\ \sqrt{a^2+4ab}\ne -a-4b. \end{cases}$

$$\frac{2a\left(a+2b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)\left(a+4b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}=$$

$$=\frac{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)\left(a+4b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2+4ab}}{a+4b+\sqrt{a^2+4ab}}=\frac{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)\left(a+4b-\sqrt{a^2+4ab}\right)}{\left(a+4b+\sqrt{a^2+4ab}\right)\left(a+4b-\sqrt{a^2+4ab}\right)}=$$

$$=\frac{a^2+4ab-a\sqrt{a^2+4ab}+a\sqrt{a^2+4ab}+4b\sqrt{a^2+4ab}-a^2-4ab}{(a+4b)^2-\left(\sqrt{a^2+4ab}\right)^2}=$$

$$=\frac{4b\sqrt{a^2+4ab}}{a^2+8ab+16b^2-a^2-4ab}=\frac{4b\sqrt{a^2+4ab}}{4ab+16b^2}=\frac{4b\sqrt{a^2+4ab}}{4b(a+4b)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a(a+4b)}}{a+4b}=\sqrt{\frac{a(a+4b)}{(a+4b)^2}}=\sqrt{\frac{a}{a+4b}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{a}{a+4b}}$.

2.281. $\left(\dfrac{\left(1+a^{-1/2}\right)^{1/6}}{\left(a^{1/2}+1\right)^{-1/3}}-\dfrac{\left(a^{1/2}-1\right)^{1/3}}{\left(1-a^{-1/2}\right)^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}\cdot a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$

Решение.

ОДЗ: $a>1$.

$$\left(\frac{\left(1+a^{-1/2}\right)^{1/6}}{\left(a^{1/2}+1\right)^{-1/3}}-\frac{\left(a^{1/2}-1\right)^{1/3}}{\left(1-a^{-1/2}\right)^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{1/6}\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)^{1/3}-\left(\sqrt{a}-1\right)^{1/3}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{1/6}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=\left(\sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}-\sqrt[6]{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}}\right)^{-2}\times$$

$$\times\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=\left(\sqrt[6]{\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^3}{\sqrt{a}}}-\sqrt[6]{\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^3}{\sqrt{a}}}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}-\sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt[12]{a}}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+1-2\sqrt{a-1}+\sqrt{a}-1}{\sqrt[6]{a}}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a}}{2\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)}\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}=\frac{\sqrt[12]{a^3}}{6\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a-1}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}}{6(a-a+1)}=\frac{\sqrt[4]{a}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{6}$.

2.282. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)$, $0<x<1$.

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}-\sqrt{(1-x)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1+x-1+x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{x^2}=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-1}{x^2}=$$

$$=\frac{1-x^2-1}{x^2}=-\frac{x^2}{x^2}=-1.$$

Ответ: -1.

2.283. $\frac{\left(pq^{-1}+1\right)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} p\neq 0, \\ q\neq 0, \\ p\neq \pm q. \end{cases}$

$$\frac{\left(pq^{-1}+1\right)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}=$$

$$=\frac{\left(\frac{p}{q}+1\right)^2}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}\cdot\frac{\frac{p^3}{q^3}-1}{\frac{p^2}{q^2}+\frac{p}{q}+1}:\frac{\frac{p^3}{q^3}+1}{\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-1}=$$

$$=\frac{\left(\frac{p+q}{q}\right)^2}{\frac{p^2-q^2}{pq}}\cdot\frac{\frac{p^3-q^3}{q^3}}{\frac{p^2+pq+q^2}{q^2}}:\frac{\frac{p^3+q^3}{q^3}}{\frac{p^2-pq+q^2}{pq}}=$$

$$=\frac{(p+q)^2}{q^2}\cdot\frac{pq}{p^2-q^2}\cdot\frac{p^3-q^3}{q^3}\cdot\frac{q^2}{p^2+pq+q^2}:\left(\frac{p^3+q^3}{q^3}\cdot\frac{pq}{p^2-pq+q^2}\right)=$$

$$=\frac{(p+q)^2p}{q(p+q)(p-q)}\cdot\frac{(p-q)\left(p^2+pq+q^2\right)}{q\left(p^2+pq+q^2\right)}:\left(\frac{(p+q)\left(p^2-pq+q^2\right)p}{q^2\left(p^2-pq+q^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{p(p+q)}{q^2}:\frac{p(p+q)}{q^2}=1.$$

Ответ: 1.

2.284. $\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}};\ y=\sqrt{ab}.$

Решение.

ОДЗ: $ab>0$.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}\right)\left(\sqrt{(a+y)(y+b)}+\sqrt{(a-y)(y-b)}\right)}{\left(\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}\right)\left(\sqrt{(a+y)(y+b)}+\sqrt{(a-y)(y-b)}\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}\right)^2}{\left(\sqrt{(a+y)(y+b)}\right)^2-\left(\sqrt{(a-y)(y-b)}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a-y)(y-b)+2\sqrt{\left(a^2-y^2\right)\left(y^2-b^2\right)}+(a+y)(y+b)}{(a+y)(y+b)-(a-y)(y-b)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-y^2+(a+b)y-ab+2\sqrt{-y^4+\left(a^2+b^2\right)y^2-a^2b^2}+y^2+(a+b)y+ab}{y^2+(a+b)y+ab+y^2-(a+b)y+ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2(a+b)y+2\sqrt{-y^4+\left(a^2+b^2\right)y^2-a^2b^2}}{2y^2+2ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)y+\sqrt{-y^4+\left(a^2+b^2\right)y^2-a^2b^2}}{y^2+ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{-a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)ab-a^2b^2}}{ab+ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{\left(a^2+b^2\right)ab-2a^2b^2}}{2ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{ab\left(a^2-2ab+b^2\right)}}{2ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{ab}\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2}\right)}{2ab}}=\sqrt{\frac{a+b+|a-b|}{2\sqrt{ab}}}=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a+b-a+b}{2\sqrt{ab}}}=\sqrt{\dfrac{2b}{2\sqrt{ab}}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}=\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}, \text{если } 0<a<b;\\ \sqrt{\dfrac{a+b+a-b}{2\sqrt{ab}}}=\sqrt{\dfrac{2a}{2\sqrt{ab}}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}, \text{если } 0<b<a.\end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$ при $0<b<a$; $\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$ при $0<a<b$.

2.285. Упростить выражение $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, а затем построить график функции y для $1\le x<\infty$.

Решение.

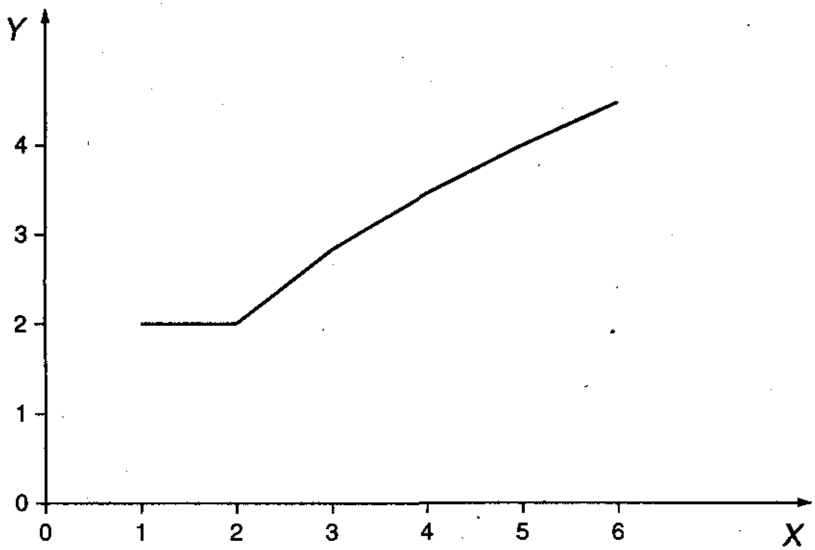
ОДЗ: $x\ge 0$.

$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=$

$=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=$

$$=\begin{cases}\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2, \text{ если } 1\le x\le 2;\\ \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}, \text{ если } x>2.\end{cases}$$



Ответ: $y = \begin{cases} 2 \text{ при } 1 \le x \le 2; \\ 2\sqrt{x-1} \text{ при } x > 2. \end{cases}$

2.286. При каком значении k многочлен $x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4)$ можно представить в виде полного квадрата?

Решение.

Многочлен $x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4)$ можно представить в виде полного квадрата, если дискриминант равен нулю, т.е. $(2(k-9))^2 - 4(k^2 + 3k + 4) = 0$, $\quad 4(k^2 - 18k + 81 - k^2 - 3k - 4) = 0$,

$-21k + 77 = 0$, откуда $k = \dfrac{77}{21} = \dfrac{11}{3}$.

Ответ: $\dfrac{11}{3}$.

2.287. При каких значениях a и b трехчлен $16x^2 + 144x + (a+b)$ представляет собой полный квадрат, если известно, что $b - a = -7$?

Решение.

Трехчлен $16x^2 + 144x + (a+b)$ представляет собой полный квадрат при $b - a = -7$, если дискриминант равен нулю, т.е.

$$\begin{cases} b - a = -7, \\ 144^2 - 4 \cdot 16(a+b) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} b - a = -7, \\ b + a = 324, \end{cases} \Rightarrow a = 165{,}5;\ b = 158{,}5.$$

Ответ: $a = 165{,}5$; $b = 158{,}5$.

2.288. Проверить, что число $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$ является корнем уравнения $x^3 + 12x - 8 = 0$.

Решение.

Пусть $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4} = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$.

Подставив это значение x в уравнение, получим

$$\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}\right)^3 + 12\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}\right) - 8 = 0,$$

$$\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^3+12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)-8=0,$$
$$4+\sqrt{80}+3\sqrt[3]{\left(4+\sqrt{80}\right)\left(4-\sqrt{80}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)+4-\sqrt{80}+$$
$$+12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)-8=0,$$
$$4+\sqrt{80}+3\sqrt[3]{16-80}\cdot\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)+4-\sqrt{80}+$$
$$+12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)-8=0,$$
$$4+\sqrt{80}-12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)+4-\sqrt{80}+$$
$$+12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)-8=0,$$
$$0=0.$$

2.289. Многочлен x^8-16 представить в виде произведения многочленов второй степени.

Решение.

$$x^8-16=\left(x^4-4\right)\left(x^4+4\right)=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(x^4+4x^2+4-4x^2\right)=$$
$$=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(\left(x^2+2\right)^2-4x^2\right)=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2\right)=$$
$$=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2-2x+2\right)\times$$
$$\times\left(x^2+2x+2\right)$$

Ответ: $\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

2.290. Исключив u и v из равенств $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$, найти соотношение между a, b и c.

Решение.

$$\begin{cases}u-v=a,\\ u^2-v^2=b,\\ u^3-v^3=c,\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=a, & (1)\\ (u-v)(u+v)=b, & (2)\\ (u-v)\left((u+v)^2-uv\right)=c. & (3)\end{cases}$$

Подставив $u-v=a$ из (1) в (2), получим $a(u+v)=b$, откуда $u+v=\frac{b}{a}$ (2*). Сложив (1) с (2*), запишем

$$+\begin{cases} u-v=a \\ u+v=\dfrac{b}{a} \\ \hline 2u=a+\dfrac{b}{a} \end{cases}, \text{ откуда } u=\frac{a^2+b}{2a} \ (4).$$

Вычтя (1) из (2*), будем иметь

$$-\begin{cases} u+v=\dfrac{b}{a} \\ u-v=a \\ \hline 2u=\dfrac{b}{a}-a \end{cases}, \text{ откуда } v=\frac{b-a^2}{2a} \ (5).$$

Умножив (4) на (5), получим $uv=\frac{a^2+b}{2a}\cdot\frac{b-a^2}{2a}=-\frac{a^4-b^2}{4a^2}$ (6). Подставив значения $u-v=a$ из (1), $u+v=\frac{b}{a}$ из (2*) и $uv=-\frac{a^4-b^2}{4a^2}$ из (6) в (3), найдем $a\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^4-b^2}{4a^2}\right)=c$, или $\frac{b^2}{a}+\frac{a^4-b^2}{4a}=c$, или $4b^2+a^4-b^2=4ac$, или $3b^2+a^4=4ac$.

Ответ: $3b^2+a^4=4ac$.

Проверить справедливость равенств **(2.291 – 2.304):**

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Решение.

Возведем обе части равенства в куб. Получим

$$9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)=27$$

(1). Так как по условию $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$, то равенство (1) приобретет вид $18+3\sqrt[3]{81-80}\cdot 3=27$, $18+3\cdot 1\cdot 3=27$, $27=27$.

2.292. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}$.

Решение.

Возведем обе части заданного равенства в квадрат. Получим

$$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{\left(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}+8-$$

$$-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=20-4\sqrt{5},\ \ 16-2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}=20-4\sqrt{5},$$

$$16-2\sqrt{64-40-8\sqrt{5}}=20-4\sqrt{5},\ \ 16-2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=20-4\sqrt{5},$$

$$4\sqrt{5}-4=2\sqrt{24-8\sqrt{5}},\ \ 2\sqrt{5}-2=\sqrt{24-8\sqrt{5}}.$$

Возведя последнее равенство в квадрат, получим $24-8\sqrt{5}=24-8\sqrt{5}$.

2.293. $\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}\right)+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}$.

Решение.

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}\right)+\sqrt[6]{5}=$$

$$=\left(\frac{3\left(\sqrt[3]{64^2}+\sqrt[3]{64\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{64^2}+\sqrt[3]{64\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}+\frac{\sqrt[3]{40}\left(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}-\frac{10\cdot\sqrt[3]{25^2}}{\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{25^2}}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}+\sqrt[6]{5}=\left(\frac{3\left(16+4\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt[3]{5}\right)}{64-25}+\frac{2\sqrt[3]{5}\left(4-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{8+5}-\frac{50\sqrt[3]{5}}{25}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}+\sqrt[6]{5}=$$

$$=\left(\frac{3\left(16+4\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt[3]{5}\right)}{39}+\frac{2\sqrt[3]{5}\left(4-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{13}-2\sqrt[3]{5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}+\sqrt[6]{5}=$$

$$=\frac{16+4\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{5}+10-26\sqrt[3]{5}}{13}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}+\sqrt[6]{5}=\frac{2-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}+\sqrt[6]{5}=$$

$$=\frac{2-\sqrt[3]{5}+\sqrt[6]{40}+\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}=\frac{2-\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}=\frac{2+\sqrt{2}\sqrt[6]{5}}{\sqrt{2}+\sqrt[6]{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt[6]{5}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt[6]{5}}=\sqrt{2}.$$

2.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}6m+2\sqrt{9m^2-n^2}\ge 0,\\ 6m-2\sqrt{9m^2-n^2}\ge 0,\\ 3m-n\ge 0,\\ 3m+n\ge 0,\end{cases}$ $\begin{cases}m>0,\\ n\le 3m.\end{cases}$

$$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$$

$$=\sqrt{3m+n+2\sqrt{(3m+n)(3m-n)}+3m-n}-$$

$$-\sqrt{3m+n-2\sqrt{(3m+n)(3m-n)}+3m-n}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}-\left|\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n}\right|=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}+\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n}=2\sqrt{3m+n} \text{ для } n<0,\\ \sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}-\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}=2\sqrt{3m-n} \text{ для } n\ge 0.\end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем $2\sqrt{3m-n}=2\sqrt{3m-n}$.

Ответ: верно для всех $n\in[0;3m]$, $m>0$.

2.295. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Решение.

Пусть $a=\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $a>0$, $b>0$, то $a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$. Имеем

$$a^2=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}\right)}=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)}=\frac{1}{2};$$

$b^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$. $a^2=b^2\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и заданное равенство справедливо.

2.296. $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}=2\sqrt{a-1}.$

Решение.

ОДЗ: $1\le a\ne 2$.

$$\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^{-1/3}}+\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}=\frac{\sqrt[3]{a-1+2\sqrt{a-1}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}}}+$$

$$+\frac{\sqrt[3]{a-1-2\sqrt{a-1}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{a-1}-1}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}+$$

$$+\sqrt[3]{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}-1}=\sqrt{a-1}+1+\sqrt{a-1}-1=2\sqrt{a-1}.$$

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1.$

Решение.

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}=$$
$$=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt[3]{\left(26+15\sqrt{3}\right)\left(26-15\sqrt{3}\right)}=\sqrt[3]{26^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[3]{676-675}=$$
$$=\sqrt[3]{1}=1.$$

2.298. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{16+8\sqrt{5}+5}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5-4\sqrt{5}+4}=$$
$$=\frac{\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)=\sqrt{5}-2.$$

2.299. $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

Решение.

$$\frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=\frac{4-4\sqrt{3}+3}{\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=2-\sqrt{3}.$$

2.300. $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

Решение.

$$\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}\right)^3=\left(\frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}\right)^3;\quad \frac{16}{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}=\frac{20+12\sqrt{3}}{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}};$$
$$\frac{16}{10+6\sqrt{3}}=\frac{20+12\sqrt{3}}{26+15\sqrt{3}};\quad \frac{16}{2\left(5+3\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(5+3\sqrt{3}\right)}{26+15\sqrt{3}};\quad \frac{2}{5+3\sqrt{3}}=\frac{5+3\sqrt{3}}{26+15\sqrt{3}};$$

$2\left(26+15\sqrt{3}\right)=\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(5+3\sqrt{3}\right);\quad 52+30\sqrt{3}=25+30\sqrt{3}+27;$

$52+30\sqrt{3}=52+30\sqrt{3}.$

Что и требовалось доказать.

2.301. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3\cdot2}+2}\cdot\left(3+2\sqrt{3\cdot2}+2\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{9\cdot3}-3\sqrt{9\cdot2}+3\sqrt{4\cdot3}-\sqrt{4\cdot2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\left(49-20\sqrt{6}\right)}{3\sqrt{3}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\left(49-20\sqrt{6}\right)}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\cdot\left(49\sqrt{3}-20\sqrt{18}+49\sqrt{2}-20\sqrt{12}\right)}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(3-2)\left(49\sqrt{3}-20\sqrt{9\cdot2}+49\sqrt{2}-20\sqrt{4\cdot3}\right)}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{49\sqrt{3}-60\sqrt{2}+49\sqrt{2}-40\sqrt{3}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=1.$$

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

Решение.

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[3]{27+27\sqrt{2}+18+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}=3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

2.303. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

Решение.

$$\frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=\frac{9-6\sqrt{2}+2}{\sqrt[3]{27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2}}}=\frac{(3-\sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3}}=\frac{(3-\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})}=$$

$$=3-\sqrt{2}.$$

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=2\sqrt{5p-q}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}10p+2\sqrt{25p^2-q^2}\ge 0,\\10p-2\sqrt{25p^2-q^2}\ge 0,\\25p^2-q^2\ge 0,\\5p-q\ge 0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}p>0,\\-5\le q\le 5p.\end{cases}$$

$$\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=$$

$$=\sqrt{5p+q+2\sqrt{(5p+q)(5p-q)}+5p-q}-$$

$$-\sqrt{5p+q-2\sqrt{(5p+q)(5p-q)}+5p-q}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q})^2}-\sqrt{(\sqrt{5p+q}-\sqrt{5p-q})^2}=$$

$$=\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}-\left|\sqrt{5p+q}-\sqrt{5p-q}\right|=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}+\sqrt{5p+q}-\sqrt{5p-q}=2\sqrt{5p+q}\text{ для }q<0,\\\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}-\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}=2\sqrt{5p-q}\text{ для }p\ge 0.\end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, имеем $2\sqrt{5p-q}$ для $\begin{cases}0\le q\le 5p,\\p>0.\end{cases}$

Ответ: верно для всех $q\in[0;5p]$, $p>0$.

2.305. Преобразованием левой части проверить, что:

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=$

$=\sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}}=$

$=\sqrt[3]{\left(1+2\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-2\sqrt{2}\right)^3}=1+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}=2$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}}=$

$=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}}=\sqrt{3+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$.

Таким образом, справедливость равенств а) и б) доказана.

2.306. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

Решение.

По условию $x^3-y^3=19$, где $x-y=n$; $x,y,n\in N$, поэтому $19=x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=n\cdot m$, $m=x^2+xy+y^2$. Так как $y\geq 1$, то $x>2$ и $m>7$, поэтому $n<3$. Так как 19 – нечетное, то $n\neq 2$. Единственное возможное значение $n=1$, $x=y+1$.

$(y+1)^2+y(y+1)+y^2=19\Leftrightarrow y^2+y-6=0$, $y_1=2$, $y_2=-3$ — не подходит по условию задачи. Если $y=2$, то $x=3$ и $x^3-y^3=27-8=19$.

Единственность очевидна из вышеприведенных рассуждений.

Ответ: 3^3-2^3.

2.307. Преобразовать сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ к наиболее простому виду.

Решение.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)},\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{An+A+Bn}{n(n+1)},$$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$, откуда $1=(A+B)n+A$. Это равенство справедливо для любых n, поэтому если $n=0$, то $A=1$; если $n=-1$, то $-B=1$, $B=-1$.

Получили $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Далее,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Ответ: $\frac{n}{n+1}$.

2.308. Показать, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

Решение.

$$\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+B(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$$

$=\frac{An+A+Bn+2B}{n^2+3n+2}=\frac{(A+B)n+A+2B}{n^2+3n+2}$, откуда $(A+B)n+A+2B=1$.

Многочлены тождественно равны, если коэффициенты при соответствующих степенях неизвестного равны. Отсюда

$$\begin{cases}A+B=0,\\ A+2B=1,\end{cases}\ \begin{cases}A=-B,\\ -B+2B=1,\end{cases}\ \begin{cases}A=-B,\\ B=1,\end{cases}\ \begin{cases}A=-1,\\ B=1.\end{cases}$$

Получили $\frac{1}{n^2+3n+2}=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}$. Далее,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-2}{2(n+2)}=\frac{n}{2n+4}.$$

2.309. Доказать, что если $a+b=1$, то $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

Решение.

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a(a^3-1)-b(b^3-1)}{(b^3-1)(a^3-1)}=\frac{a^4-a-b^4+b}{a^3b^3-a^3-b^3-1}=$$

$$=\frac{(a^4-b^4)-(a-b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)+1}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)((a+b)^2-2ab)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)((a+b)^2-3ab)+1}=\frac{(a-b)(((a+b)(a+b)^2-2ab)-1)}{a^3b^3-(a+b)((a+b)^2-3ab)+1}=$$

$$=\frac{(a-b)(1-2ab-1)}{a^3b^3-1+3ab+1}=\frac{(a-b)(-2ab)}{a^2b^3+3ab}=\frac{(b-a)\cdot 2ab}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

2.310. Определить A, B и C так, чтобы для всех допустимых значений x имело место равенство $\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq -2, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A(x-1)^2+B(x+2)+C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx+2B+Cx^2+Cx-2C}{x^3-3x+2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(-2A+B+C)x+A+2B-2C}{x^3-3x+2},$$

откуда $(A+C)x^2+(-2A+B+C)x+A+2B-2C=x^2+5$.

Многочлены тождественно равны, если коэффициенты при соответствующих степенях x равны. Отсюда

$$\begin{cases} A+C=1, \\ -2A+B+C=0, \Rightarrow C=1-A \text{ и} \\ A+2B-2C=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2A+B+1-A=0, \\ A+2B-2(1-A)=5, \end{cases} \begin{cases} -3A+B=-1, \\ 3A+2B=7. \end{cases} \Rightarrow A=1, B=2, C=1-1=0.$$

Ответ: $A=1$, $B=2$, $C=0$.

2.311. Доказать, что: а) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9; б) число p^5-p делится на 5 при любом натуральном значении p; в) число k^3+5k делится на 3 при $k \in N$.

Решение.

Среди k последовательных целых чисел одно всегда делится на k.

а) Среди трех последовательных натуральных чисел $n-1$, n, $n+1$ одно всегда делится на 3. Имеем

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=$$
$$=3n^3+6n=3n(n^2+2)=3n(n^2-1+3)=3(n-1)n(n+1)+9n=3m+9n.$$

$m \vdots 3 \Rightarrow 3m \vdots 9$ и сумма делится на 9.

б) Среди пяти последовательных целых чисел одно всегда делится на 5. Имеем

$$p^5-p=(p^4-1)p=(p^2-1)(p^2+1)p=(p-1)p(p+1)(p^2+1)=$$
$$=(p-1)p(p+1)(p^2-4+5)=(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)+5(p-1)p(p+1).$$

Первое слагаемое делится на 5 как произведение пяти последовательных целых чисел, а значит, и сумма кратна пяти.

в) $k^3+5k=k(k^2+5)=k(k^2-1+6)=(k-1)k(k+1)+6k$.

Первое слагаемое делится на 3 как произведение трех последовательных целых чисел, а значит, и сумма кратна трем.

Что и требовалось доказать.

Решения к главе 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \tag{3.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z \tag{3.6}$$

(здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n — любое целое число).

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	**Функция**			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0^\circ\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15^\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75^\circ\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Знаки функций по четвертям

Таблица 3.2

Четверти	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{3.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{3.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{3.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{3.10}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{3.11}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{3.12}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{3.13}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,. \tag{3.14}$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,; \tag{3.15}$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\,; \tag{3.16}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\,; \tag{3.17}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\pi n, n\in Z\,; \tag{3.18}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\,; \tag{3.19}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,; \tag{3.20}$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z\,; \tag{3.21}$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{ctg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{3}, n\in Z\,. \tag{3.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,; \tag{3.23}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,; \tag{3.24}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi(2n+1), n\in Z\,; \tag{3.25}$$

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq 2\pi n, n\in Z\,; \tag{3.26}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z\,; \tag{3.27}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z\,. \tag{3.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \qquad (3.32)$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\alpha\right); \qquad (3.33)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(45^\circ-\alpha\right); \qquad (3.34)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.36)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.37)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.38)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.39)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z; \qquad (3.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z; \qquad (3.42)$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.43)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.44)$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.45)$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.46)$$

$$1+\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.47)$$

$$1-\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.48)$$

$$1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.49)$$

$$1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.50)$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.51)$$

$$1-\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.52)$$

$$1-\mathrm{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos2\alpha}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.53)$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.54)$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.55)$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (3.56)$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \qquad (3.57)$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right); \qquad (3.58)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right); \qquad (3.59)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right); \qquad (3.60)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \quad (3.61)$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \quad (3.62)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right); \quad (3.63)$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right). \quad (3.64)$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha\neq\pi(2n+1), \quad n\in Z; \qquad (3.65)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha\neq\pi(2n+1), \quad n\in Z; \qquad (3.66)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha,\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{3.67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{3.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\ &\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\ &\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ &\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ &\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ &\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z;\end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ &\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ &\operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.\end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Обратные тригонометрические функции

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.73}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.74}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.75}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.76}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.77}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.78}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.79}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.80}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \tag{3.81}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.82}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \tag{3.83}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x < 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.84}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \tag{3.85}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.86}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.87}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1; \tag{3.88}$$

$$\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если}\quad 0\le x\le 1,\\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если}\quad -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.89}$$

$$\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1; \tag{3.90}$$

$$\arcsin x=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi, & \text{если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.91}$$

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.92}$$

$$\arccos x=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.93}$$

$$\arccos x=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad -1<x<1; \tag{3.94}$$

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad -\infty<x<\infty; \tag{3.95}$$

$$\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если}\quad x\ge 0,\\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если}\quad x<0;\end{cases} \tag{3.96}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.97}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x > 0, \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.98}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x \ge 0, \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.99}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.100}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1\,; \tag{3.101}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty\,; \tag{3.102}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \le 0 \text{ или } x^2 + y^2 \le 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \tag{3.103}$$

$$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } xy\geq 0 \text{ или } x^2+y^2\leq 1;\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1;\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;\end{cases} \tag{3.104}$$

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x+y\geq 0;\\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x+y<0;\end{cases} \tag{3.105}$$

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x\geq y;\\ \arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x<y;\end{cases} \tag{3.106}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy<1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x>0 \text{ и } xy>1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x<0 \text{ и } xy>1;\end{cases} \tag{3.107}$$

$$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } xy>-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } x>0 \text{ и } xy<-1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } x<0 \text{ и } xy<-1;\end{cases} \qquad (3.108)$$

Доказать тождества (**3.186—3.239**):

3.186. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

Решение.

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)-1}=$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}.$$

Тождество доказано.

3.187. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

Решение.

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=$$

$$=4\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2\right)=4\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=$$

$$=3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=3\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha=$$

$$=3-3\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=3-4\sin^2\alpha=$$

$$=\frac{\left(3-4\sin^2\alpha\right)\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.188. $\sin^{-1}2\alpha\sin^{-1}(60°-2\alpha)\sin^{-1}(60°+2\alpha)=4\sin^{-1}6\alpha.$

Решение.

$$\sin^{-1}2\alpha\sin^{-1}(60°-2\alpha)\sin^{-1}(60°+2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\sin 2\alpha\sin(60°-2\alpha)\sin(60°+2\alpha)}=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\sin 2\alpha(\cos 4\alpha-\cos 120°)}=\frac{2}{\sin 2\alpha\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sin 2\alpha\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=\frac{4}{2\sin 2\alpha\cos 4\alpha+\sin 2\alpha}=$$

$$=\left[\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{4}{-\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{4}{\sin 6\alpha}=4\sin^{-1}6\alpha.$$

Тождество доказано.

3.189. $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{15}{2}\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 6\alpha+\cos 9\alpha)-(\cos 7\alpha+\cos 8\alpha)}{(\sin 6\alpha+\sin 9\alpha)-(\sin 7\alpha+\sin 8\alpha)}=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\cos\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{15\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{15\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{15\alpha}{2}}{\sin\frac{15\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{15\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.190. $\dfrac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=$$

$$=\frac{(\sin(3\pi-4\alpha))^2+4\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2-4}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)^2-4\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2}=\frac{\sin^2 4\alpha+4\sin^2 2\alpha-4}{\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+4\left(1-\cos^2 2\alpha\right)-4}{4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha-4\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1-\cos^2 2\alpha\right)\cos^2 2\alpha+1-\cos^2 2\alpha-1}{\sin^2 2\alpha\left(1-\sin^2 2\alpha\right)-\sin^2 2\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha-\cos^4 2\alpha-\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha-\sin^4 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{-\cos^4 2\alpha}{-\sin^4 2\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.191. $$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}=\frac{1}{8}.$$

Решение.

$$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\left(-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)}{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}\cdot\left(\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2-\left(-\operatorname{tg}\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)}{\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)^2\right)-\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{3\alpha}{4}\right)}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{4}-\mathrm{ctg}^2\frac{3\alpha}{4}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\frac{\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\right)}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}-\frac{\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{3\alpha}{4}+\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}{\frac{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}-\cos^2\frac{3\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}-\cos^2\frac{3\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\left(4\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{4\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{8\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{1}{8}.$$

Тождество доказано.

3.192. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\sin(4\pi+\alpha)\right)\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\sin(4\pi+\alpha)\right)\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot(1+\sin\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}-2\cos 2\alpha}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot(1+\sin\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}+2\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot(1+\sin\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}-2\cos 2\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot(1+\sin\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}+2\cos 2\alpha}=\frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}=\frac{2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha-\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha-\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)=\sin x\sin y;\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)=\cos x\cos y\right]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Тождество доказано.

3.193. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$

Решение.

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Тождество доказано.

3.194. $\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

Решение.

$$\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}-1=\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Тождество доказано.

3.195. $1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

Решение.

По формулам $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$, $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$, имеем:

$$1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Тождество доказано.

3.196. $$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Решение.

$$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{-(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-(1+\sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-(1+\sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{-(1+\sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-(1+\sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{-(1+\sin\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-(1+\sin\alpha)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+\sin\alpha)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-(1+\sin\alpha)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=-\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=-\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=$$

$$=-\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тождество доказано.

3.197. $\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=$

$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=$$

$$=\frac{(-\operatorname{ctg}(\pi-2\alpha))^2}{1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)\right)^2}-3\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2=\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}-3\sin^2 2\alpha=$$

$$=\frac{\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}{1+\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}-3\sin^2 2\alpha=\frac{\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}{\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}-3\sin^2 2\alpha=$$

$$=\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha=\cos^2 2\alpha-3\left(1-\cos^2 2\alpha\right)=$$

$$=\cos^2 2\alpha-3+3\cos^2 2\alpha=4\cos^2 2\alpha-3=4\left(\cos^2 2\alpha-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=4\left(\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=4\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\Bigg[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\Bigg]=4\left(-2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\times$$

$$\times 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=-4\left(2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\right)\times$$

$$\times\left(2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)=-4\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$$

Тождество доказано.

$$\mathbf{3.198.}\quad \frac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

Решение.

$$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{4(\cos(\pi-\alpha))^2-4\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2+3\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2}{4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha-4\cos^2\frac{\alpha}{2}+3\sin^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}=\frac{4\left(\cos 2\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\cos^2\frac{\alpha}{2}+3\left(\sin 2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(\sin 2\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{4\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+3\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}+12\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4-16\sin^2\frac{\alpha}{2}+16\sin^4\frac{\alpha}{2}-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}+12\sin^2\frac{\alpha}{2}-12\sin^4\frac{\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\sin^4\frac{\alpha}{2}}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.199. $1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$

Решение.

$$1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=1-\cos(\pi-2\alpha)+\cos(2\pi-4\alpha)=$$

$$=1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=1+\cos 2\alpha+\cos 2(2\alpha)=1+\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1=$$

$$=\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha=2\cos 2\alpha\left(\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right)=2\cos 2\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\right)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.200. $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\left(\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=2.$

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\left(\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2\left(\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\right)^{-2}=$$

$$=\cos^2\alpha\left(\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)^{-2}=$$

$$=-\cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=-\frac{\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}\cdot\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}}=\frac{\cos 2\alpha}{\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}\cdot\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2}}=2.$$

Тождество доказано.

3.201. $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=$$

$$=\frac{\left(\cos(\pi-\alpha)\right)^4}{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^4+\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^4-1}=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{\cos^4\alpha}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=-\frac{\cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=-\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi-\pi}{4}-\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)=-\operatorname{tg}\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)(1-\sin 2\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)(1-\sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha-\sin\alpha}=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$

Тождество доказано.

3.203. $\dfrac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{\dfrac{\cos 4\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \sin 4\alpha}{\dfrac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}}{\dfrac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} \times$$

$$\times \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha} = [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y);$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)] =$$

$$= \frac{\sin(-2\alpha)\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 2\alpha} = -\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right) + \cos^{-1}(4\alpha - 3\pi) = \operatorname{ctg}\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(4\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos^{-1}(4\alpha - 3\pi) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - 4\alpha\right) + \frac{1}{\cos(3\pi - 4\alpha)} =$$

$$= -\operatorname{tg} 4\alpha - \frac{1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 4\alpha + 1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 2(2\alpha) + 1}{\cos 2(2\alpha)} =$$

$$= -\frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$$

$$= -\frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = -\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} =$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}}{\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left[\cos\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y);\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\right]=$$

$$=\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Тождество доказано.

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Решение.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$

$$=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin\gamma-(\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma)=$$

$$=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)\right]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+(\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma))=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\left(-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.206. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

Решение.

$$\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{1+\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{1-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha}{-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha}=\frac{\sqrt{3}\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}{\sqrt{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 4\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 4\alpha\cdot\frac{1}{2}}{\sin 4\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 4\alpha\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sin 4\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{6}}{\sin 4\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left[\sin x\cos y\pm\cos x\sin y=\sin(x\pm y)\right]=\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Тождество доказано.

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

Решение.

$$3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=3-4\cos(3\pi-4\alpha)-\cos(5\pi+8\alpha)=$$

$$=3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha=3+4\cos2(2\alpha)+\cos2(4\alpha)=$$

$$=3+4\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)+2\cos^2 4\alpha-1=3+8\cos^2 2\alpha-4+2(\cos4\alpha)^2-1=$$

$$=8\cos^2 2\alpha+2(\cos2(2\alpha))^2-2=8\cos^2 2\alpha+2\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)^2-2=$$

$$=8\cos^2 2\alpha+2\left(4\cos^4 2\alpha-4\cos^2 2\alpha+1\right)-2=$$

$$=8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2-2=8\cos^4 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.208. $\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

Решение.

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=$$

$$=\frac{1+\cos(630^\circ+2\alpha)+\sin(810^\circ+2\alpha)}{1-\cos(630^\circ-2\alpha)+\sin(630^\circ+2\alpha)}=\frac{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha-\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тождество доказано.

3.209. $\dfrac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\frac{3+4\cos 2(2\alpha)+\cos 2(4\alpha)}{3-4\cos 2(2\alpha)+\cos 2(4\alpha)}=$$

$$=\frac{3+4\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)+2\cos^2 4\alpha-1}{3-4\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)+2\cos^2 4\alpha-1}=$$

$$=\frac{3+8\cos^2 2\alpha-4+2\left(\cos 2(2\alpha)\right)^2-1}{3-8\cos^2 2\alpha+4+2\left(\cos 2(2\alpha)\right)^2-1}=$$

$$=\frac{8\cos^2 2\alpha+2\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)^2-2}{-8\cos^2 2\alpha+2\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)^2+6}=$$

$$=\frac{8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2-2}{-8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2+6}=$$

$$=\frac{8\cos^4 2\alpha}{8\cos^4 2\alpha-16\cos^2 2\alpha+8}=\frac{8\cos^4 2\alpha}{8\left(\cos^4 2\alpha-2\cos^2 2\alpha+1\right)}=$$

$$=\frac{\cos^4 2\alpha}{\left(\cos^2 2\alpha-1\right)^2}=\frac{\cos^4 2\alpha}{\left(1-\cos^2 2\alpha\right)^2}=\frac{\cos^4 2\alpha}{\left(\sin^2 2\alpha\right)^2}=\frac{\cos^4 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\dfrac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$

Решение.

$$3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=$$

$$=3+4\sin\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi+8\alpha\right)=3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=$$

$$= 3-4\cos 2(2\alpha)+\cos 2(4\alpha) = 3-4\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)+2\cos^2 4\alpha - 1 =$$

$$= 3-4+8\sin^2 2\alpha+2(\cos 4\alpha)^2-1 = 8\sin^2 2\alpha+2(\cos 2(2\alpha))^2-2=$$

$$= 8\sin^2 2\alpha+2\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)^2-2=$$

$$= 8\sin^2 2\alpha+2\left(1-4\sin^2 2\alpha+4\sin^4 2\alpha\right)-2=$$

$$= 8\sin^2 2\alpha+2-8\sin^2 2\alpha+8\sin^4 2\alpha-2 = 8\sin^4 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha = 3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

Решение.

$$\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha = \frac{1}{\cos^6\alpha}-\frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\frac{1-\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\frac{1-\left(\sin^2\alpha\right)^3}{\cos^2\alpha\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)}{\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos^4\alpha}=\frac{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{1+3\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{3\sin^2\alpha+\left(1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)}{\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{3\sin^2\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)^2}{\cos^4\alpha}=\frac{3\sin^2\alpha+\left(\cos^2\alpha\right)^2}{\cos^4\alpha}=\frac{3\sin^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}+1=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$$

Тождество доказано.

3.212. $\dfrac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha}.$

Решение.

$$\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{\cos 4\alpha}{1-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2(2\alpha)}{\cos^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.213. $$\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=-1.$$

Решение.

$$\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^2(90^\circ+(45^\circ-\alpha))-\sin^2(180^\circ+(30^\circ-\alpha))-\sin(180^\circ+15^\circ)\cos(180^\circ-(15^\circ+2\alpha))}{\cos^2(270^\circ-(45^\circ-\alpha))-\cos^2(180^\circ+(30^\circ-\alpha))+\sin 15^\circ\sin(90^\circ-(15^\circ+2\alpha))}=$$

$$=\frac{(\sin(90^\circ+(45^\circ-\alpha)))^2-(\sin(180^\circ+(30^\circ-\alpha)))^2-\sin(180^\circ+15^\circ)\cos(180^\circ-(15^\circ+2\alpha))}{(\cos(270^\circ-(45^\circ-\alpha)))^2-(\cos(180^\circ+(30^\circ-\alpha)))^2+\sin 15^\circ\sin(90^\circ-(15^\circ+2\alpha))}=$$

$$=\frac{\cos^2(45^\circ-\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}{\sin^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}=$$

$$=\frac{1-\sin^2(45^\circ-\alpha)-1+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}{\sin^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}=$$

$$=\frac{-\sin^2(45^\circ-\alpha)+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}{\sin^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}=$$

$$=\frac{-\left(\sin^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)\right)}{\sin^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)}=-1.$$

Тождество доказано.

3.214. $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}-\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right).$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)}{\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}-\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)}=\frac{\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{ctg}\alpha+2+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha+2+\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}}{\mathrm{ctg}\alpha-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}}=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha+2\mathrm{ctg}\alpha+1}{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\mathrm{ctg}\alpha+1)^2}{(\mathrm{ctg}\alpha+1)(\mathrm{ctg}\alpha-1)}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha+1}{\mathrm{ctg}\alpha-1}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha}=$$

$=[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y);$

$\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)]=$

$$=\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=$$

$$=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha-2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\left[\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\right]=$$

$$=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha-(2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2\beta\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\right)+\left(\cos^2\beta\sin^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\right)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)+\cos\beta\sin\alpha(\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)+\cos\beta\sin\alpha(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\right]=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)+\cos\beta\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{-\sin\beta\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Тождество доказано.

3.216. $\sin2\alpha(2\cos4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30°-2\alpha)\operatorname{ctg}(30°+2\alpha)=$

$=\sin6\alpha\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}6\alpha.$

Решение.

$\sin2\alpha(2\cos4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30°-2\alpha)\operatorname{ctg}(30°+2\alpha)=$

$$=\sin2\alpha(2\cos2(2\alpha)+1)\cdot\frac{\cos(30°-2\alpha)\cos(30°+2\alpha)}{\sin(30°-2\alpha)\sin(30°+2\alpha)}=$$

$=[\cos2x=1-2\sin^2x,\ \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y]=$

$=\sin2\alpha\left(2\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)+1\right)\times$

$$\times\frac{(\cos30°\cos2\alpha+\sin30°\sin2\alpha)(\cos30°\cos2\alpha-\sin30°\sin2\alpha)}{(\sin30°\cos2\alpha-\cos30°\sin2\alpha)(\sin30°\cos2\alpha+\cos30°\sin2\alpha)}=$$

$$=\sin2\alpha\left(2-4\sin^2 2\alpha+1\right)\cdot\frac{\cos^2 30°\cos^2 2\alpha-\sin^2 30°\sin^2 2\alpha}{\sin^2 30°\cos^2 2\alpha-\cos^2 30°\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\sin2\alpha\left(3-4\sin^2 2\alpha\right)\cdot\frac{\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2 2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\left(3\sin2\alpha-4\sin^3 2\alpha\right)\cdot\frac{3\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha}=\left[3\sin x-4\sin^3 x=\sin3x\right]=$$

$$=\sin6\alpha\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\sin6\alpha\cdot\frac{3\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}^3 2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2 2\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=$$

$$=\sin6\alpha\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{3\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}^3 2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\left[\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg}3x\right]=\sin6\alpha\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}6\alpha.$$

Тождество доказано.

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

Решение.

$$\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=$$

$$=\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi+\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=$$

$$=\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=$$

$$=-\sin\alpha\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)\right)=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\pi+2\alpha)\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right)=\frac{\sin\alpha}{4}\cdot(1+2\cos 2\alpha)=\frac{\sin\alpha}{4}\cdot\left(1+2\left(1-2\sin^2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{4}\cdot\left(1+2-4\sin^2\alpha\right)=\frac{\sin\alpha}{4}\cdot\left(3-4\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{4}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=$$

$$=\left[3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x\right]=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Тождество доказано.

3.218. $\dfrac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15}{2}\alpha.$

Решение.

$$\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin 9\alpha+\sin 6\alpha)+(\sin 8\alpha+\sin 7\alpha)}{(\cos 9\alpha+\cos 6\alpha)+(\cos 8\alpha+\cos 7\alpha)}=$$

$$=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{15\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{15\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{15\alpha}{2}}{\cos\frac{15\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{15\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.219. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

Решение.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)-\sin\left(3\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}}{\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}+\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}=$$

$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y);\right.$

$$\left.\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\right]=\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

Тождество доказано.

3.220. $\dfrac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=$$

$$=\frac{1+\cos(2\pi-2\alpha)+\cos(2\pi+4\alpha)-\cos(\pi-6\alpha)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2(\cos(\pi+2\alpha))^2-1}=$$

$$=\frac{1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\frac{1+\cos 2\alpha+\cos 2(2\alpha)+\cos 3(2\alpha)}{2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1}=$$

$$=\left[\cos 2x=2\cos^2 x-1;\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\right]=$$

$$=\frac{1+\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1+4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{4\cos^3 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1}=\frac{2\cos 2\alpha\left(2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1\right)}{2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1}=$$

$=2\cos 2\alpha.$

Тождество доказано.

3.221. $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=8\mathrm{ctg}8\alpha.$

Решение.

$$\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=\frac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=2\mathrm{ctg}2\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=2(\mathrm{ctg}2\alpha-\mathrm{tg}2\alpha)-4\mathrm{tg}4\alpha=2\left(\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\right)-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=2\cdot\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin2\alpha\cos2\alpha}-4\mathrm{tg}4\alpha=2\cdot\frac{2(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}{2\sin2\alpha\cos2\alpha}-4\mathrm{tg}4\alpha=$$

$$=4\cdot\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}-4\mathrm{tg}4\alpha=4\left(\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}-\mathrm{tg}4\alpha\right)=4\left(\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}-\frac{\sin4\alpha}{\cos4\alpha}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\cos^2 4\alpha-\sin^2 4\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha}=4\cdot\frac{2(\cos^2 4\alpha-\sin^2 4\alpha)}{2\sin4\alpha\cos4\alpha}=8\cdot\frac{\cos8\alpha}{\sin8\alpha}=8\mathrm{ctg}8\alpha.$$

Тождество доказано.

3.222. $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha=4\mathrm{ctg}4\alpha.$

Решение.

$$\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha=$$

$$=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-2\mathrm{tg}2\alpha=2\left(\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\mathrm{tg}2\alpha\right)=2\left(\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=2\cdot\frac{2(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}{2\sin2\alpha\cos2\alpha}=4\cdot\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=4\mathrm{ctg}4\alpha.$$

Тождество доказано.

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos2\varphi=\cos2\alpha.$

Решение.

$$4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos2\varphi=$$

$$=2\cos(\alpha-\varphi)(2\cos\alpha\cos\varphi-\cos(\alpha-\varphi))-\cos2\varphi=$$

$$= 2\cos(\alpha - \varphi)(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) - \cos 2\varphi =$$

$$= 2\cos(\alpha - \varphi)\cos(\alpha + \varphi) - \cos 2\varphi =$$

$$= \left[\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) + \cos(x + y)\right)\right] =$$

$$= \cos 2\varphi + \cos 2\alpha - \cos 2\varphi = \cos 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.224. $\sin^2\varphi - \cos^2(\alpha - \varphi) + 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) = \cos^2\alpha.$

Решение.

$$\sin^2\varphi - \cos^2(\alpha - \varphi) + 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi - \cos(\alpha - \varphi)\left(\cos(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\right) =$$

$$= \left[\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\right] =$$

$$= \sin^2\varphi - \cos(\alpha - \varphi)(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi - 2\cos\alpha\cos\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi - \cos(\alpha - \varphi)(\sin\alpha\sin\varphi - \cos\alpha\cos\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi + \cos(\alpha - \varphi)(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi + \cos(\alpha - \varphi)\cos(\alpha + \varphi) =$$

$$= \left[\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) + \cos(x + y)\right)\right] =$$

$$= \sin^2\varphi + \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 2\alpha) = \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\varphi + 2\cos^2\alpha - 1\right) =$$

$$= \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha - 2\sin^2\varphi\right) = \sin^2\varphi + \cos^2\alpha - \sin^2\varphi = \cos^2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.225. $\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) = \sin^2\alpha.$

Решение.

$$\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) =$$

$$= \cos^2\varphi + \cos(\alpha - \varphi)\left(\cos(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\right) =$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\cos^2\varphi+\cos(\alpha-\varphi)\left(\cos(\alpha-\varphi)-\cos(\alpha-\varphi)-\cos(\alpha+\varphi)\right)=$$

$$=\cos^2\varphi-\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)=\cos^2\varphi-\frac{1}{2}(\cos 2\varphi+\cos 2\alpha)=$$

$$=\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\varphi-1+1-2\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\cos^2\varphi-\cos^2\varphi+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$

Решение.

$$\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\left(\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta\right)-\operatorname{tg}2\beta=\frac{\sin 2\beta}{\cos 6\beta\cos 4\beta}-\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=$$

$$=\sin 2\beta\left(\frac{1}{\cos 6\beta\cos 4\beta}-\frac{1}{\cos 2\beta}\right)=\sin 2\beta\cdot\frac{\cos 2\beta-\cos 6\beta\cos 4\beta}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin 2\beta\left(\cos 2\beta-\frac{1}{2}(\cos 2\beta+\cos 10\beta)\right)}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=$$

$$=\frac{\sin 2\beta\left(\cos 2\beta-\frac{1}{2}\cos 2\beta-\frac{1}{2}\cos 10\beta\right)}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=$$

$$=\frac{\sin 2\beta\left(\frac{1}{2}\cos 2\beta-\frac{1}{2}\cos 10\beta\right)}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2\beta(\cos 2\beta-\cos 10\beta)}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\frac{\frac{1}{2}\sin 2\beta\left(-2\sin 6\beta\sin(-4\beta)\right)}{\cos 6\beta\cos 4\beta\cos 2\beta}=$$

$$=\frac{\sin 6\beta \sin 4\beta \sin 2\beta}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta}=\operatorname{tg}6\beta \operatorname{tg}4\beta \operatorname{tg}2\beta.$$

Тождество доказано.

3.227. $$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{9}{2}\pi-4\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi+\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{2}-4\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)\left(1-\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)}{\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)\left(1-\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)(1+\sin 4\alpha)}=\frac{\sin 4\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1+\sin 4\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 4\alpha\cdot\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+4\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4\alpha\right)}}{1+\sin 4\alpha}=\frac{\sin 4\alpha\cdot\dfrac{1+\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}}{1+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

Тождество доказано.

3.228. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\dfrac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\dfrac{5}{2}\pi\right)}=\frac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}\cdot\sin 2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.229. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$

Решение.

$$\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=\frac{\left(2\sin^2 4\alpha-1\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{2\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=$$

$$=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\right]=$$

$$=\frac{(1-\cos 8\alpha-1)\cdot\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+8\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+8\alpha\right)}}{1+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}=\frac{-\cos 8\alpha\cdot\dfrac{1+\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha}}{1+\sin 8\alpha}=-1.$$

Тождество доказано.

3.230. $\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$

Решение.

$$\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}-\frac{1}{\cos 4\alpha}=\frac{\sin 4\alpha-1}{\cos 4\alpha}=\frac{\sin 2(2\alpha)-1}{\cos 2(2\alpha)}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha-1}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\frac{-(1-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)}{-\left(\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}=$$

$$=\frac{(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)^2}{(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$

Решение.

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin^4+\cos^4\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\cdot4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{2}=1-\frac{3-3\cos4\alpha}{8}=\frac{8-3+3\cos4\alpha}{8}=\frac{5+3\cos4\alpha}{8}.$$

Тождество доказано.

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos2\alpha\cdot\dfrac{3+\cos4\alpha}{4}.$

Решение.

$$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\left(\cos^4\alpha\right)^2-\left(\sin^4\alpha\right)^2=$$

$$=\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha\right)=$$

$$=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\cos2\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=\cos2\alpha\cdot\left(1-\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2}\right)=$$

$$=\cos2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)=\cos2\alpha\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{2}\right)=$$

$$=\cos2\alpha\left(1-\frac{1-\cos4\alpha}{4}\right)=\frac{\cos2\alpha(4-1+\cos4\alpha)}{4}=\cos2\alpha\cdot\frac{3+\cos4\alpha}{4}.$$

Тождество доказано.

3.233. $\mathrm{ctg}(30°-\alpha)\mathrm{ctg}(150°-\alpha)\mathrm{ctg}(270°+\alpha)=\mathrm{tg}3\alpha.$

Решение.

$$\mathrm{ctg}(30°-\alpha)\mathrm{ctg}(150°-\alpha)\mathrm{ctg}(270°+\alpha)=$$

$$=\mathrm{ctg}(30°-\alpha)\mathrm{ctg}(180°-(30°+\alpha))\mathrm{ctg}(270°+\alpha)=$$

$$=\mathrm{ctg}(30°-\alpha)(-\mathrm{ctg}(30°+\alpha))(-\mathrm{tg}\alpha)=\mathrm{ctg}(30°-\alpha)\mathrm{ctg}(30°+\alpha)\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\cos(30°-\alpha)\cos(30°+\alpha)}{\sin(30°-\alpha)\sin(30°+\alpha)}\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\left[\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;\right.$$

$$\left.\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\right]=$$

$$=\frac{(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)(\cos30°\cos\alpha-\sin30°\sin\alpha)}{(\sin30°\cos\alpha-\cos30°\sin\alpha)(\sin30°\cos\alpha+\cos30°\sin\alpha)}\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\cos^2 30°\cos^2\alpha-\sin^2 30°\sin^2\alpha}{\sin^2 30°\cos^2\alpha-\cos^2 30°\sin^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos^2\alpha-\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos^2\alpha-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{3-\mathrm{tg}^2\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}=\mathrm{tg}3\alpha.$$

Тождество доказано.

3.234. $4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$

Решение.

$$4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=$$

$$=4\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=$$

$$=4\cos 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]=4\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\cos 2\alpha\left(\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\right)=2\cos 2\alpha\cos 4\alpha-\cos 2\alpha=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\right]=$$

$$=\cos 2\alpha+\cos 6\alpha-\cos 2\alpha=\cos 6\alpha.$$

Тождество доказано.

3.235. $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1.$

Решение.

$$\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=\frac{1-1-\cos 4\alpha}{\dfrac{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{-\cos 4\alpha\left(1+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=\frac{-\cos 4\alpha\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha(1+\sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha(1+\sin 4\alpha)}=1.$$

Тождество доказано.

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha.$

Решение.

$$16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=$$

$$=3\sin\alpha-10\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha-8\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha=$$

$$=3\sin\alpha-10\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha+$$

$$+\left(2\sin\alpha-8\sin^3\alpha\right)+\left(-2\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha\right)=$$

$$3\sin\alpha-10\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha+2\sin\alpha\left(1-4\sin^2\alpha\right)-2\sin^3\alpha\left(1-4\sin^2\alpha\right)=$$

$$=3\sin\alpha-10\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha+2\sin\alpha\left(1-4\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)=$$

$$=3\sin\alpha-6\sin^3\alpha-4\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha+2\sin\alpha\left(1-4\sin^2\alpha\right)\cos^2\alpha=$$

$$=\left(3\sin\alpha-6\sin^3\alpha\right)+\left(-4\sin^3\alpha+8\sin^5\alpha\right)+$$

$$+2\sin\alpha\left(1-4\left(1-\cos^2\alpha\right)\right)\cos^2\alpha=$$

$$=3\sin\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)-4\sin^3\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)+$$

$$+2\sin\alpha\left(1-4+4\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha=$$

$$=\left(1-2\sin^2\alpha\right)\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)+2\sin\alpha\left(4\cos^2\alpha-3\right)\cos^2\alpha=$$

$$=\left(1-2\sin^2\alpha\right)\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)+2\sin\alpha\cos\alpha\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)=$$

$$=\left[1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,\ 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin 3\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,\right.$$

$$\left.4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha\right]=\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=\sin(3\alpha+2\alpha)=\sin 5\alpha.$$

Тождество доказано.

3.237. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1+\sin\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=$

$=2\sin^2\frac{5\alpha}{2}$.

Решение.

$$1+\sin\left(3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=$$

$$=1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)(-\sin(\pi-\alpha))=$$

$$=1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos 2\alpha-2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)=$$

$$=1-\cos 3\alpha\cos 2\alpha-2\sin 3\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha=$$

$$=1-\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)=$$

$$=1-\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha\sin 2\alpha=1-(\cos 3\alpha\cos 2\alpha-\sin 3\alpha\sin 2\alpha)=$$

$$=1-\cos 5\alpha=1-\cos 2\left(\frac{5\alpha}{2}\right)=$$

$$=1-\left(1-2\sin^2\frac{5\alpha}{2}\right)=1-1+2\sin^2\frac{5\alpha}{2}=2\sin^2\frac{5\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

Решение.

$$(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha-1+\cos2\beta)=-\frac{1}{2}(\cos2\alpha-\cos2\beta)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}(-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta))=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

Тождество доказано.

Упростить выражения (**3.240—3.284.**):

3.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$.

Решение.

$$\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right|=\left|\frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right|=\left|2\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|=2\left|\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|=2|\operatorname{ctg}\alpha|.$$

Ответ: $2|\operatorname{ctg}\alpha|$.

3.241. $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $90^\circ<\alpha<135^\circ$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha\cos\alpha|.$$

Учитывая, что $90^\circ<\alpha<135^\circ$, имеем

$$|\sin\alpha\cos\alpha|=-\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=-0{,}5\sin 2\alpha.$$

Ответ: $-0{,}5\sin 2\alpha$.

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

Решение.

$$\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\beta\right)}=$$

$$=\sqrt{1-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-1+\sin^2\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}=\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=|\sin\alpha-\sin\beta|.$$

Ответ: $|\sin\alpha-\sin\beta|$.

3.243. $(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha)$.

Решение.

$$(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha) =$$

$$= \left(\frac{\cos 8\alpha \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \sin 8\alpha\right)\left(\frac{\cos 8\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} + \sin 8\alpha\right) =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha \cos 8\alpha - \cos 4\alpha \sin 8\alpha}{\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 8\alpha \cos 4\alpha + \sin 8\alpha \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(-4\alpha)}{\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{-\sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = -1.$$

Ответ: -1.

3.244. $\sin^2 2\alpha + \sin^2 \beta + \cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta)$.

Решение.

$$\sin^2 2\alpha + \sin^2 \beta + \cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha + 1 - \cos 2\beta) + \cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta) =$$

$$= -\left(\frac{\cos 4\alpha}{2} + \frac{\cos 2\beta}{2} - 1\right) + \cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta) =$$

$$= \left[\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) + \cos(x + y)\right)\right] =$$

$$= -\frac{\cos 4\alpha}{2} - \frac{\cos 2\beta}{2} + 1 + \frac{\cos 4\alpha}{2} + \frac{\cos 2\beta}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

3.245. $$\frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2\cos\left(\frac{7}{6}\pi + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha - 3\pi)}.$$

Решение.

$$\frac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=$$

$$=\frac{-\sin(3\pi-2\alpha)+2\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(3\pi-2\alpha)}=\frac{-\sin2\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}{\sqrt{3}\cos2\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=\left[\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y\right]=$$

$$=\frac{\sin2\alpha+2\cos\frac{\pi}{6}\cos2\alpha-2\sin\frac{\pi}{6}\sin2\alpha}{\sqrt{3}\cos2\alpha-2\cos\frac{\pi}{6}\cos2\alpha-2\sin\frac{\pi}{6}\sin2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha-2\cdot\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\sqrt{3}\cos2\alpha-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha-2\cdot\frac{1}{2}\sin2\alpha}=$$

$$\frac{\sin2\alpha+\sqrt{3}\cos2\alpha-\sin2\alpha}{\sqrt{3}\cos2\alpha-\sqrt{3}\cos2\alpha-\sin2\alpha}=\frac{\sqrt{3}\cos2\alpha}{-\sin2\alpha}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Ответ: $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha.$

3.246. $\dfrac{\cos2\alpha-\cos6\alpha+\cos10\alpha-\cos14\alpha}{\sin2\alpha+\sin6\alpha+\sin10\alpha+\sin14\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\cos2\alpha-\cos6\alpha+\cos10\alpha-\cos14\alpha}{\sin2\alpha+\sin6\alpha+\sin10\alpha+\sin14\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 10\alpha+\cos 2\alpha)-(\cos 14\alpha+\cos 6\alpha)}{(\sin 10\alpha+\sin 2\alpha)+(\sin 14\alpha+\sin 6\alpha)}=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\cos 6\alpha\cos 4\alpha-2\cos 10\alpha\cos 4\alpha}{2\sin 6\alpha\cos 4\alpha+2\sin 10\alpha\cos 4\alpha}=\frac{2\cos 4\alpha(\cos 6\alpha-\cos 10\alpha)}{2\cos 4\alpha(\sin 6\alpha+\sin 10\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos 6\alpha-\cos 10\alpha}{\sin 6\alpha+\sin 10\alpha}=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{-2\sin 8\alpha\sin(-2\alpha)}{2\sin 8\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}2\alpha$.

3.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

Решение.

$$\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(1-\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)^2\times$$

$$\times\operatorname{tg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)=$$

$$=\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)\cos^2 2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)+\sin 4\alpha=$$

$$=\left(1-\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)\cos^2 2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)+\sin 4\alpha=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\cdot\cos^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)+\sin 4\alpha=$$

$$=\cos 4\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)+\sin 4\alpha=\frac{\cos 4\alpha\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}+\sin 4\alpha=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha(1-\sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha}+\sin 4\alpha=1-\sin 4\alpha+\sin 4\alpha=1.$$

Ответ: 1.

3.248. $$\frac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+\frac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$$

Решение.

$$\frac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+\frac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{4\sin(\pi-2x)\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\right)^2}{1+\cos 2(4x)}+\frac{\sin 3x\cos x-3\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{4\sin 2x\cos^2 x}{1+2\cos^2 4x-1}+\frac{\sin 3x\cos x-3\sin x\cos x}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{2\sin 2x\cos^2 x}{\cos^2 4x}+\frac{\sin 3x\cos x-3\sin x\cos x}{\cos^2 4x}=\left[\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\right.$$

$$\left.\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\ 1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha\right]=$$

$$=\frac{\sin 2x(1+\cos 2x)}{\cos^2 4x}+\frac{\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\cos x-3\sin x\cos x}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2x\cos 2x+\left(3-4\sin^2 x\right)\sin x\cos x-3\sin x\cos x}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2x\cos 2x+\sin x\cos x\left(3-4\sin^2 x-3\right)}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2x\cos 2x-4\sin x\cos x\sin^2 x}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2x\cos 2x-2\sin 2x\sin^2 x}{\cos^2 4x}=\frac{\sin 2x\left(1+\cos 2x-2\sin^2 x\right)}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{\sin 2x\left(\cos 2x+\left(1-2\sin^2 x\right)\right)}{\cos^2 4x}=\frac{\sin 2x(\cos 2x+\cos 2x)}{\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{2\sin x\cos 2x}{\cos^2 4x}=\frac{\sin 4x}{\cos^2 4x}=\sin 4x\cos^{-2} 4x.$$

Ответ: $\sin 4x\cos^{-2} 4x$.

3.249. $\dfrac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}-1.$

Решение.

$$\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}-1=$$

$$=\frac{-4\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)^2}-1=\frac{-4\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{ctg}^2 2\alpha}-1=$$

$$=\frac{-4\cos 4\alpha}{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}-\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}-1=\frac{-4\cos 4\alpha}{\frac{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}}-1=$$

$$=\frac{-\left(4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)\cos 4\alpha}{\left(\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha\right)\left(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)}-1=$$

$$=\frac{-\sin^2 4\alpha\cos 4\alpha}{-\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}-1=$$

$$=\frac{\sin^2 4\alpha\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha}-1=\sin^2 4\alpha-1=-\left(1-\sin^2 4\alpha\right)=-\cos^2 4\alpha.$$

Ответ: $-\cos^2 4\alpha$.

3.250. $\frac{(1+\mathrm{tg}2\alpha)^2-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$

Решение.

$$\frac{(1+\mathrm{tg}2\alpha)^2-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=$$

$$=\frac{1+2\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}^2 2\alpha-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin\alpha-1=$$

$$=\frac{1+2\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=$$

$$=\left[\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ x\neq(2n+1)\pi,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{1+2\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\frac{2\mathrm{tg}2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-1=$$

$$=\frac{1+2\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}^2 2\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}=-2\cdot\frac{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{1+\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=-2\cdot\frac{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{\frac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=-2\sin^2 2\alpha.$$

Ответ: $-2\sin^2 2\alpha$.

3.251. $\dfrac{\sin(80°+4\alpha)}{4\sin(20°+\alpha)\sin(70°-\alpha)}$.

Решение.

$$\frac{\sin(80°+4\alpha)}{4\sin(20°+\alpha)\sin(70°-\alpha)}=\frac{\sin 2(40°+2\alpha)}{4\sin(20°+\alpha)\sin(70°-\alpha)}=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{2\sin(40°+2\alpha)\cos(40°+2\alpha)}{2(\cos(2\alpha-50°)-\cos 90°)}=\frac{\sin(40°+2\alpha)\cos(40°+2\alpha)}{\cos(50°-2\alpha)-0}=$$

$$=\frac{\sin(40°+2\alpha)\cos(40°+2\alpha)}{\cos(90°-(40°+2\alpha))}=\frac{\sin(40°+2\alpha)\cos(40°+2\alpha)}{\sin(40°+\alpha)}=\cos(40°+2\alpha).$$

Ответ: $\cos(40°+2\alpha)$.

3.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=$$

$$=\frac{(\cos(3\pi-4\alpha))^2-4(\cos(\pi-2\alpha))^2+3}{(\cos(3\pi+4\alpha))^2+4(\cos(\pi+2\alpha))^2-1}=\frac{\cos^2 4\alpha-4\cos^2 2\alpha+3}{\cos^2 4\alpha+4\cos^2 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\cos 2(2\alpha))^2-4(1-\sin^2 2\alpha)+3}{(\cos 2(2\alpha))^2+4\cos^2 2\alpha-1}=\frac{(1-2\sin^2 2\alpha)^2-4+4\sin^2 2\alpha+3}{(2\cos^2 2\alpha-1)^2+4\cos^2 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{1-4\sin^2 2\alpha+4\sin^4 2\alpha-4+4\sin^2 2\alpha+3}{4\cos^4 2\alpha-4\cos^2 2\alpha+1+4\cos^2 2\alpha-1}=\frac{4\sin^4 2\alpha}{4\cos^4 2\alpha}=\frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^4 2\alpha}=$$

$=\operatorname{tg}^4 2\alpha.$

Ответ: $\operatorname{tg}^4 2\alpha.$

3.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}.$

Решение.

$$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+2\cos^2 2\alpha-1)}=\frac{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}{2(1+\cos 2\alpha)\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\alpha}{2(1+\cos 2\alpha)\cos^2 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha.$

3.254. $4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$

Решение.

$$4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^3-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^3=$$

$$=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$

$$=2(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha.$$

Ответ: $\sin 4\alpha$.

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha.$

Решение.

$$\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha=$$

$$=\cos^4 2\alpha+\sin^4 2\alpha-6\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha=$$

$$=\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)^2-2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha-6\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha=$$

$$=1-8\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha=1-2\left(4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=1-2\sin^2 4\alpha=\cos 8\alpha.$$

Ответ: $\cos 8\alpha$.

3.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}=\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+1}=\frac{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}-1}{\dfrac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)}+1}=$$

$$=\frac{\dfrac{1-\sin 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}-1}{\dfrac{1-\sin 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}+1}=\frac{1-\sin 4\alpha-1-\sin 4\alpha}{1-\sin 4\alpha+1+\sin 4\alpha}=\frac{-2\sin 4\alpha}{2}=-\sin 4\alpha.$$

Ответ: $-\sin 4\alpha$.

3.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(\sin(\pi-\alpha))^2-4\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2-4+4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}=\frac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-4\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$.

3.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)$.

Решение.

$$\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 4\alpha}-\left(\operatorname{tg}(3\pi+4\alpha)\right)^2-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 4\alpha}-\operatorname{tg}^2 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 4\alpha}-\frac{\sin^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha}-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{1-\sin^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha}-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=\frac{\cos^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha}-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=$$

$$=1-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=-\left(2\cos^2\alpha-1\right)+\sqrt{3}\sin 2\alpha=$$

$$=\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha\right)=$$

$$=2\left(\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{-\left(2\cos^2 4\alpha-1\right)}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;\right.$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\ 2\cos^2 x-1=\cos 2x\Bigg]=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}\cdot\dfrac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+8\alpha\right)}{2}}{-\cos 8\alpha}=\frac{\dfrac{\cos 8\alpha}{1+\sin 8\alpha}\cdot\dfrac{1+\sin 8\alpha}{2}}{-\cos 8\alpha}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

3.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}$.

Решение.

$$\frac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}=$$

$$=\frac{4\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^4}{\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right)^4+\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^4-1}=\frac{4\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-1}=$$

$$=\frac{4\cos^4\alpha}{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{4\cos^4\alpha}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{4\cos^4\alpha}{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Ответ: $-2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)}=\frac{\cos 4\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{\cos 2(2\alpha)}{1-\sin 2(2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{1-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\mathrm{tg}\,2\alpha}{1-\mathrm{tg}\,2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,2\alpha}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\,2\alpha}=$$

$$=\left[\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y},\ x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right).$$

Ответ: $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$.

3.262. $(\mathrm{tg}\,255^\circ-\mathrm{tg}\,555^\circ)(\mathrm{tg}\,795^\circ+\mathrm{tg}\,195^\circ)$.

Решение.

$$(\mathrm{tg}\,255^\circ-\mathrm{tg}\,555^\circ)(\mathrm{tg}\,795^\circ+\mathrm{tg}\,195^\circ)=$$

$$=\left(\mathrm{tg}(270^\circ-15^\circ)-\mathrm{tg}(540^\circ+15^\circ)\right)\left(\mathrm{tg}(810^\circ-15^\circ)+\mathrm{tg}(180^\circ+15^\circ)\right)=$$

$$=(\mathrm{ctg}\,15^\circ-\mathrm{tg}\,15^\circ)(\mathrm{ctg}\,15^\circ+\mathrm{tg}\,15^\circ)=\mathrm{ctg}^2 15^\circ-\mathrm{tg}^2 15^\circ=$$

$$=\left[\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x},\ x\neq 2\pi n,\ n\in Z,\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi k,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}-\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=8\sqrt{3}.$$

Ответ: $8\sqrt{3}.$

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}=\frac{\operatorname{tg}(630^\circ-15^\circ)-\operatorname{tg}(540^\circ+15^\circ)}{\operatorname{tg}(810^\circ-15^\circ)+\operatorname{tg}(720^\circ+15^\circ)}=\frac{\operatorname{ctg}15^\circ-\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{ctg}15^\circ+\operatorname{tg}15^\circ}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ}-\operatorname{tg}15^\circ}{\frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ}+\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\left[\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]=\frac{1-\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}{1+\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}=$$

$$=\frac{1+\cos 30^\circ-1+\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ+1-\cos 30^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ}{2}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}.$

Решение.

$$\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(5\pi-2x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}=$$

$$=\frac{-\sin 2x(-\cos 3x)+\cos 2x\sin 3x}{\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x}=\frac{\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x}{\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x}=$$

$=[\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta);$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)]=$

$$=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}=\operatorname{tg}5x.$$

Ответ: $\operatorname{tg}5x$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\sin(\pi-2x)\cos(3\pi-x)-\sin\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$$

$$=-\sin 2x(-\cos x)-\cos 2x(-\sin x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=$$

$$=[\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)]=\sin 3x.$$

Ответ: $\sin 3x$.

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$

Решение.

$$\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin(2\pi+x)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)\right)=$$

$$=\sin x(-\sin 2x)+(-\cos x)(-\cos 2x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 3x.$$

Ответ: $\cos 3x.$

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}.$

Решение.

$$\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2}+\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}=\frac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|}=\frac{2}{|2\sin\alpha\cos\alpha|}=$$

$$=\frac{2}{|\sin 2\alpha|}=2\left|\sin^{-1}2\alpha\right|.$$

Ответ: $2\left|\sin^{-1}2\alpha\right|.$

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}.$

Решение.

$$\sqrt[3]{\frac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha}}=\sqrt[3]{\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\sin\alpha}{\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos\alpha}}=\sqrt[3]{\frac{\sin^2\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cos\alpha}}=\sqrt[3]{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}=$$

$$=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$.

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}$.

Решение.

$$\frac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}=$$

$$=\frac{3(\cos(\alpha+270^\circ))^2-(-\sin(270^\circ-\alpha))^2}{3(-\sin(90^\circ-\alpha))^2-(\cos(90^\circ+\alpha))^2}=\frac{3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\cos^2\alpha}{\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$=\left[\sin x\cos y\pm\cos x\sin y=\sin(x\pm y);\right.$

$\left.\cos x\cos y\pm\sin x\sin y=\cos(x\mp y)\right]=$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.270. $\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}$.

Решение.

$$\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}{\sin 4\alpha-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)}=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\ 1-2\sin^2 x=\cos 2x\right]=$$

$$=\frac{2\cos 4\alpha(-\sin 2\alpha)+(-2\sin 4\alpha(-\sin 2\alpha))}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{-2\cos 4\alpha\sin 2\alpha+2\sin 4\alpha\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha(\sin 4\alpha-\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=2\sin 2\alpha.$$

Ответ: $2\sin 2\alpha$.

3.271. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)\left(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1\right)}$.

Решение.

$$\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)\left(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)\left(\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}=\sqrt{\left(\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right)^2}=\sqrt{(2\operatorname{ctg}4\alpha)^2}=|2\operatorname{ctg}4\alpha|=$$

$$=2|\operatorname{ctg}4\alpha|.$$

Ответ: $2|\operatorname{ctg}4\alpha|$.

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}=\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)}{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+2+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+2+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2}{(\operatorname{tg}\alpha-1)(\operatorname{tg}\alpha+1)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\sqrt2}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt2}{2}\sin\alpha}{\dfrac{\sqrt2}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt2}{2}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}}=\left[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y);\right.$$

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)]=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2.$

Решение.

$$\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2=$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^6+\left(-\sin^6\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^6-$$

$$-\frac{3}{4}\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2\right)^2=$$

$$=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\frac{3}{4}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)-\frac{3}{4}(\cos2\alpha)^2=$$

$$=\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=1-\frac{3}{4}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha-\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=1-\frac{3}{4}\left(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}-\frac{\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos2\beta-\cos2\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\frac{-2\sin(\alpha+\beta)\sin(-(\alpha-\beta))}{2\sin(\alpha-\beta)}=$$

$$=\sin(\alpha+\beta).$$

Ответ: $\sin(\alpha+\beta)$.

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}}$, если: а) $0<\alpha<\pi$; б) $\pi<\alpha<2\pi$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}}=\sqrt{\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\left[\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},\ x\neq\pi+2\pi n, n\in Z\right]=\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2},\ \text{если } 0<\alpha<\pi;\\ -\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2},\ \text{если } \pi<\alpha<2\pi.\end{cases}$$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

Решение.

$\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=$

$$=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{1+\cos(90^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1+\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}+\frac{1}{2}(\cos(2\alpha-60^\circ)-\cos(90^\circ+2\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos(90^\circ+2\alpha)-1-\cos(60^\circ-2\alpha)+\cos(60^\circ-2\alpha)-\cos(90^\circ-2\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos(90^\circ+2\alpha)-\cos(90^\circ-2\alpha))=\frac{1}{2}(-\sin 2\alpha-\sin 2\alpha)=-\sin 2\alpha.$$

Ответ: $-\sin 2\alpha$.

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)$.

Решение.

$$\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)=$$

$$=(\sin(180^\circ-(45^\circ+2\alpha)))^2-(\sin(180^\circ+(30^\circ-2\alpha)))^2-\sin(180^\circ+15^\circ)\times$$

$$\times\cos(180^\circ-(15^\circ+4\alpha))=$$

$$=\sin^2(45^\circ+2\alpha)-\sin^2(30^\circ-2\alpha)-(-\sin 15^\circ)(-\cos(15^\circ+4\alpha))=$$

$$=\sin^2(45^\circ+2\alpha)-\sin^2(30^\circ-2\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+4\alpha)=$$

$$=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))\right]=$$

$$=\frac{1-\cos(90^\circ+4\alpha)}{2}-\frac{1-\cos(60^\circ-4\alpha)}{2}-\frac{1}{2}(\sin(-4\alpha)+\sin(30^\circ+4\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos(90^\circ+4\alpha)-1+\cos(60^\circ-4\alpha)+\sin 4\alpha-\sin(30^\circ+4\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4\alpha+\cos(60^\circ-4\alpha)+\sin 4\alpha-\sin(90^\circ-(60^\circ-4\alpha)))=$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin 4\alpha+\cos(60^\circ-4\alpha)-\cos(60^\circ-4\alpha))=\sin 4\alpha.$$

Ответ: $\sin 4\alpha$.

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если: а) $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

б) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\frac{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin\alpha}\right)^2}{\sqrt{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}=$$

$$=\frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=$$

$$=\begin{cases}-2\operatorname{tg}\alpha, \text{ если } 90^\circ<\alpha<180^\circ;\\ 2\operatorname{tg}\alpha, \text{ если } 270^\circ<\alpha<360^\circ.\end{cases}$$

Ответ: а) $-2\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}\alpha$.

3.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

Решение.

$$\left(1+\cos\frac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}=\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}, x\neq\pi+2\pi n, n\in Z\right]=\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}}=\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin 2(2\alpha))^2+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{\left(4-4\sin^2 4\alpha\right)-(\sin 2(2\alpha))^2}=$$

$$=\frac{(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)^2+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4\left(1-\sin^2 2\alpha\right)-(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)^2}=$$

$$=\frac{4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4\cos^2 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^4 2\alpha}{4\cos^2 2\alpha\left(1-\sin^2 2\alpha\right)}=\frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}=\frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^4 2\alpha}=\operatorname{tg}^4 2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}^4 2\alpha$.

3.281. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)-\sin^6\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{7}{2}\pi-2\alpha\right)$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)-\sin^6\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{7}{2}\pi-2\alpha\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)-\left(\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)^6+\left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^6=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos^6 2\alpha+\sin^6 2\alpha=\cos 4\alpha-\left(\cos^6 2\alpha-\sin^6 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)\left(\cos^4 2\alpha+\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(\left(\cos^4 2\alpha+\sin^4 2\alpha\right)+\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)^2-2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(1-\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(1-\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=$$

$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\right)=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha+\frac{1}{4}\cos 4\alpha\sin^2 4\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}\cos 4\alpha\sin^2 4\alpha=\frac{1}{4}\cos 4\alpha\sin 4\alpha\sin 4\alpha=\frac{1}{8}(2\sin 4\alpha\cos 4\alpha)\sin 4\alpha=$$

$$=\frac{1}{8}\sin 8\alpha\sin 4\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{8}\sin 8\alpha\sin 4\alpha.$

3.282. $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\times$

$\times\dfrac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\cdot\frac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin 11\alpha+\sin 8\alpha)+(\sin 10\alpha+\sin 9\alpha)}{(\cos 11\alpha+\cos 8\alpha)+(\cos 10\alpha+\cos 9\alpha)}\times$$

$$\times\frac{(\cos 11\alpha+\cos 8\alpha)-(\cos 10\alpha+\cos 9\alpha)}{(\sin 11\alpha+\sin 8\alpha)-(\sin 10\alpha+\sin 9\alpha)}=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\sin\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\sin\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\frac{2\cos\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{19\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{19\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{19\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{2\cos\frac{19\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{19\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{19\alpha}{2}}{\cos\frac{19\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{19\alpha}{2}}{\sin\frac{19\alpha}{2}}=1.$$

Ответ: 1.

3.283. $\cos(270°-2\alpha)\mathrm{ctg}(30°-2\alpha)\mathrm{tg}(240°-2\alpha)(2\cos 4\alpha-1).$

Решение.

$$\cos(270°-2\alpha)\mathrm{ctg}(30°-2\alpha)\mathrm{tg}(240°-2\alpha)(2\cos 4\alpha-1)=$$

$$=\cos(270°-2\alpha)\mathrm{ctg}(30°-2\alpha)\mathrm{tg}(270°-(30°+2\alpha))(2\cos 4\alpha-1)=$$

$$=-\sin 2\alpha\,\mathrm{ctg}(30°-2\alpha)\mathrm{ctg}(30°+2\alpha)(2\cos 4\alpha-1)=$$

$$=-\frac{\sin 2\alpha\cos(30°-2\alpha)\cos(30°+2\alpha)(2\cos 4\alpha-1)}{\sin(30°-2\alpha)\sin(30°+2\alpha)}=$$

$$=\Bigg[\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\Bigg]=$$

$$=-\frac{\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\cos 60^\circ)(2\cos 4\alpha-1)}{\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 60^\circ)}=$$

$$=-\frac{\sin 2\alpha\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)(2\cos 4\alpha-1)}{\cos 4\alpha-\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)(2\cos 4\alpha-1)}{2\cos 4\alpha-1}=-\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)=$$

$$=\left[\cos 2x=1-2\sin^2 x,\ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\right]=$$

$$=-\sin 2\alpha\left(2\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)+1\right)=-\sin 2\alpha\left(2-4\sin^2 2\alpha+1\right)=$$

$$=-\sin 2\alpha\left(3-4\sin^2 2\alpha\right)=-\left(3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha\right)=-\sin 6\alpha.$$

Ответ: $-\sin 6\alpha$.

3.284. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1+\left(2\cos^2 x-1\right)}{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}\cdot\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}\cdot|\operatorname{ctg}x|=\frac{2\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}}{1-\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2}\cdot|\operatorname{ctg}x|=$$

$$=\frac{2(1-\cos x)\cdot|\operatorname{ctg}x|}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-(1-\cos x)^2}=\frac{2(1-\cos x)\cdot|\operatorname{ctg}x|\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)-(1-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2(1-\cos x)\cdot|\operatorname{ctg}x|\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)-(1-\cos x)^2}=\frac{2(1-\cos x)\cdot|\operatorname{ctg}x|\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x-1+\cos x)}=$$

$$=\frac{2|\operatorname{ctg}x|\sin x}{2\cos x}=|\operatorname{ctg}x|\cdot\operatorname{tg}x=\begin{cases}-\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}x=-1, \text{ если } \operatorname{ctg}x<0;\\ \operatorname{ctg}x\operatorname{tg}x=1, \text{ если } \operatorname{ctg}x>0.\end{cases}$$

Ответ: 1, если $\operatorname{ctg}x>0$; -1, если $\operatorname{ctg}x<0$.

Преобразовать в произведение (**3.285.—3.331**):

3.285. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=\sin 6\alpha-\sqrt{3}\cos 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\sin 6\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha\right)=$$

$$=2(\cos 60^\circ\sin 6\alpha-\sin 60^\circ\cos 6\alpha)=2(\sin 6\alpha\cos 60^\circ-\cos 6\alpha\sin 60^\circ)=$$

$$=[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)]=2\sin(6\alpha-60^\circ).$$

Ответ: $2\sin(6\alpha-60^\circ)$.

3.286. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha-\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4\alpha\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos 60^\circ\sin 4\alpha-\sin 60^\circ\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 4\alpha\cos 60^\circ-\cos 4\alpha\sin 60^\circ)=$$

$$=[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)]=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha-60^\circ).$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha-60^\circ)$.

3.287. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha-8\cos^4 2\alpha.$

Решение.

$$3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha-8\cos^4 2\alpha=$$

$$=\left[\cos 2x=2\cos^2 x-1;\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=3-4\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha-1-8\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)^2=$$

$$=2-4\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha-2(1+2\cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha)=$$

$$=2-4\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha-2-4\cos 4\alpha-2\cos^2 4\alpha=-8\cos 4\alpha.$$

Ответ: $-8\cos 4\alpha$.

3.288. $\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{tg}x+3.$

Решение.

$$\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{tg}x+3=\mathrm{tg}^2 x(\mathrm{tg}x-1)-3(\mathrm{tg}x-1)=(\mathrm{tg}x-1)(\mathrm{tg}^2 x-3)=$$

$$=\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-3\right)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x-\sqrt{3}\cos x)(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}{\cos^3 x}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\cdot 2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\cdot 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)}{\cos^3 x}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}(\cos 45^\circ\sin x-\sin 45^\circ\cos x)(\cos 60^\circ\sin x-\sin 60^\circ\cos x)(\cos 60^\circ\sin x+\sin 60^\circ\cos x)}{\cos^3 x}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}(\sin x\cos 45^\circ-\cos x\sin 45^\circ)(\sin x\cos 60^\circ-\cos x\sin 60^\circ)(\sin x\cos 60^\circ+\cos x\sin 60^\circ)}{\cos^3 x}=$$

$$=\left[\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha\pm\beta)\right]=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}$.

3.289. $\mathrm{tg}^4 x-4\mathrm{tg}^2 x+3.$

Решение.

$$\mathrm{tg}^4 x-4\mathrm{tg}^2 x+3=\mathrm{tg}^4 x-\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{tg}^2 x+3=$$

$$=\mathrm{tg}^2 x(\mathrm{tg}^2 x-1)-3(\mathrm{tg}^2 x-1)=(\mathrm{tg}^2 x-1)(\mathrm{tg}^2 x-3)=$$

$$=\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-3\right)=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\sin x-\sqrt{3}\cos x)(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{\cos^2 x}\times$$

$$\times\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\cdot 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{8(\sin x\cos 45^\circ-\cos x\sin 45^\circ)(\sin x\cos 45^\circ+\cos x\sin 45^\circ)}{\cos^2 x}\times$$

$$\times\frac{(\sin x\cos 60^\circ-\cos x\sin 60^\circ)(\sin x\cos 60^\circ+\cos x\sin 60^\circ)}{\cos^2 x}=$$

$$=[\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha\pm\beta)]=$$

$$=\frac{8\sin(x-45^\circ)\sin(x+45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^4 x}.$$

Ответ: $\dfrac{8\sin(x-45^\circ)\sin(x+45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^4 x}$.

3.290. $6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha.$

Решение.

$$6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha=6\sin^2 2\alpha-1-(2\cos^2 2\alpha-1)=$$

$$=6\sin^2 2\alpha-2\cos^2 2\alpha=2(3\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha)=$$

$$=2(\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)(\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=$$

$$=2\cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)\cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)=$$

$$=-8(\cos 2\alpha\cos 60^\circ-\sin 2\alpha\sin 60^\circ)(\cos 2\alpha\cos 60^\circ+\sin 2\alpha\sin 60^\circ)=$$

$$=[\cos x\cos y\pm\sin x\sin y=\cos(x\mp y)]=-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ).$$

Ответ: $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$.

3.291. $\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$, если $0^\circ<\alpha\le 180^\circ$.

Решение.

$$\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1+\sin 2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}-\sqrt{1-\sin 2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{1+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}-\sqrt{1-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\cos^2\frac{\alpha}{4}}-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\cos^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}=$$

$$=\left|\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right|=\left[0^\circ<\frac{\alpha}{4}\le 45^\circ\right]=$$

$$=\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}=2\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $2\sin\frac{\alpha}{4}$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3$.

Решение.

$$2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3=2\cos^2 2\alpha+3\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)-3=$$

$$=2\cos^2 2\alpha-6\sin^2 2\alpha=2\left(\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos 2\alpha-\sqrt{3}\sin 2\alpha\right)\left(\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=2\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=8\left(\cos 2\alpha\cos 60^\circ-\sin 2\alpha\sin 60^\circ\right)\left(\cos 2\alpha\cos 60^\circ+\sin 2\alpha\sin 60^\circ\right)=$$

$$=\left[\cos x\cos y\pm\sin x\sin y=\cos(x\mp y)\right]=8\cos\left(2\alpha+60^\circ\right)\cos\left(2\alpha-60^\circ\right).$$

Ответ: $8\cos\left(2\alpha+60^\circ\right)\cos\left(2\alpha-60^\circ\right)$.

3.293. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

Решение.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\right)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\right)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=1+\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\right)=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=1+\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=1+\cos(\alpha-\beta)\left(-\cos(\alpha-\beta)\right)=1-\cos^2(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$$

Ответ: $\sin^2(\alpha-\beta)$.

3.294. $\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin(2\alpha-\beta)\cos 2\alpha+\sin\beta\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\left[\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin(-\beta)+\sin(4\alpha-\beta)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin(\beta-4\alpha)+\sin(\beta+4\alpha)\right)}{\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{-\sin\beta+\sin(4\alpha-\beta)-\sin(4\alpha-\beta)+\sin(4\alpha+\beta)}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin(4\alpha+\beta)-\sin\beta}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\frac{2\cos(2\alpha+\beta)\sin 2\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\cdot \operatorname{tg}2\alpha.$$

Ответ: $\frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\cdot \operatorname{tg}2\alpha.$

3.295. $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}.$

Решение.

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1-\cos^2(\alpha+\beta)-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}}{1-\cos^2(\alpha+\beta)-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1+\cos 2\beta}{2}}=$$

$$=\frac{2-2\cos^2(\alpha+\beta)-1+\cos 2\alpha-1+\cos 2\beta}{2-2\cos^2(\alpha+\beta)-1-\cos 2\alpha-1-\cos 2\beta}=$$

$$=\frac{-2\cos^2(\alpha+\beta)+(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}{-2\cos^2(\alpha+\beta)-(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{-2\cos^2(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{-2\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{-2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))}{-2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))}=\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\Bigg]=$$

$$=\frac{-2\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$

3.296. $\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta.$

Решение.

$$\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=\sin^2(\alpha-2\beta)=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1+\cos 4\beta}{2}=$$

$$=\sin^2(\alpha-2\beta)-\frac{1}{2}\big(2+(\cos 2\alpha+\cos 4\beta)\big)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\sin^2(\alpha-2\beta)-\frac{1}{2}\big(2+2\cos(\alpha+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)\big)=$$

$$=\sin^2(\alpha-2\beta)-1-\cos(\alpha+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)=$$

$$=-\big(1-\sin^2(\alpha-2\beta)\big)-\cos(\alpha+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)=$$

$$=-\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)=$$

$$=-\cos(\alpha-2\beta)\big(\cos(\alpha-2\beta)+\cos(\alpha+2\beta)\big)=$$

$$=-\cos(\alpha-2\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos 2\beta=-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta).$$

Ответ: $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta).$

3.297. $\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta.$

Решение.

$$\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-\frac{1-\cos4\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}=$$

$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-\frac{1}{2}(2-(\cos4\alpha+\cos2\beta))=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-\frac{1}{2}(2-2\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta))=$$

$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-1+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)=$$

$$=-\left(1-\sin^2(2\alpha-\beta)\right)+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)=$$

$$=-\cos^2(2\alpha-\beta)+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)=$$

$$=-\cos(2\alpha-\beta)\left(\cos(2\alpha-\beta)-\cos(2\alpha+\beta)\right)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=-\cos(2\alpha-\beta)\left(-2\sin2\alpha\sin(-\beta)\right)=-2\sin2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta).$$

Ответ: $-2\sin2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$.

3.298. $2+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi+\alpha}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}-2\pi\right)-4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)$.

Решение.

$$2+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi+\alpha}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}-2\pi\right)-4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)=$$

$$=2+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}-4\left(\cos\left(3\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2=$$

$$=2+\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}-4\left(\cos\left(3\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2=$$

$$=2+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}\cdot\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\Big[\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\ \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\Big]=$$

$$=2+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=2+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2+1-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=3-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\left(\frac{3}{4}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=4\left(-2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=-4\left(2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\right)\cdot\left(2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)=$$

$$=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$

3.299. $2-\dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}$.

Решение.

$$2-\frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}=2+\frac{\sin 2(4\alpha)}{\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha}=$$

$$=2+\frac{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}{\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)}=2+\frac{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=$$

$$=2+\frac{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha}=2+2\sin 4\alpha=2(1+\sin 4\alpha)=$$

$$=2\left(\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)=2(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2=$$

$$=2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\right)^2=4\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha\right)^2=$$

$$=[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)]=$$

$$=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)^2=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

Ответ: $4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

3.300. $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

Решение.

$$2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha=2-\left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}+\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right)=2-\frac{\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=2-\frac{1}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha}=2-\frac{2}{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}=2-\frac{2}{\sin 8\alpha}=2\cdot\frac{\sin 8\alpha-1}{\sin 8\alpha}=$$

$$=2\cdot\frac{\sin 8\alpha-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin 8\alpha}=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{4\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 8\alpha}=\frac{4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)\sin\left(-\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)}{\sin 8\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)}{\sin 8\alpha}=\frac{-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$.

3.301. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=$$

$$=\left[2\cos^2 2x-1=\cos 4x;\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\right.$$

$$\left.x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z,\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}\cdot\dfrac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)}{2}}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha}{\dfrac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}\cdot(1+\sin 4\alpha)}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=$$

$$=1-\mathrm{tg}2\alpha+\cos2\alpha-\sin2\alpha=\left(1-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\right)+(\cos2\alpha-\sin2\alpha)=$$

$$=\frac{\cos2\alpha-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}+(\cos2\alpha-\sin2\alpha)=(\cos2\alpha-\sin2\alpha)\left(\frac{1}{\cos2\alpha}+1\right)=$$

$$=\frac{(\cos2\alpha-\sin2\alpha)(1+\cos2\alpha)}{\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha\right)\left(1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos2\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\right]=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}$.

3.302. $\dfrac{\mathrm{ctg}2\alpha+\mathrm{tg}2\alpha}{1+\mathrm{tg}4\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\mathrm{ctg}2\alpha+\mathrm{tg}2\alpha}{1+\mathrm{tg}4\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha}=\frac{\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}+\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}}{1+\frac{\sin4\alpha\sin2\alpha}{\cos4\alpha\cos2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin2\alpha\cos2\alpha}}{\frac{\cos4\alpha\cos2\alpha+\sin4\alpha\sin2\alpha}{\cos4\alpha\cos2\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin2\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\cos4\alpha\cos2\alpha}{\cos4\alpha\cos2\alpha+\sin4\alpha\sin2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos4\alpha}{\sin2\alpha(\cos4\alpha\cos2\alpha+\sin4\alpha\sin2\alpha)}=$$

$$=\left[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\right]=\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\cos 4\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=2\operatorname{ctg}4\alpha.$$

Ответ: $2\operatorname{ctg}4\alpha$.

3.303. $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$.

Решение.

$$1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=1-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta\right)=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)+2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\right)=$$

$$=\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta).$$

Ответ: $\cos^2(\alpha-\beta)$.

3.304. $1+\cos\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

Решение.

$$1+\cos\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$$

$$=1+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$$

$$=1-\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=(1+\operatorname{tg}2\alpha)-(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=$$

$$=\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)-(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=$$

$$=(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}-1\right)=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(1-\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\right)\left(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha\right)\cdot 2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\left[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\right]=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$.

3.305. $4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)$.

Решение.

$$4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)=$$

$$=4\cos\left(\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2+\cos(\pi-2\alpha)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)=$$

$$=4\sin^2 2\alpha-\cos 2\alpha+\cos 6\alpha=2(1-\cos 4\alpha)+(\cos 6\alpha-\cos 2\alpha)=$$

$$=2\left(1-\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)+(\cos 6\alpha-\cos 2\alpha)=$$

$$=4\sin^2 2\alpha+(\cos 6\alpha-\cos 2\alpha)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=4\sin^2 2\alpha-2\sin 4\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=2\sin 2\alpha(2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha)=2\sin 2\alpha(2\sin 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)=$$

$$=4\sin^2 2\alpha(1-\cos 2\alpha)=4\sin^2 2\alpha\left(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=$$

$$=4\sin^2 2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha=8\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha.$$

Ответ: $8\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$.

3.306. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$, если а) $0°<\alpha<90°$; б) $90°<\alpha<180°$.

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)}{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{1+\sin\alpha+2\sqrt{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}+1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{1+\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{1+|\cos\alpha|}{\sin\alpha}.$$

Отсюда:

а) при $0°<\alpha<90°$ имеем $\dfrac{1+|\cos\alpha|}{\sin\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

б) при $90°<\alpha<180°$ имеем $\dfrac{1+|\cos\alpha|}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

Ответ: а) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

3.307. $2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\dfrac{4\operatorname{tg}2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{\sin 8\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)^2}$.

Решение.

$$2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{4\operatorname{tg}2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{\sin 8\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)^2}=$$

$$=2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{2\left(1-\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)}{\left(1+\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)\sin 2(4\alpha)}=$$

$$=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\ \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\sin x\right]=$$

$$=1-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{2\left(\dfrac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\right)\sin 4\alpha}{\dfrac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\cdot 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=1-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha}=\sqrt{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha=$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha\right)=2\left(\sin 4\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\right]=2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $2\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.308. $\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi)$.

Решение.

$$\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi)=$$

$$=\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^2(\pi-2\beta)=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1+\cos(2\alpha-4\beta)}{2}-\frac{1+\cos(\pi-2\alpha)}{2}-\frac{1+\cos(2\pi-4\beta)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha-4\beta)-\cos(\pi-2\alpha)-\cos(2\pi-4\beta)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha-4\beta)+\cos 2\alpha-\cos 4\beta-1\right)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \cos 2x=2\cos^2 x-1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos(2\alpha-2\beta)\cos 2\beta-2\cos^2 2\beta\right)=\cos 2\beta\left(\cos(2\alpha-2\beta)-\cos 2\beta\right)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\cos 2\beta\left(-2\sin\alpha\sin(\alpha-2\beta)\right)=$$

$$=2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta.$$

Ответ: $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$.

3.309. $1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)$.

Решение.

$$1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)=1+\cos 8\alpha+\cos 4\alpha=$$

$$=1+\cos 2(4\alpha)+\cos 4\alpha=1+2\cos^2 4\alpha-1+\cos 4\alpha=2\cos^2 4\alpha+\cos 4\alpha=$$

$$=2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$

3.310. $\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha.$

Решение.

$$\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha=(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)-\sin 4\alpha=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=-2\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)-\sin 4\alpha=$$

$$=2\sin 4\alpha\sin 2\alpha-\sin 4\alpha=2\sin 4\alpha\left(\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sin 4\alpha(\sin 2\alpha-\sin 30^\circ)=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin 4\alpha\cdot 2\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)=$$

$$=4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ).$$

Ответ: $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ).$

3.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$

Решение.

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^3+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^3-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=$$

$$= \cos^3\alpha - \sin^3\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha =$$

$$= (\cos\alpha - \sin\alpha)\left(\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\right) - (\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= (\cos\alpha - \sin\alpha)\left(\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - 1\right) =$$

$$= (\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha\cos\alpha - 1) = (\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)\sin 2\alpha =$$

$$= \left[\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

3.312. $2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1.$

Решение.

$$2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1 = \left[\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}\right] =$$

$$= 1 + \cos 4\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1 =$$

$$= \cos 4\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos 4\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4\alpha\right) = \left[\cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x-y)\right] =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4\alpha\right).$$

Ответ: $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4\alpha\right)$.

3.313. $$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

Решение.

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)+2\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)-1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-6\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)-\left(1-2\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-6\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha-\cos(5\pi-4\alpha)}{1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{(1+\cos 4\alpha)+(\cos 6\alpha+\cos 2\alpha)}=\left[\cos 2x=2\cos^2 x-1;\right.$$

$$\left.\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{1+2\cos^2 2\alpha-1+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2\cos^2 2\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)}=\frac{1}{2\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$.

3.314. $$\frac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}.$$

Решение.

$$\frac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}=\frac{(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)-\sin 4\alpha}{(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)+\sin 4\alpha}=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\frac{-2\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)-\sin 4\alpha}{-2\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)+\sin 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 4\alpha\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha\left(\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\right)}{2\sin 4\alpha\left(\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sin 2\alpha-\sin 30^\circ}{\sin 2\alpha+\sin 30^\circ}=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\right.$$

$$\left.\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{2\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)}{2\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)}=\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ).$$

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$.

3.315. $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

Решение.

$$\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha=(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)+\sin 4\alpha=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=-2\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)+\sin 4\alpha=$$

$$=2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\sin 4\alpha=2\sin 4\alpha\left(\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sin 4\alpha(\sin 2\alpha+\sin 30^\circ)=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin 4\alpha\cdot 2\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)=4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ).$$

Ответ: $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$.

3.316. $\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right).$

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)=\left[\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\sin 4\alpha-\sin 4\alpha)=-\sin 4\alpha.$$

Ответ: $-\sin 4\alpha$.

3.317. $\dfrac{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}.$

Решение.

$$\frac{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}=\frac{\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\right)^{-1}-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^{-1}+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{(-\sin\alpha)^{-1}+\sin\alpha}{(-\cos\alpha)^{-1}+\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{\sin\alpha}+\sin\alpha}{-\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{-1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{-1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{-\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos\alpha}{-\left(1-\cos^2\alpha\right)\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\sin\alpha}=\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\mathrm{ctg}^3\alpha.$$

Ответ: $\mathrm{ctg}^3\alpha$.

3.318. $\dfrac{3\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}$.

Решение.

$$\frac{3\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}=\frac{3(\mathrm{tg}(3\pi+\alpha))^2-1}{1-3\left(\mathrm{tg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\right)^2}=\frac{3\mathrm{tg}^2\alpha-1}{1-3\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{3\mathrm{tg}^2\alpha-1}{1-\frac{3}{\mathrm{tg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\left(3\mathrm{tg}^2-1\right)\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-3}=\frac{3\left(\mathrm{tg}^2\alpha-\frac{1}{3}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}{3\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\alpha-1\right)}=\frac{-\left(\frac{1}{3}-\mathrm{tg}^2\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha}{-\left(1-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha\right)}=\frac{\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\alpha\right)\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha}{\left(1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{tg}\alpha\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{tg}\alpha\right)}=$$

$$=\mathrm{tg}^2\alpha\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{tg}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{tg}\alpha}=$$

$$=\left[\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}=\mathrm{tg}(x+y),\ x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}=\mathrm{tg}(x-y),\ x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha.$

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha.$

Решение.

$$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha=(\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)=$$

$$=\Bigg[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\Bigg]=$$

$$=2\cos 4\alpha\sin(-2\alpha)-2\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)=$$

$$=-2\cos 4\alpha\sin 2\alpha+2\sin 4\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=2\sin 2\alpha(\sin 4\alpha-\cos 4\alpha)=2\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4\alpha\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\sin 2\alpha(\sin 4\alpha\cos 45^\circ-\cos 4\alpha\sin 45^\circ)=$$

$$=[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)]=2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45^\circ).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45^\circ).$

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-\mathrm{tg}\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

Решение.

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-\mathrm{tg}\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)}-\mathrm{tg}\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=\left[1-2\sin^2 x=\cos 2x,\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z,\right.$$

$$\left.\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{\dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}\cdot\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}-\mathrm{tg}\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}\cdot(1-\sin 2\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha-\sin\alpha=$$

$$=\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}+(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=(\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$$

$$=\left[\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)\right]=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

3.321. $\cos^2\left(\dfrac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{15}{8}\pi+\alpha\right)$.

Решение.

$$\cos^2\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi+\alpha\right)=$$

$$=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{15\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{15\pi}{4}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)+\cos\left(4\pi-\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin(-2\alpha)\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{4}\pi-\alpha\right).$

Решение.

$$\frac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\frac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\frac{\sin\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)}=$$

$$=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\right]=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)}{1-\sin 2\alpha}-\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}}=$$

$$=\frac{1+\cos\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}{1-\sin 2\alpha}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\frac{1-\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\left[\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\right]=$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha}\cdot\frac{1-\sin2\alpha}{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1-\sin2\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-\frac{1-\sin2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-$$

$$-\frac{1-\sin2\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}-\frac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\frac{(1+\sin2\alpha)^2-(1-\sin2\alpha)^2}{(1-\sin2\alpha)(1+\sin2\alpha)}=$$

$$=\frac{1+2\sin2\alpha+\sin^2 2\alpha-1+2\sin2\alpha-\sin^2 2\alpha}{1-\sin^2 2\alpha}=\frac{4\sin2\alpha}{\cos^2 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{4\sin2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$.

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270°)\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270°)\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)$.

Решение.

$$\sin\alpha\sin^2(\alpha-270°)\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270°)\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)=$$

$$=\sin\alpha(\sin(270°-\alpha))^2\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)+\cos\alpha(\cos(270°+\alpha))^2\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)=$$

$$=\sin\alpha\cos^2\alpha\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)+\cos\alpha\sin^2\alpha\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)=$$

$$=\sin\alpha\cos^2\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)+\cos\alpha\sin^2\alpha\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin 45^\circ\cos\alpha+\cos 45^\circ\sin\alpha\right)=$$

$$=\left[\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)\right]=\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha).$$

Ответ: $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$.

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha$.

Решение.

$$\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha=(\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)+\cos 4\alpha=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=2\cos 4\alpha\sin(-2\alpha)+\cos 4\alpha=$$

$$=-2\cos 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 4\alpha=-2\cos 4\alpha\left(\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=$$

$$-2\cos 4\alpha(\sin 2\alpha-\sin 30^\circ)=-2\cos 4\alpha\cdot 2\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)=$$

$$=4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha).$$

Ответ: $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$.

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha$.

Решение.

$$\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1+\cos 4\alpha}{2}-\frac{3(1-\cos 4\alpha)}{2}=-1+2\cos 4\alpha=2\left(\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2(\cos 4\alpha-\cos 60^\circ)=\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2(-2\sin(2\alpha+30^\circ)\sin(2\alpha-30^\circ))=4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha).$$

Ответ: $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$.

3.326. $\cos^2\frac{na}{2}-\sin^2\frac{ma}{2}$.

Решение.

$$\cos^2\frac{na}{2}-\sin^2\frac{ma}{2}=\left[\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1+\cos na}{2}-\frac{1-\cos ma}{2}=\frac{1}{2}(\cos na+\cos ma)=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{(m+n)a}{2}\cos\frac{(m-n)a}{2}=$$

$$=\cos\frac{(m+n)a}{2}\cos\frac{(m-n)a}{2}.$$

Ответ: $\cos\frac{(m+n)a}{2}\cos\frac{(m-n)a}{2}$.

3.327. $1+\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

Решение.

$$1+\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}=$$

$$=1-\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}=1-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\cos\alpha}=\left[\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}$.

Решение.

$$\frac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+2\cos\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\left[\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\right.$$

$$\left.\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\right]=$$

$$=\frac{\sin\alpha+2\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-2\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

3.329. $\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

Решение.

$$\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}(\sin4\alpha+\sin4\alpha)=\sin4\alpha.$$

Ответ: $\sin4\alpha$.

3.330. $\sin\alpha-\left(\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$.

Решение.

$$\sin\alpha-\left(\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2=[\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y]=$$

$$=\sin\alpha-\left(\frac{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2=\sin\alpha-\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2=$$

$$=\sin\alpha-\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2=\sin\alpha-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=$$

$$=\sin\alpha-\frac{1}{2}=\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\left[\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$$

Ответ: $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

3.331. $\mathrm{tg}210°+\mathrm{ctg}210°+\mathrm{tg}220°+\mathrm{ctg}220°$.

Решение.

$\mathrm{tg}210°+\mathrm{ctg}210°+\mathrm{tg}220°+\mathrm{ctg}220°=$

$$=\mathrm{tg}(180°+30°)+\mathrm{ctg}(180°+30°)+\mathrm{tg}(180°+40°)+\mathrm{ctg}(180°+40°)=$$

$$=\mathrm{tg}30°+\mathrm{ctg}30°+\mathrm{tg}40°+\mathrm{ctg}40°=\frac{\sin30°}{\cos30°}+\frac{\cos30°}{\sin30°}+\frac{\sin40°}{\cos40°}+\frac{\cos40°}{\sin40°}=$$

$$=\frac{1}{\sin30°\cos30°}+\frac{1}{\sin40°\cos40°}=\frac{2}{2\sin30°\cos30°}+\frac{2}{2\sin40°\cos40°}=$$

$$=\frac{2}{\sin60°}+\frac{2}{\sin80°}=2\left(\frac{1}{\sin60°}+\frac{1}{\sin80°}\right)=\frac{2(\sin80°+\sin60°)}{\sin60°\sin80°}=$$

$$=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=\frac{2\cdot2\sin70°\cos10°}{\sin60°\sin80°}=$$

$$=\frac{4\sin70°\cos10°}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(90°-10°)}=\frac{8\sin70°\cos10°}{\sqrt{3}\cos10°}=\frac{8\sin70°}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin70°$.

Доказать справедливость равенств (**3.332—3.354**):

3.332. $\dfrac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = -1.$

Решение.

$$\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin(90^\circ - 24^\circ)}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} =$$

$$= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)] = \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \cos 24^\circ \sin 6^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 21^\circ \sin 39^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 18^\circ}{\sin(-18^\circ)} = \frac{\sin 18^\circ}{-\sin 18^\circ} = -1.$$

Равенство справедливо.

3.333. $\dfrac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = 1.$

Решение.

$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos(180^\circ - 20^\circ)\cos(90^\circ + 10^\circ)}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos(180^\circ - 21^\circ)\cos(90^\circ + 9^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \sin 9^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1.$$

Равенство справедливо.

3.334. $\dfrac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 24^\circ.$

Решение.

$$\frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 63^\circ \cos(90^\circ - 87^\circ) - \cos 87^\circ \cos(90^\circ - 63^\circ)}{\cos(90^\circ + 42^\circ)\cos(90^\circ - 18^\circ) - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} =$$

$$= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y);$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)] =$$

$$=\frac{\sin 87^\circ\cos 63^\circ-\cos 87^\circ\sin 63^\circ}{-\sin 42^\circ\sin 18^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=\frac{\sin 24^\circ}{-\cos 24^\circ}=-\operatorname{tg}24^\circ.$$

Равенство справедливо.

3.335. $\frac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}=-1.$

Решение.

$$\frac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}=$$

$$=\frac{\cos(90^\circ-26^\circ)\cos 4^\circ-\cos(90^\circ-4^\circ)\cos 26^\circ}{\cos(90^\circ-19^\circ)\cos 41^\circ-\cos 19^\circ\cos(90^\circ-41^\circ)}=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\right]=$$

$$=\frac{\sin 26^\circ\cos 4^\circ-\sin 4^\circ\cos 26^\circ}{\sin 19^\circ\cos 41^\circ-\cos 19^\circ\sin 41^\circ}=\frac{\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ}=-1.$$

Равенство справедливо.

3.336. $\frac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}=1.$

Решение.

$$\frac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos(90^\circ-6^\circ)\cos(90^\circ-66^\circ)}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos(90^\circ-5^\circ)\cos(90^\circ-65^\circ)}=$$

$$=\left[\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\right]=\frac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\sin 66^\circ\sin 6^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\sin 65^\circ\sin 5^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ}=1.$$

Равенство справедливо.

3.337. $\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ=\frac{1}{64}.$

Решение.

$$\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ=\left((\sin 70^\circ\sin 50^\circ)\sin 10^\circ\right)^2=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 120°)\sin 10°\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\cos 20°+\frac{1}{2}\right)\sin 10°\right)^2=\frac{1}{16}((2\cos 20°+1)\sin 10°)^2=$$

$$=\frac{1}{16}(2\sin 10°\cos 20°+\sin 10°)^2=$$

$$=\left[\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(\sin(-10°)+\sin 30°+\sin 10°)^2=\frac{1}{16}\left(-\sin 10°+\frac{1}{2}+\sin 10°\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}.$$

Равенство справедливо.

3.338. а) $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Решение.

а) $$\sin 15°=\sqrt{\sin^2 15°}=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})\cdot 2}{4\cdot 2}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Равенство справедливо.

б) $\cos 15° = \sqrt{\cos^2 15°} = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot 2}{4\cdot 2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{8}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Равенство справедливо.

3.339. а) $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; б) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение.

а) $\cos 36° = \sin 54° \Leftrightarrow \cos 2(18°) = \sin 3(18°)$.

Отсюда получаем:

$1-2\sin^2 18° = 3\sin 18° - 4\sin^3 18° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 18° - 2\sin^2 18° - 3\sin 18° + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin 18° - 1)\left(4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sin 18°$, имеем:

1) $\sin 18° = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0, \varnothing$, т.к. $18° \in (0°; 90°)$ и $\sin 18° > 0$;

2) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, тогда $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2\sqrt{5}+2}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$

Равенство справедливо.

б) $\sin 36° = \cos 54° \Leftrightarrow 2\sin 18° \cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3$, $2\sin 18° = 4\left(1-\sin^2 18°\right) - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18°+2\sin 18°=1 \Leftrightarrow 4\sin^2 18°+2\sin 18°+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$$

$$\left(2\sin 18°+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow 1)\ 2\sin 18°+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \sin 18°=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \varnothing;$$

$$2)\ 2\sin 18°+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2},\ \sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Равенство справедливо.

3.340. $\operatorname{ctg}10°\operatorname{ctg}50°\operatorname{ctg}70°=\operatorname{ctg}30°$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}10°\operatorname{ctg}50°\operatorname{ctg}70°=\frac{\cos 10°\cos 50°\cos 70°}{\sin 10°\sin 50°\sin 70°}=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right);\right.$$

$$\left.\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\right]=\frac{\cos 10°\cdot\frac{1}{2}(\cos 20°+\cos 120°)}{\sin 10°\cdot\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 120°)}=$$

$$=\frac{\cos 10°\left(\cos 20°-\frac{1}{2}\right)}{\sin 10°\left(\cos 20°+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\cos 10°(2\cos 20°-1)}{\sin 10°(2\cos 20°+1)}=$$

$$=\frac{2\cos 10°\cos 20°-\cos 10°}{2\sin 10°\cos 20°+\sin 10°}=$$

$$=\left[\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)\right]=\frac{\cos 10°+\cos 30°-\cos 10°}{\sin 10°+\sin 30°-\sin 10°}=$$

$$=\frac{\cos 30°}{\sin 30°}=\operatorname{ctg}30°.$$

Равенство справедливо.

3.341. $\dfrac{\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°}{\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°}=3.$

Решение.

$$\frac{(\sin 20^\circ \sin 40^\circ)(\sin 60^\circ \sin 80^\circ)}{(\sin 10^\circ \sin 30^\circ)(\sin 50^\circ \sin 70^\circ)}=\left[\sin x \sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)(\cos 20^\circ-\cos 140^\circ)}{(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)(\cos 20^\circ-\cos 120^\circ)}=$$

$$=\frac{\left(\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\right)(\cos 20^\circ-\cos(180^\circ-40^\circ))}{(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)\left(\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(2\cos 20^\circ-1)(\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)}{(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)(2\cos 20^\circ+1)}=$$

$$=\frac{2\cos^2 20^\circ+2\cos 20^\circ \cos 40^\circ-\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ+\cos 20^\circ-2\cos 40^\circ \cos 20^\circ-\cos 40^\circ}=$$

$$=\left[\cos x \cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{2\cos^2 20^\circ+\cos 20^\circ+\cos 60^\circ-\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ+\cos 20^\circ-\cos 60^\circ-\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos^2 20^\circ+\frac{1}{2}-\cos 2(20^\circ)}{2\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}-\cos 2(20^\circ)}=\frac{2\cos^2 20^\circ+\frac{1}{2}-2\cos^2 20^\circ+1}{2\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}-2\cos^2 20^\circ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3.$$

Равенство справедливо.

3.342. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{16}$.

Решение.

$$(\sin 10^\circ \sin 30^\circ)(\sin 50^\circ \sin 70^\circ)=$$

$$=\left[\sin x \sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 120^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)\left(\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(\cos 20^\circ-\cos 40^\circ)(2\cos 20^\circ+1)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20^\circ+\cos 20^\circ-2\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\cos 40^\circ\right)=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20^\circ+\cos 20^\circ-\cos 20^\circ-\cos 60^\circ-\cos 40^\circ\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}-\cos 2(20^\circ)\right)=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}-2\cos^2 20^\circ+1\right)=\frac{1}{16}.$$

Равенство справедливо.

3.343. $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$.

Решение.

$$(\sin 20^\circ\sin 40^\circ)(\sin 60^\circ\sin 80^\circ)=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 140^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\right)\left(\cos 20^\circ-\cos(180^\circ-40^\circ)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(2\cos 20^\circ-1)(\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20^\circ+2\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\cos 20^\circ-\cos 40^\circ\right)=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20°+\cos 20°+\cos 60°-\cos 20°-\cos 40°\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20°+\frac{1}{2}-\cos 2(20°)\right)=\frac{1}{8}\left(2\cos^2 20°+\frac{1}{2}-2\cos^2 20°+1\right)=\frac{3}{16}.$$

Равенство справедливо.

3.344. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\left[\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\right]=$$

$$=3\sin\frac{\pi}{10}-4\sin^3\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}-4\sin^3\frac{\pi}{10}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{10}\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}=2\sin 18°\cos 36°=x.$$

Используя равенства $\cos 36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ и $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (см. примеры № 3.339 а) и б)), имеем $x=2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{1}{2}$.

Равенство справедливо.

3.345. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=$$

$$=\cos 36°+\cos 72°+\cos 144°+\cos 216°=$$

$$=\cos 36°+\cos(90°-18°)+\cos(180°-36°)+\cos(270°-54°)=$$

$$=\cos 36°+\sin 18°-\cos 36°-\sin 54°=\sin 18°-\sin 54°=\sin 18°-\sin 3(18°)=$$

$$=\left[\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\right]=$$

$$=\sin 18^\circ-3\sin 18^\circ+4\sin^3 18^\circ=4\sin^3 18^\circ-2\sin 18^\circ=$$

$$=2\sin 18^\circ\left(2\sin^2 18^\circ-1\right)=-2\sin 18^\circ\left(1-2\sin^2 18^\circ\right)=-2\sin 18^\circ\cos 36^\circ=$$

$$=\left[\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\text{ и }\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\text{ (см. № 3.339 а) и б))}\right]=$$

$$=-2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Равенство справедливо.

3.346. $\mathrm{ctg}60^\circ+\mathrm{tg}60^\circ+\mathrm{ctg}50^\circ+\mathrm{tg}50^\circ=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ.$

Решение.

$$\mathrm{ctg}60^\circ+\mathrm{tg}60^\circ+\mathrm{ctg}50^\circ+\mathrm{tg}50^\circ=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}+\frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ}+\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}=$$

$$=\frac{\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ}{\sin 60^\circ\cos 60^\circ}+\frac{\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ}{\sin 50^\circ\cos 50^\circ}=$$

$$=\frac{1}{\sin 60^\circ\cos 60^\circ}+\frac{1}{\sin 50^\circ\cos 50^\circ}=\frac{2}{2\sin 60^\circ\cos 60^\circ}+\frac{2}{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin 120^\circ}+\frac{2}{\sin 100^\circ}=\frac{2\left(\sin 100^\circ+\sin 120^\circ\right)}{\sin 120^\circ\sin 100^\circ}=$$

$$=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=\frac{4\sin 110^\circ\cos 10^\circ}{\sin 120^\circ\sin\left(90^\circ+10^\circ\right)}=\frac{4\sin\left(90^\circ+20^\circ\right)\cos 10^\circ}{\sin 120^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\cos 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ.$$

Равенство справедливо.

3.347. $8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=1.$

Решение.

$$8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=8\cos 80^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ=$$

$$=\frac{8\cos80^\circ\cos40^\circ\cos20^\circ\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{4\cos80^\circ\cos40^\circ(2\cos20^\circ\sin20^\circ)}{\sin20^\circ}=$$

$$=\frac{4\cos80^\circ\cos40^\circ\sin40^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{2\cos80^\circ(2\cos40^\circ\sin40^\circ)}{\sin20^\circ}=\frac{2\cos80^\circ\sin80^\circ}{\sin20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin160^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin20^\circ}=\frac{\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=1.$$

Равенство справедливо.

3.348. $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ=8.$

Решение.

$$\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ=$$

$$=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ)+(\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)=$$

$$=\left(\frac{\sin9^\circ}{\cos9^\circ}+\frac{\cos9^\circ}{\sin9^\circ}\right)+\left(\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}\right)-\left(\frac{\sin27^\circ}{\cos27^\circ}+\frac{\cos27^\circ}{\sin27^\circ}\right)=$$

$$=\frac{\sin^2 9^\circ+\cos^2 9^\circ}{\sin9^\circ\cos9^\circ}+\frac{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}{\sin15^\circ\cos15^\circ}-\frac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ}{\sin27^\circ\cos27^\circ}=$$

$$=\frac{1}{\sin9^\circ\cos9^\circ}+\frac{1}{\sin15^\circ\cos15^\circ}-\frac{1}{\sin27^\circ\cos27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{2\sin9^\circ\cos9^\circ}+\frac{2}{2\sin15^\circ\cos15^\circ}-\frac{2}{2\sin27^\circ\cos27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}+\frac{2}{\sin30^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}=\frac{2}{\sin18^\circ}+\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sin3(18^\circ)}=$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}+4-\frac{2}{\sin3(18^\circ)}=\left[\sin3x=3\sin x-4\sin^3 x\right]=$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}+4-\frac{2}{3\sin18^\circ-4\sin^3 18^\circ}=\frac{1}{\sin18^\circ}+4-\frac{2}{3\sin18^\circ-4(\sin18^\circ)^3}=$$

$$=\left[\sin18^\circ=\frac{\sqrt5-1}{4}\ (\text{см. № 3.339 б})\right]=$$

$$=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}+4-\frac{2}{\frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}-\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)^3}{64}}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{5}-1}+4-\frac{128}{48\left(\sqrt{5}-1\right)-4\left(8\sqrt{5}-16\right)}=\frac{8}{\sqrt{5}-1}+4-\frac{128}{16\sqrt{5}+16}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{5}-1}+4-\frac{8}{\sqrt{5}+1}=\frac{8\left(\sqrt{5}+1\right)-8\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}+4=8.$$

Равенство справедливо.

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=1.$

Решение.

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}, x\neq\pi+2\pi n, n\in Z\right]=\frac{\cos\alpha\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{1+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\sin\alpha}=1.$$

Равенство справедливо.

3.350. $\cos 70°+8\cos 20°\cos 40°\cos 80°=2\cos^2 35°$.

Решение.

$\cos 70°+8\cos 20°\cos 40°\cos 80°=$

$$=\cos 2(35^\circ)+\frac{8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\cos 2(35^\circ)+\frac{4(2\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{2(2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=2\cos^2 35^\circ-1+\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos^2 35^\circ-1+1=2\cos^2 35^\circ.$$

Равенство справедливо.

3.351. $1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)-\sin^2\frac{3}{2}\alpha+\cos^2\frac{3}{2}\alpha=2\sqrt{2}\cos\frac{3}{2}\alpha\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$

Решение.

$$1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)-\sin^2\frac{3}{2}\alpha+\cos^2\frac{3}{2}\alpha=$$

$$=1+\sin 3\alpha-\sin^2\frac{3\alpha}{2}+\cos^2\frac{3\alpha}{2}=\sin 3\alpha+2\cos^2\frac{3\alpha}{2}=$$

$$=\sin 2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+2\cos^2\frac{3\alpha}{2}=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos^2\frac{3\alpha}{2}=$$

$$=2\cos\frac{3\alpha}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=[\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)]=2\sqrt{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Равенство справедливо.

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=\cos 2\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha}{4\sin 3\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)+\sin 2(3\alpha)}{4\sin 3\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \sin 2x=2\sin x\cos x\right]=$$

$$=\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha+2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{4\sin 3\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 3\alpha(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{4\sin 3\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\left[\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\cos 2\alpha.$$

Равенство справедливо.

3.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4.$

Решение.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\cdot 2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y);\ 2\sin x\cos y=\sin 2x\right]=$$

$$=\frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=4.$$

Равенство справедливо.

3.354. $\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=\sin 30^\circ$.

Решение.

$\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=$

$$=\left[\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4};\ \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ (\text{см. № 3.339 а) и б)})\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ.$$

Равенство справедливо.

Вычислить: (**3.355—3.367**):

3.355. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

Решение.

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=$$

$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(\sin^2\frac{5\pi}{8}\right)^2+\left(\cos^2\frac{7\pi}{8}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=$$

$$=2\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+2\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=2\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2=$$

$$=2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2+2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{4-4\sqrt{2}+2}{8}+\frac{4+4\sqrt{2}+2}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3.356. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

Решение.

$$\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ = (\sin 20^\circ \cos 10^\circ)(\sin 60^\circ \cos 50^\circ)=$$

$$=\left[\sin x \cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 10^\circ+\sin 30^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sin 10^\circ+\sin 110^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin 10^\circ+\frac{1}{2}\right)\cdot(\sin 10^\circ+\sin(90^\circ+20^\circ))=$$

$$=\frac{1}{8}(2\sin 10^\circ+1)(\sin 10^\circ+\cos 20^\circ)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\sin^2 10^\circ+2\sin 10^\circ\cos 20^\circ+\sin 10^\circ+\cos 20^\circ\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\sin^2 10^\circ+\sin(-10^\circ)+\sin 30^\circ+\sin 10^\circ+1-2\sin^2 10^\circ\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\sin^2 10^\circ-\sin 10^\circ+\frac{1}{2}+\sin 10^\circ+1-2\sin^2 10^\circ\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}.$$

Ответ: $\frac{3}{16}$.

3.357. $\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$.

Решение.

$$\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\frac{5\pi-2\pi}{5}\cos\frac{5\pi+\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=-\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right)\cos\frac{\pi}{5}=$$

$$=2\cos^3\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=2(\cos 36^\circ)^3-\cos 36^\circ=$$

$$=\left[\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\ (\text{см. № 3.339 а})\right]=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^3-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

3.358. $\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 37^\circ}$.

Решение.

$$\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 37^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos(90^\circ-8^\circ)\cos(90^\circ-68^\circ)}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos(90^\circ-23^\circ)\cos(90^\circ-53^\circ)}=$$

$$=\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\sin 68^\circ\sin 8^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\sin 53^\circ\sin 23^\circ}=\left[\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)\right]=$$

$$=\frac{\cos 76^\circ}{\cos 76^\circ}=1.$$

Ответ: 1.

3.359. $\frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ+\cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ+\cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

Решение.

$$\frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ+\cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ+\cos 81^\circ \cos 21^\circ}=$$

$$=\frac{\cos(90^\circ-20^\circ)\cos 10^\circ+\cos(90^\circ-10^\circ)\cos 20^\circ}{\cos(90^\circ-21^\circ)\cos 9^\circ+\cos(90^\circ-9^\circ)\cos 21^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ+\cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ+\cos 21^\circ \sin 9^\circ}=\left[\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)\right]=$$

$$=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=1.$$

Ответ: 1.

3.360. $\frac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ-\cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ-\cos 38^\circ \cos 22^\circ}-\operatorname{tg} 164^\circ$.

Решение.

$$\frac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ-\cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ-\cos 38^\circ \cos 22^\circ}-\operatorname{tg} 164^\circ=$$

$$=\frac{\cos 67^\circ \cos(90^\circ-83^\circ)-\cos 83^\circ \cos(90^\circ-67^\circ)}{\cos(90^\circ+38^\circ)\cos(90^\circ-22^\circ)-\cos 38^\circ \cos 22^\circ}-\operatorname{tg}(180^\circ-16^\circ)=$$

$$=\frac{\sin 83^\circ \cos 67^\circ-\cos 83^\circ \sin 67^\circ}{-\sin 38^\circ \sin 22^\circ-\cos 38^\circ \cos 22^\circ}+\operatorname{tg} 16^\circ=$$

$$=\frac{\sin 83^\circ \cos 67^\circ-\cos 83^\circ \sin 67^\circ}{-(\cos 38^\circ \cos 22^\circ+\sin 38^\circ \sin 22^\circ)}+\operatorname{tg} 16^\circ=$$

$$=\left[\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y);\right.$$

$$\left.\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\right]=$$

$$=\frac{\sin 16^\circ}{-\cos 16^\circ}+\operatorname{tg} 16^\circ=-\operatorname{tg} 16^\circ+\operatorname{tg} 16^\circ=0.$$

Ответ: 0.

3.361. $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

Решение.

$$\frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos(180^\circ - 22^\circ)\cos(90^\circ + 8^\circ)}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos(180^\circ - 23^\circ)\cos(90^\circ + 7^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 22^\circ \sin 8^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 23^\circ \sin 7^\circ} =$$

$$= [\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)] = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

3.362. $\dfrac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha + 1}{8\sin\alpha + 9\cos\alpha - 1}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 4$.

Решение.

$$\frac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha + 1}{8\sin\alpha + 9\cos\alpha - 1} = \left[\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{12\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{7\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 1}{\dfrac{16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{9\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{12\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 7 + 7\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 9 - 9\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 12\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 6}{-10\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 16\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 8} = \frac{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 3}{-5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 4} = \frac{64 + 24 - 3}{-80 + 32 + 4} = -\frac{85}{44},$$

так как $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 4$.

Ответ: $-\frac{85}{44}$.

3.363. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\frac{11\pi}{4}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(3\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\ x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\ x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}=\left[\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}\right]=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}-1}{1+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{7}-7=-\frac{50}{7}.$$

Ответ: $-\frac{50}{7}$.

3.364. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$; $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{21}{65},\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{-\frac{21}{65}}{-\frac{27}{65}},\ \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{49}{81},$$

$$\frac{1-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{49}{81},\ \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}-1=\frac{49}{81},\ \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{81}{130}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{9}{\sqrt{130}};\ \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{81}{130},$$

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1-\frac{81}{130}=\frac{49}{130},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Используя условие задачи, определим, в какой четверти находится угол $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Имеем:

$$+\begin{array}{l}\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}<0\\ \hline \pi<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}\end{array}.$$

Таким образом, угол $\frac{\alpha+\beta}{2}$ лежит в третьей четверти единичного круга. Отсюда $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$.

Ответ: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$.

3.365. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}$; $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

Решение.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{49}{81},$$

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{49}{81}\Rightarrow\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Так как $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$, то $\pi<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}$, т.е. угол $\frac{\alpha+\beta}{2}$ находится в третьей четверти единичного круга и $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}<0$.

Отсюда $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}\Rightarrow-\frac{14}{\sqrt{130}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{27\sqrt{130}}{14\cdot65}=\frac{27\sqrt{130}\cdot\sqrt{130}}{14\cdot65\cdot\sqrt{130}}=\frac{27\cdot130}{14\cdot65\cdot\sqrt{130}}=\frac{27}{7\sqrt{130}}.$$

Ответ: $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{27}{7\sqrt{130}}$.

3.366. $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = n$.

Решение.

$$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)\left(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) =$$

$$= [\sin\alpha - \cos\alpha = n] = n(1 + \sin\alpha\cos\alpha) = \left[\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1-n^2}{2}\right] =$$

$$= n\left(1 + \frac{1-n^2}{2}\right) = \frac{n\left(2+1-n^2\right)}{2} = \frac{n\left(3-n^2\right)}{2} = \frac{3n-n^3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3n-n^3}{2}$.

3.367. $\frac{2\sin2\alpha - 3\cos2\alpha}{4\sin2\alpha + 5\cos2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Решение.

$$\frac{2\sin2\alpha - 3\cos2\alpha}{4\sin2\alpha + 5\cos2\alpha} = \left[\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{3-3\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{5-5\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 3 + 3\operatorname{tg}^2\alpha}{8\operatorname{tg}\alpha + 5 - 5\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= [\operatorname{tg}\alpha = 3] = \frac{4\cdot3 - 3 + 3\cdot9}{8\cdot3 + 5 - 5\cdot9} = -\frac{9}{4}.$$

Ответ: $-\frac{9}{4}$.

Зная, что A, B, C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать справедливость равенств (**3.368—3.374**):

3.368. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Решение.

$$(\sin A+\sin B)+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(180^\circ-(A+B))=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=2\sin\frac{180^\circ-C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$

$$=4\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Равенство справедливо.

3.369. $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}.$

Решение.

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\left[\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$$

(см. № 3.368), $\left.\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\right]=$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C}=$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin(180^\circ-(A+B))}=$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin(A+B)}=$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{180°-C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

Равенство справедливо.

3.370. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

Решение.

$$(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C=$$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2(180°-(A+B))=$$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin(360°-2(A+B))=$$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B) =$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - 2\sin(A+B)\cos(A+B) =$

$= 2\sin(A+B)(\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 2\sin C \cdot 2\sin A \sin B =$

$= 4\sin A \sin B \sin C.$

Равенство справедливо.

3.371. $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \mathrm{tg} A + \mathrm{tg} B.$

Решение.

$$\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(180°-(A+B))}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} =$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} =$$

$= \mathrm{tg} A + \mathrm{tg} B.$

Равенство справедливо.

3.372. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos\frac{3}{2}A \cos\frac{3}{2}B \cos\frac{3}{2}C.$

Решение.

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = \left[\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right] =$$

$$= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin 3C =$$

$$= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin(540°-3(A+B)) =$$

$$= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin(3A+3B) =$$

$$= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A+3B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} + \cos\frac{3A+3B}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} + \cos\frac{3A+3B}{2}\right) =$$

$$=2\sin\frac{3(180^\circ-C)}{2}\cdot 2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}= 4\sin\left(270^\circ-\frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=$$

$$=-4\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=-4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C.$$

Равенство справедливо.

3.373. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$

Решение.

$$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=\left[\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right]=$$

$$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)+\sin 4C=$$

$$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)+\sin 4(180^\circ-(A+B))=$$

$$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)+\sin(720^\circ-4(A+B))=$$

$$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)-\sin 4(A+B)=$$

$$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)-2\sin(2A+2B)\cos(2A+2B)=$$

$$=2\sin(2A+2B)(\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B))=$$

$$=2\sin 2(A+B)(\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B))=$$

$$=\left[\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\right]=2\sin 2(180^\circ-C)\cdot 2\sin 2A\sin 2B=$$

$$=4\sin(360^\circ-2C)\sin 2A\sin 2B=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

Равенство справедливо.

3.374. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$

Решение.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{180^\circ-(A+B)}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=\left[\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}\right]=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=$$

$$=[\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y]=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1.$$

Равенство справедливо.

3.375. Найти $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

Решение.

Пусть $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

Так как $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha\neq(2n+1)\pi$, $n\in Z$, то

имеем $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-5\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2=0$, откуда, решая это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, находим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$.

3.376. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$, найти $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}=\left[1-2\sin^2 x=\cos 2x\right]=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=$$

$$=\left[\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right]=$$

$$=\frac{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=Z.$$

Используя значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$, имеем $Z=\frac{1-m}{1+m}$.

Ответ: $\frac{1-m}{1+m}$.

3.377. Найти значение выражения $\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, если известно, что

$\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

Решение.

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\cos\alpha\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha\sin\alpha.$$

Возведя обе части равенства $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ в квадрат, получим

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$.

Ответ: $\frac{m^2-1}{2}$.

3.378. Известно, что $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$. Найти $\operatorname{ctg}\beta$.

Решение.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{p}{q}.$$

После деления числителя и знаменателя левой части этого равенства на $\cos\alpha\sin\beta\neq 0$, имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}=\frac{p}{q};\ q\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+q=p\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-p,$$

$$p\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-q\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=p+q,\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot(p-q)=p+q,$$

откуда $\operatorname{ctg}\beta=\frac{p+q}{(p-q)\operatorname{tg}\alpha}=\frac{p+q}{p-q}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$

Ответ: $\frac{p+q}{(p-q)\operatorname{tg}\alpha}=\frac{p+q}{p-q}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$

3.379. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

Решение.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=1-\frac{3}{4}(\sin 2\alpha)^2=$$

$$=\left[\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2,\sin 2\alpha=m^2-1\right]=$$

$$=1-\frac{3}{4}\left(m^2-1\right)^2=\frac{4-3\left(m^4-2m^2+1\right)}{4}=$$

$$=\frac{4-3m^4+6m^2-3}{4}=\frac{1+6m^2-3m^4}{4}.$$

Ответ: $\frac{1+6m^2-3m^4}{4}.$

3.380. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$.

Решение.

По формулам универсальной тригонометрической подстановки имеем

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq(2n+1)\pi;\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq(2n+1)\pi;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

По условию $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$, поэтому $\sin 2\alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{p^2+q^2}$;

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\frac{p^2}{q^2}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2};\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1-\frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{q^2-p^2}.$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \frac{2pq}{p^2+q^2}$; $\cos 2\alpha = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$; $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2pq}{q^2-p^2}$.

3.381. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$.

Решение.

Решив уравнение $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ как квадратное относительно $\operatorname{ctg}\alpha$, имеем $(\operatorname{ctg}\alpha)_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4} = \frac{-7\pm 5}{4}$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ или $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$. В случае а) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}, -\infty < \operatorname{tg}\alpha < -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$. Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}.$$

В случае б) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}2\pi, -1 < \operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$. Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$.

3.382. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение.

Решив уравнение $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ как квадратное относительно $\operatorname{tg}\alpha$, получим $(\operatorname{tg}\alpha)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

В случае а) $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\pi < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$, $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

В случае б) $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$, $1 < \operatorname{tg}\alpha < \infty \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 3$. Тогда

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{5}$.

3.383. Известно, что $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{p}{q}$. Найти $\operatorname{tg}\beta$.

Решение.

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{p}{q}.$$

Разделив числитель и знаменатель левой части этого равенства на $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, получим

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{p}{q},$$

$$q-q\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=p+p\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta;\ p\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+q\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=q-p,$$

$$(p+q)\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=q-p\Rightarrow\operatorname{tg}\beta=\frac{q-p}{(q+p)\operatorname{tg}\alpha}=\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha.$

3.384. Доказать, что выражение $\dfrac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}$

не зависит от α, где $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}$.

Решение.

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1-2\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2+\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-\left(2\cos^2\alpha-1\right)+\sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-2\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=\frac{-2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=-2.$$

Ответ: -2.

3.385. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

Решение.

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\left[\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},\, x,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{2\pi-(\alpha+\beta)}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\left(\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, что и требовалось доказать.

3.386. Доказать, что выражение

$\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)$ не зависит от α, если

$\alpha\neq\frac{\pi}{8}(4n+3)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)=$$

$$=-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)}\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha=-\frac{1+\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha=$$

$$=-1-\sin 4\alpha+\sin 4\alpha=-1.$$

Ответ: -1.

3.387. Доказать, что выражение $\dfrac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$ не зависит от α, если $\alpha\neq\dfrac{\pi n}{2}$.

Решение.

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=$$

$$=\frac{1-\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^4-\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^4}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)-1}=$$

$$=\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-1}=$$

$$=\frac{1-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{1-\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}{\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{1-1+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

3.388. Доказать, что выражение $\sin(250°+\alpha)\cos(200°-\alpha)-\cos 240°\times$ $\times\cos(220°-2\alpha)$ не зависит от α.

Решение.

$$\sin(250°+\alpha)\cos(200°-\alpha)-\cos 240°\cos(220°-2\alpha)=$$

$$=\sin(270°+(\alpha-20°))\cos(180°-(\alpha-20°))-$$

$$-\cos(270°-30°)\cos(180°-(2\alpha-40°))=$$

$$=-\cos(\alpha-20°)(-\cos(\alpha-20°))-(-\sin 30°)(-\cos(2\alpha-40°))=$$

$$=\cos^2(\alpha-20°)-\frac{1}{2}\cos 2(\alpha-20°)=$$

$$=\cos^2(\alpha-20°)-\frac{1}{2}\left(2\cos^2(\alpha-20°)-1\right)=$$

$$=\cos^2(\alpha-20°)-\cos^2(\alpha-20°)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Число $\frac{1}{2}$ не зависит от α, что и требовалось доказать.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.389. Доказать, что выражение $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-$ $-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не зависит ни от α, ни от φ.

Решение.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)=$$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+(\cos(\alpha+\varphi))^2-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)=$$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)^2-2\cos\alpha\cos\varphi\times$$

$$\times(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)=\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2\alpha\cos^2\varphi-$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\alpha\sin^2\varphi-2\cos^2\alpha\cos^2\varphi+2\sin\alpha\cos\alpha\times$$

$$\times\sin\varphi\cos\varphi=\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\sin^2\alpha\sin^2\varphi-\cos^2\alpha\cos^2\varphi=$$

$$=\left(\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\varphi\right)+\cos^2\varphi+\sin^2\alpha\sin^2\varphi=$$

$$=\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\varphi\right)+\cos^2\varphi+\sin^2\alpha\sin^2\varphi=$$

$$=\left(\cos^2\alpha\sin^2\varphi+\sin^2\alpha\sin^2\varphi\right)+\cos^2\varphi=$$

$$=\sin^2\varphi\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+\cos^2\varphi=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1.$$

Число 1 не зависит ни от α, ни от φ, что и требовалось доказать.

Ответ: 1.

3.390. Вывести формулу $\cos(n+1)\alpha=2\cos\alpha\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha$, где n — любое действительное число, и с ее помощью представить $\cos 3\alpha$ и $\cos 4\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$.

Решение.

$$\cos(n+1)\alpha=\cos(n\alpha+\alpha)=\left[\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\right]=$$

$$=\cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha=2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha=$$

$$=2\cos n\alpha\cos\alpha-(\cos n\alpha\cos\alpha+\sin n\alpha\sin\alpha)=$$

$$=2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n\alpha-\alpha)=2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2+1)\alpha=2\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha=$$

$$=2\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)-\cos\alpha=4\cos^3\alpha-2\cos\alpha-\cos\alpha=$$

$$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\cos 4\alpha=\cos(3+1)\alpha=2\cos\alpha\cos 3\alpha-\cos 2\alpha=$$

$$=2\cos\alpha\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)-\left(2\cos^2\alpha-1\right)=$$

$$=8\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1==8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1.$$

Ответ: $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$.

3.391. Доказать, что $4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Решение.

$$4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\right]=$$

$$=2(\cos\alpha-\cos60^\circ)=2\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)=2\cos\alpha-1=2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)-1=$$

$$=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-2-1=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-3=\frac{\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2}-3\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\cos^3\frac{\alpha}{2}-3\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$ что и требовалось доказать.

3.392. Дано, что $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq2\pi n$ $(n\in Z)$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Решение.

По условию $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)\Leftrightarrow2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Так как $\alpha+\beta\neq2\pi n$ $(n\in Z)$, то $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\neq0$.

Таким образом

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Разделив обе части этого равенства на $3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$, получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3.393. Показать, что если p постоянно, то функция $f(a)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ также является постоянной.

Решение.

Используя формулы $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ и $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, имеем

$$f(a)=\frac{p\cos^3\alpha-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)}{\cos\alpha}+$$

$$+\frac{p\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{p\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}+$$

$$+\frac{p\sin^3\alpha-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\left(p\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha+3\right)}{\cos\alpha}+$$

$$+\frac{\sin\alpha\left(p\sin^2\alpha-4\sin^2\alpha+3\right)}{\sin\alpha}=$$

$= p\cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 + p\sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 3 =$

$= \left(p\cos^2\alpha + p\sin^2\alpha\right) - \left(4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha\right) + 6 =$

$= p\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) - 4\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) +$

$+6 = p - 4 + 6 = p + 2.$

Ответ: $f(a) = p + 2.$

3.394. Дана функция $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$. Найти $f(\alpha)$, если известно, что $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.

Решение.

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x =$$

$$= 1 - 2\cos^2 x\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\left(4\cos^2 x\sin^2 x\right) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x;$$

$$f(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Ответ: $f(\alpha) = \frac{7}{9}$.

3.395. Доказать, что если $\alpha + \beta = 60^\circ$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, то $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \le \frac{1}{3}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)} \le \frac{1}{3},$$

$$\frac{(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))}{(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}\le\frac{1}{3}.$$

Так как $\alpha+\beta=60^\circ$, то неравенство имеет вид

$$\frac{2\cos(\alpha-\beta)-1}{2\cos(\alpha-\beta)+1}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow 4\cos(\alpha-\beta)\le 4,\ \cos(\alpha-\beta)\le 1\ (\cos(\alpha-\beta)\ge 0).$$

Последнее неравенство истинно. Что и требовалось доказать.

Решения к главе 4

ПРОГРЕССИИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называемым *разностью прогрессии.*

Если заданы первый член a_1 и разность арифметической прогрессии d, то n-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1). \tag{4.1}$$

Формула (4.1) *называется формулой общего члена арифметической прогрессии.*

Свойства членов арифметической прогрессии

1. Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k = 2, 3..., n-1. \tag{4.2}$$

2. В конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_k + a_{n-k+1} = ... = 2a_1 + d(n-1). \tag{4.3}$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Сумма п первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (4.4)$$

Учитывая (4.3), т.е. что $a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$, формулу (4.4) можно записать в виде

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4.5)$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член b_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же постоянное для данной последовательности число q, называемое *знаменателем прогрессии.*

Если заданы первый член b_1 и знаменатель геометрической прогрессии q то n-й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \qquad (4.6)$$

Формула(4.6) называется *формулой общего члена геометрической прогрессии.*

Свойства членов геометрической прогрессии

1.Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов, т.е.

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}, \; k = 2, 3..., n-1. \qquad (4.7)$$

2.В конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1} = ... = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \qquad (4.8)$$

3.Произведение n первых членов геометрической прогрессии с положительными членами равно корню квадратному из n-й степени произведения ее крайних членов:

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}. \tag{4.9}$$

В общем случае

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} \quad (q \neq 1). \tag{4.10}$$

Учитывая (4.6), т.е. что $b_n = b_1 q^{n-1}$, формулу (4.10) можно представить в виде

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{4.11}$$

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

Бесконечный числовой ряд, образованный из членов геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ при $|q| < 1$, сходится, и его сумма S равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4.12}$$

Формулу (4.12) называют также *формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

4.036. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 21, \\ b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 189, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1 + q + q^2\right) = 21, \\ b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 189. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение системы на первое $\dfrac{b_1\left(q^4 + q^2 + 1\right)}{q^2 + q + 1} = 9$, а затем числитель этой дроби на знаменатель, получим $b_1\left(q^2 - q + 1\right) = 9$.

Система имеет вид

$$\begin{cases} b_1\left(q^2 + q + 1\right) = 21, \\ b_1\left(q^2 - q + 1\right) = 9, \end{cases} \Rightarrow \frac{21}{q^2 + q + 1} \cdot \left(q^2 - q + 1\right) = 9 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

откуда $q_1 = \dfrac{1}{2}$, $q_2 = 2$. Тогда $b_1 = 12$ или $b_1 = 3$.

Ответ: 1) 12, $\dfrac{1}{2}$; 2) 3, 2.

4.037. Доказать, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

Решение.

Пусть a_k — любой член арифметической прогрессии, тогда a_{k-p}, a_{k+p} — два равноудаленных от него члена.

По формуле общего члена находим

$$a_{k-p} = a_1 + d(k - p - 1),$$

$$a_{k+p} = a_1 + d(k + p - 1).$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_1 + 2d(k-1) = 2\left(a_1 + d(k-1)\right),\ a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_k,$$

откуда $a_k = \dfrac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2}$.

Что и требовалось доказать.

4.038. Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены a_{2n} и a_{2m} такие, что $a_{2n} / a_{2m} = -1$. Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то каков номер этого члена?

Решение.

Из условия $\frac{a_{2n}}{a_{2m}} = -1$. Отсюда $a_{2n} = -a_{2m}$. Пусть a_{2n} и a_{2m} — равностоящие от a_k члены, тогда, по свойству членов арифметической прогрессии (см. №4.037), $a_k = \frac{a_{2n} + a_{2m}}{2} = \frac{-a_{2m} + a_{2m}}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $k = \frac{2n + 2m}{2} = n + m$.

Ответ: Да; $n + m$.

4.039. Даны две арифметические прогрессии. Первый и пятый члены первой прогрессии равны соответственно 7 и –5. У второй прогрессии первый член равен 0, а последний равен 7/2. Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

Решение.

Из условия $a_1 = 7$, $a_5 = -5$, $b_1 = 0$, $b_n = \frac{7}{2}$, $a_3 = b_3$.

Далее $a_5 = a_1 + 4d = 7 + 4d = -5$, $4d = -12$, $d = -3$.

Имеем $a_3 = b_3$, $a_1 + 2d = b_1 + 2D$, $7 + 2(-3) = 0 + 2D$, $D = \frac{1}{2}$.

Тогда $b_n = b_1 + (N-1)D = 0 + (N-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{N-1}{2}$, $\frac{N-1}{2} = \frac{7}{2}$, $N = 8$.

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_N = \frac{b_1 + b_N}{2}\cdot N = \frac{0 + \frac{7}{2}}{2}\cdot 8 = 14.$$

Ответ: 14.

4.040. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение.

Пусть b_1, b_1q, b_1q^2 — данные числа, тогда

b_1, b_1q, b_1q^2 — члены геометрической прогрессии,

b_1, b_1q, b_1q^2-4 — члены арифметической прогрессии,

b_1, b_1q-1, b_1q^2-5 — члены геометрической прогрессии.

Используя свойства членов арифметической прогрессии (см. № **4.037**) $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ и свойство членов геометрической прогрессии $b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$, $k = 2, 3, ..., n-1$, получим

$$\begin{cases} 2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 4, \\ (b_1q-1)^2 = b_1(b_1q^2-5). \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $b_1^2q^2 - 2b_1q + 1 = b_1^2q^2 - 5b_1$, $2b_1q - 5b_1 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2q-5}$. Подставляя это значение b_1 в первое уравнение, получим

$\frac{2q}{2q-5} = \frac{1+q^2}{2q-5} - 4$, откуда $q^2 - 10q + 21 = 0$, откуда $q_1 = 7$, $q_2 = 3$.

Тогда $b_1' = \frac{1}{9}$, $b_2' = \frac{7}{9}$, $b_3' = \frac{49}{9}$ или $b_1'' = 1$, $b_2'' = 3$, $b_3'' = 9$.

Ответ: 1) $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$; 2) 1, 3, 9.

4.041. Найти целое положительное число n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3(n-1)) + \left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right) = 137.$$

Решение.

В первых скобках находится сумма членов арифметической прогрессии S_k, где $a_1 = 3$, $d = 3$, $a_k = 3(n-1)$, $k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{3n-3-3}{3} + 1 = n - 1$; во вторых скобках находится сумма членов арифметической прогрессии, где

$$b_1 = 4,\ d = 1{,}5,\ a_m = \frac{8+3n}{2},\ m = \frac{a_m - a_1}{d} + 1 = \frac{\frac{8+3n}{2} - 4}{1{,}5} + 1 = n + 1.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\frac{3+3(n-1)}{2}\cdot(n-1) + \frac{4+\frac{8+3n}{2}}{2}\cdot(n+1) = 137 \Leftrightarrow 9n^2 + 13n - 532 = 0.$$

Отсюда $n_1 = -\frac{76}{9}$, $n_2 = 7$; $n_1 = -\frac{76}{9}$ не подходит, так как n — целое.

Ответ: 7.

4.042. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение.

Из условия

$$\begin{cases} a_1 = 102, \\ a_n = 996, \\ d = 6. \end{cases}$$

Используя формулу $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$, имеем $n = \frac{996-102}{6} + 1 = 150$,

$$S_n = \frac{102+996}{2} \cdot 150 = 82350.$$

Ответ: 82350.

4.043. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = 4, \\ b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = 192, \\ |q| < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = 4, \\ b_1^3 + b_1^3 q^3 + b_1^3 q^6 \ldots = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = 4, \\ b_1^3\left(1 + q^3 + q^6 + \ldots\right) = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 4, \\ b_1^3 \cdot \frac{1}{1-q^3} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1^3}{(1-q)\left(1+q+q^2\right)} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=4,\\ 4\cdot\dfrac{b_1^2}{1+q+q^2}=192,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ \dfrac{b_1^2}{1+q+q^2}=48.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{16(1-q)^2}{1+q+q^2}=48\Leftrightarrow\ 2q^2+5q+2=0,\text{ откуда }\quad q_1=-2,\quad q_2=-\frac{1}{2};$$

$q_1=-2$ не подходит, так как $|q|<1$. Тогда $b_1=4\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=6.$

Ответ: $6,\ -\dfrac{1}{2}$.

4.044. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

Решение.

Пусть $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^2+d$ — данные числа.

Из условия имеем:

b_1, b_1q, b_1q^2 — члены геометрической прогрессии,

b_1, b_1q+d, b_1q+2d — члены арифметической прогрессии,

$b_1+b_1q+2d=21, b_1q+b_1q+d=18.$

Так как $b_3=b_1q^2=b_1q+2d$, то имеем $\begin{cases}b_1q^2=b_1q+d,\\ b_1+b_1q+2d=21,\Rightarrow\\ b_1q+b_1q+d=18,\end{cases}$

Подставив это значение d во второе и третие уравнение, получим

$$\Rightarrow\begin{cases}b_1+b_1q+2\left(b_1q^2-b_1q\right)=21,\\ 2b_1q+b_1q^2-b_1q=18,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b_1+2b_1q^2-b_1q=21,\\ b_1q+b_1q^2=18,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1\left(2q^2-q+1\right)=21,\\ b_1\left(q+q^2\right)=18,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b_1=\dfrac{21}{2q^2-q+1}, \\ \dfrac{21(q+q^2)}{2q^2-q+1}=18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\dfrac{21}{2q^2-q+1}, \\ 5q^2-13q+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\dfrac{21}{2q^2-q+1}, \\ \left[\begin{array}{l} q_1=2, \\ q_2=\dfrac{3}{5}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда:

$$1)\ \begin{cases} b_1'=\dfrac{21}{8-2+1}=3, \\ q_1=2, \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} b_1''=\dfrac{21}{2\cdot\dfrac{9}{25}-\dfrac{3}{5}+1}=18{,}75, \\ q_2=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Тогда $q_1=2$, $d_1=3\cdot4-3\cdot2=6$, $b_1'=3$, $b_2'=3\cdot2=6$, $b_3'=3\cdot4=12$, $b_4'=6+12=18$, $q_2=\dfrac{3}{5}$, $d_2=18{,}75\cdot\dfrac{9}{25}-18{,}75\cdot\dfrac{3}{5}=-4{,}5$, $b_1''=18{,}75$, $b_2''=11{,}25$, $b_3''=6{,}75$, $b_4''=2{,}25$.

Ответ: 1) 3, 6, 12, 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75; 2,25.

4.045. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

Решение.

Из условия имеем:

b_1, b_1q, b_1q^2 — члены геометрической прогрессии,

b_1+25, b_1q+27, b_1q^2 — члены арифметической прогрессии, тогда получаем

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=91, \\ 2(b_1q+27)=b_1+25+b_1q^2+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=91, \\ b_1(q^2-2q+1)=28, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1=\frac{91}{1+q+q^2},\quad \frac{91(q^2-2q+1)}{1+q+q^2}=28,\quad 3q^2-10q+3=0, \text{ откуда}$$

$$q_1=3,\ q_2=\frac{1}{3}.$$

Тогда $b_1'=\dfrac{91}{1+3+9}=\dfrac{91}{13}=7$ или

$$b_1''=\frac{91}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\frac{819}{9+3+1}=\frac{819}{13}=63.$$

Отсюда $b_7'=b_1'\cdot q_1^6=7\cdot 3^6=5103$; $b_7''=b_1''q_2^6=63\cdot\frac{1}{3^6}=\frac{63}{729}=\frac{7}{81}$.

Ответ: 5103 или $\frac{7}{81}$.

4.046. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение.

Пусть b_1, b_2, b_3 — члены геометрической прогрессии, b_1, b_2+2, b_3 — члены арифметической прогрессии, b_1, b_2+2, b_3+9 — члены геометрической прогрессии. Тогда b_1, b_1q+2, b_1q^2+9 — члены геометрической прогрессии.

Имеем:

$$\begin{cases}2(b_1q+2)=b_1+b_1q^2,\\(b_1q+2)^2=b_1\cdot(b_1q^2+9),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b_1q+4=b_1+b_1q^2,\\b_1^2q^2+4b_1q+4=b_1^2q^2+9b_1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b_1(q^2-2q+1)=4,\\b_1(9-4q)=4.\end{cases}\Rightarrow b_1=\frac{4}{9-4q},\ \frac{4(q^2-2q+1)}{9-4q}=4\Rightarrow$$

$\Rightarrow q^2+2q-8=0$, откуда $q_1=-4$, $q_2=2$.

Тогда $b_1'=\frac{4}{9+16}=\frac{4}{25}$, $b_2'=\frac{4}{25}(-4)=-\frac{16}{25}$, $b_3'=\frac{64}{25}$ или

$b_1''=\frac{4}{9-8}=4$, $b_2''=4\cdot 2=8$, $b_3''=16$.

Ответ: 1) 4, 8, 16; 2) $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

4.047. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно 14/3.

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 64 \\ \dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \dfrac{14}{3} \cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 = 64, \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_1q)^3 = 64, \\ b_1(1+q+q^2) = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q = 4, \\ b_1(1+q+q^2) = 14, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{4}{q}, \frac{4(1+q+q^2)}{q} = 14,\ 2q^2 - 5q + 2 = 0, \text{откуда } q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда $b_1' = \dfrac{4}{2} = 2,\ b_2' = 2 \cdot 2 = 4, b_3' = 2 \cdot 4 = 8$ или $b_1'' = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 8,$

$b_2'' = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4,\ b_3'' = 8 \cdot \dfrac{1}{4} = 2.$

Ответ: 1) 2,4,8; 2) 8,4,2.

4.048. Доказать, что любой член знакоположительной геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему пропорциональному между любыми членами, равноудаленными от него.

Решение.

Имеем $b_{k-p} = b_1q^{k-p-1}, b_{k+p} = b_1q^{k+p-1}$.

Перемножая эти равенства, получим $b_{k-p} \cdot b_{k+p} = b_1^2q^{2(k-1)}$ или $(b_1q^{k-1})^2 = b_{k-p} \cdot b_{k+p}$, откуда $b_1q^{k-1} = \sqrt{b_{k-p} \cdot b_{k+p}}$, т.е. $b_k = \sqrt{b_{k-p} \cdot b_{k+p}}$.

4.049. Найти сумму семи первых членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, если ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно 16/3.

Решениею.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} b_2 = 4, \\ \dfrac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 \ldots} = \dfrac{16}{3}, \\ |q| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q = 4, \\ \dfrac{b_1^2(1+q^2+q^4+\ldots)}{b_1(1+q+q^2+\ldots)} = \dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b_1q=4, \\ \dfrac{b_1\cdot\dfrac{1}{1-q^2}}{\dfrac{1}{1-q}}=\dfrac{16}{3}, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b_1q=4, \\ \dfrac{b_1}{1+q}=\dfrac{16}{3}, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{16(1+q)q}{3}=4, \\ b_1=\dfrac{16(1+q)}{3}, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4q^2+4q-3=0, \\ b_1=\dfrac{16(1+q)}{3}, \end{cases}\Rightarrow q_1=-\frac{3}{2}, q_2=\frac{1}{2}.$$

$q_1=-\dfrac{3}{2}$ не подходит, т.к. $|q|<1$. Следовательно, $b_1=\dfrac{16\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}{3}=8;$

$$S_7=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{8\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{127}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{127}{8}$.

4.050. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} a_1=105, \\ a_n=994, \\ d=7, \end{cases}\Rightarrow n=\frac{994-105}{7}+1=128,\ S_n=\frac{105+994}{2}\cdot128=70336.$$

Ответ: 70336.

4.051. Найти сумму $\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(4+\dfrac{1}{4}\right)^2+\ldots\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right)^2$.

Решение.

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2=$$

$$=\left(4+2+\frac{1}{4}\right)+\left(16+2+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(2^{2n}+2+\frac{1}{2^{2n}}\right)=$$

$$=\left(4+16+\ldots+2^{2n}\right)+\underbrace{\left(2+2+\ldots+2\right)}_{n\text{ раз}}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right)=$$

$$=\left(4+4^2+4^3+\ldots+4^n\right)+2n+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=$$

$$=\frac{4-4^n\cdot 4}{1-4}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+2n=\frac{4\left(4^n-1\right)}{3}+\frac{4^n-1}{3\cdot 4^n}+2n=$$

$$=\frac{\left(4^n-1\right)\left(4^{n+1}+1\right)}{3\cdot 4^n}+2n.$$

Ответ: $\dfrac{\left(4^n-1\right)\left(4^{n+1}+1\right)}{3\cdot 4^n}+2n.$

4.052. Даны две бесконечные геометрические прогрессии со знаменателем $|q|<1$, различающиеся только знаком их знаменателей. Их суммы соответственно равны S_1 и S_2. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов любой из данной прогрессий.

Решение.

Из условия имеем $S_1=\dfrac{b_1}{1-q}$, $S_2=\dfrac{b_1}{1+q}$, $|q|<1$. Далее,

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots=b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+\ldots=b_1^2\left(1+q^2+q^4+\ldots\right).$$

Выражение в скобках — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен единице, а знаменатель равен q^2. По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем

$$b_1^2\left(1+q^2+q^4+\ldots\right)=b_1^2\cdot\frac{1}{1-q^2}=\frac{b}{1-q}\cdot\frac{b}{1+q}=S_1\cdot S_2.$$

Ответ: $S_1\cdot S_2$.

4.053. Пусть a_1, a_2, ... a_n — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Решение.

Из условия $S_n = \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Далее имеем:

$$a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) = a_1 \cdot a_1 q^{n-1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \ldots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} \right) =$$

$$= a_1^2 q^{n-1} \cdot \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) = a_1 q^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} =$$

$$= a_1 q^{n-1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^n} \cdot \frac{q}{q-1} = a_1 q^{n-1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},$$

что и требовалось доказать.

4.054. Доказать, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

Решение.

Имеем $b = a + d, c = a + 2d$.

Предположим, что $a^2 + a(a+d) + (a+d)^2$, $a^2 + a(a+2d) + (a+2d)^2$, $(a+d)^2 + (a+d) + (a+2d) + (a+2d)^2$ — члены арифметической прогрессии.

Тогда получим

$$2\left(a^2 + a(a+2d) + (a+2d)^2\right) = \left(a^2 + a(a+d) + (a+d)^2\right) +$$

$$+ \left((a+d)^2 + (a+d)(a+2d) + (a+2d)^2\right);$$

$$2\left(a^2+a^2+2ad+a^2+4ad+4d^2\right)=a^2+a^2+ad+a^2+2ad+$$

$$+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+3ad+2d^2+a^2+4ad+4d^2,$$

$$6a^2+12ad+8d^2=6a^2+12ad+8d^2.$$

Доказанное тождество подтверждает предположение.

4.055. Первый член некоторой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равен 1, а ее сумма S. Из квадратов членов этой прогрессии составлена новая бесконечная геометрическая прогрессия. Найти ее сумму.

Решение.

Из условия имеем $b_1=1$, $|q|<1$. Следовательно, $\frac{1}{1-q}=S$, $1-q=\frac{1}{S}$,

$$q=1-\frac{1}{S}=\frac{S-1}{S}.$$

Тогда $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots=b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+\ldots=$

$$=b_1^2\left(1+q^2+q^4+\ldots\right)=b_1^2\cdot\frac{1}{1-q^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{S-1}{S}\right)^2}=$$

$$=\frac{S^2}{S^2-S^2+2S-1}=\frac{S^2}{2S-1}.$$

Ответ: $\frac{S^2}{2S-1}$.

4.056. Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, зная, что ее первый член равен $7-3\sqrt{5}$ и что каждый ее член, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} b_1=7-3\sqrt{5}, \\ b_2=b_3-b_1, \\ |q|>1. \end{cases} \Rightarrow b_1q=b_1q^2-b_1,\ q=q^2-1,\ q^2-q-1=0,$$

$q_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ не подходит, так как $|q_1|<1$; $q_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Отсюда

$$b_5 = b_1 q^4 = \frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^4}{16} = \frac{\left(17-3\sqrt{5}\right)8\left(7+3\sqrt{5}\right)}{16} = \frac{49-45}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

4.057. В арифметической прогрессии сумма ее m первых членов равна сумме n первых членов $(m \neq n)$. Доказать, что в этом случае сумма ее первых $m + n$ членов равна нулю.

Решение.

Из условия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$, где $m \neq n$, $S_m = S_n$.

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m, \; S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Тогда $\frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$

$$2a_1 m + m(m-1)d = 2a_1 n + n(n-1)d,$$

$$2a_1 m - 2a_1 n = n(n-1)d - m(m-1)d,$$

$$2(m-n)a_1 = \left(-\left(m^2 - n^2\right) + (m-n)\right)d,$$

$$2(m-n)a_1 = (m-n)(-m-n+1)d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = (-m-n+1)\,d.$$

$$S_{m+n} = \frac{2a_1 + (m+n-1)d}{2}(m+n) =$$

$$= \frac{(-m-n+1)d + (m+n-1)d}{2}(m+n) =$$

$$= \frac{(-m-n+1+m+n-1)d}{2}(m+n) = 0,$$

что и требовалось доказать.

4.058. Известно, что L, M, N — соответственно l-й, m-й, n-й члены геометрической прогрессии. Показать, что $L^{m-n} M^{n-l} N^{l-m} = 1$.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_l, \ldots, b_m, \ldots, b_n, \ldots$ — члены геометрической прогрессии и пусть $L = b_l$, $M = b_m$ и $N = b_n$. Покажем, что $b_l^{m-n} \cdot b_m^{n-l} \cdot b_n^{l-m} = 1$, $b_l = b_1 q^{l-1}$, $b_m = b_1 q^{m-1}$, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Имеем:

$$\left(b_1q^{l-1}\right)^{m-n}\cdot\left(b_1q^{m-1}\right)^{n-l}\cdot\left(b_1q^{n-1}\right)^{l-m}=$$
$$=b_1^{m-n}\cdot q^{(l-1)(m-n)}\cdot b_1^{n-l}\cdot q^{(m-1)(n-l)}\cdot b_1^{l-m}\cdot q^{(n-1)(l-m)}=$$
$$=b_1^{m-n+n-l+l-m}\cdot q^{lm-\ln-m+n+mn-ml-n+l+nl-mn-l+m}=$$
$$=b_1^0\cdot q^0=1,$$

что и требовалось доказать.

4.059. Числа a, b, c, одно из которых кратно 7, составляют арифметическую прогрессию с разностью 7. Показать, что число abc делится на 294.

Решение.

Пусть $a=7k, b, c$ — члены арифметической прогрессии, где $k\in Z$.

Тогда $b=7k+7, c=7k+14$ и $abc=7^3k(k+1)(k+2)$.

Среди трех последовательных целых чисел $k, k+1, k+2$ имеется число, которое делится на 3, а среди двух последовательных чисел $k, k+1$ одно будет четным, следовательно $n=k(k+1)(k+2)$ делится на 6. Так как $294=7^2\cdot 6$, то $abc=7^3n$ кратно 294. Что и требовалось доказать.

4.060. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n}=S_n+\frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k — сумма k первых членов прогрессии).

Решение.

Имеем $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$,

$$\frac{1}{3}S_{3n}=\frac{2a_1+d(3n-1)}{2\cdot 3}\cdot 3n=\frac{2a_1+d(3n-1)}{2}\cdot n,$$

$$S_n+\frac{1}{3}S_{3n}=\frac{4a_1+d(4n-2)}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(2n-2)}{2}\cdot 2n=S_{2n}.$$

Что и требовалось доказать.

4.061. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3,$$

где x — целое положительное число.

Решение.

Домножая обе части уравнения на x, имеем

$(x-1)+(x-2)+(x-3)+...+1=3x$.

Левая часть этого уравнения есть сумма членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=x-1$, $d=-1$, $a_n=1$,

$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{1-x+1}{-1}+1=x-1$. Так как $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$,

то $\frac{x-1+1}{2}\cdot(x-1)=3x$, $x^2=7x$, $x=7\,(x\neq 0)$.

Ответ: $x=7$.

4.062. Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составили геометрическую прогрессию, у которой третий член был бы больше первого на 36.

Решение.

Из условия

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3+b_4=180, \\ b_3=b_1+36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=180, \\ b_1q^2=b_1+36, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=180, \\ b_1\left(q^2-1\right)=36. \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1\left(q^3+q^2+q+1\right)}{b_1\left(q^2-1\right)}=\frac{180}{36},$$

$$\frac{q^2(q+1)+(q+1)}{(q+1)(q-1)}=5, \frac{(q+1)\left(q^2+1\right)}{(q+1)(q-1)}=5, \frac{q^2+1}{q-1}=5, q^2-5q+6=0,$$

$q_1=3, q_2=2$.

Подставляя значение $q_1=3$ во второе уравнение этой системы, получим $b_1'=\frac{36}{q^2-1}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$.

Тогда

$$b_2'=b_1q=\frac{9}{2}\cdot 3=\frac{27}{2},\quad b_3'=b_1q^2=\frac{9}{2}\cdot 9=\frac{81}{2},\quad b_4'=b_1q^3=\frac{9}{2}\cdot 27=\frac{243}{2}.$$

Подставляя значение $q_2=2$ во второе уравнение этой системы, получим

$b_1'' = \frac{36}{q^2-1} = \frac{36}{4-1} = 12,\ \ b_2'' = b_1 q = 12\cdot 2 = 24,\ \ b_3'' = b_1 q^2 = 12\cdot 4 = 48,$

$b_4'' = b_1 q^3 = 12\cdot 8 = 96.$

Ответ: 1) $\frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\frac{81}{2}+\frac{243}{2}$; 2) $12+24+48+96.$

4.063. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и 3/4, а первый член и знаменатель второй прогресии равны соответственно 4 и 2/3. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений составит 158,75. Найти число членов этой прогрессии.

Решение.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ члены двух геометрических прогрессий, у которых $a_1 = 20, q_1 = \frac{3}{4}$; $b_1 = 4$, $q_2 = \frac{2}{3}$ и $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots =$ $= 158{,}75$. Найдем $a_2 = a_1 q_1 = 20\cdot\frac{3}{4} = 15, a_3 = a_1 q^2 = 20\cdot\frac{9}{16} = \frac{45}{4}, b_2 = b_1 q =$ $= 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3},\ b_3 = b_1 q^2 = 4\cdot\frac{4}{9} = \frac{16}{9}$. Тогда $20\cdot 4 + 15\cdot\frac{8}{3} + \frac{45}{4}\cdot\frac{16}{9} + \ldots = 158{,}75$ или $80+40+20+\ldots = \frac{635}{4}$. Левая часть этого равенства есть сумма членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 80, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$.

Отсюда имеем

$$\frac{80\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{635}{4}, \frac{160(2^n-1)}{2^n} = \frac{635}{4}, \frac{32(2^n-1)}{2^n} = \frac{127}{4},$$

$128(2^n-1) = 127\cdot 2^n, 2^n = 2^7, n = 7.$

Ответ: 7.

4.064. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, 12$ — члены геометрической прогрессии, а $b_1, b_2, 9$ — члены арифметической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} b_1q^2 = 12, \\ b_1 + 2d = 9, \\ b_1q = b_1 + d, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2d)q^2 = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ (9-2d)(q-1) = d, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2d)\cdot\dfrac{(9-d)^2}{(9-2d)^2} = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \dfrac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(9-d)^2}{9-2d} = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \dfrac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} d_1 = -9, \\ d_2 = 3, \end{array}\right. \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \dfrac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d_1 = -9, \\ b_1' = 9-2(-9) = 27, \\ q_1 = \dfrac{9+9}{9+18} = \dfrac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} d_2 = 3, \\ b_1'' = 9-6 = 3, \\ q_2 = \dfrac{9-3}{9-6} = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

В первом случае $b_1' = 27$, $b_2' = b_1q = 27\cdot\dfrac{2}{3} = 18$, $b_3' = 12$; во втором случае $b_1'' = 3$, $b_2'' = b_1q = 3\cdot 2 = 6$, $b_3'' = 12$.

Ответ: 1) 27, 18, 12; 2) 3, 6, 12.

4.065. В конечной геометрической прогрессии известны ее первый член a, последний член b и сумма S всех ее членов. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ — члены геометрической прогрессии, у которой $b_1 = a, b_n = b, S_n = S$. Тогда

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 + \ldots = b_1^2\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots\right) =$$

$$= a^2\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots\right) = a^2\cdot\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}. \quad (1)$$

Из условия имеем

$$\begin{cases} aq^{n-1} = b, \\ \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = S \end{cases} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{b}{a}, \frac{q^n}{q} = \frac{b}{a}, \ q^n = \frac{b}{a} \cdot q.$$

Подставив это значение q^n во второе уравнение системы, получим

$$\frac{a\left(1 - \frac{b}{a} \cdot q\right)}{1-q} = S, \ a - bq = S - Sq, \ Sq - bq = S - a, \ (S-b)q = S - a, q = \frac{S-a}{S-b}.$$

Тогда $q^n = \frac{b}{a} \cdot \frac{S-a}{S-b}$. Подставим $q^n = \frac{b}{a} \cdot \frac{S-a}{S-b}$ в (1):

$$a^2 \left(\frac{1 - \frac{b^2(S-a)^2}{a^2(S-b)^2}}{1 - \frac{(S-a)^2}{(S-b)^2}} \right) = \frac{a^2 - \frac{b^2(S-a)^2}{(S-b)^2}}{1 - \frac{(S-a)^2}{(S-b)^2}} = \frac{a^2(S-b)^2 - b^2(S-a)^2}{(S-b)^2 - (S-a)^2} =$$

$$= \frac{(aS - ab - bS + ab)(aS - ab + bS - ab)}{(S - b - S + a)(S - b + S - a)} = \frac{S(a-b)((a+b)S - 2ab)}{(a-b)(2S - (a+b))} =$$

$$= \frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} \cdot S.$$

Ответ: $\frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} \cdot S$.

4.066. В некоторой геометрической прогрессии, содержащей $2n$ положительных членов, произведение первого члена на последний равно 1000. Найти сумму десятичных логарифмов всех членов прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ –члены геометрической прогрессии, количество которых равно $2n$, и $b_1 \cdot b_n = 1000$. Имеем

$$X = \lg b_1 + \lg b_2 + \lg b_3 + \ldots + \lg b_n = \lg(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots b_n) =$$
$$= \lg((b_1 \cdot b_n) \cdot (b_2 \cdot b_{n-1}) \cdot (b_3 \cdot b_{n-2}) \ldots).$$

Так как $b_k \cdot b_m = b_p b_q$, где $k + m = p + q$, то

$X = \lg(b_1 b_n)^n = \lg 1000^n = n \lg 1000 = 3n.$

Ответ: $3n$.

4.067. Сумма трех чисел равна 11/18, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

Решение.

Из условия имеем $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 18$, где $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ — члены арифметической прогрессии.

Отсюда

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 18, \\ \frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 = 18 a_1 a_2 a_3, \\ 2a_1 a_3 = a_2 a_3 + a_1 a_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ (18 a_1 a_2 - a_1 - a_2) a_3 = a_1 a_2, \Rightarrow 18 a_1 a_2 - a_1 - a_2 = 2a_1 - a_2, \\ (2a_1 - a_2) a_3 = a_1 a_2. \end{cases}$$

$$18 a_1 a_2 = 3a_1,\ a_2 = \frac{1}{6}.$$

Далее из второго уравнения системы получим

$$\left(2a_1 - \frac{1}{6}\right) a_3 = \frac{a_1}{6},\ a_3 = \frac{a_1}{12 a_1 - 1}.$$

Затем, подставив a_2, a_3 в первое уравнение системы, после упрощений получим $27a_1^2 - 12a_1 + 1 = 0$, откуда $a_1' = \frac{1}{9}, a_1'' = \frac{1}{3}$. Тогда $a_3' = \frac{1}{3}, a_3'' = \frac{1}{9}$. Имеем $a_1' = \frac{1}{9}, a_2' = \frac{1}{6}, a_3' = \frac{1}{3}$ или $a_1'' = \frac{1}{3}, a_2'' = \frac{1}{6}, a_3'' = \frac{1}{9}$. По условию подходят значения $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$.

4.068. Разность арифметической прогрессии *отлична от нуля*. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Решение.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — члены арифметической прогрессии с разностью $d \neq 0$ и a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 — члены геометрической прогрессии.

По условию

$$\frac{a_2a_3}{a_1a_2} = \frac{a_3a_1}{a_2a_3} = q, \ \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = q, \ \frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{a_1}{a_1+d} = q.$$

Запишем эти равенства в систему

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+2d}{a_1} = \dfrac{a_1}{a_1+d}, \\ \dfrac{a_1}{a_1+d} = q, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+d)(a_1+2d) = a_1^2, \\ \dfrac{a_1}{a_1+d} = q, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 3a_1d + 2d^2 = a_1^2, \\ \dfrac{a_1}{a_1+d} = q. \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{3}d.$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\frac{-\frac{2}{3}d}{-\frac{2}{3}d+d} = q, q = -2.$$

Ответ: -2.

Решения к главе 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для любых a, b и c верны равенства:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{6.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{6.2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{6.3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6.4}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{6.5}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{6.6}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{6.7}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{6.8}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{6.9}$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — некоторые заданные функции переменной x над числовым множеством M.

Решением (корнем) уравнения (6.9) с одним неизвестным называется такое численное значение неизвестного, взятое из множества чисел, указанных в условии уравнения, которое обращает данное уравнение в тождество (верное равенство).

Решить уравнение — это значит найти множество всех его решений или показать, что решений нет.

Областью допустимых значений неизвестного (ОДЗ) уравнения (6.9), называется множество всех значений, взятых из числового множества, над которым задано уравнение, при которых существуют обе функции (части уравнения) $f_1(x)$ и $g_1(x)$.

Пусть в результате преобразования уравнения (6.9) получено уравнение

$$f_2(x) = g_2(x) \tag{6.10}$$

Если все решения уравнения (6.9) являются решениями уравнения (6.10), то уравнение (6.10) называется следствием уравнения (6.9).

Два уравнения (6.9) и (6.10) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (6.10) является следствием уравнения (6.9) и, наоборот, уравнение (6.9) является следствием уравнения (6.10) или если оба уравнения решений не имеют.

При преобразованиях уравнения область его допустимых значений может изменяться, полученное уравнение в общем случае неравносильно данному. Если при некоторых преобразованиях ОДЗ уравнения расширяется, то полученное уравнение может иметь корни, *посторонние* для данного уравнения.

Если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то все его корни будут корнями полученного уравнения, т.е. полученное уравнение всегда будет следствием данного, обратное утверждение не всегда имеет место.

Всякое *целое рациональное алгебраическое уравнение n-й степени с одним неизвестным* может быть записано в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0), \tag{6.11}$$

где a_n, a_{n-1}, …, a_0 — заданные числа (коэффициенты уравнения), x — неизвестное, n — натуральное число.

Коэффициенты a_n и a_0 называются соответственно *старшим коэффициентом* и *свободным членом* уравнения (6.11).

Уравнение первой степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени называют просто *уравнением первой степени*.

Любое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к каноническому виду

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n = 1$, $a_1 = 1$ и $a_0 = b$.

Уравнение $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ в множестве действительных чисел всегда имеет решение, и притом только одно:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Уравнение второй степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение второй степени называется *уравнением второй степени*, или *квадратным уравнением*.

Всякое квадратное уравнение с одним неизвестным можно привести к каноническому виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{6.13}$$

Уравнение (6.13) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n = 2$, $a_2 = a$, $a_1 = b$ и $a_0 = c$.

Квадратное уравнение (6.13), записанное в канонической форме, называется *неполным*, если хотя бы один из его коэффициентов, кроме старшего a, равен нулю.

Если все коэффициенты квадратного уравнения, записанного в каноническом виде, отличны от нуля, то оно называется *полным*.

Полное квадратное уравнение, старший коэффициент которого равен 1 $(a = 1)$, называется *приведенным квадратным уравнением*; оно имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \tag{6.14}$$

Формулы корней полного квадратного уравнения

Если $D = b^2 - 4ac \geq 0$ (*дискриминант* уравнения), то уравнение (6.13) в множестве действительных чисел имеет два и только два действительных корня, которые определяются по формулам

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \ x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (6.15)$$

Если $b^2-4ac>0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $b^2-4ac=0$, то $x_1 \equiv x_2$. Если $b^2-4ac<0$, то уравнение (6.13) действительных решений не имеет.

В частном случае, когда b — четное число, т.е. $b=2k$, уравнение (6.13) принимает вид $ax^2+2kx+c=0$, а формулы (6.15) преобразуются в следующую:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}. \qquad (6.16)$$

Если уравнение приведенное, т.е. имеет вид $x^2+px+q=0$, то для определения его корней получим

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (6.17)$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение ax^2+bx+c при $a \neq 0$ называется *квадратным трехчленом.*

Выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена.*

Если $D \geq 0$, то квадратный трехчлен разлагается на множители с действительными коэффициентами:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (6.18)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, определяемые по формулам нахождения корней полного квадратного уравнения.

Биквадратные уравнения

Биквадратным уравнением называется целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени, которое может быть приведено к каноническому виду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ \ (a \neq 0). \qquad (6.19)$$

Заменив x^2 на t, получим $at^2 + bt + c = 0$, из которого находим

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4dc}}{2a}.$$

Если $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ ($a > 0, c > 0, b^2 - 4ac \geq 0, b < 0$ или $a < 0$, $c < 0, b^2 - 4ac \geq 0, b > 0$), то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения и имеющие вид

$$a \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + b \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = c, \qquad (6.20)$$

решаются с помощью подстановки

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = t. \qquad (6.21)$$

Тогда $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{t}$ и относительно t получается уравнение

$$at + b \cdot \frac{1}{t} = c \ \text{ или } \ at^2 - ct + b = 0 \ \ (t \neq 0).$$

Теорема Виета

Корни уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ с его коэффициентами связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Например, для уравнений четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a\neq 0)$ теорема Виета имеет вид

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4=\dfrac{e}{a}; \end{cases}$$

для кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}; \end{cases}$$

для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется алгебраическое уравнение, если хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного, т.е. это есть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем: сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т.д. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень получается уравнение, в общем случае неравносильное данному; поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию исходного уравнения обязательна, т.е. является составной частью решения.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в четную степень n, то корнями полученного уравнения $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ будут все корни исходного уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

При переходе от уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ к уравнению $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно: корни сопряженного с исходным уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в нечетную степень k, то получим уравнение $(f_1(x))^k = (f_2(x))^k$, равносильное исходному в множестве действительных чисел.

При возведении в нечетную степень обеих частей уравнения, рассматриваемого в множестве действительных чисел, посторонние корни не появляются.

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗ, так как может оказаться, что это уравнение не определено в области действительных чисел.

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие к ОДЗ значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию. Найденные значения неизвестного из области допустимых обязательно следует проверить по условию уравнения, так как они также могут оказаться посторонними.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системой n уравнений с m неизвестными называется n уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одной и той же буквой, означают одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы n уравнений с m неизвестными называется всякая упорядоченная совокупность из m таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной* или *противоречивой*, в противном случае — *совместной*.

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ может либо иметь единственное решение, либо иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений. При графическом способе решения каждому уравнению данной системы ставится в соответствие некоторая прямая на плоскости XOY; таким образом, данной системе на плоскости соответствует пара прямых. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо не иметь общих точек.

При пересечении прямых данная система имеет единственное решение; при совпадении прямых данная система имеет бесконечно много решений; если прямые не имеют ни одной общей точки, то данная система решений не имеет.

Решить уравнения (**6.136—6.182**):

6.136. $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=-2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

После приведения всех членов уравнения к общему знаменателю, имеем

$$\frac{(x^2+1)(x-2)+(x^2+2)(x+1)+2(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^3+x^2+x-4}{(x+1)(x-2)}=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x-4=0$ при $x \neq -1$ и $x \neq 2$.

Перепишем это уравнение в виде $(2x^3-2)+(x^2-1)+(x-1)=0$, $2(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x+4)=0$, откуда $x-1=0$, или $2x^2+3x+4=0$; $x_1=1$, у квадратного уравнения $D<0$.

Ответ: $x=1$.

6.137. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{25}{6}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Приведем все члены уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{6x^2(x+2)+6x(x+1)^2+6(x+1)(x+2)^2-25x(x+1)(x+2)}{6x(x+1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{7x^3+21x^2-4x-24}{6x(x+1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow 7x^3+21x^2-4x-24=0$ при $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -2$. Проверкой убеждаемся, что $x_1=1$, так как $7+21-4-24=0$. Делим левую часть уравнения на $x-1$: $\dfrac{7x^3+21x^2-4x-24}{x-1}=7x^2+28x+24$, следовательно, исходное уравнение можно представить в виде

$(x-1)\left(7x^2+28x+24\right)=0.$

Решая уравнение $7x^2+28x+24=0$, находим еще два корня: $x_2=-2-\frac{2\sqrt{7}}{7}$; $x_3=-2+\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_{2,3}=-2\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

6.138. $\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2=81.$

Решение.

Из условия $\left(x^2-6x\right)^2-2\left(x^2-6x+9\right)-81=0$. Обозначим $x^2-6x=y$. Имеем: $y^2-2(y+9)-81=0$, $y^2-2y-99=0 \Rightarrow y_1=-9$; $y_2=11$. Тогда 1) $x^2-6x=-9$, $(x-3)^2=0$, $x_{1,2}=3$; 2) $x^2-6x=11$, $x^2-6x-11=0$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{20}=3\pm2\sqrt{5}$.

Ответ: $x_{1,2}=3$; $x_{3,4}=3\pm2\sqrt{5}$.

6.139. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x.$

Решение.

Так как $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1}\right)$, то $(x+1+x-1)\left((x+1)^4-(x+1)^3(x-1)+(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)(x-1)^3+\right.$ $\left.+(x-1)^4\right)=32x$, $2x\left((x+1)^4+(x-1)^4-(x+1)^3(x-1)-(x+1)(x-1)^3+\right.$ $\left.+(x+1)^2(x-1)^2\right)-32x=0$; $x\left((x+1)^4+(x-1)^4-(x+1)^3(x-1)-(x+1)\times\right.$ $\left.\times(x-1)^3+(x+1)^2(x-1)^2-16\right)=0 \Rightarrow$ $x_1=0$, или $(x+1)^4+(x-1)^4-$ $-(x+1)^3(x-1)-(x+1)(x-1)^3+(x+1)^2(x-1)^2-16=0.$

Так как $a^4+b^4=\left((a-b)^2+2ab\right)^2-2a^2b^2$, то имеем:

$$\left(\left(x+1-x+1\right)^2+2(x+1)(x-1)\right)^2-2(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)(x-1)\times$$

$$\times\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)+(x+1)^2(x-1)^2-16=0, \qquad \left(4+2(x+1)(x-1)\right)^2-$$

$$-(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)(x-1)\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)-16=0\ , \ \left(4+2(x+1)\times\right.$$

$$\left.\times(x-1)\right)^2-(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)(x-1)\left(\left(x+1-x+1^2\right)+2(x+1)(x-1)\right)-$$

$-16=0$, или $\left(4+2\left(x^2-1\right)\right)^2-\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)\left(4+2\left(x^2-1\right)\right)-16=0.$

Обозначим $x^2-1=y$. Имеем $(4+2y)^2-y^2-y(4+2y)-16=0$, $16+16y+4y^2-y^2-4y-2y^2-16=0$, $y^2+12y=0$, $y(y+12)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow y_1=0$, $y_2=-12$. Тогда $x^2-1=0$, $x_{2,3}=\pm1$, или $x^2-1=-12$, откуда $x^2=-11<0$, не подходит.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

6.140. $\dfrac{z^2-z}{z^2-z+1}-\dfrac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1.$

Решение.

ОДЗ: $z^2-z-2\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq-1,\\ z\neq2.\end{cases}$

Пусть $z^2-z=y$. Имеем:

$$\frac{y}{y+1}-\frac{y+2}{y-2}-1=0\Leftrightarrow\frac{y(y-2)-(y+2)(y+1)-(y+1)(y-2)}{(y+1)(y-2)}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\dfrac{y(y+4)}{(y+1)(y-2)}=0$, откуда $y_1=0$, $y_2=-4$. Тогда $z^2-z=0$, $z_1=0$, $z_2=1$, или $z^2-z+4=0\ (D<0)$ и решений нет.

Ответ: $z_1=0$, $z_2=1$.

6.141. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2x-8\neq 0, \\ x^2+2x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -4, \\ x\neq 2, \\ x\neq -3, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Пусть $x^2+2x=y.$

Имеем $\dfrac{24}{y-8}-\dfrac{15}{y-3}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{y(2y-31)}{(y-8)(y-3)}=0,$ откуда $y_1=0,$ $y_2=\dfrac{31}{2}.$ Тогда $x^2+2x=0,$ $x_1=0,$ $x_2=-2,$ или $x^2+2=\dfrac{31}{2},$ откуда $x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{66}}{2}.$

Ответ: $x_1=0,$ $x_2=-2,$ $x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{66}}{2}.$

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

Решение.

Проверкой убеждаемся, что $x_1=a,$ так как $a^3-a^2-a^2b-a^2c+$ $+a^2b+a^2c+abc-abc=0.$ Делим левую часть уравнения на $x-a$:

$$\frac{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc}{x-a}=x^2-(b+c)x+bc.$$

Данное уравнение можно представить в виде:

$(x-a)\left(x^2-(b+c)x+bc\right)=0.$

Решая уравнение $x^2-(b+c)x+bc=0,$ находим два его корня:

$$x_{2,3}=\frac{b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-4bc}}{2}=\frac{b+c\pm\sqrt{b^2+2bc+c^2-4bc}}{2}=$$

$$=\frac{b+c\pm\sqrt{b^2-2bc+c^2}}{2}=\frac{b+c\pm\sqrt{(b-c)^2}}{2}=\frac{b+c\pm(b-c)}{2};$$

$$x_2=\frac{b+c-b+c}{2}=c,\ x_3=\frac{b+c+b-c}{2}=b.$$

Ответ: $x_1=a$, $x_2=c$, $x_3=b$.

6.143. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -2.\end{cases}$

Из условия $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x+2}\right)^2-\frac{10}{9}=0\Leftrightarrow\left(\frac{x+2-x}{x(x+2)}\right)^2+\frac{2}{x(x+2)}-$ $-\frac{10}{9}=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{x(x+2)}\right)^2+\frac{2}{x(x+2)}-\frac{10}{9}=0.$

Пусть $\frac{2}{x(x+2)}=y$. Имеем $9y^2+9y-10=0\Rightarrow y_1=-\frac{10}{9}$, $y_2=\frac{2}{3}$. Тогда или $\frac{2}{x(x+2)}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{x(x+2)}=-\frac{10}{9}\Rightarrow x_1=-3$, $x_2=1$; второе уравнение корней не имеет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=1$.

6.144. $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$.

Решение.

Из условия имеем $\left(x^2+2x\right)^2-\left(x^2+2x+1\right)=55$. Пусть $x^2+2x=y$. Относительно y уравнение принимает вид $y^2-y-56=0\Rightarrow y_1=-7$, $y_2=8$.

Тогда $x^2+2x=-7$ или $x^2+2x=8$, $x^2+2x+7=0$ или $x^2+2x-8=0$, откуда $x_1=-4$, $x_2=2$. Первое уравнение решений не имеет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x_1=-4$, $x_2=2$.

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12.$

Решение.

Имеем:

$$\left(x^2+2x+1\right)(x+2)+\left(x^2-2x+1\right)(x-2)-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+2x^2+4x+x+2+x^3-2x^2-2x^2+4x+x-2-12=0,$$

$2x^3+10x-12=0,\ x^3+5x-6=0.$

Последнее уравнение перепишем в виде:

$x^3+5x-5-1=0,\ \left(x^3-1\right)+5(x-1)=0,\ (x-1)\left(x^2+x+1\right)+5(x-1)=0,$

$(x-1)\left(x^2+x+6\right)=0$, откуда $x-1=0,\ x_1=1$, или $x^2+x+6=0,\ D<0$ и корней нет.

Ответ: $x=1$.

6.146. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq -1, \\ x\neq -2, \\ x\neq -3, \\ x\neq -4. \end{cases}$

Из условия $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}-1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)-(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)}=0.$$

Имеем $(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)-(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=0$ при $x\neq -1$, $x\neq -2,\ x\neq -3,\ x\neq -4$; $\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)-\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=0,$

$\left(x^2-5x\right)^2+10\left(x^2-5x\right)+24-\left(x^2+5x\right)^2-10\left(x^2+5x\right)-24=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20x\left(x^2+5\right)=0$, откуда $x_1=0,\ x^2+5\neq 0.$

Ответ: $x=0$.

6.147. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде $\dfrac{6}{x^2+3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}-1=0$ и обозначим $x^2+3x=y$, тогда имеем:

$\dfrac{6}{y+2}+\dfrac{8}{y-4}-1=0 \Leftrightarrow \dfrac{y(y-16)}{(y+2)(y-4)}=0$, откуда $y_1=0,\ y_2=16.$

Тогда $x^2+3x=0$ или $x^2+3x=16$; $x_1=0,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}.$

Ответ: $x_1=0,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$.

6.148. $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=4.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0.$

Перепишем уравнение в виде $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\right)=0$ и положим $x-\dfrac{1}{x}=y$. Тогда получим $2y^2+3y=0$, откуда $y_1=0,\ y_2=-\dfrac{3}{2}$. Значит, $x-\dfrac{1}{x}=0$ или $x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$.

Решив эти уравнения, находим $x_{1,2}=\pm 1,\ x_3=-2,\ x_4=0{,}5.$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 1,\ x_3=-2,\ x_4=0{,}5.$

6.149. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Пусть $\frac{x^2+1}{x}=y$. Получаем $y+\frac{1}{y}=-2{,}5 \Leftrightarrow y^2+2{,}5y+1=0$, откуда $y_1=-2$, $y_2=-\frac{1}{2}$. Тогда $\frac{x^2+1}{x}=-2$ или $\frac{x^2+1}{x}=-\frac{1}{2}$. Отсюда $x^2+2x+1=0$ или $2x^2+x+2=0$ при $x\neq 0$. Решая эти уравнения, получим $x_{1,2}=-1$; второе уравнение корней не имеет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x_{1,2}=-1$.

6.150. $\frac{u^2}{2-u^2}+\frac{u}{2-u}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} u\neq 2, \\ u\neq \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

Из условия имеем $\frac{u^2(2-u)+u\left(2-u^2\right)-2\left(2-u^2\right)(2-u)}{\left(2-u^2\right)(2-u)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2u^3-3u^2-3u+4}{\left(2-u^2\right)(2-u)}=0 \Leftrightarrow 2u^3-3u^2-3u+4=0.$

Представим уравнение в виде $\left(2u^3-2u^2\right)-\left(u^2-u\right)-(4u-4)=0$, $2u^2(u-1)-u(u-1)-4(u-1)=0$, $(u-1)\left(2u^2-u-4\right)=0$, тогда $u-1=0$, или $2u^2-u-4=0$, откуда $u_1=1$; $u_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$.

Ответ: $u_1=1$; $u_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$.

6.151. $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x+m}{x+1}=\frac{x-2m}{x-2}+\frac{x+2m}{x+2}-\frac{6(m-1)}{5}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq\pm1,\\x\neq\pm2.\end{cases}$

Из условия имеем $\frac{(x-m)(x+1)+(x+m)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$

$$=\frac{(x-2m)(x+2)+(x+2m)(x-2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{6(m-1)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-2m}{x^2-1}=\frac{2x^2-8m}{x^2-4}-\frac{6(m-1)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-m}{x^2-1}=\frac{x^2-4m}{x^2-4}-\frac{3(m-1)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-m}{x^2-1}-\frac{x^2-4m}{x^2-4}=-\frac{3(m-1)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-m\right)\left(x^2-4\right)-\left(x^2-4m\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=-\frac{3(m-1)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3mx^2-3x^2}{x^4-5x^2+4}=-\frac{3(m-1)}{5}\Leftrightarrow\frac{3x^2(m-1)}{x^4-5x^2+4}+\frac{3(m-1)}{5}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2(m-1)}{x^4-5x^2+4}+\frac{m-1}{5}=0\Leftrightarrow(m-1)\left(\frac{x^2}{x^4-5x^2+4}+\frac{1}{5}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(m-1)\left(5x^2+x^4-5x^2+4\right)}{5\left(x^4-5x^2+4\right)}=0\Leftrightarrow\frac{(m-1)\left(x^4+4\right)}{x^4-5x^2+4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)\left(x^4+4\right)=0,\\x^4-5x^2+4\neq0.\end{cases}$$

1) Если $m-1\neq 0$ или $m\neq 1$, то $x^4+4=0$, корней нет.

2) Если $m-1=0$ или $m=1$, то $x\in R$, $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$.

Ответ: если $m=1$, то $x\in R$, кроме ±1, ±2; если $m\neq 1$, то корней нет.

6.152. $\frac{z+4}{z-1}+\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+8}{z-2}+\frac{z-8}{z+2}+6.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z\neq\pm1, \\ z\neq\pm2. \end{cases}$

Из условия получаем:

$$\frac{(z+4)(z+1)+(z-4)(z-1)}{(z-1)(z+1)}=\frac{(z+8)(z+2)+(z-8)(z-2)}{(z-2)(z+2)}+6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2z^2+8}{z^2-1}=\frac{2z^2+32}{z^2-4}+6\Leftrightarrow\frac{z^2+4}{z^2-1}=\frac{z^2+16}{z^2-4}+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{z^2+4}{z^2-1}-\frac{z^2+16}{z^2-4}=3\Leftrightarrow\frac{(z^2+4)(z^2-4)-(z^2+16)(z^2-1)}{(z^2-1)(z^2-4)}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-15z^2}{z^4-5z^2+4}=3\Leftrightarrow\frac{5z^2}{z^4-5z^2+4}=-1\Leftrightarrow\frac{5z^2}{z^4-5z^2+4}+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5z^2+z^4-5z^2+4}{z^4-5z^2+4}=0,\quad\frac{z^4+4}{z^4-5z^2+4}=0,$$

откуда $z^4+4=0$ и решений нет.

Ответ: корней нет.

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$.

Решение.

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=(a-b)\Big((a^4+b^4)+$$

$$+(a^3b+ab^3)+a^2b^2\Big)=(a-b)\Big(\big((a-b)^2+2ab\big)^2-2a^2b^2+ab(a^2+b^2)+$$

$$+a^2b^2\Big)=(a-b)\Big(\big((a-b)^2+2ab\big)^2-a^2b^2+ab\big((a-b)^2+2ab\big)\Big).$$

$$(2x+a-2x+a)\left(\left((2x+a-2x+a)^2+2(2x+a)(2x-a)\right)^2-(2x+a)^2\times\right.$$

$$\left.\times(2x-a)^2+(2x+a)(2x-a)\left((2x+a-2x+a)^2+2(2x+a)(2x-a)\right)\right)=242a^5$$

или $2a\left(\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)^2-\left(4x^2-a^2\right)^2+\left(4x^2-a^2\right)\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)\right)-$

$-242a^5=0\Leftrightarrow\quad a\left(\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)^2-\left(4x^2-a^2\right)^2+\left(4x^2-a^2\right)\times\right.$

$\left.\times\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)-121a^4\right)=0.$

Отсюда

1) если $a=0$, то x — любое число;

2) если $a\neq 0$, то $\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)^2-\left(4x^2-a^2\right)^2+\left(4x^2-a^2\right)\times$

$\times\left(4a^2+2\left(4x^2-a^2\right)\right)-121a^4=0.$

Пусть $4x^2-a^2=y$, тогда относительно y уравнение имеет вид:

$\left(4a^2+2y\right)^2-y^2+y\left(4a^2+2y\right)-121a^4=0,$

$16a^4+16a^2y+4y^2-y^2+4a^2y+2y^2-121a^4=0.$

Отсюда $5y^2+20a^2y-105a^4=0$, $y^2+4a^2y-21a^4=0$, откуда

$y_{1,2}=-2a^2\pm\sqrt{4a^4+21a^4}=-2a^2\pm 5a^2$; $y_1=-7a^2$, $y_2=3a^2$. Тогда

1) $4x^2-a^2=-7a^2$, $x^2=-\frac{3}{2}a^2$, нет решений при $a\neq 0$;

2) $4x^2-a^2=3a^2$, $x^2=a^2$, откуда $x_{1,2}=\pm a$.

Ответ: если $a=0$, то x — любое число; если $a\neq 0$, то $x_{1,2}=\pm a$.

6.154. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}.$

Решение.

Пусть $x^2+2x=y$, тогда относительно y уравнение принимает вид

$$\frac{y+1}{y+2}+\frac{y+2}{y+3}-\frac{7}{6}=0\Leftrightarrow\quad\frac{6(y+1)(y+3)+6(y+2)^2-7(y+2)(y+3)}{6(y+2)(y+3)}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{5y^2+13y}{(y+2)(y+3)}=0$, $5y^2+13y=0$ при $y\neq-2$ и $y\neq-3$; $y(5y+13)=0$, откуда $y_1=0$, $y_2=-\dfrac{13}{5}$. Тогда $x^2+2x=0$ или $x(x+2)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=-2$; $x^2+2x=-\dfrac{13}{5}$, $5x^2+10x+13=0$, решений нет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-2$.

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0$.

Решение.

Имеем $\left(ax^4-x^3\right)+\left(a^2x-a\right)=0 \Leftrightarrow x^3(ax-1)+a(ax-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ax-1)\left(x^3+a\right)=0$. Тогда $ax-1=0$, откуда $x_1=\dfrac{1}{a}$, или $x^3+a=0$, откуда $x_3=\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ при $a\neq0; x=0$ при $a=0$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{a}$, $x_2=-\sqrt[3]{a}$ при $a\neq0; x=0$ при $a=0$.

6.156. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq\pm1$.

Разделив уравнение на $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\neq0$, имеем

$$20\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}-5\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}+48=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\frac{(x-2)^2(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-2)(x+2)}-5\frac{(x+2)^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x-2)(x+2)}+48=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}-5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}+48=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}-\frac{5}{\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}}+48=0.$$

Пусть $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=y$, где $y\neq 0$. Относительно y уравнение принимает вид $20y-\frac{5}{y}+48=0\Leftrightarrow 20y^2+48y-5=0$, откуда $y_1=-\frac{5}{2}$, $y_2=-\frac{1}{10}$.

Тогда

1) $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow 7x^2+9x+14=0$, решений нет, т.к. $D<0$;

2) $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=-\frac{1}{10}\Leftrightarrow 9x^2-33x+18=0$, откуда $x_3=\frac{2}{3}$, $x_4=3$.

Ответ: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=3$.

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0$.

Решение.

Разделив уравнение на $(x-a)^2\neq 0$, имеем

$$2\left(\frac{x-1}{x-a}\right)^2-5\left(\frac{x-1}{x-a}\right)+2=0.$$

Пусть $\frac{x-1}{x-a}=y$.

Относительно y уравнение принимает вид $2y^2-5y+2=0$, откуда $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=2$.

Тогда $\frac{x-1}{x-a}=\frac{1}{2}$, $x_1=2-a$; или $\frac{x-1}{x-a}=2$, $x_2=2a-1$.

Если $x-a=0$, то $a-1=0$ и $x=a=1$.

Ответ: $x_1=2-a$; $x_2=2a-1$.

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

Решение.

ОДЗ: $x+1\geq 0$ или $x\geq -1$.

Пусть $\sqrt{x+1}=y\geq 0$. Относительно y уравнение принимает вид $\sqrt[3]{9-y}+\sqrt[3]{7+y}=4$. Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$9-y+\sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)}+3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2}+7+y=64\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)}+3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2}=48\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)}\times\left(\sqrt[3]{9-y}+\sqrt[3]{7+y}\right)=48.$$

Так как по условию $\sqrt[3]{9-y}+\sqrt[3]{7+y}=4$, то

$$12\sqrt[3]{(9-y)(7+y)}=48\Leftrightarrow(9-y)(7+y)=64, y^2-2y+1=0, (y-1)^2=0,$$

откуда $y_{1,2}=1$.

Тогда $\sqrt{x+1}=1, x=0$.

Ответ: $x=0$.

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

Решение.

ОДЗ: $x+2\geq 0$, $x\geq -2$.

Из условия $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}\Rightarrow(x+2)^3=(3x+2)^2$,

$$x^3+6x^2+12x+8=9x^2+12x+4\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-x+1\right)-3(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-4x+4\right)=0,$$

$(x+1)(x-2)^2=0$. Отсюда $x+1=0$, $x_1=-1$, или $(x-2)^2=0$, $x_{2,3}=2$.

При подстановке в исходное уравнение убеждаемся, что $x_1=-1$ — посторонний корень.

Ответ: $x=2$.

6.160. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\frac{20+x}{x}\ge 0,\\ \frac{20-x}{x}\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+20)\ge 0,\\ x(x-20)\ge 0,\\ x\ne 0, 0<x\le 20.\end{cases}$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\frac{20+x}{x}+2\sqrt{\frac{(20+x)(20-x)}{x^2}}+\frac{20-x}{x}=6\Leftrightarrow\frac{\sqrt{400-x^2}}{x}=\frac{3x-20}{x}\Rightarrow$$

$\sqrt{400-x^2}=3x-20,$ где $3x-20\ge 0,\ x\ge\frac{20}{3}.$

Далее: $400-x^2=9x^2-120x+400\Leftrightarrow x(x-12)=0,$ откуда $x_1=0,$ $x_2=12;\ x_1=0<\frac{20}{3}$ не подходит.

Ответ: $x=12.$

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0.$

Из условия имеем:

$x(x+1)(x-1+x+2)=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^2+x)(2x+1)=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2+x=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16\Leftrightarrow x^3-9x\sqrt{x}+8=0.$

Пусть $\sqrt{x}=y\ge 0.$

Относительно y уравнение принимает вид $y^6-9y^3+8=0,$ откуда $y^3=1,\ y^3=8\Rightarrow y_1=1,\ y_2=2.$

Получили $\sqrt{x}=1$ или $x_1=1;\ \sqrt{x}=2,\ x_2=4.$

Ответ: $x_1=1;\ x_2=4.$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}\,(a\neq 0).$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\frac{b}{a}$.

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\frac{1}{\sqrt[7]{(b-ax)^3}}=\frac{65}{8}\Leftrightarrow\sqrt[7]{(ax-b)^3}+\frac{1}{\sqrt[7]{(ax-b)^3}}-\frac{65}{8}=0.$$

Пусть $\sqrt[7]{(ax-b)^3}=y\neq 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$y+\frac{1}{y}-\frac{65}{8}=0\Leftrightarrow 8y^2-65y+8=0$, откуда $y_1=\frac{1}{8}$, $y_2=8$. Тогда:

$$\sqrt[7]{(ax-b)^3}=\frac{1}{8},\quad \sqrt[7]{(ax-b)^3}=8\Leftrightarrow\quad ax-b=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{7}{3}}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{\frac{7}{3}}=\frac{1}{2^7},$$

$$ax-b=8^{\frac{7}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{7}{3}}=2^7\Rightarrow x_1=\frac{\frac{1}{2^7}+b}{a}=\frac{1+128b}{128a},\ x_2=\frac{2^7+b}{a}=\frac{128+b}{a}.$$

Ответ: $x_1=\frac{1+128b}{128a}$, $x_2=\frac{128+b}{a}$.

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\cdot\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

Из условия $5x^{\frac{22}{15}}+x^{\frac{27}{30}}-22x^{\frac{7}{15}}=0\Leftrightarrow 5x^{\frac{44}{30}}+x^{\frac{27}{30}}-22x^{\frac{14}{30}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{\frac{14}{30}}\left(5x+x^{\frac{1}{2}}-22\right)=0.$ Тогда $x^{\frac{14}{30}}=0$, $x_1=0$ или $5x+x^{\frac{1}{2}}-22=0.$

Пусть $x^{\frac{1}{2}}=y\geq 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$5y^2+y-22=0$, откуда $y_1=-\frac{11}{5}$, $y_2=2$; $y_1=-\frac{11}{5}<0$ не подходит. Тогда

$x_2^{\frac{1}{2}}=2$, $x_2=4$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=4$.

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x+7}=y\geq 0$, $x+7=y^2$, $x=y^2-7$.

Относительно y уравнение принимает вид

$$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-y-6}=4,\ \sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{y^2-y-6}=4,$$

$$|y+1|+\sqrt{y^2-y-6}=4.$$

Так как $y\geq 0$, то $y+1+\sqrt{y^2-y-6}=4$, $\sqrt{y^2-y-6}=3-y$, где $3-y\geq 0$, $y\leq 3$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $y^2-y-6=9-6y+y^2$, $y=3$. Тогда $\sqrt{x+7}=3$, $x+7=9$, $x=2$.

Ответ: $x=2$.

6.165. $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{-\frac{x^2+7x-18}{x^2-6x+8}}+\sqrt{-\frac{x^2-6x+8}{x^2+7x-18}}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-\frac{(x+9)(x-2)}{(x-4)(x-2)}}+\sqrt{-\frac{(x-4)(x-2)}{(x+9)(x-2)}}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}}+\sqrt{-\frac{x-4}{x+9}}=\frac{13}{6},\\ x\neq 2.\end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} -\dfrac{x+9}{x-4} > 0, \\ x \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-4) < 0, \\ x \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-9;2) \cup (2;4).$

Пусть $\sqrt{-\dfrac{x+9}{x-4}} = y$, где $y > 0$. Относительно y уравнение принимает вид $y + \dfrac{1}{y} - \dfrac{13}{6} = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0$, откуда $y_1 = \dfrac{2}{3}$, $y_2 = \dfrac{3}{2}$. Тогда $\sqrt{-\dfrac{x+9}{x-4}} = \dfrac{2}{3}$ или $\sqrt{-\dfrac{x+9}{x-4}} = \dfrac{3}{2}$. Отсюда $-\dfrac{x+9}{x-4} = \dfrac{4}{9}$, или $-\dfrac{x+9}{x-4} = \dfrac{9}{4}$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

6.166. $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^2 + 5x + 4 - \sqrt{x^2+5x+2} = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 0$. Пусть $\sqrt{x^2+5x+2} = y$, где $y \geq 0$, $x^2 + 5x + 2 = y^2$, $x^2 + 5x = y^2 - 2$. Относительно y уравнение имеет вид $y^2 - 3y - 4 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 4$; $y_1 = -1 < 0$ не подходит.

Тогда $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$, $x^2 + 5x + 2 = 16$, $x^2 + 5x - 14 = 0$, откуда $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

6.167. $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}.$

Решение.

Из условия $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2(x^2+x)+9}$.

Пусть $x^2 + x = y$. Относительно y уравнение принимает вид

$\sqrt{y+4} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2y+9}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$y+4+2\sqrt{(y+4)(y+1)}+y+1=2y+9 \Leftrightarrow \sqrt{(y+4)(y+1)}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2+5y+4=4,\ y^2+5y=0, \text{откуда } y_1=0,\ y_2=-5.$$

Тогда $x^2+x=0$ или $x^2+x=-5$. Решая каждое из полученных уравнений, находим $x_1=0$, $x_2=-1$; второе уравнение решений не имеет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$.

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

Решение.

Пусть $3x^2-2x=y$. Относительно y уравнение принимает вид $\sqrt{y+15}+\sqrt{y+8}=7$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $y+15+2\sqrt{(y+15)(y+8)}+y+8=49 \Leftrightarrow \sqrt{(y+15)(y+8)}=13-y$, где $13-y\ge 0$, $y\le 13$. Отсюда $(y+15)(y+8)=(13-y)^2$, $y=1$.

Тогда $3x^2-2x=1$, $3x^2-2x-1=0$, откуда $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

6.169. $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

Из условия имеем $\sqrt{x}=2-\frac{2x+1}{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2x+4-2x-1}{x+2}$, $\sqrt{x}=\frac{3}{x+2}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем $x=\frac{3}{x^2+4x+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+4x^2+4x-9}{x^2+4x+4}=0, \text{ откуда } x^3+4x^2+4x-9=0 \text{ при } x\ne -2.$$

Перепишем уравнение в виде $(x^3-1)+(4x^2-4)+(4x-4)=0$, $(x-1)(x^2+x+1)+4(x-1)(x+1)+4(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+9)=0.$

Отсюда $x-1=0$ или $x^2+5x+9=0$. Из последних двух уравнений имеем $x_1=1$; второе уравнение решений не имеет, т.к. $D<0$.

Ответ: $x=1$.

6.170. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+4\ge 0, \\ x-4\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 4.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\frac{x+4+2\sqrt{(x+4)(x-4)}+x-4}{4}=\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)^2-12\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)+36,$$

$$2\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)-25\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)+72=0.$$

Пусть $x+\sqrt{x^2-16}=y$. Относительно y уравнение принимает вид

$2y^2-25y+72=0$, откуда $y_1=\dfrac{9}{2}$, $y_2=8$.

Тогда

1) $x+\sqrt{x^2-16}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-16}=9-2x$, где $9-2x\ge 0$, $x\le 4{,}5$.

После возведения уравнения в квадрат получим

$4x^2-64=81-36x+4x^2$, $36x=145$, $x_1=\dfrac{145}{36}$; не подходит;

2) $x+\sqrt{x^2-16}=8$, $\sqrt{x^2-16}=8-x$, где $8-x\ge 0$, $x\le 8$. После возведения уравнения в квадрат, получим $x^2-16=64-16x+x^2$, $x=5$.

Ответ: $x=5$.

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

Решение.

После возведения обеих частей уравнения в куб имеем

$$x+3\sqrt[3]{x^2(x-16)}-3\sqrt[3]{x(x-16)^2}+x-16=x-8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x(x-16)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}\right)=8-x.$$

Так как по условию $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$, то имеем

$$3\sqrt[3]{x(x-16)(x-8)}=8-x.$$

Отсюда

$$27x(x-16)(x-8)=(8-x)^3 \Leftrightarrow 27x(x-16)(x-8)+(x-8)^3=0,$$

$$(x-8)\left(27x(x-16)+(x-8)^2\right)=0,\ (x-8)\left(7x^2-112x+16\right)=0 \Rightarrow\ x-8=0,$$

$x_1=8$, или $7x^2-112x+16=0$, откуда $x_{2,3}=\dfrac{56\pm\sqrt{3024}}{7}$.

Ответ: $x_1=8,\ x_{2,3}=8\pm\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$.

6.172. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1.$

Решение.

ОДЗ: $x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$.

Из условия имеем

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right)^3\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x^2+1\right)^3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2=1\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2=1.$$

Отсюда имеем $x+\sqrt{x^2-1}=1$ или $x+\sqrt{x^2-1}=-1$.

Тогда $\sqrt{x^2-1}=1-x$ или $\sqrt{x^2-1}=-1-x$. Возведя оба уравнения в квадрат, получим $x^2-1=1-2x+x^2$ или $x^2-1=1+2x+x^2$, $x_1=1,\ x_2=-1$.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-1$.

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2\sqrt[4]{x+1}-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ 2\sqrt[4]{x+1}\ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{15}{16}.$

Пусть $\sqrt[4]{x+1}=y$, где $y\ge 0$. Относительно y уравнение принимает вид $2\sqrt{5y+4}-\sqrt{2y-1}=\sqrt{20y+5}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$20y+16-4\sqrt{(5y+4)(2y-1)}+2y-1=20y+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+5=2\sqrt{(5y+4)(2y-1)}\Leftrightarrow y^2+10y+25=4\left(10y^2+3y-4\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 39y^2+2y-41=0$, откуда $y_1=-\dfrac{41}{39}$, $y_2=1$; $y_1=-\dfrac{41}{39}<0$ не подходит. Отсюда $\sqrt[4]{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=1$, $x=0$.

Ответ: $x=0$.

6.174. $\dfrac{z}{z+1}-2\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=3.$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{z+1}{z}>0\Leftrightarrow z\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty).$

Пусть $\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=y$, где $y>0$. Относительно y уравнение принимает вид

$$\frac{1}{y^2}-2y-3=0\Leftrightarrow 2y^3+3y^2-1=0\Leftrightarrow 2y^3+2y^2+y^2-1=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2y^2(y+1)+(y-1)(y+1)=0\Leftrightarrow (y+1)\left(2y^2+y-1\right)=0$, $y+1=0$, откуда $y_1=-1$, или $2y^2+y-1=0$, откуда находим $y_2=-1$, $y_3=\dfrac{1}{2}$; $y_1=y_2=-1<0$ не подходит.

Тогда $\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z}=\dfrac{1}{4}$, откуда $z=-\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $z=-\dfrac{4}{3}$.

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

Решение.

Из условия $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, возведя обе части в куб, имеем

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}+x-2=2x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{(x-1)}+\sqrt[3]{(x-2)}\right)=0.$$

Так как $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, то уравнение принимает вид

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x-3)=0,$$

откуда $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=\frac{3}{2}$.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=\frac{3}{2}$.

6.176. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0.$

Пусть $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=y$, где $y\ge 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$$y^3+y^2-2=0 \Leftrightarrow y^3-1+y^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+1\right)+(y+1)(y-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+1+y+1\right)=0,\ \ (y-1)\left(y^2+2y+2\right)=0.$$

Полученное уравнение равносильно двум уравнениям: $y-1=0$ и $y^2+2y+2=0$, решив которые, найдем $y_1=1$; второе уравнение решений не имеет, т.к. $D<0$.

Тогда $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)x}+x=1$, $\sqrt{(x+1)x}=-x$, где $x\le 0$. Отсюда из ОДЗ получаем $\begin{cases} x\ge 0, \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Ответ: $x=0$.

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

Решение.

ОДЗ: $x+3\geq 0,\ x\geq -3.$

Из условия $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3}$ и возведя обе части в шестую степень, получим

$(x+7)^2=(x+3)^3 \Leftrightarrow x^2+14x+49=x^3+9x^2+27x+27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+8x^2+13x-22=0.$ Проверкой убеждаемся, что $x_1=1$, так как $1+8+13-22=0.$ Левую часть уравнения разделим на $x-1$:

$$\frac{x^3+8x^2+13x-22}{x-1}=x^2+9x+22.$$

Тогда $(x-1)\left(x^2+9x+22\right)=0.$

Отсюда $x-1=0,\ x_1=1,$ или $x^2+9x+22=0,$ решений нет, т.к. $D<0.$

Ответ: $x=1.$

6.178. $\dfrac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\dfrac{7}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $(a-x)(b-x)>0.$

Перепишем исходное уравнение в следующем виде

$$\frac{3\sqrt{(a-x)^2}+3\sqrt{(a-x)(b-x)}+3\sqrt{(b-x)^2}}{3\left(\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}\right)}+$$

$$+\frac{-7\sqrt{(a-x)^2}+7\sqrt{(a-x)(b-x)}-7\sqrt{(b-x)^2}}{3\left(\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}\right)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{(a-x)^2}+10\sqrt{(a-x)(b-x)}-4\sqrt{(b-x)^2}=0$$

при $\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}\neq 0.$

Разделив обе части последнего уравнения на $-2\sqrt{(b-x)^2}\neq 0$, имеем

$$2\sqrt{\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2}-5\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}+2=0.$$

Пусть $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}=y$, где $y>0$. Относительно y уравнение принимает вид

$2y^2-5y+2=0$, откуда находим $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=2$. Тогда $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}=\frac{1}{2}$ или

$\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}=2$. Значит, $\frac{a-x}{b-x}=\frac{1}{4}$ или $\frac{a-x}{b-x}=4$, откуда находим

$x_1=\frac{4a-b}{3}$, $x_2=\frac{4b-a}{3}$.

Ответ: $x_1=\frac{4a-b}{3}$, $x_2=\frac{4b-a}{3}$; если $a=b$, то решений нет.

6.179. $|x|+|x-1|=1$.

Решение.

Нанесем на числовую ось корни модулей и рассмотрим уравнение на полученных трех промежутках оси. Имеем три случая:

1) если $x<0$, то $-x-x+1=1$, откуда находим $x=0$; решений нет, поскольку $x=0$ не принадлежит рассматриваемому промежутку;

2) если $0\leq x<1$, то уравнение принимает вид $x-x+1=1$ или $1=1$; решением будет $x\in[0;1)$;

3) если $x\geq 1$, то получаем $x+x-1=1$, откуда $x=1$.

Ответ: $x\in[0;1]$.

6.180. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots$

$\ldots+(x^2+20x+39)=4500.$

Решение.

Количество слагаемых равно 20. Запишем уравнение в виде

$$(x^2+x^2+\ldots+x^2)+(x+2x+3x+\ldots+20x)+(1+3+5+\ldots+39)=4500\Leftrightarrow$$

$$20x^2+x(1+2+3+\ldots+20)+(1+3+5+\ldots+39)=4500.$$

По формуле суммы членов арифметической прогрессии имеем

$$20x^2+x\cdot\frac{1+20}{2}\cdot 20+\frac{1+39}{2}\cdot 20=4500 \Leftrightarrow 2x^2+21x-410=0,$$

откуда $x_1=-\frac{41}{2}$, $x_2=10$.

Ответ: $x_1=-\frac{41}{2}$, $x_2=10$.

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0$.

Решение.

Переписав уравнение в виде $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}=-\sqrt[3]{x+a+2}$ и возведя обе части в куб, получим

$$x+a+3\sqrt[3]{(x+a)^2(x+a+1)}+3\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)^2}+x+a+1=-(x+a+2),$$

$$\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)}\left(\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}\right)=-(x+a+1).$$

Так как $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}=-\sqrt[3]{x+a+2}$, то имеем

$$-\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)}=-(x+a+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)}=(x+a+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x+a+1)(x+a+2)=(x+a+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+a+1)\left((x+a)(x+a+2)-(x+a+1)^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$(x+a+1)(-1)=0$, откуда $x=-(a+1)$.

Ответ: $x=-(a+1)$.

6.182. $|x|^3+|x-1|^3=9$.

Решение.

Как и в № **6.179**, имеем три случая

$$1)\ \begin{cases} x<0, \\ -x^3-(x-1)^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ 2x^3-3x^2+3x+8=0. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что $x_1=-1$, так как $-2-3-3+8=0$. Делим левую часть уравнения на $x+1$: $\frac{2x^3-3x^2+3x+8}{x+1}=2x^2-5x+8$.

Уравнение можно записать в виде $(x+1)(2x^2-5x+8)=0$. В уравнении $2x^2-5x+8=0$ $D<0$ и корней нет.

2) $\begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x^3-(x-1)^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 3x^2-3x-8=0. \end{cases}$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{105}}{6}$. На втором промежутке решений нет, потому что ни $x_1=\dfrac{3-\sqrt{105}}{6}$, ни $x_2=\dfrac{3+\sqrt{105}}{6}$ не принадлежат $[0; 1)$;

3) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x^3+(x-1)^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 2x^3-3x^2+3x-10=0. \end{cases}$

Проверкой убеждаемся, что $x_1=2$, так как $16-12+6-10=0$. Делим левую часть уравнения на $x-2$: $\dfrac{2x^3-3x^2+3x-10}{x-2}=2x^2+x+5$.

Уравнение можно представить в виде $(x-2)(2x^2+x+5)=0$, откуда корень $x_1=2$ данного уравнения найден подбором. В уравнении $2x^2+x+5=0$ $D<0$ и корней нет.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2$.

Решить системы уравнений (**6.183—6.243**):

6.183. $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$

Решение.

Из условия $\begin{cases} xy(xy+x+y+1)=72, \\ xy-(x+y)=1. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} xy=u, \\ x+y=v. \end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид

$\begin{cases} u(u+v+1)=72, \\ u-v=1 \end{cases} \Rightarrow v=u-1$. Подставив это значение v в первое уравнение системы, получим $u(u+u-1+1)=72$, $2u^2=72$, откуда $u_1=-6$, $u_2=6$ и $v_1=-7$, $v_2=5$.

Тогда данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} xy=-6, \\ x+y=-7 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2; \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}, \\ y_3=-\dfrac{7+\sqrt{73}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4=-\dfrac{7+\sqrt{73}}{2}, \\ y_4=\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$, $\left(\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2};-\dfrac{7+\sqrt{73}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{7+\sqrt{73}}{2};\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$.

6.184. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

Решение.

Так как левые части уравнений однородны относительно x и y, введем замену $y=tx$; система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x^2\left(2-3t+t^2\right)=3, \\ x^2\left(1+2t-2t^2\right)=6. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений $(x\neq 0)$, получим $\dfrac{2-3t+t^2}{1+2t-2t^2}=\dfrac{1}{2}$ $\left(t\neq\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)$, $4t^2-8t+3=0$, откуда $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=\dfrac{3}{2}$;

1) $t_1=\dfrac{1}{2}$. Из уравнения $x^2\left(1+2t-2t^2\right)=6$ находим $x^2\left(1+1-\dfrac{1}{2}\right)=6$, $x^2=4$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$; тогда $y_1=1$, $y_2=-1$;

2) $t_2=\dfrac{3}{2}$. Тогда $x^2\left(1+3-\dfrac{9}{2}\right)=6$, $x^2=-12$, решений нет.

Ответ: $(2;1)$, $(-2;-1)$.

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

Решение.

Так как левые части системы однородны, то делаем подстановку $y=tx$. Тогда система примет вид $\begin{cases} x^2\left(1+2t^2\right)=17, \\ x^2(1-2t)=-3. \end{cases}$

Разделив левые и правые части уравнений $(x \neq 0)$, получаем

$$\frac{1+2t^2}{1-2t}=-\frac{17}{3}\left(t \neq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3t^2-17t+10=0,\ t_1=\frac{2}{3},\ t_2=5;$$

1) $t_1=\frac{2}{3}$. Из уравнения $x^2(1-2t)=-3$ имеем $x^2\left(1-\frac{4}{3}\right)=-3,\ x^2=9,$

$x_1=3,\ x_2=-3;\ y_1=\frac{2}{3}\cdot 3=2,\ y_2=\frac{2}{3}(-3)=-2;$

2) $t_2=5$. Тогда $x^2(1-10)=-3,\ x^2=\frac{1}{3},\ x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}};\ y_1=5\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$

$=-\frac{5}{\sqrt{3}},\ y_2=5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$

Ответ: $(3; 2), (-3; -2), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{-5\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3, \quad a \neq b, b \neq c, c \neq a. \end{cases}$

Решение.

Решение системы получаем по правилу Крамера. Вычислим определители системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=ab^2c^3+a^3bc^2+a^2b^3c-a^3b^2c-a^2bc^3-ab^3c^2,$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=kb^2c^3+k^3bc^2+k^2b^3c-k^3b^2c-k^2bc^3-kb^3c^2,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \\ a^3 & k^3 & c^3 \end{vmatrix}=k^2ac^3+k^3a^2c+ka^3c-k^2a^3c-ka^2c^3-k^3ac^2,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \\ a^3 & b^3 & k^3 \end{vmatrix}=k^3ab^2+k^2a^3b+ka^2b^3-ka^3b^2-k^2ab^3-k^3a^2b.$$

Решением системы будет

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{kb^2c^3+k^3bc^2+k^2b^3c-k^3b^2c-k^2bc^3-kb^3c^2}{ab^2c^3+a^3bc^2+a^2b^3c-a^3b^2c-a^2bc^3-ab^3c^2},$$

$$x=\frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)};$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{k^2ac^3+k^3a^2c+ka^3c^2-k^2a^3c-ka^2c^3-k^3ac^2}{ab^2c^3+a^3bc^2+a^2b^3c-a^3b^2c-a^2bc^3-ab^3c^2},$$

$$y=\frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)};$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{k^3ab^2+k^2a^3b+ka^2b^3-ka^3b^2-k^2ab^3-k^3a^2b}{ab^2c^3+a^3bc^2+a^2b^3c-a^3b^2c-a^2bc^3-ab^3c^2},$$

$$z=\frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

Ответ: $x=\dfrac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$; $y=\dfrac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$; $z=\dfrac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$.

6.187. $\begin{cases}(x+1)(y+1)=10,\\(x+y)(xy+1)=25.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases}xy+x+y+1=10,\\(x+y)(xy+1)=25\end{cases}$ и введем подстановку $\begin{cases}x+y=u,\\xy=v.\end{cases}$

Относительно u и v система принимает вид $\begin{cases}v+u=9,\\u(v+1)=25.\end{cases}$

Отсюда $v=9-u \Rightarrow u(9-u+1)=25 \Leftrightarrow u^2-10u+25=0,\ (u-5)^2=0$, откуда $u=5;\ v=4$.

Тогда $\begin{cases}x+y=5,\\xy=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=4,\\y_1=1;\end{cases} \begin{cases}x_2=1,\\y_2=4.\end{cases}$

Ответ: $(4;1),(1;4)$.

6.188. $\begin{cases}x-ay+a^2z=a^3,\\x-by+b^2z=b^3,\\x-cy+c^2z=c^3,\quad a\neq b, b\neq c, c\neq a.\end{cases}$

Решение.

Вычтя из первого уравнения системы второе, имеем

$$-(a-b)y+(a-b)(a+b)z=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y+(a+b)z=a^2+ab+b^2. \qquad (1)$$

Аналогично, вычтя из первого уравнения третье, получим

$$-(a-c)y+(a-c)(a+c)z=(a-c)\left(a^2+ac+c^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y+(a+c)z=a^2+ac+c^2. \qquad (2)$$

Вычтя из уравнения (1) уравнение (2), имеем

$$(a+b)z-(a+c)z=ab+b^2-ac-c^2 \Leftrightarrow z=a+b+c.$$

Подставив $z=a+b+c$ в уравнение (1), получим $y=ab+bc+ca$. Подставив $z=a+b+c$ и $y=ab+bc+ca$ в первое уравнение системы, имеем $x=abc$.

Ответ: $x=abc,\ y=ab+bc+ca,\ z=a+b+c$.

6.189. $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+y^2\right)=5,\\(x+y)\left(x^2-y^2\right)=9.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}x^3+xy^2-x^2y-y^3=5,\\x^3-xy^2+x^2y-y^3=9.\end{cases}$$

Сложив и вычитая первое и второе уравнение, получаем

$$\begin{cases}2x^3-2y^3=14,\\2xy^2-2x^2y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-y^3=7,\\-xy(x-y)=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)\left((x-y)^2+3xy\right)=7,\\xy(x-y)=2.\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}x-y=u,\\xy=v.\end{cases}$ Относительно u и v система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}u(u+3v)=7,\\uv=2.\end{cases} \Rightarrow v=\frac{2}{u}, \text{ отсюда}$$

$$u\left(u^2+3\cdot\frac{2}{u}\right)=7 \Leftrightarrow u^3=1,\quad u=1;\ v=2.$$

Тогда $\begin{cases}x-y=1,\\xy=2,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=-2.\end{cases}$

Ответ: (2; 1), (–1; –2).

6.190. $\begin{cases} xy = a, \\ yz = b, \\ zx = c, \end{cases} \quad abc > 0.$

Решение.

Из третьего уравнения находим $z = \dfrac{c}{x}$ и подставляем во второе уравнение

$$\begin{cases} xy = a, \\ y \cdot \dfrac{c}{x} = b, \\ z = \dfrac{c}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $y = \dfrac{b}{c}x$ и подставляем в первое уравнение:

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{b}{c}x = a, \\ y = \dfrac{b}{c}x, \\ z = \dfrac{c}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{ac}{b}, \\ y = \dfrac{b}{c}x, \\ z = \dfrac{c}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ y = \dfrac{b}{c}x, \\ z = \dfrac{c}{x}. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ y = \dfrac{b}{c}x, \\ z = \dfrac{c}{x}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ y = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}, \\ z = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, \end{cases}$ или

2) $\begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ y = \dfrac{b}{c}x, \\ z = \dfrac{c}{x}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ y = -\sqrt{\dfrac{ab}{c}}, \\ z = -\sqrt{\dfrac{bc}{a}}. \end{cases}$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}}; y_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}}; z_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}}.$

6.191. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x, \\ y^2+x=6. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} x^2-y^2-x+y=0, \\ y^2+x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)-(x-y)=0, \\ y^2+x=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ y^2+x=6. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ y^2+x=6 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} x+y-1=0, \\ y^2+x=6; \end{cases}$

решив их, найдем

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-3; \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \\ y_3=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \\ y_4=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2), (-3; -3), \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right).$

6.192. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm y$.

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v, \end{cases}$ где $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{4}{u}+\dfrac{4}{v}=3, \\ u^2+v^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(u+v)=3uv, \\ (u+v)^2-2uv=20. \end{cases} \Rightarrow uv=\frac{4}{3}(u+v),$$

Из второго уравнения:

$$\left(u+v\right)^2-2\cdot\frac{4}{3}\left(u+v\right)=20\Rightarrow 3\left(u+v\right)^2-8\left(u+v\right)-60=0,$$

откуда $\left(u+v\right)_1=-\dfrac{10}{3}$ или $\left(u+v\right)_2=6$; $\left(uv\right)_1=-\dfrac{40}{9}$, $\left(uv\right)_2=\dfrac{4}{3}\cdot 6=8$;

$$\begin{cases} u+v=-\dfrac{10}{3}, \\ uv=-\dfrac{40}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=6, \\ uv=8. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{3}, \\ v_1=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{3}, \\ v_2=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_3=2, \\ v_3=4; \end{cases} \quad \begin{cases} u_4=4, \\ v_4=2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{3}, \\ x-y=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{5}{3}, \\ y_1=-\dfrac{\sqrt{65}}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{3}, \\ x-y=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-\dfrac{5}{3}, \\ y_2=\dfrac{\sqrt{65}}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{\sqrt{65}}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{\sqrt{65}}{3}\right)$, $(3;-1)$, $(3;1)$.

6.193. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2. \end{cases}$

Решение.

Из третьего уравнения системы находим $z=2-xy$ и подставляем в первое и второе уравнение:

$$\begin{cases} x+y(2-xy)=2, \\ y+(2-xy)x=2, \\ z=2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-xy^2=2, \\ y+2x-x^2y=2, \\ z=2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-xy^2=2, \\ y(1-x^2)-(2-2x)=0, \\ z=2-xy, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-xy^2=2, \\ (1-x)(y(1+x)-2)=0, \\ z=2-xy. \end{cases}$$

Второе уравнение равносильно двум уравнениям: $1-x=0$ или $y(1+x)-2=0$. Отсюда, данная система равносильна двум системам уравнений

$$1)\ \begin{cases} x+2y-xy^2=2, \\ 1-x=0, \\ z=2-xy \end{cases} \quad \text{или } 2)\ \begin{cases} x+2y-xy^2=2, \\ y(1+x)-2=0, \\ z=2-xy. \end{cases}$$

1) Из второго уравнения системы

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+2y-y^2=2, \\ x=1, \\ z=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2y+1=0, \\ x=1, \\ z=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2=0, \\ x=1, \\ z=2-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=1, \\ z=2-y. \end{cases} \begin{cases} y_1=1, \\ x_1=1, \\ z_1=1. \end{cases}$$

2) Запишем систему в виде

$$\begin{cases}(x-xy^2)-(2-2y)=0,\\ y=\dfrac{2}{1+x},\\ z=2-xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-y)(1+y)-2(1-y)=0,\\ y=\dfrac{2}{1+x},\\ z=2-xy\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-y)(x(1+y)-2)=0,\\ y=\dfrac{2}{1+x},\\ z=2-xy.\end{cases}$$

Первое уравнение последней системы равносильно двум уравнениям: $1-y=0$ или $x(1+y)=2$.

Таким образом, система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases}1-y=0,\\ y=\dfrac{2}{1+x},\\ z=2-xy\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x(1+y)=2,\\ y=\dfrac{2}{1+x},\\ z=2-xy.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=1,\\ z_2=1;\end{cases}\begin{cases}x_3=-2,\\ y_3=-2,\\ z_3=-2;\end{cases}\begin{cases}x_4=1,\\ y_4=1,\\ z_4=1.\end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1), (–2; –2; –2).

6.194. $\begin{cases}\dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ y\neq 0,\\ x\neq y.\end{cases}$

Пусть $\dfrac{1}{x^2-xy}=u$, $\dfrac{1}{y^2-xy}=v$. Относительно u и v система уравнений

имеет вид: $\begin{cases}5u+4v=-\dfrac{1}{6},\\ 7u-3v=\dfrac{6}{5}.\end{cases}\Rightarrow v=\dfrac{35u-6}{15}.$

Из системы находим $u=\frac{1}{10}$; $v=-\frac{1}{6}$.

Тогда

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2-xy}=\frac{1}{10},\\ \frac{1}{y^2-xy}=-\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy=10,\\ y^2-xy=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-y)=10,\\ y(x-y)=6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{5}{3},\\ y(x-y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}y,\\ y(x-y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}y,\\ y\left(\frac{5}{3}y-y\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}y,\\ y=\pm3.\end{cases}$$

Таким образом, данная система равносильна системам уравнений:

$$\begin{cases}x=\frac{5}{3}y,\\ y=-3\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=\frac{5}{3}y,\\ y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-5,\\ y_1=-3;\end{cases}\begin{cases}x_2=5,\\ y_2=3.\end{cases}$$

Ответ: $(-5;-3)$, $(5;3)$.

6.195. $\begin{cases}x^2+y^2-2x+3y-9=0,\\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0.\end{cases}$

Решение.

Из условия $\begin{cases}2x^2+2y^2-4x+6y-18=0,\\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0.\end{cases}$

Вычтя второе уравнение системы из первого, будем иметь:
$-5x+11y-17=0$.

Отсюда $y=\frac{5x+17}{11}$, $x^2+\left(\frac{5x+17}{11}\right)^2-2x+3\cdot\frac{5x+17}{11}-9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 146x^2+93x-239=0$, откуда $x_1=-\frac{239}{146}$, $x_2=1$; $y_1=\frac{117}{146}$, $y_2=2$.

Ответ: $\left(-\frac{239}{146};\frac{117}{146}\right)$, $(1;2)$.

6.196. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=34, \\ (x+y)+xy=23 \end{cases}$ и, обозначив

$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v, \end{cases}$ получаем $\begin{cases} u^2-2v=34, \\ u+v=23 \end{cases} \Rightarrow v=23-u,$

$u^2-2(23-u)=34$, $u^2+2u-80=0$, откуда

$u_1=-10$, $u_2=8$; $v_1=23-10=13$, $v_2=23-8=15$.

Данная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$\begin{cases} x+y=-10, \\ xy=13 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=5; \end{cases} \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=3. \end{cases}$

Ответ: (3;5),(5;3).

6.197. $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $x^2+y^4=x^4+y^2$, $y^4-x^4+x^2-y^2=0$,

$(y^2-x^2)(y^2+x^2)-(y^2-x^2)=0 \Leftrightarrow (y^2-x^2)(y^2+x^2-1)=0,$

равносильное двум уравнениям: $y^2-x^2=0$ или $y^2+x^2-1=0$, $y^2=x^2$ или $y^2=1-x^2 \Rightarrow x^4+x^2=20$ или $x^4+(1-x^2)=20$; $x^4+x^2-20=0$ или $x^4-x^2-19=0$, откуда $x_1^2=4$, $x_2^2=-5$, $x_3^2=\frac{1-\sqrt{77}}{2}$, $x_4^2=\frac{1+\sqrt{77}}{2}$;

x_2^2 и x_3^2 не подходят. Тогда $x=\pm2$ или $x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{77}}{2}}$; $y_1^2=4$,

$y_2^2=\frac{1-\sqrt{77}}{2}$, откуда $y=\pm2$ (значение y_2^2 не подходит).

Ответ: (2 ;2), (–2 ;–2), (2; –2), (–2; 2).

6.198. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm y$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Умножив первое уравнение системы на $x-y \neq 0$, а второе — на $x+y \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} x^2-y^2+1=\dfrac{ab+1}{b}(x-y), \\ x^2-y^2+1=\dfrac{ab+1}{a}(x+y). \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{a}{b}\cdot\frac{(x-y)}{(x+y)},$$

$y=\dfrac{a-b}{a+b}x$, где $a \neq -b \Rightarrow x^2-\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}x^2+1=\dfrac{ab+1}{a}\left(x+\dfrac{a-b}{a+b}x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4abx^2-2(ab+1)(a+b)x+(a+b)^2=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{(ab+1)(a+b)\pm\sqrt{(ab+1)^2(a+b)^2-4ab(a+b)^2}}{4ab}=$$

$$=\frac{(ab+1)(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2\left((ab+1)^2-4ab\right)}}{4ab}=$$

$$=\frac{(ab+1)(a+b)\pm(a+b)\sqrt{(ab-1)^2}}{4ab}=\frac{(ab+1)(a+b)\pm(a+b)(ab-1)}{4ab}=$$

$$=\frac{(a+b)(ab+1\pm(ab-1))}{4ab}.$$

Тогда

$$x_1=\frac{(a+b)(ab+1-ab+1)}{4ab}=\frac{a+b}{2ab},\ x_2=\frac{(a+b)(ab+1+ab-1)}{4ab}=\frac{a+b}{2};$$

$$y_1=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2ab}=\frac{a-b}{2ab},\ y_2=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

Ответ: если $ab+1=0$, то $y=\pm\sqrt{x^2+1}$, x — любое; если $ab+1\neq 0$, то

$$x_1=\frac{a+b}{2ab},\ y_1=\frac{a-b}{2ab};\ x_2=\frac{a+b}{2},\ y_2=\frac{a-b}{2}.$$

6.199. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\ 2x+3y-5z+19=0.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3},\\ \dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\ 2x+3y-5z=-19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3=2y+6,\\ 4y+12=3z-3,\\ 2x+3y-5z=-19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=9,\\ 4y-3z=-15,\\ 2x+3y-5z=-19.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{2x+3y+19}{5}.$$

$$\begin{cases}3x-2y=9,\\ 4y-3\cdot\dfrac{2x+3y+19}{5}=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=9,\\ 11y-6x=-18.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-18+6x}{11}\Rightarrow 3x-2\cdot\frac{-18+6x}{11}=9,\ x=3;\ \text{тогда}\ y=0;\ z=5.$$

Ответ: (3; 0; 5).

6.200. $\begin{cases}(x+y)^2+2x=35-2y,\\ (x-y)^2-2y=3-2x.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2+2x=35-2y,\\ x^2-2xy+y^2-2y=3-2x.\end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, имеем

$$4xy+2x+2y=32-2y+2x,\ x=\frac{8-y}{y}.$$

Подставив это значение x в первое уравнение системы, получим

$$\left(\frac{8-y}{y}+y\right)^2+2\cdot\frac{8-y}{y}=35-2y\Rightarrow y^4-20y^2+64=0,$$

откуда $y_1=-2,\ y_2=2,\ y_3=-4,\ y_4=4;\ x_1=-5,\ x_2=3,\ x_3=-3,\ x_4=1.$

Ответ: (–5; –2), (3; 2), (–3; –4), (1; 4).

6.201. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0,\\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+y\neq 1,\\ 2x-y\neq -3.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y-1}=u,\\ \dfrac{1}{2x-y+3}=v.\end{cases}$

Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}4u-5v=-\dfrac{5}{2},\\ 3u+v=-\dfrac{7}{5},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=-\dfrac{1}{2},\\ v=\dfrac{1}{10}.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y-1}=-\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{1}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1,\\ 2x-y=7,\end{cases}$$ откуда $x=2,\ y=-3.$

Ответ: (2; –3).

$$\mathbf{6.202.}\ \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3, \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3, \\ \frac{1}{xyz}=1. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ z \neq 0. \end{cases}$

Умножая левую и правую части каждого из уравнений системы на $xyz \neq 0$, получим

$$\begin{cases} yz+xz+xy=3xyz, \\ z+x+y=3xyz, \\ xyz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz+xz+xy=3, \\ x+y+z=3, \\ xyz=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(y+x)+xy=3, \\ z=3-(x+y), \\ xyz=1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-(x+y))(x+y)+xy=3, \\ xy(3-(x+y))=1. \end{cases} \Rightarrow xy=\frac{1}{3-(x+y)} \Rightarrow (3-(x+y))(x+y)+$$

$$+\frac{1}{3-(x+y)}=3 \Leftrightarrow (x+y)^3-6(x+y)^2+12(x+y)-8=0 \text{ при } x+y\neq 3.$$

Представив полученное уравнение в виде $((x+y)-2)^3=0$, откуда

$x+y=2$; тогда $z=1$, $xy=1$.

Отсюда $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=1, \end{cases} \Rightarrow y=1, x=1.$

Ответ: (1; 1; 1).

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2, \end{cases}$ $\quad a \neq b \neq c.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ x^2+2bx+b^2+y^2+2cy+c^2+z^2+2az+a^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+y+z)^2-2xy-2xz-2yz+2bx+2cy+2az=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ xy+yz+xz-bx-cy-az=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-(x+y), \\ cx+ay+bz=0, \\ xy-bx-cy+(y+x-a)z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cx+cy-b(x+y)=0, \\ xy-bx-cy-(y+x-a)(x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{c-b}{b-a}x, \\ (x-c+a)y-y^2-(b+x-a)x=0. \end{cases}$$

Подставив $y=\dfrac{c-b}{b-a}x$ из второго уравнения системы в третье, получим

$$\frac{(x-c+a)(c-b)}{b-a}x-\frac{(c-b)^2}{(b-a)^2}x^2-x^2-(b-a)x=0 \Rightarrow x(x-(a-b))=0,$$

откуда $x_1=0,\ x_2=a-b;\ y_1=0,\ z_1=0;\ y_2=\dfrac{c-b}{b-a}\cdot(a-b)=b-c,$

$z_2=-(a-b+b-c)=c-a.$

Ответ: $(0;0;0)$, $(a-b;\,b-c;\,c-a)$.

6.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y \neq 0$.

Из условия имеем

$$\begin{cases} (x+y)+\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)=7, \\ (x+y)\cdot\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)=12. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=v. \end{cases}$

Относительно u и v система принимает вид $\begin{cases} u+v=7, \\ u\cdot v=12, \end{cases}$ откуда находим

$$\begin{cases} u_1=3, \\ v_1=4; \end{cases} \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=3. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{cases} x+y=3, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=4 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=6, \\ y_1=-3; \end{cases} \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1; \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}, \\ y_3=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}}; \end{cases} \begin{cases} x_4=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \\ y_4=\dfrac{4}{1+\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Ответ: $(6;-3),(2;1),(6+2\sqrt{3};\ -2-2\sqrt{3}),(6-2\sqrt{3};\ -2+2\sqrt{3})$.

6.205. $\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1,\\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ y\neq 0.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}x^2+y^2=u,\\ \dfrac{y}{x}=v.\end{cases}$ Тогда относительно u и v система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{3}{u-1}+2v=1,\\ u+\dfrac{4}{v}=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{u-1}+2v=1,\\ u=22-\dfrac{4}{v}.\end{cases}$$

Подставив значение $u=22-\dfrac{4}{v}$ из второго уравнения в первое, имеем

$$\frac{3}{22-\dfrac{4}{v}-1}+2v=1\Leftrightarrow 21v^2-13v+2=0,$$

откуда $v_1=\dfrac{2}{7}$, $v_2=\dfrac{1}{3}$; $u_1=8$, $u_2=10$.

$$\begin{cases}x^2+y^2=8,\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{7}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-14\sqrt{\dfrac{2}{53}},\\ y_1=-4\sqrt{\dfrac{2}{53}};\end{cases}\begin{cases}x_2=14\sqrt{\dfrac{2}{53}},\\ y_2=4\sqrt{\dfrac{2}{53}};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=1;\end{cases}\begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=-1.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{-14\sqrt{106}}{53};\dfrac{-4\sqrt{106}}{53}\right),\left(\dfrac{14\sqrt{106}}{53};\dfrac{4\sqrt{106}}{53}\right),(3;1),(-3;-1).$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

Решение.

Из условия получаем $\begin{cases} (x+y)+xy=7, \\ (x+y)^2-xy=13. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v, \end{cases}$ тогда имеем $\begin{cases} u+v=7, \\ u^2-v=13. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим $u^2-7+u=13$, $u^2+u-20=0$, откуда $u_1=-5$, $u_2=4$; тогда $v_1=12$, $v_2=3$.

Данная система равносильна двум системам уравнений

$$\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=12 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 1), (1; 3).

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz=5, \\ yx+yz=8. \end{cases} \Rightarrow z=6-x-y.$$

$$\begin{cases} xy+x(6-x-y)=5, \\ yx+y(6-x-y)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ y^2-6y+8=0, \end{cases}$$ откуда $x_1=5$, $x_2=1$; $y_1=2$, $y_2=4$.

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=2, \\ z_1=-1; \end{cases} \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=4, \\ z_2=-3; \end{cases} \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=2, \\ z_3=6-1-2=3; \end{cases} \begin{cases} x_4=1, \\ y_4=4, \\ z_4=6-1-4=1. \end{cases}$$

Ответ: (5; 2; – 1), (5; 4; – 3), (1; 2; 3), (1; 4; 1).

6.208. $\begin{cases}(x-y)\left(x^2-y^2\right)=3a^3,\\(x+y)\left(x^2+y^2\right)=15a^3.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}x^3-xy^2-x^2y+y^3=3a^3,\\x^2+xy^2+x^2y+y^3=15a^3.\end{cases}$$

Сложим и вычтем второе и первое уравнения:

$$\begin{cases}2x^3+2y^3=18a^3,\\2xy^2+2x^2y=12a^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=9a^3,\\xy(x+y)=6a^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=9a^3,\\xy(x+y)=6a^3.\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}x+y=u,\\xy=v.\end{cases}$ Относительно u и v система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}u\left(u^2-3v\right)=9a^3,\\uv=6a^3\end{cases}\Rightarrow v=\frac{6a^3}{u},\ u\left(u^2-3\cdot\frac{6a^3}{u}\right)=9a^3,\ u^3=27a^3,$$

$$u=3a,\ \ v=\frac{6a^3}{3a}=2a^2\Rightarrow\begin{cases}x+y=3a,\\xy=2a^2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=a,\\y_1=2a;\end{cases}\ \begin{cases}x_2=2a,\\y_2=a.\end{cases}$$

Ответ: $(a;\ 2a),(2a;\ a)$.

6.209. $\begin{cases}x^3+y^3=19,\\x^2y+xy^2=-6.\end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=19,\\xy(x+y)=-6.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}x+y=u,\\xy=v.\end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}u\left(u^2-3v\right)=19,\\uv=-6.\end{cases}\Rightarrow u^3=1,\text{ откуда } u=1,\ v=-6.$$

Получаем $\begin{cases}x+y=1,\\xy=-6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=3;\end{cases}\ \begin{cases}x_2=3,\\y_2=-2.\end{cases}$

Ответ: $(-2;\ 3),(3;\ -2)$.

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=17, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-2x^2y^2=17, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2=4, \\ x^2+y^2=5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=\pm 2, \\ (x+y)^2-2xy=5. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} xy=-2, \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \text{или} \begin{cases} xy=2, \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1; \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-2, \\ y_3=1; \end{cases} \begin{cases} x_4=1, \\ y_4=-2; \end{cases} \begin{cases} x_5=2, \\ y_5=-1; \end{cases} \begin{cases} x_6=-1, \\ y_6=2; \end{cases} \begin{cases} x_7=-2, \\ y_7=-1; \end{cases} \begin{cases} x_8=-1, \\ y_8=-2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1), (1; 2), (– 2; 1), (1; – 2), (2; – 1), (– 1; 2), (– 2; – 1), (– 1; –2).

6.211. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$$

Пусть $\frac{x}{y}=t$. Тогда имеем $6t^2+5t-6=0$, откуда $t_1=-\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{x}{y}=-\frac{3}{2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ и $x_1=-\frac{3}{2}y$, $x_2=\frac{2}{3}y$.

Из первого уравнения системы имеем: $-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}=\frac{16}{3}$, или $y^2=-\frac{23}{9}$ (нет решений), и $\frac{2}{3}y^2-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$, $y^2=9\Rightarrow y_1=-3,\ y_2=3$. Тогда $x_1=-2,\ x_2=2$.

Ответ: (2; 3), (– 2; – 3).

6.212. $\begin{cases}\frac{3}{uv}+\frac{15}{vw}=2,\\ \frac{15}{vw}+\frac{5}{wu}=2,\\ \frac{5}{wu}+\frac{3}{uv}=2.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}u\neq 0,\\ v\neq 0,\\ w\neq 0.\end{cases}$

Пусть $\frac{3}{uv}=x,\ \frac{15}{vw}=y,\ \frac{5}{wu}=z.$

Относительно x, y и z система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}x+y=2,\\ y+z=2,\Rightarrow z=2-x.\\ z+x=2.\end{cases}$$

Подставив это значение z во второе уравнение, получим

$$\begin{cases}x+y=2,\\ y+2-x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2,\\ y-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=2,\\ 2x=2.\end{cases}\Rightarrow x=1, y=1.$$

Тогда $z=2-1=1$.

Таким образом $\begin{cases}\frac{3}{uv}=1,\\ \frac{15}{vw}=1,\\ \frac{5}{wu}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=3,\\ vw=15,\Rightarrow w=\frac{5}{u}.\\ wu=5\end{cases}$

Подставив это значение w во второе уравнение, имеем

$$\begin{cases} uv = 3, \\ v \cdot \dfrac{5}{u} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3, \\ v = 3u \end{cases} \Rightarrow u \cdot 3u = 3,\ \ u^2 = 1, \text{ откуда } u_1 = -1,\ u_2 = 1.$$

Тогда $v_1 = -3$, $v_2 = 3$; $w_1 = -5$, $w_2 = 5$.

Ответ: $(-1; -3; -5), (1; 3; 5)$.

6.213. $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$

Решение.

По формуле суммы кубов получаем

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)13 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 25 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 4. \end{cases}$$

Система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y^2 = 5 - x^2, \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y^2 = 5 - x^2, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 1, \\ y_5 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_6 = -1, \\ y_6 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 1, \\ y_7 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_8 = -1, \\ y_8 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; -2)$, $(-1; 2)$.

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $z=-x-y$ и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} 2x+3y-x-y=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(-x-y+3)^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(-x-y+3)^2=14. \end{cases}$$

Отсюда $x=-2y$, $(-2y+1)^2+(y+2)^2+(2y-y+3)^2=14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+y=0$, откуда $y_1=0$, $y_2=-1$; $x_1=0$, $x_2=2$; $z_1=0$, $z_2=-1$.

Ответ: (0; 0; 0), (2; – 1; – 1).

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$

Решение.

Сложим и вычтем первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x^3+3xy^2+3x^2y+y^3=-27, \\ x^3+3xy^2-3x^2y-y^3=343 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=-27, \\ (x-y)^3=343 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$$

Ответ: (2; – 5).

6.216. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

Решение.

Из условия $\begin{cases} x^2+y=20, \\ x+y^2=20, \end{cases}$ откуда $x^2+y=x+y^2$, $x^2-y^2-x+y=0$, $(x-y)(x+y)-(x-y)=0$, $(x-y)(x+y-1)=0$.

Следовательно, данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y^2-20=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y^2-20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5, \\ y_1=-5; \end{cases} \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=4; \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}, \\ y_3=\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4=\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}, \\ y_4=\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-5;-5), (4;4), \left(\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{77}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$.

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \left(x^4+y^4\right)+x^2y^2=91, \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=91, \\ x^2+y^2=13-xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (13-xy)^2-x^2y^2=91, \\ x^2+y^2=13-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ (x+y)^2=13+xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ (x+y)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ x+y=\pm 4. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} xy=3, \\ x+y=-4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} xy=3, \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=3; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=1; \end{cases} \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=-3; \end{cases} \begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-1. \end{cases}$$

Ответ: $(1;3), (3;1), (-1;-3), (-3;-1)$.

6.218. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=9a^3, \\ xy(x+y)=6a^3. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases} u\left(u^2-3v\right)=9a^3, \\ uv=6a^3 \end{cases} \Rightarrow v=\frac{6a^3}{u},\ u\left(u^2-3\cdot\frac{6a^3}{u}\right)=9a^3 \Rightarrow u^3=27a^3,$$

откуда $u=3a$; $v=\dfrac{6a^3}{3a}=2a^2$.

Тогда $\begin{cases} x+y=3a, \\ xy=2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=a, \\ y_1=2a; \end{cases} \begin{cases} x_2=2a, \\ y_2=a. \end{cases}$

Ответ: $(a; 2a), (2a; a)$.

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $z=3-x-y$. Тогда получим

$$\begin{cases} x+2y-3+x+y=2, \\ x+y(3-x-y)+(3-x-y)x=3, \\ x+yz+zx=3. \end{cases} \Rightarrow y=\frac{5-2x}{3},$$

$$x+\frac{5-2x}{3}\left(3-x-\frac{5-2x}{3}\right)+\left(3-x-\frac{5-2x}{3}\right)x=3 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=7$. Тогда $y_1=1$, $y_2=-3$; $z_1=1$, $z_2=-1$.

Ответ: $(1; 1; 1), (7; -3; -1)$.

6.220. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

Умножив первое уравнение системы на $y \neq 0$, а второе на $x \neq 0$, получим

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + x^2 y = 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2 + y^2\right) = 40y, \\ y\left(y^2 + x^2\right) = 10x. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{4y}{x}$, $x^2 = 4y^2$, откуда $x_1 = -2y$, $x_2 = 2y$.

1) $\dfrac{y^3}{-2y} - 2y \cdot y = 10$, $y^2 = -4$, нет решений.

2) $\dfrac{y^3}{2y} + 2y \cdot y = 10$, $y^2 = 4$, откуда $y_{1,2} = \pm 2$. Тогда $x_{1,2} = \pm 4$.

Ответ: $(4; 2), (-4; -2)$.

6.221. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $z = 2 - x - y$.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 - x - y = 1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (2 - x - y - 1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (1 - x - y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = -1 - 2y$, $(-1 - 2y)^2 + (y+2)^2 + (1 + 1 + 2y - y)^2 = 9 \Leftrightarrow 6y^2 + 12y = 0$,

откуда $y_1 = 0$, $y_2 = -2$; тогда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; $z_1 = 3$, $z_2 = 1$.

Ответ: $(-1; 0; 3), (3; -2; 1)$.

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = 1{,}5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+y} > 0, \\ \dfrac{x+1}{y+2} > 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}}-2=0,\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}}-1{,}5=0.\end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}\neq 0$, а второе — на $\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}\neq 0$, получим

$$\begin{cases}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}\right)^2-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+1=0,\\ \left(\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}\right)^2-1{,}5\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}-1\right)^2=0,\\ \left(\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}\right)^2-1{,}5\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}=1\end{cases}\Rightarrow$$

$\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}=1$, $\dfrac{x+1}{x+y}=1$, откуда $x+1=x+y, y=1$.

Второе уравнение системы решаем как квадратное уравнение относительно $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}$: $t^2-1{,}5t-1=0$.

Отсюда $t_1=\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}=2$; $t_2=\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}=-\dfrac{1}{2}$; $2\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}=-1$ — не имеет решений.

Тогда $\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{x+1}{1+2}=4$, $x+1=12$; $x=11$.

Ответ: (11; 1).

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x^2+2y+1\geq 0$.

Пусть $\sqrt{x^2+2y+1}=t$, где $t\geq 0$; тогда $x^2+2y=t^2-1 \Leftrightarrow t^2-1+t=1$, или $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=1$; $t_1=-2<0$ не подходит. Тогда $\sqrt{x^2+2y+1}=1$, $x^2+2y+1=1$, $x^2+2y=0$. Имеем $\begin{cases} x^2+2y=0, \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow$ $y=2-2x$, $x^2+2(2-2x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$, откуда $x=2$. Тогда $y=-2$.

Ответ: $(2;-2)$.

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ y+z\geq 0, \\ z+x\geq 0. \end{cases}$

Сложив все три уравнения системы, получим

$$2\sqrt{x+y}+2\sqrt{y+z}+2\sqrt{z+x}=12 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=6.$$

Вычтя из полученного уравнения поочередно первое, второе и третье уравнение системы, имеем

$$\begin{cases} \sqrt{z+x}=3, \\ \sqrt{x+y}=1, \\ \sqrt{y+z}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+x=9, \\ x+y=1, \\ y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=-2, \\ z=6. \end{cases}$$

Ответ: $(3;-2;6)$.

6.225. $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ x+y=17.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=u\geq 0,\\ \sqrt[4]{y}=v\geq 0.\end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3,\\ \left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2=17\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(9-2uv)^2-2u^2v^2=17\Leftrightarrow\ u^2v^2-18uv+32=0.$ Решая последнее уравнение как квадратное относительно uv, найдем $uv=2$ или $uv=16$.

Таким образом, $\begin{cases}u+v=3,\\ uv=2\end{cases}$ или $\begin{cases}u+v=3,\\ uv=16.\end{cases}$

По теореме Виета найдем $\begin{cases}u_1=1,\\ v_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}u_2=2,\\ v_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{x}=1,\\ \sqrt[4]{y}=2\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=2,\\ \sqrt[4]{y}=1,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=16;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=16,\\ y_2=1.\end{cases}$

Ответ: $(1;\,16),(16;\,1)$.

6.226. $\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{2},\\ \left(x^2+1\right)y+\left(y^2+1\right)x=4xy.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0.\end{cases}$

Из условия имеем

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{xy+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{xy+1}{x}}=2\sqrt{2},\\ x^2y+y+y^2x+x=4xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}+2\sqrt{\dfrac{(xy+1)^2}{xy}}+\dfrac{xy+1}{x}=8,\\ x^2y+y+y^2x+x=4xy\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2y+x+xy^2+y}{xy}+2\sqrt{\dfrac{(xy+1)^2}{xy}}=8,\\ x^2y+x+xy^2+y=4xy.\end{cases}\Rightarrow \frac{4xy}{xy}+2\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}}=8\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}}=2\Rightarrow\frac{(xy+1)^2}{xy}=4\Leftrightarrow(xy-1)^2=0,\text{ откуда } xy=1.$$

Подставив это значение xy в первое уравнение системы, получим $x+x+y+y+2\sqrt{4}=8$, откуда $\begin{cases}xy=1,\\ x+y=2.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

Ответ: (1; 1).

6.227. $\begin{cases}\sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3,\\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1,\\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{u+v}=x,\\ \sqrt[3]{v+w}=y,\\ \sqrt[3]{w+u}=z.\end{cases}$

Относительно x, y, z система принимает вид $\begin{cases}x+y=3,\\ y+z=1,\\ z+x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3,\\ y-x=1,\\ z=-x.\end{cases}$

Сложив и вычтя первое и второе уравнения, получим $x=1;\ y=2.$

Тогда $z=-1$. Отсюда $\begin{cases}\sqrt[3]{u+v}=1,\\ \sqrt[3]{v+w}=2,\\ \sqrt[3]{w+u}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1,\\ v+w=8,\\ w+u=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1,\\ v+w=8,\\ w=-1-u\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1,\\ v-1-u=8,\\ w=-1-u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1,\\ v-u=9,\\ w=-1-u,\end{cases}\ u=-4;\ v=5;\ w=3.$$

Ответ: (–4; 5; 3).

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x}=u\geq 0, \\ \sqrt{y}=v\geq 0. \end{cases}$

Относительно u и v система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u^2v+v^2u=30, \\ u^3+v^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v)=30, \\ (u+v)\left((u+v)^2-3uv\right)=35 \end{cases} \Rightarrow uv=\frac{30}{u+v},$$

$(u+v)\left((u+v)^2-3\cdot\dfrac{30}{u+v}\right)=35,\ (u+v)^3=125,\ u+v=5.$ Тогда $uv=\dfrac{30}{5}=6$

и система уравнений принимает вид $\begin{cases} uv=6, \\ u+v=5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3; \end{cases} \begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$

Получаем $\begin{cases} \sqrt{x}=2, \\ \sqrt{y}=3; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x}=3, \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9; \end{cases} \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$

Ответ: (4; 9), (9; 4).

6.229. $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$

Вычтя второе уравнение системы из первого, получим

$x+\sqrt{y}-\sqrt{x}-y=0,\quad (x-y)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0,$

$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)=0,$

откуда $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ или $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0.$

Тогда $\sqrt{y}=\sqrt{x}$ или $\sqrt{x}=1-\sqrt{y}.$

Подставив значение $\sqrt{y}=\sqrt{x}$ в первое уравнение системы, получим $x+\sqrt{x}-56=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, получим $\sqrt{x}=-8$, $\sqrt{x}=7$; $\sqrt{x}=-8$ не подходит. Тогда $x_1=49$; $y_1=49$.

Подставив значение $\sqrt{x}=1-\sqrt{y}$ во второе уравнение системы, получим $y-\sqrt{y}-56=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{y}$, получим $\sqrt{y_2}=8$ или $y_2=64$, $\sqrt{y_3}=-7$ не подходит. Тогда $\sqrt{x_2}=1-8=-7$; $\sqrt{x_2}=-7$ не подходит.

Ответ: (49; 49).

6.230. $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Решение.

Возведя первое уравнение системы в куб, получим

$$x+2y+3\sqrt[3]{(x+2y)^2(x-y+2)}+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)^2}+x-y+$$

$$+2=27 \Leftrightarrow 2x+7+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}\left(\sqrt[3]{x+2y}+3\sqrt[3]{x-y+2}\right)=25.$$

Используя уравнения системы, получаем

$$7+9\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}=25 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x-y+2)=8. \text{ Имеем } \begin{cases}(x+2y)(x-y+2)=8,\\ 2x+y=7\end{cases} \Rightarrow$$

$$y=7-2x,\ (x+2(7-2x))(x-7+2x+2)=8,\ 9x^2-57x+78=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=\frac{13}{3}$. Тогда $y_1=3$, $y_2=-\frac{5}{3}$.

Ответ: (2; 3), $\left(\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

6.231. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+y\ge 0,\\ 2x+y+2\ge 0.\end{cases}$

Возведя первое уравнение системы в квадрат, получим

$$x+y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}+2x+y+2=49\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47,\ \sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=12.$$

Возведя в квадрат, имеем $(x+y)(2x+y+2)=144$. Система уравнений принимает вид $\begin{cases}(x+y)(2x+y+2)=144,\\ 3x+2y=23\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{23-3x}{2}$

и $\left(x+\dfrac{23-3x}{2}\right)\left(2x+\dfrac{23-3x}{2}+2\right)=144\Leftrightarrow x^2+4x-45=0,$

откуда $x_1=-9$, $x_2=5$. Тогда $y_1=25$, $y_2=4$.

Ответ: $(-9; 25), (5; 4)$.

6.232. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+y\ge 0,\\ x-y\ge 0,\\ x>0,\\ y>0.\end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\sqrt{\frac{20y}{x}\cdot\frac{5y}{16x}}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{25y^2}{4x^2}}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{5y}{2x}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$, а после умножения числителя и знаменателя правой части уравнения на выражение, сопряженное со знаменателем,

$$\frac{5y}{2x}=\frac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5y}{2x}=\frac{x+y+2\sqrt{x^2-y^2}+x-y}{x+y-x+y}\Leftrightarrow \frac{5y^2}{2x}-x=\sqrt{x^2-y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25y^4}{4x^2}-5y^2+x^2=x^2-y^2\Leftrightarrow \frac{25y^4}{4x^2}-4y^2=0\Rightarrow 25y^2=16x^2,\ y=\frac{4}{5}x.$$

Таким образом, $\sqrt{\frac{20}{x}\cdot\frac{4}{5}x}=\sqrt{x+\frac{4}{5}x}+\sqrt{x-\frac{4}{5}x}$, $4=\sqrt{\frac{9}{5}x}+\sqrt{\frac{x}{5}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{5}}=1$, откуда $x=5; y=4$.

Ответ: (5; 4).

6.233. $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 2x+2y=4.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}2x+y+1\ge 0,\\ x+y\ge 0.\end{cases}$

Возведя первое уравнение в квадрат, имеем

$$2x+y+1-2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}+x+y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y-2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=0.$$

Так как $3x+2y=4$, то из второго уравнения системы получаем

$$4-2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=0\Leftrightarrow \sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=2.$$

После возведения в квадрат имеем $(2x+y+1)(x+y)=4$.

$y=\frac{4-3x}{2}\Rightarrow \left(2x+\frac{4-3x}{2}+1\right)\left(x+\frac{4-3x}{2}\right)=4\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$, $x_1=-4$, $x_2=2$. Тогда $y_1=8$, $y_2=-1$.

Проверкой убеждаемся, что x_1 и y_1 являются посторонними решениями.
Ответ: $(2; -1)$.

6.234. $\begin{cases} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{u} + v^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{v} = 1{,}5, \\ uv = 64. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[6]{u}} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{v}} = 1{,}5. \\ uv = 64. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[6]{u} = x > 0, \\ \sqrt[6]{v} = y > 0. \end{cases}$ Относительно x и y система принимает вид

$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1{,}5, \\ (xy)^6 = 64, \end{cases}$ откуда получаем при $xy \neq 0$, $\begin{cases} x + y = 1{,}5xy, \\ xy = \pm 2. \end{cases}$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$\begin{cases} x + y = 1{,}5xy, \\ xy = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 1{,}5xy, \\ xy = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \sqrt[6]{u} = 1, \\ \sqrt[6]{v} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 64; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[6]{u} = 2, \\ \sqrt[6]{v} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 64, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(1; 64), (64; 1)$.

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq -1, \\ x + y + 1 \geq 0, \\ x - y + 10 \geq 0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}}-1=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-2=0.$ Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}$, имеем $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}=-1$, откуда $\frac{y+1}{x}=-1$, $y=-x-1$ или $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}=2$, откуда $\frac{y+1}{x}=8$, $y=8x-1$. Из второго уравнения системы $\sqrt{x-x-1+1}+\sqrt{x+x+1+10}=5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+11}=5$, $\sqrt{x+8x-1+1}+\sqrt{x-8x+1+10}=5\Leftrightarrow \sqrt{9x}+\sqrt{-7x+11}=5.$ $x_1=7$, $x_2=\frac{49}{64}$, $x_3=1$. Тогда $y_1=-8$, $y_2=\frac{41}{8}$, $y_3=7$.

Ответ: $(7;-8)$, $\left(\frac{49}{64};\frac{41}{8}\right)$, $(1;7)$.

6.236. $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6,\\ xy^2=6\sqrt{10}.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x^2-y^2\ge 0.\end{cases}$

Возводим первое уравнение системы в квадрат, тогда

$x^2+y^2+2\sqrt{x^4-y^4}+x^2-y^2=36\Leftrightarrow\sqrt{x^4-y^4}=18-x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x^4-y^4=324-36x^2+x^4$, $y^4-36x^2+324=0$.

Из второго уравнения системы имеем

$x=\frac{6\sqrt{10}}{y^2}\Rightarrow y^4-36\cdot\frac{360}{y^4}+324=0,\ \ y^8+324y^4-12960=0,$

где $y\ne 0\Rightarrow\ y^4=36$, $y_1=-\sqrt{6}$, $y_2=\sqrt{6}$. Тогда $x_{1,2}=\frac{6\sqrt{10}}{6}=\sqrt{10}$.

Ответ: $(\sqrt{10};-\sqrt{6})$, $(\sqrt{10};\sqrt{6})$.

6.237. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases}\sqrt{x}=3-\sqrt{y},\\ \sqrt{x+5}=5-\sqrt{y+3}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=9-6\sqrt{y}+y,\\ x+5=25-10\sqrt{y+3}+y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9-6\sqrt{y}+y,\\ x=23-10\sqrt{y+3}+y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=9-6\sqrt{y}+y,\ 9-6\sqrt{y}+y=23-10\sqrt{y+3}+y\Leftrightarrow 5\sqrt{y+3}=7+3\sqrt{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25y+75=49+42\sqrt{y}+9y,\ 8y+13=21\sqrt{y}\Rightarrow 64y^2-233y+169=0,$$

откуда $y_1=1,\ y_2=\dfrac{169}{64}$. Тогда $x_1=4,\ x_2=\dfrac{121}{64}$.

Ответ: $(4;\,1),\ \left(\dfrac{121}{64};\dfrac{169}{64}\right)$.

6.238. $\begin{cases}\sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2}=1{,}6,\\ xy=2.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0,\\ y\ne 0.\end{cases}$

Будем преобразовывать первое уравнение системы

$$\sqrt{\left(\frac{x^2-y^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2}=1{,}6\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{-2y^2}{x^2+y^2}\right)^2}=1{,}6\Rightarrow\frac{2y^2}{x^2+y^2}=1{,}6,$$

$\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{y^2}=\dfrac{5}{4},\ \dfrac{x^2}{y^2}+1=\dfrac{5}{4},\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. Тогда $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2}$

или $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$ и данная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2},\\ xy=2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2},\\ xy=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-2;\end{cases} \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2.\end{cases}$$

Ответ: $(-1;-2),(1;2)$.

6.239. $\begin{cases}|2x+3y|=5,\\ |2x-3y|=1.\end{cases}$

Решение.

Данная система равносильна четырем системам уравнений:

1) $\begin{cases}2x+3y=-5,\\ 2x-3y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2},\\ y_1=-\dfrac{2}{3};\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x+3y=-5,\\ 2x-3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+3y=5,\\ 2x-3y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=1,\\ y_3=1;\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x+3y=5,\\ 2x-3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_4=\dfrac{3}{2},\\ y_4=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right),(-1;-1),(1;1),\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{2}{3}\right)$.

6.240. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ |x+y|=5.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ y\neq 0.\end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{|x+y|}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}.$$

Таким образом получили:

$$\begin{cases}\dfrac{|x+y|}{\sqrt{xy}}=\dfrac{5}{2},\\ |x+y|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{xy}}=\dfrac{5}{2},\\ |x+y|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{xy}=2,\\ |x+y|=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xy=4,\\ |x+y|=5.\end{cases}$$

Получаем два случая:

1) $\begin{cases}xy=4,\\ x+y=-5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=4,\\ x+y=5.\end{cases}$

По теореме Виета получаем $\begin{cases}x_1=-4,\\ y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=1,\\ y_3=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=4,\\ y_4=1.\end{cases}$

Ответ: $(-4;-1),(-1;-4),(1;4),(4;1)$.

6.241. $\begin{cases}u-v+\sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}}=\dfrac{12}{u+v},\\ u^2+v^2=41.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{u-v}{u+v}\ge 0,\\ u+v\ne 0.\end{cases}$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$1)\begin{cases}u-v\ge 0,\\ u+v>0,\\ u-v+\sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}}=\dfrac{12}{u+v},\\ u^2+v^2=41;\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} u-v\le 0, \\ u+v<0, \\ -(u-v)+\sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}}=\dfrac{12}{-(u+v)}, \\ u^2+v^2=41; \end{cases}$$

1) Умножив первое уравнение системы уравнений 1) на $u+v>0$, имеем $u^2-v^2+\sqrt{u^2-v^2}-12=0 \Rightarrow \sqrt{u^2-v^2}=3$, $u^2-v^2=9$ или $\sqrt{u^2-v^2}=-4$ (нет решений). Тогда система 1) имеет вид $\begin{cases} u^2-v^2=9, \\ u^2+v^2=41 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2=25, \\ v^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\pm 5, \\ v=\pm 4. \end{cases}$$

Получили:

$$\begin{cases} u=-5, \\ v=-4; \end{cases} \begin{cases} u=-5, \\ v=4; \end{cases} \begin{cases} u=5, \\ v=-4; \end{cases} \begin{cases} u=5, \\ v=4. \end{cases}$$

Так как $u-v\ge 0$ и $u+v>0$, то $\begin{cases} u_1=5, \\ v_1=-4; \end{cases} \begin{cases} u_2=5, \\ v_2=4. \end{cases}$

2) Умножив первое уравнение системы уравнений 2) на $u+v<0$, имеем $u^2-v^2-\sqrt{u^2-v^2}-12=0 \Rightarrow \sqrt{u^2-v^2}=4$, $u^2-v^2=16$ или $\sqrt{u^2-v^2}=-3$ (нет решений).

Система 2) имеет вид $\begin{cases} u^2-v^2=16, \\ u^2+v^2=41. \end{cases}$

Отсюда, с учетом $u-v\le 0$ и $u+v<0$,

$$\begin{cases} u_3=-\sqrt{28{,}5}, \\ v_3=-\sqrt{12{,}5}; \end{cases} \begin{cases} u_4=-\sqrt{28{,}5}, \\ v_4=\sqrt{12{,}5}. \end{cases}$$

Ответ: $(5;-4)$, $(5;4)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};-\sqrt{12{,}5}\right)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};\sqrt{12{,}5}\right)$.

6.242. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ x^2-18=2y(4y-9).\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{3x-2y}{2x}>0.$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}\right)^2-2\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+1=0,$$

где $\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}\neq 0,\ \left(\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}=1,\ \dfrac{3x-2y}{2x}=1,\ x=2y.$

Из второго уравнения системы имеем $(2y)^2-18=2y(4y-9)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^2-9y+9=0$, откуда $y_1=\dfrac{3}{2},\ y_2=3;\ x_1=3,\ x_2=6.$

Ответ: $(3;\ \dfrac{3}{2}),\ (6;\ 3).$

6.243. $\begin{cases}5\sqrt{x^2-3y-88}+\sqrt{x+6y}=19,\\ 3\sqrt{x^2-3y-88}=1+2\sqrt{x+6y}.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt{x^2-3y-88}=u\ge 0,\\ \sqrt{x+6y}=v\ge 0.\end{cases}$

Относительно u и v система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}5u+v=19,\\ 3u=1+2v\end{cases}\Rightarrow u=\frac{1+2v}{3},\ 5\left(\frac{1+2v}{3}\right)+v=19\Rightarrow v=4,\ u=\frac{1+2\cdot 4}{3}=3.$$

Тогда $\begin{cases}\sqrt{x^2-3y-88}=3,\\ \sqrt{x+6y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3y-88=9,\\ x+6y=16\end{cases}\Rightarrow x=16-6y,$

$$(16-6y)^2-3y=97 \Leftrightarrow 36y^2-195y+159=0, \text{ откуда } y_1=1,\ y_2=\frac{53}{12}.$$

Тогда $x_1=10,\ x_2=-\frac{21}{2}$.

Ответ: $(10;\ 1), \left(-\frac{21}{2}; \frac{53}{12}\right)$.

6.244. Решить уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+\ldots$$
$$\ldots+(x+8)(x+9)+(x+9)(x+10)=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+8\cdot 9+9\cdot 10.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2+x\right)+\left(x^2+3x+2\right)+\left(x^2+5x+6\right)+\left(x^2+7x+12\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(x^2+17x+72\right)+\left(x^2+19x+90\right)= 2+6+12+\ldots+72+90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)+\left(x^2+3x\right)+\left(x^2+5x\right)+\left(x^2+7x\right)+\ldots+\left(x^2+17x\right)+$$

$$+\left(x^2+19x\right)=0 \Leftrightarrow \quad x(x+1+x+3+x+5+x+7+\ldots+x+17+x+19)=0,$$

$x((x+x+\ldots+x)+(1+3+5+\ldots+19))=0$, откуда $x_1=0$, или $(x+x+\ldots+x)+$

$+(1+3+5+\ldots+19)=0 \Leftrightarrow 10x+\frac{1+19}{2}\cdot 10=0,\ 10x+100=0,$ откуда

$x_2=-10$.

Ответ: $x_1=0,\ x_2=-10$.

6.245. Найти коэффициенты m и n квадратного трехчлена x^2+mx+n, если известно, что его остатки при делении на двучлены $x-m$ и $x-n$ равны соответственно m и n.

Решение.

Разделив x^2+mx+n на $x-m$, имеем решение

$$\begin{array}{r|l} x^2+mx+n & x-m \\ \cline{2-2} -\underline{x^2-mx} & x+2m. \\ 2mx+n & \\ -\underline{2mx+2m^2} & \\ 2m^2+n & \end{array}$$

Таким образом, $2m^2+n=m$.

Разделив x^2+mx+n на $x-n$, получим

$$\begin{array}{r|l} x^2+mx+n & x-n \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^2-nx\qquad} & x+(m+n), \\ (m+n)x+n & \\ -\ \underline{(m+n)x-n(m+n)} & \\ n+n(m+n) & \end{array}$$

Отсюда имеем $n+n(m+n)=n$.

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2m^2+n=m, \\ n+n(m+n)=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-m+n=0, \\ n(m+n)=0 \end{cases} \Rightarrow n=0 \text{ или } n+m=0.$$

Поэтому данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} 2m^2-m+n=0, \\ n=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2m^2-m+n=0, \\ m+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1=0, \\ n_1=0; \end{cases} \begin{cases} m_2=\frac{1}{2}, \\ n_2=0; \end{cases} \begin{cases} m_3=1, \\ n_3=-1. \end{cases}$$

Ответ: $(0;\,0),\,(\frac{1}{2};\,0),\,(1;\,-1)$.

6.246. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. Составить новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

Решение.

Пусть $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — больший корень, а $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — меньший корень уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Тогда $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1$, $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+1$ — корни квадратного уравнения $y^2+px+q=0$.

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+1=-\dfrac{b}{a}, \\ y_1\cdot y_2=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+1\right)=\dfrac{c-a+\sqrt{b^2-4ac}}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a}=p, \\ q=\dfrac{c-a+\sqrt{b^2-4ac}}{a}, \end{cases}$$ откуда имеем $y^2+\dfrac{b}{a}y+\dfrac{c-a+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=0 \Leftrightarrow$

$$ay^2+by+\left(c-a+\sqrt{b^2-4ac}\right)=0.$$

Ответ: $ay^2+by+\left(c-a+\sqrt{b^2-4ac}\right)=0.$

6.247. Определить, при каких значениях m один из корней уравнения $z^3-\left(m^2-m+7\right)z-\left(3m^2-3m-6\right)=0$ равен -1. Отыскать два остальных корня уравнения при этих значениях m.

Решение.

Пусть $z_1=-1$, тогда $(-1)^3-\left(m^2-m+7\right)(-1)-\left(3m^2-3m-6\right)=0$, $m^2-m-6=0$, откуда $m_1=-2$, $m_2=3$. При $m_1=-2$ и $m_2=3$ уравнение принимает вид $z^3-13z-12=0$. Делим левую часть уравнения на $z+1$:

$\dfrac{z^3-13z-12}{z+1}=z^2-z-12$, $z^2-z-12=0$, откуда $z_2=-3$, $z_3=4$.

Ответ: $m_1=-2$ и $m_2=3$; при этих значениях m будет $z_1=-1$, $z_2=-3$, $z_3=4$.

6.248. Показать, что если коэффициенты a, b и c уравнения $ax^2+bx+c=0$ связаны условием $2b^2-9ac=0$, то отношение корней уравнения равно 2.

Решение.

Пусть $\dfrac{x_1}{x_2}=2$.

Из теоремы Виета получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ \dfrac{x_1}{x_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2, \begin{cases} 2x_2 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ 2x_2 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{b}{3a}, \\ x_2^2 = \dfrac{c}{2a}. \end{cases}$$

Таким образом $\dfrac{b^2}{9a^2} = \dfrac{c}{2a}$, $2b^2 = 9ac$, $2b^2 - 9ac = 0$.

Что и требовалось доказать.

6.249. Показать, что если a и b — корни уравнения $x^2 + px + 1 = 0$, а b и c — корни уравнения $x^2 + qx + 2 = 0$, то $(b-a)(b-c) = pq - 6$.

Решение.

По теореме Виета имеем $\begin{cases} a + b = -p, \\ ab = 1, \\ b + c = -q, \\ bc = 2. \end{cases}$

Отсюда, умножая первое уравнение системы на третье,

$(a+b)(b+c) = pq$, $b^2 + ab + bc + ac = pq$,

$b^2 + ab + bc + ac - 2ab - 2bc = pq - 2ab - 2bc$,

$b^2 - ab - bc + ac = pq - 2ab - 2bc$, учитывая $ab = 1$, $bc = 2$,

$b^2 - ab - bc + ac = pq - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2$, $b^2 - ab - bc + ac = pq - 6$,

$(b-a)(b-c) = pq - 6$.

Что и требовалось доказать.

6.250. При каких значениях a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Решение.

Если при каких-то a и x левые части уравнений равны 0, то они равны и между собой:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, получим

$ax - x + 1 - a = 0$, $(a-1)x - (a-1) = 0$, $(a-1)(x-1) = 0$, откуда:

1) если $a - 1 = 0$, то $a = 1$ и каждое уравнение примет вид $a^2 + a + 1 = 0$, т.е. оно не имеет корней ;

2) если $a - 1 \neq 0$, то $x = 1$, откуда $1 + a + 1 = 0$, т.е. $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

6.251. При каком положительном p корни уравнения

$$5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$$

противоположны по знаку ? Найти эти корни.

Решение.

Рассмотрим квадратное уравнение $5x^2 - 4(p+3)x + 4 - p^2 = 0$.

Корни квадратного уравнения противоположны по знаку, когда выполняется совокупность следующих систем неравенств:

$$1)\begin{cases} 16(p+3)^2 - 4\cdot 5(4-p^2) > 0, \\ p > 0, \\ (p+3) > 0, \\ 4 - p^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3p+4)^2 > 0, \\ p > 0, \\ p > -3, \\ p^2 > 4; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 16(p+3)^2 - 4\cdot 5(4-p^2) > 0, \\ p > 0, \\ (p+3) < 0, \\ 4 - p^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3p+4)^2 > 0, \\ p > 0, \\ p < -3, \\ p^2 > 4, \end{cases}$$

откуда $p>2$. Решим квадратное уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{2(p+3) \pm \sqrt{4(p+3)^2 - 5(4-p^2)}}{5} = \frac{2(p+3) \pm \sqrt{9p^2 + 24p + 16}}{5} =$$

$$= \frac{2(p+3) \pm \sqrt{9(p+4)^2}}{5} = \frac{2(p+3) \pm 3(p+4)}{5}.$$

$$x_1 = \frac{2p + 6 - 3p - 4}{5} = \frac{-p+2}{5},\ x_2 = \frac{2p + 6 + 3p + 4}{5} = p + 2.$$

Ответ: $p > 2$; $x_1 = \dfrac{-p+2}{5}$, $x_2 = p + 2$.

6.252. Найти коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} x_1-x_2=5, \\ x_1^3-x_2^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=5, \\ (x_1-x_2)\left((x_1-x_2)^2+3x_1x_2\right)=35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=5, \\ 5(25+3x_1x_2)=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=5, \\ x_1x_2=-6, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=3, \\ x_2=-2. \end{cases}$$

По теореме Виета имеем:

$$1)\ \begin{cases} p_1=-(x_1+x_2)=1, \\ q_1=x_1\cdot x_2=-6; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} p_2=-1, \\ q_2=-6. \end{cases}$$

Ответ: $p_1=1,\ q_1=-6;\ p_2=-1,\ q_2=-6.$

6.253. Составить квадратное уравнение с корнями $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, если a и b — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Решение.

Составим квадратное уравнение $y^2+Py+Q=0$.

По теореме Виета и условию имеем

$$\begin{cases} P=-\left((a-b)^2+(a+b)^2\right)=-\left(a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2\right), \\ Q=(a-b)^2\cdot(a+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=-2\left(a^2+b^2\right)=-2\left((a+b)^2-2ab\right), \\ Q=(a-b)^2\cdot(a+b)^2. \end{cases}$$

Для нахождения значений $a+b$, $a-b$ и ab еще раз используем теорему Виета:

$$\begin{cases} a+b=-p, \\ ab=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=p^2, \\ ab=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=p^2, \\ ab=q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2ab+b^2=p^2,\\-4ab=-4q.\end{cases}\Rightarrow a^2-2ab+b^2=p^2-4q,\ (a-b)^2=p^2-4q.$$

Таким образом $\begin{cases}P=-2\left(p^2-2q\right),\\Q=\left(p^2-4q\right)p^2.\end{cases}$

Искомое уравнение имеет вид $y^2-2\left(p^2-2q\right)y+\left(p^2-4q\right)p^2=0.$

Ответ: $y^2-2\left(p^2-2q\right)y+\left(p^2-4q\right)p^2=0.$

6.254. Обозначим через α и β корни уравнения $3x^2+7x+4=0$. Не решая данного уравнения, составить новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{\alpha}{\beta-1}$ и $\frac{\beta}{\alpha-1}$.

Решение.

По теореме Виета имеем $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{7}{3},\\\alpha\cdot\beta=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

Пусть $y^2+px+q=0$ — новое квадратное уравнение. Из условия по теореме Виета получаем

$$\begin{cases}p=-\left(\dfrac{\alpha}{\beta-1}+\dfrac{\beta}{\alpha-1}\right)=-\left(\dfrac{\alpha^2-\alpha+\beta^2-\beta}{(\beta-1)(\alpha-1)}\right)=-\dfrac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\q=\dfrac{\alpha}{\beta-1}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha-1}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}p=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1},\\q=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}.\end{cases}$$

Так как $\alpha+\beta=-\frac{7}{3}$ и $\alpha\beta=\frac{4}{3}$, то получим $p=-\frac{23}{21}$, $q=\frac{2}{7}$.

Искомое уравнение имеет вид

$$y^2 - \frac{23}{21}y + \frac{2}{7} = 0 \Leftrightarrow 21y^2 - 23y + 6 = 0.$$

Ответ: $21y^2 - 23y + 6 = 0$.

6.255. Показать, что среди корней уравнения $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$ есть только один положительный и только один отрицательный корень (сами корни находить не обязательно).

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^4 - 9\right) + \left(5x^3 + 15x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 3\right)\left(x^2 + 3\right) + 5x\left(x^2 + 3\right) = 0,$$

$$\left(x^2 + 3\right)\left(x^2 + 5x - 3\right) = 0.$$

Отсюда $x^2 + 5x - 3 = 0$ $(x^2 + 3 \neq 0)$.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, у которого

$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$$ имеет $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ $(x_2 > x_1)$.

Содержание

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

ТВОРЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информации и Радиоэлектроники Карпук Андрей Андреевич

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информатики и Радиоэлектроники Жевняк Ростислав Михайлович

Кандидат физико-математических наук Ермолицкий Александр Александрович

Учебное издание

ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ГРУППА Б

КНИГА 1

Под редакцией М. И. Сканави

Подписано в печать с готовых диапозитивов 25.04.03.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Бумага
типографская. Усл. печ. л. 25,0. Тираж 4000 экз.
Заказ 1022.

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001 г.
109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru

При участии ООО «Харвест».
Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.2002.
РБ, 220013, Минск, ул. Кульман,
д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Открытое акционерное общество
«Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
220600, Минск, ул. Красная, 23.