под ред. М.И.Сканави

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ (С РЕШЕНИЯМИ). Кн. 1. Алгебра

Книга написана в соответствии с программой по алгебре для поступающих в вузы. Настоящее издание (6-е — 1992 г.) существенно переработано и дополнено. Задачи объединены по принципу однородности тем, типов, методов решения и разбиты на три группы по уровню их сложности. Ко многим задачам даны подробные решения. В жаждой главе приведены сведения справочного характера и примеры решения задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее (седьмое) издание «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» выходит в двух книгах (книга 1 — «Алгебра», книга 2 — «Геометрия»). При этом сохранены почти весь массив задач пятого и шестого (стереотипного) изданий, теоретические сведения справочного характера и примеры решения задач с объяснением применяемых методов. Сохранено также разделение задач на три группы (А, Б, В) по их возрастающей трудности в тех главах, где такое разделение было осуществлено и в предыдущих изданиях «Сборника».

Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам во втузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности. Однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

Существенной переработке подверглось расположение задач в каждой главе внутри разделов А, Б и В. Теперь задачи сгруппированы по типам, методам решения и заново пронумерованы. Кроме того, в каждом из разделов А, Б и В к наиболее типичным задачам даны полные решения или указания, помещенные в конце книги. Тем самым «Сборник» приобретает новое качество — он становится дополнительным к школьным учебникам пособием для самообучения в процессе подготовки к вступительным экзаменам по математике во втузы.

В соответствии со школьной программой обучения математике в «Сборнике» рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

В «Сборнике» приняты следующие обозначения: начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками □ и ■, а вместо слова «Указание» употребляется знак ●.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий было возложено на Б. А. Кордемского. За годы, прошедшие после выхода в свет шестого издания «Сборника», авторский коллектив потерял еще двух своих коллег: И. Ф. Орловскую и Р. И. Позойского. Мы сохраним светлую память о них.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при подготовке настоящего издания.

Авторы

ГЛАВА 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x, y и положительных a и b верны равенства:

$$a^0=1; \tag{1.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{1.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{1.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{1.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{1.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1.7}$$

Многочлены

Для любых a, b и c верны равенства:

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b); \tag{1.8}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \tag{1.9}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \tag{1.10}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\text{или } (a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b); \tag{1.11}$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\text{или } (a-b)^3=a^3-b^3-3ab\,(a-b); \tag{1.12}$$

$$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2); \tag{1.13}$$

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2); \tag{1.14}$$

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2), \tag{1.15}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}; \qquad (1.16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq0); \qquad (1.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}; \qquad (1.18)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[kn]{a}; \qquad (1.19)$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}; \qquad (1.20)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \quad (a\geqslant0); \qquad (1.21)$$

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\ \text{если}\ 0\leqslant a<b; \qquad (1.22)$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{при}\ a\geqslant0,\\ -a & \text{при}\ a<0;\end{cases} \qquad (1.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|; \qquad (1.24)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a} \quad (a\geqslant0). \qquad (1.25)$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4+2x^2-3x+1}{x^2+\sqrt{3x}+1}+2\left(\sqrt[6]{27x^3}-\frac{1}{2}\right).$$

□ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках — через B; тогда заданное выражение примет вид $A+2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x\geqslant0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x\geqslant0$.

Используя формулу (1.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4+2x^2+1-3x=(x^2+1)^2-3x.$$

Так как $x\geqslant0$, то в силу равенства (1.21) имеем $3x=(\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (1.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{3x})^2=(x^2+1-\sqrt{3x})\,(x^2+1+\sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)\,(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее, на основании формулы (1.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (1.9), (1.10) и (1.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)\,(a-2b)-8ab+2b\,(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ■$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (1.15), разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x)=\frac{(x+5)\,(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)\,(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (1.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}\,((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (1.16), (1.8), (1.20) и (1.10), находим:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\ \sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\,\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$

$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})\,(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{121}}=1.$$

Окончательно получим $A=4-1=3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (1.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})\,(38-\sqrt{1445})}\,x=x^3,$$

или $x^3+3x-76=0$. Подстановкой $x=4$ убеждаемся в том, что $x=4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64+12-76=0$.

Преобразуем кубическое уравнение: $x^3-64=3\,(4-x)$; $(x-4)\,(x^2+4x+16)+3\,(x-4)=0$; $(x-4)\,(x^2+4x+19)=0$. Но множитель $x^2+4x+19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т. е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\frac{(2+\sqrt{3})\,(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8$. ■

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (1.001—1.124):

1.001. $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$; $a=0{,}02$, $b=-11{,}05$, $c=1{,}07$.

1.002. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}$.

1.003. $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)\,(a^3-b^3)}$.

1.004. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2)$; $x=\sqrt{3{,}92}$.

1.005. $\dfrac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}$.

1.006. $\dfrac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}(b^2+b+ab+a)$.

1.007. $\dfrac{2\,(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

1.008. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)\,(a+x)}-2+10\,\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

1.009. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

1.010. $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

$a=1\frac{33}{40}$, $b=0{,}625$, $c=3{,}2$.

1.011. $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+yx^{-1}}.$

1.012. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}.$

1.013. $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right);\ x=7{,}(3).$

1.014. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right).$

1.015. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$

1.016. $\dfrac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2};\ p=0{,}78,\ q=7/25.$

1.017. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

1.018. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}};\ a=7{,}4,\ b=\dfrac{5}{37}.$

1.019. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1};\ a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}.$

1.020. $\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}.$

1.021. $\left(2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\dfrac{2x}{x-1}\right).$

1.022. $\left(\dfrac{2-b}{b-1}+2\,\dfrac{a-1}{a-2}\right):\left(b\,\dfrac{a-1}{b-1}+a\,\dfrac{2-b}{a-2}\right);\ a=\sqrt{2}+0{,}8,\ b=\sqrt{2}-0{,}2.$

1.023. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\ x=\dfrac{1}{a-1}.$

1.024. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\dfrac{b^2}{a}\right)\times\right.$

$\left.\times\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)\right);\ a=0{,}75,\ b=4/3.$

1.025. $\dfrac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)\,(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$.

1.026. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{m^2}{4}}$.

1.027. $\dfrac{9b^{4/3}-\dfrac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\dfrac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$; $b=4$.

1.028. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\sqrt{1+\dfrac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\dfrac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$.

1.029. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})\,(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}$.

1.030. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$; $x>a>0$.

1.031. $\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\dfrac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right)$.

1.032. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

1.033. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

1.034. $\dfrac{(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}})^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right)$; $a>b>0$.

1.035. $\left(\dfrac{(a+b)^{-n/4}\,c^{1/2}}{a^{2-n}\,b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}\,a^{16-8n}}\right)^{1/6}$; $b=0{,}04$.

1.036. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

1.037. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

1.038. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2\,(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}.$

1.039. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)3^{-2}\right)^5.$

1.040. $\dfrac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}.$

1.041. $t\cdot\dfrac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}.$

1.042. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2.$

1.043. $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}.$

1.044. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right).$

1.045. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}.$

1.046. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}.$

1.047. $\left(\dfrac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}.$

1.048. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1.$

1.049. $\dfrac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^2}-\sqrt[3]{x^2y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2});\ x=64.$

1.050. $\sqrt{\dfrac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}}.$

1.051. $\dfrac{4x\,(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$.

1.052. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2/\sqrt{x}}$.

1.053. $\sqrt[4]{6x\,(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

1.054. $\sqrt[6]{4x\,(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

1.055. $\dfrac{a^3-a-2b-b^2/a}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right)$; $a=23$, $b=22$.

1.056. $\dfrac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\dfrac{(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}})^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}$.

1.057. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

1.058. $\dfrac{x\,(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a\,(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\,\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}$.

1.059. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{a^2\,\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$.

1.060. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}$.

1.061. $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

1.062. $\dfrac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}$.

1.063. $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}$.

1.064. $\dfrac{(a^2-b^2)\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$.

1.065. $\dfrac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n+mn+m^2-m}}$.

1.066. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}.$

1.067. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\,(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}.$

1.068. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})\,(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}.$

1.069. $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45-4\sqrt{3}}}+5\sqrt{2{,}4}\,(\sqrt{15}+3).$

1.070. $\left(\dfrac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\dfrac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\dfrac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}.$

1.071. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

1.072. $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

1.073. $\dfrac{\sqrt{3}\,(a-b^2)+\sqrt{3}\,b\cdot\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2\,(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

1.074. $(\sqrt{1-x^2}+1):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right).$

1.075. $\dfrac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\dfrac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}.$

1.076. $\dfrac{(a-b)^3\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\,(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$

1.077. $\dfrac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\dfrac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

1.078. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

1.079. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$

1.080. $\dfrac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}.$

1.081. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}$.

1.082. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

1.083. $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}$; $a=0{,}04$.

1.084. $\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$.

1.085. $1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$.

1.086. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$.

1.087. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right)$.

1.088. $\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$.

1.089. $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1.090. $\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}$.

1.091. $\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$; $a=0{,}32$, $x=0{,}08$.

1.092. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}$.

1.093. $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$.

1.094. $\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$.

1.095. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:\dfrac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}};$

$a=4{,}91,\ b=0{,}09.$

1.096. $\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\dfrac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}).$

1.097. $((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2})^2+2(1-p^4)^{-1/2}.$

1.098. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right).$

1.099. $\left(\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}.$

1.100. $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$

1.101. $\dfrac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\dfrac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$

1.102. $\dfrac{1-\sqrt{2t}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}.$

1.103. $\dfrac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right).$

1.104. $\dfrac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\dfrac{4}{z}+4+z}.$

1.105. $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}.$

1.106. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\dfrac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^2}}.$

1.107. $(\sqrt{ab}-ab\,(a+\sqrt{ab})^{-1}):(2\,((ab)^{1/2}-b)\,(a-b)^{-1})$.

1.108. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}$.

1.109. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}$.

1.110. $\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\;\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}$;

$a=4/3,\ b=0{,}25$.

1.111. $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax^{-1})^2}+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3$;

$a=3\frac{4}{7},\ x=0{,}28$.

1.112. $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right)$; $c=2,\ d=1/4$.

1.113. $\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}\,(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}$.

1.114. $\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4$.

1.115. $4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}$.

1.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-$

$-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}$.

1.117. $\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+$

$+\frac{1}{1+(a\,(1-a^2)^{-1/2})^2}$.

1.118. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$.

1.119. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

1.120. $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

1.121. $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}}+6\sqrt[3]{375}}$.

1.122. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$.

1.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

1.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

Проверить справедливость равенств (1.125—1.134):

1.125. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}$.

1.126. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}})$.

1.127. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

1.128. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

1.129. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

1.130. $\dfrac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

1.131. $\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\dfrac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

1.132. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

1.133. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

1.134. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

Сделать указанную подстановку и результат упростить (1.135—1.145):

1.135. $\dfrac{x^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}x^2}$; $x=a^{2/3}b^{-1/2}$.

1.136. $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b}$; $x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$.

1.137. $\left(\dfrac{x+2b}{x-2b}+\dfrac{x+2a}{x-2a}\right):\dfrac{x}{2}$; $x=\dfrac{4ab}{a+b}$.

1.138. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; $x=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$.

1.139. $\dfrac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23}$; $z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

1.140. $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$; $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.

1.141. $\dfrac{(1-y)(y+2)}{y^2(y+1)^2}$; $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

1.142. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}$; $x=\sqrt{6}$.

1.143. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$; $a>b>0$.

1.144. $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$; $a>0,\ b>0$.

1.145. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$; $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$; $0<b/2<a<b$.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби (1.146—1.151):

1.146. $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. **1.147.** $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

1.148. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$. **1.149.** $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

1.150. $\dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$. **1.151.** $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

1.152. Вычислить сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.

1.153. Показать, что если

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то $z^3+3bz-2a=0$.

1.154. Если $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чему равен $\sqrt{(8-a)\,(5+a)}$?

1.155. Чему равна сумма $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если известно, что разность $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x находить не нужно)?

1.156. Преобразовать $(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)$ так, чтобы получилось $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

1.157. Вычислить значение выражения:

а) $\dfrac{z^3}{3}-z,\ z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}};$

б) $x^3+3x,\ x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$

Группа Б

Упростить выражения и вычислить их, если даны значения параметров (1.158—1.292):

1.158. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

1.159. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

1.160. $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$.

1.161. $\left(\dfrac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\dfrac{9}{x^4}\right):\dfrac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}$.

1.162. $(x^4-7x^2+1)^{-2}\left(\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+77\right);\ x=\dfrac{\sqrt[4]{125}}{5}$.

1.163. $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)\,x-2bx^2}+\dfrac{(4x^2-b^2)\,\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\dfrac{bx}{2}$.

1.164. $\left(\dfrac{2-n}{n-1}+4\,\dfrac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\,\dfrac{m-1}{n-1}+m^2\,\dfrac{2-n}{m-2}\right);\ m=\sqrt[4]{400},\ n=\sqrt{5}$.

1.165. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

1.166. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}.$

1.167. $\dfrac{(ab\,(x^2+y^2)+xy\,(a^2+b^2))\,((ax+by)^2-4ab\,xy)}{ab\,(x^2-y^2)+xy\,(a^2-b^2)}.$

1.168. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}.$

1.169. $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}.$

1.170. $\dfrac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}};\ a>1,\ a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

1.171. $\dfrac{(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4})^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}.$

1.172. $\left(\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})\,(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}$

1.173. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$

1.174. $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}.$

1.175. $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}};\ b>2.$

1.176. $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{2}.$

1.177. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-2\,(2x+\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}.$

1.178. $\dfrac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\dfrac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\dfrac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}\,(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{x+y}.$

$$1.179.\ \frac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+\frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}.$$

$$1.180.\ \frac{b^{-1/6}\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

$$1.181.\ \left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}.$$

$$1.182.\ \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.183.\ \frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}};\ x=2.$$

$$1.184.\ \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$$

$$1.185.\ \left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}(x+2).$$

$$1.186.\ \frac{\left(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-y\sqrt[4]{y}\right)\left(x+y+\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2+\sqrt[4]{xy}\right)}.$$

$$1.187.\ \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\times$$

$$\times\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$$

$$1.188.\ \sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2}\right)^2+\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:$$

$$:\frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x}\right)}{2-\sqrt[4]{2x^3}}.$$

$$1.189.\ \left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right);$$

$$x=\sqrt[4]{6},\ y=\sqrt[8]{2}.$$

$$1.190.\ \frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\ldots+2a)}{a^2+3a+2}+\frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:$$

$$:\left(\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)(a-b)^{-2/5}\right)^{-1}.$$

1.191. $\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}} \cdot \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\ \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$

1.192. $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}};\ a=1{,}21.$

1.193. $\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a\,(a+2)^2})}{\sqrt{2\,(a+1-\sqrt{a^2+2a})}\,(a^2-a^{5/4}+a^{1/2})^{-1}}.$

1.194. $x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y\,(7+4\sqrt{3})}.$

1.195. $\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\,(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$

1.196. $\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\right.$

$\left.+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right);\ a>b>0.$

1.197. $\left(\frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\frac{a^{1/12}/3}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$

1.198. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right);\ 0<x<1.$

1.199. $\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}};\ x>3.$

1.200. $\frac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}};\ t>2.$

1.201. $\left(\left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4}).$

1.202. $(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\,\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}.$

1.203. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}.$

1.204. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}.$

1.205. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}.$

1.206. $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}.$

1.207. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}\,(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}.$

1.208. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}.$

1.209. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}).$

1.210. $\sqrt{\dfrac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\;(p+\sqrt[6]{p^3q^2})^{-1/2}.$

1.211. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$

$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$

1.212. $\dfrac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\dfrac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}.$

1.213. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}.$

1.214. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}.$

1.215. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}};\ x=3.$

1.216. $\frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}}$; $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.217. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2)$.

1.218. $\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$; $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.219. $\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}$.

1.220. $\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}$.

1.221. $\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right)$.

1.222. $\frac{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}+\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}{\left((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}-\left((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2}\right)^{-1}}$.

1.223. $\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})(b^{1/3}+1)}+\sqrt[3]{ab}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right)$.

1.224. $\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}-(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\sqrt{a+2}$.

1.225. $\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}:$

$:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}$.

1.226. $\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b}-2a+\frac{b}{a}-\frac{c}{ab}}}$; $a=4{,}8$; $b=1{,}2$.

1.227. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)a^{-1/4}}-\frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}$.

1.228. $((a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2})(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}$.

1.229. $\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:$

$$:\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\,b^{-1/4}}.$$

1.230. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\dfrac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2z}{27}-\dfrac{1}{6z}}\right)^{-1}.$

1.231. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\dfrac{2q^2}{p^2-q^2}\right)(p^3-pq^2)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\dfrac{p}{p-q}-\dfrac{q}{p+q}-\dfrac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$

1.232. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2};\ a=\sqrt[7]{3},\ b=\sqrt{0{,}008}.$

1.233. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4b+1}{a}}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}};\ a=2{,}25.$

1.234. $\dfrac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}).$

1.235. $\left(\dfrac{3^{3/2}+\dfrac{1}{8}z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\dfrac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}.$

1.236. $\dfrac{(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\dfrac{q}{p}+1}\right)^{1/4}}.$

1.237. $\dfrac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\dfrac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\dfrac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}.$

1.238. $\left(\dfrac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})+\dfrac{3\sqrt{b}\,(a^{1/2}-b)}{a^{-1/4}\,(a^{1/4}-\sqrt{b})}\right)^{-1/3}:$

$$:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}.$$

1.239. $\left(\sqrt{\dfrac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\dfrac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$

1.240. $\dfrac{2a\,(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})\,(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}$.

1.241. $\dfrac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\dfrac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\dfrac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}$.

1.242. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\,|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$. **1.243.** $\dfrac{2x-x\,|x-1|+x\,|x|+3}{|x|+x^2}$.

1.244. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$. **1.245.** $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4\,|x-1|}$.

1.246. $\dfrac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$. **1.247.** $|x^2-1|+x\,|x+1|$.

1.248. $\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$.

1.249. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\,|2x^2-x-1|}$. **1.250.** $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

1.251. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$. **1.252.** $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

1.253. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$. **1.254.** $\dfrac{m\,|m-3|}{(m^2-m-6)\,|m|}$.

1.255. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)\,|x-2|}$. **1.256.** $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

1.257. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$. **1.258.** $\dfrac{x\,|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$.

1.259. $\dfrac{2\,|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$. **1.260.** $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\,(x-2)}$.

1.261. $\dfrac{|r-1|\,|r|}{r^2-r+1-|r|}$. **1.262.** $\dfrac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

1.263. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$. **1.264.** $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$.

1.265. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2\,|x|}$. **1.266.** $\sqrt{x\,(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$; $x>0$

1.267. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

1.268. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$.

1.269. $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

1.270. $\dfrac{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}$.

1.271. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}$.

1.272. $\left((z-3)(z+3)^{-1}-\dfrac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{z}{18}-\dfrac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}$.

1.273. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

1.274. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$.

1.275. $\sqrt{\left(y^2+\dfrac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\dfrac{2}{y}\right)^2+48}$.

1.276. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

1.277. $\dfrac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}};\ x=\dfrac{a^2+1}{2a}$.

1.278. $\left(\dfrac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\dfrac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\dfrac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}$.

1.279. $(4x-1)\left(\frac{1}{8x}\left(\left(\sqrt{8x-1}+4x\right)^{-1}-\left(\sqrt{8x-1}-4x\right)^{-1}\right)\right)^{1/2}$.

1.280. $\dfrac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}\cdot\left(xy^{-2}+y^{-3/2}\right)}}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}$.

1.281. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}}$; $y=\sqrt{ab}$.

1.282. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$.

1.283. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2}\right)^2+4}}$.

1.284. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right)$.

1.285. $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

1.286. $\dfrac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}$.

1.287. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$.

1.288. $\left(x^2-6x+1+\left(\dfrac{\frac{x-3}{1+3x}-\frac{x-5}{1+5x}}{1+\frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$.

1.289. $\left(\dfrac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{2}{(x+3)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}$.

1.290. $\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z}$; $z=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

1.291. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2}$; $x=\dfrac{a^3+1}{a^3-1}$.

1.292. $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}.$

Проверить справедливость равенств (1.293—1.306):

1.293. $\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5})+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}.$

1.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}.$

1.295. $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}=2\sqrt{a-1}.$

1.296. $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

1.297. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})\,(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

1.298. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=2\sqrt{5p-q}.$

1.299. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

1.300. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}.$

1.301. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=1.$

1.302. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

1.303. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

1.304. $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

1.305. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

1.306. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

1.307. Преобразованием левой части проверить, что:

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2;$

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

1.308. Упростить выражение $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, а затем построить график функции y для $1\leqslant x<\infty$.

1.309. При каком значении k многочлен $x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$ можно представить в виде полного квадрата?

1.310. Проверить, что число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

1.311. Исключив u и v из равенств $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$, найти соотношение между a, b и c.

1.312. Преобразовать сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

к наиболее простому виду.

1.313. Показать, что

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

1.314. Доказать, что если $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

1.315. Определить A, B и C так, чтобы для всех допустимых значений x имело место равенство

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

1.316. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

1.317. Доказать, что: а) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9; б) число p^5-p делится на 5 при любом натуральном значении p; в) число k^3+5k делится на 3 при $k\in\mathrm{N}$.

1.318. Многочлен x^8-16 представить в виде произведения многочленов второй степени.

1.319. При каких значениях a и b трехчлен $16x^2+144x+(a+b)$ представляет собой полный квадрат, если известно, что $b-a=-7$?

Группа B

Упростить выражения. Найти области допустимых значений параметров, если они не указаны (**1.320—1.356**):

1.320. $$\left(\frac{\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}}{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)^{-1/2}$$

1.321. $(x+2\sqrt{2x-4})^{-1/2}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-1/2}$.

1.322. $\left(\dfrac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\dfrac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{1/2}:\dfrac{\sqrt{mn}}{m-2n}.$

1.323. $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

1.324. $\left(\dfrac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}.$

1.325. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}.$

1.326. $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}.$

1.327. $\dfrac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}.$

1.328. $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}.$

1.329. $\dfrac{\sqrt{3}x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\,x^{5/6}+25x^{2/3}}\,\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}.$

1.330. $\left(1-\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\dfrac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right)\right).$

1.331. $\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:(z-1).$

1.332. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}.$

1.333. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\cdot(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}.$

1.334. $\dfrac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\dfrac{3}{2}a^{-1}+\left(\dfrac{3}{2a}\right)^2}:(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a})}.$

1.335. $\dfrac{\sqrt[3]{8x-y-6\left(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right)}\cdot\left(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3}\right)}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}.$

1.336. $\left(\dfrac{a}{3\,(a^2+1)^{1/2}}-(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})^{1/2}\,(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3})^{-1/2}\right)^2.$

1.337. $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4\,(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4\,(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4\,(a-1)}}.$

1.338. $\dfrac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)\,(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3-1).$

1.339. $\dfrac{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}+(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}-(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}.$

1.340. $\dfrac{\sqrt{4\,(x-\sqrt{y})+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}}.$

1.341. $\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8\,(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}.$

1.342. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2.$

1.343. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}.$

1.344. $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}.$

1.345. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}.$

1.346. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}.$

1.347. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}.$

1.348. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}.$

1.349. $\sqrt{\dfrac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}.$

1.350. $\frac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$.

1.351. $\frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$; $z=\frac{2a}{a^2+1}$.

1.352. $\sqrt{\frac{1}{6}((3t+\sqrt{6t-1})^{-1}+(3t-\sqrt{6t-1})^{-1})\cdot|t-1|\cdot t^{-1/2}}$.

1.353. $\left(\frac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}$.

1.354. $\left|\frac{|x-2|+4}{x-2}\right|(x^2-4)$.

1.355. $\left(\frac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$.

1.356. $\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}$.

1.357. Разложить на множители $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

1.358. Доказать, что если для чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$, $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них выполняется также и равенство $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

1.359. Разложить на множители $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

1.360. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b $(a>b)$ в m раз больше их среднего геометрического. Доказать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

ГЛАВА 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. *Уравнением с одной переменной* называется равенство, содержащее эту переменную (ее иногда называют неизвестным).

Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство, называется *корнем* (или *решением*) уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

2°. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*. В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым; при этом используют следующие правила преобразования уравнения в равносильное ему:

а) какое-нибудь слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число;

в) уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ можно заменить равносильной системой $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$ или решить уравнение $f(x)=0$, а затем отбросить те из найденных корней, которые обращают в нуль знаменатель $g(x)$.

3°. Пусть в результате преобразования уравнения

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2.1}$$

получено уравнение

$$f_2(x)=g_2(x). \tag{2.2}$$

Если каждый корень уравнения (2.1) является корнем уравнения (2.2), то уравнение (2.2) называют *следствием* уравнения (2.1).

Корни уравнения (2.2), не удовлетворяющие уравнению (2.1), называются *посторонними* корнями уравнения (2.1) и не считаются решениями этого уравнения.

К появлению посторонних корней могут, например, привести (но не обязательно приводят) такие преобразования: возведение в квадрат (или другую четную степень) обеих частей уравнения, умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т. п.

4°. Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения-следствия посторонние корни исходного уравнения, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение.

Можно поступить иначе: на каждом этапе решения уравнения определять промежутки, в которых могут находиться корни уравнения. Все корни, не принадлежащие этим промежуткам, являются посторонними и должны быть отброшены. Однако остальные корни все равно необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение.

5°. Если уравнение имеет вид $f(x)\,h(x)=g(x)\,h(x)$, то деление обеих его частей на $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней; в этом случае могут быть потеряны корни уравнения $h(x)=0$, если они существуют.

Уравнение не считается решенным как в случае, когда ответ содержит посторонние корни, так и в случае, когда в процессе решения был потерян хотя бы один корень.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$.

□ Перенесем все члены уравнения в левую часть и преобразуем полученное выражение к виду $\frac{x^2-7x+12}{2x(3-x)}=0$. Из уравнения $x^2-7x+12=0$ находим $x_1=3$, $x_2=4$. При $x=3$ знаменатель обращается в нуль; значит, 3 не является корнем. Итак, получаем ответ: $x=4$. ■

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-4$.

□ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x-2})^2=(x-4)^2,\ x-2=x^2-8x+16;$$
$$x^2-9x+18=0,\ x_1=3,\ x_2=6.$$

Проверим найденные корни, подставив их в исходное уравнение. Если $x=3$, то получаем $1=-1$ — неверное равенство; если $x=6$, то получаем $2=2$ — верное равенство. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень $x=6$.

Отметим, что можно было сначала найти область определения данного уравнения. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-4\geqslant 0, \end{cases}$ откуда $x\geqslant 4$. Тогда сразу видно, что $x_1=3$ — посторонний корень исходного уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x=6$ удовлетворяет заданному уравнению. Итак, $x=6$. ■

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

□ Преобразуя правую часть уравнения, получаем:

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1};$$
$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2};\ \sqrt{1-4x}+2=|2x-1|.$$

Это уравнение имеет решение лишь при условии $1-4x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 1/4$. Тогда $|2x-1|=1-2x$ (а не $2x-1$, так как это верно только при $x\geqslant 1/2$, что противоречит условию $x\leqslant 1/4$). Значит, $\sqrt{1-4x}+2=1-2x$, откуда

$$\sqrt{1-4x}=-1-2x. \qquad (*)$$

Область возможных значений x определяется системой неравенств $\begin{cases} 1-4x\geqslant 0, \\ -1-2x\geqslant 0, \end{cases}$ т. е. $x\leqslant -1/2$. Возведя обе части уравнения (*) в квадрат, получим

$$1-4x=1+4x+4x^2;\ 4x^2+8x=0,\ x_1=0,\ x_2=-2.$$

Корень $x_1=0$ не удовлетворяет условию $x\leqslant -1/2$ и поэтому является посторонним; корень $x_2=-2$ удовлетворяет неравенству $x\leqslant -1/2$, но его следует проверить. Подставив $x=-2$ в исходное уравнение, получим верное равенство: $3+2=5$. Итак, заданное уравнение имеет единственный корень $x=-2$. ■

При решении уравнений часто используются метод разложения на множители и метод замены переменной.

Пример 4. Решить уравнение $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

□ Раскрыв скобки и приведя подобные члены, имеем $2x^3+3x^2+3x+2=0$. Разложим левую часть уравнения на множители. Сначала группируя члены уравнения, а затем используя формулу (1.13), получаем

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0;\ 2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0;$$
$$(x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Последнее равенство верно при условии, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю: $x+1=0$, откуда $x=-1$, или $2x^2+x+2=0$. Однако дискриминант последнего уравнения отрицателен, следовательно, оно не имеет корней. Итак, $x=-1$. ■

Пример 5. Решить уравнение $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9.$

□ Введем переменную z, полагая $x+\frac{1}{x}=z$. Тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$, откуда по формуле (1.9) находим $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$.

Заменив в данном уравнении выражение в первой скобке на z, а во второй — на z^2-2, получим

$$7z-2(z^2-2)=9;\ 2z^2-7z+5=0;\ z_1=5/2,\ z_2=1.$$

Для отыскания x следует решить два квадратных уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\ 2x^2-5x+2=0;\ x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=1,\ x^2-x+1=0;\ D<0 \text{ — корней нет.}$$

Итак, получаем ответ: $x_1=2$; $x_2=1/2$. ■

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

□ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12;$$
$$\sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Еще одно возведение в квадрат привело бы к уничтожению иррациональности, однако здесь нет необходимости в этом преобразовании. Замечаем, что полученное уравнение-следствие может иметь решение только при условии $x+1\leqslant 0$. Вместе с тем одним из условий существования решения исходного уравнения является требование $x+1\geqslant 0$. Оба условия совместны в единственном случае, если $x+1=0$, откуда $x=-1$. Это значение x, как легко проверить, удовлетворяет исходному уравнению. Так как уравнение-следствие других корней не имеет, то других корней не имеет и исходное уравнение. Итак, $x=-1$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

□ Так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$, причем потери корней не произойдет. Получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Полагая $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=z$, приходим к квадратному уравнению $z^2-5z+4=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=4$. Для отыскания x имеем два уравнения: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=1$

и $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=4$. Возведя в куб обе части каждого из них, получим $\frac{5+x}{5-x}=1$, откуда $x=0$, и $\frac{5+x}{5-x}=64$, откуда $x=63/13$. Итак, $x_1=0$; $x_2=63/13$. ■

Пример 8. Решить уравнение

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3.$$

□ Запишем уравнение в следующем виде:

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Положим $\sqrt{2x^2-3x+2}=z$; отметим, что пригодными могут быть только значения $z\geqslant 0$. Произведя указанную замену, получим уравнение $z^2-2z+1=0$, откуда $z=1$ — это пригодное значение z и поэтому уравнение $\sqrt{2x^2-3x+2}=1$ или $2x^2-3x+1=0$ равносильно заданному. Корни $x_1=1/2$, $x_2=1$ этого квадратного уравнения являются корнями исходного уравнения. ■

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

□ Положим $\sqrt{x-1}=z$ и заметим, что $z\geqslant 0$, $x\geqslant 1$, $x=z^2+1$. Тогда на основании формулы (1.23) получим $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-4z+4}=|z-2|$; $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-6z+9}=|z-3|$. Исходное уравнение примет вид

$$|z-2|+|z-3|=1. \tag{*}$$

Используя определение модуля, рассмотрим следующие случаи:

1) если $z<2$, то $2-z+3-z=1$, откуда $z=2$;

2) если $2\leqslant z<3$, то $z-2+3-z=1$, откуда $1=1$, т. е. все значения z, принадлежащие промежутку $[2, 3)$, удовлетворяют уравнению;

3) если $z\geqslant 3$, то $z-2+z-3=1$, откуда $z=3$.

Объединяя эти решения, заключаем, что уравнению (*) удовлетворяют все значения z, для которых $2\leqslant z\leqslant 3$.

Так как $z=\sqrt{x-1}$, то $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$; значит, $4\leqslant x-1\leqslant 9$, откуда $5\leqslant x\leqslant 10$. ■

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+\ y+\ z=7,\\ \ x+2y+\ z=8,\\ \ x+\ y+2z=9.\end{cases}$$

□ Эту систему линейных уравнений можно решать методом последовательного исключения (методом Гаусса), однако проще поступить так: сложив уравнения, получим $4\,(x+y+z)=24$, откуда $x+y+z=6$. Последовательно вычитая это уравнение из каждого уравнения системы, находим $x=1$, $y=2$, $z=3$. ■

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$$

□ Возведем в квадрат обе части первого уравнения:

$$x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy}=36.$$

Вычитая из этого уравнения второе уравнение системы, получаем $xy\sqrt{xy}=8$ или $(xy)^3=64$, т. е. $xy=4$. Это уравнение и второе уравнение заданной системы образуют систему

$$\begin{cases} xy=4, \\ xy(x+y)=20 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy=4, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Отсюда находим две пары решений: $x_1=4$, $y_1=1$ и $x_2=1$, $y_2=4$. Проверкой убеждаемся, что обе пары удовлетворяют исходной системе уравнений. ■

Группа А

Решить уравнения* (2.001—2.066):

2.001. $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$.

2.002. $\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23$.

2.003. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2$.

2.004. $x+\frac{1}{x}=2\,\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

2.005. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1$.

2.006. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1$.

2.007. $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$.

2.008. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}$.

2.009. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$.

2.010. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2$.

2.011. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8$.

2.012. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$.

2.013. $(x+3)^3-(x+1)^3=56$.

2.014. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3$.

2.015. $8x^4+x^3+64x+8=0$.

2.016. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$.

2.017. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

2.018. $\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$.

2.019. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$.

2.020. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

2.021. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}$.

2.022. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$.

2.023. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}$.

2.024. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5$.

2.025. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$.

2.026. $x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14$.

---

*Величины a, b, c, p, q, m, n, как правило, считаются постоянными, а x, y, z, u, v, w — переменными.

2.027. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$

2.028. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9.$

2.029. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4.$

2.030. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

2.031. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

2.032. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

2.033. $2\sqrt{7-x}:0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5}:\frac{1}{4}\sqrt{216\sqrt[3]{9}}.$

2.034. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5.$

2.035. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$

2.036. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

2.037. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$

2.038. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

2.039. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}.$

2.040. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}.$

2.041. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

2.042. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

2.043. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$

2.044. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

2.045. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$

2.046. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$

2.047. $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

2.048. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}.$

2.049. $\frac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

2.050. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}.$

2.051. $\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b;\ a>b.$

2.052. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

2.053. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0.$

2.054. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56.$

2.055. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}.$

2.056. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0.$

2.057. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

2.058. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6.$

2.059. $\sqrt{x+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$

2.060. $\left(\frac{x+5}{x}\right)^{1/2}+4\left(\frac{x}{x+5}\right)^{1/2}=4.$

2.061. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$

2.062. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2,5.$

2.063. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22.$

2.064. $\frac{4}{\sqrt[3]{x+2}}+\frac{\sqrt[3]{x+3}}{5}=2.$

2.065. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

2.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

Решить системы уравнений (**2.067—2.119**):

2.067. $\begin{cases}x-y=1,\\x^3-y^3=7.\end{cases}$

2.068. $\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y=0,\\x+y+8=0.\end{cases}$

2.069. $\begin{cases}x^4+y^4=82,\\xy=3.\end{cases}$

2.070. $\begin{cases}(x+0,2)^2+(y+0,3)^2=1,\\x+y=0,9.\end{cases}$

2.071. $\begin{cases}(x-y)\,xy=30,\\(x+y)\,xy=120.\end{cases}$

2.072. $\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{10}{3},\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}.\end{cases}$

2.073. $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\x^2-xy=28.\end{cases}$

2.074. $\begin{cases}x^4-y^4=15,\\x^3y-xy^3=6.\end{cases}$

2.075. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\xy\,(x+y)=-2.\end{cases}$

2.076. $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\x^2y^3-x^3y^2=4.\end{cases}$

2.077. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\x^{-2}+y^{-2}=13.\end{cases}$

2.078. $\begin{cases}\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x},\\y^2-x-5=0.\end{cases}$

2.079. $\begin{cases}u^2+uv=15,\\v^2+uv=10.\end{cases}$

2.080. $\begin{cases}12\,(x+y)^2+x=2,5-y,\\6\,(x-y)^2+x=0,125+y.\end{cases}$

2.081. $\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3,\\\frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2}.\end{cases}$

2.082. $\begin{cases}(x-y)\,(x^2-y^2)=45,\\x+y=5.\end{cases}$

2.083. $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\x^2-y^2=5.\end{cases}$

2.084. $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{13}{6},\\xy=5.\end{cases}$

2.085. $\begin{cases}x^2y^3=13,\\x^3y^2=2.\end{cases}$

2.086. $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\x+y=5.\end{cases}$

2.087. $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9, \\ \frac{(x+y)\,x}{y}=20. \end{cases}$

2.088. $\begin{cases} ax+\frac{b}{y}=2, \\ \frac{b}{x}+ay=2ab. \end{cases}$

2.089. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

2.090. $\begin{cases} u^3+v^3+1=m, \\ u^3v^3=-m. \end{cases}$

2.091. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+(x+y)=5. \end{cases}$

2.092. $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2. \end{cases}$

2.093. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

2.094. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$

2.095. $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

2.096. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

2.097. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

2.098. $\begin{cases} v-u=1, \\ w-v=1, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$

2.099. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}}-\sqrt{\frac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

2.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$

2.101. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

2.102. $\begin{cases} 2\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

2.103. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

2.104. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ x+\sqrt{xy}+y=13. \end{cases}$

2.105. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

2.106. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$

2.107. $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

2.108. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

2.109. $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

2.110. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

2.111. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$ **2.112.** $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2,\\ x+y=xy+a.\end{cases}$

2.113. $\begin{cases}\sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3,\\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3.\end{cases}$

2.114. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3\,(x-y)^2}=8.\end{cases}$ **2.115.** $\begin{cases}u^2+v^2=uv+13,\\ u+v=\sqrt{uv}+3.\end{cases}$

2.116. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy},\\ x+y=5.\end{cases}$ **2.117.** $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$

2.118. $\begin{cases}\sqrt[3]{x\sqrt{y}}+\sqrt[3]{y\sqrt{x}}=12,\\ xy=64.\end{cases}$

2.119. $\begin{cases}3\,(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10\,(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5,\\ 4\,(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5\,(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3.\end{cases}$

2.120. Не решая уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

2.121. Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2.122. Составить уравнение второй степени, один из корней которого равен сумме, а другой — произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2.123. Составить уравнение второй степени, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2.124. Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

2.125. Найти коэффициенты A и B уравнения $x^2+Ax+B=0$, если известно, что числа A и B являются и его корнями.

2.126. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)\,x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

2.127. При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

2.128. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a\,(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней.

2.129. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

2.130. В уравнении $x^2-2x+c=0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

2.131. Не решая уравнения $x^2-(2a+1)\,x+a^2+2=0$, найти, при каком значении a один из корней в 2 раза больше другого.

2.132. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно -4?

2.133. Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$, найти сумму кубов его корней.

2.134. При каком целом значении b уравнения $2x^2+(3b-1)x-3=0$ и $6x^2-(2b-3)x-1=0$ имеют общий корень?

2.135. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2-6x+9c^2=0$ равен квадрату другого?

Группа Б

Решить уравнения (**2.136—2.182**):

2.136. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1.$

2.137. $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x+m}{x+1}=\dfrac{x-2m}{x-2}+\dfrac{x+2m}{x+2}-\dfrac{6(m-1)}{5}.$

2.138. $\dfrac{z+1}{z-1}+\dfrac{z-4}{z+1}=\dfrac{z+8}{z-2}+\dfrac{z-8}{z+2}+6.$

2.139. $ax^4-x^3+a^2x-a=0.$ **2.140.** $(x+1)^5+(x-1)^5=32x.$

2.141. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5.$

2.142. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)=$
$=4500.$

2.143. $|x|+|x-1|=1.$ **2.144.** $|x|^3+|x-1|^3=9.$

2.145. $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=-2.$ **2.146.** $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{25}{6}.$

2.147. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12.$

2.148. $\dfrac{u^2}{2-u^2}+\dfrac{u}{2-u}=2.$

2.149. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

2.150. $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$ **2.151.** $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9.$

2.152. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}.$

2.153. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0.$

2.154. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}.$

2.155. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2.$ **2.156.** $\dfrac{z^2-z}{z^2-z+1}-\dfrac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1.$

2.157. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$ **2.158.** $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81.$

2.159. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

2.160. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

2.161. $(x+\sqrt{x^2-1})^5\,(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$

2.162. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

2.163. $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2.$

2.164. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

2.165. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

2.166. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

2.167. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

2.168. $(x-1)\,x\,(x+1)+x\,(x+1)\,(x+2)=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$

2.169. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

2.170. $\frac{z}{z+1}-2\sqrt{\frac{z+1}{z}}=3.$

2.171. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2.$

2.172. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$

2.173. $(x+4)\,(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

2.174. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

2.175. $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}.$

2.176. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

2.177. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$

2.178. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8};\ a\neq 0.$

2.179. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

2.180. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

2.181. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)\,(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)\,(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}.$

2.182. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

Решить системы уравнений (2.183—2.243):

2.183. $\begin{cases}x^2+y=y^2+x,\\ y^2+x=6.\end{cases}$

2.184. $\begin{cases}x^3+y^3=19,\\ x^2y+xy^2=-6.\end{cases}$

2.185. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

2.186. $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

2.187. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$

2.188. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$

2.189. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

2.190. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

2.191. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

2.192. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

2.193. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

2.194. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)\,(x^2-y^2)=9. \end{cases}$

2.195. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3, \ a\neq 0. \end{cases}$

2.196. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

2.197. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

2.198. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

2.199. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

2.200. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)\,(x^2+y^2)=15a^3; \ a\neq 0. \end{cases}$

2.201. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

2.202. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0. \end{cases}$

2.203. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

2.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

2.205. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x-y)\,x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

2.206. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

2.207. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

2.208. $\begin{cases} xy\,(x+1)\,(y+1)=72, \\ (x-1)\,(y-1)=2. \end{cases}$

2.209. $\begin{cases}(x+y)(y+1)=10,\\(x+y)(xy+1)=25.\end{cases}$ **2.210.** $\begin{cases}x+yz=2,\\y+zx=2,\\z+xy=2.\end{cases}$

2.211. $\begin{cases}x+y+z=3,\\x+2y-z=2,\\x+yz+zx=3.\end{cases}$ **2.212.** $\begin{cases}x+y+z=0,\\2x+3y+z=0,\\(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14.\end{cases}$

2.213. $\begin{cases}x+y+z=2,\\2x+3y+z=1,\\x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9.\end{cases}$ **2.214.** $\begin{cases}x+y+z=6,\\x(y+z)=5,\\y(x+z)=8.\end{cases}$

2.215. $\begin{cases}x+y+z=0,\\cx+ay+bz=0,\\(x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2.\end{cases}$

2.216. $\begin{cases}x-ay+a^2z=a^3,\\x-by+b^2z=b^3,\\x-cy+c^2z=c^3;\ a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a.\end{cases}$

2.217. $\begin{cases}ax+by+cz=k,\\a^2x+b^2y+c^2z=k^2,\\a^3x+b^3y+c^3z=k^3;\ a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a.\end{cases}$

2.218. $\begin{cases}xy=a,\\yz=b,\\zx=c;\ abc>0.\end{cases}$ **2.219.** $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3,\\\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3,\\\dfrac{1}{xyz}=1.\end{cases}$

2.220. $\begin{cases}\dfrac{3}{uv}+\dfrac{15}{vw}=2,\\\dfrac{15}{vw}+\dfrac{5}{wu}=2,\\\dfrac{5}{wu}+\dfrac{3}{uv}=2.\end{cases}$ **2.221.** $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\2x+3y-5z+19=0.\end{cases}$

2.222. $\begin{cases}|2x+3y|=5,\\|2x-3y|=1.\end{cases}$ **2.223.** $\begin{cases}x+\sqrt{y}-56=0,\\\sqrt{x}+y-56=0.\end{cases}$

2.224. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$

2.225. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = 1{,}5. \end{cases}$

2.226. $\begin{cases} u - v + \sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}} = \dfrac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$

2.227. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right)^2} = 1{,}6, \\ xy = 2. \end{cases}$

2.228. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$

2.229. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

2.230. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

2.231. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

2.232. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

2.233. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{v+w} = 3, \\ \sqrt[3]{v+w} + \sqrt[3]{w+u} = 1, \\ \sqrt[3]{w+u} + \sqrt[3]{u+v} = 0. \end{cases}$

2.234. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u} + v^{-1/2}\sqrt[3]{v} = 1{,}5, \\ uv = 64. \end{cases}$

2.235. $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17. \end{cases}$

2.236. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

2.237. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$

2.238. $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)\, y + (y^2+1)\, x = 4xy. \end{cases}$

2.239. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

2.240. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88} + \sqrt{x+6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88} = 1 + 2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

2.241. $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2+2y+1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

2.242. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y\,(4y-9). \end{cases}$

2.243. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y} + 2 + \dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$

2.244. Решить уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+(x+9)(x+10)=$$
$$=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+9\cdot 10.$$

2.245. Найти коэффициенты m и n квадратного трехчлена x^2+mx+n, если известно, что его остатки при делении на двучлены $x-m$ и $x-n$ соответственно равны m и n.

2.246. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. Составить новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой — на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

2.247. Определить, при каких значениях m один из корней уравнения $z^3-(m^2-m+7)z-(3m^2-3m-6)=0$ равен -1. Отыскать два остальных корня уравнения при этих значениях m.

2.248. Показать, что если коэффициенты a, b, c уравнения $ax^2+bx+c=0$ связаны условием $2b^2-9ac=0$, то отношение корней уравнения равно 2.

2.249. Показать, что если a и b — корни уравнения $x^2+px+1=0$, а b и c — корни уравнения $x^2+qx+2=0$, то $(b-a)(b-c)=pq-6$.

2.250. При каких значениях a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

2.251. При каком положительном значении p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.

2.252. Найти коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

2.253. Составить квадратное уравнение с корнями $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, если a и b — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

2.254. Пусть α и β — корни уравнения $3x^2+7x+4=0$. Не решая данного уравнения, составить новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\dfrac{\alpha}{\beta-1}$ и $\dfrac{\beta}{\alpha-1}$.

2.255. Показать, что среди корней уравнения $x^4+5x^3+15x-9=0$ есть только один положительный и только один отрицательный (сами корни находить не обязательно).

Группа В

Решить уравнения (2.256—2.302):

2.256. $(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6.$

2.257. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

2.258. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1).$

2.259. $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$

2.260. $27x^3+9x^2-48x+20=0.$

2.261. $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$

2.262. $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2.$

2.263. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$

2.264. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$

2.265. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0.$

2.266. $u^3-(2a+1)\,u^2+(a^2+2a-b^2)\,u+(b^2-a^2)=0.$

2.267. $x^3-(p^2-p+7)\,x-3\,(p^2-p-2)=0.$

2.268. $x^3-(2a+1)\,x^2+(a^2+2a-m)\,x-(a^2-m)=0.$

2.269. $x^3-3ax^2+(3a^2-b)\,x-(a^3-ab)=0;\ b\geqslant 0.$

2.270. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0.$

2.271. $x^3-2ax^2+(a^2+2\sqrt{3a}-9)\,x-(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3})=0.$

2.272. $x^3-2x^2-(a^2-a-1)\,x+(a^2-a)=0.$

2.273. $x^3-(3a-1)\,x^2+(2a^2-3a)\,x+2a^2=0.$

2.274. $z^3-(2p+1)\,z^2+(p^2+2p-q)\,z-(p^2-q)=0.$

2.275. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0.$

2.276. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$
(ограничиться отысканием положительных корней).

2.277. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

2.278. $\dfrac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x.$

2.279. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

2.280. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}.$

2.281. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}\,x+2.$

2.282. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}.$

2.283. $\dfrac{2}{19}\,(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32})=\sqrt{\dfrac{21+x}{16+x}}.$

2.284. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

2.285. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\,\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}.$

2.286. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

2.287. $5\,\sqrt[3]{x\,\sqrt[5]{x}}+3\,\sqrt[5]{x\,\sqrt[3]{x}}=8.$

2.288. $\dfrac{20}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}+x=22.$

2.289. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$

2.290. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

2.291. $6\,\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\,\sqrt[6]{(x-2)\,(x-3)}.$

2.292. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\,(x+3)}=4-2x.$

2.293. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

2.294. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

2.295. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}.$

2.296. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

2.297. $x^{4/5}-7x^{-2/5}+6x^{-1}=0.$

2.298. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}.$

2.299. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

2.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

2.301. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

2.302. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

Решить системы уравнений (2.303—2,341):

2.303. $\begin{cases}x+y+z=4,\\2xy-z^2=16.\end{cases}$ **2.304.** $\begin{cases}2x+y+z=0,\\3x+2y+z=0,\\3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3=27.\end{cases}$

2.305. $\begin{cases}2x+y+z=6,\\3x+2y+z=7,\\(x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7.\end{cases}$ **2.306.** $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3,\\[2mm]\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3,\\[2mm]x+y+z=3.\end{cases}$

2.307. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5},\\[2mm]\dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}.\end{cases}$ **2.308.** $\begin{cases}\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\[2mm]\dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\[2mm]-\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1.\end{cases}$

2.309. $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12,\\(xy)^2+xy=6.\end{cases}$ **2.310.** $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14,\\x+y=3.\end{cases}$

2.311. $\begin{cases}x^2+y^2-x-y=102,\\xy+x+y=69.\end{cases}$ **2.312.** $\begin{cases}(x+y)(x+2y)(x+3y)=60,\\(y+x)(y+2x)(y+3x)=105.\end{cases}$

2.313. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=16,\\(x-y)(x^2+y^2)=40.\end{cases}$

2.314. $\begin{cases}x^3+y^3=2,\\2xy^2-x^2y=1\end{cases}$ (ограничиться отысканием целочисленных решений).

2.315. $\begin{cases}x^4+6x^2y^2+y^4=136,\\x^3y+xy^3=30.\end{cases}$

2.316. $\begin{cases}9(u^4+\mathrm{v}^4)=17(u+\mathrm{v})^2,\\3u\mathrm{v}=-2(u+\mathrm{v}).\end{cases}$

2.317. $\begin{cases}xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2),\\xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2.\end{cases}$

2.318. $\begin{cases}(u^2+\mathrm{v}^2)(u+\mathrm{v})=15u\mathrm{v},\\(u^4+\mathrm{v}^4)(u^2+\mathrm{v}^2)=85u^2\mathrm{v}^2.\end{cases}$

2.319. $\begin{cases}8x+\dfrac{8}{y}=3y^2,\\y+\dfrac{1}{x}=3x^2.\end{cases}$

2.320. $\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=17,\\x+xy+y=5.\end{cases}$

2.321. $\begin{cases}10(x^4+y^4)=-17(x^3y+xy^3),\\x^2+y^2=5.\end{cases}$

2.322. $\begin{cases}x^3+y^3=19,\\(xy+8)(x+y)=2.\end{cases}$

2.323. $\begin{cases}x+y+z=6,\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1{,}5,\\xyz=8.\end{cases}$

2.324. $\begin{cases}x+y+z=2,\\x^2+y^2+z^2=6,\\x^3+y^3+z^3=8.\end{cases}$

2.325. $\begin{cases}x-y+z=6,\\x^2+y^2+z^2=14,\\x^3-y^3+z^3=36.\end{cases}$

2.326. $\begin{cases}xy+yz=8,\\yz+zx=9,\\zx+xy=5.\end{cases}$

2.327. $\begin{cases}u\mathrm{v}+\mathrm{v}w=2a^2,\\\mathrm{v}w+wu=2a^2-a-1,\\wu+u\mathrm{v}=2a^2+a-1.\end{cases}$

2.328. $\begin{cases}u\mathrm{v}x^2=8,\\\mathrm{v}x^2w=24,\\x^2wu=12,\\u+\mathrm{v}+w=x+4\end{cases}$ (ограничиться отысканием положительных решений).

2.329. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\x^2+y^2=13.\end{cases}$

2.330. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$

2.331. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=9,\\\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5\end{cases}$ (ограничиться отысканием целочисленных решений).

2.332. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$ **2.333.** $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3\,(x-y), \\ x^2-y^2=41. \end{cases}$

2.334. $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2\,(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ **2.335.** $\begin{cases} u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12, \\ v\sqrt{u^2-v^2}=12. \end{cases}$

2.336. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$ **2.337.** $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

2.338. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12. \end{cases}$ **2.339.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

2.340. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$ **2.341.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3, \\ \sqrt{xyz}=1. \end{cases}$

2.342. 1. Пусть числа x_1, x_2 и x_3 служат корнями многочлена ax^3+bx^2+cx+d. В таком случае имеет место тождество

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3).$$

Воспользоваться этим тождеством для получения формул, связывающих корни и коэффициенты данного многочлена.

2. С помощью формул, полученных в п. 1, найти корни x_1, x_2 и x_3 уравнения $8x^3-20x^2-10x+33=0$, составив и решив новое кубическое уравнение с корнями x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1.

2.343. Решить уравнение $3x^3+2\sqrt{3}\,x^2-21x+6\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

2.344. Решить уравнение $2ax^3-(2a^2+a+2)\,x^2+(a^2+2a+1)\,x-a=0$, если известно, что произведение двух его корней равно единице.

2.345. Для уравнения $x^3+ax^2+bx+1=0$ произведение суммы его корней на сумму их обратных величин выразить через коэффициенты a и b.

2.346. Решить уравнение $8x^3+4x^2-34x+15=0$, если известно, что два из его корней x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $2x_1-4x_2=1$.

2.347. Доказать, что если корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ составляют геометрическую прогрессию, то один из них равен $-\sqrt[3]{c}$.

2.348. Решить уравнение $64x^3-24x^2-6x+1=0$, если известно, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

2.349. Решить уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты a, b, c и d в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию с заданным знаменателем q.

2.350. Решить уравнение $x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$, если известно, что оно имеет по крайней мере одну пару корней, разность между которыми равна 1.

2.351. Найти коэффициенты a и b уравнения $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$, если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

2.352. Числа x_1, x_2, x_3 служат корнями уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$. Требуется: 1) составить уравнение с корнями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) воспользоваться результатом п. 1 для отыскания корней уравнения $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$.

2.353. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

2.354. Показать, что корни уравнения $x+x^{-1}=2\cos 40°$ являются также корнями уравнения $x^4+x^{-4}=2\cos 160°$.

2.355. Решить уравнение $2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0$, если известно, что оно имеет три корня, из которых два являются противоположными числами (противоположными называются два числа, сумма которых равна нулю).

2.356. Решить уравнение $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0$, если известно, что два его корня отличаются друг от друга только знаком.

2.357. Решить уравнение $12x^3+4x^2-17x+6=0$, если известно, что среди его корней имеются два числа, обратных по абсолютной величине и противоположных по знаку.

2.358. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2.359. Решить уравнения $2x^3-5x^2+6x-2=0$ и $6x^3-3x^2-2x+1=0$, если известно, что они имеют один общий корень.

2.360. Найти все значения λ, при которых уравнения $\lambda x^3-x^2-x-(\lambda+1)=0$ и $\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$ имеют общий корень, и найти этот корень.

2.361. Решить уравнения $x^3-6x^2-39x-10=0$ и $x^3+x^2-20x-50=0$, воспользовавшись тем, что один из корней первого уравнения в 2 раза больше одного из корней второго уравнения.

2.362. Решить уравнения $x^3-7x^2+12x-10=0$ и $x^3-10x^2-2x+20=0$, если известно, что один из корней первого уравнения в 2 раза меньше одного из корней второго уравнения.

2.363. Решить уравнения $x^4-x^3-22x^2+16x+96=0$ и $x^3-2x^2-3x+10=0$, воспользовавшись тем, что у них есть общий корень.

2.364. Показать, что равенство $ab=c$ выражает необходимое и достаточное условие того, что среди корней уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеются два числа, сумма которых равна нулю.

2.365. Показать, что условие $kb^2-(k+1)^2\,ac=0$ $(k\neq 0)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы отношение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ было равно k.

2.366. Найти все три корня уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты удовлетворяют условию $ad=bc$.

2.367. Составить уравнение третьей степени по его корням x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, если числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

2.368. Показать, что уравнение $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ имеет единственный положительный корень, и найти этот корень.

2.369. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Пусть $S_n=\alpha^n+\beta^n$, где α и β — корни уравнения. Найти зависимость между S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

2.370. Показать, что для всякого натурального числа n выполняется равенство $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, и с его помощью решить уравнение

$$(1+3+\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342.$$

ГЛАВА 3

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Пример 1. В направлении от A к B автомобиль ехал некоторое время с постоянной скоростью $v_1=60$ км/ч. Остальную часть пути он проехал за такое же время, но со скоростью $v_2=40$ км/ч. В противоположном направлении автомобиль ехал одну половину пути со скоростью $v_3=80$ км/ч, а другую половину — со скоростью $v_4=45$ км/ч. Какова средняя скорость рейса: а) из A в B? б) из B в A?

□ а) Так как автомобиль в течение одинаковых промежутков времени ехал с каждой из указанных скоростей, то $v_{ср}=\dfrac{v_1+v_2}{2}=\dfrac{60+40}{2}=50$ (км/ч).

б) Обратный рейс состоит из двух равных частей пути (предположим, что каждая из них равна s км), которые пройдены автомобилем в неравные промежутки времени; поэтому было бы неверно считать, что $v_{ср}=\dfrac{v_3+v_4}{2}=\dfrac{80+45}{2}=62{,}5$ (км/ч). Пусть автомобиль ехал x часов со скоростью v_3 и y часов — со скоростью v_4. Тогда $v_3x=v_4y=s$, откуда $x=\dfrac{v_4y}{v_3}$. Следовательно, средняя скорость

$$v_{ср}=\frac{2s}{x+y}=\frac{2v_4y}{v_4y/v_3+y}=\frac{2v_3v_4}{v_3+v_4}=\frac{2\cdot 80\cdot 45}{125}=57{,}6 \text{ (км/ч)}. \ \blacksquare$$

Пример 2. Бригада рабочих выполнила некоторое задание. Если бригаду уменьшить на 20 человек, то такое же задание она выполнит на 5 дней позже, чем при первоначальном составе, а если бригаду увеличить на 15 человек, то она выполнит задание на 2 дня раньше. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и за сколько дней они выполнили задание?

□ Пусть x рабочих выполнили задание за y дней; тогда по условию $xy=(x-20)(y+5)$ и $xy=(x+15)(y-2)$.

Запишем оба равенства в виде пропорций: $\dfrac{x-20}{x}=\dfrac{y}{y+5}$ и $\dfrac{x+15}{x}=\dfrac{y}{y-2}$. Каждую пропорцию вида $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ заменим равносильной пропорцией вида $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$.

Тогда получим $\dfrac{-20}{x}=-\dfrac{5}{y+5}$ и $\dfrac{15}{x}=\dfrac{2}{y-2}$. Теперь легко находим, что $x=60$ и $y=10$.

Итак, в бригаде было 60 человек, которые выполнили задание за 10 дней. ■

Пример 3. Три насоса, качающие воду для поливки, начали работать одновременно. Первый и третий насосы закончили работу одновременно, а второй — через 2 ч после начала работы. В результате первый насос выкачал 9 м^3 воды, а второй и третий вместе 28 м^3. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос за час выкачивает на 3 м^3 больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 м^3?

□ Пусть первый и второй насосы выкачивают за час соответственно x и y м^3, тогда третий выкачивает за час $(x+3)$ м^3. Второй и третий насосы выкачали соответственно $2y$ и $(28-2y)$ м^3 воды. Первый насос работал $9/x$ часов, третий $(28-2y)/(x+3)$ часов. Согласно условию, $\frac{9}{x}=\frac{28-2y}{x+3}$ и $2x+y+3=14$. Решая систему уравнений, находим $x=3$, $y=5$. Итак, получаем ответ: 3, 5 и 6 м^3. ■

Пример 4. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до станции и с какой постоянной на всем пути скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

□ Составим следующую таблицу:

Пешеход пришел бы на станцию	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Точно	x	v	$\frac{x}{\mathrm{v}}$
С опозданием	$x-3$	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	$x-3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Уравнивая промежутки времени, записанные в первой и второй, в первой и третьей строках, получаем систему уравнений

$$\frac{x}{\mathrm{v}}=1+\frac{x-3}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{x}{\mathrm{v}}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4}$$

или $\frac{x-2}{3}=\frac{x+2}{4}$, откуда $x=14$. Итак, получаем ответ: $x=14$ км, $\mathrm{v}=3{,}5$ км/ч. ■

Пример 5. Расстояние между точками A и B равно 270 м. Из A в B равномерно движется тело; достигнув B, оно сразу же возвращается назад с той же скоростью. Второе тело, выходящее из B в A через 11 с после выхода первого из A, движется равномерно, но медленнее. На пути от B к A оно встречается с первым дважды: через 10 и 40 с после своего выхода из B. Найти скорость движения каждого тела.

□ Удобная модель задачи — график равномерного движения в системе координат «путь» (s — в метрах), «время» (t — в секундах). Пусть AC (рис. 3.1) — график движения из A в B со скоростью $\mathrm{v}_1=\operatorname{tg}\alpha$ (ось времени At); CD — график движения из B в A того же тела с той же скоростью $\mathrm{v}_1=\operatorname{tg}\alpha$ (ось времени Bt); EF — график движения из B в A со скоростью $\mathrm{v}_2=\operatorname{tg}\beta$, $\beta<\alpha$ (ось времени Bt).

Промежуток времени $BE=11$, промежуток времени до первой встречи $EH=10$, между первой и второй встречами $HK=30$; тогда $NM=21\mathrm{v}_1$, $HM=10\mathrm{v}_2$, $KF=40\mathrm{v}_2$, $NM+HM=AB=270$, т. е.

$$21\mathrm{v}_1+10\mathrm{v}_2=270. \qquad (*)$$

Промежуток времени $HC=HM/\mathrm{v}_1=10\mathrm{v}_2/\mathrm{v}_1$; промежуток времени $CK=KF/\mathrm{v}_1=40\mathrm{v}/\mathrm{v}_1$. Так как $HC+CK=30$, то $10\mathrm{v}_2/\mathrm{v}_1+40\mathrm{v}_2/\mathrm{v}_1=30$, откуда

$$5v_2 = 3v_1. \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), находим $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 6$ м/с. ■

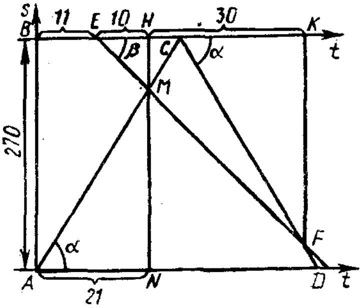

Рис. 3.1

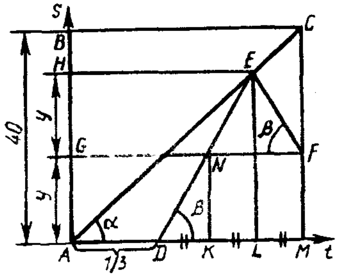

Рис. 3.2

Пример 6. Из A в B вышла машина с почтой. Через 20 мин по тому же маршруту вышла вторая машина, скорость которой 45 км/ч. Догнав первую машину, шофер передал пакет и немедленно поехал обратно с той же скоростью (время, затраченное на остановку и разворот, не учитывается). В тот момент, когда первая машина прибыла в B, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до пункта A. Найти скорость первой машины, если расстояние между A и B равно 40 км.

□ Рассмотрим систему координат «путь» (s — в километрах), «время» (t — в часах). Пусть AC (рис. 3.2) — график движения первой машины с искомой скоростью $v = \operatorname{tg}\alpha$; DE и EF — график движения «туда — обратно» второй машины со скоростью $\operatorname{tg}\beta = 45$; $AD = 1/3$. Известно, что $AB = 40$ и G — середина пути AH. Пусть $AG = NK = y$. Тогда промежуток времени $DK = y/\operatorname{tg}\beta = y/45$. Геометрически ясно, что $DK = KL = LM$, поэтому промежуток времени движения первой машины $AM = \frac{1}{3} + \frac{3y}{45}$, откуда

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{15}\right) v = 40. \qquad (*)$$

Промежуток времени $AL = \frac{1}{3} + \frac{2y}{45}$, $LE = AH = 2y$, поэтому

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2y}{45}\right) v = 2y. \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), находим $y = 15$ км и $v = 30$ км/ч. ■

Пример 7. Из колбы, содержащей раствор соли, отливают $1/n$ раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор выливают в колбу и смешивают с оставшимся в ней раствором. В результате содержание соли в растворе повысилось на p%. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе.

□ Пусть в колбе было первоначально n литров раствора, содержащего x% соли, что составляет $nx/100$ л соли. В пробирку отлили $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ л раствора. По условию после выпаривания процентное содержание соли в пробирке повысилось вдвое; так как выпаривается только вода, а количество соли остается неизменным, то затем в колбу вылили только 0,5 л раствора. Тогда в колбе окажется $n - 1 + 0{,}5 = n - 0{,}5$ л раствора, в котором по-прежнему содержится $nx/100$ л соли.

Согласно условию, имеем $nx/100=(x+p)(n-0{,}5)/100$, или $nx=(x+p)(n-0{,}5)$, откуда $x=p(2n-1)$. ■

Пример 8. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81.

□ Пусть искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z — его цифры. Согласно условию, $3x=y+z$ и число $100x+10y+z-(100x+10z+y)$ делится на 81. Упрощая, получаем, что $9(y-z)$ делится на 81, т. е. $y-z$ кратно числу 9. Так как y и z — цифры, то последнее возможно лишь в двух случаях: 1) $y-z=0$ и 2) $y-z=9$.

В первом случае имеем систему $\begin{cases} 3x=y+z, \\ y-z=0 \end{cases}$, откуда $3x=2y$, что возможно при $x=2$, $y=z=3$ (искомое число 233), при $x=4$, $y=z=6$ (искомое число 466) и при $x=6$, $y=z=9$ (искомое число 699). Во втором случае имеем систему $\begin{cases} 3x=y+z, \\ y-z=9. \end{cases}$ Второе уравнение системы возможно лишь при $z=0$, $y=9$; тогда $x=3$ и искомое число равно 390. Итак, получаем ответ: 233, 390, 466, 699. ■

Группа А

Деление на части, пропорции, проценты

3.001. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $1/5:1/3:1/20$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

3.002. Вкладчик* снял со своего счета в сбербанке сначала 1/4 вклада, затем 4/9 оставшихся и еще 64 000 руб. После этого у него осталось на сберкнижке 3/20 всех его денег. Как велик был вклад?

3.003. Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет 2/3, а второй — 3/4 первого члена. Найти четвертый член пропорции и записать ее.

3.004. Трое сотрудников получили премию в размере 297 000 руб., причем второй получил 1/3 того, что получил первый, и еще 18 000 руб., а третий получил 1/3 денег второго и еще 13 000 руб. Какую премию получил каждый?

3.005. Длина Дуная относится к длине Днепра как $19/3:5$, а длина Дона относится к длине Дуная как $6{,}5:9{,}5$. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

3.006. В двух бидонах находится 70 л молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

3.007. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого равна 2/5 площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $3/2:4/3$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 16 га меньше, чем в первом?

3.008. В библиотеке имеются книги на английском, французском

---

*Указанные в условии задач числовые значения, характеризующие стоимость, величину заработка, размер премии, кредитные и другие денежные операции, не претендуют на совпадение с их реальными прототипами в современной действительности.

и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские — 75% английских, а остальные 185 книг — немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

3.009. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

3.010. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

3.011. На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

3.012. Найти два числа, сумма которых равна 44, причем меньшее число отрицательно. Процентное отношение разности между бо́льшим и меньшим числами к меньшему числу совпадает с меньшим числом.

3.013. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как $0{,}5:9/20$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

3.014. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число решивших все задачи верно относится к числу не решивших вовсе как $5:3$. Сколько человек экзаменовались по математике в этот день?

3.015. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно 200/441. Найти эти дроби.

3.016. Площади трех участков земли находятся в отношении $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{3}{8}$. Известно, что с первого участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со второго. Найти площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц с 1 га.

3.017. Расстояние между Москвой и Смоленском по железной дороге равно 415 км. На этом пути расположены города Можайск и Вязьма. Расстояние между Москвой и Можайском относится к расстоянию между Можайском и Вязьмой как $7:9$, а расстояние между Можайском и Вязьмой составляет 27/35 расстояния между Вязьмой и Смоленском. Найти расстояния между каждыми двумя соседними городами.

3.018. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры как $0{,}2:1{,}3$, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}$% массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

3.019. Музыкальный театр объявил конкурс для поступления в оркестр. Первоначально предполагалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении 1,6 : 1 : 0,4. Однако затем было решено увеличить прием, и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

3.020. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно 14/11. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

3.021. Заработки рабочего за октябрь и ноябрь относились как 3/2 : 4/3, а за ноябрь и декабрь как 2 : 8/3. За декабрь он получил на 45 000 руб. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найти размер премии.

3.022. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

3.023. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

3.024. В первый день спортивных соревнований не выполнили зачетные нормы и выбыли из дальнейшей борьбы 1/6 состава команды юношей и 1/7 состава команды девушек. В течение остального периода соревнований из обеих команд выбыло из-за невыполнения норм одинаковое количество спортсменов. Всего к концу испытаний не выполнили зачетные нормы 48 человек из команды юношей и 50 человек из команды девушек, но из общего количества спортсменов, выполнивших зачетные нормы, девушек оказалось вдвое больше, чем юношей. Какова была первоначальная численность команд?

3.025. Денежная премия была распределена между тремя изобретателями: первый получил половину всей премии без 3/22 того, что получили двое других вместе. Второй получил 1/4 всей премии и 1/56 денег, полученных вместе двумя остальными. Третий получил 300 000 руб. Как велика была премия и сколько денег получил каждый изобретатель?

3.026. В первую неделю отпускного путешествия друзья израсходовали на 6000 руб. меньше, чем 2/5 количества взятых с собой денег; во вторую неделю 1/3 остатка и еще на билеты в театр 1200 руб.; в третью неделю 3/5 нового остатка и еще на морские прогулки 3120 руб., после чего у них осталось 42 000 руб. Сколько денег было израсходовано за три недели путешествия?

3.027. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорционально числам 11,25, 12 и 13,5. Определить перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

3.028. Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую — 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60% продукции, выработанной за первые две недели вместе. Каков месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви?

3.029. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после пересчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

3.030. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 25 000 руб., а теперь на 28 090 руб.?

3.031. В штате гаража числится 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта?

3.032. Три бригады рабочих сделали насыпь. Вся работа оценена в 3255 тыс. руб. Какую зарплату получит каждая бригада, если первая состояла из 15 человек и работала 21 день, вторая — из 14 человек и работала 25 дней, а число рабочих третьей бригады, работавшей 20 дней, на 40% превышало число рабочих первой бригады?

3.033. В два сосуда одинаковой массы налита вода, причем масса сосуда A с водой составляет 4/5 массы сосуда B с водой. Если воду из сосуда B перелить в сосуд A, то масса его вместе с водой станет в 8 раз больше массы сосуда B. Найти массу сосудов и количество воды в них, зная, что в сосуде B содержится воды на 50 г больше.

3.034. Имеются три сосуда, содержащих неравные количества жидкости. Для выравнивания этих количеств сделано три переливания. Сначала 1/3 жидкости перелили из первого сосуда во второй, затем 1/4 жидкости, оказавшейся во втором сосуде, перелили в третий и, наконец, 1/10 жидкости, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось 9 л жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждом сосуде?

3.035. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

3.036. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь круга стала больше на 96%?

3.037. В трех секциях спортивной школы было 96 спортсменов. Число членов конькобежной секции составляло 0,8 числа членов лыжной, а число членов хоккейной секции составляло $33\frac{1}{3}\%$ суммарного числа членов двух первых секций. Сколько спортсменов было в каждой секции?

Отношения «больше — меньше»

3.038. Один фермер получил средний урожай гречихи 21 ц с 1 га, а другой, у которого под гречихой было на 12 га меньше, добился среднего урожая 25 ц с 1 га. В результате второй фермер собрал на 300 ц гречихи больше, чем первый. Сколько центнеров гречихи было собрано каждым фермером?

3.039. На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

3.040. На расстоянии s км грузовой автомобиль расходует бензина на a л больше, чем легковой. Расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге на b км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстоянии s км?

3.041. По обе стороны улицы длиной 1200 м лежат прямоугольные полосы земли, отведенные под участки, одна — шириной 50 м, а другая — 60 м. На сколько участков разбит весь поселок, если более узкая полоса содержит на 5 участков больше, чем широкая, при условии, что на узкой полосе каждый участок на 1200 м^2 меньше, чем каждый участок на широкой полосе?

3.042. Груз массой 60 кг давит на опору. Если массу груза уменьшить на 10 кг, а площадь опоры уменьшить на 5 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Определить площадь опоры.

3.043. В зрительном зале клуба было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

3.044. Запас сена таков, что можно ежедневно выдавать на всех лошадей 96 кг. В действительности ежедневную порцию каждой лошади смогли увеличить на 4 кг, так как две лошади были переданы соседнему колхозу. Сколько лошадей было первоначально?

3.045. Сочинение писали 108 экзаменующихся. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девушка получила на один лист больше каждого юноши, а все девушки получили столько же листов, сколько все юноши. Сколько было девушек и сколько юношей?

3.046. На машиностроительном заводе разработали новый тип деталей для генераторов. Из 875 кг металла изготовляют теперь на три детали нового типа больше, чем деталей старого типа изготовляли из 900 кг. Какова масса детали нового и старого типов, если две детали нового типа по массе меньше одной детали старого типа на 0,1 т?

3.047. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому было дополнительно затребовано 4 машины. Какое количество автомашин было затребовано первоначально?

3.048. Город C, расположенный между пунктами A и B на одной прямой, снабжается газом из этих пунктов, расстояние между которыми 500 км. Из резервуара A в каждую минуту откачивается 10 000 м^3 газа, а из резервуара B — на 12% больше. При этом утечка газа в каждой магистрали составляет 4 м^3 в минуту на километр трубы. Зная, что в город C газ поступает из резервуаров A и B поровну, найти расстояние между городом C и пунктом A.

3.049. В четырех ящиках лежит чай. Когда из каждого ящика вынули по 9 кг, то во всех вместе осталось столько же, сколько было в каждом. Сколько чая было в каждом ящике?

3.050. Два парка общей площадью 110 га разбиты на равное количество участков. Участки каждого парка по площади равны между собой, но отличаются от участков другого. Если бы первый парк был разбит на участки такой же площади, как второй, то он имел бы 75 участков, а если бы второй был разбит на такие же участки, как первый, то он содержал бы 108 участков. Определить площадь каждого парка.

3.051. В семье отец, мать и три дочери; всем вместе 90 лет. Разница в возрасте у девочек — 2 года. Возраст матери на 10 лет больше суммы возрастов дочерей. Разность лет отца и матери равна возрасту средней дочери. Сколько лет каждому члену семьи?

3.052. В кинозале имеется две двери, широкая и узкая. Через обе двери после сеанса зрители выходят из зала в течение 3 мин 45 с. Если зрителей выпускать через одну широкую дверь, то выход из зала займет на 4 мин меньше, чем в том случае, если зрителей выпускать только через одну узкую дверь. Сколько времени требуется для выхода зрителей из кинозала через каждую дверь в отдельности?

3.053. Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше, — 27 кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?

3.054. В швейный цех поступило три кипы бельевого материала, всего 5000 м. В первой кипе количество материала было в 3 раза меньше, чем во второй, а в третьей — 22% всего количества. Из материала первой кипы сшили 150 простыней и 240 наволочек. Для изготовления одной простыни требовалось на 3,25 м больше материала, чем для изготовления одной наволочки. Из скольких метров материала шьется одна наволочка?

3.055. От трех кафедр института поступили заявки на приобретение дополнительного оборудования лабораторий. Стоимость оборудования в заявке первой кафедры составляет 45% от заявки второй кафедры, а стоимость оборудования в заявке второй кафедры — 80% от заявки третьей. Стоимость оборудования в заявке третьей кафедры превышает заявку первой на 640 млн. руб. Какова общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр?

3.056. Сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ равна 1,75. Найти значение a.

Геометрические и физические задачи

3.057. Для спортплощадки отвели участок в форме прямоугольника с диагональю, равной 185 м. При выполнении строительных работ длину каждой стороны уменьшили на 4 м. При этом прямоугольная форма была сохранена, но площадь оказалась уменьшенной на 1012 м^2. Каковы действительные размеры спортплощадки?

3.058. Участок прямоугольной формы обнесен изгородью. Если от него отрезать по прямой некоторую часть так, что оставшаяся часть окажется квадратом, то при этом его площадь уменьшится на 400 м^2, а изгородь уменьшится на 20 м. Определить первоначальные размеры участка.

3.059. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника, длина которого на b м больше ширины. Площадка окаймлена дорожкой одинаковой ширины в a м. Каковы размеры спортивной площадки, если ее площадь равна площади окаймляющей ее дорожки?

3.060. Фотокарточка размерами 12×18 см вставлена в рамку постоянной ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади самой карточки.

3.061. На ровной горизонтальной площадке стоят две мачты равной высоты на расстоянии 5 м друг от друга. На высоте 3,6 м от площадки к каждой мачте прикреплено по одному концу куска проволоки длиной 13 м. Проволока натянута в плоскости расположения мачт и прикреплена к площадке, как показано на рис. 3.3. На каком расстоянии от ближайшей мачты находится точка прикрепления проволоки к площадке?

3.062. Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого отношение длины к ширине равно 2 : 1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной 3 см и получившиеся края загнуты. Определить размеры листа жести, если объем коробки оказался равным 168 см^3.

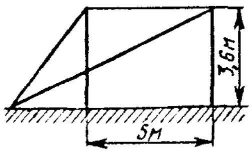

Рис. 3.3

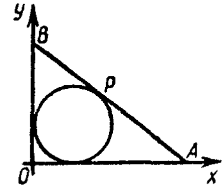

Рис. 3.4

3.063. На рис. 3.4 изображены окружность, касающаяся двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy, и прямая AB, касающаяся окружности в точке P. Радиус окружности $R = 10$ см, а площадь треугольника OAB равна 600 см^2. Найти координаты точек A, B, P, учитывая, что $OA > OB$.

3.064. Переднее колесо движущейся модели на протяжении 120 м делает на 6 оборотов больше, чем заднее. Если окружность переднего колеса увеличить на 1/4 ее длины, а окружность заднего — на 1/5 ее длины, то на том же расстоянии переднее колесо сделает на 4 оборота больше, чем заднее. Найти длины окружностей переднего и заднего колес.

3.065. На пути от села до поля колесо грузовика делает на 100 оборотов меньше, чем колесо велосипеда, и на 150 оборотов больше, чем гусеница трактора. Найти расстояние между селом и полем, если известно, что длина окружности колеса грузовика составляет 4/3 длины окружности колеса велосипеда и на 2 м короче гусеницы трактора.

3.066. По наклонной плоскости длиной 6 м катятся два цилиндра, у одного из которых длина окружности равна 3 дм, а у другого 2 дм. Можно ли увеличить длины окружностей обоих цилиндров на одну и ту же величину так, чтобы на том же пути один из них сделал на 3 оборота больше другого?

3.067. По двум окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

3.068. Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Модуль одной из них на 4 Н больше модуля другой, а модуль равнодействующей на 8 Н меньше суммы модулей данных сил. Найти модули данных сил и их равнодействующей.

3.069. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Модуль одной из приложенных сил в $7\sqrt{3}$ раза больше модуля другой, а модуль равнодействующей силы на 24 Н больше, чем модуль меньшей силы. Определить модули меньшей и равнодействующей сил.

3.070. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 мес. дал такой же прирост массы, как второй за 7 мес. Однако по истечении года оказалось, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

3.071. Кусок платины, плотность которой равна $2{,}15 \cdot 10^4$ кг/м^3, связан с куском пробкового дерева (плотность $2{,}4 \cdot 10^2$ кг/м^3). Плотность системы равна $4{,}8 \cdot 10^2$ кг/м^3. Какова масса куска дерева, если масса куска платины составляет 86,94 г?

3.072. В лаборатории измеряется скорость, с которой распространяется звук вдоль стержней, сделанных из разных материалов. В первом опыте оказалось, что весь путь, состоящий из трех последовательно соединенных стержней, звук проходит за время a с, а путь, состоящий из второго и третьего стержней, звук проходит в 2 раза быстрее, чем один первый стержень. В другом опыте второй стержень заменили новым, и тогда последовательное соединение из трех стержней звук прошел за время b с, а соединение из первого и второго стержней — вдвое медленнее, чем один третий стержень. Найти скорость распространения звука в новом стержне, если его длина l м.

Торгово-денежные отношения

3.073. Некоторый товар был куплен осенью и за него было уплачено 825 000 руб. Килограмм этого товара осенью на 1000 руб. дешевле, чем весной, и поэтому на ту же сумму весной было куплено на 220 кг меньше. Сколько стоит 1 кг товара весной и сколько его было куплено осенью?

3.074. Перевозка тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b руб. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму a руб., если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k т больше, чем по железной дороге?

3.075. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 84 руб. Определить стоимости марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

3.076. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 27 000 руб. В действительности за все эти книги уплатили только 23 700 руб., так как была произведена скидка: на первый том в размере 15%, а на второй — в размере 10%. Найти первоначальную цену этих книг.

3.077. Две шкурки общей стоимостью в 2250 тыс. руб. были проданы на аукционе с прибылью в 40%. Какова стоимость каждой шкурки, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй — 50%?

3.078. Рабочий час мастеров A и B оплачивается неодинаково, но оба мастера работали одинаковое число часов. Если бы A работал на 1 ч меньше, а B — на 5 ч меньше, то A заработал бы 72 000 руб., а B — 80 000 руб. Если бы, наоборот, A работал на 5 ч меньше, а B — на 1 ч меньше, то B заработал бы на 36 000 руб. больше, чем A. Какую сумму получил каждый мастер за все время работы?

3.079. В магазин привезли яблоки 1-го сорта на сумму 228 000 руб. и яблоки 2-го сорта на сумму 180 000 руб. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене — на 900 руб. ниже цены килограмма яблок 1-го сорта, то будет выручена ранее намеченная сумма. Сколько килограммов яблок привезено, если известно, что яблок 2-го сорта было на 5 кг больше, чем 1-го сорта?

3.080. Имеющиеся на складе 300 кг товара проданы в неравных количествах двум организациям по цене 37 500 руб. за 1 кг. Первая организация перевозит купленный товар на расстояние 20 км, а вторая — на 30 км. Перевозка 10 кг товара обходится в 1 500 руб. за 1 км пути. Зная, что вторая организация заплатила за покупку и перевозку товара на 2 млн. 700 тыс. руб. больше первой, определить, сколько килограммов товара купила каждая организация и какую сумму она заплатила за товар и его перевозку.

Соотношения между натуральными числами

3.081. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

3.082. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

3.083. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

3.084. Даны два двузначных числа, из которых второе обозначено теми же цифрами, что и первое, но написанными в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно 1,75. Произведение первого числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше второго числа. Найти эти числа.

3.085. Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

3.086. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно 8/3, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

3.087. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найти исходное число.

3.088. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

3.089. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Найти это число.

3.090. Некоторое двузначное число в 4 раза больше суммы и в 3 раза больше произведения своих цифр. Найти это число.

3.091. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

3.092. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 7 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Остаток уменьшили на 75% этого остатка и еще вычли задуманное число. В окончательном результате получили нуль. Какое число задумано?

3.093. Определить целое положительное число по следующим данным: если его записать цифрами и присоединить справа цифру 4, то получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

3.094. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи заданного числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Какое число было задано?

3.095. Сумма всех четных двузначных чисел разделилась на одно из них без остатка. Полученное частное отличается от делителя только порядком цифр, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число являлось делителем?

3.096. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2 и 3, а обратные величины соответствующих знаменателей пропорциональны числам 1, 1/3 и 0,2. Найти эти дроби, если их среднее арифметическое равно 136/315 .

3.097. Если бы ученик правильно перемножил два написанных на доске числа, то получил бы в произведении 4500. Но, переписывая с доски сомножители, в одном из них ученик вместо последней цифры 5 написал цифру 3 и после умножения в результате получил 4380. Какие числа должен был перемножить ученик?

3.098. В рукописи задачника по арифметике был помещен пример, в котором данное число надо умножить на 3 и от полученного результата отнять 4. В типографии допустили опечатку: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса — плюс. Тем не менее конечный результат от этого не изменился. Какой пример предполагали поместить в задачнике?

3.099. Одна из двух дробей вдвое больше другой. После возведения каждой из дробей в квадрат и сложения этих результатов получается некоторая сумма. Та же сумма получается после возведения каждой из дробей в куб и сложения этих результатов. Найти данные дроби.

Движение: путь, скорость, время

3.100. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если пароход пришел туда на 1,5 ч раньше лодки?

3.101. Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько времени плыл по реке?

3.102. Экспресс проходит путь от Москвы до Санкт-Петербурга на 3 ч 30 мин быстрее пассажирского поезда, так как за 1 ч он проходит на 35 км больше. Сколько километров в час проходит каждый из них, если расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом принять с округлением равным 650 км?

3.103. Группа студентов во время каникул совершила поход по Подмосковью. Первые 30 км они прошли пешком, 20% оставшейся части маршрута проплыли на плоту по реке, а затем опять шли пешком, пройдя расстояние в 1,5 раза больше того, которое проплыли по реке. Остальной путь проехали за 1 ч 30 мин на попутном грузовике, который шел со скоростью 40 км/ч. Какова длина всего маршрута?

3.104. Искусственный водоем имеет форму прямоугольника с разностью сторон 1 км. Два рыбака, находящиеся в одной вершине этого прямоугольника, одновременно отправились в пункт, расположенный в противоположной вершине. При этом один рыбак поплыл на лодке напрямик по диагонали, а второй пошел пешком вдоль берега. Определить размеры водоема, если каждый рыбак передвигался со скоростью 4 км/ч и один из них прибыл к месту назначения на 30 мин раньше другого.

3.105. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

3.106. Расстояние от A до B по железной дороге равно 88 км, а по реке оно составляет 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 км больше средней скорости теплохода.

3.107. По одной из трамвайных линий начали курсировать трамваи новой конструкции. Рейс протяженностью 20 км продолжается теперь на 12 мин меньше, так как средняя скорость трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше средней скорости трамвая устаревшей конструкции. Сколько времени затрачивает на рейс трамвай новой конструкции и какова его средняя скорость?

3.108. Два автобуса одновременно выехали с фабрики и направились в зону отдыха, к озеру. Расстояние между фабрикой и озером 48 км. Первый автобус прибыл к озеру на 10 мин раньше второго, причем средняя скорость второго меньше средней скорости первого на 4 км/ч. Вычислить скорости автобусов.

3.109. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними составило 174 км. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходил на 3 км больше, чем второй.

3.110. Расстояние между поселками A и B равно s км. Из A отправились в B одновременно по одной и той же дороге два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B на n ч раньше срока, а второй на $3n$ ч опоздал, так как последний проезжал за каждый час в среднем на r км меньше первого. Определить среднюю скорость каждого автотуриста.

3.111. От станции железной дороги до турбазы можно пройти по шоссе или тропинкой, причем тропинкой ближе на 5 км. Два товарища условились, что один пойдет по шоссе, строго выдерживая намеченную скорость v км/ч, а второй — тропинкой со скоростью 3 км/ч. Второй пришел на турбазу раньше первого на 1 ч. Найти расстояние от станции до турбазы по шоссе и скорость v первого товарища, если известно, что v — целое число.

3.112. Скорости пассажирского и товарного поездов относятся как $a:b$. Пассажирский поезд вышел со станции A на 0,5 ч позже товарного, а прибыл на станцию B на 0,5 ч раньше его. Найти скорости поездов, если расстояние между A и B равно s км.

3.113. В отверстие трубы вошла одна материальная частица, а спустя 6,8 мин в то же отверстие вошла вторая частица. Войдя в трубу, каждая частица немедленно начинает поступательное движение вдоль трубы: первая частица движется равномерно со скоростью 5 м/мин, а вторая в первую минуту пробегает 3 м, а в каждую следующую минуту на 0,5 м больше, чем в предыдущую. За сколько минут вторая частица догонит первую?

3.114. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 20 км от их дома. Чтобы добраться до стадиона, они решили воспользоваться своим велосипедом и договорились, что отправятся одновременно, один на велосипеде, а другой пешком; проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до места, где будет оставлен велосипед, дальше поедет на нем и догонит первого у входа на стадион. Где должен оставить велосипед первый брат и сколько времени уйдет на дорогу, если каждый из братьев будет идти равномерно со скоростью 4 км/ч, а ехать в 5 раз быстрее?

3.115. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

3.116. Два брата взяли свои велосипеды и одновременно тронулись в путь с намерением проехать 42 км. Старший брат на всем пути сохранял одну и ту же скорость, а младший брат каждый час отставал от старшего на 4 км. Но так как старший брат отдыхал в пути целый час, а младший — только 20 мин, то к финишу они прибыли одновременно. Сколько времени продолжалась поездка?

3.117. Самолет должен пролететь 2900 км. Пролетев 1700 км, он сделал вынужденную посадку на 1 ч 30 мин, после чего полетел со скоростью, на 50 км/ч меньшей, чем раньше. Найти первоначальную скорость самолета, если известно, что он прибыл на место через 5 ч после вылета.

3.118. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

3.119. Через 2 ч после выезда с фабрики шофер посмотрел на спидометр и заметил, что проехал только 112 км. Он прикинул мысленно, что если и дальше поедет с той же скоростью, то на 30 мин опоздает с доставкой груза на станцию. Поэтому шофер увеличил скорость и прибыл на станцию даже на 30 мин раньше срока. Определить начальную и последующую скорости движения автомобиля, если расстояние от фабрики до станции по спидометру составляет 280 км.

3.120. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

3.121. Велосипедист проехал 60 км из пункта A в пункт B. На обратном пути он первый час проехал с прежней скоростью, после чего сделал остановку на 20 мин. Начав движение снова, он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на путь из B в A столько же времени, сколько и на путь из A в B. Определить скорость велосипедиста на пути из A в B.

3.122. Из поселка, расположенного в 60 км от города, сегодня должен приехать отец студентки, который хотел посетить воскресную лекцию. Однако лекция перенесена на другой день. Чтобы предупредить отца об этом, дочь поехала по шоссе ему навстречу. При встрече выяснилось, что отец и дочь выехали на мопедах одновременно, но средняя скорость дочери была вдвое большей. Возвращаясь после встречи, каждый из них увеличил первоначальную скорость на 2 км/ч, и дочь прибыла в город на 5 мин позже, чем отец в поселок. С какой средней скоростью отец и дочь ехали первоначально?

3.123. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. Если же вторая группа выйдет на 2 ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы. С какой средней скоростью идет каждая группа?

3.124. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что они все время оставались неизменными.

3.125. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно навстречу друг другу два автобуса. В пути первый сделал остановку на 10 мин, второй — на 5 мин. Первый автобус прибыл в B на 25 мин раньше, чем второй прибыл в A. Можно считать, что скорости движения автобусов были постоянными, причем скорость первого автобуса превышала скорость второго автобуса на 20 км/ч. Сколько времени продолжалась поездка пассажиров каждого из этих автобусов между пунктами A и B?

3.126. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми равно 270 км. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

3.127. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит 1/4 расстояния между A и B. За какое время каждый поезд проходит весь путь?

3.128. Турист A отправился из города M в город N с постоянной скоростью 12 км/ч. Турист B, находившийся в городе N, получив сигнал, что A уже проехал 7 км, тотчас выехал навстречу ему и проезжал каждый час 0,05 всего расстояния между M и N. С момента выезда B до его встречи с A прошло столько часов, на сколько километров в час продвигался B. Найти расстояние между городами M и N, если оно не меньше 100 км.

3.129. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через 1 ч. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорости лодки и парусника, полагая, что они постоянны и неизменны в обоих случаях.

3.130. В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти A из поселка M и B из поселка N. Однако A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B.

Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в N через 8 ч, а B пришел в M через 9 ч после встречи. Определить расстояние MN и скорости пешеходов.

3.131. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

3.132. Кошка, гнавшаяся за мышкой вдоль длинного коридора, догнала ее через a с после начала погони. Первоначальное расстояние между ними l м. Если при таком же начальном расстоянии мышка с перепугу побежала бы не от кошки, а навстречу ей, то была бы схвачена через b с. Полагая, что в том и в другом случае кошка и мышка прилагали бы максимальные усилия, найти средние скорости каждой из них.

3.133. На учениях разведывательный катер подошел к головному кораблю эскадры и получил приказание произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения на расстоянии 70 км. Определить, через какое время катер вернется к головному кораблю эскадры, продолжающей идти вперед, если известно, что скорость катера 28 км/ч, а эскадра должна двигаться со скоростью 14 км/ч.

3.134. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 м больше, чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику, остававшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 с после встречи со вторым пони, а второй — через 16 с после их встречи. Каков диаметр арены?

3.135. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки больше скорости плота на 12 км/ч?

3.136. Моторная лодка, обладающая скоростью движения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами 60 км. Определить скорость течения реки.

3.137. Сначала катер шел a км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние — по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки c км/ч.

3.138. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке 40/3 км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя 28/3 км, он встретился с плотом. Если скорость течения реки 4 км/ч, то какова собственная скорость катера?

3.139. В 9 ч самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи все время постоянна, определить, когда баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно 60 км.

3.140. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же трассе через 5 ч с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем им требовалось столько же времени, сколько на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения, время проезда туда и время проезда обратно.

3.141. Над пунктом A вертолет был в 8 ч 30 мин. Пролетев по прямой s км, вертолет оказался над пунктом B. Продержавшись 5 мин в воздухе над пунктом B, вертолет пошел обратным курсом по той же трассе. К пункту A он вернулся в 10 ч 35 мин. От A к B он летел по ветру, а обратно против ветра. Скорость ветра все время была постоянной. Найти скорость ветра, если собственная скорость вертолета также все время постоянна и при безветрии равна v км/ч. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

Работа

3.142. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену на каждом станке, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй — 8 ч, причем оба станка вместе обработали 820 деталей?

3.143. Одна мельница может смолоть 19 ц пшеницы за 3 ч, другая 32 ц за 5 ч, а третья 10 ц за 2 ч. Как распределить 133 т пшеницы между этими мельницами, чтобы, одновременно начав работу, они окончили ее также одновременно?

3.144. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на 3 дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках в три раза большая партия деталей была обработана за 20 дней?

3.145. Двое рабочих выполняют совместно некоторое задание за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить его на 12 ч скорее, чем второй, если тот будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая порознь, может выполнить задание?

3.146. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

3.147. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивает в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходует каждый из двигателей?

3.148. На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, а вторая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?

3.149. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

3.150. Одна бригада может убрать все поле за 12 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работала только первая бригада, к ней присоединилась вторая, и обе вместе закончили работу. Сколько дней работали бригады вместе?

3.151. За 3,5 ч работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% всех деталей, а скорости выполнения работы на третьем и на втором прессах относятся как 6 : 5. За какое время будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

3.152. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись объемом 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 ч быстрее второй?

3.153. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 ч, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке для того, чтобы одной перепечатать третью главу?

3.154. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготовлять ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

3.155. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 0,6 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

3.156. Некоторое задание A выполняет в срок, на a дней больший, чем B, и на b дней больший, чем C. Работая вместе, A и B выполняют задание за столько же дней, что и C. Определить время, за которое каждый выполняет задание отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

3.157. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада делала ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану. В какой срок должна была быть окончена работа и каков ежедневный процент перевыполнения плана?

3.158. Три машины разных систем выполняют некоторую счетную работу. Если всю работу поручить только одной второй или одной первой машине, то одна вторая машина затратит на выполнение всей работы на 2 мин больше, чем одна первая. Одна третья машина может выполнить всю работу за срок, вдвое больший, чем одна первая. Так как части работы однотипны, то всю работу можно поделить между тремя машинами. Тогда, работая вместе и закончив работу одновременно, они выполнят ее за 2 мин 40 с. За какое время может выполнить эту работу каждая машина, действуя отдельно?

3.159. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

3.160. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в первый?

3.161. Через 1 ч после начала равномерного спуска воды в бассейне ее осталось 400 м^3, а еще через 3 ч — 250 м^3. Сколько воды было в бассейне?

3.162. В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран, то на это потребуется 0,75 того времени, за которое может наполниться сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения сосуда?

3.163. Бассейн для плавания имеет три трубы разного сечения для отвода воды с помощью равномерно откачивающего насоса. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн опорожняется за a мин, через первую и третью вместе при закрытой второй — за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой — за c мин. За какое время наполненный бассейн опорожняется через каждую трубу в отдельности?

Смеси, сплавы

3.164. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

3.165. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

3.166. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

3.167. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если бы к нему добавить некоторое количество чистого серебра, по массе равное 1/3 массы чистого серебра, первоначально содержавшегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава и каково первоначальное процентное содержание в нем серебра?

3.168. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа осталось еще в руде?

3.169. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

3.170. Некоторое вещество впитывает влагу, увеличивая при этом свою массу. Чтобы впитать 1400 кг влаги, требуется взять нераздробленного вещества на 300 кг больше, чем раздробленного. Сколько процентов от массы вещества составляет масса впитанной влаги в случае раздробленного вещества и в случае нераздробленного, если во втором случае это число процентов на 105 меньше, чем в первом?

Группа Б

Отношения, проценты

3.171. Одна из трех бочек наполнена водой, а остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется 1/4 бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется 2/9 количества содержавшейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения потребуется еще 50 ведер. Определить вместимость каждой бочки.

3.172. По трем сосудам распределено 24 л жидкости. Сначала из первого сосуда перелили в два другие столько, сколько было в каждом из них. Затем из второго перелили в два другие столько, сколько стало в каждом из них после первого переливания. Наконец, из третьего перелили в остальные столько, сколько стало в каждом из них после второго переливания. В результате в каждом сосуде оказалось одинаковое количество жидкости. Сколько жидкости было в каждом сосуде первоначально?

3.173. Объем вещества A составляет половину суммы объемов веществ B и C, а объем вещества B составляет 1/5 суммы объемов веществ A и C. Найти отношение объема вещества C к сумме объемов веществ A и B.

3.174. Инженер в первую неделю отпуска израсходовал несколько меньше, чем 3/5 количества взятых с собой денег; во вторую неделю 1/4 остатка и еще 3000 руб.; в третью неделю 2/5 нового остатка и еще 1200 руб., после чего осталось 6/35 от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недель, убывало в арифметической прогрессии. Сколько денег было израсходовано за три недели отпуска?

3.175. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

3.176. Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Однако выяснилось, что сотрудников, достойных премии, на три человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 40 000 руб. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 900 000 руб., в результате чего каждый премированный получил 250 000 руб. Сколько человек получили премию?

3.177. Известно, что разность переменных величин z и y пропорциональна величине x, а разность величин x и z пропорциональна величине y. Коэффициент пропорциональности один и тот же и равен целому положительному числу k. Некоторое значение величины z в 5/3 раза больше разности соответствующих значений x и y. Найти числовое значение коэффициента k.

3.178. Трое рабочих участвовали в конкурсе. Первый и третий из них произвели продукции в 2 раза больше, чем второй, а второй и третий — в 3 раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в конкурсе? В каком отношении находятся количества выработанной ими продукции?

3.179. Население города ежегодно увеличивается на 1/50 наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

3.180. Стрелку в тире были предложены следующие условия: каждое попадание в цель вознаграждается пятью жетонами, но за каждый промах отбирается три жетона. Стрелок был не очень метким. После последнего (n-го) выстрела у него не осталось ни одного жетона. Из скольких выстрелов состояла серия и сколько было удачных выстрелов, если $10<n<20$?

3.181. Цистерну в течение 5 ч наполнили водой. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим. Оказалось, что в первые четыре часа было налито воды вдвое больше, чем в последние четыре часа. Каков объем цистерны, если известно еще, что за первые два часа в нее было налито 48 м^3 воды?

3.182. Бригада рыбаков планировала выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. В течение 1/3 этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы планировалось вылавливать ежедневно?

3.183. Два рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на a дней меньше срока и получил r руб., а второй проработал на a дней больше срока и получил s руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы.

3.184. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 3/5 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

3.185. Из металла определенной марки изготовлено несколько шариков, равных по массе, для подшипников и несколько поршневых колец, также равных по массе. Если бы число, выражающее массу каждого шарика в граммах, было на 2 меньше числа сделанных колец, а число, выражающее массу каждого кольца в граммах, на 2 больше числа сделанных шариков, то число, выражающее их общую массу, превышало бы удвоенную разность числа колец и шариков на 800, а если бы число, выражающее массу каждого предмета в граммах, было равно числу сделанных предметов того же рода, то общая их масса была бы равна 881 г. Сколько было сделано шариков и колец?

3.186. Три мальчика *А*, *Б* и *В* условились, что при совместном путешествии на катере каждый побывает в должности капитана, причем величина времени пребывания каждого в этой должности будет пропорциональна числу очков, которые он получит, участвуя в географической викторине. В итоге *А* получил на 3 очка больше, чем *В*; *Б* и *В* вместе получили 15 очков. Число, выражающее 1/10 всего времени путешествия (в часах), на 25 больше числа очков, полученных мальчиками. Сколько времени были капитанами A и B, если $Б$ исполнял эту обязанность 160 ч?

3.187. Для перевозки груза из одного места в другое было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

3.188. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше. Если же количество берез увеличить, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?

3.189. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

3.190. Уголь, привезенный на склад, предназначен для двух заводов. На первый завод начали доставлять уголь с 1-го июня по m т ежедневно, не исключая воскресений, на второй завод — с 8-го июня по n т ежедневно, не исключая воскресений. К концу дня 16-го июня на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа был вывезен со склада весь уголь, если оба завода получили угля поровну?

3.191. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получается из 1 т молока?

3.192. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. К концу первых двух часов он выиграл 10% от числа всех играемых партий, а 8 противников свели вничью свои партии с мастером. За следующие два часа мастер выиграл 10% партий у оставшихся противников, 2 партии проиграл, а остальные 7 партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

3.193. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в 2 раза.

3.194. Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 500 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 480 руб. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

3.195. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на x%. Каким должно быть число x, чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

3.196. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т. е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

Геометрические и физические задачи

3.197. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник приложены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 3.5). Найти отношение сторон прямоугольника, если известно, что его периметр в 4 раза больше радиуса окружности.

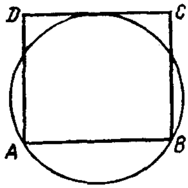

Рис. 3.5

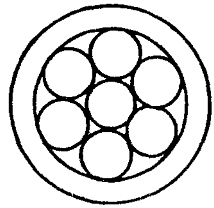

Рис. 3.6

3.198. В плоское кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, вложено семь равных соприкасающихся дисков (рис. 3.6). Площадь кольца равна сумме площадей всех семи дисков. Доказать, что ширина кольца равна радиусу одного диска.

3.199. Два шарика помещены в цилиндрическую банку, диаметр которой 22 см (рис. 3.7). Если влить в банку 5 л воды, то покроются ли полностью водой оба шарика, диаметры которых 10 и 14 см?

3.200. Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым количеством равных кругов, касающихся друг друга и сторон этих фигур. Сколько кругов для этого потребуется, если к стороне треугольника примыкает на 14 кругов больше, чем к стороне квадрата (рис. 3.8)?

3.201. Прибор, применяемый для определения диаметра крупной детали ($D > 2$ м), указывает высоту H сегмента, отсекаемого плоскостью, касательной к шаровым опорам прибора, при постоянном расстоянии $2L$ между центрами опорных шариков прибора (рис. 3.9). Требуется выразить формулой соответствие между искомым диаметром D детали и измеряемой высотой H ее сегмента при постоянных L и d, где d — диаметр каждого из опорных шариков.

3.202. По внутренней области угла 60° прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый

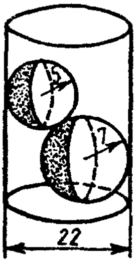

Рис. 3.7

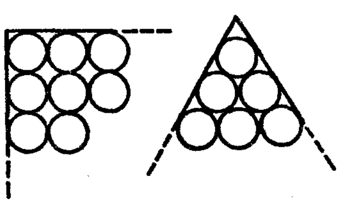

Рис. 3.8

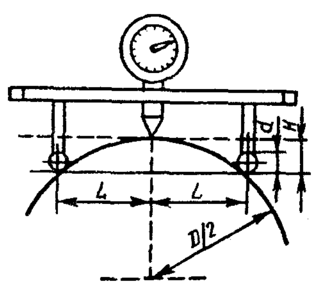

Рис. 3.9

промежуток времени оказалась на расстоянии a от одной стороны угла и на расстоянии b от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если $a<b$.

3.203. Сооружается участок железнодорожной насыпи длиной 100 м, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция с нижним основанием 5 м, верхним основанием, не меньшим 2 м, и углом откоса 45°. Какую высоту h должна иметь эта насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее 400 м^3, но не более 500 м^3?

3.204. В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что бóльшая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда бóльшая шестеренка до полных четырех оборотов не доходит на 20 зубцов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

3.205. Два колеса соединены бесконечным ремнем; меньшее из них делает на 300 оборотов в минуту больше второго. Большое колесо совершает 10 оборотов в промежуток времени, на 1 с больший, чем время такого же числа оборотов меньшего колеса. Сколько оборотов в минуту совершает каждое колесо?

3.206. Две сцепляющиеся шестерни A и B насажены плотно: первая — на вал O_1, а вторая — на вал O_2. Шестерня A имеет на 10 зубцов больше, чем B. При некоторой скорости вращения вала O_1 вал O_2 совершает 63 оборота в минуту. Если шестерни поменять местами, то при той же скорости вала O_1 вал O_2 совершит 28 оборотов. Определить число зубцов каждой шестерни.

3.207. Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Колесо A имеет 12 зубьев, а колесо B — 54. Сколько оборотов сделает каждое колесо до того, как оба они вернутся в исходное положение?

3.208. Модули двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и модуль их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся модули сил.

3.209. Нужно было взять несколько литров жидкости при температуре a и другое количество литров той же жидкости при температуре b, чтобы получить температуру смеси c. Однако второй жидкости было взято столько, сколько предполагалось взять первой, и наоборот. Какая температура смеси получилась?

3.210. Спортсмен стреляет в мишень, отстоящую от него на d м. Наблюдатель, находящийся на расстоянии a м от стрелка и b м от мишени, слышит одновременно звук выстрела и звук удара пули в мишень. Найти скорость пули, если скорость звука равна v м/с.

3.211. Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Если два тела начали падать с одной высоты спустя 5 с одно после другого, то через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

3.212. Мяч падает с высоты 2 м 43 см и, ударяясь о землю, отскакивает вновь, поднимаясь всякий раз на 2/3 высоты, с которой он в очередной раз падает. После скольких ударов мяч поднимется на высоту 32 см?

3.213. Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он сделать это до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

Торгово-денежные отношения

3.214. Имеются два одинаковых куска разных тканей. Стоимость всего первого куска на 12 600 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 13 500 руб. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 38 250 руб. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

3.215. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей вместе. Сколько метров ткани было в каждом куске?

3.216. Красный карандаш стоит 27 руб., синий — 23 руб. На покупку карандашей можно затратить не более 940 руб. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на 10. Сколько красных и сколько синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

3.217. Несколько студентов решили купить импортный магнитофон ценой от 170 до 195 долларов. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 доллар больше. Сколько стоил магнитофон?

Соотношения между натуральными числами

3.218. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

3.219. Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке друг относительно друга, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

3.220. Цифры некоторого трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

3.221. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

3.222. Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

3.223. При умножении двух положительных чисел, из которых одно на 75 больше другого, по ошибке получилось произведение на 1000 меньше истинного. Вследствие этого, деля (при проверке) ошибочное произведение на меньший из множителей, получили в частном 227 и в остатке 113. Найти оба числа.

3.224. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

3.225. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если число, составленное из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти это число.

3.226. Результат умножения двух положительных чисел, полученный вычислителем, показался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось 17 и в остатке 8. Тогда вычислитель понял свою ошибку: оказалось, что цифра десятков, записанная им в произведении, больше истинной цифры десятков на 6. Какие числа перемножал вычислитель, если известно, что их разность равна 36?

3.227. Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

3.228. К цифровой записи некоторого задуманного двузначного числа приписали справа это же число и из полученного таким образом числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа; в частном получили половину задуманного числа, а в остатке — задуманное число. Какое число задумано?

3.229. К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число и из полученного таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до 11. Доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

3.230. Найти два двузначных числа A и B по следующим условиям. Если число A написать впереди записи числа B и полученное четырехзначное число разделить на число B, то в частном получится 121. Если же число B написать впереди числа A и полученное четырехзначное число разделить на A, то в частном получится 84 и в остатке 14.

3.231. Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то получатся два равных числа.

3.232. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

3.233. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из полученных таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

3.234. Основание степени увеличили в k раз, а показатель степени уменьшили во столько же раз, в результате чего сама степень не изменилась. Найти основание степени, обладающей таким свойством.

3.235. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше 1/4; если от числителя и знаменателя первоначальной дроби отнять по 3, то значение дроби будет равно 1/12. Найти эту дробь.

Движение: путь, скорость, время

3.236. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определить расстояние от A до B.

3.237. Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из A в B, второй из B в A. Они бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 м от B. Найти длину AB.

3.238. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если первый мотоциклист приходит в B на 3 ч раньше, чем второй в A.

3.239. Из пунктов A и C в пункт B выехали одновременно два всадника и, несмотря на то, что C отстоял от B на 20 км дальше, чем A от B, прибыли в B одновременно. Найти расстояние от C до B, если всадник, выехавший из C, проезжал каждый километр на 1 мин 15 с скорее, чем всадник, выехавший из A, который приехал в B через 5 ч.

3.240. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выходят одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

3.241. Один турист вышел в 6 ч, а второй — навстречу ему в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

3.242. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через 2 ч после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

3.243. Автомобиль, пройдя путь от A до B, равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь от A до B. Найти первоначальную скорость автомобиля.

3.244. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

3.245. По шоссе от завода C до станции B железной дороги на 28 км дальше, чем до станции A той же дороги. Расстояние от A до B через C на 2 км больше, чем длина участка AB железной дороги. Доставка тонны груза из C в A стоит 130 тыс. руб., а по железной дороге из A в B — 260 тыс. руб. Перевозка тонны груза на 1 км автотранспортом стоит на 32 тыс. руб. дороже, чем по железной дороге. Определить расстояния AC, BC, AB.

3.246. Учебный самолет летел со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

3.247. Юноша возвращался домой из отпуска на велосипеде. Сначала на несколько километров пути он потратил на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальной путь так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на h км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, превысив ее лишь один раз — в последний день пути — на $2h$ км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой?

3.248. В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю на всю дистанцию потребовалось на 1 мин больше, чем первому. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на 1/6 дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию меньше, чем за 10 мин?

3.249. *От пункта A вдоль шоссе удаляется гонщик, поддерживающий* все время постоянную скорость a км/ч. Спустя 30 мин из того же пункта стартовал второй гонщик с постоянной скоростью $1{,}25a$ км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик, если известно, что он развил скорость $1{,}5a$ км/ч и одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

3.250. В полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

3.251. С одного старта в одном и том же направлении одновременно начали гонки два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой — со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти его скорость, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

3.252. Два велосипедиста стартовали одновременно из одного и того же места в одном направлении. Следом за ними, через 10 мин с того же места начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 мин, пока догнал второго. Начиная от самого старта и до конца пути каждый велосипедист шел с постоянной скоростью: a км/ч — первый велосипедист, b км/ч — второй. Найти скорость третьего велосипедиста.

3.253. Дорога от почты A до поселка B идет сначала в гору на протяжении 2 км, потом по ровному месту 4 км и затем под гору 3 км. Почтальон проходит от A до B за 2 ч 16 мин, а обратно — за 2 ч 24 мин. Если бы конечный пункт его пути был расположен по той же дороге, но вдвое ближе к A, то на весь путь туда и обратно почтальону было бы достаточно 2 ч 19 мин. Сколько километров в час проходит почтальон, когда он идет: а) в гору; б) по ровному месту; в) под гору?

3.254. Расстояние между городом A и станцией F по железной дороге равно 185 км. Пригородный электропоезд идет от A первые 40 км в гору, следующие 105 км по ровному месту и остальные 40 км снова в гору. В гору поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции B, C, D и E на расстояниях 20, 70, 100 и 161 км от A, и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в B, C, D и E, если известно, что он вышел из A в 8 ч и пришел в F в 10 ч 22 мин того же дня.

3.255. Юноша пошел к железнодорожной станции, до которой от его дома было 10,5 км. Через полчаса из того же дома вслед за юношей по той же дороге вышел его брат, который, идя со скоростью 4 км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и пошел с прежней скоростью. С какой скоростью шел юноша, если известно, что шел он всю дорогу равномерно, а его брат вернулся домой в тот момент, когда юноша подошел к станции?

3.256. Турист возвращался из отпуска на велосипеде. На первом участке пути, составляющем 246 км, он проезжал в среднем за каждый день на 15 км меньше, чем проезжал за каждый день на последнем участке пути, составляющем 276 км. Он прибыл домой точно в срок — к концу последнего дня отпуска. Известно также, что на преодоление первого участка пути ему потребовалось на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. За сколько дней до конца отпуска отправился турист домой?

3.257. Расстояние между пунктами A и B равно 308 м. Из A по направлению к B движется точка, которая в первую секунду проходит 15 м, а в каждую следующую секунду на 1 м меньше. Из B в противоположном направлении движется точка, которая в первую секунду проходит 20 м, а в каждую следующую на 3 м больше. На каком расстоянии от A произойдет встреча, если точка, вышедшая из B, начала двигаться на 3 с позже точки, вышедшей из пункта A?

3.258. Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил

6 ч. В другой раз рыбак воспользовался моторной лодкой, увеличив тем самым собственную скорость передвижения относительно воды втрое, и дошел от A до B за 45 мин. Требуется определить скорость течения, считая ее постоянной.

3.259. На реке, скорость течения которой 5 км/ч, в направлении ее течения расположены пристани A, B и C, причем B находится посередине между A и C. От пристани B одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани C, и катер, который идет к пристани A, причем скорость катера в стоячей воде равна v км/ч. Дойдя до пристани A, катер разворачивается и движется по направлению к пристани C. Найти все те значения v, при которых катер приходит в C позже, чем плот.

3.260. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

3.261. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы пройти с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

3.262. Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью a м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, он прошел со средней скоростью b м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника по всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.

3.263. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого — в 7 м от конца дорожки. Найти скорость третьего пловца.

3.264. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомашины. Они прибывают в B одновременно, затем выезжают в пункт C, находящийся на расстоянии 120 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Определить скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.

3.265. Два автомобилиста встретились на полпути между городами A и B. При встрече выяснилось, что первый из A выехал раньше, чем второй из B, на столько часов, сколько составит половина того времени (также в часах), которое прошло бы до их встречи при одновременном выезде из тех же пунктов, по той же дороге, с теми же скоростями, постоянными на всем пути. Во сколько раз второй автомобилист ехал быстрее первого?

3.266. Навстречу движущемуся трамваю шла девушка — знакомая юноши, сидевшего у окна трамвая. Через 8 с после того, как она поравнялась с окном, юноша вышел из трамвая и пошел следом за ней. Сколько прошло времени с этого момента до того, как он догнал девушку? Скорость юноши в 2 раза больше скорости девушки и в 5 раз меньше скорости трамвая.

3.267. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник, а после того как второе судно прошло 80 км — прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Найти расстояние между судами в начальный момент времени.

3.268. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся до B путь проходил со скоростью, на 4 км/ч большей, чем прежняя. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся до B путь был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

3.269. Пароход через 2 ч после отправления от пристани A останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной 0,8 первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани B на 3,5 ч. Если бы остановка произошла на 180 км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найти расстояние AB.

3.270. Для того чтобы подняться на обычном лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 м) при двух 6-секундных промежуточных остановках, нужно затратить столько же времени, сколько его потребуется, чтобы подняться на лифте высотного здания при одной 7-секундной промежуточной остановке на 20-й этаж (высота 81 м). Определить подъемную скорость лифта в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 м/с, но не достигает 5 м/с.

3.271. В Одессу должны прибыть два теплохода с разрывом в 1 ч. Оба теплохода идут с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на t_1 мин, а второй на t_2 мин. Получив по радио указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана одновременно увеличили скорости теплоходов: первый — на v_1 км/ч, второй — на v_2 км/ч, в результате чего оба теплохода прибыли в Одессу точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радио?

3.272. По графику поезд проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если в конечный пункт этого перегона поезд снова прибыл по расписанию?

3.273. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задержался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил скорость на 1 км/ч и встреча произошла на расстоянии 4 км от того места, где задержался первый. Найти скорости пешеходов.

3.274. На участке шоссе протяженностью 10 км, лишенном перекрестков, автобус останавливается только для входа и выхода пассажиров. Всего он делает 6 промежуточных остановок, затрачивая на каждую из них по 1 мин, а движется всегда с одной и той же скоростью. Если бы автобус двигался без остановок, то тот же путь он прошел бы со скоростью, превышающей среднюю скорость своего движения с остановками на 5 км/ч. Сколько минут автобус находится в движении на этом участке шоссе?

3.275. Через 2 ч после отправления поезд остановился на 30 мин. На оставшемся до станции участке пути производились ремонтные работы и поезду была разрешена скорость, составляющая 1/3 первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию с опозданием на 1 ч 10 мин. На другой день остановка поезда произошла на 14 км ближе к конечной станции и при тех же условиях опоздание сократилось до 50 мин. Определить расстояние между станциями и скорость поезда.

3.276. Длина круговой дорожки ипподрома равна b км. Из двух наездников A и B, начавших скачки одновременно, наездник A прибыл к финишу на 2 мин раньше. В другой раз наездник B увеличил скорость на c км/ч, в то время как наездник A уменьшил скорость на c км/ч и потому B прибыл к финишу на 2 мин раньше, чем A. Найти скорости наездников в первом заезде.

3.277. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

3.278. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать на два оборота в минуту больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить величину угла между лучами через 1 с.

3.279. Меньшая дуга между точками A и B, находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 14 с. Определить скорости движения точек и длину окружности, если известно, что точка A может обежать всю окружность в то время, как B пройдет только 90 м.

3.280. Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые снова совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

3.281. Предполагая, что стрелки часов движутся без скачков, установить, через сколько минут после того, как часы показывали 8 ч, минутная стрелка догонит часовую.

3.282. От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся от пляжа, и успел пройти еще 9/28 км от места первой встречи с автобусом, как его догнал тот же автобус, который дошел до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что они постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

3.283. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них первую половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч и пришел в поселок на 1 мин раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

3.284. Дежурный монтер спустился по движущемуся вниз эскалатору метро. Весь его путь от верхней площадки до нижней продолжался 24 с. Затем он поднялся и в том же темпе снова спустился вниз, но теперь уже по неподвижному эскалатору. Известно, что спуск продолжался 42 с. За сколько секунд спустился бы человек по движущемуся вниз эскалатору, стоя на ступеньке?

3.285. Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Затем он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил не больше времени, чем на путь от A до B?

Работа

3.286. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительность этих механизмов не одинакова и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однажды совместная работа двух мехаанизмов продолжалась только 6 ч, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно с присущей ему производительностью?

3.287. Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. Можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько было работающих станков?

3.288. Некоторый заказ выполняют в мастерской № 1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской № 2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской № 3. Если при тех же условиях работы мастерские № 1 и № 2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения окажется таким же, как в одной мастерской № 3. На сколько часов больше или меньше одного семичасового рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской № 3?

3.289. Рукопись в 80 страниц отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет перепечатывать рукопись через 3 ч после второй, то каждая из них перепечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся неперепечатанными 15 страниц. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

3.290. Двум рабочим было поручено задание, второй рабочий приступил к нему на 1 ч позже первого. Через 3 ч после того, как первый приступил к заданию, им осталось выполнить 9/20 всего задания. По окончании работы выяснилось, что каждый выполнил половину всего задания. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить все задание?

3.291. Два цеха молокозавода совместно должны обработать поровну определенное количество литров молока. Второй цех приступил к выполнению задания на a рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на m л молока больше, чем первый. Прошло еще $5a/9$ рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполненной $1/3$ всего задания. Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения задания, если работа была окончена одновременно и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

3.292. Если выполнение заказа по набору нескольких книг возложить на одного из трех наборщиков, то первый справится с работой на 10 ч быстрее, а третий — на 6 ч быстрее, чем второй. Если же одну из заказанных книг будет набирать первый наборщик, а другую книгу одновременно будет набирать второй, то за 9 ч они наберут столько страниц, сколько за 10 ч наберут второй и третий, работая вместе при тех же условиях. Сколько времени потребуется каждому наборщику для набора всех заказанных книг при раздельной работе?

3.293. Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 5 дней. В действительности же оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем первый прорыл $1/3$, а второй — остальные $2/3$ его длины. На выполнение всей работы ушло при этом 10 дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

3.294. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй $0{,}6a$ ч, оказалось, что они выполнили $5/n$ всей работы. Проработав совместно еще $0{,}6a$ ч, они установили, что им осталось изготовить еще $1/n$ всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n натуральное; найти его.

3.295. При разгрузке баржи сначала 2 ч действовали четыре подъемных крана одинаковой мощности. Затем добавочно ввели в действие еще два крана меньшей, но одинаковой мощности. После этого для окончания разгрузки потребовалось еще 3 ч. Если бы все эти краны начали работать одновременно, то разгрузка была бы произведена за 4,5 ч. Если бы один кран большей и один кран меньшей мощности работали совместно, то за какое время они разгрузили бы баржу?

3.296. Два экскаваторщика должны выполнить некоторое задание. После того как первый проработал 15 ч, начинает работать второй и заканчивает это задание за 10 ч. Если он при раздельной работе первый выполнил $1/6$, а второй — $1/4$ всего задания, то для его окончания потребовалось бы еще 7 ч их совместной работы. За сколько часов может выполнить задание каждый экскаваторщик в отдельности?

3.297. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна — равномерно подающая, другая — равномерно отводящая воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $1/3$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

3.298. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30 $м^3$ больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч

40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

3.299. Для гидродинамических исследований изготовлена небольшая модель канала. К этой модели подведено несколько труб одинакового сечения, вводящих воду, и несколько труб другого, но тоже одинакового сечения, предназначенных для удаления воды. Если сразу открыть четыре вводящие и три выводящие трубы, то через 5 ч в модели прибавится 1000 м^3 воды. Если одновременно открыть на 2 ч две вводящие и две выводящие трубы, то увеличение объема воды составит 180 м^3. Сколько воды пропускает за час одна вводящая и сколько пропускает одна выводящая труба?

3.300. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение 1/4 времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение 1/4 времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить 11/24 полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Смеси, сплавы

3.301. Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

3.302. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

3.303. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1:2, в другом — 2:3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7:12?

3.304. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля?

3.305. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

3.306. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

3.307. Некоторый сплав содержит металлы A и B в отношении $m:n$, другой — те же металлы в отношении $p:q$. Какие количества первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов A и B?

3.308. Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

3.309. Примеси составляют 20% от общего объема раствора. Каково наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%, если каждый фильтр поглощает 80% примесей? (Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

3.310. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

Группа B

3.311. Электронная вычислительная машина получила задание решить последовательно несколько задач. Регистрируя время выполнения задания, заметили, что на решение каждой следующей задачи машина затрачивала в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач и сколько времени затрачено машиной на решение всех задач, если на решение всех задач, кроме первой, затрачено 63,5 мин, на решение всех задач, кроме последней, затрачено 127 мин, а на решение всех задач, кроме двух первых и двух последних, затрачено 30 мин?

3.312. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи оказались имеющими одинаковую длину, а через 2 ч после этого одинаковую длину стали иметь первая и вторая свечи. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?

3.313. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти массу частей, на которые был разбит бриллиант (1 карат $=0{,}2$ г). Доказать, что наибольшая потеря в стоимости бриллианта происходит в том случае, когда обе его части равны по массе.

3.314. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей вместимостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то вместимость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то вместимость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить вместимость всех бочек каждого образца в отдельности.

3.315. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в 3 раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

3.316. Имеется n мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $1/n$ имеющейся там жидкости во вторую мензурку, затем из второй мензурки $1/n$ оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т. д. Наконец, из n-й мензурки перелили $1/n$ оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После этого в каждой мензурке оказалось по a см^3 жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждой мензурке?

3.317. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми по массе порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми по массе, но иными, чем первый магазин, порциями. Через b дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно и масса арбузов, полученных первым магазином, равна массе арбузов, полученных вторым магазином?

3.318. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ раствора в пробирку, а раствор, оставшийся в колбе, выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое. После этого вливают в колбу раствор из пробирки. В результате содержание соли в растворе повысилось на p% по сравнению с первоначальным. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе. Какую часть первоначального раствора следовало отлить, чтобы в результате описанной процедуры процентное содержание соли увеличилось в 1,5 раза?

3.319. Известно, что разность переменных величин y и z пропорциональна величине x, а разность величин z и x пропорциональна величине y. Коэффициенты этих пропорциональностей равны соответственно k_1 и k_2. Некоторое значение величины z в 3 раза больше разности соответствующих значений x и y. Доказать, что если каждый из коэффициентов k_1 и k_2 увеличить на 3, то произведение полученных чисел будет равно числу 8 (предполагается, что величины x и y не принимают нулевых значений).

3.320. Если искомое двузначное число увеличить на 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найти это число при условии, что сумма его цифр равна 14.

3.321. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25% от частного?

3.322. Доказать, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

3.323. Искомое число больше 400 и меньше 500. Найти его, если сумма его цифр равна 9 и оно равно 47/36 числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке.

3.324. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

3.325. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве первой цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет меньше искомого на $10a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$. Найти это число.

3.326. Разность логарифмов цифр сотен и десятков трехзначного числа равна логарифму разности тех же цифр, а сумма логарифмов цифр сотен и десятков равна логарифму суммы тех же цифр, увеличенной в 4/3 раза. Если из этого трехзначного числа вычесть число, имеющее обратный порядок цифр, то их разность будет равна положительному числу, у которого цифра сотен совпадает с цифрой десятков данного числа. Найти это число.

3.327. Искомое трехзначное число начинается с цифры 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве последней цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет больше искомого на $9a^{1/\lg a}$. Найти число.

3.328. В былое время комиссионный магазин как-то принял для продажи фотоаппараты, часы, авторучки и радиоприемники на сумму 240 руб. Сумма цен приемника и одних часов на 4 руб. больше суммы цен фотоаппарата и авторучки, а сумма цен одних часов и авторучки на 24 руб. меньше суммы цен фотоаппарата и приемника. Цена авторучки равна целому числу рублей, не превосходящему 6. Количество принятых фотоаппаратов равно цене одного фотоаппарата в рублях, деленной на 10; количество принятых часов равно числу приемников, а также числу фотоаппаратов. Количество авторучек в 3 раза больше числа фотоаппаратов. Сколько всего предметов указанных наименований было принято магазином?

3.329. В магазин поступил товар 1-го и 2-го сортов на общую сумму в 450 млн. руб. Дополнительная экспертиза установила, что весь поступивший товар можно продавать только по цене 2-го сорта, в результате чего фирма потерпела бы убыток в сумме 50 млн. руб. Продавцы магазина безвозмездно не только устранили дефекты в товаре 1-го сорта, но и товар 2-го сорта довели до кондиции 1-го сорта. Получив после этого разрешение продавать весь товар по цене 1-го сорта, магазин дал фирме прибыль в сумме 30 млн. руб. В какую сумму оценивался первоначально весь товар 1-го сорта и весь товар 2-го сорта отдельно?

3.330. Куплено несколько килограммов товара двух сортов: 1-го сорта на 4500 руб. и 2-го на 2000 руб., причем 1-го сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость 1 кг товара 1-го сорта на $100a$ руб. выше стоимости 1 кг товара 2-го сорта. Сколько килограммов товара каждого сорта куплено? Определить число решений в зависимости от возможных значений a.

3.331. Уголь, добываемый в пункте A, продается по q руб. за тонну, а добываемый в пункте B — на p% дороже. Пункты A и B соединяет дорога длиной s км. В какой зоне этой дороги AB расположены потребители угля, для которых закупка и доставка угля из B обходится дешевле, чем из A, если перевозка 1 т угля на расстояние 1 км обходится в r руб.? В каком месте дороги AB расположено предприятие, расходы которого на потребление угля не зависят от выбора пункта A или B? Исследовать возможные случаи.

3.332. Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a руб. за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене $1{,}5a$ руб. за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный им лед, начисляя за перевозку по p руб. за тонно-километр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет $m/1000$ его начальной массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, и каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C. Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно s км?

3.333. Из двух пунктов A и B одновременно выехали два инспектора к месту происшествия, в пункт C. Первый инспектор примчался в C через a мин. Если второй инспектор будет стремиться попасть из B в C одновременно с первым, то ему придется на проезд каждого километра затрачивать на c мин меньше, чем первому, так как расстояние от B до C на b км больше расстояния от A до C. На каком расстоянии от пункта A случилось происшествие?

3.334. Из одного и того же пункта одновременно в одном направлении по прямолинейному участку шоссе с постоянными, но различными скоростями вышли два пешехода. Через 2 ч расстояние между ними было s км. После этого пешеходы стали идти быстрее и затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равным $3s$ км. Найти расстояния, пройденные пешеходами за первые два часа движения.

3.335. Три мотоциклиста проезжают с постоянными, но различными скоростями один и тот же участок AB дороги. Сначала пункт A проехал первый мотоциклист, а 5 с спустя в том же направлении — второй и третий. Через некоторое время первого мотоциклиста обогнал третий, а еще через 10 с его обогнал и второй. За какое время первый мотоциклист проедет расстояние AB, если второй проехал это расстояние за 1 мин, а третий — за 40 с?

3.336. К берегу водохранилища подошли трое: A, B и C; A отправился на противоположный берег вплавь со скоростью v км/ч; одновременно B и C отправились на моторной лодке со скоростью $10v$ км/ч. Через некоторое время C решил остаток пути преодолеть вплавь и поплыл с той же скоростью, что и A. В тот же момент B повернул назад, чтобы взять в лодку A, который быстро садится в нее и продолжает путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить время переправы, если известно, что ширина водохранилища равна b км (скорость течения предполагается равной нулю).

3.337. Между пунктами A и B, удаленными друг от друга на 3,01 м, совершает колебательное движение материальная частица m_1. Скорость ее постоянна по величине, и на конечных пунктах она не задерживается. Через 11 с после выхода частицы m_1 из пункта A другая частица m_2 начинает двигаться из пункта B также с постоянной, но меньшей скоростью. Эта частица, двигаясь в направлении пункта A, дважды встречается с частицей m_1, а именно через 10 и 45 с после выхода второй частицы. Определить скорости частиц.

3.338. Из Москвы в город N пассажир может отправиться поездом. В этом случае он пробудет в пути 20 ч. Если же он дождется отправления самолета (а ждать придется более 5 ч после отправления поезда), то пассажир доберется до города N через 10 ч, включая и время ожидания. Протяженности трассы самолета и железнодорожного пути одинаковы. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда, если известно, что самолет окажется над этим поездом через 8/9 ч после отправления из аэропорта и пролетит к этому моменту столько же километров, сколько пройдет поезд?

3.339. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на a с меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b с. Через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями?

3.340. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через a с — второй, еще через a с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в s м от конца дорожки, а первого — в r м от конца дорожки. Найти скорости первого и третьего пловцов и установить связь в виде неравенств между параметрами r и s так, чтобы задача имела решение.

3.341. Из аэропорта к центру города вышел автомобиль, одновременно из центра города в аэропорт вышел автобус-экспресс. Когда первый прошел половину пути, второму осталось до конца маршрута 19,2 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось до конца маршрута 12 км. Сколько километров остается пройти автобусу после того, как автомобиль закончит свой маршрут? Предполагается, что скорости автомобиля и автобуса постоянны на всем пути.

3.342. Расстояние между двумя точками равно d. Под действием некоторых сил обе точки начинают равномерное движение навстречу друг другу. Чтобы они встретились на середине пути, первой точке нужно начать движение на t единиц времени раньше второй. Если же точки начнут сближение одновременно, то через T единиц времени расстояние между ними составит k-ю часть ($k>1$) первоначального расстояния. Найти скорости движения точек.

3.343. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Сначала они собирались идти на стадион пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться своим велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним — пешком. Проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, поедет на нем дальше и догонит первого у входа на стадион. Сколько времени выигрывают братья при этом по сравнению с первоначальным намерением идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевает каждый километр на 12 мин быстрее, чем пешком?

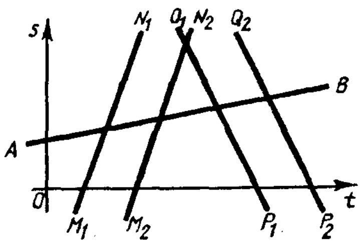

Рис. 3.10

3.344. Спортсмен, тренируясь в быстрой ходьбе вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет троллейбус, и каждые 3 мин проходит встречный троллейбус. Требуется найти, через какие промежутки времени отправляются троллейбусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее троллейбуса шел спортсмен, если допустить, что в обе стороны троллейбусы отправляются через одинаковые промежутки времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью. Спортсмен также идет без остановок с постоянной скоростью (рис. 3.10, где AB — график движения спортсмена, прямые $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ и $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$ — графики движения каких-либо последовательно идущих один за другим троллейбусов попутно спортсмену и навстречу ему).

3.345. По расписанию учебно-тренировочных занятий сначала из пункта A должен выехать один связист, а через 6 ч — второй связист с такой скоростью, чтобы нагнать первого в 180 км от пункта A. Однако в момент отправления первый связист получил распоряжение ехать со скоростью, на a км/ч большей, чем намечалось первоначально. Второму же связисту не разрешалось увеличивать скорость, намеченную расписанием, поэтому, чтобы точно выполнить задание, ему пришлось выехать из пункта A на 3 ч раньше, чем намечалось. Сколько времени будет в пути каждый связист? Доказать, что задача имеет смысл только при $a<30$.

3.346. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий «Москвич», в 30 км от базы — между этой базой и домом своего приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец «Москвича» поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца «Москвича», то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля? Скорости движения пешехода и автомашины считать постоянными.

3.347. На шоссе последовательно расположены пункты D, A, C и B. Из A и B одновременно выехали мотоциклист и велосипедист в пункты C и D соответственно. Встретившись в E, они обменялись машинами и каждый продолжал свой путь. В результате первый затратил на поездку от A до C 6 ч, а второй затратил на поездку от B до D 12 ч. Определить длину пути AB, если известно, что каждый едущий на мотоцикле развивает скорость 60 км/ч, а на велосипеде — 25 км/ч, и, кроме того, средняя скорость движения первого на пути AC равна средней скорости движения второго на пути BD.

3.348. К цветущей яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле — расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полета — взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам и путь шмеля, и путь пчелы. Найти формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелем и пчелой от времени x их полета. Установить момент, когда в полете шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения. Исследовать, пролетит ли пчела или шмель точку пересечения их траекторий к моменту, когда будет достигнуто наименьшее расстояние между шмелем и пчелой.

3.349. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A с различными (но для каждого постоянными) скоростями и едут к пункту B. Достигнув его, они тотчас же едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встретил второго на расстоянии a км от B; затем, достигнув A, едет снова по направлению к B, и, пройдя k-ю часть пути AB, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из B. Найти расстояние от A до B.

3.350. Со станции A отошли два электропоезда с интервалом в 12 мин и практически сразу развили одинаковую скорость 50 км/ч. Они едут в одном направлении без остановок, сохраняя указанную скорость неизменной. С какой постоянной скоростью шел встречный поезд, если он повстречал эти электропоезда через 5 мин один после другого?

3.351. Два поезда длиной в 490 и 210 м равномерно движутся навстречу друг другу по параллельным путям. Машинист одного из них заметил встречный состав на расстоянии 700 м; после этого через 28 с поезда встретились. Определить скорость каждого поезда, если известно, что один из них проезжает мимо светофора на 35 с дольше другого.

3.352. Кортеж автомобилей с космонавтами равномерно движется по проспекту со скоростью v км/ч. Протяженность кортежа постоянно сохраняется равной m м. Букет цветов, брошенный из окна дома, попал в коляску мотоциклиста, ехавшего сзади кортежа. Мотоциклист проехал вперед, передал букет космонавту, находившемуся в первом автомобиле, и тотчас отправился обратно. На проезд туда и обратно вдоль движущегося кортежа мотоциклисту потребовалось t мин. Вычислить скорость мотоциклиста, если она на всем пути была одинакова.

3.353. На соревнованиях авиамоделей с моторчиками лучшими оказались две модели. При встречном ветре первая модель продержалась в воздухе на m мин меньше второй, но пролетела на h м дальше. Скорость ветра равна c м/мин, но на продолжительность полета модели ветер не влияет, от ветра зависит только дальность полета. Предполагается, что собственная скорость каждой модели все время постоянна. Какая из этих моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде?

3.354. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

3.355. Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй — 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

3.356. Сначала катер шел a км по озеру, а затем половину этого расстояния по реке, впадающей в озеро. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна c км/ч.

3.357. На участке реки от A до B течение так невелико, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение оказывает заметное влияние на движение лодки. Лодка покрывает расстояние вниз от A до C за 6 ч, а вверх от C до A за 7 ч. Если бы на участке от A до B течение было бы таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 ч. Сколько времени в этом случае понадобилось бы той же лодке на движение вверх от C до A? Собственная скорость лодки принимается неизменной во всех случаях.

3.358. На расстоянии l м от моста A вниз по течению реки расположен мост B. Когда спортсмен проплывал мимо моста A, направляясь к мосту B, ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, снова повернул по направлению к мосту B и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k раз больше скорости течения?

3.359. Несколько рабочих выполняют задание за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал бы в день на 1 ч дольше, это же задание было бы выполнено за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше и каждый работал бы еще на 1 ч в день дольше, задание было бы выполнено за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

3.360. В бригаде землекопов каждый работает ежедневно по одинаковому числу часов. Известно, что производительность труда одинакова у всех рабочих бригады и при этом бригада может вырыть канаву для укладки кабеля за 6 дней. Однако еще до начала работы выяснилось, что рабочий день сокращается на 1 ч, а состав бригады уменьшается на 5 человек. В таком случае канава может быть вырыта за 9 дней. В действительности эту канаву рыли 12 дней, так как рабочий день был сокращен не на 1 ч, а на 2 ч и два человека не вышли на работу по болезни. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и сколько часов в день они работали?

3.361. Три машины производят некоторую работу. Если эту работу будет выполнять одна первая, то она кончит работу на a дней позже, чем при работе всех машин вместе. Если же эту работу будет выполнять вторая, то она кончит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третья, то ей потребуется в c раз больше времени, чем всем машинам вместе. За сколько дней выполняет работу каждая из них в отдельности?

3.362. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только I станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на II и III станках; затем действовал только II станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на I и III станках. Остальная часть партии деталей была обработана на III станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на I и II станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно все три станка?

3.363. Для наполнения водой бассейна были поставлены два насоса. Один первый насос может наполнить бассейн на 8 ч скорее, чем один второй. Сначала был открыт только один второй насос на время, равное удвоенному количеству времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна при одновременном действии обоих насосов. Затем открыли также первый насос и через 1,5 ч после того, как был открыт первый насос, бассейн наполнился водой. За сколько часов каждый из насосов, работая порознь, может наполнить бассейн?

3.364. Пройдя через пористый фильтрующий материал, жидкость равномерной струей вливается в 40-ведерную бочку и может выливаться через кран, имеющийся в дне бочки. Если этот кран открыт, то приток и отток жидкости таковы, что за каждые 4 мин в бочке убавляется одно ведро. За какое время отфильтрованная жидкость наполнит пустую бочку при закрытом нижнем кране, если известно, что для этого потребуется на 3 мин меньше того времени, за которое открытый нижний кран способен пропустить 66 ведер?

3.365. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго — часть, вдвое большую по массе, чем от первого. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

3.366. От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого?

3.367. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если от этого сплава отделить 20 г и сплавить их с 2 г олова, то во вновь получившемся сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава 30 г и прибавить 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Определить в процентах состав первоначального сплава.

3.368. Смешав по 2 $см^3$ трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимают объем, на 0,5 $см^3$ больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого.

3.369. Даны две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, а также точка A $(a; a)$, где $a>0$. Требуется найти координаты такой точки M на оси Ox и такой точки P на оси Oy, чтобы треугольник AMP был равносторонним.

3.370. Сравнивая два бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, установили, что длина, ширина и высота второго бруска соответственно на 1 см больше, чем у первого бруска, а объем и полная поверхность второго бруска соответственно на 18 $см^3$ и 30 $см^2$ больше, чем у первого. Какова величина полной поверхности первого бруска?

3.371. Вместимости трех сосудов A, B, C, каждый из которых имеет форму куба, относятся как $1:8:27$, а объемы налитой в них воды — как $1:2:3$. После переливания части воды из сосуда A в сосуд B и из сосуда B в сосуд C во всех трех сосудах получили слой воды одинаковой глубины. Затем перелили $128\frac{4}{7}$ л воды из сосуда C в сосуд B, а после этого из сосуда B в сосуд A столько, что глубина воды в сосуде A стала вдвое больше, чем в сосуде B. При этом оказалось что в сосуде A имеется теперь на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

3.372. Зная длины сторон треугольника, ученик выразил его площадь и обратил внимание на то, что значениями длин сторон и площади этого треугольника являются соответственно четыре последовательных целых числа. Каковы длины сторон треугольника?

3.373. На столе стоит цилиндрическая банка с водой. Радиус основания банки равен R. Если в банку опустить шарик радиуса r, то он ляжет на дно банки, а поверхность воды при этом поднимется настолько, что окажется касательной к шарику. Доказать, что произойдет то же самое, если в эту банку с тем же количеством воды опустить вместо данного шарика шарик другого радиуса. Найти радиус нового шарика и установить условия, при которых он будет больше или меньше радиуса данного шарика.

3.374. На сторонах равностороннего треугольника ABC между его вершинами расположены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AA_1=BB_1=CC_1=x$. Сторона треугольника равна a. Найти такое значение x, при котором отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC было бы равно данному положительному числу m. В каких пределах можно изменять величину m, чтобы выполнялось условие задачи?

3.375. Точка P расположена на диаметре окружности радиуса R между концами диаметра AB. Из этой точки P движутся три единичные массы по направлениям отрезков PA, PB и PC так, что PC — полухорда, перпендикулярная диаметру AB. На каком расстоянии от A находится точка P, если известно, что скорости движения постоянны и за единицу времени первая масса достигла точки A, вторая — точки B, а третья — точки C? При этом кинетическая энергия ($mv^2/2$) в сумме составляет a^2 единиц. В каких пределах можно изменять величину a^2, чтобы выполнялось условие задачи?

3.376. Самоходный каток, употребляемый для ремонта дорог, в состоянии укатывать полосу шириной 0,85 м, причем каждая следующая полоса перекрывает предыдущую на 1/4 ее ширины. С какой скоростью должен двигаться этот каток, чтобы за время, не большее 6 ч и не меньшее 5 ч, можно было дважды провести укатку участка шоссе длиной 750 м и шириной 6,5 м?

3.377. Вдоль сторон прямого угла по направлению к вершине движутся два шара с радиусами 2 и 3 см, причем центры этих шаров перемещаются по сторонам угла с неравными, но постоянными скоростями. В некоторый момент времени центр меньшего шара находится на расстоянии 6 см от вершины, а центр большего — на расстоянии 16 см. Через 1 с расстояние между центрами стало 13 см, а еще через 2 с шары ударились, не дойдя до вершины. Найти скорости шаров.

3.378. Две точки A и B, первоначальное расстояние между которыми равно a, одновременно начали двигаться по разным сторонам прямого угла к его вершине с одной и той же постоянной скоростью v. Точка B достигает вершины на t единиц времени раньше, чем точка A (все измерения выполнены в одной системе единиц). Определить, сколько времени двигалась точка A. Какое значение надо придать величине a, чтобы искомое время приняло наименьшее из возможных его значений?

3.379. Три фермы расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой фермы до третьей через вторую вчетверо длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой фермы до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй фермы до третьей через первую равно 85 км. В каком интервале находятся все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение ферм? Вычислить расстояние между фермами при $a=5$.

3.380. Если при начале отсчета времени было m_0 г вещества A и $2m_0$ г вещества B, то через любое число t лет, в результате радиоактивного распада, этих веществ останется соответственно $m=m_0\cdot 2^{-\lambda_1 t}$ и $M=2m_0\cdot 2^{-\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 — постоянные, зависящие от природы веществ. Вычислить период полураспада каждого из этих веществ, т. е. найти, через сколько лет от каждого вещества останется только половина его первоначального количества, если известно, что период полураспада вещества B в 2 раза меньше, чем вещества A, и что через 20 лет общая масса этих веществ уменьшается в 8 раз.

ГЛАВА 4

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

(здесь и в дальнейшем запись $n \in \mathbf{Z}$ означает, что n — любое целое число)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}; \tag{4.3}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{4.6}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{4.7}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \tag{4.8}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{4.9}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{4.10}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.11}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \tag{4.12}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \tag{4.13}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \tag{4.14}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k,\ k \in \mathbf{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{4.15}$$

Формулы половинного аргумента
(для функций sin и cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \tag{4.16}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}; \tag{4.17}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{4.18}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \tag{4.19}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \tag{4.20}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \tag{4.21}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \tag{4.22}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x+y)}{\cos x \cos y},\ x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.23}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x-y)}{\cos x \cos y},\ x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{4.24}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos (x-y) - \cos (x+y)); \tag{4.25}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos (x-y) + \cos (x+y)); \tag{4.26}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin (x-y) + \sin (x+y)). \tag{4.27}$$

Соотношения между $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{4.28}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{4.29}$$

Формулы приведения

	Название функции не изменяется			Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$			$\alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$			$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$			

Пример 1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

□ Применяя последовательно к левой части равенства формулы (4.2), (4.3), (4.1) и (4.13), находим

$$A=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{2}{\sin 4\alpha}+\frac{2}{\sin 12\alpha}=$$

$$=\frac{2(\sin 12\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}.$$

Преобразуя сумму синусов по формуле (4.19), получаем $A=\frac{4\sin 8\alpha\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}$. Так как $\sin 8\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$, то

$$A=\frac{8\sin 4\alpha\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.\ ■$$

Пример 2. Упростить выражение

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

□ К произведению первых двух сомножителей применим формулу (4.27). Тогда получим

$$A=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Снова используя формулу (4.27), находим

$$A=\frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{3\alpha}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}.\ ■$$

Пример 3. Представить в виде произведения

$$A=2\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha-1.$$

□ Согласно формуле (4.14), имеем $2\cos^2 3\alpha-1=\cos 6\alpha$. Следовательно,

$$A=\cos 6\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Так как выражение в скобках — развернутая формула (4.10) для косинуса разности, то $A=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-6\alpha\right)$. ■

Пример 4. Проверить, что $\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\sqrt{3}$.

□ Применив формулы (4.2), (4.13) и (4.19), получим

$$A=\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\frac{\sin 20°+4\sin 20°\cos 20°}{\cos 20°}=\frac{\sin 20°+2\sin 40°}{\cos 20°}=$$

$$=\frac{(\sin 20°+\sin 40°)+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{2\sin 30°\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}.$$

Заменив по формуле приведения $\cos 10°$ на $\sin 80°$ и снова используя формулу (4.19), находим

$$A=\frac{\sin 80°+\sin 40°}{2}=\frac{2\sin 60°\cos 20°}{\cos 20°}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.\ ■$$

Пример 5. Найти значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=1{,}4$.

□ Удобно воспользоваться формулами (4.28) и (4.29), учитывая, что они верны только при $x\neq\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Однако в данном случае x не может принимать эти значения. Действительно, если бы $x=\pi(2n+1)$, то $\sin(\pi(2n+1))-\cos(\pi(2n+1))=0-(-1)\neq 1,4$. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$, перепишем данное равенство в виде

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1,4.$$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, получаем уравнение $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=2$, $z_2=3$. Итак, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. ■

Пример 6. Упростить выражение

$$A=\frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha).$$

□ По формуле приведения имеем $\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos^2 2\alpha$. Преобразуем $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha$ как сумму кубов по формуле (1.13):

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

откуда, учитывая формулы (4.1) и (4.13), находим $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Использовав полученные результаты, перепишем заданное выражение в виде

$$A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

После приведения подобных членов получим $A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$ [на основании тождества (4.14)]. Итак, $A=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ■

Пример 7. Упростив выражение

$$A=\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha},$$

найти его значение, если $\operatorname{tg} 5\alpha=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$.

□ Перегруппируем слагаемые в числителе и знаменателе и воспользуемся формулами (4.19) и (4.21). Тогда получим

$$A=\frac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 10\alpha\,(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha\,(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg} 10\alpha=\frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

[применена формула (4.15)]. Теперь правую часть заданного равенства $\operatorname{tg} 5\alpha=$ $=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ умножим и разделим на $\sin 20^\circ$; трижды применяя формулу (4.13), находим

$$\operatorname{tg} 5\alpha=\frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Следовательно, $A=\dfrac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{64}}=\dfrac{16}{63}$. ■

Пример 8. Доказать, что для любого числа k слагаемых и любого $\alpha\neq 2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$ справедливы равенства:

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};\qquad\text{(а)}$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\qquad\text{(б)}$$

Эти формулы удобно использовать для преобразования суммы косинусов или синусов при большом количестве слагаемых.

□ Пусть $S_k(\alpha)=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos k\alpha$. Умножив обе части этого равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, получим

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Применяя формулу (4.27), имеем

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+$$

$$+\left(\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Замечаем, что первое слагаемое в каждой скобке взаимно уничтожается со вторым слагаемым в следующей скобке. Таким образом, правая часть последнего равенства есть разность $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$. Преобразовав ее по формуле (4.20), получим $2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, откуда следует равенство для $S_k(\alpha)$, т. е. формула (а).

Аналогично доказывается справедливость равенства (б). ■

Замечания. 1. Вместо приведенного способа решения можно применить метод математической индукции.

2. Запоминать полученные формулы нет необходимости, однако показанный здесь прием преобразования тригонометрических выражений может оказаться эффективным в практике решения аналогичных задач.

Группа А

Доказать тождества (**4.001—4.062**):

4.001. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha$.

4.002. $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=1$.

4.003. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)$.

4.004. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}$.

4.005. $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha=4\cos(\alpha/2)\cos(5\alpha/2)\cos4\alpha$.

4.006. $\sin9\alpha+\sin10\alpha+\sin11\alpha+\sin12\alpha=4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(21\alpha/2)$.

4.007. $\cos2\alpha-\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha=-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(7\alpha/2)$.

4.008. $\sin4\alpha-\sin5\alpha-\sin6\alpha+\sin7\alpha=-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(11\alpha/2)$.

4.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$.

4.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha}$.

4.011. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

4.012. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)$.

4.013. $\dfrac{\sin2\alpha-\sin3\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos3\alpha+\cos4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$.

4.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)$.

4.015. $\sin2\alpha(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

4.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

4.017. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

4.018. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$

4.019. $\dfrac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$

4.020. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$

4.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{8\pi}{3}\right)=0.$

4.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

4.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

4.024. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1.$

4.025. $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right).$

4.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ).$

4.027. $\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$

4.028. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

4.029. $2\left(\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$

4.030. $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

4.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$

4.032. $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

4.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$

4.034. $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{2}}.$

4.035. $\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

4.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$

4.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}.$

4.038. $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha}=1.$

4.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha=-1.$

4.040. $\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha-1}=2.$

4.041. $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$

4.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha.$

4.043. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

4.044. $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha.$

4.045. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha}-\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha=\sin 8\alpha.$

4.046. $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha.$

4.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ+2\alpha)=\frac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}.$

4.048. $\frac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}{(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=1.$

4.049. $\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\frac{2}{\sin 2\alpha}.$

4.050. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha.$

4.051. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

4.052. $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}=\frac{3-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1-3\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

4.053. $\sin \alpha \cdot \sin (x-\alpha)+\sin^2\left(\frac{x}{2}-\alpha\right)=\sin^2 \frac{x}{2}$.

4.054. $\cos^2 \alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2 \alpha \cos 2\alpha-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

4.055. $\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)-1=0$.

4.056. $\sin^2 \alpha-\sin^2 \beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

4.057. $\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}\sin^2 2x-1=\sin(y+x)\sin(y-x)$.

4.058. $$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

4.059. $$\frac{\operatorname{tg}(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

4.060. $\operatorname{tg} 4\alpha+\cos^{-1} 4\alpha=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$.

4.061. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha$.

4.062. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

Упростить выражения (4.063—4.113):

4.063. $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

4.064. $$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}+\cos^2\alpha.$$

4.065. $$\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{7\pi}{2}\right)\right)}.$$

4.066. $\dfrac{\sin\left(2\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{8}+\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{4}\right)}$.

4.067. $\cos\alpha\,(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)\,(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$.

4.068. $\sin^2\alpha\,(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\,(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

4.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

4.070. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

4.071. $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right)$.

4.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$.

4.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

4.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

4.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

4.076. $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

4.077. $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\dfrac{11\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

4.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

4.079. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

4.080. $\dfrac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

4.081. $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

4.082. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

4.083. $\dfrac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

4.084. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

4.085. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

4.086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

4.087. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

4.088. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

4.089. $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

4.090. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}$.

4.091. $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

4.092. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/2)-\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\alpha/2)}$.

4.093. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

4.094. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

4.095. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

4.096. $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}.$

4.097. $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha\,(4\sin\alpha+1)}.$

4.098. $\sin\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{8\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right).$

4.099. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-4+4\sin^2\alpha}.$

4.100. $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{17\pi}{8}-\alpha\right).$

4.101. $\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^4\left(\dfrac{9\pi}{4}-2\alpha\right)\right).$

4.102. $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)}{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}.$

4.103. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}.$

4.104. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}.$

4.105. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}.$

4.106. $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}.$

4.107. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}.$

4.108. $\dfrac{4\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

4.109. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

4.110. $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

4.111. $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

4.112. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)}$.

4.113. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Преобразовать в произведение (**4.114—4.147**):

4.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$. **4.115.** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+2$.

4.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha$. **4.117.** $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

4.118. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270^\circ)$. **4.119.** $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)$.

4.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

4.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

4.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$.

4.123. $\sin^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

4.124. $3-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

4.125. $3-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

4.126. $1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+3\alpha\right)$.

4.127. $1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ)$.

4.128. $1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ)$.

4.129. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-1$.

4.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

4.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)$.

4.132. $\frac{\sin\alpha-2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}$.

4.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1$.

4.134. $\frac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}$.

4.135. $-\cos 5\alpha\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

4.136. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

4.137. $\frac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}$.

4.138. $\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

4.139. $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha$.

4.140. $\frac{\sin 13\alpha+\sin 14\alpha+\sin 15\alpha+\sin 16\alpha}{\cos 13\alpha+\cos 14\alpha+\cos 15\alpha+\cos 16\alpha}$.

4.141. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$.

4.142. $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

4.143. $\cos 5\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 12\alpha$.

4.144. $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

4.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha},\ 0<\alpha<\pi/2$.

4.146. $1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha$.

4.147. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha$.

Доказать справедливость равенств (4.148—4.152):

4.148. $(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+$
$+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 130°-\sin 110°)=1$.

4.149. $(\cos 34°)^{-1}+(\operatorname{tg} 56°)^{-1}=\operatorname{ctg} 28°$.

4.150. $\frac{\cos 28°\cos 56°}{\sin 2°}+\frac{\cos 2°\cos 4°}{\sin 28°}=\frac{\sqrt{3}\sin 38°}{4\sin 2°\sin 28°}$.

4.151. $1-2\sin 50°=0{,}5\cos^{-1}160°$.

4.152. $(\cos 70°+\cos 50°)(\cos 310°+\cos 290°)+$
$+(\cos 40°+\cos 160°)(\cos 320°-\cos 380°)=1$.

Вычислить (4.153—4.166):

4.153. $\sin^2(\pi/8)+\cos^2(3\pi/8)+\sin^2(5\pi/8)+\cos^2(7\pi/8)$.

4.154. $\operatorname{tg} 435°+\operatorname{tg} 375°$.

4.155. $\operatorname{tg} 255°-\operatorname{tg} 195°$.

4.156. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

4.157. $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

4.158. $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

4.159. $\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

4.160. $\frac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

4.161. $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

4.162. $\sin\alpha$, если $\sin(\alpha/2)+\cos(\alpha/2)=1{,}4$.

4.163. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=p$.

4.164. $2-13\cos 2\alpha+\sin^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-1/5$.

4.165. $1+5\sin 2\alpha-3\cos^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

4.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{9}{11}$.

4.167. Найти число $\alpha\in(\pi/2,\ \pi)$, если известно, что $\operatorname{tg}2\alpha=-12/5$.

4.168. Доказать, что если A и B — острые углы некоторого прямоугольного треугольника, то $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A\sin B$.

4.169. Найти число β $(\pi/2<\beta<\pi)$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=9/19$ и $\operatorname{tg}\alpha=-4$.

4.170. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=1/2$.

4.171. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=3/4$, $\operatorname{ctg}\beta=1/7$, $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$. Найти $\alpha+\beta$.

4.172. Найти $\operatorname{ctg}2\alpha$, если известно, что $\sin(\alpha-90^\circ)=-2/3$ и $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

4.173. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$ и $\cos\alpha=7/\sqrt{50}$, $\operatorname{tg}\beta=1/3$, то $\alpha+2\beta=\pi/4$.

4.174. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\cos(\alpha-90^\circ)=0{,}2$ и $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

4.175. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi/2$ и $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=2/3$, то $\alpha+\beta=3\pi/4$.

4.176. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=4$, $\operatorname{ctg}\beta=5/3$, $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$. Найти $\alpha+\beta$.

4.177. Вычислить $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, если $\alpha+\beta=3\pi/4$.

4.178. Вычислить $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha+\beta=\pi/4$.

4.179. Доказать, что если $\sin\alpha=\sqrt{21}/7$, $\sin\beta=\sqrt{21}/14$ и α, β — острые углы, то $\alpha+\beta=60^\circ$.

4.180. Показать, что выражение $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ неотрицательно в области определения.

4.181. Исключить α из равенств $x=\operatorname{tg}^2\alpha$, $y=\sin^2\alpha$.

4.182. Доказать, что $\cos 2-\cos 8<0$.

4.183. Величины α, β, γ составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что $\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta$.

4.184. Дана дробь $\dfrac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}$. Преобразовать подкоренное выражение к более простому виду, после чего дробь сократить.

4.185. Выразить $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$ через m, где $m=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

Группа Б

Доказать тождества (4.186—4.239):

4.186. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

4.187. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

4.188. $\sin^{-1}2\alpha\sin^{-1}(60^\circ-2\alpha)\sin^{-1}(60^\circ+2\alpha)=4\sin^{-1}6\alpha$.

4.189. $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{15\alpha}{2}$.

4.190. $\dfrac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

4.191. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\alpha}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\dfrac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\alpha}{4}-\dfrac{7\pi}{2}\right)\right)}=\dfrac{1}{8}$.

4.192. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin(4\pi+\alpha))\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.193. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}$.

4.194. $\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

4.195. $1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

4.196. $\dfrac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

4.197. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right).$

4.198. $\dfrac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}.$

4.199. $1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=4\cos2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right).$

4.200. $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2.$

4.201. $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$

4.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)(1-\sin2\alpha)=\cos2\alpha.$

4.203. $\dfrac{\cos4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin4\alpha}{\cos4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

4.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^{-1}(4\alpha-3\pi)=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right).$

4.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-$

$$-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

4.206. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin4\alpha-1}=\dfrac{\sin\left(4\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}.$

4.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

4.208. $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

4.209. $\dfrac{3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha}{3-4\cos4\alpha+\cos8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

4.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=8\sin^4 2\alpha.$

4.211. $\cos^{-6}\alpha-\mathrm{tg}^6\alpha=3\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

4.212. $\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\,2\alpha}{1-\mathrm{tg}\,2\alpha}.$

4.213. $\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=-1.$

4.214. $\frac{\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}+\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}}{\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}-\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

4.215. $\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

4.216. $\sin 2\alpha\,(2\cos 4\alpha+1)\,\mathrm{ctg}\,(30^\circ-2\alpha)\,\mathrm{ctg}\,(30^\circ+2\alpha)=\sin 6\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,6\alpha.$

4.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

4.218. $\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\mathrm{tg}\,\frac{15\alpha}{2}.$

4.219. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{8}}=-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{8}.$

4.220. $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$

4.221. $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha-2\,\mathrm{tg}\,2\alpha-4\,\mathrm{tg}\,4\alpha=8\,\mathrm{ctg}\,8\alpha.$

4.222. $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha-2\,\mathrm{tg}\,2\alpha=4\,\mathrm{ctg}\,4\alpha.$

4.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha.$

4.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha.$

4.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha.$

4.226. $\mathrm{tg}\,6\beta-\mathrm{tg}\,4\beta-\mathrm{tg}\,2\beta=\mathrm{tg}\,6\beta\,\mathrm{tg}\,4\beta\,\mathrm{tg}\,2\beta.$

4.227. $\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=\mathrm{tg}\,4\alpha.$

4.228. $\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}=\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

4.229. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$

4.230. $\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$

4.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$

4.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha\,(3+\cos 4\alpha)}{4}.$

4.233. $\operatorname{ctg}(30°-\alpha)\operatorname{ctg}(150°-\alpha)\operatorname{ctg}(270°+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha.$

4.234. $4\sin\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$

4.235. $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1.$

4.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha.$

4.237. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}.$

4.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+$

$+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=2\sin^2(5\alpha/2).$

4.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$

Упростить выражения **(4.240—4.284)**:

4.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)}.$

4.241. $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}};\ 90°<\alpha<135°.$

4.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

4.243. $(\cos 8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin 8\alpha)(\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin 8\alpha).$

4.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta).$

4.245. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}.$

4.246. $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}.$

4.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

4.248. $\dfrac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{1+\cos 8x}+\dfrac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$

4.249. $\dfrac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}-1.$

4.250. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$

4.251. $\dfrac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}.$

4.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}.$

4.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}.$

4.254. $4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).$

4.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha.$

4.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)+1}.$

4.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$

4.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right).$

4.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}.$

4.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)-1}$.

4.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

4.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

4.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

4.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)\cos4x+\sin x\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

4.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\dfrac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\dfrac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

4.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

4.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}}$.

4.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}$.

4.270. $\dfrac{\sin2\alpha+\cos2\alpha-\cos6\alpha-\sin6\alpha}{\sin4\alpha+2\sin^22\alpha-1}$.

4.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^22\alpha)(\operatorname{ctg}^22\alpha-1)}$.

4.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$.

4.273. $\cos^6\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\dfrac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^2$.

4.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

4.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$, если: а) $0<\alpha<\pi$; б) $\pi<\alpha<2\pi$.

4.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

4.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)$.

4.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если: а) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; б) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

4.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

4.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}$.

4.281. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\sin^6\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos^6\left(\dfrac{7\pi}{2}-2\alpha\right)$.

4.282. $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\cdot\dfrac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}$.

4.283. $\cos(270^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{tg}(240^\circ-2\alpha)(2\cos 4\alpha-1)$.

4.284. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Преобразовать в произведение (4.285—4.331):

4.285. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

4.286. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$.

4.287. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha-8\cos^4 2\alpha$.

4.288. $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+3$.

4.289. $\operatorname{tg}^4 x-4\operatorname{tg}^2 x+3$.

4.290. $6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha$.

4.291. $\sqrt{1+\sin(\alpha/2)}-\sqrt{1-\sin(\alpha/2)}$, если $0^\circ<\alpha\leqslant 180^\circ$.

4.292. $2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3$.

4.293. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

4.294. $\dfrac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

4.295. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

4.296. $\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta$.

4.297. $\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta$.

4.298. $2+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi+\alpha}{4}\right)\left(1+\cos\dfrac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\pi\right)-4\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-3\pi\right)$.

4.299. $2-\frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}$.

4.300. $2-\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{ctg} 4\alpha$.

4.301. $\frac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)}-\operatorname{tg} 2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$.

4.302. $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

4.303. $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$.

4.304. $1+\cos\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

4.305. $4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)$.

4.306. $\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$, если: а) $0°<\alpha<90°$; б) $90°<\alpha<180°$.

4.307. $2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{4\operatorname{tg} 2\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}$.

4.308. $\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi)$.

4.309. $1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)$.

4.310. $\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

4.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

4.312. $2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1$.

4.313. $\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

4.314. $\frac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}$.

4.315. $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

4.316. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$.

4.317. $\frac{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$.

4.318. $\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\,\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}$.

4.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha$.

4.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}-\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.321. $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{15\pi}{8}+\alpha\right)$.

4.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{9\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

4.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270^\circ)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270^\circ)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$.

4.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha$.

4.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha$.

4.326. $\cos^2(n\alpha/2)-\sin^2(m\alpha/2)$.

4.327. $1+\mathrm{tg}\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

4.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}-\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

4.329. $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$.

4.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$.

4.331. $\mathrm{tg}\,210^\circ+\mathrm{ctg}\,210^\circ+\mathrm{tg}\,220^\circ+\mathrm{ctg}\,220^\circ$.

Доказать справедливость равенств (4.332—4.354):

4.332. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1$.

4.333. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1$.

4.334. $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ-\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=-\mathrm{tg}\,24^\circ$.

4.335. $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = -1.$

4.336. $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$

4.337. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = 1/64.$

4.338. а) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

4.339. а) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; б) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

4.340. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ.$

4.341. $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$

4.342. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1/16.$

4.343. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3/16.$

4.344. $\sin \dfrac{3\pi}{10} - \sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}.$

4.345. $\cos \dfrac{\pi}{5} + \cos \dfrac{2\pi}{5} + \cos \dfrac{4\pi}{5} + \cos \dfrac{6\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}.$

4.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.$

4.347. $8 \cos \dfrac{4\pi}{9} \cos \dfrac{2\pi}{9} \cos \dfrac{\pi}{9} = 1.$

4.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8.$

4.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right)} = 1.$

4.350. $\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ.$

4.351. $1 - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) - \sin^2 \dfrac{3\alpha}{2} + \cos^2 \dfrac{3\alpha}{2} = 2\sqrt{2} \cos \dfrac{3\alpha}{2} \sin\left(\dfrac{3\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

4.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + 6\alpha\right)}{4 \sin(5\pi - 3\alpha) \cos(\alpha - 2\pi)} = \cos 2\alpha.$

4.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$

4.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ.$

Вычислить (4.355—4.367):

4.355. $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

4.356. $\sin 20° \cos 50° \sin 60° \cos 10°$.

4.357. $\cos (3\pi/5) \cos (6\pi/5)$.

4.358. $\frac{\cos 68° \cos 8° - \cos 82° \cos 22°}{\cos 53° \cos 23° - \cos 67° \cos 37°}$.

4.359. $\frac{\cos 70° \cos 10° + \cos 80° \cos 20°}{\cos 69° \cos 9° + \cos 81° \cos 21°}$.

4.360. $\frac{\cos 67° \cos 7° - \cos 83° \cos 23°}{\cos 128° \cos 68° - \cos 38° \cos 22°} - \operatorname{tg} 164°$.

4.361. $\frac{\sin 22° \cos 8° + \cos 158° \cos 98°}{\sin 23° \cos 7° + \cos 157° \cos 97°}$.

4.362. $\frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 1}{8 \sin \alpha + 9 \cos \alpha - 1}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$.

4.363. $\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x\right)$, если $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4}$.

4.364. $\sin \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$; $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$; $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

4.365. $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{9}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

4.366. $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = n$.

4.367. $\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Зная, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать справедливость равенств (4.368—4.374):

4.368. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

4.369. $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$.

4.370. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

4.371. $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$.

4.372. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$.

4.373. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

4.374. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$.

4.375. Найти $\operatorname{tg}(x/2)$, если известно, что $\sin x+\cos x=1/5$.

4.376. Зная, что $\operatorname{tg}(\alpha/2)=m$, найти $\frac{1-2\sin^2(\alpha/2)}{1+\sin\alpha}$.

4.377. Найти значение выражения $\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}(\alpha/2)-\operatorname{tg}(\alpha/2)}$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

4.378. Известно, что $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$. Найти $\operatorname{ctg}\beta$.

4.379. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

4.380. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=p/q$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

4.381. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $3\pi/2<\alpha<7\pi/4$; б) $7\pi/4<\alpha<2\pi$.

4.382. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $\pi<\alpha<5\pi/4$; б) $5\pi/4<\alpha<3\pi/2$.

4.383. Известно, что $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$. Найти $\operatorname{tg}\beta$.

4.384. Доказать, что выражение

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}$$

не зависит от α, где $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}$.

4.385. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

4.386. Доказать, что выражение $\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$ не зависит от α, если $\alpha\neq\frac{\pi}{8}(4n+3)$.

4.387. Доказать, что выражение

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$$

не зависит от α, если $\alpha\neq\pi n/2$.

4.388. Доказать, что выражение $\sin(250°+\alpha)\cos(200°-\alpha)-$ $-\cos 240°\cos(220°-2\alpha)$ не зависит от α.

4.389. Доказать, что выражение $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-$ $-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не зависит ни от α, ни от φ.

4.390. Вывести формулу $\cos(n+1)\alpha=2\cos\alpha\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha$, где n — любое действительное число, и с ее помощью представить $\cos 3\alpha$ и $\cos 4\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$.

4.391. Доказать, что

$$4\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos(3\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

4.392. Дано $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq 2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)$.

4.393. Показать, что если p постоянно, то функция $f(\alpha)=$ $=\dfrac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ также является постоянной.

4.394. Дана функция $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$. Найти $f(\alpha)$, если известно, что $\sin 2\alpha=2/3$.

4.395. Доказать, что если $\alpha+\beta=60°$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant 1/3$.

Группа В

Доказать тождества (4.396—4.409):

4.396. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

4.397. $\operatorname{ctg}(270°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150°-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha$.

4.398. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}$.

4.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin(7\alpha/2)\sin(\alpha/2)$.

4.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

4.401. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha$.

4.402. $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos(7\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

4.403. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

4.404. $\dfrac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-\operatorname{tg}\dfrac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

4.405. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

4.406. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$, n — любое натуральное целое или 0.

4.407. $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$, n — число слагаемых.

4.408. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{n}{2}$, n — число слагаемых.

4.409. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$, n — число слагаемых.

Упростить выражения (**4.410—4.412**):

4.410. $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha$.

4.411. $3\sin\alpha\cos 3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\cos 3\alpha-3\sin 3\alpha\cos\alpha$.

4.412. $4(\sin^4 x+\cos^4 x)-4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1$.

Преобразовать в произведение (**4.413—4.415**):

4.413. $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$.

4.414. $\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\cos^{-2}\alpha-1}+\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin^{-2}\alpha-1}\right)+\operatorname{ctg} 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha$.

4.415. $\cos 22\alpha+3\cos 18\alpha+3\cos 14\alpha+\cos 10\alpha$.

Доказать справедливость равенств (**4.416—4.440**):

4.416. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{32}$.

4.417. $3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17}=8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}$.

4.418. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}$.

4.419. $\operatorname{tg} 20^\circ\cos^{-1} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\cos^{-1} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\cos^{-1} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ\cos^{-1} 80^\circ=48$.

4.420. $\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ=3/256$.

4.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=-1/2^{14}$.

4.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=1/2^7$.

4.423. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=0{,}5\sin 25^\circ\sin^{-1} 5^\circ$.

4.424. $\operatorname{ctg} 80^\circ\operatorname{ctg} 70^\circ+\operatorname{ctg} 70^\circ\operatorname{ctg} 30^\circ+\operatorname{ctg} 30^\circ\operatorname{ctg} 80^\circ=1$.

4.425. $\operatorname{ctg} 70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}$.

4.426. $\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{ctg} 27^\circ+\operatorname{ctg} 9^\circ=\operatorname{tg} 15^\circ+\operatorname{ctg} 15^\circ$.

4.427. $\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=2\sin^2 65^\circ$.

4.428. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ=1/4$.

4.429. $\sin^2(\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arcctg}(-1/2))=1/2$.

4.430. $\sin^2(\operatorname{arcctg}(1/2)-\operatorname{arcctg}(-1/3))=1/2$.

4.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

4.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}$.

4.433. $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=9/25$.

4.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

4.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

4.436. $\cos(2\operatorname{arcctg}7)=\sin(4\operatorname{arcctg}3)$.

4.437. $\cos(11\pi/5)-\cos(2\pi/5)=1/2$.

4.438. $\sin 84^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 12^\circ=1/16$.

4.439. $\operatorname{tg}830^\circ+\operatorname{tg}770^\circ+\operatorname{tg}740^\circ=\operatorname{tg}470^\circ\cdot\operatorname{tg}410^\circ\cdot\operatorname{tg}380^\circ$.

4.440. $\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ=1$.

Вычислить (4.441—4.462):

4.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$.

4.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$.

4.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

4.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

4.445. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

4.446. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

4.447. $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

4.448. $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

4.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, где $a<0$.

4.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

4.451. $\cos 260^\circ\sin 130^\circ\cos 160^\circ$.

4.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

4.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

4.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

4.455. $\operatorname{tg}\left(2\cdot\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

4.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

4.457. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

4.458. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

4.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

4.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

4.461. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

4.462. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

4.463. Найти $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

4.464. Доказать, что если $\sin\alpha=1/3$, $\sin\beta=1/(3\sqrt{11})$, $\sin\gamma=3/\sqrt{11}$ (α, β и γ — острые положительные углы), то $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

4.465. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=m$, найти $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\times$ $\times\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right)$.

4.466. Известно, что $\cos 2\alpha=m$. Найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

4.467. Найти $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha=m$.

4.468. Найти значение выражения $\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

4.469. Зная, что $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}$ и что $0<x<\frac{\pi}{2}$, найти $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

4.470. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2$.

4.471. Доказать, что если $\cos 2\alpha=\cos 2\beta \cos 2\gamma$, то $1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\times$ $\times \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\sin^{-2}\gamma$.

4.472. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$
$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C,$$

где n — целое число.

4.473. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что

$$\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}\,4\sin nA\sin nB\sin nC,$$

где n — целое число.

4.474. Доказать, что равенство $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ выполняется для всех $\varphi\in(0, \pi/2)$ в том и только в том случае, если $x=2$.

4.475. Доказать, что выражение $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-$ $-\varphi)-\cos 2\varphi$ не зависит от φ.

4.476. Найти наибольшее значение выражения $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-$ $-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/8$.

4.477. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}$ при $0<\alpha<\pi/8$.

4.478. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$.

4.479. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

4.480. Доказать следующее утверждение: для того чтобы один из углов треугольника ABC был равен 36° или 108°, необходимо, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

4.481. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\pi/4$.

4.482. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}(\alpha/2)-\operatorname{tg}(\alpha/2)}$ при $0<\alpha<\pi/2$.

4.483. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$, то $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha=$ $=-\cos 2\beta$.

4.484. Зная, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\frac{4}{3}$ и $0<x<\pi/2$, найти $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

4.485. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

4.486. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

4.487. Зная, что $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, найти $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

4.488. Доказать, что если для некоторых чисел α, β и γ выполняется равенство $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)$, то каждая из частей этого равенства равна $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

4.489. Доказать, что для чисел φ, удовлетворяющих неравенствам $0<\varphi<\pi/4$, выполняется равенство

$$1-\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^3\varphi+\ldots=\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin(\pi/4+\varphi)}.$$

4.490. Найти наименьшее значение выражения $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

4.491. Найти наименьшее значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

4.492. Показать, что если α постоянно, то функция $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$ также является постоянной.

4.493. Найти сумму $1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+\ldots+\cos 4n\alpha$.

4.494. Показать, что если $x=\operatorname{tg}5°$, $y=\operatorname{tg}20°$ и $z=\operatorname{tg}65°$, то $xy+yz+zx=1$.

4.495. Доказать, что $\operatorname{tg}142°30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ есть целое число.

4.496. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что $8\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)\leqslant 1$.

4.497. Показать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то $x+y+z=xyz$.

4.498. Показать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi/2$, то $xy+yz+zx=1$.

4.499. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что $8\cos A\times\cos B\cos C\leqslant 1$.

4.500. Пусть A, B, C — углы треугольника. Используя неравенство $\cos A\cos B\cos C\leqslant 1/8$, доказать, что $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant 9/4$.

ГЛАВА 5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. *Простейшими тригонометрическими уравнениями* называются уравнения вида $\sin x = a$ (где $|a| \leqslant 1$), $\cos x = a$ (где $|a| \leqslant 1$), $\operatorname{tg} x = a$ (где $-\infty < a < +\infty$), $\operatorname{ctg} x = a$ (где $-\infty < a < +\infty$). Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид (здесь и в дальнейшем $n \in \mathbf{Z}$ означает, что n — целое число):

$$\sin x = a;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.1}$$

$$\cos x = a;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.2}$$

$$\operatorname{tg} x = a;\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a;\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{5.4}$$

В частных случаях при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.5}$$

$$\sin x = 1;\ x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.6}$$

$$\sin x = -1;\ x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.7}$$

$$\cos x = 0;\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.8}$$

$$\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.9}$$

$$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.10}$$

$$\operatorname{tg} x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{5.11}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0;\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{5.12}$$

Уравнения вида $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi) = b$ ($|a| < 1$, $\omega \neq 0$, φ, b — любые действительные числа) также относятся к простейшим. Их следует решать сразу по формулам (5.1)—(5.4), заменив x на $\omega x + \varphi$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

□ Согласно формуле (5.1), имеем $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, откуда $x = -(-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ или $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}(6n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим уравнениям, совокупность которых равносильна заданному.

2°. При решении тригонометрических уравнений часто используются разложение на множители и введение новой переменной (метод подстановки).

Пример 2. Решить уравнение $\sin x = \sin 2x \cos 3x$.

□ Применив к $\sin 2x$ формулу (4.13), получим

$$\sin x = 2\sin x\cos x\cos 3x,\ \sin x\,(1 - 2\cos x\cos 3x) = 0.$$

Так как оба множителя в левой части этого уравнения имеют смысл при любых значениях x, то оно равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x=0$ и $1-2\cos x\cos 3x=0$.

Согласно формуле (5.5), первому уравнению удовлетворяют значения $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Для решения второго уравнения преобразуем произведение косинусов в сумму по формуле (4.26); имеем $1-(\cos 4x+\cos 2x)=0$. Так как $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$ [см. формулу (4.16)], то уравнение принимает вид $2\sin^2 2x-\cos 2x=0$ или $2(1-\cos^2 2x)-\cos 2x=0$, откуда получим $2\cos^2 2x+\cos 2x-2=0$ — квадратное уравнение относительно $\cos 2x$. Полагая $\cos 2x=z$, имеем $2z^2+z-2=0$. Решая это уравнение, находим $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Так как $|z_2|=\left|\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right|>1$, то уравнение $\cos 2x=z_2$ не имеет решений. Остается решить уравнение $\cos 2x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$. По формуле (5.2) находим $2x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Итак, получаем ответ: $x=\pi n$, $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$, $n, k\in\mathbf{Z}$. ■

При решении уравнения методом разложения на множители оно может не быть равносильным полученной совокупности уравнений, так как возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать ошибки в ответе, нужно исключить из полученных значений неизвестного те, для которых заданное уравнение не имеет смысла.

Пример 3. Решить уравнение $(1-\sin x)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0$.

□ Найдем значения x, удовлетворяющие каждому из уравнений $1-\sin x=0$ и $\operatorname{tg}^2 x-3=0$; если $\sin x=1$, то по формуле (5.6) получим

$$x=\pi/2+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}; \qquad (*)$$

если $\operatorname{tg}^2 x=3$, т. е. $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$, то по формуле (5.3) имеем

$$x=\pm\pi/3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \qquad (**)$$

Однако было бы ошибочным считать ответом объединение решений (*) и (**). Дело в том, что исходное уравнение не имеет смысла для значений $x=\pi/2+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), поэтому первое из предполагаемых решений непригодно и ответом является только второе решение $x=\pm\pi/3+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$). ■

Пример 4. Решить уравнение $\cos x\cos 2x\cos 4x=1/8$.

□ Наиболее быстрый способ решения — умножение правой и левой частей равенства на $8\sin x$, хотя при этом возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать этого, следует учитывать, что в окончательное решение не должны входить значения x, для которых $\sin x=0$, т. е. значения $x=\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), так как они не удовлетворяют исходному уравнению.

После умножения на $8\sin x$ уравнение примет вид

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin x.$$

Последовательно трижды применив формулу синуса двойного аргумента (4.13), получим сначала $4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\sin x$, затем $2\sin 4x\cos 4x=\sin x$ и далее $\sin 8x=\sin x$ или $\sin 8x-\sin x=0$. Преобразуя по формуле (4.20) разность синусов в произведение, получаем $\sin\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{9x}{2}=0$.

Пусть $\sin\dfrac{7x}{2}=0$; тогда $\dfrac{7x}{2}=\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$), откуда $x=\dfrac{2\pi k}{7}$ ($k\in\mathbf{Z}$), причем следует исключить значения $x=2\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), получающиеся при $k=7n$, как посторонние для исходного уравнения. Пусть теперь $\cos\dfrac{9x}{2}=0$; тогда $\dfrac{9x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m$ ($m\in\mathbf{Z}$), откуда

$x=\frac{\pi(2m+1)}{9}$ ($m\in\mathbf{Z}$), причем следует исключить значения $x=\pi(2n+1)$ ($n\in\mathbf{Z}$), получающиеся при $m=9n+4$ ($n\in\mathbf{Z}$), как посторонние для исходного уравнения.

Итак, получаем ответ: $x=\frac{2\pi k}{7}$, где целое $k\neq 7n$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi(2m+1)}{9}$, где целое $m\neq 9n+4$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

3°. *Однородными уравнениями* называются уравнения следующего вида:

$$a\sin kx+b\cos kx=0; \tag{5.13}$$

$$a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=0; \tag{5.14}$$

$$a\sin^3 kx+b\sin^2 kx\cos kx+c\sin kx\cos^2 kx+d\cos^3 kx=0. \tag{5.15}$$

Уравнение

$$a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=d$$

при $d\neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению вида (5.14), заменив число d тождественно равным ему выражением $d(\sin^2 kx+\cos^2 kx)$.

Для решения уравнений (5.13)—(5.15) в случае $a\neq 0$ рассмотрим такие значения x, при которых $\cos kx=0$. Тогда из каждого уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin kx=0$, а это невозможно. Значит, решениями этих уравнений могут быть только такие значения x, при которых $\cos kx\neq 0$. Поэтому если (при $a\neq 0$) разделить обе части уравнения (5.13) на $\cos kx$, уравнения (5.14) — на $\cos^2 kx$, уравнения (5.15) — на $\cos^3 kx$, то потери корней не произойдет.

В результате получается алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg} kx$, для решения которого следует произвести подстановку $\operatorname{tg} kx=z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x=0.$$

□ Используя формулы приведения, получаем

$$3\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$$

Это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$, причем $a\neq 0$, т. е. значения x, при которых $\cos x=0$, не являются решениями заданного уравнения. Разделив члены уравнения на $\cos^3 x$, имеем:

$$3\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-1=0;\ (3\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg} x+1)=0;$$

$$3\operatorname{tg}^2 x-1=0,\ \operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1),\ n\in\mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg} x+1=0,\ \operatorname{tg} x=-1,\ x=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in\mathbf{Z}.$$

Итак, получаем ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$ и $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $n, k\in\mathbf{Z}$. ■

При решении уравнений (5.13)—(5.15) в случае $a=0$ деление на $\cos kx$ недопустимо, так как оно приводит к потере корней — тех значений x, при которых $\cos kx=0$.

При $a=0$ уравнение (5.13) становится простейшим, а для решения уравнений (5.14) и (5.15) следует применить метод разложения на множители.

4°. Другие приемы решения тригонометрических уравнений рассмотрим при решении примеров.

Пример 6. Решить уравнение $3\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos x=4$.

□ При решении таких уравнений удобно использовать формулы понижения степени (4.16) и (4.17), которые имеют вид $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

Воспользуемся второй из них: $\frac{3\,(1+\cos\,(x-\pi/2))}{2} - 2\cos x = 4$ и после очевидных преобразований получим уравнение

$$3\sin x - 4\cos x = 5. \qquad (*)$$

Оно легко приводится к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (4.28) и (4.29), т. е. равенств $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\,(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2\,(x/2)}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\,(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2\,(x/2)}$, верных для всех $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Отметим, что замена $\sin x$ и $\cos x$ выражениями, содержащими $\operatorname{tg}\,(x/2)$, может привести к потере корней вида $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Удовлетворяют ли эти значения x исходному уравнению, выясняется проверкой.

Выполнив в уравнении (*) подстановку $\operatorname{tg}\,(x/2) = z$, которую называют «универсальной», получим уравнение $z^2 - 6z + 9 = 0$. Оно имеет решение $z = 3$. Возвращаясь к переменной x, получим $\operatorname{tg}\,(x/2) = 3$, откуда $x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Остается проверить, не удовлетворяют ли уравнению (*) числа $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Имеем $3\sin\,(\pi + 2\pi n) - 4\cos\,(\pi + 2\pi n) \neq 5$; значит, числа $x = \pi + 2\pi n$ не являются решениями уравнения (*).

Итак, получаем ответ: $x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ (a — заданное число).

□ Преобразуем левую часть уравнения по формуле (1.13) как сумму кубов:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$$
$$= \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}\,(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$$
$$= (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}_{1} - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Согласно формуле (4.13), имеем $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Тогда получим равносильное исходному уравнение $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a$, откуда $\sin^2 2x = \frac{4\,(1-a)}{3}$. Если $0 \leqslant \frac{4\,(1-a)}{3} < 1$, т. е. $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то уравнение $\sin 2x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3\,(1-a)}$ имеет решение

$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3\,(1-a)}\right) + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbf{Z}. \ ■$$

В частности, при $a = 1$ решением уравнения $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ являются числа $x = \pi n/2$ ($n \in \mathbf{Z}$). Однако это уравнение, как и многие другие, можно решить быстрее, используя неравенства $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ (см. примеры 8 и 9).

Пример 8. Решить уравнение $\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x = 1$ ($k \in \mathbf{N}$).

□ Легко догадаться, что числа $x = \pi n/2$ ($n \in \mathbf{Z}$) являются решениями уравнения. Однако еще следует доказать, что других решений нет. Предположим, что существуют решения $x = \alpha \neq \pi n/2$ ($n \in \mathbf{Z}$). Так как $|\sin\alpha| < 1$ и $|\cos\alpha| < 1$, то $\sin^2\alpha < 1$ и $\cos^2\alpha < 1$. Поэтому для любого целого положительного k справедливы неравенства $\sin^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha$ и $\cos^{2k+2}\alpha < \cos^2\alpha$. Складывая их, получаем $\sin^{2k+2}\alpha +$

$+\cos^{2k+2}\alpha<\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. Но $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; следовательно, $\sin^{2k+2}x+$ $+\cos^{2k+2}x<1$ для всех значений $x=\alpha\neq\pi n/2$ $(n\in Z)$.

Значит, заданное уравнение (в частности, уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=1$) не имеет решений, отличных от $x=\pi n/2$ $(n\in Z)$. ■

Пример 9. Решить уравнение $\sin(\pi\cos 2x)=1$.

□ По формуле (5.6) находим $\pi\cos 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, т. е. $\cos 2x=\frac{1}{2}+2k$, $k\in Z$. Но $|\cos 2x|\leqslant 1$, поэтому $k=0$. Имеем $\cos 2x=\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n\in Z)$, откуда получаем ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, $n\in Z$. ■

Группа А

Решить уравнения (5.001—5.175):

5.001. $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$.

5.002. $\sin 3z-\cos 3z=\sqrt{3/2}$.

5.003. $\sin 2z+\cos 2z=\sqrt{2}\sin 3z$.

5.004. $2(\cos 4x-\sin x\cos 3x)=\sin 4x+\sin 2x$.

5.005. $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x$.

5.006. $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z=\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}$.

5.007. $\operatorname{tg} 2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

5.008. $\cos t\sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t$.

5.009. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg} 3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$.

5.010. $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0$.

5.011. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$.

5.012. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2=2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$.

5.013. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x$.

5.014. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

5.015. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

5.016. $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$.

5.017. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

5.018. $\sin x+\sin\frac{1}{\pi}=\sin\left(x+\frac{1}{\pi}\right)$.

5.019. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x.$

5.020. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0.$

5.021. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

5.022. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$

5.023. $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x.$

5.024. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x).$

5.025. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1.$

5.026. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=1/2.$

5.027. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+0{,}5=0.$

5.028. $\sin 5x=\cos 4x.$

5.029. $\operatorname{tg}(70^\circ+x)+\operatorname{tg}(20^\circ-x)=2.$

5.030. $\sin 6x+\sin 2x=0{,}5\operatorname{tg} 2x.$

5.031. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0.$

5.032. $\sin 9x=2\sin 3x.$

5.033. $\cos 3x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$

5.034. $\sin 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

5.035. $\cos 6x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right).$

5.036. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

5.037. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0.$

5.038. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0.$

5.039. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x.$

5.040. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0.$

5.041. $\sin x+\sin 7x-\cos 5x+\cos(3x-2\pi)=0.$

5.042. $\sin 2x-\sin 3x+\sin 8x=\cos\left(7x+\frac{3\pi}{2}\right).$

5.043. $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x.$

5.044. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x.$

5.045. $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0.$

5.046. $\cos 4x+2\cos^2 x=1.$

5.047. $1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=0.$

5.048. $1+\sin 2x=(\cos 3x+\sin 3x)^2.$

5.049. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$

5.050. $1+\cos 7x=\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)^2.$

5.051. $\sin 3x+\sin 5x=2(\cos^2 2x-\sin^2 3x)$.

5.052. $0,5(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0$.

5.053. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\frac{3x}{2}$.

5.054. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1$.

5.055. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1,5$.

5.056. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0$.

5.057. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$.

5.058. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$.

5.059. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$.

5.060. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$.

5.061. $8\cos z\cos(60°-z)\cos(60°+z)+1=0$.

5.062. $\sin z\sin(60°-z)\sin(60°+z)=1/8$.

5.063. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

5.064. $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$.

5.065. $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x$.

5.066. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x$.

5.067. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$.

5.068. $\operatorname{tg} 3t-\operatorname{tg} t-4\sin t=0$.

5.069. $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

5.070. $(\cos 6x-1)\operatorname{ctg} 3x=\sin 3x$.

5.071. $\cos^{-1} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

5.072. $\cos x\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)+$
$$+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right).$$

5.073. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$.

5.074. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0$.

5.075. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0$.

5.076. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)$.

5.077. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$.

5.078. $\operatorname{ctg} t-\sin t=2\sin^2\frac{t}{2}$.

5.079. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=\cos t$.

5.080. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x$.

5.081. $\cos 2x=\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)$.

5.082. $2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0$.

5.083. $\sin^2 x\cos^{-4} x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2} x-12=0$.

5.084. $\cos^3 x+\cos^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}=0$.

5.085. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-3=0$.

5.086. $\cos 4x+2\sin^2 x=0$.

5.087. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

5.088. $6\operatorname{ctg}^2 x-2\cos^2 x=3$.

5.089. $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

5.090. $\cos\,(4x+2)+3\sin\,(2x+1)=2$.

5.091. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

5.092. $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

5.093. $25\sin^2 x+100\cos x=89$.

5.094. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25$.

5.095. $\cos 2x+3\sin x=2$.

5.096. $2\operatorname{tg}^4 3x-3\operatorname{tg}^2 3x+1=0$.

5.097. $\cos^4 2x+6\cos^2 2x=25/16$.

5.098. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4} 2z=25$.

5.099. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2$.

5.100. $2+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$.

5.101. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25$.

5.102. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$.

5.103. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$.

5.104. $7+4\sin x\cos x+1{,}5\,(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0$.

5.105. $4\operatorname{tg}^2 3x-\cos^{-2} 3x=2$.

5.106. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

5.107. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos^{-1} 4x$.

5.108. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5$.

5.109. $\sin^2 2x+\sin^2 x=9/16$.

5.110. $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0$.

5.111. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0$.

5.112. $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0$.

5.113. $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z$.

5.114. $\cos^{-2} 2t+\sin^{-2} 2t=8/3$.

5.115. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x$.

5.116. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$.

5.117. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.

5.118. $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

5.119. $a\cos^2 \frac{x}{2} - (a+2b)\sin^2 \frac{x}{2} = a\cos x - b\sin x;\ b \neq 0$.

5.120. $\sin z - \sin^2 z = \cos^2 z - \cos z$.

5.121. $2\sin z - \cos z = 2/5$.

5.122. $\cos 2x = 1 - \sin 2x$.

5.123. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$.

5.124. $4\sin x + \cos x = 4$.

5.125. $\sin 2z - 4\cos 2z = 4$.

5.126. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1$.

5.127. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\sin(\pi - x)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0$.

5.128. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

5.129. $4\sin 3z + \frac{1}{3}\cos 3z = 3$.

5.130. $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$.

5.131. $\cos^{-1} 3t - 6\cos 3t = 4\sin 3t$.

5.132. $\sin^3 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos^3\frac{x}{3} = 0$.

5.133. $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

5.134. $\dfrac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}} = 2$.

5.135. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\cos^{-2} x$.

5.136. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \dfrac{1+\cos 2x}{\sin^2 x} = 0$.

5.137. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0$.

5.138. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 20°\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 40°\operatorname{tg} x = 1$.

5.139. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 70° = \operatorname{tg} x\operatorname{tg} 50°\operatorname{tg} 70°$.

5.140. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 3\operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\cos^{-2} x$.

5.141. $\cos(2t - 18°)\operatorname{tg} 50° + \sin(2t - 18°) = \dfrac{1}{2\cos 130°}$.

5.142. $\cos(3x-30°)-\sin(3x-30°)\operatorname{tg}30°=\dfrac{1}{2\cos 210°}$.

5.143. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\dfrac{1}{4}\sin 12x$.

5.144. $\sin^3 z\cos z-\sin z\cos^3 z=\sqrt{2}/8$.

5.145. $(\sin 4t+\cos 4t)^2=16\sin 2t\cos^3 2t-8\sin 2t\cos 2t$.

5.146. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+2\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x+1}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x-1}\right)=4$.

5.147. $\dfrac{\cos x}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}x}=2\sqrt{3}$.

5.148. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}t}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}t}=\sin 2t$.

5.149. $(1+\sin x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=\cos^{-1}x-\cos x$.

5.150. $\dfrac{4\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}+\sin^2 2x+1=0$.

5.151. $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}2x+1=4\cos^2 x+\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-2\cos 2x$.

5.152. $2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\operatorname{tg}x$.

5.153. $\sqrt{2}(1+\cos x)=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

5.154. $5(1+\cos x)=2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

5.155. $\sin 2x=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$.

5.156. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t$.

5.157. $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$.

5.158. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=3$.

5.159. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{ctg}^2 x+\sin^{-2}x(1+\cos 2x)=0$.

5.160. $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0.$

5.161. $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2\operatorname{tg}^2 x.$

5.162. $\sin\dfrac{3x - 7\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi - 3x}{2} = \cos^{-1}\dfrac{3x}{2}.$

5.163. $\dfrac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x)} = \dfrac{3}{2}.$

5.164. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 + \cos 4x.$

5.165. $\dfrac{1}{1 + \cos^2 z} + \dfrac{1}{1 + \sin^2 z} = \dfrac{16}{11}.$

5.166. $\sin^4 x + \cos^4 x = 5/8.$

5.167. $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3.$

5.168. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + t\right) = \sin t + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - t\right).$

5.169. $2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1 = \sin 3x.$

5.170. $\cos x - \sin x = 4\cos x \sin^2 x.$

5.171. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x.$

5.172. $\operatorname{tg}(x - 15^\circ)\operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = 1/3.$

5.173. $(\sin 2t - \sin^{-1} 2t)^2 + (\cos^{-1} 2t - \cos 2t)^2 = 1.$

5.174. $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{3t}{2} + \cos^{-1}\dfrac{t}{2}\sin^{-1}\dfrac{3t}{2} = 1.$

5.175. $9^{\cos x} = 9^{\sin x} \cdot 3^{2/\cos x}.$

Группа Б

Решить уравнения (5.176—5.385):

5.176. $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 5x - \sqrt{2}\operatorname{tg} 2x \cos 3x \cos^{-1} 5x = 0.$

5.177. $\sqrt{3}(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 2x \cos^{-1} 3x.$

5.178. $4\cos x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1.$

5.179. $\operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2\sin 4x = 0.$

5.180. $2\sin 2x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3x\right) - \cos 3x \cos^{-1} 5x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$

5.181. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$

5.182. $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \dfrac{1}{4}\cos 12x = 0.$

5.183. $\cos x \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 2x.$

5.184. $4\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x.$

5.185. $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0.$

5.186. $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos x\ (\cos x - 1).$

5.187. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x).$

5.188. $\operatorname{ctg}(x - 25^\circ) + \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) = 2\sin(2x - 50^\circ).$

5.189. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\sin x.$

5.190. $\operatorname{tg} 3t + \operatorname{tg} t = 2\sin 4t.$

5.191. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 5x = 0.$

5.192. $\operatorname{tg} 5z - \operatorname{tg} 3z - 2\operatorname{tg} 2z = 0.$

5.193. $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \frac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0.$

5.194. $\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t} - \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t} = 0.$

5.195. $\frac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t} = 0.$

5.196. $\frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0.$

5.197. $\operatorname{tg} x\,\frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \sin 6x.$

5.198. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg}(z + 60^\circ)\operatorname{tg}(z + 120^\circ) = \sqrt{3}.$

5.199. $\sin^{-1} t - \sin^{-1} 2t = \sin^{-1} 4t.$

5.200. $\operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{ctg}(10^\circ - x) = 2/3.$

5.201. $\cos^2(x + 40^\circ) + \cos^2(x - 40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x.$

5.202. $4\sin 5x \cos 5x\ (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x.$

5.203. $(2\cos 2t + 5)\cos^4 t - (2\cos 2t + 5)\sin^4 t = 3.$

5.204. $\operatorname{tg}^4 x = 36\cos^2 2x.$

5.205. $\cos^{-4} z = 64\cos^2 2z.$

5.206. $\operatorname{tg}^4 3t = \sin^2 6t.$

5.207. $\cos^{-4} z = \frac{160}{9} - 2\sin^{-2} z\ (\operatorname{ctg} 2z \operatorname{ctg} z + 1).$

5.208. $\frac{4\sin^4 z}{(1 + \cos 2z)^2} - 2\cos^{-2} z - 1 = 0.$

5.209. $\frac{8\sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}.$

5.210. $\left(\cos^{-6} z - \operatorname{tg}^6 z - \frac{7}{3}\right)(\sin z + \cos z + 2) = 0.$

5.211. $\operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - 8\sin^{-3} 2z = 12.$

5.212. $2\sin^4 t\,(\sin 2t-3)-2\sin^2 t\,(\sin 2t-3)-1=0.$

5.213. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

5.214. $2\sin 2x+3\operatorname{tg} x=5.$

5.215. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)\,(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0.$

5.216. $2\sin x\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x-5\cos^2 x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$

5.217. $\sin^4 2x+\sin^3 2x\cos 2x-8\sin 2x\cos^3 2x-8\cos^4 2x=0.$

5.218. $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=$
$=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}.$

5.219. $\sin^2 2x\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+2\cos^3 2x=0.$

5.220. $3\sin^2 z\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\frac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+2\cos 2z=0.$

5.221. $\sin 4x\,(3\sin 4x-2\cos 4x)=\sin^2 2x-16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+$
$+\cos^2 2x.$

5.222. $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x.$

5.223. $2\sin^4 x+1{,}25\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x.$

5.224. $5\sin^4 2z-4\sin^2 2z\cos^2 2z-\cos^4 2z+4\cos 4z=0.$

5.225. $2\cos z\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-z\right)-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin z\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\cos 2z.$

5.226. $\dfrac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t.$

5.227. $\dfrac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}=\sin t.$

5.228. $\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin^2 t+\sin 2t-1}{\cos^2 t-\sin 2t+1}.$

5.229. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$

5.230. $\dfrac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x.$

5.231. $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\cos x-\sin x}=\cos 2x.$

5.232. $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}=6\cos 2x+4\sin 2x.$

5.233. $\cos^{-1} 2t+\sin^{-1} 2t+\cos^{-1} 2t\sin^{-1} 2t-5=0.$

5.234. $2+\sin t=3\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$

5.235. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

5.236. $1+\sin z+\cos z+\sin 2z+\cos 2z=0.$

5.237. $\frac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0.$

5.238. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x.$

5.239. $(\cos x-\sin x)^2+\cos^4 x-\sin^4 x=0{,}5\sin 4x.$

5.240. $2\,(1+\sin 2x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$

5.241. $\sin^2 x+2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin x\sin^2\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x=0.$

5.242. $\cos^3 x+0{,}5\sin 2x-\cos x\sin^3 x+4\sin x+4=0.$

5.243. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

5.244. $0{,}5\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x.$

5.245. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x=(\sin 2x+\sin 4x)\cos^{-1} x\sin^{-1} 3x.$

5.246. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}{1+\cos x}=2.$

5.247. $3\sqrt{3}\operatorname{tg} x\sin x-\operatorname{ctg} x\cos x+9\sin x-3\sqrt{3}\cos x=0.$

5.248. $\sin 2x-2\cos^2 x+4\,(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0.$

5.249. $\sqrt{2}\,(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\cos 2x+\sin 2x.$

5.250. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x.$

5.251. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\sin x+\cos x.$

5.252. $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x).$

5.253. $\sin 2z+5\,(\sin z+\cos z)+1=0.$

5.254. $2\cos^2\frac{x}{2}(1-\sin x)+\cos^2 x=0.$

5.255. $\sin^4 x-\sin^2 x+4\,(\sin x+1)=0.$

5.256. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

5.257. $\frac{\cos^2 z\,(1+\operatorname{ctg} z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z.$

5.258. $\operatorname{tg}^2 t-\frac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\operatorname{ctg} 2t.$

5.259. $\operatorname{ctg}^2 2x+\frac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0.$

5.260. $\sin^2 x \operatorname{tg} x+\cos^2 x \operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$

5.261. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x=0.$

5.262. $(\operatorname{ctg} z-1)(1+\sin 2z)=1+\operatorname{ctg} z.$

5.263. $\frac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg} t\,(1+2\cos 2t).$

5.264. $\frac{4\sin^2\frac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg} t\,(1-2\cos t).$

5.265. $\frac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x.$

5.266. $\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right).$

5.267. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$

5.268. $\frac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

5.269. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}.$

5.270. $\frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0.$

5.271. $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z}+\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z}+\frac{5}{2}=0.$

5.272. $\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

5.273. $\frac{5\sin x-5\operatorname{tg} x}{\sin x+\operatorname{tg} x}+4(1-\cos x)=0.$

5.274. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)\operatorname{ctg} x.$

5.275. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}+4\cos^{-1} 2z=\frac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-1}.$

5.276. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

5.277. $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}+\dfrac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}=1.$

5.278. $\operatorname{tg} 2t=\operatorname{ctg} t-4\cos t\cos 3t.$

5.279. $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}+\sin x=4.$

5.280. $\dfrac{1}{\sin^2 2x}+\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x-4=0.$

5.281. $\operatorname{tg} 5x-2\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 5x.$

5.282. $3\operatorname{tg} 3x-4\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x.$

5.283. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=\sin^{-1} x-\cos^{-1} x.$

5.284. $37\operatorname{tg} 3x=11\operatorname{tg} x.$

5.285. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\dfrac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

5.286. $3\operatorname{ctg} t-3\operatorname{tg} t+4\sin 2t=0.$

5.287. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x+8=0.$

5.288. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+3\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x+4=0.$

5.289. $\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{z}{2}-2=4\operatorname{tg} z.$

5.290. $(\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t+2\operatorname{tg} 2t)(1+\cos 3t)=4\sin 3t.$

5.291. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x=106/9.$

5.292. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4.$

5.293. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cos t=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$

5.294. $\cos^{-2} 2x\operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

5.295. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

5.296. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

5.297. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

5.298. $(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=4\sin^{-2} 4x+5.$

5.299. $\sin 3z+\sin^3 z=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

5.300. $\cos 3z-\cos^3 z+0{,}75\sin 2z=0.$

5.301. $\cos(22^\circ-t)\cos(82^\circ-t)+\cos(112^\circ-t)\cos(172^\circ-t)=$
$=0{,}5(\sin t+\cos t).$

5.302. $\sin^2(t+45^\circ)-\sin^2(t-30^\circ)-\sin 15^\circ\cos(2t+15^\circ)=0{,}5\sin 6t.$

5.303. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=1/16.$

5.304. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

5.305. $\sin^3 z\sin 3z+\cos^3 z\cos 3z=\cos^3 4z.$

5.306. $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\sqrt{2}/4.$

5.307. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x.$

5.308. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0.$

5.309. $\dfrac{\sin 2t+2\cos^2 t-1}{\cos t-\cos 3t+\sin 3t-\sin t}=\cos t.$

5.310. $\sin 2t\cos 2t\ (\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=0{,}5\sin^2 4t.$

5.311. $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=\cos x+8\cos x\cos^3 3x.$

5.312. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

5.313. $\cos 8x+3\cos 4x+3\cos 2x=8\cos x\cos^3 3x-0{,}5.$

5.314. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=1/16.$

5.315. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=1{,}5\ (\sin^4 2t+\cos^4 2t)+0{,}5\ (\sin t+\cos t).$

5.316. $2\ (\sin^6 x+\cos^6 x)-3\ (\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x.$

5.317. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)=0{,}25.$

5.318. $\sin^6 x+\cos^6 x=7/16.$

5.319. $\sin^3 2t+\cos^3 2t+0{,}5\sin 4t=1.$

5.320. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1} 2x=8\sin^{-3} 4x.$

5.321. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x+\operatorname{tg} 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 5x+\operatorname{ctg} 2x}=\operatorname{tg} 3x.$

5.322. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z+\operatorname{tg} 4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z+\operatorname{ctg} 4z}.$

5.323. $\sin 3t-\sin t=\dfrac{8\cos t\operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2} t}.$

5.324. $\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t+1}+\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 t+1}=\dfrac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}.$

5.325. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+\cos^{-2} 2x}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x+\sin^{-2} 2x}=\dfrac{2}{3}.$

5.326. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\dfrac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

5.327. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} 2z=\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} 2z.$

5.328. $\cos 2x=\cos^2\dfrac{3x}{2}.$

5.329. $\operatorname{ctg} x\ (1-0{,}5\cos 2x)=1.$

5.330. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)}{1+\cos 2t}=\cos^{-2} 2t-1.$

5.331. $0{,}5\,(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

5.332. $\frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}-6\cos^{-1} x=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

5.333. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\frac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

5.334. $\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1} t-1.$

5.335. $\frac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-0{,}5\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1} 4x.$

5.336. $\cos^{-3} t\sin^{-3} t-\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{ctg}^3 t=2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t.$

5.337. $1-2\cos^2 t\,(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)=\sin^4 t-\cos^4 t.$

5.338. $1+\frac{2\,(\cos 2z\operatorname{tg} z-\sin 2z)}{\cos^{-2} z}=\cos 2z.$

5.339. $\sin^3 x\,(1-\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x\,(1-\operatorname{tg} x)=1{,}5\cos 2x.$

5.340. $4\cos^2 2t-\operatorname{tg} 4t=\operatorname{ctg} 2t.$

5.341. $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg} x=0.$

5.342. $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{10}{3}.$

5.343. $4\,(\sin t\cos^5 t+\cos t\sin^5 t)+\sin^3 2t=1.$

5.344. $\frac{\sin^2 t-\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t-\operatorname{ctg}^2 t}+2\operatorname{tg}^3 t+1=0.$

5.345. $\sin\,(3\pi-x)+\operatorname{tg}\,(\pi+x)=\frac{\cos^{-1} x-\cos x}{2\sin x}.$

5.346. $\frac{2\,(\cos^4 t+\sin^4 t)}{\cos^4 t-\sin^4 t}=\cos^{-1} 2t+\cos 4t+1.$

5.347. $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}+\sin x\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=4.$

5.348. $\cos t\,(1-\operatorname{tg} t)\,(\sin t+\cos t)=\sin t.$

5.349. $\sin x\,(\cos x-2)+\operatorname{tg} x=2-\cos x-\cos^{-1} x.$

5.350. $\cos 2x-\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-1.$

5.351. $5\,(1-\sin 2x)-16\,(\sin x-\cos x)+3=0.$

5.352. $\operatorname{tg}\,(t^2-t)\operatorname{ctg} 2=1.$

5.353. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\,(x+1)=1.$

5.354. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1.$

5.355. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1.$

5.356. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^3 2x+1.$

5.357. $\sin t^2-\sin t=0.$

5.358. $\sin 2z-\sin 6z+2=0.$

5.359. $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2.$

5.360. $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}-2=0.$

5.361. $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0.$

5.362. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x=\sin x.$

5.363. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

5.364. $(\sin x+\cos x)^4=2\,(1+\sin^2 x)-(\sin x-\cos x)^4.$

5.365. $\sin^3 x\,(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x\,(1+\operatorname{tg}x)=2\sqrt{\sin x\cos x}.$

5.366. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2\cos^2 z}.$

5.367. $1-\cos x=\sqrt{1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}}.$

5.368. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2+\sin x=2\cos x.$

5.369. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}.$

5.370. $\sqrt{\cos^2 x+0{,}5}+\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}=2.$

5.371. $\sin 3x=a\sin x.$

5.372. $\cos 3x=m\cos x.$

5.373. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha+1=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha.$

5.374. $12\sin x+4\sqrt{3}\cos(\pi+x)=m\sqrt{3}.$

5.375. $\sin(x+2{,}5)+\sin(x+0{,}5)=\cos\alpha.$

5.376. $2^{2\operatorname{tg}(x/2)-\cos x}=4.$

5.377. $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6.$

5.378. $9^{1-\cos 6x}=3^{1/\operatorname{ctg}3x}.$

5.379. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30.$

5.380. $1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos^{-1}x}$

5.381. $3^{1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots}=\sqrt[3]{9}.$

5.382. $2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n+1}\cos^n x+\ldots}=\sqrt[3]{0,25}$.

5.383. $\log_{\cos x}4\cdot\log_{\cos^2 x}2=1$.

5.384. $\log_{\sin x}4\cdot\log_{\sin^2 x}2=4$.

5.385. $3(\log_2\sin x)^2+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

5.386. Дано: $(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y)=2$. Найти $x+y$.

5.387. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}3x+\dfrac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0$ не имеет корней.

5.388. Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению $\sin^3 x+\sin x\sin 2x-3\cos^3 x=0$. Показать, что треугольник равнобедренный.

5.389. Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению $(3\cos x-2)(14\sin^2 x+\sin 2x-12)=0$.

5.390. Показать, что существуют треугольники, у которых каждый угол удовлетворяет уравнению $(65\sin x-56)(80-64\sin x-65\cos^2 x)=0$. Найти эти углы.

5.391. Показать, что треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению $3\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2\sqrt{3}=0$, является равносторонним.

5.392. Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$, $0<\gamma<\pi/2)$.

5.393. Найти углы α, β и γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/12$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решить системы уравнений (**5.394—5.405**):

5.394. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=0,5.\end{cases}$

5.395. $\begin{cases}9^{2\operatorname{tg}x+\cos y}=3,\\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2.\end{cases}$

5.396. $\begin{cases}x-y=5\pi/3,\\ \sin x=2\sin y.\end{cases}$

5.397. $\begin{cases}\sin x\cos y=0,25,\\ \sin y\cos x=0,75.\end{cases}$

5.398. $\begin{cases}x-y=-1/3,\\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=1/2.\end{cases}$

5.399. $\begin{cases}x+y=\pi/4,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1/6.\end{cases}$

5.400. $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y.\end{cases}$

5.401. $\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=2,\\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=-1,8.\end{cases}$

5.402. $\begin{cases}2^{\cos x}+2^{\cos^{-1}y}=5,\\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{-1}y}=4.\end{cases}$

5.403. $\begin{cases}\sin x\sin y=0,75,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

5.404. $\begin{cases}x+y=5\pi/6,\\ \cos^2 x+\cos^2 y=0,25.\end{cases}$

5.405. $\begin{cases}x+y=\pi/3,\\ \sin x\sin y=0,25.\end{cases}$

Группа В

Решить уравнения (5.406—5.492):

5.406. $(\cos^2 x+\cos^{-2} x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4.$

5.407. $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\cos^{-2} 3z.$

5.408. $(3-\sin x)(4-\sin^{-2} x)=12+\cos^2 y.$

5.409. $\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x)=1+5\sin 3y.$

5.410. $(5+3\sin^{-2} x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y.$

5.411. $\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0.$

5.412. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 2x\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 2x+\operatorname{ctg} 3x.$

5.413. $3\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 2x.$

5.414. $\frac{3\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t.$

5.415. $\frac{\operatorname{tg} t}{2-\cos^{-2} t}(\sin 3t-\sin t)=\frac{2}{\operatorname{ctg}^2 t-3}.$

5.416. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x.$

5.417. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x.$

5.418. $\cos^2 x^2(\operatorname{tg} x^2+2\operatorname{tg} x)+\operatorname{tg}^3 x(1-\sin^2 x^2)(2-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} x^2)=0.$

5.419. $2\operatorname{tg}\pi t^2-\operatorname{tg}\pi t+\operatorname{tg}\pi t\operatorname{tg}^2\pi t^2=0.$

5.420. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0.$

5.421. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0.$

5.422. $(2\sin x-1)(\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1)=0.$

5.423. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x+2(2\cos x-\cos^{-1} x)=0.$

5.424. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg} x-2=0.$

5.425. $\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{2-\cos^{-2} x}=\frac{4+2\cos\frac{6x}{5}}{\cos 3x+\cos x}.$

5.426. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\cos^{-1} x)=0.$

5.427. $2\sin^2 x+\sin x+\sin^{-1} x+2\sin^{-2} x=6.$

5.428. $2(1-\sin x-\cos x)+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=0.$

5.429. $4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-14=0.$

5.430. $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg}^3 4x=3.$

5.431. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} 3x.$

5.432. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{t}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\operatorname{tg} t=2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{t}{4}.$

5.433. $12\cos^{-2} x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x+10\left(2\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x\right)=1.$

5.434. $18\cos^2 x+5\,(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0.$

5.435. $4-4\,(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0.$

5.436. $5\sin 2z-11\,(\sin z+\cos z)+7=0.$

5.437. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=6.$

5.438. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x-4=0.$

5.439. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x-\cos 4x=3.$

5.440. $1+\sin\frac{t}{2}\sin t-\cos\frac{t}{2}\sin^2 t=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$

5.441. $\sin^{-1} 5x-\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

5.442. $(3-\operatorname{tg}^2 x)\,(\cos 3x+\cos x)=\frac{4\cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$

5.443. $\sqrt{3}\,|\cos t|=1+\operatorname{ctg} t.$

5.444. $|\sin t|+|\cos t|=1{,}4.$

5.445. $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}.$

5.446. $|\operatorname{tg} 2t+\operatorname{ctg} 2t|=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

5.447. $\cos^4 x+4\cos x-1=0.$

5.448. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0.$

5.449. $\cos^{-4} x-2\cos^{-2} x-12\operatorname{tg} x-16=0.$

5.450. $\operatorname{ctg}^4 2z=\cos^2 4z+1.$

5.451. $\frac{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}=\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}.$

5.452. $\frac{1-\cos 2x+\ldots+(-1)^n\cos^n 2x+\ldots}{1+\cos 2x+\ldots+\cos^n 2x+\ldots}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x.$

5.453. $\frac{1-\operatorname{tg} x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1+\operatorname{tg} x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x.$

5.454. $\frac{1+\operatorname{tg} x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1-\operatorname{tg} x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x.$

5.455. $\frac{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}=\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2 t}.$

5.456. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=29/64.$

5.457. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=41/128.$

5.458. $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x=4\,\frac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}.$

5.459. $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{ctg}(\pi\sin t)$.

5.460. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg} t)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg} t)$.

5.461. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0$.

5.462. $\cos\sqrt{x}=\cos x$.

5.463. $\operatorname{ctg}2\pi t^2+\operatorname{ctg}4\pi t=0$.

5.464. $\cos^{-4}x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x$.

5.465. $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2$.

5.466. $\sin^4 x+2\cos^3 x+2\sin^2 x-\cos x+1=0$.

5.467. $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$.

5.468. $(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\operatorname{tg}x)=-1$.

5.469. $1+\sqrt{3}(1+\cos x)=\cos 2(x+2\operatorname{tg}x)$.

5.470. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3$.

5.471. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$.

5.472. $\sqrt{3}\sin t-\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t}=0$.

5.473. $2\sin^2 t=\sqrt{\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 t\cos^2 2t+\cos^2 t}$.

5.474. $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0$.

5.475. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$.

5.476. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

5.477. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$.

5.478. $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$.

5.479. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1$.

5.480. $\sqrt[4]{0{,}5-\cos 2x}+\sqrt[4]{0{,}5+\cos 2x}=1$.

5.481. $\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg}x}=3$.

5.482. $\sqrt[5]{0{,}5-\sin x}+\sqrt[5]{0{,}5+\sin x}=1$.

5.483. $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4$.

5.484. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3$.

5.485. $\cos x+\sqrt{1{,}5-\cos^2 x}-\cos x\sqrt{1{,}5-\cos^2 x}=1$.

5.486. $\sqrt{1+3\operatorname{ctg}x}+\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}}=\frac{5}{2}$.

5.487. $\cos z\sqrt{\operatorname{tg}^2 z-\sin^2 z}+\sin z\sqrt{\operatorname{ctg}^2 z-\cos^2 z}=2\sin z$.

5.488. $\sin^{-1}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2}+\operatorname{ctg}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2}=4\cos^2 2x$.

5.489. $2-\sin x=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}.$

5.490. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x.$

5.491. $\log_{0,5\sin 2x}\sin x=1/2.$

5.492. $\log_{\sin x\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cos x}\cos x=1/4.$

5.493. Убедиться в том, что уравнение $2\operatorname{ctg}2x-3\operatorname{ctg}3x=\operatorname{tg}2x$ не имеет корней.

Решить системы уравнений (5.494—5.499):

5.494. $\begin{cases}\cos x-\cos y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

5.495. $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y,\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$

5.496. $\begin{cases}3\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}^3 y,\\ \cos x=\sin 2y.\end{cases}$

5.497. $\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3}.\end{cases}$

5.498. $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2\sin\left(y-\dfrac{3\pi}{4}\right),\\ \operatorname{tg}y+\operatorname{ctg}y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\end{cases}$

5.499. $\begin{cases}2\cos x=3\operatorname{tg}y,\\ 2\cos y=3\operatorname{tg}z,\\ 2\cos z=3\operatorname{tg}x.\end{cases}$

5.500. Найти x, y, z, если $\dfrac{\sin x}{1}=\dfrac{\sin y}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin z}{2}$, $x+y+z=\pi$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

ГЛАВА 6
ПРОГРЕССИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1° **Арифметическая прогрессия** (a_1 — первый член; d — разность; n — число членов; a_n — n-й член; S_n — сумма n первых членов):

$$a_n=a_1+d\,(n-1); \tag{6.1}$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d\,(n-1)}{2}\cdot n; \tag{6.2}$$

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1; \tag{6.3}$$

$$a_k+a_m=a_p+a_q,\ \text{где } k+m=p+q. \tag{6.4}$$

2° **Геометрическая прогрессия** (b_1 — первый член; q — знаменатель ($q\neq 0$); n — число членов; b_n — n-й член ($b_n\neq 0$); S_n — сумма n первых членов):

$$b_n=b_1q^{n-1}; \tag{6.5}$$

$$S_n=\frac{b_1\,(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq 1); \tag{6.6а}$$

$$S_n=nb_1\ (q=1); \tag{6.6б}$$

$$b_k^2=b_{k-1}b_{k+1},\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1; \tag{6.7}$$

$$b_kb_m=b_pb_q,\ \text{где } k+m=p+q. \tag{6.8}$$

Если $|q|<1$, то при неограниченном увеличении n ($n\to\infty$) сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$, которое называют *суммой* бесконечной геометрической прогрессии и обозначают буквой S:

$$S=\frac{b_1}{1-q}. \tag{6.9}$$

Пример 1. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 21. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 2, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

□ Согласно формуле (6.2), имеем $S_3=\frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=21$ или $a_1+d=7$. По условию, a_1-1, a_1+d-1, a_1+2d+2 — три последовательных члена геометрической прогрессии. Используя формулу (6.7), получаем $(a_1+d-1)^2=(a_1+2d+2)\,(a_1-1)$, откуда после замены $a_1=7-d$ и раскрытия скобок приходим к квадратному уравнению $d^2+3d-18=0$, т. е. $d_1=3$, $d_2=-6$. Условию удовлетворяет только $d_1=3$; тогда $a_1=4$. Далее, находим $b_1=a_1-1=3$, $b_2=a_1+d-1=6$ и, следовательно, $q=2$. Наконец, по формуле (6.6) получим

$$S_8=\frac{a_1\,(q^8-1)}{q-1}=\frac{3\,(2^8-1)}{2-1}=765. \ ■$$

Пример 2. Найти сумму шести первых членов арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна учетверенному квадрату этого числа.

□ Используя условие и формулу (6.2), имеем

$$\frac{2a_1+d\,(n-1)}{2}\cdot n=4n^2 \ \text{ или } \ 2a_1-d=(8-d)\,n.$$

Последнее равенство должно выполняться при определенных a_1, d и при любых значениях n, а это возможно только тогда, когда $d=8$. Значит, $a_1=4$, откуда находим

$$S_6=\frac{2a_1+5d}{2}\cdot 6=144. \ ■$$

Пример 3. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности $\{u_n\}$ выражается формулой $S_n=n^2+2n$. Найти девятый член этой последовательности и доказать, что $\{u_n\}$ является арифметической прогрессией.

□ Обозначим n-й член последовательности через u_n. Тогда $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$; $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$, или $u_{n+1}=S_{n+1}-S_n$. Следовательно, $u_9=S_9-S_8=9^2+18-8^2-16=19$. Далее, рассмотрим разность двух любых соседних членов последовательности:

$$u_{n+1}-u_n=(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=$$
$$=(n+1)^2+2\,(n+1)-2n^2-4n+(n-1)^2+2\,(n-1)=2.$$

Это означает, что $\{u_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью $d=2$. ■

Пример 4. Решить уравнение $1+2x+4x^2+\ldots+(2x)^n+\ldots=3{,}4-1{,}2x$, если известно, что $|x|<0{,}5$.

□ Левая часть уравнения есть сумма бесконечной геометрической прогрессии, причем $b_1=1$ и $|q|=|2x|<1$, так как $|x|<0{,}5$. Согласно формуле (6.9), имеем

$$1+2x+4x^2+\ldots=\frac{1}{1-2x}$$

или

$$\frac{1}{1-2x}=3{,}4-1{,}2x;\ (3{,}4-1{,}2x)\,(1-2x)=1;$$
$$2{,}4x^2-8x+2{,}4=0;\ 3x^2-10x+3=0,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=1/3$. Условию удовлетворяет только корень $x=1/3$. ■

Группа А

6.001. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 260 тыс. руб., а за каждое следующее кольцо платили на 20 тыс. руб. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 400 тыс. руб. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $224\frac{4}{9}$ тыс. руб. Сколько колец было установлено?

6.002. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого ее членов равно 65/72. Найти сумму 17 первых членов этой прогрессии.

6.003. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на 1/2 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

6.004. Найти три первых члена a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1+a_3+a_5=-12$ и $a_1 a_3 a_5=80$.

6.005. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена этой прогрессии.

6.006. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

6.007. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

6.008. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна — 49, а сумма средних членов равна 14.

6.009. Найти третий член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$, сумма которой равна 8/5, второй член равен — 1/2.

6.010. Найти три первых члена бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна 93/16.

6.011. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найти эти числа.

6.012. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов этой прогрессии.

6.013. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму 10 первых членов арифметической прогрессии.

6.014. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=4n^2-3n$. Найти три первых члена этой прогрессии.

6.015. Вычислить $(1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+\ldots+199^2)-(2^2+4^2+6^2+$ $+\ldots+(2n)^2+\ldots+200^2)$.

6.016. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

6.017. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

6.018. Знаменатель геометрической прогрессии равен 1/3, четвертый член этой прогрессии равен 1/54, а сумма всех ее членов равна 121/162. Найти число членов прогрессии.

6.019. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $a_4-a_2=-45/32$ и $a_6-a_4=-45/512$.

6.020. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести первых членов равна 1820.

6.021. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма ее n первых членов равна $5n^2$. Найти разность этой прогрессии и три первых ее члена.

6.022. Произведение трех первых членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

6.023. Решить уравнения:

а) $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=13/6$, где $|x|<1$;

б) $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$, где $|x|<1$.

6.024. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна — 22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

6.025. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 153,6. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

6.026. Найти натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведения трех и четырех первых ее членов равны соответственно 6 и 24.

6.027. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно 135/16. Найти сумму 15 первых членов этой прогрессии.

6.028. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.

6.029. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

6.030. Найти знаменатель q бесконечной геометрической прогрессии ($|q|<1$), у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов.

6.031. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определить число сторон этого многоугольника.

6.032. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

6.033. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q|<1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии 12. Найти прогрессию.

6.034. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 65, а сумма их логарифмов по основанию 15 равна 3. Найти эти члены прогрессии.

6.035. Найти знаменатель ($|q|<1$) бесконечной геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих членов как $2:3$.

Группа Б

6.036. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

6.037. Доказать, что любой член арифметической прогрессии начиная со второго есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

6.038. Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены a_{2n} и a_{2m} такие, что $a_{2n}/a_{2m}=-1$. Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то каков номер этого члена?

6.039. Даны две арифметические прогрессии. Первый и пятый члены первой прогрессии равны соответственно 7 и -5. У второй прогрессии первый член равен 0, а последний член равен 7/2. Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

6.040. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

6.041. Найти целое положительное число n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3\,(n-1))+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right)=137.$$

6.042. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

6.043. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

6.044. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

6.045. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

6.046. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

6.047. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно 14/3.

6.048. Доказать, что любой член знакоположительной геометрической прогрессии начиная со второго равен среднему пропорциональному между любыми членами, равноудаленными от него.

6.049. Найти сумму семи первых членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$, если ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно 16/3.

6.050. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

6.051. Найти сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

6.052. Даны две бесконечные геометрические прогрессии со знаменателем $|q|<1$, различающиеся только знаком их знаменателей. Их суммы соответственно равны S_1 и S_2. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов любой из данных прогрессий.

6.053. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n=a_1 a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

6.054. Доказать, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

6.055. Первый член некоторой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равен 1, а ее сумма равна S. Из квадратов членов этой прогрессии составлена новая бесконечная геометрическая прогрессия. Найти ее сумму.

6.056. Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, зная, что ее первый член равен $7-3\sqrt{5}$ и что каждый ее член начиная со второго равен разности двух соседних с ним членов.

6.057. В арифметической прогрессии сумма ее m первых членов равна сумме n первых членов ($m\neq n$). Доказать, что в этом случае сумма ее первых $m+n$ членов равна нулю.

6.058. Известно, что L, M, N — соответственно l-й, m-й, n-й члены геометрической прогрессии. Показать, что $L^{m-n}M^{n-l}N^{l-m}=1$.

6.059. Числа a, b, c, одно из которых кратно 7, составляют арифметическую прогрессию с разностью 7. Показать, что число abc делится на 294.

6.060. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n}=S_n+\frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k — сумма k первых членов прогрессии).

6.061. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3,$$

где x — целое положительное число.

6.062. Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, у которой третий член был бы больше первого на 36.

6.063. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и 3/4, а первый член и знаменатель второй прогрессии равны соответственно 4 и 2/3. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений составит 158,75. Найти число членов этих прогрессий.

6.064. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

6.065. В конечной геометрической прогрессии известны ее первый член a, последний член b и сумма S всех ее членов. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.

6.066. В некоторой геометрической прогрессии, содержащей $2n$ положительных членов, произведение первого члена на последний равно 1000. Найти сумму десятичных логарифмов всех членов прогрессии.

6.067. Сумма трех чисел равна 11/18, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

6.068. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Группа В

6.069. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

6.070. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n=2n^2+3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

6.071. Найти сумму 19 первых членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., если известно, что $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

6.072. Длины сторон треугольника представляют собой три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии. Сравнить знаменатель этой прогрессии с числом 2.

6.073. Найти сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, обладающей тем свойством, что ее три первых члена, сумма которых равна 148/9, являются одновременно первым, четвертым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии.

6.074. Числа $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+...+\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

6.075. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35351.

6.076. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

6.077. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна — 40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти эту прогрессию.

6.078. Даны две прогрессии: геометрическая с положительными членами a_n (знаменатель равен q, где $q \neq 1$) и возрастающая арифметическая с членами b_n (разность равна d). Найти x из условия $\log_x a_n - b_n = \log_x a_1 - b_1$.

6.079. Найти сумму $1+2 \cdot 3+3 \cdot 7+...+n\,(2^n-1)$.

6.080. Найти сумму $1 \cdot 3+3 \cdot 9+5 \cdot 27+...+(2n-1) \cdot 3^n$.

6.081. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известны их сумма S и сумма σ их обратных величин.

6.082. Корни уравнения $x^4-10x^2+a=0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти a.

6.083. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа x, y и z в указанном порядке составляли геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(x^2+y^2)(y^2+z^2)=(xy+yz)^2$.

6.084. В соревновании по волейболу участвовало n команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу. За каждую игру выигравшей команде засчитывалось одно очко, за проигрыш очки не начислялись; ничьих в волейболе нет. По окончании соревнований выяснилось, что набранные командами очки образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

6.085. В угол, содержащий 60°, вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность начиная со второй касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти кругов больше площади меньшего круга?

6.086. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, обладающей следующим свойством: если от ее первого члена отнять 16/27, то первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а если после этого от третьего члена отнять 16/189, то снова получится геометрическая прогрессия.

6.087. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, расположенных на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

6.088. Вычислить значение дроби $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^8+x^6+x^4+x^2+1}$ при $x=-0{,}05$.

6.089. Сократить дробь

$$\frac{x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}.$$

6.090. Найти условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

ГЛАВА 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

Свойства показательной функции

$$y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$$

1^0. Область определения функции — множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

2^0. Область значений функции — множество $\mathbf{R}_+$ всех положительных чисел: $a^x>0$ для любого действительного значения x.

3^0. При $a>1$ функция возрастает, т. е. если $x_1<x_2$, то $a^{x_1}<a^{x_2}$. При $0<a<1$ функция убывает, т. е. если $x_1<x_2$, то $a^{x_1}>a^{x_2}$.

4^0. Если $a^{x_1}=a^{x_2}$, то $x_1=x_2$.

Свойства логарифмической функции

$$y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$$

1^0. Область определения функции — множество $\mathbf{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

2^0. Область значений функции — множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

3^0. При $a>1$ функция возрастает, т. е. если $x_2>x_1>0$, то $\log_a x_2>\log_a x_1$. При $0<a<1$ функция убывает, т. е. если $x_2>x_1>0$, то $\log_a x_2<\log_a x_1$.

Свойства логарифмов

1^0. Если $x>0$, то

$$x=a^{\log_a x} \tag{7.1}$$

(основное логарифмическое тождество).

2^0. Логарифм основания равен единице:

$$\log_a a=1. \tag{7.2}$$

3^0. Логарифм единицы равен нулю:

$$\log_a 1=0. \tag{7.3}$$

4^0. Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то

$$\log_a (x_1 x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2 \tag{7.4}$$

(формула для логарифма произведения);

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2 \qquad (7.5)$$

(формула для логарифма частного).

5^0. Если $x>0$, то

$$\log_a x^p=p\log_a x, \qquad (7.6)$$

где p — любое действительное число (формула для логарифма степени).

6^0. Если $x>0$, то

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (7.7)$$

для любого действительного числа $b>0$ и $b\neq 1$ (формула перехода к новому основанию логарифма).

В частности,

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a} \text{ или } \log_a b\cdot\log_b a=1; \qquad (7.8)$$

$$\log_a b=\log_{a^p} b^p=p\log_{a^p} b \ (p\in\mathbf{R},\ p\neq 0). \qquad (7.9)$$

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1^0. Показательное уравнение

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1) \qquad (7.10)$$

равносильно уравнению

$$f(x)\log_c a=g(x)\log_c b, \qquad (7.11)$$

которое получается логарифмированием уравнения (7.10) по какому-либо основанию $c>0$, $c\neq 1$.

В частности, уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

2^0. Корнями уравнения

$$(u(x))^{f(x)}=(u(x))^{g(x)} \qquad (7.12)$$

считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} u(x)>0, \\ u(x)\neq 1, \\ f(x)=g(x) \end{cases} \qquad (7.13)$$

и те значения x, для которых $u(x)=1$, если при этих значениях определены $f(x)$

и $g(x)$. Функция вида $(u(x))^{f(x)}$ определена только при $u(x)>0$, поэтому те значения x, которые формально удовлетворяют равенству (7.12), но при которых $u(x)\leqslant 0$, не принято считать корнями уравнения (7.12).

3°. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x)=b \tag{7.14}$$

равносильно уравнению

$$f(x)=a^b. \tag{7.15}$$

4°. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\ (a>0,\ a\neq 1) \tag{7.16}$$

равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \tag{7.17}$$

Для решения уравнения (7.16) переходят только к одной из этих систем (той, которая проще) либо решают уравнение $f(x)=g(x)$, которое может иметь корни, посторонние для исходного уравнения, и проверяют каждый из них подстановкой в исходное уравнение.

5°. Для решения уравнений

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a u(x), \tag{7.18}$$

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a u(x), \tag{7.19}$$

$$p\log_a f(x)=\log_a u(x), \tag{7.20}$$

используя формулы (7.4)—(7.6), их приводят соответственно к виду:

$$\log_a (f(x)\cdot g(x))=\log_a u(x), \tag{7.21}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)}=\log_a u(x), \tag{7.22}$$

$$\log_a (f(x))^p=\log_a u(x) \tag{7.23}$$

и далее решают так, как указано в п. 4°.

Из найденных корней следует включить в ответ те, для которых $f(x)>0$, $g(x)>0$, $u(x)>0$, либо проверить каждый из них подстановкой в исходное уравнение.

6°. Если при решении уравнения с помощью формул (7.4)—(7.6) производятся преобразования вида $\log_a (f(x)\cdot g(x))$, $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a (f(x))^p$, где p — четное число, то возникает опасность потери корней заданного уравнения. Чтобы предотвратить возможную потерю корней, надо пользоваться указанными формулами в таком виде:

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|, \tag{7.24}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|, \tag{7.25}$$

$$\log_a (f(x))^p = p \log |f(x)|, \ p \text{ — четное число.} \tag{7.26}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}} - 0{,}04^{1-x} = 0$.

☐ Здесь все степени можно привести к одному основанию 5. Имеем: $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $0{,}2^{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = 5^{-\frac{1}{2x}}$, $0{,}04^{1-x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1-x} = 5^{-2(1-x)}$. Тогда уравнение примет вид

$$5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2x}} - 5^{-2(1-x)} = 0 \text{ или } 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}} = 5^{-2(1-x)}.$$

Согласно указанию 1^0, перейдем к равносильному уравнению $\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = -2(1-x)$. После преобразований получим $\begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 1/4$. ■

Пример 2. Решить уравнение

$$35\cdot 3^{x^2} - 35\cdot 5^{2x} - 3^{x^2} + 5^{2x} = 0.$$

☐ Группируя подобные члены, имеем $3^{x^2}(35-1) - 5^{2x}(35-1) = 0$ или $3^{x^2} = 5^{2x}$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 (см. указание 1^0), получаем равносильное уравнение

$$x^2 \lg 3 = 2x \lg 5, \text{ или } x(x \lg 3 - 2\lg 5) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 2\lg 5/\lg 3$. ■

Пример 3. Решить уравнение $4^{\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$.

☐ Так как $4^{\sqrt{x}} = 2^{2\sqrt{x}}$ и $2^{\sqrt{x}-1} = 2^{\sqrt{x}}\cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}}$, то данное уравнение примет вид $2^{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Произведем замену переменной $2^{\sqrt{x}} = y$, где $y > 0$ в силу свойства 2^0 показательной функции. Тогда получим уравнение $y^2 - \frac{9}{2}y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = 4$, $y_2 = 1/2$ положительны. Из уравнения $2^{\sqrt{x}} = 4$ имеем $2^{\sqrt{x}} = 2^2$, $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$. Из уравнения $2^{\sqrt{x}} = 1/2$ находим $2^{\sqrt{x}} = 2^{-1}$, откуда $\sqrt{x} = -1$, что невозможно. Итак, получаем ответ: $x = 4$. ■

Пример 4. Решить уравнение $|x-2|^{x^2-2x} = |x-2|^{5x-10}$.

☐ Согласно указанию 2^0, корнями уравнения являются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} |x-2|>0, \\ |x-2|\neq 1, \\ x^2-2x=5x-10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq 3,\ x\neq 1, \\ x^2-7x+10=0 \end{cases}$$

и, быть может, решения уравнения $|x-2|=1$. Из двух корней уравнения $x^2-7x+10=0$ решением системы является одно число $x=5$, а требованию $|x-2|=1$ удовлетворяют $x=3$ и $x=1$, также являющиеся решением системы, поскольку при этих значениях x функции x^2-2x и $5x-10$ определены. Итак, получаем ответ: $x=1$, $x=3$, $x=5$. ■

Пример 5. Решить уравнение $2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1)$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, квадратного корня и указание 5⁰, получаем систему, равносильную заданному уравнению:

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}-1>0, \\ \lg\dfrac{x^2}{36}=\lg\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ \dfrac{x^2}{36}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}. \end{cases}$$

Обе части уравнения разделим на x (при этом не произойдет потери корней, так как $x>0$) и умножим на $36(\sqrt{x}-1)^2$ (причем не появятся посторонние корни, так как $x\neq 1$). Тогда получим систему $\begin{cases} x>1, \\ x(\sqrt{x}-1)^2=36. \end{cases}$ Из уравнения $(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36$ находим $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq -6$, поскольку $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0$. Далее, имеем $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$ или $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0$. Значит, $\sqrt{x}=3$, откуда $x=9>1$; $\sqrt{x}=-2$, что невозможно. Итак, получаем ответ: $x=9$. ■

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/16}(1-x^2)^2+2.$$

□ Перейдем к основанию 1/4. Имеем:

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}=\log_{1/4}(1+x) \text{ [см. формулу (7.7) или (7.9)]};$$

$$\log_{1/16}(1-x^2)^2=\frac{\log_{1/4}(1-x^2)^2}{\log_{1/4}\dfrac{1}{16}}=\frac{2\log_{1/4}|1-x^2|}{2}=\log_{1/4}|1-x^2|$$

[см. формулу (7.7) и указание 6⁰];

$$2=\log_{1/4}\frac{1}{16} \text{ [см. формулу (7.6)]}.$$

В результате приходим к уравнению

$$\log_{1/4}(1+x)+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/4}|1-x^2|+\log_{1/4}\frac{1}{16}.$$

Учитывая область определения логарифмической функции, находим

$$\begin{cases}1+x>0, \\ 1-x>0;\end{cases} \quad \begin{cases}x>-1, \\ x<1;\end{cases} \quad -1<x<1.$$

При этих значениях x имеем $1-x^2>0$ и $|1-x^2|=1-x^2$. Далее, согласно указанию 5^0, получим

$$\log_{1/4}(1+x)(1-x)^3=\log_{1/4}\frac{1-x^2}{16}.$$

Это уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}-1<x<1, \\ (1+x)(1-x)^3=(1-x^2)/16.\end{cases}$$

Обе части уравнения делим на $(1+x)(1-x)>0$, причем потери корней не произойдет. Тогда получим

$$\begin{cases}-1<x<1, \\ (1-x)^2=1/16.\end{cases}$$

Из уравнения $1-x=1/4$ находим $x=3/4$, причем $x\in(-1,\ 1)$. Из уравнения $1-x=-1/4$ имеем $x=5/4$, т. е. x не удовлетворяет неравенствам $-1<x<1$. Итак, получаем ответ: $x=3/4$. ■

Пример 7. Решить уравнение $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$.

□ Так как логарифмическая функция определена при $x>0$, то левая и правая части данного уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10 и используя формулы (7.6) и (7.2), получаем

$$\frac{\lg x+5}{3}\lg x=\lg x+1.$$

Произведем замену переменной $y=\lg x$ и решим уравнение $y^2+5y=3y+3$. Имеем $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=1$. Из уравнения $\lg x=-3$ получаем $x=10^{-3}$, а из уравнения $\lg x=1$ находим $x=10$. Итак, $x=0{,}001$, $x=10$. ■

Пример 8. Решить уравнение $\log_x(2x^2-4x+3)=2$.

□ Используя указание 3^0 и учитывая ограничения, налагаемые на основание логарифма, записываем равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases}x>0;\ x\neq 1, \\ 2x^2-4x+3=x^2.\end{cases}$$

Решаем квадратное уравнение $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=1$ (не подходит). Итак, $x=3$. ■

Пример 9. Решить уравнение $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, ограничения, налагаемые на основание логарифма, и формулу (7.8), получаем равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases} x+6>0, \\ x>0;\ x\neq 1, \\ \log_3(x+6)\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=2. \end{cases}$$

Решаем уравнение этой системы. Так как $x\neq 1$, то $\log_3 x\neq 0$ и уравнение принимает вид $\log_3(x+6)=2\log_3 x$ или $\log_3(x+6)=\log_3 x^2$ или $x^2=x+6$ (см. указание 4°). Находим корни этого уравнения: $x_1=-2$, $x_2=3$. Из них только $x=3$ удовлетворяет условиям $x+6>0$, $x>0$ и $x\neq 1$. Итак, получаем ответ: $x=3$. ■

Пример 10. Решить уравнение $\lg x^2=0{,}25\lg(4x+3)^4$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, заключаем, что $x\neq 0$, $4x+3\neq 0$. Для преобразования $\lg(4x+3)^4$ применяем формулу (7.26) (см. указание 6°). Тогда $0{,}25\lg(4x+3)^4=0{,}25\cdot 4\lg|4x+3|=\lg|4x+3|$. В результате получим уравнение $\lg x^2=\lg|4x+3|$, равносильное заданному.

Если $4x+3>0$, т. е. $x>-3/4$, то $|4x+3|=4x+3$ и $x^2=4x+3$. Находим корни этого уравнения: $x_1=2+\sqrt{7}>-3/4$, $x_2=2-\sqrt{7}>-3/4$. Если $4x+3<0$, т. е. $x<-3/4$, то $|4x+3|=-4x-3$ и $x^2=-4x-3$. Находим корни этого уравнения: $x_1=-1<-3/4$, $x_2=-3<-3/4$. Итак, получаем ответ: $2\pm\sqrt{7}$; -1; -3. ■

Замечание. Выражение $0{,}25\lg(4x+3)^4$ можно заменить тождественно равным ему выражением $\lg\left((4x+3)^4\right)^{0,25}$ (см. указание 5°), но утверждение $\lg\left((4x+3)^4\right)^{0,25}=\lg(4x+3)$ было бы неверным. Дело в том, что при использовании правила возведения степени в степень необходимо учитывать следующее свойство степенной функции: при любом $n\in\mathbb{N}$ $\left(x^{2n}\right)^{1/(2n)}=|x|$, а не x [см. формулу (1.24)]. Поэтому $\lg\left((4x+3)^4\right)^{0,25}=\lg\left((4x+3)^4\right)^{1/4}=\lg|4x+3|$.

Группа А

Решить уравнения (7.001—7.040):

7.001. $\dfrac{1}{16\sqrt{2}}\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1-x}{2}}$.

7.002. $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

7.003. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81$.

7.004. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}$.

7.005. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x+10}}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0$.

7.006. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1$.

7.007. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$. **7.008.** $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

7.009. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}$. **7.010.** $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

7.011. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^5$. **7.012.** $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0$.

7.013. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}$. **7.014.** $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}$.

7.015. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$. **7.016.** $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}$.

7.017. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$. **7.018.** $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$.

7.019. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$. **7.020.** $10^{2/x}+25^{1/x}=4{,}25\cdot 50^{1/x}$.

7.021. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$. **7.022.** $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

7.023. $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$. **7.024.** $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

7.025. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$. **7.026.** $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$.

7.027. $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$. **7.028.** $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$.

7.029. $\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}}$. **7.030.** $\lg^2 x^2=1$.

7.031. $\lg^2 10x+\lg x=19$. **7.032.** $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

7.033. $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1$. **7.034.** $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

7.035. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0$. **7.036.** $x^{2\log_2 x}=8$.

7.037. $x^{\log_3 x}=\sqrt[4]{3x^3}$. **7.038.** $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

7.039. $x^{\lg x}=1000x^2$. **7.040.** $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}$.

7.041. Найти натуральное число n из равенства

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\ldots 3^{3n-1}=27^5.$$

7.042. Вычислить сумму 2^x+2^{-x}, если $4^x+4^{-x}=23$.

Упростить (7.043—7.051):

7.043. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25}49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$. **7.044.** $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.045. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.046. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

7.047. $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.048. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

7.049. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

7.050. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{409}\left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)$.

7.051. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}}\ldots N^{\frac{1}{\log_{512}N}}\right)^{\frac{1}{15}}$ (основания логарифмов представляют собой идущие подряд натуральные степени числа 2).

Упростить, указав допустимые значения букв (7.052—7.057):

7.052. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}}a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49}a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}a}-1\right)$.

7.053. $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{1/a}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.054. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b-2a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.055. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{\frac{-2}{\log_8 4}}-a^2}{1-a}$.

7.056. $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab}b)\log_b a-1$.

7.057. $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

7.058. Если $\log_a 27=b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$?

7.059. Вычислить $\log_{1/2} 28$, если $\log_7 2=a$.

7.060. Найти $\lg^2 \sqrt{x}$, если известно, что $\log_x 100=a$.

7.061. Найти $\log_9 2{,}97$, если известно, что $\lg 3=a$ и $\lg 11=b$.

7.062. Показать, что при условии $x>0$ и $y>0$ из равенства $x^2+4y^2=12xy$ следует равенство

$$\lg(x+2y)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y).$$

7.063. Доказать, что если $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, то $x=\pm\sqrt{\dfrac{\log_2\log_2 z}{2}}$, и указать все значения z, при которых x принимает действительные значения.

Решить уравнения (7.064—7.144):

7.064. $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$.

7.065. $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$.

7.066. $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$.

7.067. $\dfrac{\log_5(\sqrt{2x-7}+1)}{\log_5(\sqrt{2x-7}+7)}=0{,}5$.

7.068. $\log_2(\sqrt{4x+5}-1)=0{,}5\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$.

7.069. $\lg(3-x)-\dfrac{1}{3}\lg(27-x^3)=0$.

7.070. $\dfrac{\lg x^2}{\lg(6x-5)}=1$.

7.071. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$.

7.072. $\log_2 182-2\log_2\sqrt{5-x}=\log_2(11-x)+1$.

7.073. $\log_5\sqrt{x-9}-\log_5 10+\log_5\sqrt{2x-1}=0$.

7.074. $\dfrac{2-\lg 4+\lg 0{,}12}{\lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg 2x}=1$.

7.075. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$.

7.076. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1$.

7.077. $0{,}5\,(\lg(x^2-55x+90)-\lg(x-36))=\lg\sqrt{2}$.

7.078. $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$.

7.079. $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1$.

7.080. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

7.081. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

7.082. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$.

7.083. $\log_3(x-3)^2+\log_3|x-3|=3$.

7.084. $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=2-0{,}5\lg 625$.

7.085. $2\lg x-\lg 4=-\lg(5-x^2)$.

7.086. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2)$.

7.087. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1$.

7.088. $\dfrac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1$.

7.089. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0$.

7.090. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{2}=0$.

7.091. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0$.

7.092. $\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1$.

7.093. $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0$.

7.094. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}$.

7.095. $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^3-2)+\log_{0,2}(x-2)=4$.

7.096. $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$. **7.097.** $\log_{1/2}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$.

7.098. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10$. **7.099.** $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

7.100. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1$. **7.101.** $\log_y x+\log_x y=2$.

7.102. $\log_5 x+\log_x 25=\operatorname{ctg}^2\dfrac{25\pi}{6}$.

7.103. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=2/3$.

7.104. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=10/3$.

7.105. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x)$.

7.106. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}$.

7.107. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0,5=0$.

7.108. $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right)$.

7.109. $3\log_5 2+2-x=\log_5(3^x-5^{2-x})$.

7.110. $0,25^{\log_2\sqrt{x+3}-0,5\log_2(x^2-9)}=\sqrt{2(7-x)}$.

7.111. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$.

7.112. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$.

7.113. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$.

7.114. $4^{\log_2 x}+x^2=8$.

7.115. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

7.116. $x^{\frac{1}{\lg x}}=10$.

7.117. $3^{2+\log_9 25}=5\cdot 9^{2/x}$.

7.118. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0$.

7.119. $\lg(3^x-2^{4-x})=2+0,25\lg 16-0,5x\lg 4$.

7.120. $\log_3(81^x+3^{2x})=3\log_{27}90$.

7.121. $3x-\log_6 8^x=\log_6(3^{3x}+x^2-9)$.

7.122. $\log_6(3^{x^2}+1)-\log_6(3^{2-x^2}+9)=\log_6 2-1$.

7.123. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0$.

7.124. $\lg(10^{\lg(x^2-21)})-2=\lg x-\lg 25$.

7.125. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11$.

7.126. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6$.

7.127. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$.

7.128. $\log_3(3^x-8)=2-x$.

7.129. $2x-\lg(5^{2x}+4^x-16)=x\lg 4$.

7.130. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

7.131. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$.

7.132. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0,2(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x})$.

7.133. $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8$.

7.134. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0$.

7.135. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

7.136. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0$.

7.137. $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)+\lg 10=2.$

7.138. $5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}2^2\cdot 25^{-0{,}5\log_2 x}=1.$

7.139. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

7.140. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

7.141. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

7.142. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

7.143. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1).$

7.144. $\log_2(25^{x+3}-1)=2-\log_2(5^{x+3}+1).$

Решить системы уравнений (**7.145—7.167**):

7.145. $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\3^x-2^{y/2}=25.\end{cases}$

7.146. $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\x^{y^2+2}=125.\end{cases}$

7.147. $\begin{cases}x^{\log_y x}=2,\\y^{\log_x y}=16.\end{cases}$

7.148. $\begin{cases}4^{x+y}=2^{y-x},\\4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5.\end{cases}$

7.149. $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$

7.150. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=6,\\3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$

7.151. $\begin{cases}(x+y)\,2^{y-2x}=6{,}25,\\(x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5.\end{cases}$

7.152. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\x^2-y=20.\end{cases}$

7.153. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=5/2,\\xy=27.\end{cases}$

7.154. $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2{,}5,\\\lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6.\end{cases}$

7.155. $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\\lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

7.156. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2-\lg 5,\\\lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1.\end{cases}$

7.157. $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\ x+y-20=0.\end{cases}$

7.158. $\begin{cases}0{,}5\log_2 x-\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$

7.159. $\begin{cases}\lg (x^2+y^2)=2,\\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y.\end{cases}$

7.160. $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}} xy=8,\\ \log_3\left(\log_{1/9}\dfrac{x}{y}\right)=0.\end{cases}$

7.161. $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1,\\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$

7.162. $\begin{cases}y=1+\log_4 x,\\ x^y=4^6.\end{cases}$

7.163. $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-2y^2-8=0.\end{cases}$

7.164. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=4,\\ \log_4 x+\log_2 y=5.\end{cases}$

7.165. $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg (y+x)^2-\lg x=2\lg 3.\end{cases}$

7.166. $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

7.167. $\begin{cases}8(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3},\\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3.\end{cases}$

Группа Б

Решить уравнения (7.168—7.186):

7.168. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}$.

7.169. $\left(3\left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=\dfrac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

7.170. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

7.171. $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$.

7.172. $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$.

7.173. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

7.174. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$ (выражение в правой части — бесконечная геометрическая прогрессия).

7.175. $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0$.

7.176. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

7.177. $\dfrac{8^x+2^x}{4^x-2}=5.$

7.178. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

7.179. $49^{1+\sqrt{x-2}}-344\cdot 7^{\sqrt{x-2}}=-7.$

7.180. $9^x+6^x=2^{2x+1}.$

7.181. $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0.$

7.182. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14.$

7.183. $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24.$

7.184. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

7.185. $5^x\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

7.186. $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26.$

Решить уравнения и исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет решение и при каких — нет **(7.187—7.188):**

7.187. $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}.$

7.188. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}}=4^{\frac{1}{x}}.$

Упростить выражения и указать, при каких значениях букв возможны преобразования **(7.189—7.195):**

7.189. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}.$

7.190. $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}+2)^{1/2}-\log_b a-\log_a b.$

7.191. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}.$

7.192. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}.$

7.193. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a/b^3}}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12}).$

7.194. $(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$ при $a>1.$

7.195. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{0,5\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

7.196. Известно, что $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ и $x\neq 1$. Найти $\log_{abcd} x$.

7.197. Известно, что $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Найти зависимость α от γ.

7.198. Зная, что $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показать, что $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

7.199. Доказать, что $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.200. Доказать, что $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

7.201. Упростить выражение $\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\times$ $\times\log_{a-b} m$, если известно, что $m^2=a^2-b^2$.

7.202. Найти $\log_{30}8$, если известно, что $\lg 5=a$ и $\lg 3=b$.

7.203. Зная, что $\lg 2=a$ и $\log_2 7=b$, найти $\lg 56$.

Решить уравнения (7.204—7.276):

7.204. $\log_2(2-x)-\log_2(2-\sqrt{x})=\log_2\sqrt{2-x}-0,5$.

7.205. $\lg(x^3+8)-0,5\lg(x^2+4x+4)=\lg 7$.

7.206. $\log_2 3+2\log_4 x=x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$.

7.207. $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[4]{3}} x+\log_{\sqrt[6]{3}} x+\ldots+\log_{\sqrt[16]{3}} x=36$.

7.208. $\log_{10} x+\log_{\sqrt{10}} x+\log_{\sqrt[3]{10}} x+\ldots+\lg_{\sqrt[10]{10}} x=5,5$.

7.209. $\log_2\log_3(x^2-16)-\log_{1/2}\log_{1/3}\dfrac{1}{x^2-16}=2$.

7.210. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$.

7.211. $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_3(x^3)+\log_2(x^2)-6$.

7.212. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ldots\log_n(n+1)=10$ $(n\in\mathbb{N})$.

7.213. $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{1/5}\sqrt{3}$.

7.214. $\log_{a^2} x^2+\log_a(x-1)=\log_a\log_{\sqrt{5}} 5$.

7.215. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$.

7.216. $\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt[3]{a^2}} x=27.$

7.217. $\log_a \sqrt{4+x}+3\log_{a^2} (4-x)-\log_{a^4} (16-x^2)^2=2.$

При каких значениях a уравнение имеет решение?

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9 (x+1)}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{1/27} (x-1)}=\frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.219. $3\lg 2+\lg \left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=\lg \left(0,4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}+4}\right)+1.$

7.220. $5\log_{x/9} x+\log_{9/x} x^3+8\log_{9x^2} x^2=2.$

7.221. $\log_5 \left(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0,01\cdot 5^{3x+1}\right)=3x-1.$

7.222. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2 (3^x-13)=2.$

7.223. $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25} x-1}=26/5.$

7.224. $2^{\log_5 x^2}-2^{1+\log_5 x}+2^{\log_5 x-1}-1=0.$

7.225. $\frac{\log_2 (9-2^x)}{3-x}=1.$

7.226. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0.$

7.227. $2,5^{\log_3 x}+0,4^{\log_3 x}=2,9.$

7.228. $\frac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1}-16^{\log_3 \sqrt{x}}\right)+16^{\log_3 x}-\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}=0.$

7.229. $\log_2 \sqrt[3]{4}+\log_8 (9^{x+1}-1)=1+\log_8 (3^{x+1}+1).$

7.230. $25^{\log_4 x}-5^{\log_{16} x^2+1}=\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}-25^{\log_{16} x}.$

7.231. $5^{-2\log_{0,04} (3-4x^2)}+1,5\log_{1/8} 4^x=0.$

7.232. $6-\left(1+4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}} 3}\right)\log_7 x=\log_x 7.$

7.233. $\log_{12} (4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12} 27.$

7.234. $3^{\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^8}=27x^{30}.$

7.235. $(16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0,048)\lg (x^3+2x+1)=0.$

7.236. $2\lg x^2-(\lg (-x))^2=4.$

7.237. $3\lg (x^2)-\lg^2 (-x)=9.$

7.238. $4\log_4^2 (-x)+2\log_4 (x^2)=-1.$

7.239. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162.$

7.240. $x^{2\lg^2 x}=10x^3.$

7.241. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

7.242. $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3}=\frac{x^{3\lg x}}{10}.$

7.243. $x^{2-\lg^2 x-\lg x^2}-\frac{1}{x}=0.$

7.244. $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x}+\dfrac{6}{4^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}-4=0.$

7.245. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2.$

7.246. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5.$

7.247. $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$

7.248. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$

7.249. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1.$

7.250. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{x/2}x^2=0.$

7.251. $\log_{\sqrt{3}}x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}}3-\log_x 9}+4=0.$

7.252. $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}}2}{\log_{2x}2}+\log_{2x}2\cdot\log_{1/2}2x=0.$

7.253. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3.$

7.254. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

7.255. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1).$

7.256. $(\lg(x+20)-\lg x)\log_x 0{,}1=-1.$

7.257. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3.$

7.258. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{1/5}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x}.$

7.259. $\dfrac{\log_2(x^3+3x^2+2x-1)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)}=\log_{2x}x+\log_{2x}2.$

7.260. $\sqrt{\log_{0{,}04}x+1}+\sqrt{\log_{0{,}2}x+3}=1.$

7.261. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0.$

7.262. $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2{,}5.$

7.263. $\sqrt{3\log_2^2 x-1-9\log_x^2 2}=5.$

7.264. $\dfrac{2}{\sqrt{3\log_2\sqrt{x^2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}=0.$

7.265. $\lg\sqrt{10}-\lg 100=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)-2{,}5}.$

7.266. $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=4/3.$

7.267. $\sqrt{\log_5 x}+\sqrt[3]{\log_5 x}=2.$

7.268. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25.$

7.269. $|\log_{\sqrt{3}}x-2|-|\log_3 x-2|=2.$

7.270. $\log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m-x}} = 1.$

7.271. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$

7.272. $(3\log_a x - 2)\log_x^2 a = \log_{\sqrt{a}} x - 3 \quad (a>0,\ a\neq 1).$

7.273. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}}^2 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5.$

7.274. $\log_{\sqrt{x}}^2 a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2}{2a-x} = 1.$

7.275. $\log_x 2 - \log_4 x + 7/6 = 0.$

7.276. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\cdot\log_x 3\cdot\log_9(12-x).$

7.277. Найти точку пересечения графиков функций $y=\log_2(x+14)$ и $y=6-\log_2(x+2)$.

7.278. Найти точки пересечения графика функции $f(x)=x^{\lg x}-100\,000x^4$ с осью абсцисс.

Решить системы уравнений (7.279—7.314):

7.279. $\begin{cases} 2-\log_2 y = 2\log_2(x+y), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1. \end{cases}$

7.280. $\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0, \\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0. \end{cases}$

7.281. $\begin{cases} \left(0{,}48^{x^2+2}\right)^{2x-y}=1, \\ \lg(x+y)-1=\lg 6-\lg(x+2y). \end{cases}$

7.282. $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \frac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1. \end{cases}$

7.283. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y). \end{cases}$

7.284. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10}=1, \\ xy=15. \end{cases}$

7.285. $\begin{cases} \log_x y=2, \\ \log_{x+1}(y+23)=3. \end{cases}$

7.286. $\begin{cases}(x^2+y)\,2^{y-x^2}=1,\\ 9\,(x^2+y)=6^{x^2-y}.\end{cases}$ **7.287.** $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

7.288. $\begin{cases}9^{\sqrt[4]{xy^2}}-27\cdot 3^{\sqrt{y}}=0,\\ \frac{1}{4}\lg x+\frac{1}{2}\lg y=\lg\,(4-\sqrt[4]{x}).\end{cases}$

7.289. $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=1152,\\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.\end{cases}$ **7.290.** $\begin{cases}\lg\,(x^2+y^2)=1+\lg 8,\\ \lg\,(x+y)-\lg\,(x-y)=\lg 3.\end{cases}$

7.291. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}\,(x-y)=2.\end{cases}$

7.292. $\begin{cases}3^{1+2\log_3(y-x)}=48,\\ 2\log_5\,(2y-x-12)-\log_5\,(y-x)=\log_5\,(y+x).\end{cases}$

7.293. $\log_9\,(x^3+y^3)=\log_3\,(x^2-y^2)=\log_3\,(x+y).$

7.294. $\begin{cases}(\log_a x+\log_a y-2)\,\log_{18} a=1,\\ 2x+y-20a=0.\end{cases}$

7.295. $\begin{cases}(x+y)\,3^{y-x}=\frac{5}{27},\\ 3\log_5\,(x+y)=x-y.\end{cases}$ **7.296.** $\begin{cases}2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5,\\ \dfrac{3\,(x+y)}{x-y}+\dfrac{5\,(x-y)}{x+y}=8.\end{cases}$

7.297. $\begin{cases}x^y=2,\\ (2x)^{y^2}=64\ \ (x>0).\end{cases}$ **7.298.** $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,\\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5\frac{1}{y}}=1/3.\end{cases}$

7.299. $\begin{cases}x^{y^2-7y+10}=1,\\ x+y=8\ \ (x>0).\end{cases}$ **7.300.** $\begin{cases}2\,(\log_{1/y} x-2\log_{x^2} y)+5=0,\\ xy^2=32.\end{cases}$

7.301. $\begin{cases}yx^{\log_y x}=x^{2,5},\\ \log_3 y\cdot\log_y\,(y-2x)=1.\end{cases}$ **7.302.** $\begin{cases}\lg\,(x-3)-\lg\,(5-y)=0,\\ 4^{-1}\sqrt[y]{4^x}-8\sqrt[x]{8^y}=0.\end{cases}$

7.303. $\begin{cases}\log_x\,(3x+2y)=2,\\ \log_y\,(2x+3y)=2.\end{cases}$ **7.304.** $\begin{cases}x+y=12,\\ 2\,(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y)=5.\end{cases}$

7.305. $\begin{cases}x^{x^2-y^2-16}=1,\\ x-y=2\ (x>0).\end{cases}$ **7.306.** $\begin{cases}\lg\sqrt{(x+y)^2}=1,\\ \lg y-\lg|x|=\lg 2.\end{cases}$

7.307. $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^{x-\frac{y}{2}}=2^{3-y}, \\ y-x=3. \end{cases}$ **7.308.** $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

7.309. $\begin{cases} 10^{\lg\frac{1}{2}(x^2+y^2)+1,5}=100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9} \end{cases}$. **7.310.** $\begin{cases} y^x=1,5+y^{-x}, \\ y^{2,5+x}=64\ (y>0). \end{cases}$

7.311. $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg x+\lg y-\lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)}=-1. \end{cases}$

7.312. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$ **7.313.** $\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

7.314. $\begin{cases} x^{x-2y}=36, \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9 \end{cases}$

(найти только целочисленные решения).

Группа В

Упростить выражения и указать, при каких значениях букв возможны преобразования (7.315—7.320):

7.315. $\dfrac{\left(\lg b\cdot 2^{\log_2\lg b}\right)^{1/2}\cdot\lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0,5\lg\lg b^{1/2}}}}$.

7.316. $2\log_a^{1/2} b\left(\left(\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab}\right)^{1/2}-\left(\log_a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^{1/2}\right)$, если $a>1$ и $b>1$.

7.317. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np} p)\cdot\sqrt{\log_n p}$.

7.318. $\left(\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{1/2}-\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{1/2}\right)\cdot\sqrt{2}\log_a^{1/2} b$ при $a>1$.

7.319. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{\left(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b)\right)^{1/2}}$.

7.320. $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}-2)^{1/2}$ при $1<a<b$.

7.321. Заметив, что $675=9\cdot 75$, а $135=3\cdot 45$, дать без помощи таблиц ответ на вопрос о том, какое число больше: $\log_{135}675$ или $\log_{45}75$.

7.322. Уравнение $4^x+10^x=25^x$ имеет единственный корень. Найти его и выяснить: искомый корень положителен или отрицателен? больше или меньше единицы?

7.323. Показать, что $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

7.324. Выражение

$$\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$$

представить в форме произведения.

7.325. Показать, что

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=1/3.$$

7.326. При каких значениях p уравнение

$$\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$$

имеет единственный корень?

7.327. При каких значениях a уравнение

$$2\lg(x+3)=\lg(ax)$$

имеет единственный корень?

7.328. Найти x ($x\in\mathbf{Z}$), если $(\sqrt[3]{0,5}+\sqrt[3]{4})^x=13,5$.

Решить уравнения (7.329—7.353):

7.329. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$.

7.330. $\left(1+\log_x\dfrac{4-x}{10}\right)\cdot\lg x=\lg\lg 10^3-1$.

7.331. $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$.

7.332. $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-0,5}=3^{\log_{16}x+0,5}-2^{2\log_{16}x-1}$.

7.333. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

7.334. $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.335. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 0,25^{-\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}-1=0$.

7.336. $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg p$.

7.337. $\log_4 x+\log_x 2-\log_4\sqrt{x}=1$.

7.338. $\log_k x+\log_{\sqrt{k}}x+\ldots+\log_{\sqrt[k]{k}}x=\dfrac{k+1}{2}$ ($k\in\mathbf{N}$).

7.339. $2-\log_{b^2}(1+x)=3\log_b\sqrt{x-1}-\log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.340. $m^{1+\log_3 x}+m^{1-\log_3 x}=m^2+1$ ($m>0$, $m\neq 1$).

7.341. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

7.342. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1 \quad (a>0)$.

7.343. $P^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=P^6 \quad (P>0)$.

7.344. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

7.345. $(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x}=1$.

7.346. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

7.347. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12}x$ (ограничиться отысканием целого корня).

7.348. $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5,(3)\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)}$.

7.349. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.

7.350. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$.

7.351. $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3 \dfrac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

7.352. $\log_{x+3}(3-\sqrt{1-2x+x^2})=1/2$.

7.353. $\sqrt{\log_2(2x^2)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$.

Решить системы уравнений (**7.354—7.360**):

7.354. $\begin{cases}\log_2(u+v)-\log_3(u-v)=1,\\ u^2-v^2=2.\end{cases}$

7.355. $\begin{cases}x^p=y^q,\\ \log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}\end{cases}$

$(p\neq q$ и $pq\neq 0)$.

7.356. $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}.\end{cases}$

7.357. $\begin{cases}xy=a^2,\\ \lg^2 x+\lg^2 y=2,5\lg^2(a^2)\end{cases}$
при условии $a<0$.

7.358. $\begin{cases}x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4,\\ \log_4 x-\log_4 y=1.\end{cases}$

7.359. $\begin{cases}(2^{x+y})^{x^2-xy-8}=1,\\ (0,37^{x-y})^{x^2+xy+2x-16}=1.\end{cases}$

7.360. $\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27,\\ \log_3 y-\log_3 x=1.\end{cases}$

ГЛАВА 8
НЕРАВЕНСТВА

УКАЗАНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

1°. Числовое неравенство — это неравенство, верное при всех допустимых или при специально подобранных значениях входящих в него букв. Например, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, где a и b — любые действительные числа; $\sqrt{a}\geqslant 0$, где $a\geqslant 0$.

Наиболее часто встречающийся способ доказательства неравенств основан на определениях понятий «больше» и «меньше» и заключается в выяснении знака разности между левой и правой частями неравенства. Эти определения состоят в следующем:

$$\begin{aligned}&\text{если}\quad a-b>0,\ \text{то}\ a>b;\\ &\text{если}\quad a-b<0,\ \text{то}\ a<b;\\ &\text{если}\quad a-b=0,\ \text{то}\ a=b.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Приведенные определения можно использовать и в обратном порядке: если $a>b$, то $a-b>0$ и т. д.

2°. Основные свойства числовых неравенств:

1. Если $a>b$, то $b<a$.
2. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
3. Если $a>b$ и $c\in\mathbb{R}$, то $a+c>b+c$.

На основании этого свойства члены неравенства можно переносить из одной части в другую с противоположными знаками, сохраняя знак неравенства.

4. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.
5. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.
6. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, т. е. если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.
7. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать, т. е. если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.
8. Если $a>b>0$, то $a^n>b^n$, $n\in\mathbb{N}$.
9. Если $a>0$, $b>0$ и $a^n>b^n$, $n\in\mathbb{N}$, то $a>b$.
10. Если $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3°. Иногда при доказательстве неравенств используются некоторые известные неравенства. Такими, например, являются следующие:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\tag{8.2}$$

т. е. среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического;

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,\ a>0,\ b>0,\tag{8.3}$$

т. е. сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. Неравенства с одной переменной имеют вид:

$$f(x)>g(x);\ f(x)<g(x);\ f(x)\geqslant g(x);\ f(x)\leqslant g(x).$$

Решением неравенства называется множество значений переменной, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Основная идея решения неравенства заключается в замене неравенства более простым, но равносильным заданному.

2°. При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенства в равносильное:

а) какой-либо член неравенства можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный;

г) если для одних и тех же значений x справедливы неравенства $f(x)>0$, $g(x)>0$ и $f(x)>g(x)$, то для тех же значений x верно неравенство $(f(x))^n>(g(x))^n$, $n\in\mathrm{N}$.

3°. Пусть заданное неравенство имеет вид $f(x)/g(x)>0$ (вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, а функция в знаменателе может быть постоянной) либо оно приведено к этому виду с помощью правил п. 2°.

Для решения неравенства применяется метод интервалов (метод промежутков), который состоит в следующем:

а) на числовую ось наносят точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $f(x)/g(x)$ определено и сохраняет знак (плюс или минус). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками — точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками — не удовлетворяющие ему;

б) определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $f(x)/g(x)$ для значений x, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции $f(x)$ или $g(x)$ являются многочленами и не содержат множителей вида $(x-a)^{2n}$, где $n\in\mathrm{N}$, то достаточно определить знак функции $f(x)/g(x)$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки плюс и минус будут чередоваться.

Если же в числителе и знаменателе дроби $f(x)/g(x)$ имеется множитель вида $(x-a)^{2n}$, где $n\in\mathrm{N}$, то, полагая $x\neq a$, делят обе части заданного неравенства на множитель $(x-a)^{2n}$, положительный при всех значениях $x\neq a$ (см. п. 2°), и непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x=a$ заданному неравенству.

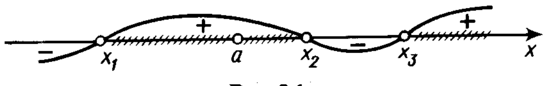

Рис. 8.1

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $f(x)/g(x)$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, покрывают штрихами. На ту же ось помещают и точки, соответствующие $x=a$. Например, для кривой знаков, изображенной на рис. 8.1, получаем следующее решение неравенства: $(x_1, a)\bigcup(a, x_2)\bigcup(x_3, \infty)$.

Роль кривой знаков может играть схематическое расположение параболы относительно оси Ox. Так, в случае, изображенном на рис. 8.2, решение неравенства имеет вид $(-\infty, x_1)\bigcup(x_2, \infty)$ (x_1 и x_2 — корни квадратичной функции).

4⁰. Рассмотрим решение квадратного неравенства

$$ax^2+bx+c>0 \tag{8.4}$$

в случае отрицательного дискриминанта квадратного трехчлена ax^2+bx+c ($D=$ $=b^2-4ac<0$).

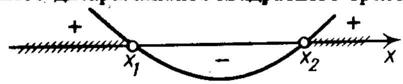

Рис. 8.2

Если $a>0$, то неравенство (8.4) выполняется при всех значениях x (рис. 8.3, *а*); если же $a<0$, то оно не выполняется ни при каком значении x (рис. 8.3, *б*).

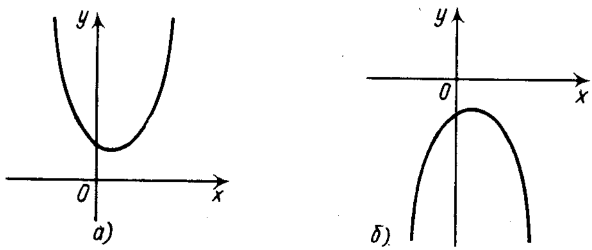

Рис. 8.3

5⁰. Иррациональное неравенство

$$\sqrt{f(x)}<g(x) \tag{8.5}$$

можно рассматривать при условии $f(x)\geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)}\geqslant 0 \Rightarrow g(x)>0$. Значит, согласно указанию 2⁰ г, обе его части можно возвести в квадрат. Из выше рассмотренных рассуждений заключаем, что неравенство (8.5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ (\sqrt{f(x)})^2<(g(x))^2. \end{cases} \tag{8.6}$$

6⁰. Иррациональное неравенство

$$\sqrt{f(x)}>g(x) \tag{8.7}$$

можно рассматривать при условии $f(x)\geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)}\geqslant 0$. Однако при этом условии его правая часть $g(x)$ может быть как неотрицательной, так и отрицательной, а потому неравенство (8.7) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2>(g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases} \tag{8.8}$$

7⁰. Показательное неравенство

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \tag{8.9}$$

при $a>1$ равносильно неравенству

$$f(x)>g(x), \tag{8.10}$$

а при $0<a<1$ — неравенству

$$f(x)<g(x). \tag{8.11}$$

8°. Логарифмическое неравенство

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \tag{8.12}$$

при $a>1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x), \end{cases} \tag{8.13}$$

а при $0<a<1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases} \tag{8.14}$$

9°. Для решения простейших тригонометрических неравенств

$$\sin x>a,\ \cos x>a,\ \operatorname{tg} x>a,\ \operatorname{ctg} x>a \tag{8.15}$$

(вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$) применяют графический способ. Находят точки пересечения графика соответствующей тригонометрической функции с прямой $y=a$, расположенные ближе к началу координат, и затем используют периодичность функции. Неравенства вида (8.15) можно решать также с помощью единичного тригонометрического круга.

Для решения более сложных тригонометрических неравенств их сводят к простейшим случаям с помощью упрощений.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5}>0.$

□ Корнями уравнений $(x+3)(5-x)=0$ и $2x-5=0$ служат числа $x_1=-3$, $x_2=2{,}5$, $x_3=5$, которые не являются решениями заданного неравенства, поэтому на числовой оси отмечаем их светлыми кружками (рис. 8.4). Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка. Легко определяем, что при $x>5$ левая часть неравенства отрицательна — ставим знак минус справа от точки 5 и, двигаясь влево, чередуем знаки плюс и минус. С помощью рис. 8.4 получаем ответ: $(-\infty,\ -3)\bigcup(2{,}5;\ 5)$. ■

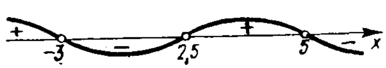

Рис. 8.4

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4}\leqslant 0.$

□ Полагая $x\neq 0$ и $x\neq 3$, разделим обе части неравенства на положительную дробь $\dfrac{x^2}{(2x-6)^4}$ и сразу заметим, что $x=0$ удовлетворяет заданному неравенству, а $x=3$ не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех $x\neq 0$ и $x\neq 3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{x+4}\leqslant 0.$$

Начертив кривую знаков, заштрихуем промежутки, удовлетворяющие этому неравенству, и отметим на той же оси точки $x=0$ и $x=3$ (рис. 8.5). Учитывая, что значение $x=0$ является решением заданного неравенства, но не принадлежит заштрихованному промежутку, его следует дополнительно включить в ответ. Значение $x=3$ не является решением неравенства, но принадлежит заштрихованному промежутку; следовательно, это значение нужно исключить. Итак, получаем ответ: $(-\infty, -4)\bigcup[1, 3)\bigcup(3; 4{,}5]\bigcup 0$. ■

Рис. 8.5

Пример 3. Решить неравенство $\frac{1}{x^2-5x+6}\leqslant\frac{1}{2}$.

☐ Преобразуем данное неравенство в равносильное:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2}\leqslant 0; \quad \frac{x^2-5x+4}{2(x^2-5x+6)}\geqslant 0.$$

Корни $x_1=1$, $x_2=4$ уравнения $x^2-5x+4=0$ являются решениями неравенства (на рис. 8.6 отмечаем их закрашенными кружками); корни $x_3=2$, $x_4=3$ уравнения $x^2-5x+6=0$ не являются решениями неравенства (на рис. 8.6 отмечаем их светлыми кружками). С помощью кривой знаков получаем ответ: $(-\infty, 1]\bigcup(2, 3)\bigcup[4, \infty)$. ■

Рис. 8.6

Пример 4. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}>0$.

☐ Учитывая, что x не может принимать отрицательные значения, разобьем точками $x_1=2$ (корень уравнения $x-2=0$) и $x_2=9$ (корень уравнения $\sqrt{x}-3=0$) на промежутки не всю числовую ось, а только ее часть $[0, \infty)$. С помощью кривой знаков (рис. 8.7) получаем ответ: $[0, 2)\bigcup(9, \infty)$. ■

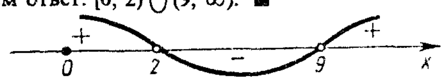

Рис. 8.7

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x+61}<x+5$.

☐ Согласно указанию 5^0, это иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+61\geqslant 0, \\ x+5>0, \\ x+61<x^2+10x+25, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x>-61, \\ x>-5, \\ x^2+9x-36>0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x>-5, \\ x^2+9x-36>0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x^2+9x-36=0$, находим $x_1=-12$, $x_2=3$. Строим кривую знаков (в данном случае — дугу параболы) и стрелкой, направленной вправо от точки -5, отмечаем промежуток $x>-5$ (рис. 8.8). Решения первого и второго неравенств системы совпадают на промежутке $(3, \infty)$. Итак, получаем ответ: $(3, \infty)$. ■

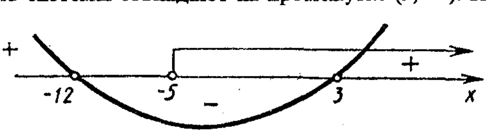

Рис. 8.8

Пример 6. Решить неравенство $x-3<\sqrt{x-2}$.

□ Согласно указанию 6^0, это иррациональное неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-3\geqslant 0, \\ x^2-6x+9<x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-3<0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\geqslant 3, \\ x^2-7x+11<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x<3. \end{cases}$$

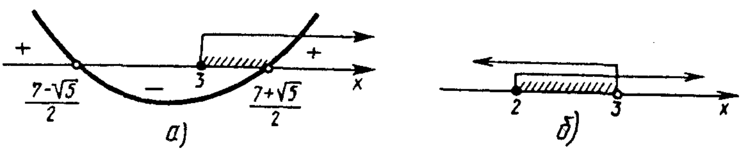

Рис. 8.9

Решением первой системы является промежуток $3\leqslant x<(7+\sqrt{5})/2$ (рис. 8.9, *а*), а решением второй системы — промежуток $2\leqslant x<3$ (рис. 8.9, *б*). Объединяя эти решения, получаем ответ: $2\leqslant x<(7+\sqrt{5})/2$. ■

Пример 7. Решить неравенство $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81}{x^2+2x+5}<0$.

□ Так как выражение x^2+2x+5 положительно при любом x, то, умножив на него обе части данного неравенства, получим равносильное неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81<0 \quad \text{или} \quad 3^{-(8+x)}<3^4.$$

Далее, поскольку основание степени $3>1$, используя указание 7^0, имеем $-8-x<4$, откуда $x>-12$. Итак, получаем ответ: $(-12,\ \infty)$. ■

Пример 8. Решить неравенство $0{,}4^{\log_2^2 x+1}<6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

□ Заметив, что $0{,}4=2/5$ и $6{,}25=(2/5)^{-2}$, приведем обе части неравенства к одному основанию:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1}<\left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}.$$

Так как основание степени $0<2/5<1$, то, используя указание 7^0, имеем $\log_2^2 x+1\geqslant 2\log_2 x^2-4$. Функция $f(x)=\log_2 x$ определена при $x>0$; следовательно, $2\log_2 x^3 = 6\log_2 x$. Полагая $y = \log_2 x$, приходим к неравенству $y^2 - 6y + 5 > 0$, откуда находим, что $y < 1$ или $y > 5$.

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности неравенств $\log_2 x < 1$, $\log_2 x > 5$, которую можно переписать в виде $\log_2 x < \log_2 2$, $\log_2 x > \log_2 2^5$. Поскольку основание логарифма $2 > 1$, используя указание 8^0, находим, что решение первого неравенства есть промежуток $0 < x < 2$, а второго — промежуток $x > 2^5$, т. е. $x > 32$. Итак, получаем ответ: $(0, 2) \bigcup (32, \infty)$. ■

Пример 9. Решить неравенство $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$.

□ Приведем неравенство к виду $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > x^0$ и рассмотрим два случая: $0 < x < 1$ и $1 < x < 3$, $3 < x < \infty$. Согласно указанию 7^0, решаем совокупность систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < x < 3, \ 3 < x < \infty, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} > 0. \end{cases}$$

Применяем метод интервалов сразу к двум системам (рис. 8.10). С помощью рисунка, учитывая знак дробного неравенства (<0 в первом случае и >0 во втором), получаем ответ: $(0, 1/2) \bigcup (1, 3)$. ■

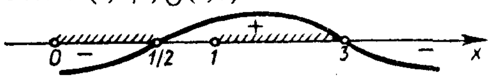

Рис. 8.10

Пример 10. Решить неравенство $\log_{1/3} \log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} < 0$.

□ Согласно формуле (7.3), имеем $0 = \log_{1/3} 1$. Поскольку основание логарифма $0 < 1/3 < 1$, используя указание 8^0, получаем равносильное неравенство $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 1$ (при этом условие $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0$ выполняется автоматически).

Далее, в силу формулы (7.2) имеем $1 = \log_{1/2} \dfrac{1}{2}$ и так как $0 < 1/2 < 1$, то, снова используя указание 8^0, получаем равносильную данному неравенству систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0; \\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{11}{2\,(2x-3)} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства системы следует, что $2x - 3 < 0$; значит, $x + 4 < 0$ и задача сводится к решению равносильной системы

$$\begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x+4 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 3/2, \\ x < -4, \end{cases} \quad \text{откуда } x < -4.$$

Итак, получаем ответ: $(-\infty, -4)$. ■

Пример 11. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{1-\log_8 (x^2-4x+3)}.$$

□ Поскольку логарифмическая функция определена только для положительных чисел, а квадратный корень — для неотрицательных чисел, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ 1-\log_8 (x^2-4x+3)\geqslant 0. \end{cases}$$

Левую часть первого неравенства разложим на множители, а во втором заменим 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ \log_8 (x^2-4x+3)\leqslant \log_8 8. \end{cases}$$

Так как основание логарифма $8>1$, то, согласно указанию 8^0, переходим к системе

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ x^2-4x+3\leqslant 8, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ (x-5)(x+1)\leqslant 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна неравенству $(x-3)(x-1)(x-5)(x+1)\leqslant 0$, которое решаем методом интервалов. С помощью рис. 8.11 получаем ответ: $[-1, 1)\bigcup(3, 5]$. ■

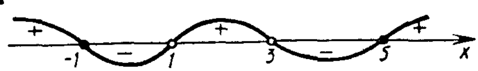

Рис. 8.11

Группа А

8.001. Показать, что для всех положительных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

8.002. Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant \sqrt[4]{ab}.$$

8.003. Доказать, что если $p>0$ и $q>0$, то $(p+2)(q+2)(p+q)\geqslant 16pq$.

8.004. Доказать, что если $a\neq 2$, то $\dfrac{1}{a^2-4a+4}>\dfrac{2}{a^3-8}$.

8.005. Доказать, что если m, n и p — длины сторон некоторого треугольника, то $m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np)$.

8.006. Доказать, что если $m\geqslant 0$ и $n\geqslant 0$, то $mn(m+n)\leqslant m^3+n^3$.

8.007. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$.

8.008. Показать, что для любых двух положительных чисел произведение их суммы на сумму их обратных величин не меньше 4.

8.009. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2-(a+1)x+a+4=0$ оказываются отрицательными?

8.010. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

8.011. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}+\frac{x}{6}<2-\frac{x+5}{2},\\ 1-\frac{x+5}{8}+\frac{4-x}{2}<3x-\frac{x+1}{4}.\end{cases}$$

8.012. При каких значениях m неравенство $x^2-mx>\frac{2}{m}$ выполняется для любых x?

Найти области определения функций (**8.013—8.014**):

8.013. $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

8.014. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

Решить неравенства (**8.015—8.038**):

8.015. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$.

8.016. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$.

8.017. $\frac{1}{3x-2-x^2}-\frac{3}{7x-4-3x^2}>0$.

8.018. $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$.

8.019. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$.

8.020. $|2x^2-9x+15|\geqslant 20$.

8.021. $|x^2-5x|<6$.

8.022. $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x$.

8.023. $x^6-9x^3+8>0$.

8.024. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$.

8.025. $a^4+a^3-a-1<0$.

8.026. $m^3+m^2-m-1>0$.

8.027. $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$.

8.028. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$.

8.029. $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$.

8.030. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1$.

8.031. $\frac{15}{4+3x-x^2}>1$.

8.032. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0$.

8.033. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$.

8.034. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

8.035. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$.

8.036. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

8.037. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$. **8.038.** $\sqrt{9x-20}<x$.

8.039. При каких значениях x функция $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ принимает положительные значения?

Решить неравенства (**8.040—8.088**):

8.040. $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$.

8.041. $0{,}3^{2+4+6+\ldots+2x}>0{,}3^{72}$ $(x\in\mathbf{N})$.

8.042. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x}\geqslant 1$. **8.043.** $2^{1-2^{1/x}}<0{,}125$.

8.044. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}}\geqslant 1$. **8.045.** $0{,}64<\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}<1$.

8.046. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$. **8.047.** $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}>25$.

8.048. $0{,}5^x\leqslant 0{,}25^{x^2}$. **8.049.** $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}}$.

8.050. $5^{2x+1}>5^x+4$. **8.051.** $25^x<6\cdot 5^x-5$.

8.052. $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leqslant 0$. **8.053.** $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52$.

8.054. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

8.055. $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$.

8.056. $\dfrac{1}{3^x+5}<\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$. **8.057.** $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0$.

8.058. $\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leqslant 1$. **8.059.** $\log_{1/3}\dfrac{3x-1}{x+2}<1$.

8.060. $(\log_{0,2}(x-1))^2>4$. **8.061.** $|3-\log_2 x|<2$.

8.062. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$. **8.063.** $\log_{0,3}(x^2-5x+7)>0$.

8.064. $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1$. **8.065.** $\log_{0,3}(3x-8)>\log_{0,3}(x^2+4)$.

8.066. $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>1+\lg x$.

8.067. $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$.

8.068. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>2/3$.

8.069. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5$.

8.070. $\frac{1}{2}+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{1/3}(x+3)$.

8.071. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{1/3} x<6.$

8.072. $\log_4 (x+7)>\log_2 (x+1).$

8.073. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3>0.$

8.074. $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5} x-2\leqslant 0.$

8.075. $\dfrac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)}\leqslant 0.$

8.076. $\dfrac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0.$

8.077. $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0.$

8.078. $\dfrac{\log_5 (x^2+3)}{4x^2-16x}<0.$

8.079. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1.$

8.080. $0{,}3^{\log_{1/3}\log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$

8.081. $2^{\log_{0,4} x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>1.$

8.082. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2{,}5.$

8.083. $5\cdot 0{,}2^{\lg x}>0{,}04^{\lg 2}.$

8.084. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1.$

8.085. $\log_x \log_9 (3^x-9)<1.$

8.086. $\log_2\log_{1/3}\log_5 x>0.$

8.087. $0{,}5^{x-2}>6.$

8.088. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2.$

Найти области определения функций (8.089—8.092):

8.089. $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}.$

8.090. $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}.$

8.091. $y=\sqrt{\log_{1/2}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}.$

8.092. $y=\sqrt{-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}.$

8.093. Найти натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(x-1)<4,\\ \dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x}.\end{cases}$$

8.094. Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+8}{x+2}>2,\\ \lg(x-1)<1.\end{cases}$$

Группа Б

8.095. Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных чисел не меньше 9.

8.096. Доказать, что если a — любое действительное число, то верно неравенство $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geqslant 2$.

8.097. Доказать, что при условии $2y+5x=10$ выполняется неравенство $3xy-x^2-y^2<7$.

8.098. Доказать, что если $4b+a=1$, то выполняется неравенство $a^2+4b^2 \geqslant 1/5$.

8.099. Доказать, что многочлен $m^6-m^5+m^4+m^2-m+1$ принимает положительные значения при всех действительных значениях m.

8.100. Показать, что при любых действительных значениях x функция $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может принимать значений, больших $3/2$ и меньших $1/2$.

8.101. Найти все значения a, при которых выражение $\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$ имеет смысл для любых $x \in \mathbf{R}$.

8.102. При каких значениях p оба корня квадратного трехчлена $x^2+2(p+1)x+9p-5$ отрицательны?

8.103. При каких значениях n оба корня уравнения $(n-2)x^2-2nx+n+3=0$ положительны?

8.104. При каких значениях m корни уравнения $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ заключены в промежутке между -1 и 2?

8.105. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2-7x+4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений x?

8.106. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$.

8.107. Найти область определения функции f, если $f(x)=\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$.

8.108. Найти целые неотрицательные значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}$.

8.109. При каких значениях a неравенство $\frac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для любых значений $x \in \mathbf{R}$?

8.110. Найти те значения m, при которых неравенство $\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ выполняется для любых действительных значений x.

8.111. При каких значениях x разность $\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$ принимает только отрицательные значения?

8.112. При каких значениях m неравенство $\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ выполняется для любых x?

8.113. При каких значениях m неравенство $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется для любых x?

8.114. При каких значениях a сумма $a+\frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}$ принимает только положительные значения?

Решить неравенства (8.115—8.192):

8.115. $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3.$

8.116. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0.$

8.117. $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\left(1-x-\frac{(x-2)^2\,(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0.$

8.118. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2.$

8.119. $\frac{m^2x+1}{2}-\frac{m^2x+3}{3}<\frac{m+9x}{6}.$

8.120. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1.$

8.121. $\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2}<0.$

8.122. $\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}.$

8.123. $\frac{2-x}{x^3+x^2}>\frac{1-2x}{x^3-3x^2}.$

8.124. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}.$

8.125. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}.$

8.126. $\frac{10\,(5-x)}{3\,(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5\,(6-x)}{x-2}.$

8.127. $-9<x^4-10x^2<56.$

8.128. $216x^6+19x^3<1.$

8.129. $|x-6|>|x^2-5x+9|.$

8.130. $x^2\,(x^4+36)-6\sqrt{3}\,(x^4+4)<0.$

8.131. $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0.$

8.132. $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0.$

8.133. $x^2\,(x+3\sqrt{5})+5\,(3x+\sqrt{5})>0.$

8.134. $(x^2+4x+10)^2-7\,(x^2+4x+11)+7<0.$

8.135. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2.$

8.136. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$

8.137. $\sqrt{x^2-4x}>x-3.$

8.138. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}.$

8.139. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leqslant x^2-9.$

8.140. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0.$

8.141. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2.$

8.142. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0.$

8.143. $0{,}5^{\sqrt{3}}<0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0{,}5.$

8.144. $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots}<\sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}}<1.$

8.145. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9.$

8.146. $0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0{,}008^{\log_4 x-1}}.$

8.147. $2{,}25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}.$

8.148. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{13x^2}\leqslant\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{12x^2}.$

8.149. $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}.$

8.150. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot 5^{\log_2(x-1)-1}.$

8.151. $0{,}008^x+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04.$

8.152. $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25.$

8.153. $\log_{0,25}\left|\dfrac{2x+1}{x+3}+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}.$

8.154. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3}-x)>0.$

8.155. $\log_{0,5}(x+3)<\log_{0,25}(x+15).$

8.156. $\log_{1/3}(x-1)+\log_{1/3}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1.$

8.157. $2\log_3\log_3 x+\log_{1/3}\log_3(9\sqrt[3]{x})\geqslant 1.$

8.158. $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2}.$

8.159. $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<0,5.$

8.160. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}.$

8.161. $\dfrac{\lg 7-\lg(-8x-x^2)}{\lg(x+3)}>0.$

8.162. $\log_3\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}-\log_{1/3}\log_{1/4}\dfrac{x+1}{4x-1}<0.$

8.163. $\log_4 x+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2\log_{\sqrt{5}}5$ (найти целые значения x).

8.164. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\dfrac{1}{2}.$

8.165. $\log_{1/5}x+\log_4 x>1.$

8.166. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\dfrac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4(\log_{1/2}x)^2.$

8.167. $\log_{|x-1|}0,5>0,5.$

8.168. $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+1}>0.$

8.169. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1.$

8.170. $2\log_{\log_3 x}3<1.$

8.171. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0.$

8.172. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1.$

8.173. $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0.$

8.174. $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0.$

8.175. $0,4^{\log_3\frac{3}{x}-\log_3(3x)}>6,25^{\log_3 x^2+2}.$

8.176. $2^{\log_{0,5}^2 x}+x^{\log_{0,5} x}>2,5.$

8.177. $x^{0,5\log_{0,5} x-3}\geqslant 0,5^{3-2,5\log_{0,5} x}.$

8.178. $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2.$

8.179. $0,6^{\lg^2(-x)+3}\leqslant\left(1\frac{2}{3}\right)^{2\lg x^2}.$

8.180. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17.$

8.181. $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10.$

8.182. $\log_{0,3}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}<0.$

8.183. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2} x^4>0.$

8.184. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1.$

8.185. $\dfrac{2\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1.$

8.186. $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\leqslant -4.$

8.187. $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5.$

8.188. $|x-3|^{2x^2-7x}>1.$

8.189. $\sqrt{3}\cos^{-2} x<4\operatorname{tg} x.$

8.190. $\sin 4x+\cos 4x\operatorname{ctg} 2x>1.$

8.191. $2+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} 2x<0.$

8.192. $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\operatorname{tg} x)<5.$

Найти области определения функций (8.193—8.203):

8.193. $f(x)=\sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}.$

8.194. $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}.$

8.195. $y=\log_3\left(0,64^{2-\log_{\sqrt{2}} x}-1,25^{8-(\log_2 x)^2}\right).$

8.196. $y=\sqrt{\log_{1/3}\log_3|x-3|}.$

8.197. $y=\sqrt{\log_{1/2}^{2}(x-3)-1}$.

8.198. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

8.199. $y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0,5}-1\right)+\dfrac{1}{\log_3(2x-6)}$.

8.200. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\dfrac{1}{\log_8(x-4)}$.

8.201. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$.

8.202. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{x^2-49}$.

8.203. $y=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)+4}$.

8.204. При каких значениях x определено следующее выражение: $\log_3(1-\log_{0,5}(x^2-2x-2,5))$?

8.205. Найти все значения p, при которых выражение $\lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$ определено для любых x.

8.206. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству

$$4^{2+\sqrt{x-1}}+3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 4^{\sqrt{x-1}}+2^{3+\sqrt{x-1}}+5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

8.207. Расположить в порядке возрастания три числа: $a_1=\log_{1/2}\sin 2x$, $a_2=-1-\log_2\sin x$, $a_3=\log_{1/2}(1-\cos 2x)$, если $0<x<\pi/4$.

Решить системы неравенств (**8.208—8.215**):

8.208. $\begin{cases} 0,2^{\cos x}\leqslant 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0. \end{cases}$

8.209. $\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}$.

8.210. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0, \\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2. \end{cases}$

8.211. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$.

8.212. $\begin{cases} \sqrt{4x-7}<x, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4. \end{cases}$

8.213. $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}. \end{cases}$

8.214. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\|x+1|\leqslant 1.\end{cases}$

8.215. $\begin{cases}|x^2-4x|<5,\\|x+1|<3.\end{cases}$

Группа В

8.216. Доказать, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$ справедливо неравенство $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

8.217. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой всех ребер наибольший объем имеет куб.

Доказать справедливость неравенств (**8.218—8.221**):

8.218. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geqslant 8$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

8.219. $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a>0,\ b>0)$.

8.220. $\frac{a^4+b^4}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

8.221. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$.

8.222. При каких значениях p система неравенств $-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$ выполняется для всех действительных значений x?

8.223. При каких значениях m неравенство $-6<\frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}<4$ выполняется для всех действительных значений x?

8.224. Пусть число $x_1>0$ является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Показать, что существует корень x_2 уравнения $cx^2+bx+a=0$ такой, что $x_1+x_2\geqslant 2$.

8.225. Числа x_1 и x_2 являются действительными корнями уравнений $5x^3-6=0$ и $6x^3-5=0$ соответственно. Показать, что $x_1+x_2>2$.

Решить неравенства (**8.226—8.279**):

8.226. $|x^3-1|>1-x$.

8.227. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

8.228. $|x-1|+|2-x|>3+x$.

8.229. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

8.230. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{1}{x}$.

8.231. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

8.232. $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

8.233. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$.

8.234. $\log_5 x+\log_x \frac{x}{3}<\frac{\log_5 x\,(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

8.235. $\frac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}>2$.

8.236. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3$.

8.237. $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$.

8.238. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

8.239. $\log_2 (x-1)-\log_2 (x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2>0$.

8.240. $\log_x \log_2 (4^x-12)\leqslant 1$.

8.241. $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}} (\mathrm{tg}\, x)}}>3$.

8.242. $2<2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2}<8$.

8.243. $3^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}}>3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

8.244. $0{,}2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-1/2}$.

8.245. $\log_x \log_3 (9^x-6)\geqslant 1$.

8.246. $\sqrt{\log_{1/2} (x^2+4x-4)}<1$ $(x\in \mathbf{Z})$.

8.247. $\sqrt{1-9\,(\log_{1/8} x)^2}>1-4\log_{1/8} x$.

8.248. $\log_{1/2} x+\sqrt{1-4\,(\log_{1/2} x)^2}<1$.

8.249. $\log_{x^2} (3-2x)>1$.

8.250. $\log_3 (4^x+1)+\log_{(4^x+1)} 3>2{,}5$.

8.251. $\log_3 (3^x-1)\cdot \log_{1/3} (3^{x+2}-9)>-3$.

8.252. $\log_p \frac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}<0$.

8.253. $\log_x (x^3+1)\cdot \log_{x+1} x>2$.

8.254. $\log_x (x+1)<\log_{1/x} (2-x)$.

8.255. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5}>0$.

8.256. $\log_x (x^2+3x-3)>1$.

8.257. $\log_{1/2} \dfrac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2}\leqslant 0$.

8.258. $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|}\leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.259. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$.

8.260. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x-1}}>1$.

8.261. $1<3^{|x^2-x|}<9$.

8.262. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}}>25$.

8.263. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2 (x+6)}>1$.

8.264. $\log_{|x-4|} (2x^2-9x+4)>1$.

8.265. $\dfrac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}}\leqslant\dfrac{1}{\log_{1/2} (x+1)}$.

8.266. $\log_x \dfrac{3}{8-2x}\geqslant -2$.

8.267. $\log_{1/2} (x-3)-\log_{1/2} (x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}} 2>0$.

8.268. $|2^{4x^2-1}-5|\leqslant 3$.

8.269. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

8.270. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant (x^2+x+1)^3$.

8.271. $\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$.

8.272. $\log_x 10-0{,}5\log_a 10>0$ $(0<a<1)$.

8.273. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0{,}25$.

8.274. $x^{\log_a x+4}<a^4 x$ $(0<a<1)$.

8.275. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

8.276. $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+1{,}25<0$.

8.277. $|\log_3 x| < \left|\log_3 \frac{x}{9}\right|$.

8.278. $\log_{x^2-3} 729 > 3$.

8.279. $\frac{\log_a (35-x^3)}{\log_a (5-x)} > 3$.

8.280. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg (2^{x+1}+1)<\lg (7\cdot 2^x+12),\\ \log_x (x+2)>2.\end{cases}$$

Найти области определения функций (**8.281—8.282**):

8.281. $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3 (25-x^2)$.

8.282. $y=\sqrt{\log_{1/4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}$.

8.283. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{0,3} (\sqrt{x+5}-x+1)>0$.

Без помощи таблиц доказать неравенства (**8.284—8.285**):

8.284. $2<\log_3 2+\log_2 3<3$.

8.285. $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{2}+1$.

8.286. Указать такие значения x, при которых неравенство $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$ выполняется для всех значений y.

8.287. Найти a из неравенства $x^2-2^{a+2}x-2^{a+3}+12>0$ при условии, что оно верно для любых значений x.

8.288. Доказать, что если $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30)<0$, то $\sin 2x>0$.

8.289. Из значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{1,3} (2x-2)<\log_{1,3} (x+1)$, указать те, для которых $\sin 2x<0$.

8.290. Показать, что $1/8<\cos 20°\cos 40°\cos 70°<1/4$.

8.291. Показать, что $1/8<\sin 20°\sin 50°\sin 70°<1/4$.

8.292. Показать, что $\operatorname{tg} 40°+\operatorname{tg} 45°+\operatorname{tg} 50°>3$.

8.293. Показать, что при условии $360°k-45°<\alpha<360°k+45°$, где $k\in Z$, выполняется неравенство $\operatorname{ctg}(45°-\alpha)+\operatorname{ctg} 45°+\operatorname{ctg}(45°+\alpha)\geqslant 3$.

Решить неравенства (**8.294—8.300**):

8.294. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$.

8.295. $\sin^3 x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3 x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)>\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

8.296. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$.

8.297. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x>8\sqrt{3}$.

8.298. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x$.

8.299. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geqslant 3\operatorname{tg} x$.

8.300. $3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x<1/2$.

ГЛАВА 9
КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n=1\cdot 2...(n-1)\,n=n! \tag{9.1}$$

Число сочетаний из n элементов по m находится по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!};\ C_n^0=1. \tag{9.2}$$

Справедливы следующие свойства сочетаний:

$$C_n^m=C_n^{n-m}; \tag{9.3}$$

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}. \tag{9.4}$$

Число размещений из n элементов по m находится по формуле

$$A_n^m=P_m\,C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \tag{9.5}$$

Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n, \tag{9.6}$$

или

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+...+\frac{n\,(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+...+b^n,$$

где n — натуральное число и $C_n^ka^{n-k}b^k=T_{k+1}$ есть $(k+1)$-й член в разложении бинома $(k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n)$.

Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n:

$$C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n. \tag{9.7}$$

Пример 1. Команда некоторой ЭВМ записывается в виде набора из восьми цифровых знаков — нулей и единиц. Каково максимальное количество различных команд?

□ Так как для каждого элемента набора возможны два значения (0 или 1), то максимальное количество различных команд есть $\underbrace{2\cdot 2...2}_{8\text{ раз}}=256$. Можно рассуждать иначе: рассмотреть все двоичные числа от 00000000 до $11111111_2=255_{10}$. ■

Пример 2. В разложении $(1+x)^n$ четвертый член равен 0,96. Найти значения x и n, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024.

□ Так как сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, а $1024=2^{10}$, то $n=10$. Четвертый член разложения $T_4=C_n^3x^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}x^3=120x^3$. Согласно условию, $120x^3=0{,}96$, откуда $x^3=0{,}008$, т. е. $x=0{,}2$. ■

Пример 3. При каких значениях x и y возможно равенство $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1:3:24$?

□ Применяя формулы (9.2) и (9.5), имеем

$$\frac{y!}{x!\,(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!\,(y-x+2)!} = \frac{1}{3};\ C_y^x : (x! \cdot C_y^x) = 1:24.$$

Из второго уравнения получаем $x! = 24$, т. е. $x=4$ (поскольку $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$), а из первого уравнения находим

$$\frac{(y-x+1)\,(y-x+2)}{(y+1)\,(y+2)} = \frac{1}{3}.$$

Так как $x=4$, то $y^2 - 9y + 8 = 0$, откуда $y=1$ и $y=8$; $y=1$ не удовлетворяет условию ($y > x = 4$). Итак, $x=4$, $y=8$. ■

Группа А

Решить уравнения (**9.001—9.005**):

9.001. а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; б) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

9.002. а) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7\,(x-1)$; б) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$.

9.003. а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; б) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$.

9.004. а) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; б) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$.

9.005. а) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}\,P_3} = 210$; б) $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7}\,P_x$.

9.006. Показать, что при любом k сумма $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ есть точный квадрат.

9.007. Доказать тождества:

а) $P_n = (n-1)\,(P_{n-1} + P_{n-2})$; б) $C_n^k\, C_{n-k}^{m-k} = C_m^k\, C_n^m$.

9.008. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x.

9.009. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $(ax + x^{-1/4})^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

9.010. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

9.011. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

9.012. В разложении $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \sqrt[10]{\dfrac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

9.013. Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

9.014. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}})^m$ в 20 раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как $5:1$?

9.015. Определить A_n^2, если пятое слагаемое разложения $(\sqrt[3]{x}+$ $+1/x)^n$ не зависит от x.

9.016. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

9.017. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.

9.018. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

9.019. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

9.020. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

9.021. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

9.022. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

9.023. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

9.024. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

9.025. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты $800+400+200+100$. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

9.026. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

9.027. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

9.028. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

9.029. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием. Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно?

Группа Б

Решить уравнения (9.030—9.032):

9.030. $\dfrac{A_{x+1}^{y+1}\,P_{x-y}}{P_{x-1}}=72.$

9.031. $C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+C_x^{x-3}+\ldots+C_x^{x-8}+C_x^{x-9}+C_x^{x-10}=1023.$

9.032. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5\,P_{x-5}}=720.$

9.033. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}A_y^x:P_{x-1}+C_y^{y-x}=126,\\ P_{x+1}=720;\end{cases}$ б) $\begin{cases}A_x^y+3C_x^y=90,\\ A_x^y-2C_x^y=40.\end{cases}$

9.034. Найти x и y, если:

а) $C_{x+1}^y:C_x^{y+1}:C_x^{y-1}=6:5:2;$

б) $C_x^{y-1}:(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}):C_x^{y+1}=3:5:5.$

9.035. Найти x и y, если:

а) $(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1;$

б) $A_x^{y-1}:A_{x-1}^y:(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-1})=21:60:10.$

9.036. Доказать тождество:

а) $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k;$

б) $C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k;$

в) $A_{n-1}^m=A_n^m-mA_{n-1}^{m-1}.$

9.037. Разность между третьими биномиальными коэффициентами разложений $(a+b)^{n+1}$ и $(a+b)^n$ равна 225. Найти число рациональных членов разложения $(\sqrt[5]{x}+\sqrt[9]{y})^n$.

9.038. Найти k-й член разложения $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^m$, если известно, что $T_{k+2}:T_{k+1}:T_k=28:8\sqrt{6}:9$.

9.039. Разность между некоторыми членами T_{k+1} и T_k разложения $(\sqrt[6]{x}-\sqrt{x^{-1}})^{12}$ равна 30. Определить, при каких значениях x это возможно, если член T_{k+1} содержит x в степени, вдвое меньшей, чем член T_k.

9.040. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14 400.

9.041. При любом допустимом значении z слагаемое U_{k+1} разложения $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z})^m$ в 2 раза меньше слагаемого V_{k+2} разложения $\left(\sqrt[6]{z^5}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$. Найти эти слагаемые.

9.042. Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

9.043. Третье слагаемое разложения $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^m$ не содержит x. При каких значениях x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1+x^3)^{30}$?

9.044. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

9.045. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

9.046. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

9.047. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

9.048. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

9.049. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

9.050. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

9.051. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

9.052. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

9.053. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

9.054. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

9.055. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

9.056. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

9.057. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

9.058. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

9.059. Три автомашины № 1, 2, 3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину № 1?

9.060. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секции хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики — только девушек, а в лыжную и конькобежную секции — и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

9.061. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

9.062. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова — 15, в вокальном кружке — 12, в фотокружке — 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

9.063. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

9.064. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

9.065. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

9.066. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?

9.067. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре — по две, два — по одной главе книги?

9.068. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 — второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

9.069. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

9.070. Семь яблок и три апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

9.071. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

9.072. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

9.073. Садовник должен в течение трех дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

9.074. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовые гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Группа В

9.075. Доказать, что $\dfrac{C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n}{n}=2^{n-1}$.

9.076. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Пользуясь этим тождеством, показать, что

$$C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}.$$

9.077. Упростить выражение $P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n$, где P_k — число перестановок из k элементов.

9.078. Доказать, что $C_{2n+x}^n \, C_{2n-x}^n \leqslant (C_{2n}^n)^2$.

9.079. Найти наибольшее значение суммы $S = (1+x)^{36} + (1-x)^{36}$ при $|x| \leqslant 1$.

9.080. Найти наибольшее слагаемое разложения $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

9.081. При каких значениях x наибольшим слагаемым разложения $(5+3x)^{10}$ является четвертое?

9.082. Если раскрыть все скобки в выражении $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \ldots + (1+x)^{14}$ и привести подобные члены, то получится некоторый многочлен. Определить коэффициент при x^9 в этом многочлене, не раскрывая скобок.

9.083. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

9.084. Каждый из десяти радистов пункта A старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта $Б$. Сколько возможно различных вариантов такой связи?

9.085. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких из них на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов?

9.086. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, так чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

9.087. На книжной полке книги по математике и по логике — всего 20 книг. Показать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

9.088. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

9.089. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

9.090. В шахматной встрече двух команд по 8 человек участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

ГЛАВА 10
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

Пример 1. Показать, что $\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3$.

□ Утверждение верно, если верно, что $\log_2 (\cos 20° \cos 40° \cos 80°) = -3$ [использована формула (7.4)] или $\log_2 A = -3$, где $A = \cos 20° \cos 40° \cos 80°$. Умножим и разделим правую часть последнего равенства на $8 \sin 20°$:

$$A = \frac{4 \cdot 2 \sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°}.$$

Применяя три раза последовательно формулу (4.13), получаем

$$A = \frac{4 \sin 40° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°} = \frac{2 \sin 80° \cos 80°}{8 \sin 20°} = \frac{\sin 160°}{8 \sin 20°} =$$

$$= \frac{\sin (180° - 20°)}{8 \sin 20°} = \frac{\sin 20°}{8 \sin 20°} = 2^{-3}.$$

Следовательно, $\log_2 A = \log_2 2^{-3} = -3$. ■

Пример 2. При каких значениях p уравнение

$$x^2 - (2^p - 1)\, x - 3\, (4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

имеет равные корни?

□ Квадратное уравнение имеет равные корни, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ равен нулю. Находим

$$D = (2^p - 1)^2 + 12\, (4^{p-1} - 2^{p-2}) =$$

$$= 2^{2p} - 2 \cdot 2^p + 1 + \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} - \frac{12 \cdot 2^p}{4} = 4 \cdot 2^{2p} - 5 \cdot 2^p + 1.$$

Используя замену переменной $2^p = y$, получаем уравнение $4y^2 - 5y + 1 = 0$, которое имеет корни $y_1 = 1/4$, $y_2 = 1$. Решаем уравнения $2^p = 2^{-2}$ и $2^p = 1$, откуда $p = -2$ и $p = 0$. ■

Пример 3. Решить уравнение $|x-1| \cdot |x+2| = 4$.

□ Поскольку $|xy| = |x| \cdot |y|$, перепишем данное уравнение в виде $|(x-1)\,(x+2)| = 4$. Оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} (x-1)\,(x+2) > 0, \\ (x-1)\,(x+2) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\,(x+2) < 0, \\ -(x-1)\,(x+2) = 4. \end{cases}$$

В первой системе корни уравнения $x_1=-3$, $x_2=2$ удовлетворяют неравенству этой системы, а значит, и самой системе; дискриминант квадратного уравнения второй системы отрицателен; следовательно, эта система несовместна. Итак, получаем ответ: -3; 2. ■

Пример 4. При каких целых значениях a неравенство

$$2\log_{0,5}a-3+2x\log_{0,5}a-x^2<0$$

выполняется в любой точке оси Ox?

□ Заменим заданное неравенство равносильным: $x^2-2x\log_{0,5}a+3-2\log_{0,5}a>0$. Так как коэффициент при x^2 положителен, то неравенство выполняется в любой точке оси Ox, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен (см. указание 4^0 из гл. 8). Следовательно,

$$4\log^2_{0,5}a-4(3-2\log_{0,5}a)<0 \text{ или } \log^2_{0,5}a+2\log_{0,5}a-3<0.$$

После замены переменной $y=\log_{0,5}a$ получаем неравенство $y^2+2y-3<0$; $f(y)=y^2+2y-3=0$ при $y_1=1$, $y_2=-3$. Схематическое расположение параболы относительно оси Oy приведено на рис. 10.1. Отсюда находим $-3<y<1$.

Рис. 10.1

Решаем неравенство $-3<\log_{0,5}a<1$, которое, используя формулы (7.6) и (7.2), запишем в виде $\log_{0,5}0,5^{-3}<\log_{0,5}a<\log_{0,5}0,5$. Так как основание логарифма $0<0,5<1$, то в силу указания 7^0 из гл. 8 получаем равносильную этому неравенству систему

$$\begin{cases} a>0, \\ 0,5<a<0,5^{-3}, \end{cases} \text{ т. е. } 0,5<a<8.$$

Целыми значениями a, удовлетворяющими последнему неравенству, являются числа 1, 2, ..., 7. ■

Пример 5. Решить неравенство $10^{|\sin x|}>10^{|\cos x|}$.

□ Так как основание степени $10>1$, то на основании указания 7^0 из гл. 8 перейдем к равносильному неравенству $|\sin x|>|\cos x|$. Отсюда, применяя указание 2^0 г) из гл. 8, получим $\sin^2 x>\cos^2 x$. Далее, используя тождественные преобразования тригонометрических выражений, имеем

$$\sin^2 x>1-\sin^2 x;\ 2\sin^2 x>1;\ 1-\cos 2x>1;\ \cos 2x<0,$$

откуда $\pi/2+2\pi k<2x<3\pi/2+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Итак, получаем ответ: $\pi/4+\pi k<x<3\pi/4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. ■

Решение неравенства $|\sin x|>|\cos x|$ можно также найти графически, построив графики функций $|\sin x|$ и $|\cos x|$ на одном чертеже (рис. 10.2).

Пример 6. Доказать, что графики функций $y=m\cdot 3^x+n$ и $y=n\cdot 3^{-x}+m$ при условии $mn<0$ пересекаются в двух точках, из которых одна лежит на оси абсцисс, а другая — на оси ординат.

□ Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями уравнения $m\cdot 3^x+n=n\cdot 3^{-x}+m$; умножая все его члены на $3^x\neq 0$ и группируя подобные слагаемые, получим $m\cdot 3^{2x}+(n-m)\,3^x-n=0$.

Положим $3^x=y>0$ и решим квадратное уравнение $my^2+(n-m)\,y-n=0$. Имеем $D=(n-m)^2+4mn=(n+m)^2$ и, следовательно,

$$y_{1,2}=\frac{-(n-m)\pm(n+m)}{2m};\ y_1=1,\ y_2=-n/m>0\ (mn<0 \text{ по условию}).$$

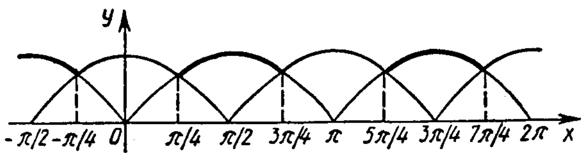

Рис. 10.2

Из уравнения $3^x=1$ находим $x=0$, а из уравнения $3^x=-n/m$ получим $x=\log_3(-n/m)$. Найдем ординаты точек пересечения. Если $x_1=0$, то $y_1=m\cdot 3^0+n=m+n$. Точка $(0;\ m+n)$ лежит на оси Oy. Если $x_2=\log_3(-n/m)$, то $y_2=m\cdot 3^{\log_3(-n/m)}+n=m\left(-\frac{n}{m}\right)+n=0$ [так как $3^{\log_3(-n/m)}=-n/m$ в силу равенства (7.1)]. Точка $(\log_3(-n/m);\ 0)$ лежит на оси Ox. ■

Упростить выражения (10.001—10.004):

10.001. $\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}$.

10.002. $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^3}}$.

10.003. $\sqrt{\frac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$.

10.004. $\sqrt{\frac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

10.005. Решить уравнение $|x^2+1{,}5x+1|=m$. При каких значениях m оно имеет единственное решение?

10.006. Найти рациональные корни уравнения

$$\frac{\sqrt{x+2}}{|x|}+\frac{|x|}{\sqrt{x+2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

10.007. Найти целые корни уравнения $x^3-|x-1|=1$.

Решить уравнения (10.008—10.010):

10.008. $x^2+2x-3\,|x+1|+3=0$.

10.009. $|x+1|+|x-1|=2x^3$.

10.010. $|x^2-3|x|+1|=1$.

Решить неравенства (10.011—10.017):

10.011. $x^2-4|x|+3>0$.

10.012. $x^2-5|x|+6<0$.

10.013. $\dfrac{3|x|-14}{x-3}\leqslant 4$.

10.014. $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

10.015. $\left|\dfrac{2}{|x-4|}\right|>1$.

10.016. $\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x}>0$.

10.017. $|x+1|>2|x+2|$.

Решить системы уравнений (10.018—10.022):

10.018. $\begin{cases}2x-3|y|=1,\\ |x|+2y=4.\end{cases}$

10.019. $\begin{cases}6{,}751x+3{,}249y=26{,}751,\\ 3{,}249x+6{,}751y=23{,}249.\end{cases}$

10.020. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5,\\ x^2-y^2=3{,}0.\end{cases}$

10.021. $\begin{cases}2^x+2^y=5,\\ 2^{x+y}=4.\end{cases}$

10.022. $\begin{cases}8^x=10y,\\ 2^x=5y.\end{cases}$

10.023. Показать, что система уравнений $\begin{cases}2^{\log_2 x}-3^{\log_3 y}=1,\\ 2x-3y=4\end{cases}$ не имеет решений.

10.024. Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases}(\log_3 x)^{\log_9 x}\leqslant 1,\\ x>1.\end{cases}$

Построить графики функций (10.025—10.051):

10.025. а) $y=x^2+5x+6$; б) $y=x^2+5|x|+6$; в) $y=|x^2+5x+6|$; г) $y=|x^2+5|x|+6|$.

10.026. а) $y=-x^2+4x-5$; б) $y=-x^2+4|x|-5$; в) $y=|-x^2+4x-5|$; г) $y=|-x^2+4|x|-5|$.

10.027. а) $y=x^2-7x+6$; б) $y=|x|^2-7|x|+6$; в) $y=|x^2-7x+6|$; г) $y=||x|^2-7|x|+6|$.

10.028. $y=x+\dfrac{|x|}{x}$.

10.029. $y=|x+1|-x$.

10.030. $y=x|x|+1$.

10.031. $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}(x^2-4)$.

10.032. $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

10.033. $y=|x-2|(x+2)$.

10.034. $y=\dfrac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

10.035. $y=\dfrac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

10.036. $y=\dfrac{2-x}{|x+1|}(x^2-x-2)$.

10.037. $y=\dfrac{x-1}{|x-3|}(x^2-9)$.

10.038. а) $y=\log_{1/2} x$; б) $y=\log_{1/2}(-x)$;

в) $y=\log_{1/2}|x|$; г) $y=|\log_{1/2} x|$; д) $y=|\log_{1/2}|x||$.

10.039. $y=2^{1/x}$.

10.040. $y=-2^{-|x|}$.

10.041. $y=2^{x}\cdot 2^{|x|}$.

10.042. $y=\lg x+|\lg x|$.

10.043. $y=\sqrt{10^{\lg x^2}}$.

10.044. $y=x^{\log_x 2}$.

10.045. $y=2^{\log_2 x}$.

10.046. $y=|x|^{1/2}$.

10.047. $y=5^{\frac{1}{3}\log_5 (x-1)}$.

10.048. $y=\log_2 \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

10.049. $y=0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}$.

10.050. $y=\log_3 \dfrac{x^2-9}{|x|-3}$.

10.051. $y=\left|\log_2 \dfrac{x-4}{x^2-16}\right|$.

10.052. Решить графически уравнение $|x-1|+2x-5=0$.

10.053. Построить график функции $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, если $a>0$ и $b^2-4ac=0$.

10.054. Величина y есть целая часть («характеристика») логарифма x по основанию 2. Построить график y как функции x при изменении x от 0,5 до 8,0.

10.055. Отличаются ли один от другого графики функций $y=\lg x^2$ и $y=2\lg x$?

10.056. Построить на одном чертеже графики функций $y=\lg x^2$ и $y=\lg^2 x$.

10.057. Доказать, что графики функций $y=4^x-3\cdot 2^x$ и $y=-(5\cdot 2^{-x}+ +1)$ не имеют общих точек.

10.058. Найти точки пересечения кривой $y=12x^2-5|x|-36$ и параболы $y=6x^2-5x-12$.

Изобразить в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными x и y (**10.059—10.063**):

10.059. $|x|+|y|=1$.

10.060. $|x|-|y|=1$.

10.061. $x+|x|=y+|y|$.

10.062. $|y|=\log_{0,5}|x|$.

10.063. $\log_2(x+y-1)<0$.

10.064. На рис. 10.3 изображен график $y=\log_a x$ (масштабы на осях координат одинаковы). С помощью этого графика найти число a.

10.065. Как, зная график $f(x)$, построить график $|f(x)|$? Можно ли по графику $|f(x)|$ восстановить график $f(x)$?

Для графика функции $y=ax^2+bx+c$ определить, положительно, отрицательно или равно нулю каждое из чисел a, b и c (**10.066—10.067**):

10.066. См. рис. 10.4.

10.067. См. рис. 10.5.

10.068. Составить уравнение параболы с осью, параллельной оси ординат, если эта парабола проходит через точки $(-2;\ -3)$, $(-1;\ 2)$ и $(1;\ 0)$. Показать, что она пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат.

10.069. Найти коэффициенты квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$,

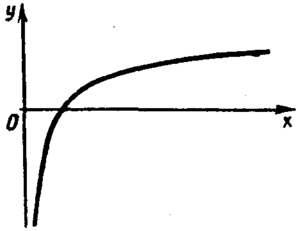

Рис. 10.3

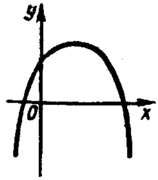

Рис. 10.4

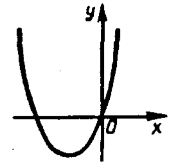

Рис. 10.5

зная, что при $x=-0{,}75$ она принимает наибольшее значение 3,25, а при $x=0$ принимает значение 1.

10.070. Показать, что уравнение $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$ имеет только один корень. Какой?

10.071. Многочлен $k^5+k^4-2k^3-2k^2+k+1$ разложить на множители.

10.072. Показать, что координаты только одной точки плоскости удовлетворяют уравнению $x^2-4x+y-6\sqrt{y}+13=0$, и найти эту точку.

10.073. Показать, что уравнение $x^8+p^2x^6+q^2x^4+r^2x^2=0$ не имеет отличных от нуля корней.

10.074. Существуют ли такие a, при которых корни уравнения $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ заключены в промежутке $(-3, 0)$?

10.075. Найти значения x, при которых все значения функции $y=x^2+5x+6$ принадлежат промежутку $[6, 12]$.

10.076. Сколько действительных решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2+y=5, \\ x+y^2=3? \end{cases}$

10.077. Чему равна сумма всех корней всякого биквадратного уравнения?

10.078. Составить биквадратное уравнение, если числа $\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{3}+1$ являются двумя его корнями.

10.079. Не находя x и y в отдельности, вычислить сумму x^2y+xy^3, если $x-y=4$ и $xy=3$.

10.080. Не решая уравнения $x^2-3x-10=0$, вычислить сумму кубов его корней.

10.081. Имеет ли уравнение $(2x-1)^2+(x+1)^2=0$ действительные корни?

10.082. При каких значениях p сумма квадратов корней уравнения $x^2+px+35=0$ равна 74?

10.083. При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2-x-q=0$ равна 19?

10.084. При каких значениях k корни уравнения $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ относятся как $1:4$?

10.085. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ является наименьшей?

10.086. Найти такие значения λ, при которых оба корня трехчлена $(\lambda-1)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda-2)$ положительны.

10.087. При каких значениях a график функции $y=(a+5)x^2+x+a-3$ пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат?

10.088. Решить уравнение $x^3-7x-6=0$. Убедиться в том, что сумма всех его корней равна нулю. Нельзя ли было в этом убедиться, не находя самих корней?

10.089. Имеет ли уравнение $x^3+2x-3=0$ отрицательные корни?

10.090. Доказать, что $x=1$ — единственный корень уравнения x^3+ $+3x-4=0$.

10.091. Многочлен a^4+2a^3+6a-9 разложить на множители.

10.092. Доказать, что многочлен $x^4-2x^3+2x^2-8x+16$ принимает положительные значения при любых действительных значениях x.

10.093. Разложить на множители $x-3\sqrt{xy}+2y$ $(x>0,\ y>0)$.

10.094. Нетрудно заметить, что равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

имеет относительно x степень не выше, чем вторую. Тем не менее оно имеет более двух корней — можно проверить, что числа $x_1=a$, $x_2=b$ и $x_3=c$ ему удовлетворяют. Чем это объяснить?

10.095. Дано произведение

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

В типографии как-то случилось, что обе дроби выпали из набора и получилось произведение

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Наборщик утверждает, что, несмотря на потерю дробей, получившееся выражение тождественно данному. Прав ли он?

10.096. Указать область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}$. Показать, что график этой функции расположен симметрично относительно прямой $x=5$.

10.097. Без преобразования уравнения $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=17$ показать, что оно не имеет корней.

Найти области определения функций (10.098—10.108):

10.098. $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2}}$.

10.099. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$.

10.100. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

10.101. $y=\dfrac{\log x}{\arcsin(x-3)}$.

10.102. $y=\sqrt{\lg\dfrac{1-2x}{x+3}}$.

10.103. $y=(\log_3 x-\log_2 x)^{-1/2}$.

10.104. $y=\sqrt{2^x-3^x}$.

10.105. $y=\log_3\log_{1/2}x$.

10.106. $y=\sqrt{\log_3\cos x}$.

10.107. $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

10.108. $f(x)=\sqrt{1-\lg(x-1)}+\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$.

10.109. Указать область определения функции $y=\log_2(x^2-2x+3)$. Имеет ли график этой функции какую-либо ось симметрии? Если да, то какую?

10.110. Указать все точки на оси Ox, в которых функция $y=\sqrt{3\cdot 81^{\frac{1}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3}$ не определена.

10.111. Найти целые значения x, принадлежащие области определения функции $f(x)=\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$.

10.112. Для каких значений x имеет смысл равенство $\lg\frac{x(x-4)}{1-x}=\lg x+\lg(x-4)-\lg(1-x)$?

10.113. Для каких значений x график функции $y=x+3+\sqrt{(x+1)(x+7)}$ расположен ниже оси абсцисс?

Установить, для каких значений x выполняются равенства **(10.114—10.117):**

10.114. $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$.

10.115. $\left|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right|=\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}$.

10.116. $\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right|=\frac{x^3}{1-x^2}$.

10.117. $|\lg^2(1-9x)+\lg(1-9x)-2|=2-\lg(1-9x)-\lg^2(1-9x)$.

Решить уравнения **(10.118—10.130):**

10.118. $\sqrt{x^2-1}-\frac{6}{\sqrt{x^2-1}}=1$.

10.119. $\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\frac{1}{x}=5$.

10.120. $\frac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}=\frac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

10.121. $\log_2\log_3\log_4 x=0$.

10.122. $\log_3(\log_2^2(x-4))=0$.

10.123. $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

10.124. $\log_2^2 4x-4\log_4 x=12$.

10.125. $\log_{x+6}(2x-\sqrt{x+6})=0{,}5$.

10.126. $x+\lg(1+4^x)=\lg 50$.

10.127. $x^2\cdot 2^x+8=2x^2+2^{x+2}$.

10.128. $\cos^{58}x+\sin^{40}x=1$.

10.129. $\log_{\cos x}\sin x=1$.

10.130. $\operatorname{ctg}(\sin x)=1$.

10.131. В каких точках график функции $y=\sqrt{-x+9}-\sqrt{-x+4}$ пересекается с прямой $y=1$?

Решить уравнения и исследовать, при каких значениях параметра они имеют корни (и сколько их) и не имеют корней (10.132—10.137):

10.132. $\sqrt{a-6x}=x-1$. **10.133.** $\sqrt{3a-2x}+x=a$.

10.134. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=a$. **10.135.** $\sqrt{a-5x}=1-x$.

10.136. $\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}=a$. **10.137.** $\sqrt{25x+a}=3+25x$.

10.138. При каких значениях m уравнение $2\sqrt{1-m\,(x+2)}=x+4$ имеет один корень?

10.139. При каких значениях $p>0$ уравнение $3\sqrt{2x+p}=1+3x$ имеет два различных действительных корня?

10.140. При каких значениях c уравнение $\sqrt{c\,(x-1)+4}=3-x$ имеет два различных действительных корня?

10.141. При каких значениях k уравнение $\sqrt{k\,(2x+1)+16-x}=x-3$ не имеет корней?

10.142. Доказать, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот целый корень.

10.143. Как вы будете решать уравнение $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$, если заранее известно, что многочлен в левой части данного уравнения разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами?

10.144. Возможно ли равенство $x=\log_2 x$?

10.145. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

10.146. Не решая уравнения $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=10$, показать, что множество его корней пусто.

10.147. Имеет ли решение уравнение $\sin x=2\sin 47^\circ\cos 44^\circ$?

10.148. Дано уравнение $3\sin 2x+\cos 2x=4$. Имеет ли оно решение?

10.149. При каких значениях a уравнение $x^2-2x-\log_3 a^2=0$ имеет корни?

10.150. Найти произведение корней уравнения $z^{\log_5 3z}=25\sqrt[3]{z^4}$.

10.151. Найти натуральное значение k из условия

$$2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\ldots 2^{2k}=0{,}25^{-28}.$$

10.152. Показать, что график функции $y=\dfrac{\lg 5+\lg\,(x^2+1)}{\lg\,(x-2)}-2$ ни в одной точке не пересекает ось Ox.

10.153. Определить, при каком значении k график функции $y=\lg kx-2\lg\,(x+1)$ имеет только одну общую точку с осью абсцисс.

10.154. В каких точках график функции

$$y=\log_3\left(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}\right)$$

пересекает ось Ox?

10.155. Найти точку пересечения графика функции

$$y=(3{,}6^{1+\log_{3,6}(10+x)})^{\log_6(5-x)}$$

с осью ординат.

10.156. Найти абсциссу той точки графика функции

$$y=\log_2\log_6(2^{\sqrt{x+1}}+4),$$

ордината которой равна единице.

10.157. Указать область определения и область значений функции $y=\log_5\sin x$.

10.158. Доказать, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $ab>0$.

10.159. Доказать, что если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2\geqslant 1/3$; a, b, c — действительные числа.

10.160. Доказать справедливость неравенства $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}$ ($a>0$; $b>0$).

10.161. Доказать, что сумма кубов катетов меньше куба гипотенузы.

10.162. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин трех медиан меньше его периметра и больше полупериметра.

10.163. Доказать, что если a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза, то $a+b\leqslant c\sqrt{2}$.

Решить неравенства (**10.164—10.184**):

10.164. $x^3+4\geqslant x^2+4x$.

10.165. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\frac{6}{x^3}$.

10.166. $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$.

10.167. $x^3-2x^2-x+2>0$.

10.168. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}<1$.

10.169. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$.

10.170. $7^{x^2-4x-2}>1/49$.

10.171. $0{,}5^{(x^2+x-2)(3-x)}>1$.

10.172. $1<2^{x(x+2)}<8$.

10.173. $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$.

10.174. $2\lg x<\lg^2 x$.

10.175. $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

10.176. $\log_2(1+\log_{1/3}x)<1$.

10.177. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$.

10.178. $x^{\log_{0,2}0,3}+0{,}3^{\log_{0,2}x}\leqslant 0{,}18$.

10.179. $\log_{1/2}\log_3 x>1$.

10.180. $x^2\log_2 0{,}3-2\log_2 0{,}09>0$.

10.181. $x^{-3x-8}>x^7$.

10.182. $\log_2(x+1)>\log_{x+1}16$.

10.183. $\log_{0,5}(2^x-1)>x-1$.

10.184. $\log_{x-3}(x-1)<2$.

10.185. При каких значениях x выражение $\log_{0,5}(x^2-8)$ неотрицательно?

10.186. Найти целые значения x, при которых верно неравенство $\log_3 (x+3)^2 \leqslant 2$.

10.187. Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству $0{,}000729^3 < 0{,}3^{x^2-5x+4} < 11\frac{1}{9}$.

10.188. Найти неотрицательные решения неравенства $\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}} < \left(\frac{2}{15}\right)^{\log_{7,5} 0,5}$.

10.189. Для различных x из области определения функций выяснить, какая из величин больше: $\lg x^2$ или $\lg^2 x$.

10.190. Каковы возможные значения x, если $\log_x (a^2+1) < 0$?

10.191. Что больше: 3^{400} или 4^{300}?

10.192. При каком значении a выполняется неравенство $\frac{5a+6}{4-a} > 1$?

10.193. Для каких значений x равенство $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = \frac{1-x^8}{1-x}$ оказывается верным?

10.194. На графике функции $y = 0{,}8\,|x| \cdot \frac{x^2+1}{x+1}$ найти точку, ордината которой в 2 раза больше ее абсциссы (сам график строить не обязательно).

10.195. При каких значениях x график функции $y = 0{,}7^{\lg (x^2-8x+8)}$ расположен не ниже прямой $y = 1$?

10.196. Найти значения x, при которых график функции $y = \log_{1/3} (x^2 - 8x) + 2$ расположен не ниже оси абсцисс.

10.197. Найти точки пересечения параболы $y = x^2 + 1$ и кривой $y = |3x^2 - 5|$.

10.198. Дано $n < m$, где n и m — натуральные числа. В какой последовательности располагаются на числовой прямой точки, изображающие числа 1, n/m, m/n? Какая из двух последних точек лежит ближе к точке, изображающей число 1?

10.199. На числовой оси построить точки, изображающие числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

10.200. Доказать, что при любом натуральном n выражение $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ — натуральное число.

10.201. Доказать, что если каждое из двух данных чисел является суммой квадратов двух чисел, то произведение данных чисел может быть представлено в виде суммы квадратов двух чисел.

10.202. Показать, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

10.203. Цифры трехзначного числа записаны в обратном порядке. Показать, что разность между полученным и данным числами делится на 9.

10.204. Показать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

10.205. Показать, что если арифметический квадратный корень из произведения двух натуральных чисел есть число рациональное, то и квадратный корень из их частного — число рациональное.

10.206. Является ли простым или составным число $2^{2001}+1$?

10.207. Почему при делении на 3 чисел, равных квадрату целого числа, в остатке никогда не получается 2?

10.208. Дана правильная несократимая дробь $\frac{p}{q}$. Доказать, что из равенства $\frac{a}{q}+\frac{p}{q}=1$ следует, что $\frac{a}{q}$ — несократимая дробь.

10.209. Сумма трех степеней числа 3 с натуральными подряд идущими показателями, из которых меньший не меньше числа 2, делится без остатка на 117. Доказать.

10.210. Сколько корней имеет уравнение $0{,}3^x=x^2-x+1$?

10.211. Проверить, что для уравнения $2^x+x^2-3=0$ оба корня больше $-\sqrt{3}$, причем один точно равен 1.

10.212. Показать графически, что уравнение $\lg x=\lg 2x$ не имеет корней.

10.213. Показать графически, что уравнение $\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0$ не имеет корней.

10.214. Дано:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;}\\ -1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Является ли эта функция постоянной, если x — действительное число? А ее квадрат?

10.215. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ y^{-1}+z^{-1}=3,\\ z^{-1}+x^{-1}=8\end{cases}$$

не имеет действительных решений.

Решить системы уравнений (**10.216—10.217**):

10.216. $\begin{cases}(x-a)\,(y-b)=c,\\ (x-a)/(y-b)=c.\end{cases}$

10.217. $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y+z=2,\\ -x+y+z=4.\end{cases}$

10.218. При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases}2x+(m-1)\,y=3,\\ (m+1)\,x+4y=-3\end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

10.219. Установить, при каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases}(2b+1)\,x+y=13,\\ 3x+(2b-1)\,y=15\end{cases}$$

1) имеет одно решение (найти его); 2) имеет бесконечное множество решений; 3) не имеет решений.

10.220. При каких значениях m система

$$\begin{cases} x+my=3m, \\ mx+9y=6 \end{cases}$$

имеет решение, которое удовлетворяет неравенствам $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$?

10.221. Доказать, что если кубы двух действительных чисел равны, то равны и сами числа.

10.222. Многочлен x^4+4 представить в виде произведения двух многочленов второй степени.

10.223. Многочлен x^8+y^8 представить в виде произведения двух многочленов четвертой степени относительно x и y.

10.224. Разложить на множители a^4+4b^4.

10.225. При каких значениях x функция $y=|x-1|+|x-3|$ имеет наименьшее значение? Найти это значение.

10.226. Найти наименьшее значение функции $y=x^2-6x+11$.

10.227. Найти наибольшее значение функции $y=1+2x-x^2$.

10.228. Найти наибольшее значение функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$

10.229. Указать наименьшее значение функции

$$y=\log_2(x^2-4x+20).$$

10.230. Найти наибольшее значение функции $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$.

10.231. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{8}{x^2}+\frac{x^2}{2}$.

10.232. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{x^2}{x^4+25}$.

Построить графики функций (10.233—10.236):

10.233. $y=\frac{1}{x^2-9}$.

10.234. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

10.235. $y=\frac{1+x}{x}$.

10.236. $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$.

10.237. Построить график функции

$$y=\begin{cases} 1/x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

и показать, что $x=2$ является точкой минимума данной функции. Кроме того, на этом примере показать, что не обязательно слева от точки минимума находится промежуток убывания функции, а справа — промежуток возрастания: может быть и наоборот.

10.238. Показать, что координаты всех точек прямой $x+y=2$ удовлетворяют неравенству $x^2+y^2 \geqslant 2$, и истолковать этот факт геометрически.

Изобразить в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными (10.239—10.240):

10.239. $3x-4y+12>0$ и $x+y-2<0$.

10.240. $y+3\geqslant x^2+2x$ и $x+y\leqslant 3$.

10.241. Указать, какие из следующих функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y=\sin^3 x+\operatorname{ctg}^5 x$; б) $y=\sin 2x+\cos 3x$; в) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

г) $y=\sin^4 x+x^2+1$; д) $y=\arcsin \dfrac{x}{2}$;

е) $y=x+\sqrt{x}$; ж) $y=x\,|x|$;
з) $y=\arccos 3x$; и) $y=5\operatorname{arctg} x$;

к) $y=-\operatorname{arcctg} x$; л) $y=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$.

10.242. Доказать, что функция $f(x)=\lg\,(x+\sqrt{1+x^2})$ является нечетной.

10.243. Доказать, что произведение четного числа нечетных функций есть функция четная.

10.244. Можно ли утверждать, что сумма двух периодических функций есть функция периодическая?

Определить периоды функций (**10.245—10.246**):

10.245. $y=15\sin^2 12x+12\sin^2 15x$.

10.246. а) $y=\cos x+\sin \dfrac{x}{3}$; б) $y=\sin x+\cos \dfrac{x}{3}+\sin \dfrac{x}{5}$.

10.247. Показать, что $\sin 495°-\sin 795°+\sin 1095°=0$.

Построить графики функций (**10.248—10.252**):

10.248. а) $y=\sin x$; б) $y=2\sin x$;

в) $y=\sin 2x$; г) $y=\sin \dfrac{x}{2}$.

10.249. а) $y=\cos x$; б) $y=\cos\,|x|$;

в) $y=|\cos x|$; г) $y=|\cos\,|x||$.

10.250. $y=-\dfrac{1}{\cos x}$. **10.251.** $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$. **10.252.** $y=\log_2 \sin x$.

Изобразить в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными x и y (**10.253—10.254**):

10.253. $|y|=|\sin x|$. **10.254.** $|y|=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

10.255. Показать, что графиком уравнения $\sin\,(x+y)=0$ является бесконечная совокупность равноотстоящих параллельных прямых.

10.256. Построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+1 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \cos x & \text{при } 0<x<\pi, \\ x^2-3\pi x+2\pi^2 & \text{при } x\geqslant\pi. \end{cases}$$

Указать значение функции в точке разрыва.

10.257. Построить график функции $y=\dfrac{x}{|x|}\sin 2x$.

10.258. Доказать, что $8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1$.

10.259. При каких значениях α и β возможно равенство $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$?

10.260. При каких значениях m может выполняться равенство $\cos\varphi = \frac{m^2-4m-4}{m^2+1}$, если $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$?

10.261. При каких значениях a равенство $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2a^2+2a}{a^2-6a+9}$ возможно, если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$?

10.262. Чему равна дробь $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m$?

10.263. Для чисел α и β, таких, что $0<\alpha+\beta<\pi/2$, оказалось, что $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ (предполагается, что оба корня этого уравнения положительны). Найти $\alpha+\beta$.

10.264. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

10.265. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-1/3$, $\cos\beta=-1/2$.

10.266. Сколько корней имеет уравнение $x^3=\sin 3x$?

10.267. Равносильны ли уравнения $(1+2\sin x)\operatorname{tg}x=0$ и $\frac{1+2\sin x}{\operatorname{ctg}x}=0$?

10.268. Показать, что уравнение $\sin x+\sin 2x=2$ не имеет решений.

10.269. Показать, что парабола $y=x^2-x+5{,}35$ не пересекает график функции $y=2\sin x+3$.

10.270. Найти наибольшее значение функции $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\times\sin\left(2x+\frac{2\pi}{15}\right)$.

10.271. Чему равно наибольшее значение функции $y=\sin(\sin x)$?

10.272. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=3\sin^2 x+2\cos^2 x$.

10.273. При каких значениях x функция $y=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{ctg}^2 x+1$ достигает наименьшего значения? Найти это значение.

10.274. Каково наибольшее значение функции $y=\sin x+\cos x$? При каких значениях x оно достигается?

10.275. Из всех четырехугольников с данными диагоналями m и n найти четырехугольник наибольшей площади.

Найти области значений функций (10.276—10.278):

10.276. $y=(\sin x+\cos x)^2$. **10.277.** $y=\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$.

10.278. $y=5\sin x-12\cos x$.

10.279. Доказать, что неравенство $|\sin x+\sqrt{3}\cos x|\leqslant 2$ верно для любого действительного значения x.

10.280. Возможно ли равенство $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt[3]{3}$?

10.281. Существует ли угол, для которого косинус равен:

а) $a+\frac{1}{a}$ при $a\neq 0$; б) $\lg a+\frac{1}{\lg a}$ $(a>0;\ a\neq 1)$;

в) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}\right)^{-1}$; г) $\cos 40°+\cos 50°$?

10.282. Найти x из условий $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3+\sqrt{x}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3-\sqrt{x}}{2}$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

10.283. Доказать, что если в треугольнике существует зависимость $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$, то он равнобедренный.

10.284. Доказать, что если отношение косинусов двух углов треугольника равно отношению синусов тех же углов, то треугольник равнобедренный.

10.285. Доказать, что для любого треугольника со сторонами a, b, c и углами A, B, C, лежащими соответственно против этих сторон, справедливо равенство $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$.

10.286. Доказать, что если в треугольнике $\frac{a-b}{a}=1-2\cos C$, то он равнобедренный.

10.287. Пусть A, B, C — углы треугольника, причем C — тупой угол. Доказать, что $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B<1$.

10.288. Доказать, что во всяком треугольнике сумма попарных произведений котангенсов всех углов равна единице.

10.289. Доказать, что для всякого треугольника со сторонами a, b и c и углами A, B, C его площадь S можно определить по формуле $S=\frac{1}{2}(abc)^{2/3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$.

10.290. Пусть A, B, C — углы треугольника. Показать, что $\sin A\sin B-\cos C=\cos A\cos B$.

10.291. Знак $\vee$ заменить одним из знаков $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ так, чтобы следующие соотношения были верными: а) $\lg\sin\alpha\vee 0$; б) $\sin\alpha+\cos\alpha\vee 1{,}5$; в) $\sqrt[3]{\sin\alpha}+\sqrt[3]{\cos\alpha}\vee 1$; г) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\vee 1{,}9$ (α — острый угол).

10.292. Показать, что если $x=a\cos\alpha\sin\beta$, $y=a\sin a\sin\beta$, $z=a\cos\beta$, то $x^2+y^2+z^2=a^2$.

10.293. Вычислить без таблиц $\lg\operatorname{tg}22°+\lg\operatorname{tg}68°$.

10.294. Существует ли такой угол, для которого числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются соответственно его тангенсом и котангенсом?

10.295. Исключить t из равенств $x=10^{\cos t}$, $y=10^{\sin t}$.

10.296. Исключить φ из равенств $u=10^{\cos^2\varphi}$, $v=10^{\sin^2\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

10.297. Чему равна сумма чисел α и β, если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения $6x^2-5x+1=0$?

10.298. Выразить $\operatorname{tg}3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

10.299. Доказать, что сумма $\sin^n x+\cos^n x$ тождественно равна 1 только при $n=2$.

10.300. Значения функции $y=\sin^k x+\cos^k x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ сравнить с единицей для $k=0, 1, 2, 3$.

10.301. Выразить $\sin 6°$ через $\sin 12°$.

10.302. Определить знак произведения $\sin 2\cdot\sin 3\cdot\sin 5$.

10.303. Если $\log_a \sin 40°+\log_a \operatorname{tg} 40°+\log_a \cos^{-1} 40°=b$, то чему равна сумма $\log_a \sin 50°+\log_a \operatorname{tg} 50°+\log_a \cos^{-1} 50°$?

10.304. Рассмотрев случаи $0<a<1$ и $a>1$, выяснить, существует ли число $\sqrt{\log_a \operatorname{tg} 40°\cdot\log_a \operatorname{tg} 70°}$.

10.305. Найти значения функции $f(n)=\arcsin(\sin n)$ при $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7.

10.306. Решить уравнение $\cos 2x=x^2+1$.

10.307. На вступительных экзаменах один из поступающих предложил следующее решение уравнения

$$\sin 2x+7\cos 2x+7=0:$$

выразил $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и получил уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{7(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}+7=0,$$

откуда нашел, что $\operatorname{tg} x=-7$ и $x=\pi k-\operatorname{arctg} 7$. Все ли тут хорошо?

10.308. Что больше: $\sin 2x$ или $2\sin x$?

10.309. Для каких точек оси Ox выполняется неравенство: а) $\sin x<1/2$; б) $|\sin x|<1/2$?

10.310. Доказать, что при некоторых ограничениях для α и β из равенства $\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta)$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$. Указать требуемые ограничения для α и β.

10.311. Найти такие два числа m и M, чтобы неравенство $m\leqslant\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\leqslant M$ было верным при любых α и чтобы разность между M и m была наименьшей.

10.312. Показать, что знаки $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадают при любом значении $\alpha\neq k\pi$ (k — целое).

10.313. Найти такие значения a и b, при которых функция $y=(a-b)\sin^2 x+\frac{a+b}{2}\cos^2 x$ тождественно (для всех значений x) равна 2.

10.314. С помощью формулы, связывающей $\sin 3\alpha$ и $\sin\alpha$, доказать, что $0{,}1<\sin 10°<0{,}2$.

10.315. Вычислить $\sin 54°$, если известно, что $\sin 18°=(\sqrt{5}-1)/4$.

10.316. Решить уравнение $\cos(\pi x^2)=-1/2$.

10.317. Решить уравнение $\cos(\pi\sqrt{x})=1$.

10.318. При каких значениях a уравнение $1+\sin^2 ax=\cos x$ имеет единственное решение?

Решить неравенства (**10.319—10.320**):

10.319. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\geqslant 0$. **10.320.** $\sin x\cos x>1/4$.

10.321. Для каких углов первой четверти выполняется неравенство $\sin\alpha\geqslant\sin 2\alpha$?

10.322. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и α не принадлежит первой четверти.

10.323. Вычислить $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

10.324. Вычислить $\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

10.325. Что больше: $\operatorname{tg}1$ или $\operatorname{arctg}1$?

10.326. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

10.327. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{2}{3}$?

10.328. Построить острый угол, тангенс которого в 2 раза больше его синуса.

10.329. Определить z, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=3^{z}$, $\operatorname{tg}\beta=3^{-z}$ и $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$.

Определить знаки чисел (**10.330—10.334**):

10.330. $\log_{1,7}(0{,}5\,(1-\log_7 3))$.

10.331. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

10.332. $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3}4-\log_{0,3}3}$.

10.333. $\lg\operatorname{arctg}2$.

10.334. $\log_{\pi/4}\operatorname{tg}1$.

10.335. Чему равно основание логарифма, при котором число a равно своему логарифму?

10.336. Вычислить без таблиц $\lg 32{,}11-\lg 0{,}03211$.

Вычислить (**10.337—10.342**):

10.337. $49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

10.338. $0{,}8\,(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

10.339. $\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}4^\circ+\lg\operatorname{ctg}2^\circ+\lg\operatorname{ctg}4^\circ$.

10.340. $\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}6^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}9^\circ\ldots\lg\operatorname{tg}87^\circ$.

10.341. $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\ldots\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

10.342. $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

10.343. Чему равно произведение $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\ldots\log_{10}9$, если известно, что $\lg 2=0{,}3010$?

10.344. Вычислить $\log_2 36$, если $\log_{12}9=m$.

10.345. Определить знак произведения

$$\lg\sin 32^\circ\cdot\lg\cos 17^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}40^\circ\cdot\lg\operatorname{ctg}20^\circ.$$

10.346. Доказать, что $\log_2 5$ — иррациональное число.

10.347. Всегда ли неверно равенство $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$?

10.348. Доказать, что если $a^2+b^2=7ab$, то $\log_k\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b)$.

10.349. Найти ошибку в следующих рассуждениях: $\frac{1}{4}>\frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $2\log_a\frac{1}{2}>3\log_a\frac{1}{2}$. Сокращая обе части равенства на $\log_a\frac{1}{2}$, получаем $2>3$.

10.350. Если $\log_b a=m$ и $\log_c b=n$, то чему равен $\log_{bc} ab$?

10.351. Если среднее арифметическое десятичных логарифмов двух чисел равно q, то чему равно среднее геометрическое кубов самих этих чисел?

10.352. Показать, что число $\sqrt{12345{,}67}$ иррационально.

10.353. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$.

10.354. Что больше: а) $0{,}8^{-1{,}3}$ или $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3}0{,}5$ или $\log_3 0{,}5$?

10.355. Сколько цифр содержит число 2^{100}?

10.356. Вычислить $\log_{a_1 a_2 \dots a_k} x$, если $\log_{a_1} x=b_1$, $\log_{a_2} x=b_2$, ..., $\log_{a_k} x=b_k$; $x\neq 1$.

10.357. Катеты прямоугольного треугольника равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Найти площадь треугольника.

10.358. Найти без помощи таблиц $c=\sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, если $\lg a=-0{,}6498$, а $\lg b=13{,}9170$.

10.359. Произведение $(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)$ представить в виде суммы степеней числа 2.

10.360. Разделить $a^{128}-b^{128}$ на произведение

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\dots(a^{64}+b^{64}).$$

10.361. Найти произведение xy, если $x+y=a$ и $x^4+y^4=b^4$.

10.362. Доказать, что никакое четное число, не кратное четырем, нельзя представить как разность квадратов двух натуральных чисел.

10.363. Найти произведение $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\dots\sqrt[512]{a}$.

10.364. В предположении, что $a\neq 10^n$ (a и n — целые), доказать, что $\lg a$ есть число иррациональное.

10.365. Показать, что функция $y=\frac{2x+3}{5x-2}$ совпадает с функцией, обратной данной.

10.366. Решить систему неравенств $\frac{1}{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|}<1$.

10.367. Построить график функции $y=\log_2(\sin x\cos x)$.

10.368. Что больше: 123% от 456 или 456% от 123? Какое свойство процентов можно сформулировать, обобщая ответ на этот вопрос? Обосновать это свойство.

10.369. На некоторый товар были дважды снижены цены — сначала на 15%, а затем еще на 20%. Каков общий процент снижения цены?

10.370. Через один первый кран вода равномерно вливается в бак и заполняет его за 3 ч, а через один второй — за 5 ч. За какое время вода заполнит бак, если открыть оба крана одновременно?

10.371. Через один первый кран вода равномерно вливается в бак и заполняет его за 3 ч, а через второй кран вода равномерно выливается и наполненный бак опорожняется за 5 ч. За какое время вода заполнит порожний бак, если открыть оба крана одновременно?

10.372. Найти число x, если числа 1, 7, 13, ..., x составляют такую арифметическую прогрессию, для которой $1+7+13+...+x=280$.

10.373. Существует ли такая арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа ее членов равна: а) квадрату числа членов; б) кубу числа членов?

10.374. Найти все значения x, для которых существует сумма $\log_{1/2} x+(\log_{1/2} x)^2+...+(\log_{1/2} x)^n+...$.

10.375. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, расположенных на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

10.376. Найти $1+2^x+2^{2x}+...+2^{kx}...$, если k — число натуральное, а $x<0$.

10.377. Верно ли, что три произвольных рациональных числа a, b и c всегда можно рассматривать как члены некоторой арифметической прогрессии?

10.378. Найти сумму

$$4-\frac{8}{3}+\frac{16}{9}-\frac{32}{27}+...+4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+... .$$

10.379. Доказать, что последовательность, заданная формулой $y_n=\frac{10n+7}{2n}$, убывает.

10.380. Установить, является ли заданная последовательность убывающей или возрастающей:

а) $x_n=3n^2-n$; б) $x_n=n^2-3n$; в) $x_n=7n-n^2$; г) $y_n=\lg\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Сократить дроби (**10.381—10.384**):

10.381. $\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

10.382. $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

10.383. $\frac{(n+2)\,n!}{(n+1)!}$.

10.384. $\frac{((n+2)!+n!)\,(n+1)}{(n+2)!\,(n^2+3n+3)}$.

10.385. Доказать, что для всякого $n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<2.$$

10.386. Как использовать тождество $\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ для доказательства справедливости неравенства $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$?

10.387. Доказать, что если p и q — простые числа, большие 3, то p^2-q^2 делится на 24.

10.388. Доказать, что если n — простое число, большее 3, то $\frac{n^2-1}{24}$ — целое число.

10.389. Доказать, что n^7-n делится на 42, если n — любое целое число.

10.390. Доказать, что сумма кубов n нечетных чисел равна $n^2(2n^2-1)$ при любом натуральном значении n.

10.391. Доказать, что

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

10.392. Доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10.393. Доказать, что неравенство $3^n>n+2$ верно, если n — натуральное число.

10.394. Используя метод математической индукции, доказать справедливость неравенства $(1+a)^n\geqslant 1+na$ (n — натуральное число, $n\geqslant 2$ и $a>-1$).

10.395. Доказать, что $|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|$. На основании этого методом математической индукции доказать, что

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|.$$

ГЛАВА 11
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ПЕРВООБРАЗНЫХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

(a, b — постоянные)

Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
ax	a	0
$\frac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$	x^p, $p \in \mathbf{R}$	px^{p-1}
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x	e^x
—	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
—	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
—	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
—	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax+b)$, $a \neq 0$	$f(u) = f(ax+b)$	$af'(u) = af'(ax+b)$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. Правила дифференцирования (u, v — функции; c — постоянная):

$$(cu)' = cu'; \qquad (11.1)$$

$$(u+\mathrm{v})' = u' + \mathrm{v}'; \qquad (11.2)$$

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}'; \qquad (11.3)$$

$$\left(\frac{u}{\mathrm{v}}\right)' = \frac{u'\mathrm{v} - u\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}; \qquad (11.4)$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x), \text{ где } g(f(x)) \text{ — сложная функция.} \quad (11.5)$$

2^0. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ записывается в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (11.6)$$

где $(x_0; y_0)$ — точка касания.

3^0. Правила нахождения первообразных:

а) если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$;

б) если F — первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kf;

в) если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $k \neq 0$ и b — постоянные, то $\frac{1}{k} F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx+b)$.

4^0. Формула Ньютона—Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \quad (11.7)$$

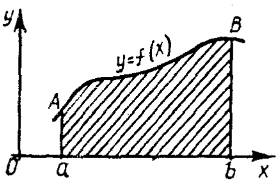

Рис. 11.1

5^0. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 11.1), ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиком неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (11.8)$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$.

☐ Функция $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$ в точке $x = 2$ не определена. Разложив числитель на множители по формуле (1.14), представим эту функцию в виде

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}.$$

В области определения функции $f(x)$ выражение $x - 2 \neq 0$, поэтому дробь можно сократить на $x - 2$. Тогда получим

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{2} = f(2) = 6. \ ■$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$.

☐ Функция $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$ в точке $x = 4$ не определена. Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2 - 7} + 3 \neq 0$ и используя формулу (1.8), преобразуем дробь:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7-9}{(x-4)\,(\sqrt{x^2-7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\,(x+4)}{(x-4)\,(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3}=f(4)=\frac{4}{3}.\ \blacksquare$$

Пример 3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ в точке его пересечения с осью ординат.

□ Согласно формуле (11.6), уравнение касательной записывается в виде $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, где $(x_0; y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки пересечения графика с осью Oy равна 0, а ордината $y_0=f(0)=-2$; значит, $(0; -2)$ — точка касания. Далее, используя формулу (11.4) и таблицу производных, получим

$$f'(x)=\frac{2x\,(x-2)-(x^2+4)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2},$$

откуда $f'(0)=-1$. Итак, искомое уравнение касательной имеет вид $y-(-2)=-1\cdot(x-0)$ или $y=-x-2$. ■

Пример 4. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2}$.

□ Область определения функции — вся числовая ось, кроме точки $x=0$. Используя формулу (11.4) и таблицу производных, находим

$$f'(x)=\frac{2\,(x-2)\,x^2-(x-2)^2\,2x}{x^4}=\frac{4\,(x-2)}{x^3};$$

$f'(x)=0$ только при $x=2$. Составим таблицу:

Интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↗	↘	min	↗

Следовательно, $x=2$ — точка минимума; функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. ■

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $[0, 3\pi/2]$.

□ Сначала найдем значения $f(x)$ на концах данного отрезка: $f(0)=0$, $f(3\pi/2)=-2$, а затем критические точки, принадлежащие этому отрезку. Имеем $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$; $f'(x)=0$, если $\cos x+\cos 2x=0$, откуда $2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$.

Из уравнения $\cos\dfrac{3x}{2}=0$ находим $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, т. е. $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$, а из уравнения $\cos\dfrac{x}{2}=0$ получим $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, т. е. $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Второе решение является частью первого, следовательно, решение уравнения имеет вид $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Отрезку $[0, 3\pi/2]$ принадлежат точки $x_1=\pi/3$ и $x_2=\pi$. Находим значения $f(x)$

в критических точках: $f(\pi/3)=3\sqrt{3}/2$, $f(\pi)=0$. Сравнивая между собой числа $f(0)$, $f(3\pi/2)$, $f(\pi/3)$, $f(\pi)$, заключаем, что $y_{наим}=-2$, $y_{наиб}=3\sqrt{3}/2$. ■

Пример 6. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 0,5. При каком значении разности этой прогрессии произведение первого, четвертого и пятого ее членов является наибольшим?

□ Согласно условию, $a_6=a_1+5d=3$, откуда $a_1=3-5d$. Обозначим произведение $a_1a_4a_5$ через y. Тогда получим $y=a_1(a_1+3d)(a_1+4d)=-10d^3+51d^2-72d+27$. Для отыскания значения d, при котором функция y принимает наибольшее значение, сначала найдем производную $y'=-30d^2+102d-72=-6(5d^2-17d+12)$, а затем, решив уравнение $5d^2-17d+12=0$, найдем ее корни $d_1=1$; $d_2=2{,}4$. Так как по условию $d>0{,}5$, то исследуем поведение функции y на интервале $(0{,}5;\ \infty)$. Составим таблицу:

Интервал изменения d	$(0{,}5;\ 1)$	1	$(1;\ 2{,}4)$	2,4	$(2{,}4;\ \infty)$
y'	—	0	+	0	—
y	↘	min	↗	max	↘

На интервале $(0{,}5;\ \infty)$ имеется только одна точка максимума функции y, а именно $d=2{,}4$. Это значит, что на интервале $(0{,}5;\ \infty)$ функция y достигает наибольшего значения при $d=2{,}4$. ■

Пример 7. Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

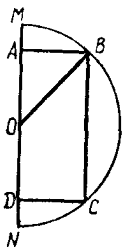

Рис. 11.2

□ Пусть цилиндр образован вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг диаметра MN (рис. 11.2). Полагая $AD=x$, выразим объем V цилиндра как функцию от x. Имеем $S_{сферы}=4\pi OB^2$, т. е. $4\pi OB^2=27\pi$, откуда $OB^2=27/4$. Далее, из ΔAOB получим $AB^2=OB^2-OA^2$, т. е. $AB^2=\frac{27}{4}-\frac{x^2}{4}=\frac{27-x^2}{4}$. Используя формулу объема цилиндра, находим

$$V(x)=\pi AB^2\cdot AD=\pi\frac{27-x^2}{4}x=\frac{\pi}{4}(27x-x^3).$$

По смыслу задачи, $0<x<2OB$, т. е. $0<x<3\sqrt{3}$. Имеем $V'(x)=\frac{\pi}{4}(27-3x^2)=\frac{3}{4}\pi(9-x^2)$; $V'(x)=0$, если $9-x^2=0$. Отсюда находим $x=3$ (так как $x>0$). Если $0<x<3$, то $V'(x)>0$, а если $3<x<3\sqrt{3}$, то $V'(x)<0$. Следовательно, $x=3$ — точка максимума. Поскольку функция $V(x)$ определена для любого x и на всей числовой прямой имеет одну критическую точку, заключаем, что при $x=3$ функция $V(x)$ достигает наибольшего значения. ■

Пример 8. Для функции $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ найти первообразную $F(x)$ при условии, что графики функций $f(x)$ и $F(x)$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy.

□ Так как для функции $\sin x$ одной из первообразных является $-\cos x$, то, согласно правилам п. 3°, первообразная функции $2\sin 5x$ есть $-\frac{2}{5}\cos 5x$. Далее, первообразная функции $\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ есть $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x$. Тогда для $f(x)$ первообразной функцией является $F(x)=-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+C$ при произвольном значении постоянной C. Необходимо найти такое значение C, при котором графики функций $F(x)$ и $f(x)$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy. Это значит, что при $x=0$ должно быть выполнено равенство $F(0)=f(0)$. Но $F(0)=-\frac{2}{5}+C$, а $f(0)=\frac{3}{5}$; следовательно, $-\frac{2}{5}+C=\frac{3}{5}$, откуда $C=1$. Итак, искомая первообразная имеет вид $F(x)=-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+1$. ■

Пример 9. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^3$, $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$ и $y=8$.

□ Графики заданных функций изображены на рис. 11.3. Требуется найти площадь S фигуры OAB (на рисунке она заштрихована).

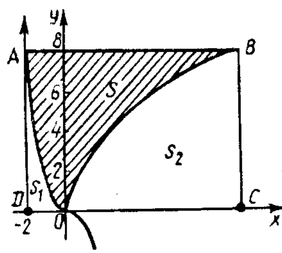

Рис. 11.3

Очевидно, что искомая площадь равна разности между площадью прямоугольника $ABCD$ и площадями S_1 и S_2 двух криволинейных треугольников OAD и OBC. Найдем координаты точек A и B. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y=-x^3, \\ y=8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\frac{8}{3}\sqrt{x}, \\ y=8 \end{cases},$$

получим $A(-2;\ 8)$ и $B(9;\ 8)$. Далее, имеем $C(9;\ 0)$, $D(-2;\ 0)$, $CD=11$, $BC=8$, откуда $S_{ABCD}=11\cdot 8=88$. Площади криволинейных треугольников OAD и OBC находим с помощью интеграла по формуле (11.8):

$$S_1=\int\limits_{-2}^{0}(-x^3)\,dx=-\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{0}=4,\quad S_2=\frac{8}{3}\int\limits_{0}^{9}\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Bigg|_{0}^{9}=48.$$

Итак, $S=S_{ABCD}-S_1-S_2=88-4-48=36$ (кв. ед.). ■

Вычислить (11.001—11.010):

11.001. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$.

11.002. $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

11.003. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

11.004. $\lim\limits_{x\to 2/5}\frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

11.005. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

11.006. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

11.007. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

11.008. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

11.009. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

11.010. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Вычислить пределы и подтвердить или отвергнуть данные утверждения (11.011—11.018):

11.011. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}=5+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

11.012. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}>\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$.

11.013. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}<\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$.

11.014. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}<\cos\dfrac{\pi}{10}$.

11.015. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}>\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$.

11.016. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}<0$.

11.017. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$.

11.018. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x\,(x^2-4)}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=1$.

Найти производные функций (11.019—11.033):

11.019. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x^3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^3}$.

11.020. а) $y=(x^4-x^2+1)^3$; б) $y=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1}$.

11.021. а) $y=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; б) $y=\lg\dfrac{10-x}{x+2}$.

11.022. а) $y=\sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}$; б) $y=(\sin^2 x+1)\,e^x$.

11.023. а) $y=\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^4-1)$; б) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$.

11.024. а) $y=e^{x^3-5x^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x\,(1-x)^2}$.

11.025. а) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$.

11.026. а) $y=x^2\cos\dfrac{1}{x}$; б) $y=x+\sin x\cos x$.

11.027. а) $y=\cos^2 3x$; б) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$.

11.028. а) $y=\operatorname{tg}(\sin x)$; б) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

11.029. $y=\frac{2}{3}\left(x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right)-x$.

11.030. а) $y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; б) $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$.

11.031. а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$.

11.032. а) $y=(x^3+1)\cos 2x$; б) $y=\sin 2x \operatorname{tg} x$.

11.033. а) $y=x\sqrt[3]{3x^2+1}$; б) $y=\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x}$.

11.034. Решить уравнение $f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0$, если $f(x)=x^3\ln x$.

11.035. Решить неравенство $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $g(x)=5x+\frac{1}{x}$.

11.036. Решить неравенство $f'(x)+\varphi'(x)\leqslant 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$, $\varphi(x)=9x^2+72x$.

11.037. Решить уравнение $1+5f(x)+6f'(x)=0$, если $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной (11.038—11.059):

11.038. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1}$; $f'(1)=?$

11.039. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2)=?$

11.040. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$; $f'(3)=?$

11.041. $f(x)=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; $f'(-1)=?$

11.042. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1}$; $f'(1)=?$

11.043. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0)=?$

11.044. $f(x)=\sin 4x\cos 4x$; $f'(\pi/3)=?$

11.045. $f(x)=\sin^2 x^2$; $f'(0)=?$

11.046. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'(\pi/2)=?$

11.047. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'(\pi/12)=?$

11.048. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2)=?$

11.049. $f(x)=5(x+1)^2\sqrt[5]{x-1}$; $f'(2)=?$

11.050. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $f'(1)=?$

11.051. $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}2x$; $f'(\pi/2)=?$

11.052. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$; $f'(0)=?$

11.053. $f(x)=\dfrac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$; $f'(0)=?$

11.054. $f(x)=\sin^3\dfrac{x}{2}$; $f'(\pi/2)=?$

11.055. $f(x)=2^{x-2x^2-1}$; $f'(0)=?$

11.056. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$; $f'(0)=?$

11.057. $f(x)=(x^2-x)\cos^2 x$; $f'(0)=?$

11.058. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; $f'(\pi)=?$

11.059. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sin^2 x}$; $f'(\pi/2)=?$

11.060. Найти вторую производную функции $f(x)$ и вычислить ее значение при указанном значении x:

а) $f(x)=x^2\ln x+\cos 2x$; $f''(1)=?$ $f''(\pi)=?$

б) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+x\ln x^2$; $f''(3)=?$ $f''(\pi/2)=?$

11.061. Выяснить знак производной функции $y=\sqrt{4x+9}\,(x^2-16)$ в точке $x=0$.

11.062. Дана функция $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$. Как изменяется ее производная с возрастанием x от 1/16 до 81?

11.063. Дана функция $f(x)=2\cos^2(4x-1)$. Найти область значений $f'(x)$.

11.064. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$ убывает на всех интервалах области определения.

11.065. Дана функция $f(x)=x\ln x-x$. Как изменяется ее производная с возрастанием x от 1 до 9?

11.066. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$ и область определения ее производной.

11.067. Дано: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=xe^{-x}$. Показать, что $f'(2)$ является корнем уравнения $g'(x)=0$.

11.068. Функция задана формулой $f(x)=e^{ax^2+bx+1}$. Найти значения постоянных a и b, если $f(1)=f(0)=f'(0)$.

11.069. Функция задана формулой $f(x)=5\sin x+3\cos x$. Решить уравнение $f'(0)=f'(x)$.

11.070. Функция задана формулой $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$. Решить уравнение $f'(x)=2f(x)$.

11.071. Построить раздельно графики функций $f(x)=x$, $\varphi(x)=|x|$ и $g(x)=x|x|$ в окрестности точки $x=0$. Несмотря на то что $f(x)$ дифференцируема при $x=0$, а $\varphi(x)$ — нет, их произведение $g(x)=x|x|$ имеет производную в точке $x=0$.

Обосновать правильность этих утверждений и найти $g'(0)$.

11.072. Доказать, что функция $f(x)=x+\sin x$ не убывает в каждой точке оси Ox.

11.073. Показать, что при любых значениях постоянных p и q ($p\neq q$) функция, заданная формулой

$$f(x)=\begin{cases} p\cos x+q\sin x & \text{при } x\geqslant 0,\\ px+q+1 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x=0$.

11.074. Дана функция $f(x)=0{,}5(x^2-\cos x)$. Пользуясь соображениями непрерывности, выяснить, имеют ли уравнения $f(x)=7{,}8$ и $f'(x)=7{,}8$ хотя бы по одному корню на промежутке $[2\pi, 3\pi]$.

11.075. Найти все значения постоянной a, при которых производная функции, заданной формулой $y=e^{ax^3+3x^2+x}$, принимает только положительные значения на всей области определения данной функции.

11.076. Найти сумму $x+x^2+...x^n$, а затем сумму $1+2x+3x^2+...$ $...+nx^{n-1}$.

11.077. Функция задана формулой $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$. Показать, что эта функция возрастает в любой точке, принадлежащей ее области определения.

11.078. Функция задана формулой $y=\sqrt{ax^3-6x^2+3x}$. Найти все значения постоянной величины a, при которых данная функция определена и монотонно возрастает при всех $x>0$.

11.079. Показать, что функция $y=x^3+4x$ возрастает на всей числовой оси.

11.080. При каком значении p функция $f(x)=\cos x-px+q$ убывает на всей числовой оси?

11.081. Доказать, что функция $y=2x+\sin x$ возрастает на всей числовой оси.

11.082. Доказать, что функция $y=x+\dfrac{1}{1+x^2}$ возрастает на всей числовой оси.

Найти промежутки возрастания и убывания функций (11.083—11.087):

11.083. $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

11.084. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

11.085. $f(x)=-x(x-3)^2$.

11.086. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$.

11.087. $f(x)=(2^x-1)(2^x-4)^2$.

11.088. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ и установить, в какой из точек $x_1=\log_5 4$, $x_2=\log_5 3$ заданная функция принимает большее значение.

11.089. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ и установить, в какой из точек $x_1=e^{-1}$ или $x_2=e^{-2}$ функция принимает большее значение.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на заданных промежутках (11.090—11.108):

11.090. $y=x^3-3x^2+3x+2$; $[-2, 2]$.

11.091. $f(x)=3x^4+4x^3+1$; $[-2, 1]$.

11.092. $y=x^5-x^3+x+2$; $[-1, 1]$.

11.093. $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$; $[-5, -1]$.

11.094. $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$; $[1, 6]$.

11.095. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$; $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.096. $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x$; $[0, \pi]$.

11.097. $y(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$; а) $[-3, 3]$; б) $[2\sqrt{5}, 8]$.

11.098. $f(x)=x+\cos^2 x$; $[0, \pi/2]$.

11.099. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$; $[\pi/6, \pi/3]$.

11.100. $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x$; $[0, \pi/2]$.

11.101. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$; $[-\pi/2, \pi/2]$.

11.102. $f(x)=\cos^2 x+\sin x$; а) $[0, \pi/4]$; б) $[\pi/3, \pi]$.

11.103. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$; а) $[3/4, 2]$; б) $[3/2, 3]$.

11.104. $f(x)=x+\dfrac{8}{x^4}$; а) $[-2, -1]$; б) $[1, 3]$.

11.105. $f(x)=(5-x)\,2^{-x}$; а) $[-1, 0]$; б) $[5, 6]$.

11.106. $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}}$; а) $[-8, -1]$; б) $[-1, 1]$.

11.107. $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$; а) $[-7, 0]$; б) $[1, 2]$.

11.108. $f(x)=2x^2-\ln x$; $[1, e]$.

11.109. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$ в промежутке $[0, \pi/2]$.

11.110. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$$

в промежутке $(0, \pi)$.

11.111. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$

в промежутке $[0, 1)$, n — число натуральное.

11.112. Число 18 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

11.113. Число 180 разбить на три положительных слагаемых так, чтобы два из них относились как $1:2$, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

11.114. Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

11.115. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

11.116. Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5×8 дм. В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

11.117. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом $60°$ вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

11.118. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

11.119. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a указать треугольник наибольшей площади.

11.120. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины — по 50 см. Найти размер ее большего основания, при котором площадь трапеции была бы наибольшей.

11.121. Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18, 24, 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

11.122. Определить длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 и 8 см и длиной высоты 12 см. (Две вершины прямоугольника лежат на боковых сторонах трапеции, а две другие — на ее большем основании.)

11.123. Из пункта A на прогулку вышел пешеход со скоростью v км/ч. После того как он отошел от A на 6 км, из A следом за ним выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и возвратились вместе в A со скоростью 4 км/ч. При каком значении v время прогулки пешехода окажется наименьшим?

11.124. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найти длины сторон параллелограмма.

11.125. В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

11.126. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

11.127. Величина угла при вершине A трапеции $ABCD$ равна α. Длина боковой стороны AB вдвое больше длины меньшего основания BC. При каком значении α величина угла BAC окажется наибольшей? Чему равно это наибольшее значение?

11.128. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

11.129. Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна α. При каком значении α отношение длин радиусов вписанной и описанной окружностей является наибольшим? Чему равно это отношение?

11.130. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

11.131. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

11.132. В правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания a и высотой H вписана правильная четырехугольная призма так, что ее нижнее основание лежит в основании пирамиды, а вершины верхнего основания — на боковых ребрах. Найти длину ребра основания и длину высоты призмы, имеющей наибольшую боковую поверхность.

11.133. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

11.134. В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α расстояние от центра основания пирамиды до ее боковой грани является наибольшим?

11.135. В конус с заданным постоянным объемом вписана пирамида; в ее основании лежит равнобедренный треугольник, у которого величина угла при вершине равна α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

11.136. Образующая конуса имеет постоянную длину и составляет с высотой конуса угол α. В конус вписана правильная шестиугольная призма с равными длинами ребер (основание призмы лежит в плоскости основания конуса). При каком значении α боковая поверхность призмы является наибольшей?

11.137. Переменная y обратно пропорциональна переменной x. Найти коэффициент k обратной пропорциональности и заполнить таблицу:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

.

На графике заданной обратной пропорциональности найти точку, ближайшую к началу координат O (0; 0).

11.138. Известно, что мощность P, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $P=\frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, где E — постоянная электродвижущая сила элемента, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R, чтобы мощность P была наибольшей?

11.139. Дана функция $y=x^4-6x^2+1$. Найти наибольшее и наименьшее значения производной на промежутке $[-1, 3]$.

11.140. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x(\ln x-1)$ в точке $x_0=e$.

11.141. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\operatorname{tg} 3x$ в точке $x_0=\pi/3$.

11.142. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к графику функции $g(x)=x^2\ln x$ в точке $x_0=1$?

11.143. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

11.144. На графике функции $y=x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

11.145. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

11.146. Определить, под каким углом синусоида $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

11.147. Показать, что на графике функции $y=x^3+x^2+x+1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

11.148. В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

11.149. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ образует с осью Ox угол 45°?

11.150. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y=2x^3-x$ в точке ее пересечения с осью Oy?

11.151. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке M_0 $(2;\ -4)$?

11.152. Известно, что прямая $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}$ является касательной к линии, заданной уравнением $y=0{,}5x^4-x$. Найти координаты точек касания.

11.153. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2e^{-x}$ в точке $x=1$.

11.154. Составить уравнения касательных к кривым $y=2x^2-5$ и $y=x^2-3x+5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.

11.155. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$.

11.156. Составить уравнения касательных к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящих через точку M $(2;\ -5)$. Сделать чертеж.

11.157. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln(2e-x)$ в точке $x=e$.

11.158. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=2-4x-3x^2$ в точке $x=-2$.

11.159. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3-2x^2+x-1$ равен 3?

11.160. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол $135°$?

11.161. Дана функция $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$. Требуется:

а) составить уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=\pi/6$ (окончательные числовые значения округлять до второго десятичного знака);

б) установить, в каких точках промежутка $0\leqslant x\leqslant\pi$ касательная к графику данной функции составляет с осью Ox угол $60°$.

11.162. Дана функция $f(x)=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$. Требуется найти:

а) угол, образованный с осью Ox касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=\pi/3$;

б) точки минимума на промежутке $[0,\ \pi]$.

11.163. В точке пересечения графиков функций $y=6/\sqrt{x}$ и $y=12x^{-1/2}-2x^{1/2}$ проведена касательная к каждому графику. Найти разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

11.164. В точке M $(1;\ 8)$ к кривой $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

11.165. Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке M $(3;\ 2)$.

11.166. К гиперболе $y=4/x$ проведены касательные: одна — в точке

$M(2;\ 2)$, а другие — параллельно прямой $y=-4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

11.167. Отрезок произвольной касательной к кривой $y=x^2$, заключенный между точкой касания и осью Ox, спроецирован на ось Ox. Показать, что эта проекция вдвое больше проекции аналогичного отрезка касательной к кривой $y=x^4$ с той же абсциссой точки касания.

11.168. В произвольной точке кривой $y=\sqrt{2x-x^2}$ проведена касательная. Показать, что длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью Oy равна ординате точки пересечения.

Найти точки экстремума функций (**11.169—11.172**):

11.169. $y=\dfrac{x}{\ln x}$. **11.170.** $y=\dfrac{\ln x+2}{x}$.

11.171. $y=x^2e^{-x}$. **11.172.** $y=x^3e^{-x}$.

11.173. Найти экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

11.174. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}-e^{-2x}$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

11.175. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}\sin x$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

11.176. Найти точки экстремума функции $y=x-\ln(1+x)$ и точку на графике данной функции, в которой касательная к графику параллельна прямой, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(-1;\ 4)$.

11.177. Найти экстремумы функции $y=x^3+\dfrac{3}{x}$ и составить уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x=-2$.

11.178. Дана функция $y=-x^4-8x^2+9$. Найти ее экстремумы и ординаты точек пересечения с графиком функции $y=-9x^2+9$.

Найти экстремумы функций и указать промежутки их возрастания и убывания (**11.179—11.183**):

11.179. $y=e^{-x}-e^{-2x}$. **11.180.** $y=x^2e^{-x}$.

11.181. $y=e^{-x}\sin x$, если $0<x<\pi$.

11.182. $y=x+\ln(1-2x)$. **11.183.** $y=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума (**11.184—11.201**):

11.184. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. **11.185.** $y=\dfrac{-5}{(x-2)^2+1}$.

11.186. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$. **11.187.** $y=x+\dfrac{4}{x^2}$.

11.188. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **11.189.** $y=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$.

11.190. $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$. **11.191.** $y=\dfrac{1}{x^2+8x}$.

11.192. $y=\frac{x+2}{x^2-9}$.

11.193. $y=\frac{4}{x^2-2x+2}$.

11.194. $y=\frac{1-x}{(x-2)^3}$.

11.195. $y=\frac{3x}{x^2+4x+4}$.

11.196. $y=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

11.197. $y=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$.

11.198. $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$.

11.199. $y=\frac{x^2}{x^3-1}$.

11.200. $y=\frac{(x-3)^2}{x^2}$.

11.201. $y=\frac{1}{(x-1)(x-4)}$.

Найти экстремумы функций, указать промежутки их возрастания и убывания, а также начертить эскизы графиков функций (11.202—11.211):

11.202. $y=2x^3+3x^2-1$.

11.203. $y=0{,}5x^4-4x^2$.

11.204. $y=x^4-10x^2+9$.

11.205. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+3$.

11.206. $y=x^3-3x^2+2$.

11.207. $y=2x^3-15x^2+36x$.

11.208. $y=8+2x^2-x^4$.

11.209. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}$.

11.210. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$.

11.211. $y=\frac{2}{1+x^2}$.

11.212. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=\sqrt[3]{t^2}$. Показать, что ее ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

В задачах **11.213—11.218** указан закон прямолинейного движения $s(t)$; s и t выражаются соответственно в метрах и секундах.

11.213. $s(t)=\frac{4t+3}{t+4}$. Найти скорость в момент $t=9$.

11.214. $s(t)=2t^3-3t+4$. Найти скорость и ускорение в момент $t=2$.

11.215. $s(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1$. В какие моменты времени ускорение движения тела равно нулю?

11.216. $s(t)=8-2t+24t^2-0{,}3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

11.217. Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $s_1=4t^2+2$, $s_2=3t^2+4t-1$. Найти скорость движения точек в те моменты, когда пройденные расстояния равны.

11.218. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1=2t^3-5t^2-3t$, $s_2=2t^3-3t^2-11t+7$. Найти ускорения точек в тот момент, когда скорости их равны.

11.219. Две точки движутся по оси Ox. Координата x_1 первой точки определяется формулой $x_1=3t^2-5$, координата x_2 второй точки — формулой $x_2=3t^2-t+1$ (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Найти скорости движения точек в тот момент, когда координаты точек равны.

11.220. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону: а) $h(t)=8t-5t^2$ или б) $h(t)=4+8t-5t^2$ (h — в метрах, t — в секундах).

Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей (ускорение g считать равным 10 м/с^2).

11.221. Тело массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\frac{2}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

11.222. Тело массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ (α, β, γ — постоянные). Доказать, что сила, действующая на тело, постоянна.

11.223. Радиус шара r равномерно возрастает со скоростью 2 см/с. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Найти эти скорости в момент, когда r достигнет 10 см. (При $t=0$ величина $r=0$.)

11.224. Угол α, на который повернется колесо через промежуток времени t, равен $\alpha=3t^2-12t+36$ (α — в радианах, t — в секундах). Найти угловую скорость ω в момент $t=4$ и определить, в какой момент времени колесо остановится.

11.225. В тонком неоднородном стержне, имеющем длину 25 см, масса (в граммах) распределяется по закону $g(l)=4l^2-2l$, где l — расстояние от начала стержня до любой его точки. Найти плотность стержня на расстоянии 4 см от начала стержня и среднюю плотность стержня.

11.226. Дана функция $f(x)=|x|$. Написать выражение первообразной функции.

Найти функцию $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x;\ y)$ **(11.227—11.228)**:

11.227. $F'(x)=4x^2+9x^{-2}$; $M_0(3;\ -2)$.

11.228. $F'(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{1}{3}$; $M_0(2;\ 1)$.

Для данной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ **(11.229—11.232)**:

11.229. $f(x)=x^4$; $M_0(-1;\ 2)$. **11.230.** $f(x)=\sin 2x$; $M_0(0;\ 1)$.

11.231. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$; $M_0\left(\frac{\pi}{12};\ -1\right)$. **11.232.** $f(x)=x^{-4}$; $M_0(2;\ -3)$.

11.233. Найти функцию $F(x)$, если известно, что $F'(x)=4x^3-3x^2$ и что $F(1)=3$.

11.234. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если известно, что $F(\pi/24)=-1$.

11.235. Найти функцию $S(x)$, если ее производная $S'(x)=2/\sqrt{5-x}$ и $S(1)=-1$.

11.236. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно, за отрезок времени от $t_1=1$ до $t_2=4$, если скорость точки $v(t)=2t^2+3t$ (t — в секундах, v — в м/с)? Чему равно ускорение точки в момент $t=2$?

11.237. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=\sqrt[3]{1+t}$ (t — в секундах, v — в м/с). Найти путь, пройденный телом за первые 7 с. Чему равно ускорение тела в момент $t=7$?

Вычислить интегралы (11.238—11.263):

11.238. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$.

11.239. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx$.

11.240. $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

11.241. $\int\limits_0^{\pi/4} (\sin 2t - \cos 2t)^2\, dt$.

11.242. $\int\limits_0^{3\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{2x}{9}}$.

11.243. $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.

11.244. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\, dx$.

11.245. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$.

11.246. $\int\limits_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$.

11.247. $\int\limits_0^{2} (1+3x)^4\, dx$.

11.248. $\int\limits_9^{-54} \sqrt[3]{2 - \frac{t}{9}}\, dt$.

11.249. $\int\limits_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx$.

11.250. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1-x}\, dx$.

11.251. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{0,5x}$.

11.252. $\int\limits_1^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x}\right) dx$.

11.253. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$.

11.254. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1}\, dx$.

11.255. $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x\, dx$.

11.256. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$.

11.257. $\int\limits_0^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{9+16x}}$.

11.258. $\int\limits_0^{1} \frac{x\, dx}{(x+1)^3}$.

11.259. $\int\limits_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10} - \sqrt{x+1}}$.

11.260. $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x\, dx$.

11.261. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x\, dx$.

11.262. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos 3x \cos 2x\, dx$.

11.263. $\int\limits_{-2}^{2} (10^{x/4} - \sin \pi x)\, dx$.

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями (11.264—11.272):

11.264. $y=x^3$, $y=1$ и $x=2$.
11.265. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\pi/4$ и $x=\pi/4$.
11.266. $y=\sqrt{x}$, $y=2$ и $x=9$.
11.267. $y=x^3$ и $y=\sqrt{x}$.
11.268. $y=2x-x^2$ и $y=3/4$.
11.269. $y=x^4$ и $y=x$.
11.270. $y=1/x^2$, $y=0$, $x=0{,}5$ и $x=2{,}5$.
11.271. $y=5/x$ и $y=6-x$.
11.272. $y=x^3-4x$, $y=0$, $x\geqslant 0$.

11.273. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x^2-2x+1$, прямыми $x=0$ и $y=0$ и касательной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0=2$.

11.274. Написать дифференциальное уравнение для гармонического колебания: а) $y=-4\sin(2x+3)$; б) $y=3{,}8\cos(0{,}6x-10)$.

11.275. Найти два отличных от нуля решения дифференциального уравнения: а) $y'=-36y$; б) $y''=-36y$.

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.001. □ Введем обозначения:

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}=A;\ \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=B;\ \frac{a-b-c}{abc}=C.$$

Тогда заданное выражение примет вид $A\cdot B:C$. В выражении A допустимыми являются значения $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $b\neq -c$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим $A=\frac{b+c-a}{b+c+a}$; для выражения B, используя формулы (1.8), (1.9), находим $B=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$. Следовательно,

$$A\cdot B=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc}=\frac{(b+c-a)^2}{2bc};$$

$$A\cdot B:C=\frac{(b+c-a)^2}{2bc}\cdot\frac{abc}{a-b-c}=\frac{a\,(b+c-a)^2}{2\,(a-b-c)}.$$

Подставив заданные значения, имеем

$$\frac{(-11{,}05+1{,}07-0{,}02)^2\cdot 0{,}02}{2\,(0{,}02+11{,}05-1{,}07)}=\frac{10^2\cdot 0{,}02}{2\cdot 10}=0{,}1.\ \blacksquare$$

1.002. □ Стоящие в знаменателе квадратные трехчлены разложим на множители: $t^2+3t+2=(t+1)\,(t+2)$; $t^2+4t+3=(t+1)\,(t+3)$; $t^2+5t+6=(t+2)\,(t+3)$. Отсюда видно, что для существования дробей необходимо, чтобы $t\neq -1$; $t\neq -2$; $t\neq -3$. Приведя сумму дробей к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{(t+1)\,(t+2)}+\frac{2t}{(t+1)\,(t+3)}+\frac{1}{(t+3)\,(t+2)}=\frac{2\,(t^2+3t+2)}{(t+1)\,(t+2)\,(t+3)}=\frac{2}{t+3}$$

и далее

$$\left(\frac{2}{t+3}\right)^2\cdot\frac{(t-3)^2+12t}{2}=2.\ \blacksquare$$

1.003. □ Положим $A=\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}$; $B=a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2$; $C=(a^3+b^3+a^2b+ab^2)\,(a^3-b^3)$. Преобразуем каждое из записанных выражений, используя для разложения на множители формулы (1.9), (1.13), (1.14) и группировку членов: $A=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$; $B=a^5+a^3b^2+b^5+a^2b^3=a^3(a^2+b^2)+b^3(a^2+b^2)=(a^3+b^3)(a^2+b^2)$; $C=a^3+b^3+a^2b+ab^2\ (a^3-b^3)=((a^3+a^2b)+(b^3+ab^2))\,(a^3-b^3)=(a+b)\,(a^2+b^2)\,(a^3-b^3)$. Тогда получим

$$A:\frac{B}{C}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{(a+b)\,(a^2+b^2)\,(a^3-b^3)}{(a^2+b^2)\,(a^3+b^3)}=$$

$$=\frac{(a^2-ab+b^2)\,(a+b)\,(a-b)\,(a^2+ab+b^2)\,(a^2+b^2)}{(a^2+ab+b^2)\,(a^2+b^2)\,(a+b)\,(a^2-ab+b^2)}=a-b,\text{ где } a\neq -b.\ ■$$

1.004. $0{,}04$. **1.005.** $(m/n)^{m+n}$. **1.006.** $(b+1)/(b-2a)$. **1.007.** $1+3x^2$.
1.008. 1. **1.009.** $(x-y)/(x+y)$. **1.010.** 1. **1.011.** $1/(xy)$.
1.012. $24/(5y-2x)$. **1.013.** 20. **1.014.** $2a+3$. **1.015.** $1+2x$.
1.016. $0{,}5$. **1.017.** $(a-b)/(a+b)$. **1.018.** 1. **1.019.** $1/4$.
1.020. -1. **1.021.** $2x-1$. **1.022.** 1. **1.023.** $0{,}5a^3\,(a-1)$.
1.024. $-7/24$. **1.025.** $1/(ab)$.
1.026. □ Используя для первого множителя заданного выражения формулу (1.9), получим

$$\sqrt{m-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}+2\sqrt{m-\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{m+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}=$$

$$=2\sqrt{m}+\frac{2\sqrt{m^2-m^2+9}}{\sqrt{m}}=\frac{2\,(m+3)}{\sqrt{m}}.$$

Далее находим $\dfrac{2\,(m+3)}{\sqrt{m}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{m^2}{4}}=\dfrac{2\,(m+3)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,(m+3)$. ■

1.027. □ Используя формулы (1.7), (1.8), (1.9), находим

$$\frac{(3b^{2/3})^2-(a^{3/4}b^{-1})^2}{\sqrt{(a^{3/4}b^{-1})^2+2\cdot 3a^{3/4}b^{-1/3}+(3b^{2/3})^2}}=$$

$$=\frac{(3b^{2/3}+a^{3/4}\cdot b^{-1})\,(3b^{2/3}-a^{3/4}b^{-1})}{a^{3/4}b^{-1}+3b^{2/3}}=3b^{2/3}-a^{4/3}b^{-1}.$$

Тогда заданное выражение преобразуется так:

$$(3b^{2/3}-a^{3/4}b^{-1})\,\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}=\frac{b^2\,(3b^{5/3}-a^{3/4})}{b\,(a^{3/4}-3b^{5/3})}=-b,$$

откуда при $b=4$ получаем ответ: -4. ■
1.028. □ Воспользовавшись формулами (1.20) и (1.23), преобразуем разность в числителе: $\sqrt[3]{\dfrac{(r^2+4)^{3/2}}{|r|}}-\sqrt[3]{\dfrac{(r^2-4)^{3/2}}{|r|}}=\dfrac{\sqrt{(r^2+4)}-\sqrt{r^2-4}}{\sqrt[3]{|r|}}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\sqrt{r^2+4}-\sqrt{r^2-4}}{\sqrt[3]{|r|}}\right)^2=\frac{r^2+4-2\sqrt{r^4-16}+r^2-4}{\sqrt[3]{r^2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{r^2}}\,(r^2-\sqrt{r^4-16}).$$

Произведя деление, получим ответ: $\frac{2\sqrt[3]{r}}{r}$. ■

1.029. □ Применяя формулу (1.8), в числителе получим

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}-1}-3x^{\frac{1}{n}-1}\right)=$$

$$=\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)x^{-1}\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)}{x}\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)^2.$$

Используя формулу (1.9), преобразуем знаменатель:

$$x^{\frac{2}{m}}+6x^{\frac{m+n}{mn}}+9x^{\frac{2}{n}}-12x^{\frac{m+n}{mn}}=\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)^2}{x\left(x^{\frac{1}{m}}-3x^{\frac{1}{n}}\right)^2}=\frac{x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}}{x}.\ ■$$

1.030. □ Здесь допустимыми значениями выражения являются только значения $x>a$, где $a>0$. Используя равенство $x-a=\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-a}$ и приведя сумму дробей в скобках к общему знаменателю, получим

$$\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})}=\frac{\sqrt{x-a}}{2a}(2\sqrt{x+a})=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Тогда $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}:\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}=1$. ■

1.031. □ Применяя формулы (1.7), (1.9), (1.10), (1.14) и (1.16), в первой скобке получим

$$\sqrt[3]{2^3-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^3(t^2+2t+4)}{(2-t)^2}}=\sqrt[3]{(2-t)(4+2t+t^2)}+$$

$$+t\sqrt[3]{\frac{t^2+2t+4}{(2-t)^2}}=\sqrt[3]{4+2t+t^2}\left(\sqrt[3]{2-t}+\frac{t}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{4+2t+t^2}\cdot\frac{2-t+t}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{4+2t+t^2}}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}.$$

Приведя к общему знаменателю дроби во второй скобке, имеем $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+$

$+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{2}}{2-t}$. Окончательно находим

$$\frac{2\sqrt[3]{4+2t+t^2}}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}:\frac{2\sqrt{2}}{2-t}=\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}.\ \blacksquare$$

1.032. $x-1$. **1.033.** $2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2/(p-q)$. **1.034.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2/(a-b)$. **1.035.** 0,2. **1.036.** 0. **1.037.** $1/(ab)$. **1.038.** $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. **1.039.** y^2. **1.040.** $(t+1)/t$. **1.041.** -4. **1.042.** $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$. **1.043.** $x+1$. **1.044.** $\sqrt{a-1}$. **1.045.** $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **1.046.** $\sqrt[m]{y}$. **1.047.** $|z^{1/p}-z^{1/q}|$. **1.048.** $\sqrt{x}$. **1.049.** 16. **1.050.** $2\sqrt[6]{a^5}/a$. **1.051.** $1/\sqrt{x^2-1}$. **1.052.** $-\sqrt{x}$ при $x\in(0,\ 2)$; $\sqrt{x}$ при $x\in(2,\ \infty)$. **1.053.** $\sqrt{6x}$. **1.054.** $\sqrt[3]{20x}$. **1.055.** 1. **1.056.** $1/\sqrt[12]{a^2b}$. **1.057.** $\pm\sqrt[6]{2}$. **1.058.** $2/(x^2-a^2)$. **1.059.** -1. **1.060.** $1/a$. **1.061.** $-(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$. **1.062.** $a^{5/6}$. **1.063.** $a^{1/3}+b^{1/3}$. **1.064.** $a-b$. **1.065.** $(\sqrt{m}-\sqrt{n})/m$. **1.066.** $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$. **1.067.** 1. **1.068.** $\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$. **1.069.** 6. **1.070.** $\sqrt{t^2-4}/(t+2)$. **1.071.** 1. **1.072.** -25 при $a>0$; 25 при $a<0$. **1.073.** $-\sqrt{ac}$. **1.074.** $\sqrt{1+x}$. **1.075.** 2. **1.076.** 3. **1.077.** $\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}$. **1.078.** $1/(x^2-1)$. **1.079.** $2\sqrt{3}$. **1.080.** 0. **1.081.** $z^{1/(p-3)}$. **1.082.** $\frac{a^2}{4(a^2-x)}$. **1.083.** 5. **1.084.** $4p-\sqrt{4p^2-1}$. **1.085.** $\sqrt{a^2-1}$. **1.086.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$. **1.087.** $-3n(m+p)$. **1.088.** $-\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$. **1.089.** $(1-a)/\sqrt{a}$. **1.090.** $-1/(a^2+a+1)$. **1.091.** 1. **1.092.** $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. **1.093.** -1. **1.094.** $q(p+q)$. **1.095.** 5. **1.096.** $1-x^2$. **1.097.** $\frac{2}{1-p^4}$. **1.098.** $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. **1.099.** 1/2. **1.100.** $x+y$. **1.101.** 2. **1.102.** 1. **1.103.** -1. **1.104.** $z(z+1)(z+2)$. **1.105.** $-\sqrt{2}/(2a)$. **1.106.** $1-a$ при $a\in(-\infty,\ -1)$; $a-1$ при $a\in(-1,\ 0)\bigcup(0,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$. **1.107.** $a/2$. **1.108.** $(a+b)\sqrt[3]{b^2+2a^3}$. **1.109.** -1. **1.110.** 29/35. **1.111.** 100. **1.112.** 1/3. **1.113.** $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$. **1.114.** $16a^2$. **1.115.** $(a+b)^2$. **1.116.** $1/m^2$. **1.117.** $-a^2$. **1.118.** 1/2.

1.119. □ Запишем числа под знаками радикалов в другом виде: $5\sqrt{16\cdot 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{16\cdot 2\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{8\cdot 3\sqrt{2}}$. Применив формулу (1.19), получим $5\cdot 4\sqrt[6]{18}+4\sqrt[6]{18}-22\sqrt[6]{18}=2\sqrt[6]{18}$. ■

1.120. 3/5. **1.121.** 31/3. **1.122.** $\sqrt[12]{32}$. **1.123.** 0,1. **1.124.** 0.

1.125. □ Обозначим правую и левую части равенства соответственно через a и b. Так как $a>0$, $b>0$, то из равенства $a^2=b^2$ будет следовать равенство $a=b$. Имеем

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}\right)^2=(\sqrt{2})^2;$$

$$\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}-2\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{3}+1}+\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=2;$$

$$\frac{2\,(\sqrt[4]{27}-\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+1})}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=2. \blacksquare$$

1.135. 0. **1.136.** 0. **1.137.** $\frac{a+b}{ab}$. **1.138.** $-3/4$. **1.139.** $3/4$. **1.140.** 0,2. **1.141.** 6. **1.142.** $-\sqrt{6}/2$. **1.143.** $(a-b)$. **1.144.** $(a+b)$. **1.145.** 1.

1.146. □ Чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\cdot\frac{(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{2})-\sqrt{3}\,(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}\,(2-\sqrt{2})-3}{(2+\sqrt{2})^2-3}=$$

$$=\frac{-1-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}}=-\frac{1+2\sqrt{6}}{3+4\sqrt{2}}.$$

Снова произведя аналогичные действия, находим

$$-\frac{1+2\sqrt{6}}{3+4\sqrt{2}}\cdot\frac{3-4\sqrt{2}}{3-4\sqrt{2}}=\frac{(1+2\sqrt{6})\,(3-4\sqrt{2})}{23}. \blacksquare$$

1.147. $2\,(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})\,(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})\,(3+\sqrt{2})$. **1.148.** $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})\,(\sqrt{13}+3)$. **1.149.** $-(4+3\sqrt{2})\,(5+3\sqrt{3})/2$. **1.150.** $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})/2$. **1.151.** $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})\,(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})/a$.

1.152. □ Пусть a и b — искомые числа; тогда $a+b=11$ и $ab=21$. Согласно формуле (1.11), имеем $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$. Следовательно, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b)$, т. е. $a^3+b^3=11^3-3\cdot 21\cdot 11=638$. ■

1.154. 6. **1.155.** 5. **1.157.** а) $2\sqrt{3}/3$; б) 4.

1.158. □ I способ. Коэффициенты числителя и знаменателя преобразуем так, чтобы можно было вынести общий множитель: $a^3-2a^2+5a+26=a^3+2a^2-4a^2-8a+13a+26=a^2\,(a+2)-4a\,(a+2)+13a\,(a+2)=(a+2)\cdot(a^2-4a+13)$; $a^3-5a^2+17a-13=a^3-a^2-4a^2+4a+13a-13=(a-1)\,(a^2-4a+13)$. Произведя деление, получим ответ: $\frac{a+2}{a-1}$.

II способ. Представим свободные члены многочленов в виде $26=1\cdot 2\cdot 13$ и $13=1\cdot 13$. Далее проверяем, не является ли каждый из множителей корнем заданного многочлена; для этого подставляем его со знаком «+» или «−» в многочлен. Для многочлена $a^3-2a^2+5a+26$ таким корнем является — 2 (поскольку $(-2)^3-2(-2)^2+5(-2)+26=0$). Теперь делением многочлена на разность $a-(-2)$ понизим его степень на единицу; имеем $(a^3-2a^2+5a+26):(a+2)=a^2-4a+13$. Таким образом, получаем разложение на множители: $(a+2)(a^2-4a+13)$. Здесь квадратный трехчлен не имеет корней, так как $D<0$. Это разложение единственно. Аналогично разлагаем другой многочлен и в результате получаем тот же ответ. ■

1.159. □ Разложим многочлены третьей степени на множители (см. задачу 1.158): $p^3+4p^2+10p+12=(p+2)(p^2+2p+6)$; $p^3-p^2+2p+16=(p+2)(p^2-3p+8)$; $p^3-3p^2+8p=p(p^2-3p+8)$. Тогда получим

$$\frac{(p+2)(p^2+2p+6)}{(p+2)(p^2-3p+8)}\cdot\frac{p(p^2-3p+8)}{(p^2+2p+6)}=p. \ ■$$

1.160. □ Выполним указанные действия внутри скобок, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\frac{z-2}{z^2+2z+4}+\frac{z^2+8z+4}{(z-2)(z^2+2z+4)}-\frac{1}{z-2}=$$

$$=\frac{z^2-4z+4+z^2+8z+4-z^2-2z-4}{(z-2)(z^2+2z+4)}=\frac{1}{z-2}.$$

Затем упростим вторую дробь:

$$\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}=\frac{(z+2)(z^2+2)}{(z-2)(z^2+2)}=\frac{z+2}{z-2}.$$

Окончательно получим $\frac{1}{z-2}\cdot\frac{z-2}{z+2}=\frac{1}{z+2}$. ■

1.161. □ 1) $$\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}=\frac{x^4-9+5x(x^2+3)}{x^4(x^2+3)}=\frac{(x^2+3)(x^2-3+5x)}{x^4(x^2+3)}=$$

$$=\frac{x^2+5x-3}{x^4};$$

2) $$\frac{x^2+5x-3}{x^4}+\frac{9}{x^4}=\frac{(x+2)(x+3)}{x^4};$$

3) $$\frac{(x+2)(x+3)}{x^4}\cdot\frac{x^5}{x(x^2-4)+3(x^2-4)}=\frac{x(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)}=\frac{x}{x-2}. \ ■$$

1.162. □ Рассмотрим выражение $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77$. Для его упрощения воспользуемся подстановкой $x+\frac{1}{x}=z$; тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$. Следовательно, $(z^2-2)^2-14z^2+77=z^4-18z^2+81=(z^2-9)^2$ или $\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-9\right)^2=$ $=\left(x^2-7+\frac{1}{x^2}\right)^2=\frac{(x^4-7x^2+1)^2}{x^4}$. Теперь заданное выражение примет вид $(x^4-7x^2+1)^{-2}\cdot\frac{(x^4-7x^2+1)^2}{x^4}=\frac{1}{x^4}$. Ответ: $5^4/125=5$. ■

1.163. □ Первая дробь после обычных преобразований примет следующий вид:

$$\frac{(bx)^2+4bx+4}{bx\,(b\,(2+bx)-2x\,(2+bx))}=\frac{(bx+2)^2}{bx\,(2+bx)\,(b-2x)}=\frac{bx+2}{bx\,(b-2x)}.$$

Упростим вторую дробь: $\frac{(2x+b)\,(2x-b)}{b\,(b-2x)^2}=-\frac{2x+b}{b\,(b-2x)}$. Тогда получим

$$\left(\frac{bx+2}{bx\,(b-2x)}-\frac{2x+b}{b\,(b-2x)}\right)\frac{bx}{2}=\frac{bx+2-2x^2-bx}{bx\,(b-2x)}\cdot\frac{bx}{2}=\frac{1-x^2}{b-2x}.\ \blacksquare$$

1.164. $\sqrt{5}/5$. **1.165.** $\frac{a^2+1}{a-1}$. **1.166.** $\frac{a+2}{a^2\,(a-1)^2}$. **1.167.** $a^2x^2-b^2y^2$. **1.168.** $\frac{x+3}{x-1}$.

1.169. □ Чтобы разложить числитель на множители, произведем следующее преобразование: $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+1+\sqrt{2}x)\,(x^2+1-\sqrt{2}x)$. Тогда числитель примет вид $(x^2+\sqrt{2}x+1)\,(x^2-\sqrt{2}x+1)+(x^2+\sqrt{2}x+1)=(x^2+x\sqrt{2}x+1)\,(x^2-x\sqrt{2}+2)$. Таким образом, получим

$$\frac{(x^2+x\sqrt{2}+1)\,(x^2-x\sqrt{2}+2)}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}=x^2+x\sqrt{2}+1-x\sqrt{2}=x^2+1.\ \blacksquare$$

1.170. □ Трехчлен a^3-3a^2+4 в числителе группировкой разложим на множители: $a^3-3a^2+4=(a+1)\,(a-2)^2$. Аналогично разложим на множители трехчлен в знаменателе: $a^3+3a^2-4=(a-1)\,(a+2)^2$. Продолжая разлагать на множители числитель и знаменатель дроби, получим

$$\frac{(a+1)\,(a-2)^2+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\,(a+2)^2+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}\,(a-2)\,((a-2)\sqrt{a+1}+(a+2)\sqrt{a-1})}{\sqrt{a-1}\,(a+2)\,((a+2)\sqrt{a-1}+(a-2)\sqrt{a+1})}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}\,(a-2)\,(a\,(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})-2\,(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}))}{\sqrt{a-1}\,(a+2)\,(a\,(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})-2\,(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}))}=\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}.\ \blacksquare$$

1.171. □ Внутри скобок числителя вынесем общий множитель: $ab^{3/4}\,(ab^{3/4}-6a^{2/3}b^{2/4}+12a^{1/3}b^{1/4}-8)=ab^{3/4}\,(a^{1/3}b^{1/4}-2)^3$; тогда числитель будет равен $a^{2/3}b^{1/2}\,(a^{1/3}b^{1/4}-2)^2$. Аналогично преобразуем трехчлен в знаменателе: $a^{2/3}b^{1/2}\,(a^{2/3}b^{1/2}-4a^{1/3}b^{1/4}+4)=a^{2/3}b^{1/2}\,(a^{1/3}b^{1/4}-2)^2$. Окончательно находим $\frac{a^{2/3}b^{1/2}\,(a^{1/3}b^{1/4}-2)^2}{a^{2/3}b^{1/2}\,(a^{1/3}b^{1/4}-2)^2}=1.\ \blacksquare$

1.172. □ Запишем числитель в следующем виде:

$$\frac{x+\sqrt[3]{2ax^2}}{2a+\sqrt[3]{4a^2x}}-1=\frac{x+2^{1/3}a^{1/3}x^{2/3}}{2a+4^{1/3}a^{2/3}x^{1/3}}-1=\frac{x^{2/3}\,(x^{1/3}+2^{1/3}a^{1/3})}{2^{2/3}a^{2/3}\,(2^{1/3}a^{1/3}+x^{1/3})}-1=$$

$$=\frac{x^{2/3}}{(2a)^{2/3}}-1=\frac{x^{2/3}-(2a)^{2/3}}{(2a)^{2/3}}.$$

Тогда дробь будет равна $\frac{x^{2/3}-(2a)^{2/3}}{(2a)^{2/3}(x^{1/3}-(2a)^{1/3})}=\frac{x^{1/3}+(2a)^{1/3}}{(2a)^{2/3}}$. Внутри скобок получим

$$\frac{x^{1/3}+(2a)^{1/3}}{(2a)^{2/3}}-\frac{1}{(2a)^{1/3}}=\frac{x^{1/3}+(2a)^{1/3}-(2a)^{1/3}}{(2a)^{2/3}}=\frac{x^{1/3}}{(2a)^{2/3}}.$$

Окончательно находим $\left(\frac{x^{1/3}}{(2a)^{2/3}}\right)^{-6}=\frac{16a^4}{x^2}$. ■

1.173. □ Приведением к общему знаменателю и вынесением общего множителя преобразуем отдельно числитель и знаменатель первой дроби:

$$\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y}-(x\sqrt{x}-y\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{y})}{x-y}=$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}};$$

$$\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+y\sqrt{y}+x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(x-\sqrt{xy}+y)}{(x+y)\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{2\,(x-\sqrt{xy}+y)}{(x+y)\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.$$

Тогда первая дробь примет вид

$$\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}:\frac{2\,(x-\sqrt{xy}+y)}{(x+y)\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{xy}\,(x+y)}{x-\sqrt{xy}+y}.$$

Окончательно получим $\frac{\sqrt{xy}\,(x+y)}{x-\sqrt{xy}+y}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{2}$. ■

1.174. □ Легко догадаться, что подкоренное выражение в числителе есть полный квадрат суммы: $(\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2})^2$. Тогда получим $\frac{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}}{\sqrt{b^2-4+b+2}}=$

$$=\frac{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}\,(\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2})}=\frac{1}{\sqrt{b+2}}.\ ■$$

1.175. □ Разложим на множители отдельно числитель и знаменатель:

$$b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2=b^2-b-(b-1)\sqrt{b^2-4}-2\,(b-1)=$$

$$=b\,(b-1)-(b-1)\sqrt{b^2-4}-2\,(b-1)=(b-1)\,(b-\sqrt{b^2-4}-2);$$

$$b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2=b^2+b+2\,(b+1)-(b+1)\sqrt{b^2-4}=$$

$$=(b+1)\,(b-\sqrt{b^2-4}+2).$$

Тогда дробь примет вид

$$\frac{(b-1)\,(b-\sqrt{b^2-4}-2)}{(b+1)\,(b-\sqrt{b^2-4}+2)}=-\frac{(b-1)\sqrt{b-2}\,(\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2})}{(b+1)\sqrt{b+2}\,(\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2})}=$$

$$=-\frac{b-1}{b+1}\cdot\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}.$$

Окончательно находим $\frac{1-b}{b+1}\cdot\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=\frac{1-b}{b+1}$. ■

1.176. □ Легко заметить, что $m+4\sqrt{m-4}=(\sqrt{m-4}+2)^2$; $m-4\sqrt{m-4}=$ $=(\sqrt{m-4}-2)^2$. Тогда $\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}=\frac{\sqrt{m-4}+2}{\sqrt{m-4}-2}$. Окончательно получим $\frac{\sqrt{m-4}+2}{\sqrt{m-4}-2}\cdot\frac{(\sqrt{m-4}-2)^2}{2}=\frac{m-8}{2}$. ■

1.177. □ Преобразуем подкоренное выражение в числителе:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2=\frac{(x-1)+(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}-2=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x^2-1}},$$

откуда $\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. Далее, используя формулу (1.14), получим

$$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,(2x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt[4]{x^2-1}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,(\sqrt{x^2-1}+2x)}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}.\ ■$$

1.178. □ Числитель и знаменатель первой дроби разложим на множители:

$$\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}=x^2\sqrt[3]{x^3-y^3}-$$

$$-y\cdot 2x\sqrt[3]{x^3-y^3}+y^2\sqrt[3]{x^3-y^3}=\sqrt[3]{x^3-y^3}\,(x^2-2xy+y^2)=$$

$$=\sqrt[3]{x^3-y^3}\,(x-y)^2;$$

$$\sqrt[3]{x^8}\,(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}=\sqrt[3]{x^2}\,(x^4-2y^2x^2+y^4)=\sqrt[3]{x^2}\,(x^2-y^2)^2.$$

Тогда первая дробь примет вид

$$\frac{\sqrt[3]{x^3-y^3}\,(x-y)^2}{\sqrt[3]{x^2}\,(x^2-y^2)^2}=\frac{\sqrt[3]{x-y}\,\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\,(x+y)^2}.$$

Преобразуем вторую дробь: $\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}=\frac{\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}{(x+y)\sqrt[3]{x^2}}$. Таким образом, окончательно получим

$$\frac{\sqrt[3]{x-y}\cdot\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\,(x+y)^2}\cdot\frac{(x+y)\,\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}.\ \blacksquare$$

1.179. $\dfrac{x^2-3x+2}{3x}$. **1.180.** $\dfrac{1}{a\,(3a+b)}$. **1.181.** 5.

1.182. □ 1) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\dfrac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x});$$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cdot\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\,(1+x+\sqrt{1-x^2}+1-x)}{2+\sqrt{1-x^2}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x+1-1+x)\cdot\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{2+\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x}{\sqrt{2}}=x\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

1.183. □ Здесь в знаменателе следует применить формулу $\sqrt{A\pm B}=$ $=\sqrt{\dfrac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}$, где $A\geqslant B$. Подставляя $x=2$ и используя эту формулу, получим $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т. е. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; аналогично, $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{9-3}=\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

1.184. $\dfrac{1}{x-\sqrt{2x+1}}$. **1.185.** $\sqrt[3]{4-x^2}$. **1.186.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. **1.187.** $\sqrt{2}$.

1.188. $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})$. **1.189.** 3.

1.190. □ Легко заметить, что в числителе первой дроби выражение в скобках есть арифметическая прогрессия с разностью $d=1$, откуда $S_n=\dfrac{a+2a}{2}\,(a+1)$. Разложив знаменатель на множители, запишем первую дробь в виде $\dfrac{2\cdot\dfrac{a+2a}{2}\,(a+1)}{(a+2)\,(a+1)}=\dfrac{3a}{a+2}$. Затем преобразуем вторую дробь:

$$\frac{6(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt[5]{(a-b)^3}\,(a+2)\,\sqrt[5]{(a-b)^2}}=\frac{6}{a+2}.$$ Окончательно получим $\frac{3a}{a+2}+$ $+\frac{6}{a+2}=3.$ ■

1.191. □ Все три множителя запишем под одним общим корнем:

$$\sqrt[6]{\frac{4x^4(1+x)^3\cdot 9(1-x^2)(1-x)}{9^2(1+2x+x^2)^2x^3\cdot 4x^3}}=\sqrt[6]{\frac{(1+x)^4(1-x)^2}{9x^2(1+x)^4}}=\sqrt[6]{\frac{(1-x)^2}{9x^2}}=\sqrt[3]{\left|\frac{1-x}{3x}\right|}.$$

Так как $x\in(0,\ 1)$, то получаем ответ: $\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$. ■

1.192. □ 1) $\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b})}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\sqrt{b}}$;

2) $$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}}.$$

3) $$\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\sqrt{b}}}=\sqrt{a}.$$ Ответ: $\sqrt{1{,}21}=1{,}1$. ■

1.193. □ 1) $a\sqrt{a}-a\sqrt{a+2}+\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}\sqrt{a+2}=a(\sqrt{a}-\sqrt{a+2})+$ $+\sqrt[4]{a}(\sqrt{a}-\sqrt{a+2})=(\sqrt{a}-\sqrt{a+2})(a+\sqrt[4]{a})$;

2) $$\frac{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})}}{a^2-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a(a+2)}+(a+2)}}{a^2-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt{a}}=\frac{|\sqrt{a}-\sqrt{a+2}|}{a^2-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt{a}};$$

3) $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a+2})(a+\sqrt[4]{a})(a^2-a\sqrt[4]{a}+\sqrt{a})}{|\sqrt{a}-\sqrt{a+2}|}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a+2})(a^3+\sqrt[4]{a^3})}{|\sqrt{a}-\sqrt{a+2}|}.$$

Так как $a>0$, то $\sqrt{a}-\sqrt{a+2}<0$, откуда получаем ответ: $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. ■

1.194. $x^2|\sqrt[3]{y}|$. **1.195.** $(\sqrt[3]{a}-1)/4$. **1.196.** $-2b(a+3\sqrt{ab})$.

1.197. □ 1) $$\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}+1}}-\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}-1}}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)^2}}{\sqrt[12]{a}}-\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}-1)}}{\sqrt[12]{a}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}-\sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt[12]{a}}\right)^{-2}=\frac{\sqrt[6]{a}}{(\sqrt{\sqrt{a}+1}-\sqrt{\sqrt{a}-1})^2}=\frac{\sqrt[6]{a}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-1});$$

2) $$\frac{\sqrt[6]{a}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\cdot\frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=\frac{\sqrt[4]{a}}{6}.$$ ■

1.198. -1. **1.199.** $\sqrt{(x+3)/(x-3)}$. **1.200.** $-\sqrt{(t+2)/(t-2)}$. **1.201.** $1/(ab)$. **1.202.** mn. **1.203.** $\sqrt[6]{a^2-1}$. **1.204.** $1/(\sqrt[4]{a}-1)$. **1.205.** $1/(1+\sqrt[3]{a})$. **1.206.** $a/(a+1)$. **1.207.**

$(\sqrt{x}-2)/(\sqrt{x}-3)$. **1.208.** $1/(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a})$. **1.209.** $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. **1.210.** $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$. **1.211.** 1. **1.212.** 1. **1.213.** $z^2/(z^2+z+1)$. **1.214.** $(a+\sqrt{a^2-9})/3$. **1.215.** 2. **1.216.** $\sqrt{3}/3$. **1.217.** $\sqrt{a^2-1}$. **1.218.** $-2-4\sqrt{3}$. **1.219.** $-\sqrt[4]{2}$. **1.220.** 1. **1.221.** $a-b$. **1.222.** $-\sqrt{(x-2)/(x+2)}$. **1.223.** $1+\sqrt[3]{a}$. **1.224.** $\sqrt{a}/(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})$. **1.225.** $2\sqrt[4]{y/x^2}$. **1.226.** 2,4. **1.227.** $x^3\sqrt[4]{a}$. **1.228.** $1/(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a})$. **1.229.** $1/(2\sqrt{b})$. **1.230.** 0. **1.231.** $\sqrt{p^2-q^2}/\sqrt{p}$. **1.232.** 1,25. **1.233.** 4/9. **1.234.** $\sqrt{x}+1$. **1.235.** 4. **1.236.** $1/\sqrt[8]{p-q}$. **1.237.** 2. **1.238.** 1. **1.239.** $\sqrt[3]{2n/(1+n)}$. **1.240.** $\sqrt{a/(a+4b)}$. **1.241.** 1.

1.242. □ Упростим знаменатель: $\sqrt{\dfrac{b^2-2b+1}{b}}=\dfrac{|b-1|}{\sqrt{b}}$. Тогда данное выражение примет вид $\dfrac{|b-1|+b^2\,|b-1|+2b-2}{\sqrt{b}\,|b-1|}$. Нетрудно заметить, что $b>0$ и $b\neq 1$. Теперь воспользуемся определением модуля и рассмотрим различные промежутки изменения b:

1) $b\in(0,\ 1)\Rightarrow \dfrac{-(b-1)-b^2\,(b-1)+2b-2}{-\sqrt{b}\,(b-1)}=\dfrac{(b-1)\,(-1-b^2+2)}{-\sqrt{b}\,(b-1)}=\dfrac{1-b^2}{-\sqrt{b}}=$
$=\dfrac{b^2-1}{\sqrt{b}}$;

2) $b\in(1,\ +\infty)\Rightarrow \dfrac{b-1+b^2\,(b-1)+2\,(b-1)}{\sqrt{b}\,(b-1)}=\dfrac{b^2+3}{\sqrt{b}}$. ■

1.243. □ Здесь $x\neq 0$ и $x\neq -1$. В зависимости от промежутков изменения x получаем ответ:

1) $x\in(-\infty,\ -1)\bigcup(-1,\ 0)\Rightarrow \dfrac{2x+x\,(x-1)-x^2+3}{-x+x^2}=\dfrac{x+3}{x^2-x}$;

2) $x\in(0,\ 1)\Rightarrow \dfrac{2x+x^2-x+x^2+3}{x+x^2}=\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+x}$;

3) $x\in(1,\ +\infty)\Rightarrow \dfrac{2x-x^2+x+x^2+3}{x+x^2}=\dfrac{3x+3}{x\,(x+1)}=\dfrac{3}{x}$. ■

1.244. □ Очевидно, что данное выражение можно записать в виде $\dfrac{1}{|x+2|}+|x-2|$. Рассматривая различные промежутки изменения x, получим:

1) $x\in(-\infty,\ -2)\Rightarrow -\dfrac{1}{x+2}-(x-2)\Rightarrow -\dfrac{x^2-3}{x+2}=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

2) $x\in(-2,\ 2)\Rightarrow \dfrac{1}{x+2}-(x-2)\Rightarrow \dfrac{5-x^2}{x-2}$;

3) $x\in[2,\ +\infty)\Rightarrow \dfrac{1}{x+2}+x-2\Rightarrow \dfrac{x^2-3}{x+2}$. ■

1.245. $(4-x^2)/(x^2+4x-4)$, если $x\in(-\infty,\ 1)$ и $x\neq -2\pm 2\sqrt{2}$; $(x+2)/(2-x)$, если $x\in[1,\ 2)$; $(x+2)/(x-2)$, если $x\in(2,\ \infty)$.

1.246. □ Здесь $x\neq 0$. Имеем $\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}=\frac{|x-1|\,(x^2+x+1)+|x+1|}{x^3+x}$, откуда получаем:

1) $x\in(-\infty,\ -1)\Rightarrow\frac{-x^3+1-x-1}{x^3+x}=-1;$

2) $x\in[-1,\ 0)\bigcup(0,\ 1)\Rightarrow\frac{-x^3+1+x+1}{x^3+x}=\frac{2+x-x^3}{x^3+x};$

3) $x\in[1,\ \infty)\Rightarrow\frac{x^3-1+x+1}{x^3+x}=1.$ ■

1.247. □ Имеем $|x^2-1|+x\,|x+1|=|x-1|\cdot|x+1|+x\,|x+1|$. Отсюда получаем:

1) $x\in(-\infty,\ -1)\Rightarrow x^2-1-x\,(x+1)=-(x+1);$
2) $x\in[-1,\ 1)\Rightarrow -x^2+1+x^2+x=x+1;$
3) $x\in[1,\ \infty)\Rightarrow x^2-1+x^2+x=2x^2+x-1.$ ■

1.248. □ Здесь $x\neq-1$, $x\neq 1$, $x\neq 2$. Имеем:

1) $x\in(-\infty,\ -1)\Rightarrow(-x^2+2x+2x-4):(2-x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=x-2;$

2) $x\in(-1,\ 1)\Rightarrow(-x^2-2x+2x-4):(2-x)=\frac{x^2+4}{x-2};$

3) $x\in(1,\ 2)\Rightarrow(x^2-2x+2x-4):(2-x)=-(x+2);$
4) $x\in(2,\ \infty)\Rightarrow(x^2-2x+2x-4):(x-2)=x+2.$ ■

1.249. □ Очевидно, что $x>0$, $x\neq 1$. Подкоренное выражение в числителе равно $\frac{(2x+1)^2}{x}$. Разложив знаменатель на множители, запишем данную дробь в виде $\frac{|2x+1|}{x|x-1|\cdot|2x+1|}=\frac{1}{x|x-1|}$. Следовательно, при $x\in(0,\ 1)$ получим $\frac{1}{x-x^2}$, а при $x\in(1,\ +\infty)$ получим $\frac{1}{x^2-x}$. ■

1.250. □ 1) $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2=\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}+2=\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+2=$
$=|\sqrt{x-4}-2|+2;$

2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2=\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}-2=\sqrt{x-4}+2-2=\sqrt{x-4};$

3) $\frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{\sqrt{x-4}}=A.$

Если $\sqrt{x-4}-2<0$, то $\sqrt{x-4}<2$, т. е. $4<x<8$. Таким образом, при $x\in(4,\ 8)$ имеем $A=\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, а при $x\in[8,\ \infty)$ получим $A=1$. ■

1.251. $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ при $m\in(-\infty,\ 0)\bigcup(0,\ 1)$; $m^3/(m-\sqrt[3]{2})$ при $m\in(1,\ \sqrt[3]{2})\bigcup(\sqrt[3]{2},\ \infty)$. **1.252.** $-(x^2+x+1)$ при $x\in(-\infty,\ 1)\bigcup(1{,}3)$; x^2+x+1 при $x\in(3,\ \infty)$. **1.253.** $-a/2$ при $a\in(-\infty,\ -2)$; $a\,(a-1)/2$ при $a\in(-2,\ \infty)$. **1.254.** $1/(m+2)$ при $m\in(-\infty,\ -2)\bigcup(-2,\ 0)\bigcup(3,\ \infty)$; $-1/(m+2)$ при $m\in(0,\ 3)$. **1.255.** $-1/x$ при $x\in(-\infty,\ 0)\bigcup(0,\ 1)\bigcup(1,\ 2)$; $1/x$ при $x\in(2,\ 3)\bigcup(3,\ \infty)$. **1.256.** $1/(a+1)$ при $a\in(-\infty,\ -3)\bigcup(-3,\ -1)\bigcup(-1,\ 2)$; $1/(a+3)$ при $a\in(2,\ \infty)$.

1.257. $1/(1-3x)$ при $x\in(-\infty, 0)$; $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ при $x\in[0, 1/3)\bigcup(1/3, 1)$; $1/(x-1)$ при $x\in(1, \infty)$. **1.258.** $\dfrac{3}{x(2x+3)}$ при $x\in(-\infty, -3/2)\bigcup(-3/2, 0)\bigcup(0, 3)$; $1/x$ при $x\in(3, \infty)$. **1.259.** $-1/a$ при $a\in(-\infty, -5)$; $\dfrac{a+5}{a(3a-5)}$ при $a\in(-5, 0)\bigcup(0, 5/3)\bigcup$ $\bigcup(5/3, \infty)$. **1.260.** $-(x+1)/x$ при $x\in(-\infty, -1)$; $(x+1)/(2-x)$ при $x\in(-1, 0)$; $(x+1)/(x-2)$ при $x\in(0, 2)\bigcup(2, \infty)$. **1.261.** $(r^2-r)/(r^2+1)$ при $r\in(-\infty, 0)$; $r/(1-r)$ при $r\in[0, 1)$; $r/(r-1)$ при $r\in(1, \infty)$. **1.262.** 2 при $x\in(-\infty, -1)$; $2x^2/(2x^2-1)$ при $x\in[-1, -\sqrt{2}/2)\bigcup(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\bigcup(\sqrt{2}/2, 1)$; 0 при $x\in(1, \infty)$. **1.263.** -4 при $y\in(-\infty, 3)$; $2y-10$ при $y\in[3, 9)$; 8 при $y\in[9, \infty)$. **1.264.** $(1+x-x^2)/(x+1)$ при $x\in(-\infty, -1)\bigcup(0, 1)$; $(x^2+x-1)/(x+1)$ при $x\in[1, \infty)$; $(1-x-x^2)/(x+1)$ при $x\in(-1, 0)$. **1. 265.** $(x+1)/(1-x)$ при $x\in(-\infty, -1)$; $(x+1)/(x-1)$ при $x\in[-1, 0)$; $(x-1)/(x+1)$ при $x\in[0, \infty)$. **1.266.** x при $x\in(0, 1/2)$; $-x$ при $x\in(1/2, \infty)$.

1.267. □ Найдем допустимые значения x для данного выражения: $x\geqslant 1$ и $x\neq 2$. Теперь избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\,(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}=\frac{\sqrt{(x-2\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+1)^2}}{x-2}=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=$$
$$=\frac{|x-2|}{x-2}.$$

Итак, получаем: 1) $x\in[1, 2)\Rightarrow -\dfrac{x-2}{x-2}=-1$; 2) $x\in(2, \infty)\Rightarrow \dfrac{x-2}{x-2}=1$. ■

1.268. □ Разлагая числитель первой дроби на множители, имеем

$$\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[12]{x^3y^4}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\cdot\sqrt[12]{x^3y^2}=\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[12]{x^3y^4}+$$
$$+\sqrt[3]{y^2}-3\cdot\sqrt[12]{x^3y^4}=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})^2;$$

далее находим $((\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})^2)^{-1/2}=\dfrac{1}{|\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}|}$. Аналогично преобразуем вторую скобку:

$$\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[12]{x^3y^4}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[12]{x^3y^4}=$$
$$=\sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}).$$

В результате получим $\dfrac{\sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})}{|\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}|}$.

Ответ: при $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0\Rightarrow -\sqrt[4]{x}$; при $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0\Rightarrow \sqrt[4]{x}$. ■

1.269. □ Простейшие преобразования дают:

$$\left(\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x\sqrt{x}-27)}{(x+3\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}+3)}\right)^{1/2}-\sqrt{x}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{x+3\sqrt{x}+9}\right)^{1/2}-\sqrt{x}=|\sqrt{x}-3|-\sqrt{x}.$$

Ответ: при $x\in[0, 9) \Rightarrow 3-2\sqrt{x}$; при $x\in(9, \infty) \Rightarrow -3$. ■

1.270. □ Упростим числитель:

$$2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}=2\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4a}-1}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2a+a^2}=\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}.$$

Тогда знаменатель запишется следующим образом:

$$\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2\sqrt{a}}(1-a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}(2|1-a|-(1-a)),\ a>0,\ a\neq 1.$$

Заданное выражение примет вид $\dfrac{2|1-a|}{2|1-a|-(1-a)}$.

Ответ: при $a\in(0, 1) \Rightarrow \frac{2}{3}$; при $a\in(1, \infty) \Rightarrow 2$. ■

1.271. □ Имеем

$$\frac{\sqrt{(2x)^2+(x^2-1)^2}}{2|x|(x^2+1)\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{2|x|(x^2+1)\frac{1}{x}}=\frac{x}{2|x|}.$$

Ответ: при $x\in(\infty, 0) \Rightarrow -\frac{1}{2}$; при $x\in(0, \infty) \Rightarrow \frac{1}{2}$. ■

1.272. □ Находим

$$\left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{z+3}\,|z-3|}\right)\frac{(z+3)(6z-z^2-9)}{18z}=$$

$$=\left(\frac{z-3}{z+3}-\frac{z+3}{|z-3|}\right)\left(-\frac{(z+3)(z-3)^2}{18z}\right).$$

Так как $z>-3$ и $z\neq 0$, то получаем:

1) при $z\in(-3, 0)\bigcup(0, 3) \Rightarrow -\dfrac{z^2-6z+9+z^2+6z+9}{(z+3)(z-3)}\cdot\dfrac{(z+3)(z-3)^2}{18z}=$

$=\dfrac{(z^2+9)(3-z)}{9z}$;

2) при $z\in(3, \infty) \Rightarrow -\dfrac{z^2-6z+9-z^2-6z-9}{(z+3)(z-3)}\cdot\dfrac{(z+3)(z-3)^2}{18z}=\dfrac{2(z-3)}{3}$. ■

1.273. □ Первое подкоренное выражение преобразуем следующим образом: $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2}$; здесь $x\geqslant 2$. Аналогично, $\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|$. Следовательно, заданное выражение примет вид $\sqrt{x-2}+\sqrt{2}+|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|$. Итак, получаем ответ:

1) $\sqrt{x-2}-\sqrt{2}<0 \Rightarrow x\in[2, 4) \Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{2}-\sqrt{x-2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\geqslant 0 \Rightarrow x\in[4, \infty) \Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}=2\sqrt{x-2}$. ■

1.274. □ Подкоренные выражения преобразуем так: $\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}=$

$=\dfrac{1}{a-2+2\sqrt{a-2}+1}=\dfrac{1}{(\sqrt{a-2}+1)^2}$; $\quad \dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}=\dfrac{1}{(\sqrt{a-2}-1)^2}$; $\quad a>2$,

$a\neq 3$. Тогда данное выражение примет вид $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-2}+1}+\left|\dfrac{1}{\sqrt{a-2}-1}\right|}{\dfrac{1}{\sqrt{a-2}+1}-\left|\dfrac{1}{\sqrt{a-2}-1}\right|}$. В результате получаем ответ:

1) при $\sqrt{a-2}-1<0 \Rightarrow a\in(2, 3) \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{a-2}}$;

2) при $\sqrt{a-2}-1>0 \Rightarrow a\in(3, \infty) \Rightarrow -\sqrt{a-2}$. ■

1.275. □ Положим $y+\dfrac{2}{y}=z$; тогда $z^2-4=y^2+\dfrac{4}{y^2}$, $y\neq 0$. Подкоренное выражение примет вид $(z^2-4)^2-8z^2+48=z^4-16z^2+64=(z^2-8)^2$. Следовательно, $\sqrt{(z^2-8)^2}=|z^2-8|$ или $\left|y^2+\dfrac{4}{y^2}+4-8\right|=\left|y^2-4+\dfrac{4}{y^2}\right|=\left(y-\dfrac{2}{y}\right)^2$. ■

1.276. □ Имеем

$$\frac{a^2-3}{\sqrt{\dfrac{a^4+6a^2+9-12a^2}{4a^2}}}=\frac{2\,(a^2-3)\,|a|}{|a^2-3|}=\frac{2\,(a^2-3)\,|a|}{|a-\sqrt{3}|\cdot|a+\sqrt{3}|}.$$

Используя определение модуля и рассматривая различные промежутки изменения a, получаем ответ:

1) $a\in(-\infty, -\sqrt{3}) \Rightarrow \dfrac{2\,(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})\,(-a)}{(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})}=-2a$;

2) $a\in(-\sqrt{3}, 0) \Rightarrow \dfrac{2\,(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})\,(-a)}{-(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})}=2a$;

3) $a\in(0, \sqrt{3}) \Rightarrow \dfrac{2\,(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})\,a}{-(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})}=-2a$;

4) $a\in(\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow \dfrac{2\,(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})\,a}{(a-\sqrt{3})\,(a+\sqrt{3})}=2a$. ■

1.277. □ Здесь $x>1$, поэтому $\dfrac{a^2+1}{2a}>1 \Rightarrow \dfrac{a^2-2a+1}{2a}>0 \Rightarrow \dfrac{(a-1)^2}{2a}>0 \Rightarrow a>0$.

Далее находим $x+1=\dfrac{(a+1)^2}{2a}$; $x-1=\dfrac{(a-1)^2}{2a}$. Тогда заданное выражение примет следующий вид:

$$\frac{\sqrt{2a}}{\frac{\sqrt{2a}}{|a-1|}-\frac{\sqrt{2a}}{a+1}}=\frac{|a-1|}{a+1-|a-1|}.$$

Отсюда получаем ответ:

при $a\in(0,\ 1)\Rightarrow\dfrac{-(a-1)}{a+1+a-1}=\dfrac{1-a}{2a}$; при $a\in(1,\ \infty)\Rightarrow\dfrac{a-1}{2}$ ■

1.278. □ Последовательно находим:

$$\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}=\frac{\sqrt{z^2+4z+4-8z}}{z+2}=\frac{|z-2|}{z+2};$$

$$\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}=\frac{z^2-2z+4}{(z+2)\ (z^2-2z+4)}=\frac{1}{z+2};$$

$$\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}=\frac{(z-1)\ (z-2)}{z^2\ (z-2)-4\ (z-2)}=\frac{z-1}{z^2-4}.$$

Тогда заданное выражение примет вид

$$\left(\frac{|z-2|}{z+2}+\frac{1}{z+2}\right):\frac{z-1}{z^2-4}=\frac{|z-2|+1}{z+2}\cdot\frac{z^2-4}{z-1}=\frac{|z-2|+1}{z-1}\ (z-2).$$

Учитывая, что $z\neq-2$, $z\neq1$ и $z\neq2$, получаем ответ:

1) $z\in(-\infty,\ -2)\bigcup(-2,\ 1)\bigcup(1,\ 2)\Rightarrow\dfrac{2-z+1}{z-1}\ (z-2)=\dfrac{z^2-5z+6}{1-z}$;

2) $z\in(2,\ \infty)\Rightarrow\dfrac{z-2+1}{z-1}\ (z-2)=z-2.$ ■

1.279. При $x\in[1/8,\ 1/4)\Rightarrow-1$; при $x\in(1/4,\ \infty)\Rightarrow1$.

1.280. При $y<2x\Rightarrow1/(2y^3)$; при $y>2x\Rightarrow-1/(2y^3)$.

1.281. □ Освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{(a+y)\ (y+b)}+\sqrt{(a-y)\ (y-b)})^2}{(a+y)\ (y+b)-(a-y)\ (y-b)}}=\frac{\sqrt{(a+y)\ (y+b)}+\sqrt{(a-y)\ (y-b)}}{\sqrt{2y^2+2ab}}.$$

Подставляя $y=\sqrt{ab}$, находим

$$\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}-2ab+b\sqrt{ab}}+\sqrt{a\sqrt{ab}+2ab+b\sqrt{ab}}}{\sqrt{4ab}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{ab}\ (a-2\sqrt{ab}+b)}+\sqrt{\sqrt{ab}\ (a+2\sqrt{ab}+b)}}{2\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{ab}\ (\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}+\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2})}{2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt[4]{ab}}{2\sqrt{ab}}\ (|\sqrt{a}-\sqrt{b}|+\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Если $0<b<a$, то $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[4]{ab}}\ (\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$;

если $0<a<b$, то $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[4]{ab}}\ (-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$. ■

1.282. $-\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $a\in(-1,\ 1)$; $\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $a\in(1,\ \infty)$. **1.283.** -2 при $a\in(-\infty,\ 0)$; 2 при $a\in(0,\ \infty)$. **1.284.** $(4a-16)/(a+4)$ при $a\in(4,\ \infty)$; $\dfrac{(4-a)\,(a^2+16)}{2a\,(4+a)}$ при $a\in(-4,\ 4)$. **1.285.** -2 при $x\in(-\infty,\ 0)$; 2 при $x\in(0,\ \infty)$. **1.286.** $m/2$. **1.287.** 1 при $0\leqslant b\leqslant a,\ \ a\neq 0$; $\sqrt{a+b}/(2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})$ при $0<-b\leqslant a$. **1.288.** $-(x-3)$ при $x\in(-\infty,\ -1/3)\bigcup(-1/3,\ -1/5)\bigcup(-1/5,\ 3)$; $x-3$ при $x\in[3,\ \infty)$. **1.289.** $-3x$ при $x\in(-\infty,\ -3)\bigcup(-3,\ 0)$; $3x$ при $x\in(0,\ \infty)$. **1.290.** $(m-1)/(2m)$ при $m\in(0,\ 1)$; $(1-m)/2$ при $m\in[1,\ \infty)$. **1.291.** $(1-a)/\sqrt{a}$ при $a\in(0,\ 1)$; $(a-1)\sqrt{a}$ при $a\in(1,\ \infty)$. **1.292.** $-\sqrt{x}$ при $x\in(0,\ 2/3)$; $\sqrt{x}$ при $x\in(2/3,\ \infty)$.

1.293. □ 1) $\dfrac{8-5}{\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{5^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{5^2}}=$

$$=\frac{(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{5})\,(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{5})\,(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5})}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5})^2}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-$$

$$-\frac{10}{\sqrt[3]{5^2}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}-\frac{10\cdot\sqrt[3]{5}}{5}=\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{5};$$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{5};$

3) $\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$. ■

1.294. □ Имеем $6m+2\sqrt{9m^2-n^2}=3m+n+2\sqrt{9m^2-n^2}+3m-n=(\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n})^2$; аналогично, $6m-2\sqrt{9m^2-n^2}=(\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n})^2$. Следовательно, $\sqrt{(\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n})^2}-\sqrt{(\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n})^2}=\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}-\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}=2\sqrt{3m-n}$, где $m\geqslant n/3$, $m>0$. Итак, равенство справедливо при всех $n\in[0,\ 3m]$. ■

1.296. □ Имеем $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+3\cdot 2\sqrt{3^2}-\sqrt{3^3}}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}$; $7-4\sqrt{3}=4-2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(2-\sqrt{3})^2$. Следовательно, $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.\ ■$$

1.297. □ 1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2};$

2) $\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3;$

3) $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(5+2\sqrt{6})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\dfrac{(5+2\sqrt{6})\,(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})\,(5+2\sqrt{6})}=\dfrac{49+20\sqrt{6}}{25-24}=$

$=49+20\sqrt{6};$

4) $(49+20\sqrt{6})\,(49-20\sqrt{6})=49^2-20^2\cdot 6=1$. ■

1.298. □ Имеем:

1) $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}=\sqrt{(5p+q)+2\sqrt{25p^2-q^2}+(5p-q)}=$

$=\sqrt{(\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q})^2}=\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q};$

2) аналогично, $\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=\sqrt{5p+q}-\sqrt{5p-q};$

3) $\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}-\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q}=2\sqrt{5p-q}$.

Равенство справедливо при $p>0$ и $q\in[0,\ 5p]$. ■

1.308. □ Так как $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=$ $=\sqrt{x-1}+1$ и $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|$, то данное выражение примет вид $y=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$. Итак, получаем ответ:

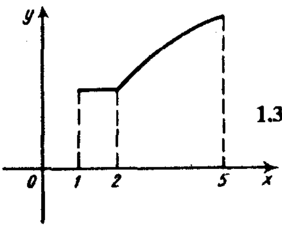

Рис. P.1.1

1) при $\sqrt{x-1}-1<0 \Rightarrow x\in[1,\ 2) \Rightarrow y=2;$

2) при $\sqrt{x-1}-1\geqslant 0 \Rightarrow x\in[2,\ \infty) \Rightarrow y=2\sqrt{x-1}$.

График функции y изображен на рис. P.1.1. ■

1.309. □ Данное условие будет выполнено, если дискриминант равен нулю. Имеем $D=4\ (k-9)^2-$ $-4\ (k^2+3k+4)=0 \Rightarrow (k-9)^2=k^2+3k+4;$ $k^2-18k+81=k^2+3k+4 \Rightarrow 21k=77 \Rightarrow k=$ $=11/3$. ■

1.310. □ Подставив заданное значение x в уравнение, получим следующее выражение: $(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-$ $-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})^3+12\ (\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})-8$. Согласно формуле (1.12), имеем $(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})^3=4+\sqrt{80}-\sqrt{80}+4-3\times$ $\times\sqrt[3]{(\sqrt{80}+4)\ (\sqrt{80}-4)}\ (\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})=8-12\times$ $\times(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})$. Таким образом, $8-12\ (\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-$ $-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})+12\ (\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})-8\equiv 0$, т. е. число x есть корень данного уравнения. ■

1.311. □ Так как $u^2-v^2=(u-v)\ (u+v)=b$, то $u+v=\frac{b}{a}$. Тогда получим систему $\begin{cases} u-v=a, \\ u+v=\frac{b}{a}, \end{cases}$ откуда $u=\frac{b}{2a}+\frac{a}{2}$ и $v=\frac{b}{2a}-\frac{a}{2}$. Подставив найденные значения u и v в равенство $u^3-v^3=c$, имеем $u^3-v^3=\left(\frac{b}{2a}+\frac{a}{2}\right)^3-\left(\frac{b}{2a}-\frac{a}{2}\right)^3=\frac{3b^2}{4a}+$ $+\frac{a^3}{4}=c$. Итак, искомое соотношение имеет вид $3b^2+a^4=4ac$. ■

1.312. $n/(n+1)$.

1.313. □ Разложим квадратный трехчлен на множители: $n^2+3n+2=(n+1)\ (n+$ $+2)$. Тогда получим

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ (n+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots\frac{1}{(n+1)\ (n+2)}.$$

Но $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{(n+1)\ (n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$. При сложении этих разностей все члены, кроме $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{n+2}$, взаимно уничтожатся. Таким образом, $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$. ■

1.315. □ Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A\,(x-1)^2+B\,(x+2)+C\,(x+2)\,(x-1)}{x^3-3x+2}.$$

Если две дроби с одинаковыми знаменателями равны, то тождественно равны и их числители, т. е.

$$x^2+5\equiv A\,(x-1)^2+B\,(x+2)+C\,(x+2)\,(x-1).$$

Так как это равенство есть тождество, то оно выполняется при любых x. Следовательно, если $x=1$, то $3B=6$, т. е. $B=2$; если $x=-2$, то $9A=9$, т. е. $A=1$; если $x=0$, то $A+2B-2C=5$, откуда $C=0$. Итак, $A=1$, $B=2$, $C=0$. ■

1.316. □ Пусть $19=x^3-y^3$, где $x>y$. Так как $x^3-y^3=(x-y)\,(x^2+xy+y^2)$, а число 19 является простым, то его можно представить в виде произведения только как $1\cdot 19$. Тогда получим систему $\begin{cases}x-y=1,\\ x^2+xy+y^2=19.\end{cases}$ Подставив $y=x-1$ во второе уравнение, имеем $3x^2-3x-18=0$ или $x^2-x-6=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=2$ и, значит, $y_1=2$, $y_2=1$. Из двух пар (3; 2) и (2; 1) удовлетворяет условию только пара (3; 2). Следовательно, решение единственно и $19=3^3-2^3$. ■

1.318. $(x^2-2)\,(x^2+2)\,(x^2-2x+2)\,(x^2+2x+2)$. **1.319.** $a=165{,}5$, $b=158{,}5$.

1.320. □ Здесь $x\neq-1$, $x\neq0$, $x\neq1$. Разложив числитель и знаменатель на множители, получим

$$\left(\frac{(x-1)\,(x^2+x+1)\,x\,(x^2-2x+1+x)\,x}{(x+1)^2\,(x^2-x+1)\,(x^2+2x+1-1)\,(x-1)}\right)^{-1/2}=\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)^{-1/2}=\frac{|x+1|}{|x|}.$$

Окончательно находим:

1) $x\in(-\infty,\,-1)\Rightarrow\frac{x+1}{x}$;

2) $x\in(-1,\,0)\Rightarrow-\frac{x+1}{x}$;

3) $x\in(0,\,1)\bigcup(1,\,+\infty)\Rightarrow\frac{x+1}{x}$. ■

1.321. □ Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases}x-2\sqrt{2x-4}>0,\\ 2x-4\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\sqrt{2x-4},\\ x\geqslant2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2>8x-16,\\ x\geqslant2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+16>0,\\ x\geqslant2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq4,\\ x\geqslant2.\end{cases}$$

Легко заметить, что $x+2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})^2$ и $x-2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2$. Тогда заданное выражение примет вид $\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|}=\frac{|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{|x-4|}$. Окончательно получим:

1) $x\in[2,\ 4)\Rightarrow\dfrac{-\sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{-(x-4)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4-x}$;

2) $x\in(4,\ +\infty)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$. ■

1.322. □ Здесь $m\neq0$, $n\neq0$, $m/n\neq2$. Имеем:

$$\frac{4m^2n^2}{4mn-m^2-n^2}=\frac{-4m^2n^2}{(m-2n)^2};\ \frac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}=\frac{(m^2+2mn+n^2)\ m^2n^2}{-(4mn-m^2-4n^2)\ mn}=$$

$$=-\frac{mn\ (m+n)^2}{(m-2n)^2};$$

$$\sqrt{\frac{mn\ (m+n)^2}{(m-2n)^2}-\frac{4m^2n^2}{(m-2n)^2}}=\sqrt{mn}\ \frac{\left|\dfrac{m}{n}-1\right|}{\left|\dfrac{m}{n}-2\right|};$$

$$\sqrt{mn}\ \frac{\left|\dfrac{m}{n}-1\right|}{\left|\dfrac{m}{n}-2\right|}\cdot\frac{m-2n}{\sqrt{mn}}=\frac{\left|\dfrac{m}{n}-1\right|}{\left|\dfrac{m}{n}-2\right|}\left(\frac{m}{n}-2\right)n.$$

Окончательно находим:

1) $0<\dfrac{m}{n}<1\Rightarrow\dfrac{-\left(\dfrac{m}{n}-1\right)\left(\dfrac{m}{n}-2\right)n}{-\left(\dfrac{m}{n}-2\right)}=m-n$;

2) $1\leqslant\dfrac{m}{n}<2\Rightarrow n-m$;

3) $2<\dfrac{m}{n}<\infty\Rightarrow m-n$. ■

1.323. $2x^2-a^2$, если $x<-|a|$; $-a^2$, если $x>|a|$. **1.324.** $b-4a$, если $a\in[0,\ \sqrt{2})$; $2\,(a-1)^2$, если $a\in[\sqrt{2},\ +\infty)$. **1.325.** $5/(2\sqrt{x})$, если $x\in(0,\ 4)$; $(2x-3)/(2\sqrt{x})$, если $x\in[4,\ +\infty)$.

1.326. □ Разложим числитель и знаменатель на множители:

$n^4-2n^3+4n^2+2n-5=n^4-n^2-2n^3+2n+5n^2-5=n^2\ (n^2-1)-2n\ (n^2-1)+$
$+5\ (n^2-1)=(n^2-1)\ (n^2-2n+5)$;

$n^4-3n^3+7n^2-5n=n\ (n^2\ (n-1)-2n\ (n-1)+5\ (n-1))=n\ (n-1)\ (n^2-2n+5)$.

Из разложения видно, что ОДЗ $n\neq0$, $n\neq1$. Окончательно получим

$$\frac{(n^2-1)\ (n^2-2n+5)}{n\ (n-1)\ (n^2-2n+5)}=\frac{n+1}{n}.\ ■$$

1.327. □ Легко заметить, что под знаками радикалов в числителе находятся полные квадраты:

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})^2}{a}}\cdot\sqrt{(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}(a+\sqrt{b})\,|\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b}|.$$

Преобразуем знаменатель:

$$\sqrt{2a}\,(a+\sqrt{b})-5\cdot\sqrt[3]{b}\,(a+\sqrt[6]{b^3})=(a+\sqrt{b})\,(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b}).$$

Тогда заданное выражение примет вид

$$\frac{(a+\sqrt{b})\,|\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b}|}{\sqrt{a}\,(a+\sqrt{b})\,(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})}=\frac{|\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b}|}{\sqrt{a}\,(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})}.$$

Очевидно, что ОДЗ $a>0$, $a\neq-\sqrt{b}$, $a\neq 25\cdot\sqrt[3]{b^2}/2$. В результате получаем ответ:

$$1)\ \sqrt{2a}<5\cdot\sqrt[3]{b}\Rightarrow-\frac{(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})}{\sqrt{a}\,(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})}=-\frac{1}{\sqrt{a}};$$

$$2)\ \sqrt{2a}>5\cdot\sqrt[3]{b}\Rightarrow\frac{\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}\,(\sqrt{2a}-5\cdot\sqrt[3]{b})}=\frac{1}{\sqrt{a}}.\ \blacksquare$$

1.328. $(2-x)/2$, если $x\in(-\infty,\ -2)$; $-(x^2+2x+8)/(2x)$, если $x\in[-2,\ 0)$; $(x^2+2x+8)/(2x)$, если $x\in(0,\ \infty)$. **1.329.** $-x$, если $x\in(0,\ 1)$; x, если $x\in(1,\ \infty)$. **1.330.** $(x-1)/x$, если $x\in(-\infty,\ 0)\bigcup[1,\ \infty)$; $(1-x)/x$, если $x\in(0,\ 1)$. **1.331.** $-(z+1)/z$, если $z\in(-\infty,\ -1)\bigcup(0,\ 1)$; $(z+1)/z$, если $z\in[-1,\ 0)\bigcup(1,\ \infty)$.

1.332. □ Последовательно находим:

$$\sqrt{(a^{3/2}+\sqrt{b+\sqrt[3]{a}})\,(a^{3/2}-\sqrt{b+\sqrt[3]{a}})}=\sqrt{a^3-b^3-\sqrt{a}};$$

$$\sqrt{(a^3-b^3+\sqrt{a})\,(a^3-b^3-\sqrt{a})}=\sqrt{(a^3-b^3)^2-a};$$

$$\sqrt{a^6+2a^3b^3+b^6-4a^3b^3-a}=\sqrt{(a^3-b^3)^2-a}.$$

Для области допустимых значений должны выполняться следующие условия:

$$a>0;\ a^3-b^3+\sqrt{a}\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant\sqrt[3]{a^3+\sqrt{a}};\ b^3+\sqrt{a}\geqslant 0\Rightarrow b\geqslant-\sqrt[6]{a}.$$

Следовательно, $-\sqrt[6]{a}\leqslant b\leqslant\sqrt[3]{a^3+\sqrt{a}}$. Итак, получаем ответ: 1 при $a>0$, $-\sqrt[6]{a}\leqslant b\leqslant\sqrt[3]{a^3+\sqrt{a}}$. ■

1.333. □ Находим ОДЗ: $x>0$; $x+2y\geqslant 0\Rightarrow y\geqslant -x/2$. Преобразуем отдельно числитель и знаменатель:

$$\sqrt{x^2(x+2y)}+\sqrt{x^3(x+2y)}-x\sqrt{x}-x^2=x(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})+\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})=(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})(x+\sqrt{x^3});$$

$$\sqrt{2x+2y-2\sqrt{x^2+2xy}}=\sqrt{x-2\sqrt{x^2+2xy}+x+2y}=$$

$$=\sqrt{x-2\sqrt{x}\sqrt{x+2y}+x+2y}=\sqrt{(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})^2}=|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}|.$$

Тогда данное выражение примет вид

$$\frac{(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})\,(\sqrt{x}+\sqrt{x^3})}{|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}|\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+x)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+x)}{|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}|\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+x)}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}{|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}|}.$$

В результате получаем ответ:

1) при $x\in(0,\ +\infty)$, $y\in(-x/2,\ 0)\Rightarrow -(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$;

2) при $x\in(0,\ +\infty)$, $y\in(0,\ +\infty)\Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$. ■

1.334. $2a$ при $a\in(-\infty,\ 0)\bigcup(3,\ \infty)$; $-2a$ при $a\in(0,\ 3)$. **1.335.** $1/\sqrt[3]{y}$, $y\neq0$. **1.336.** $\frac{4a^2+3}{9\,(a^2+1)}$. **1.337.** $2/(2-a)$ при $a\in[1,\ 2)$; $2\sqrt{a-1}/(a-2)$ при $a\in(2,\ \infty)$. **1.338.** $-9z^3$ при $z\in(-\infty,-1/2)\bigcup(0,\ 1/2)$; $7z^3+2$ при $z\in[-1/2,\ 0)\bigcup(1/2,\ \infty)$. **1.339.** $-2/\sqrt{2x+1}$ при $x\in(-1/2,\ 3/2)$; $-\sqrt{2x+1}/2$ при $x\in(3/2,\ \infty)$.

1.340. □ Здесь $x>0$, $y\geqslant0$. Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\sqrt{4\,(x-\sqrt{y}+yx^{-1})}=\sqrt{\frac{1}{x}\,(4x^2-4x\sqrt{y}+y)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\,|2x-\sqrt{y}|;$$
$$\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx}+\sqrt[3]{4y^2}}=\sqrt{(3x+\sqrt[3]{2y})^2}=3x+\sqrt[3]{2y};$$
$$6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}=2x\,(3x+\sqrt[3]{2y})-(3x\sqrt{y}+\sqrt[6]{2^2y^3y^2})=$$
$$=2x\,(3x+\sqrt[3]{2y})-\sqrt{y}\,(3x+\sqrt[3]{2y})=(2x-\sqrt{y})\,(3x+\sqrt[3]{2y}).$$

Тогда заданное выражение примет вид

$$\frac{|2x-\sqrt{y}|\,(3x+\sqrt[3]{2y})}{\sqrt{x}\,(3x+\sqrt[3]{2y})\,(2x-\sqrt{y})}=\frac{|2x-\sqrt{y}|}{\sqrt{x}\,(2x-\sqrt{y})}.$$

Далее имеем: если $2x<\sqrt{y}$, то $\frac{-2x+\sqrt{y}}{\sqrt{x}\,(2x-y)}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$; если же $2x>\sqrt{y}$, то $\frac{2x-y}{\sqrt{x}\,(2x-y)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Учитывая, что $x>0$, $y\geqslant0$, получаем ответ: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x>0$, $0\leqslant y<4x^2$; $-\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x>0$, $y>4x^2$. ■

1.341. $-1/x$ при $x\in(-\infty,\ -\sqrt{2})\bigcup(0,\ \sqrt{2})$; $1/x$ при $x\in(-\sqrt{2},\ 0)\bigcup(\sqrt{2},\ \infty)$.

1.342. □ Разложим числитель на множители: $x^8+4x^4-4x^4+4+x^4-2x^2+2=$ $=((x^4+2)^2-4x^4)+(x^4-2x^2+2)=(x^4+2-2x^2)\,(x^4+2+2x^2)+(x^4-2x^2+$ $+2)=(x^4-2x^2+2)\,(x^4+2x^2+3)$. Тогда получим

$$\frac{(x^4-2x^2+2)\,(x^4+2x^2+3)}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2=x^4-2x^2+2+2x^2-2=x^4.\ ■$$

1.343. □ Здесь $x\geqslant3$. Преобразуем числитель и знаменатель первой дроби:

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{x+3}+1}=\sqrt{(\sqrt{x+3}-1)^2}=|\sqrt{x+3}-1|;\qquad \sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{x+3}-$$
$$-\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x+3})-\sqrt{x-3}\,(1-\sqrt{x+3})=$$

$=(1-\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})$. Поскольку $x\geqslant 3$, эта дробь примет вид $\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{(1-\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})}$. В результате получим

$$\frac{\sqrt{x+3}-1}{(1-\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=\frac{1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}}{3}. \ \blacksquare$$

1.344. $\square$ Пусть $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}=z$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$z^2=\frac{1}{3a+\sqrt{6a-1}}+\frac{1}{3a-\sqrt{6a-1}}+\frac{2}{\sqrt{9a^2-6a+1}}=$$

$$=\frac{3a-\sqrt{6a-1}+3a+\sqrt{6a-1}}{9a^2-6a+1}+\frac{2}{\sqrt{9a^2-6a+1}}=\frac{6a}{(3a-1)^2}+\frac{2}{|3a-1|}.$$

Очевидно, что ОДЗ заданного выражения z есть $a\geqslant 1/6$ и $a\neq 1/3$. Таким образом, окончательно находим:

1) при $a\in[1/6,\ 1/3) \Rightarrow z^2=\dfrac{2}{(3a-1)^2}$; $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{3a-1}$;

2) при $a\in(1/3,\ \infty) \Rightarrow z^2=\dfrac{12a-2}{(3a-1)^2}$; $z=\dfrac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$. $\blacksquare$

1.345. $-(\sqrt{1-4p^2}+1)^2/(4p^2)$ при $p\in[-1/2,\ 0)$; -1 при $p\in(0,\ 1/2)$. **1.346.** $|\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{b}|$, $b>0$. **1.347.** $4x/(x-4)$ при $x\in(4,\ 8)$; $2x/\sqrt{x-4}$ при $x\in(8,\ \infty)$. **1.348.** 6 при $x\in(-\infty,\ 0)$; $6-2x$ при $x\in[0,\ 6)$; -6 при $x\in[6,\ \infty)$. **1.349.** $(-2x^2+2x-3)/x$ при $x\in(-\infty,\ 0)$; $(3+2x)/x$ при $x\in(0,\ 2)$; $(2x^2-2x+3)/x$ при $x\in[2,\ \infty)$. **1.350.** $x/(x-1)$ при $x\in(-\infty,\ -1)$; $x/(1-x)$ при $x\in(-1,\ 0)$; $-x/(x+1)$ при $x\in[0,\ 1)$; $x/(x+1)$ при $x\in(1,\ \infty)$. **1.351.** $1/a$ при $a\in(-\infty,\ -1)\bigcup[1,\ \infty)$; a при $a\in[-1,\ 1)$. **1.352.** $(t-1)/(3t-1)$ при $t\in[1/6,\ 1/3)\bigcup[1,\ \infty)$; $(1-t)/(3t-1)$ при $t\in(1/3,\ 1)$. **1.353.** $1-\sqrt{x}$ при $x\in[0,\ 1)$; $\sqrt{x}-1$ при $x\in[1,\ \infty)$. **1.354.** $x^2-4x-12$ при $x\in(-\infty,\ 2)$; $(x+2)^2$ при $x\in(2,\ \infty)$. **1.355.** $x^2+\sqrt{2}$. **1.356.** $(9-2x)/x$ при $x\in(-\infty,\ 0)$; $(2x-9)/x$ при $x\in(0,\ 3/2)$; $(2x+3)/x$ при $x\in(3/2,\ \infty)$.

1.357. $\square$ При $z=y$, $y=x$, $z=x$ многочлен обращается в нуль; следовательно, он делится на $(x-y)(x-z)(y-z)$. Так как данное выражение имеет третью степень относительно x, y, z, то должно выполняться равенство двух многочленов:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=k(x-y)(x-z)(y-z).$$

Раскрыв скобки, получим

$$xy^2-xz^2+yz^2-yx^2+zx^2-zy^2=k(x^2y-x^2z+xz^2-y^2x+zy^2-z^2y).$$

Сравнивая коэффициенты многочленов при соответствующих степенях, найдем $k=-1$. Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=(x-y)(z-x)(y-z). \ \blacksquare$$

ГЛАВА 2
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.001. □ Имеем
$$\frac{x^2-2x-3+x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{x^2+4x-12+x^2-4x-12}{x^2-4};\ \frac{2(x^2-3)}{x^2-1}=\frac{2(x^2-12)}{x^2-4};$$
$x^4-7x^2+12=x^4-13x^2+12;\ 6x^2=0;\ x=0.$ ■

2.002. $x_1=5;\ x_2=-55/16.$

2.003. □ Приведя к общему знаменателю, получим
$$ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2=0;\ x=\frac{(a+1)^2\pm\sqrt{(a+1)^4-4a(a^2+1)^2}}{2a}=$$
$$=\frac{(a+1)^2\pm(a+1)(a-1)}{2a};\ x_1=a+1;\ x_2=\frac{a+1}{a}.$$ ■

2.004. □ Имеем $x^2-2\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}x+1=0$; следовательно,
$$x=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)^2-1}=\frac{m^2+n^2\pm2mn}{m^2-n^2};\ x_1=\frac{m+n}{m-n};\ x_2=\frac{m-n}{m+n}.$$ ■

2.005. □ Если $b\neq0$, то $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$; если $b=0$, то $x=a$. **2.006.** $x_1=a$; $x_2=(1-a^2)/a$. **2.007.** $x_1=a+b$; $x_2=(a+b)/2$.

2.008. □ Имеем
$$\frac{(x^2-n^2)-(m^2-n^2)}{(m+n)(x-n)}=\frac{(x^2-p^2)-(m^2-p^2)}{(m+p)(x-p)};\ \frac{x^2-m^2}{(m+n)(x-n)}=\frac{x^2-m^2}{(m+p)(x-p)}.$$
Отсюда: либо $x^2-m^2=0$, т. е. $x_1=m$, $x_2=-m$; либо $(m+n)(x-n)=(m+p)(x-p)$, т. е. $(n-p)x=(n-p)(m+n+p)$. Если $n=p$, то x — любое число, кроме $x=n$; если $n\neq p$, то $x_3=m+n+p$. Ответ: если $n=p$, то x — любое число, кроме $x=n$; если $n\neq p$, то $x_1=m$, $x_2=-m$, $x_3=m+n+p$. ■

2.009. □ Переписав уравнение в виде $1+\dfrac{1}{x+1}+1+\dfrac{3}{x+3}+1+\dfrac{5}{x+5}=6$, получим $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{5}{x+5}=3$. Отсюда, приведя к общему знаменателю, имеем
$9x^2+46x+45=3x^3+27x^2+69x+45;$
$3x^3+18x^2+23x=0;\ x(3x^3+18x+23)=0;$
$x_1=0;\ x_{2,3}=-3\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}.$ ■

2.010. $x_1=0;\ x_2=5;\ x_3=38/11$. **2.011.** $y_1=0;\ y_{2,3}=(-9\pm\sqrt{5})a/4$.

2.012. □ Имеем $\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2-\left(\dfrac{5x}{4-x^2}\right)^2=0$ или $\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2-\left(\dfrac{5x}{x^2-4}\right)^2=0$. Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим (при $x \neq \pm 2$); либо $x^2+6+5x=0$, откуда $x_1=-3$, либо $x^2+6-5x=0$, откуда $x_2=3$. ■

2.013. □ Разложив левую часть уравнения как разность кубов, получим $((x+3)-(x+1))((x+3)^2+(x+3)(x+1)+(x+1)^2)=56$. Отсюда $3x^2+12x+13=28$ или $x^2+4x-5=0$, т. е. $x_1=1$; $x_2=-5$. ■

2.014. □ Имеем $(x-a)^3-(x-b)^3=(b-a)(x^2-2ax+a^2+x^2-(a+b)x+ab+x^2-2bx+b^2)$. Поэтому уравнение примет вид $(b-a)(3x^2-3(a+b)x+a^2+ab+b^2)=(b-a)(b^2+ab+a^2)$. Отсюда находим: если $a=b$, то x — любое число; если $a \neq b$, то $3x^2-3(a+b)x+a^2+ab+b^2=a^2+ab+b^2$, т. е. $x_1=0$; $x_2=a+b$. ■

2.015. □ Имеем $x^3(8x+1)+8(8x+1)=0$, откуда $(8x+1)(x^3+8)=0$ или $(8x+1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$, т. е. $x_1=-1/8$; $x_2=-2$. ■

2.016. □ Имеем $3\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)-7\left(\frac{x+1}{x}\right)=0$, откуда $\frac{x+1}{x^2}(3x^2-3x+3-7x)=0$, т. е. либо $x+1=0$, либо $3x^2-10x+3=0$. Следовательно, $x_1=-1$; $x_2=3$; $x_3=1/3$. ■

2.017. $x=-1$.

2.018. □ Приведя к общему знаменателю и перенеся все члены уравнения в левую часть равенства, получим $x^4-ab(a+b)x^2+a^3b^3=0$. Это биквадратное уравнение. Полагая $x^2=z$, имеем $z^2-ab(a+b)z+a^3b^3=0$. Следовательно, $z=\frac{ab(a+b)\pm ab(a-b)}{2}$, откуда $z_1=a^2b$; $z_2=ab^2$, т. е. $x_{1,2}=\pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4}=\pm b\sqrt{a}$. ■

2.019. $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 3\sqrt{21}/7$.

2.020. $x_1=1$; $x_2=-5$; $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$. ● Использовать подстановку $\frac{x^2+x-5}{x}=z$.

2.021. □ Приведя к общему знаменателю и перенеся все члены уравнения в левую часть, получим $12(x-a)^2-26x(x-a)+12x^2=0$. Так как $x \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде $12\left(\frac{x-a}{x}\right)^2-26\frac{x-a}{x}+12=0$ или $6\left(\frac{x-a}{x}\right)^2-13\frac{x-a}{x}+6=0$. Полагая $\frac{x-a}{x}=t$, получим $6t^2-13t+6=0$. Отсюда $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{2}{3}$, т. е. $x_1=-2a$, $x_2=3a$. ■

2.022. □ Полагая $x^2+4=z$, получим $\frac{4}{z}+\frac{5}{z+1}=2$ или $2z^2-7z-4=0$. Отсюда $z_1=4$, т. е. $x^2=0$, $x=0$; $z_2=-1/2$, т. е. $x^2=-9/2$ (это квадратное уравнение корней не имеет). Итак, $x=0$. ■

2.023. $x_1=1$; $x_2=-\sqrt[3]{6}$. ● Использовать подстановку $x^3+2=z$.

2.024. $x_1=2b-a$; $x_2=2a-b$. ● Использовать подстановку $\frac{x-a}{x-b}=z$.

2.025. □ Переписав уравнение в виде $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{12}$, положим $x^2+2x=z$. Тогда $\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}$. Значит, $z_1=3$, $z_2=-4$, т. е. либо $x^2+2x-3=0$

либо $x^2+2x+4=0$. Из первого уравнения находим $x_1=1$; $x_2=-3$. Второе уравнение не имеет корней. ■

2.026. $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm\sqrt[4]{24/2}$. ● Использовать подстановку $2x^4-7=z$.

2.027. $x_1=1$; $x_2=3$. ● Использовать подстановку $x^2-4x+10=y$.

2.028. $x_1=2$; $x_2=1/2$. ● Использовать подстановку $(x^2+1)/x=z$.

2.029. □ Переписав уравнение в виде $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$, положим $x+\frac{1}{x}=z$. Тогда $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$ или $z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Заданное уравнение примет вид $z^2+z-6=0$, откуда $z_1=2$, $z_2=-3$. Итак, $x_{1,2}=1$; $x_{3,4}=(-3\pm\sqrt{5})/2$. ■

2.030. $x_1=2$; $x_2=1/2$; $x_{3,4}=(-11\pm\sqrt{105})/4$.

2.031. □ Имеем $\sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x}$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x$; $12\sqrt{3-x}=24$; $\sqrt{3-x}=2$; $3-x=4$; $x=-1$. Проверка показывает, что это значение является корнем уравнения. ■

2.032. $x_1=-1$; $x_2=3$.

2.033. □ Имеем

$$2\sqrt{7-x}=\frac{0{,}6\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot 10\cdot\sqrt[4]{1{,}5}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{216\cdot\sqrt[3]{9}}};\ \sqrt{7-x}=\frac{12\cdot 3^{1/4}}{3^{1/6}\cdot 3^{1/3}\cdot 2^{1/4}\cdot 216^{1/4}};$$

$\sqrt{7-x}=2$; $x=3$. ■

2.034. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$.

2.035. □ Имеем $(x^2+9)-(x^2-7)=16$ или $(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-7})=16$. Так как $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$, то $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-7}=8$. Следовательно, получаем систему $\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-7}=8,\\ \sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2,\end{cases}$ откуда $2\sqrt{x^2+9}=10$, т. е. $x_{1,2}=\pm 4$. ■

2.036. □ Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем $(x+1)+(9-x)-2\sqrt{(x+1)(9-x)}=2x-12$ или $\sqrt{(x+1)(9-x)}=11-x$. Снова возведя в квадрат, после преобразований получим $x^2-15x+56=0$, откуда $x_1=8$, $x_2=7$. Проверкой убеждаемся в том, что оба корня подходят. ■

2.037. □ Решая так же, как и предыдущий пример, получим $x_1=-4/3$, $x_2=4$. Однако легко видеть, что первый корень является посторонним. Итак, $x=4$. ■

2.038. □ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $2x+2\sqrt{x^2-x-11}=16$. Отсюда $\sqrt{x^2-x-11}=8-x$ или $x^2-x-11=64-16x+x^2$ или $15x=75$, т. е. $x=5$. ■

2.039. □ Дважды возведя в квадрат, находим $x_1=-1$, $x_2=-4$. Проверкой устанавливаем, что подходит только первый корень. ■

2.040. $x=2$.

2.041. □ Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$ и возведем обе части равенства в куб, воспользовавшись формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Тогда получим $(7+5x)+(12-5x)+3\cdot\sqrt[3]{(7+5x)(12-5x)}\times(\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x})=1$. Так как, по условию, $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$, то $19+3\cdot\sqrt[3]{(7+5x)(12-5x)}=1$. Отсюда $\sqrt[3]{(5x+7)(12-5x)}=-6$ или $(5x)^2-5(5x)-300=0$. Следовательно, $5x=0{,}5(5\pm35)$, откуда $5x_1=20$, $5x_2=-15$, т. е. $x_1=4$, $x_2=-3$. ■

2.042. $x_1=-61$, $x_2=30$. **2.043.** $x=9$. **2.044.** $x=0$. **2.045.** $x_{1,2}=\pm1$.

2.046. □ Имеем $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$ или $1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1$ или $\sqrt{x^2-24}=x-2$ (так как $x\neq0$). Отсюда $x=7$. ■

2.047. □ Сократив дроби в левой части уравнения, получим $\sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x}+1=4$ или $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-2=0$. Отсюда $\sqrt[3]{x}=-1$ или $\sqrt[3]{x}=2$. Так как $\sqrt[3]{x}$ не может быть равен -1 (при этом знаменатели исходных дробей обращаются в нуль), то $x=8$. ■

2.048. $x=4$. **2.049.** $x_1=3$, $x_2=5$.

2.050. □ Воспользуемся очевидным равенством $(5+\sqrt[3]{x})-(5-\sqrt[3]{x})=2\sqrt[3]{x}$. Разложив его левую часть как разность квадратов, получим $(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})=2\sqrt[3]{x}$. Так как, по условию, $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$, то $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=2$. Складывая почленно эти уравнения, имеем $2\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}+2$. Отсюда $20+4\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+4$ или $\sqrt[3]{x^2}=16$ или $\sqrt[3]{x}=4$, т. е. $x=64$. ■

2.051. $x_1=a$, $x_2=(4a-b)/3$.

2.052. □ Для решения уравнения воспользуемся следующим утверждением: если верно равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливо и равенство $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (проверьте!).

Имеем $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})+(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})-(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}=\dfrac{3+1}{3-1}$ или $\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}}=2$ или $\sqrt{x}=2\sqrt[3]{x}$ или $x^3=64x^2$; так как $x\neq0$, то $x=64$. ■

2.053. □ Данное уравнение можно переписать в виде $2(\sqrt[6]{x})^2+5\sqrt[6]{x}-18=0$. Решив это квадратное уравнение относительно $\sqrt[6]{x}$, получим $\sqrt[6]{x}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+144}}{4}$. Отсюда $\sqrt[6]{x_1}=-9/2$, $\sqrt[6]{x_2}=2$. Первый корень не подходит. Ответ: $x=2^6=64$. ■

2.054. □ Имеем $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}=\sqrt[10]{x^6}=\sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=\sqrt[10]{x^3}$. Таким образом,

$\sqrt[5]{x^3}-\sqrt[10]{x^3}-56=0$. Далее, решая аналогично предыдущему примеру, получим: $\sqrt[10]{x^3}=2^3$; $x^3=2^{30}$; $x=2^{10}=1024$. ■

2.055. $x_{1,\,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **2.056.** $x_{1,\,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **2.057.** $x_{1,\,2}=\pm 7$. **2.058.** $x_1=6$, $x_2=-2\,(1+\sqrt[3]{4})/5$. **2.059.** $x=2$. **2.060.** $x=5/3$.

2.061. $x=1$. ● Использовать подстановку $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z$.

2.062. $z_1=2$; $z_2=-\frac{1}{511}$. ● Использовать подстановку $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=u$.

2.063. $x_{1,\,2}=\pm 4$. ● Использовать подстановку $\sqrt{x^2+20}=z$.

2.064. □ Полагая $\sqrt[3]{x}+2=u$, получим $\frac{4}{u}+\frac{u+1}{5}=2$. Отсюда $u^2-9u+20=0$; $u_1=4$; $u_2=5$. Таким образом, $\sqrt[3]{x}+2=4$; $\sqrt[3]{x}=2$; $x_1=8$; $\sqrt[3]{x}+2=5$; $\sqrt[3]{x}=3$; $x_2=27$. ■

2.065. □ Полагая $x^2+3x-6=y$, получим $y-12+4\sqrt{y}=0$. Отсюда $\sqrt{y}=2$; $y=4$. Таким образом, $x^2+3x-10=0$, т. е. $x_1=-5$; $x_2=2$. ■

2.066. □ Полагая $x^2-4x+6=z$, получим $z-12=\sqrt{2z}$. Следовательно, $z^2-24z+144=2z$; $z^2-26z+144=0$. Далее имеем: $z_1=18$, т. е. $x^2-4x+6=18$; $x_1=6$; $x_2=-2$; $z_2=8$, т. е. $x^2-4x+6=8$; $x_{3,\,4}=2\pm\sqrt{6}$. Проверкой легко убедиться в том, что подходят только первые два корня. Ответ: $x_1=6$; $x_2=-2$. ■

2.067. □ Из первого уравнения находим $y=x-1$. Подставив это выражение во второе уравнение, имеем $x^3-(x-1)^3=7$, откуда $x^2-x-2=0$. Следовательно, $x_1=2$, $x_2=-1$, а $y_1=1$, $y_2=-2$. Ответ: (2; 1), (−1; −2). ■

2.068. (−4; 24); (−6; −2).

2.069. □ Имеем: $y=\frac{3}{x}$. Значит, $x^4+\frac{81}{x^4}=82$, т. е. $x^8-82x^4+81=0$, откуда $x^4=1$ и $x^4=81$. Выразив x, получим ответ: (1; 3); (−1; −3); (3; 1); (−3; −1). ■

2.070. □ Запишем систему в виде $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\(x+0{,}2)+(y+0{,}3)=1{,}4.\end{cases}$ Полагая $x+0{,}2=u$; $y+0{,}3=\mathrm{v}$, придем к системе $\begin{cases}u^2+\mathrm{v}^2=1,\\u+\mathrm{v}=1{,}4.\end{cases}$ Возведя второе уравнение в квадрат, получим $u^2+\mathrm{v}^2+2u\mathrm{v}=1{,}96$. Так как $u^2+\mathrm{v}^2=1$, то уравнение примет вид $2u\mathrm{v}=0{,}96$. Итак, $\begin{cases}u+\mathrm{v}=1{,}4,\\u\mathrm{v}=0{,}48.\end{cases}$ Решив эту систему обычным способом, находим $u_1=0{,}8$, $\mathrm{v}_1=0{,}6$; $u_2=0{,}6$, $\mathrm{v}_2=0{,}8$. Отсюда $x_1=0{,}6$, $y_1=0{,}3$; $x_2=0{,}4$, $y_2=0{,}5$. ■

2.071. □ Разделив второе уравнение системы на первое, получим $\frac{x+y}{x-y}=4$, откуда

$\frac{2x}{2y}=\frac{5}{3}$, т. е. $x=\frac{5y}{3}$. Тогда $\left(y+\frac{5y}{3}\right)y\cdot\frac{5y}{3}=120$, т. е. $\frac{40}{9}y^3=120$; $y^3=27$.

Ответ: (5; 3). ■

2.072. □ Перемножив уравнения системы, получим $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}$. Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, т. е. $x=\frac{y}{2}$, или $\frac{x}{y}=2$, т. е. $x=2y$. Из второго уравнения системы для каждого из этих случаев имеем: $\frac{2}{y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$, откуда $y=4$, $x=2$; $\frac{1}{2y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$, откуда $y=2$, $x=4$. ■

2.073. (7; 3), (−7; −3).

2.074. □ Имеем $\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)xy}=\frac{15}{6}$, т. е. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$. Полагая $\frac{x}{y}=z$, получим $2z^2-5z+2=0$, откуда $z=2$, $z=1/2$. Итак, $x=2y$ и $x=y/2$. Подставим найденные выражения в первое уравнение системы: $y^4=1$, т. е. $y=\pm1$; тогда $x=\pm2$; $y^4=-16$ (это уравнение не имеет корней). Ответ: (2; 1), (−2; −1). ■

2.075. (2; −1), (−1; 2). **2.076.** (1; 2).

2.077. □ Возведем первое уравнение в квадрат: $x^{-2}+y^{-2}+2(xy)^{-1}=25$. Учитывая, что $x^{-2}+y^{-2}=13$, получим $13+2(xy)^{-1}=25$, т. е. $xy=1/6$. Из уравнения $\frac{x+y}{xy}=5$ находим $x+y=\frac{5}{6}$. Итак, остается решить систему $\begin{cases}xy=1/6,\\x+y=5/6.\end{cases}$
Ответ: (1/2; 1/3), (1/3; 1/2). ■

2.078. (4; 3), (4; −3). **2.079.** (3; 2), (−3; −2).

2.080. □ Полагая $x+y=u$ и $x-y=v$, получим систему $\begin{cases}12u^2+u-2{,}5=0,\\6v^2+v-0{,}125=0,\end{cases}$ откуда $u_1=5/12$, $v_1=1/12$, $u_2=-1/2$, $v_2=-1/4$. Комбинируя каждое значение u с каждым значением v, находим:

$\begin{cases}x+y=5/12,\\x-y=1/12,\end{cases}$ т. е. $x_1=1/4$, $y_1=1/6$;

$\begin{cases}x+y=5/12,\\x-y=-1/4,\end{cases}$ т. е. $x_2=1/12$, $y_2=1/3$;

$\begin{cases}x+y=-1/2,\\x-y=1/12,\end{cases}$ т. е. $x_3=-5/24$, $y_3=-7/24$;

$\begin{cases}x+y=-1/2,\\x-y=-1/4,\end{cases}$ т. е. $x_4=-3/8$, $y_4=-1/8$. ■

2.081. (2; 6), (1; 3). **2.082.** (4; 1), (1; 4). **2.083.** (3; 2), (−3; −2).

2.084. □ Полагая $\frac{x+y}{x-y}=z$, получим $z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}$, т. е. $6z^2-13z+6=0$, откуда $z_1=\frac{3}{2}$, $z_2=\frac{2}{3}$. Таким образом, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$, т. е. $\frac{2x}{2y}=\frac{5}{1}$, $y=\pm1$, $x=\pm5$; $\frac{x+y}{x-y}=\frac{2}{3}$, т. е. $\frac{2x}{2y}=\frac{5}{-1}$, $y^2=-1$ (корней нет). Ответ: (5; 1), (−5; −1). ■

2.085. (1/2; 4). **2.086.** (2; 3), (3; 2).

2.087. (4; 1), (10/3; 2/3). ● Положить $x+y=u$, $xy=v$.

2.088. $(1/a;\ b)$. **2.089.** $(-1,\ 2)$; $(2,\ -1)$.

2.090. □ Из второго уравнения системы находим $u^3=-m/\mathrm{v}^3$. Подставив в первое уравнение, получим $\mathrm{v}^3-\dfrac{m}{\mathrm{v}^3}+1=m$, т. е. $\mathrm{v}^6-(m-1)\,\mathrm{v}^3-m=0$. Положим $\mathrm{v}^3=z$; тогда получим уравнение $z^2-(m-1)\,z-m=0$, откуда $z=$ $=\dfrac{(m-1)\pm\sqrt{m^2+2m+1}}{2}=\dfrac{(m-1)\pm(m+1)}{2}$, т. е. $z_1=m$, $z_2=-1$. Итак, решив системы $\begin{cases}u^3=m,\\ \mathrm{v}^3=-1\end{cases}$ и $\begin{cases}u^3=-1,\\ \mathrm{v}^3=m,\end{cases}$ найдем значения x и y. Ответ: $(\sqrt[3]{m};\ -1)$; $(-1;\ \sqrt[3]{m})$. ■

2.091. $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$. ● Использовать подстановку $xy=u$, $x+y=\mathrm{v}$.

2.092. $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$; $(1;\ \sqrt{2})$; $(1;\ -\sqrt{2})$. **2.093.** $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$. **2.094.** $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$.

2.095. □ Имеем

$$\begin{cases}(x+y)\,(x^2-xy+y^2)=35,\\ x+y=5,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x^2+2xy+y^2=25.\end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем $3xy=18$, откуда $xy=6$. Итак, решив систему $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6\end{cases}$, найдем значения x и y. Ответ: $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$. ■

2.096. □ Сложив уравнения системы, получим $6\,(x+y+z)=12$, т. е. $x+y+z=2$. Вычитая это уравнение из первого, имеем $y+2z=1$. Теперь из системы $\begin{cases}y+2z=1,\\ 3x+y+2z=7\end{cases}$ находим $3x=6$, т. е. $x=2$. Легко видеть, что $y=-1$, $z=1$. Ответ: $(2;\ -1;\ 1)$. ■

2.097. $(1;\ 2;\ 3)$.

2.098. □ Из первых двух уравнений получим $u=\mathrm{v}-1$ и $w=\mathrm{v}+1$. Подставляя эти выражения в третье уравнение, имеем $(\mathrm{v}-1-1)^3+(\mathrm{v}-2)^3+$ $+(\mathrm{v}+1-3)^3=3$. Отсюда $3\,(\mathrm{v}-2)^3=3$, т. е. $(\mathrm{v}-2)^3=1$, $\mathrm{v}=3$. Значит, $u=2$, $w=4$. Ответ: $(2;\ 3;\ 4)$. ■

2.099. □ Имеем

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14,\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=6;\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=10,\\ \sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=200,\\ x-y=48.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим ответ: $(124;\ 76)$. ■

2.100. □ Возведя первое уравнение в квадрат, получим $\sqrt{u}+\sqrt{\mathrm{v}}-2\sqrt[4]{u\mathrm{v}}=1$. Так как $\sqrt{u}+\sqrt{\mathrm{v}}=5$, то $\sqrt[4]{u\mathrm{v}}=2$. Итак, решив систему $\begin{cases}\sqrt{u}\sqrt{\mathrm{v}}=4,\\ \sqrt{u}+\sqrt{\mathrm{v}}=5\end{cases}$ найдем значения u и v. Ответ: $(16;\ 1)$. ■

2.101. $(1;\ 81)$, $(81;\ 1)$. **2.102.** $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$. **2.103.** $(1;\ 9)$, $(9;\ 1)$.

2.104. □ Имеем $x+y=13-\sqrt{xy}$. Возведя это уравнение в квадрат, получим $x^2+y^2+2xy=169-26\sqrt{xy}+xy$. Так как $x^2+y^2=91-xy$, то $91=169-$

$-26\sqrt{xy}$, т. е. $\sqrt{xy}=3$. Остается решить систему $\begin{cases} xy=9, \\ x+y=10. \end{cases}$ Ответ: (1; 9), (9; 1). ■

2.105. (1; 4), (4; 1).

2.106. □ Возведя первое уравнение в куб, получим $x+y+3\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\,\sqrt[3]{xy}=64$ или $x+y+3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{xy}=64$. Так как $x+y=28$, то $28+3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{xy}=64$, т. е. $\sqrt[3]{xy}=3$. Остается решить систему $\begin{cases} \sqrt[3]{xy}=3, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4. \end{cases}$ Ответ: (1; 27), (27; 1). ■

2.107. □ Представим второе уравнение системы в виде $(\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y})\times(\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y})=8$. Так как $\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4$, то $4\,(\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y})=8$, т. е. $\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2$. Остается решить систему $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=3, \\ \sqrt[4]{x-y}=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=81, \\ x-y=1. \end{cases}$ Ответ: (41; 40). ■

2.108. (41; 40). **2.109.** $(9a^2;\ a^2)$.

2.110. □ Имеем $\begin{cases} |x+y|=3, \\ |x-y|=1. \end{cases}$ Отсюда получаем четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

Решив их, найдем все значения x и y. Ответ: (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1). ■

2.111. □ Полагая $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=z$, получим $z-\dfrac{2}{z}=1$ или $z^2-z-2=0$, и, значит, $z_1=2$, $z_2=-1$ (этот корень не подходит). Итак, $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2$, т. е. $y=4x$. Тогда $\sqrt{9x}+\sqrt{x}=4$ или $3\sqrt{x}+\sqrt{x}=4$, откуда $x=1$, а $y=4$. ■

2.112. $(0;\ a)$, $(2-a;\ 2)$, если $a\neq 0$; $(2;\ 2)$, если $a=0$. ● Использовать подстановку $\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=z$.

2.113. (3; 1). ● Использовать подстановку $2x-y+11=u$, $3x+y-9=v$.

2.114. (12; 4), (34; −30). ● Использовать подстановку $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt[3]{x-y}=v$.

2.115. □ Возведем второе уравнение в квадрат: $u^2+v^2+2uv=uv+6\sqrt{uv}+9$. Так как $u^2+v^2=uv+13$, то $2uv-6\sqrt{uv}+4=0$, т. е. $uv-3\sqrt{uv}+2=0$. Сделав замену $\sqrt{uv}=z$, получим квадратное уравнение $z^2-3z+2=0$, откуда $z_1=2$, т. е. $\sqrt{uv}=2$, $z_2=1$, т. е. $\sqrt{uv}=1$. Итак, остается решить системы $\begin{cases} uv=4, \\ u+v=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} uv=1, \\ u+v=4. \end{cases}$ Ответ: (1; 4); (4; 1). ■

2.116. (4; 1).

2.117. □ Перемножив уравнения, получим $x+y=9$, т. е. $y=9-x$. Подставив данное выражение в первое уравнение и выполнив преобразования, придем к уравнению $x^2-9x+8=0$. Отсюда $x_1=1$, $x_2=8$, а $y_1=8$, $y_2=1$. ■

2.118. □ Имеем $\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}=12$, откуда $\sqrt[6]{x^2y^2}\,(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})=12$. Так как $\sqrt[6]{x^2y^2}=\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{64}$, то $\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3$. Итак, остается решить систему $\begin{cases}\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3,\\ \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y}=2.\end{cases}$ Ответ: (1; 64); (64; 1). ■

2.119. □ Полагая $(2-\sqrt{x-y})^{-1}=u$, $(2+\sqrt{x+y})^{-1}=v$, получим $\begin{cases}3u+10v=5,\\ 4u-5v=3.\end{cases}$

Отсюда $u=1$, $v=1/5$. Итак, остается решить систему $\begin{cases}2-\sqrt{x-y}=1,\\ 2+\sqrt{x+y}=5.\end{cases}$

Ответ: (5; 4). ■

2.120. □ Выполнив преобразования и используя теорему Виета, получим

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.\ ■$$

2.121. □ Имеем $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$; $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}$. Но, по теореме Виета, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$;

$x_1x_2=\frac{c}{a}$. Поэтому $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$; $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{a}{c}$. Итак, $x^2+\frac{b}{c}\,x+\frac{a}{c}=0$ или

$cx^2+bx+a=0$. ■

2.122. □ Если корни искомого уравнения обозначить через $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, а данного — через x_1 и x_2, то из условия следует, что $\bar{x}_1=x_1+x_2$; $\bar{x}_2=x_1\,x_2$. Используя теорему Виета, получим $\bar{x}_1=-\frac{b}{a}$; $\bar{x}_2=\frac{c}{a}$. Отсюда $\bar{x}_1+\bar{x}_2=\frac{c-b}{a}$, $\bar{x}_1\,\bar{x}_2=-\frac{bc}{a^2}$.

Итак, искомое уравнение примет вид $x^2+\frac{b-c}{a}\,x-\frac{bc}{a^2}=0$ или $a^2x^2+(ab-$ $-ac)\,x-bc=0$. ■

2.123. $ax^2+(b-2a)\,x+(c-b+a)=0$. **2.124.** $p=0$, $q=0$; $p=1$, $q=-2$. **2.125.** $A_1=1$, $B_1=-2$; $A_2=0$, $B_2=0$. **2.126.** $k=2$.

2.127. □ Имеем $\begin{cases}3x^2-4x+p-2=0,\\ x^2-2px+5=0.\end{cases}$ Подставив выражение $p=2-3x^2+4x$ во второе уравнение, получим $6x^3-7x^2-4x+5=6x^3-6x^2-4x+5=6x^2\times$ $\times(x-1)-(x-1)\,(x+5)=(x-1)\,(6x^2-x-5)=(x-1)^2(6x+5)$, т. е. $x_1=1$, $x_2=-5/6$. Отсюда $p_1=3$, $p_2=-41/12$ (противоречит условию). Итак, $p=3$. При этом значении p получим уравнения $3x^2-4x+1=0$ и $x^2-6x+5=0$.

Первое из них имеет корни $x_1=1$, $x_2=1/3$, а второе — корни $x_1=1$, $x_2=5$, т. е. $x=1$ — общий корень. ■

2.128. □ Имеем $x^2-2ax+(2a-1)=0$ и $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$, т. е. $x_1+x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Согласно теореме Виета, $2a=4a^2-4a+2$ или $2a^2-3a+1=0$, откуда $a_1=1$, $a_2=1/2$. ■

2.129. $a=6$. **2.130.** $c=15$. **2.131.** $a=4$.

2.132. □ Имеем $x^2+px-16=0$ и $x_1/x_2=-4$. Из системы $\begin{cases} x_1x_2=-16, \\ x_1/x_2=-4 \end{cases}$ найдем $x_1=8$, $x_2=-2$ или $x_1=-8$, $x_2=2$. Далее, используя равенство $x_1+x_2=-p$, получаем ответ: $p_1=-6$, $p_2=6$. ■

2.133. □ Выполнив преобразования и используя теорему Виета, находим $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\left(\frac{5}{3}\right)^3+3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{215}{27}$. ■

2.134. $b=2$. **2.135.** $c=1/3$.

2.136. □ Перемножив одночлены, стоящие в числителе и знаменателе, имеем $\frac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}=1$ или $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$. Отсюда, приведя подобные члены, получим $20x^3+100x=0$ или $x^3+5x=0$. Таким образом, $x=0$. ■

2.137. □ Выполнив преобразования (сделайте это самостоятельно), в результате получим $-\frac{3}{5}(m-1)(x^4+4)=0$. Легко видеть, что при $m=1$ в качестве x можно взять любое число, кроме ±1, ±2; при $m\neq1$ получим $x^4+4=0$ или $x^4=-4$ (действительных корней нет). Итак, если $m=1$, то x — любое число, кроме ±1, ±2; если $m\neq1$, то корней нет. ■

2.138. □ Выполнив преобразования, получим уравнение $z^4+4=0$ или $z^4+4z^2+4-4z^2=0$ или $(z^2+2)^2-4z^2=0$, т. е. $(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)=0$. Итак, либо $z^2-2z+2=0$, либо $z^2+2z+2=0$. Легко видеть, что корней нет, так как дискриминанты обоих уравнений отрицательны. ■

2.139. □ Перепишем уравнение так: $xa^2+(x^4-1)a-x^3=0$. Это квадратное уравнение относительно a, откуда находим

$$a=\frac{-(x^4-1)\pm\sqrt{(x^4-1)^2+4x^4}}{2x}=\frac{-(x^4-1)\pm(x^4+1)}{2x}.$$

Следовательно, $a=\frac{1}{x}$; $a=-x^3$. Остается решить уравнения $ax=1$ и $x^3+a=0$. Ответ: $x_1=1/a$; $x_2=-\sqrt[3]{a}$, если $a\neq0$; $x=0$, если $a=0$. ■

2.140. □ Имеем $(x+1)^5=(x+1)^2(x+1)^3=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$; $(x-1)^5=(x-1)^2(x-1)^3=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$. Складывая, получим $2x^5+20x^3+10x=32x$ или $x^5+10x^3-11x=0$ или $x(x^4+10x^2-11)=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$. ■

2.141. Если $a=0$, то x — любое число; если $a\neq0$, то $x_{1,2}=\pm a$. **2.142.** $x_1=10$; $x_2=-20{,}5$.

2.143. □ Воспользуемся определением модуля и рассмотрим различные случаи.

1-й случай: $x<0$. Тогда $-x+1-x=1$, т. е. $x=0$. Легко видеть, что $x=0$ не удовлетворяет неравенству $x<0$. Следовательно, $x=0$ — посторонний корень.

2-й случай: $0 \leqslant x < 1$. Тогда $x+1-x=1$, т. е. $1=1$. Значит, x может быть любым числом на $[0, 1)$.
3-й случай: $x \geqslant 1$. Тогда $x=1$.
Ответ: $x \in [0, 1]$. ■

2.144. □ 1-й случай: $x<0$. Тогда $-x^3+(1-x)^3=9$, т. е. $2x^3-3x^2+3x+8=0$ или $(x+1)(2x^2-5x+8)=0$. Легко видеть, что $x=-1$ — единственный корень этого уравнения (удовлетворяет условию).
2-й случай: $0 \leqslant x < 1$. Тогда $x^3+(1-x)^3=9$. Корни этого уравнения не удовлетворяют условию.
3-й случай: $x \geqslant 1$. Тогда $x^3+(x-1)^3=9$, т. е. $2x^3-3x^2+3x-10=0$ или $(x-2)(2x^2+x+5)=0$. Легко видеть, что $x=2$ — единственный корень этого уравнения.
Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2$. ■

2.145. □ Имеем $(x^2+1)(x-2)+(x^2+2)(x+1)=-2(x+1)(x-2)$. Выполнив преобразования, получим $2x^3+x^2+x-4=0$. Так как сумма всех коэффициентов равна нулю, то $x=1$. Запишем последнее уравнение в виде $2x^3-2x^2+3x^2-3x+4x-4=0$ или $(x-1)(2x^2+3x+4)=0$. Отсюда $2x^2+3x+4=0$. Поскольку дискриминант этого уравнения отрицателен, оно не имеет корней. Ответ: $x=1$. ■

2.146. $x_1=1$, $x_{2,\,3}=-2 \pm \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **2.147.** $x=1$. **2.148.** $u_1=1$, $u_{2,\,3}=(1 \pm \sqrt{33})/4$.

2.149. □ Легко видеть, что одним из корней уравнения $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$ является $x_1=a$. Тогда $((x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc)):(x-a)=x^2-(b+c)x+bc$. Из уравнения $x^2-(b+c)x+bc=0$ находим, что $x_2=b$, $x_3=c$. Ответ: $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=c$. ■

Замечание. Можно сформулировать и доказать так называемую обобщенную теорему Виета. Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px^2+qx+s=0$, то $x_1+x_2+x_3=-p$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$; $x_1x_2x_3=-s$.

2.150. □ Полагая $\dfrac{x^2+1}{x}=z$, получим $z+\dfrac{1}{z}=-2{,}5$ или $z^2+2{,}5z+1=0$. Значит, $z_1=-2$ или $\dfrac{x^2+1}{x}=-2$, откуда $x^2+2x+1=0$, т. е. $x_{1,\,2}=-1$; $z_2=-\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{x^2+1}{x}=-\dfrac{1}{2}$, откуда $2x^2+x+2=0$. Так как дискриминант последнего уравнения отрицателен, то оно не имеет корней. Ответ: $x=-1$. ■

2.151. $x_1=2$, $x_2=1/2$. Использовать подстановку $x+\dfrac{1}{x}=z$.

2.152. □ Полагая $x+1=z$, получим $\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{(z+1)^2}=\dfrac{10}{9}$ или $5z^4-19z^2-4=0$.

Отсюда $z_1^2=4$, т. е. $z=\pm 2$, и $z^2=-\dfrac{1}{5}$ (это уравнение не имеет корней).
Ответ: $x_1=1$, $x_2=-3$. ■

2.153. $x=2a-1$, $x_2=2-a$. ● Использовать подстановку $\dfrac{x-1}{x-a}=y$.

2.154. $x_1=0$, $x_2=-2$. ● Использовать подстановку $x^2+2x+1=y$.

2.155. $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_{3,\,4}=0{,}5\,(-2 \pm \sqrt{66})$. **2.156.** $z_1=0$, $z_2=1$.

2.157. □ Раскрыв скобки в знаменателе, получим уравнение $\frac{6}{x^2+3x+2}+$ $+\frac{8}{x^2+3x-4}=1$, для решения которого следует использовать подстановку $x^2+3x-4=z$. Ответ: $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=0{,}5\,(-3\pm\sqrt{73})$.

2.158. Положим $(x-3)^2=z$ или $x^2-6x+9=z$, откуда $x^2-6x=z-9$. Итак, исходное уравнение примет вид $(z-9)^2-2z=81$ или $z^2-20z=0$. Таким образом, $z_1=0$, т. е. $(x-3)^2=0$, откуда $x_1=x_2=3$, и $z_2=20$, т. е. $(x-3)^2=20$, откуда $x_{3,4}=3\pm2\sqrt{5}$. ■

2.159. $x_1=2$, $x_2=-4$.

2.160. □ Полагая $\frac{x-2}{x+1}=y$ и $\frac{x+2}{x-1}=z$, получим уравнение $20y^2+48yz-5z^2=0$ или $20\left(\frac{y}{z}\right)^2+48\left(\frac{y}{z}\right)-5=0$. Следовательно, $\frac{y}{z}=\frac{1}{10}$ или $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{10}$, откуда $x_1=3$, $x_2=\frac{2}{3}$; $\frac{y}{z}=-\frac{5}{2}$ или $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=-\frac{5}{2}$ (действительных корней нет). Ответ: $x_1=3$, $x_2=2/3$. ■

2.161. □ Имеем $(x+\sqrt{x^2-1})^2\,((x+\sqrt{x^2-1})\,(x-\sqrt{x^2-1}))^3=1$ или $(x+$ $+\sqrt{x^2-1})^2\,(x^2-x^2+1)=1$. Таким образом, $x+\sqrt{x^2-1}=1$ или $\sqrt{x^2-1}=$ $=1-x$ или $x^2-1=1-2x+x^2$, откуда $x=1$; $x+\sqrt{x^2-1}=-1$ или $\sqrt{x^2-1}=$ $=-(1+x)$ или $x^2-1=1+2x+x^2$, откуда $x=-1$. Ответ: $x_1=1$, $x_2=-1$. ■

2.162. □ После возведения в квадрат получим $2x^2+2x+5+$ $+2\sqrt{(x^2+x+4)\,(x^2+x+1)}=2x^2+2x+9$ или $\sqrt{(x^2+x)^2+5\,(x^2+x)+4}=2$. Отсюда $(x^2+x)^2+5\,(x^2+x)+4=4$ или $(x^2+x)\,(x^2+x+5)=0$. Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$. ■

2.163. □ Имеем $\sqrt{x}=2-\frac{2x+1}{x+2}$ или $\sqrt{x}=\frac{3}{x+2}$. После возведения в квадрат и выполнения преобразований уравнение примет вид $x^3+4x^2+4x-9=0$. Заметим, что сумма коэффициентов последнего уравнения равна нулю и, значит, оно имеет корень $x=1$. Поэтому $x^3-x^2+5x^2-5x+9x-9=0$ или $(x-1)\,(x^2+5x+9)=0$, т. е. $x^2+5x+9=0$ (это уравнение не имеет корней). Ответ: $x=1$. ■

2.164. □ Имеем $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$. После возведения уравнения в шестую степень получим $(x+2)^3=(3x+2)^2$ или $x^3-3x^2+4=0$ или $(x+1)\,(x^2-$ $-4x+4)=0$. Отсюда $x_1=-1$ (посторонний корень), $x_2=2$. Ответ: $x=2$. ■

2.165. $x=1$.

2.166. □ После возведения обеих частей уравнения в куб имеем $2x-16+$ $+3\sqrt[3]{x\,(x-16)\,(x-8)}=x-8$ или $3\sqrt[3]{x\,(x-16)\,(x-8)}=-(x-8)$. Отсюда $27x\,(x-16)\,(x-8)=-(x-8)^3$. Легко видеть, что $x_1=8$. После сокращения последнего уравнения на $x-8$, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $28x^2-448x+64=0$, откуда $x_{2,3}=8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$. ■

2.167. $x_1=1$, $x_2=3/2$, $x_3=2$.

2.168. □ После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $x^3-9x^{3/2}+8=0$ или $(x^{3/2})^2-9x^{3/2}+8=0$, откуда $x^{3/2}=1$, т. е. $x_1=1$, и $x^{3/2}=8$, т. е. $x_2=4$. ■

2.169. □ Имеем $5\cdot\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[30]{x^{29}}-22\cdot\sqrt[15]{x^7}=0$ или $\sqrt[15]{x^7}\,(5x+x^{1/2}-22)=0$. Отсюда: либо $\sqrt[15]{x^7}=0$, т. е. $x=0$; либо $5x+x^{1/2}-22=0$ или $5\,(x^{1/2})^2+x^{1/2}-22=0$, т. е. $x^{1/2}=2$ и $x^{1/2}=-\frac{11}{5}$ (не имеет смысла). Ответ: $x_1=0$; $x_2=4$. ■

2.170. □ Полагая $\sqrt{\frac{z}{z+1}}=u$, получим $u^2-\frac{2}{u}=3$ или $u^3-3u-2=0$. Отсюда: $u_1=2$ или $\sqrt{\frac{z}{z+1}}=2$ или $\frac{z}{z+1}=4$, т. е. $z=-\frac{4}{3}$; $u_2=-1$, т. е. $\sqrt{\frac{z}{z+1}}=-1$ (не имеет смысла). Ответ: $z=-\frac{4}{3}$. ■

2.171. $x=0$. ● Использовать подстановку $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=z$.

2.172. $x=12$. ● Использовать подстановку $20/x=y$.

2.173. □ Положим $x^2+5x+2=z$. Тогда $(x+4)\,(x+1)=x^2+5x+4=z+2$. Таким образом, остается решить уравнение $z+2-3\sqrt{z}-6=0$ или $z-3\sqrt{z}-4=0$. Ответ: $x_1=2$, $x_2=-7$. ■

2.174. □ Имеем $(3x^2-2x+15)-(3x^2-2x+8)=7$ или $(\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8})\,(\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8})=7$. Так как $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$, то $\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}=1$. Вычитая из предпоследнего уравнения последнее, получаем

$2\sqrt{3x^2-2x+8}=6$ или $3x^2-2x+8=9$ или $3x^2-2x-1=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-1/3$. ■

2.175. □ Имеем $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}=\sqrt{\frac{-(x-2)\,(x+9)}{(x-2)\,(x-4)}}=\sqrt{\frac{x+9}{4-x}}$. Заметим, что $-9\leqslant x<4$. Данное уравнение можно переписать так: $\sqrt{\frac{x+9}{4-x}}+\sqrt{\frac{4-x}{x+9}}=\frac{13}{6}$.

Полагая $\sqrt{\frac{x+9}{4-x}}=z$, приходим к уравнению $z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}$ или $6z^2-13z+6=0$.

Отсюда получаем: $z_1=\frac{3}{2}$ или $\sqrt{\frac{x+9}{4-x}}=\frac{3}{2}$ или $4x+36=36-9x$, т. е. $x_1=0$; $z_2=\frac{2}{3}$ или $\sqrt{\frac{x+9}{4-x}}=\frac{2}{3}$ или $9x+81=16-4x$, т. е. $x_2=-5$. Легко видеть, что оба корня удовлетворяют условию. ■

2.176. □ Имеем $(x+8+2\sqrt{x+7})-(x+1-\sqrt{x+7})=7+3\sqrt{x+7}$ или $(\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}-\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}})\,(\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}})=$ $=7+3\sqrt{x+7}$.

Так как $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$, то $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}-$ $-\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=\dfrac{7+3\sqrt{x+7}}{4}$. Вычитая из предпоследнего уравнения последнее, получаем $2\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=\dfrac{9-3\sqrt{x+7}}{4}$ или $11\,(x+7)-2\sqrt{x+7}-$ $-93=0$, откуда $x=2$. ■

2.177. $x=0$. ● Использовать подстановку $\sqrt[4]{x+1}=z$.

2.178. $x_1=\dfrac{b+128}{a}$, $x_2=\dfrac{128b+1}{128a}$. ● Использовать подстановку $\sqrt[7]{(ax-b)^3}=z$.

2.179. □ Возведем обе части уравнения в куб:

$9-\sqrt{x+1}+7+\sqrt{x+1}+3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{(9-\sqrt{x+1})\,(7+\sqrt{x+1})}=64$ или

$\sqrt[3]{63+2\sqrt{x+1}-(x+1)}=4$.

Отсюда $(x+1)-2\sqrt{x+1}+1=0$ или $\sqrt{x+1}=1$, т. е. $x=0$. ■

2.180. □ Имеем $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}-12$. Возведем правую часть этого уравнения в квадрат: $(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})^2=2x+2\sqrt{x^2-16}$. Полагая $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=u$ и вычитая из последнего уравнения предпоследнее, получаем $u^2-u-12=0$, откуда $u_1=4$, $u_2=-3$ (посторонний корень). Таким образом, $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$ и $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\dfrac{(x+4)-(x-4)}{4}=2$. Отсюда находим $2\sqrt{x-4}=2$ или $\sqrt{x-4}=1$, т. е. $x=5$. ■

2.181. □ Имеем $4\sqrt{(a-x)^2}-10\sqrt{(a-x)\,(b-x)}+4\sqrt{(b-x)^2}=0$. Так как $x\neq b$ и $x\neq a$, то $2\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{b-x}\right)^2}-5\sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}}+2=0$, откуда $\sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}}=\dfrac{5\pm 3}{4}$, т. е. $x_1=\dfrac{4b-a}{3}$, $x_2=\dfrac{4a-b}{3}$. ■

2.182. □ Имеем $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}=-\sqrt[3]{x+a+2}$. Возведя обе части уравнения в куб, получим $3x+3a+3=3\cdot\sqrt[3]{(x+a)\,(x+a+1)\,(x+a+2)}$. Отсюда $(x+a+1)^3=(\sqrt[3]{(x+a)\,(x+a+1)\,(x+a+2)})^3$ или $(x+a+1)\,((x+a+1)^2-$ $-(x+a)\,(x+a+2))=0$. Следовательно, либо $x+a+1=0$, т. е. $x=-a-1$, либо $(x+a+1)^2-(x+a)\,(x+a+2)=0$, т. е. $(a+1)^2-a\,(a+2)=0$ (это уравнение не имеет корней). Ответ: $x=-a-1$. ■

2.183. □ Имеем $\begin{cases}x^2+y=y^2+x,\\ y^2+x=6,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x^2+y=6,\\ y^2+x=6.\end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим $(x^2-y^2)-(x-y)=0$ или $(x-y)\,(x+y-1)=0$. Итак, если $y=x$, то $x_1=2$; $x_2=-3$; если $y=-x+1$, то $x_{3,\,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Ответ: $(2;\,2)$, $(-3;\,-3)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2};\,\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2};\,\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. ■

2.184. □ Имеем $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ 3\,(x^2y+xy^2)=-18. \end{cases}$ Сложив уравнения, находим $(x+y)^3=1$ или $x+y=1$. Тогда $y=1-x$ и из первого уравнения получим: $x^3+(1-x)^3=19$ или $x^2-x-6=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-2$ и $y_1=-2$, $y_2=3$. Ответ: $(3;\,-2)$, $(-2;\,3)$. ■

2.185. □ Вычтем второе уравнение из первого: $(x^2-y^2)-(x-y)=0$ или $(x-y)\times(x+y-1)=0$. Итак, если $x-y=0$, то $x_1=4$, $y_1=4$ и $x_2=-5$, $y_2=-5$; если $x+y=1$, то $x_{3,\,4}=(1\pm\sqrt{77})/2$ и $y_{3,\,4}=(1\mp\sqrt{77})/2$. Ответ: $(4;\,4)$; $(-5;\,-5)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{77}}{2};\,\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{77}}{2};\,\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$. ■

2.186. $(2;\,2)$, $(-2;\,-2)$, $(2;\,-2)$, $(-2;\,2)$. **2.187.** $(2;\,-5)$.

2.188. □ Умножим первое уравнение на 2 и из результата вычтем второе уравнение: $-5x+11y-17=0$. Следовательно, $y=\dfrac{5x+17}{11}$, откуда $146x^2+93x-239=0$. Итак, $x_1=1$, $y_1=2$ и $x_2=-239/146$, $y_2=117/146$. ■

2.189. $(3;\,5)$, $(5;\,3)$. **2.190.** $(3;\,2)$, $(-3;\,-2)$, $(\sqrt{3}/3;\,5\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3;\,-5\sqrt{3}/3)$.

2.191. $(2;\,1)$, $(-2;\,-1)$.

2.192. □ Имеем $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=xy-\dfrac{16}{3}, \\ \dfrac{y}{x}=xy-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$ Перемножив уравнения системы, получим $(xy)^2-\dfrac{59}{6}\,xy+\dfrac{144}{6}=1$. Отсюда $xy=6$ и $xy=23/6$. Легко видеть, что $x_1=2$, $y_1=3$ и $x_2=-2$, $y_2=-3$. ■

2.193. $(4;\,2)$, $(-4;\,-2)$.

2.194. □ Разделив первое уравнение системы на второе, получим $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=\dfrac{5}{9}$. Отсюда $2x^2+2y^2-5xy=0$ или $2\,\dfrac{x^2}{y^2}-5\,\dfrac{x}{y}+2=0$. Итак, если $\dfrac{x}{y}=2$, то $x_1=2$, $y_1=1$; если $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$, то $x_2=-1$, $y_2=-2$. ■

2.195. □ Умножив второе уравнение на 3 и сложив результат с первым уравнением, получим $(x+y)^3=27a^3$. Отсюда $x+y=3a$. Тогда из второго уравнения находим $xy=2a^2$. Таким образом, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $z^2-3az+2a^2=0$. Итак, $z_1=a$, $z_2=2a$, т. е. $x_1=a$, $y_1=2a$ и $x_2=2a$, $y_2=a$. ■

2.196. □ Возведем второе уравнение в квадрат: $(x^2+y^2)^2=25$ или $x^4+y^4+2x^2y^2=25$. Учитывая, что $x^4+y^4=17$, получаем $x^2y^2=4$, т. е. $xy=2$

и $xy=-2$. Остается решить системы $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2. \end{cases}$ Ответ: (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2); (2; −1), (−1; 2); (−2; −1); (−1; −2). ■

2.197. □ Имеем $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)=65$. Учитывая, что $x^4-x^2y^2+y^4=13$, находим $x^2+y^2=5$. Возведем последнее равенство в квадрат: $x^4+2x^2y^2+$ $+y^4=25$ и вычтем из него второе уравнение системы. В результате получаем $3x^2y^2=12$ или $x^2y^2=4$. Итак, из системы $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^2y^2=4 \end{cases}$ остается найти x и y. Ответ: (2; 1), (−2; −1); (2; −1); (−2; 1); (1; 2);(−1; −2); (1; −2); (−1; 2). ■

2.198. (1; 3), (3; 1). **2.199.** (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1).

2.200. □ Сложив уравнения системы, получим $2(x^3+y^3)=18a^3$ или $x^3+y^3=$ $=9a^3$. Отсюда $x^2y+xy^2=6a^3$. Далее, сложив уравнения $3(x^2y+xy^2)=18a^3$ и $x^3+y^3=9a^3$, находим $(x+y)^3=27a^3$, откуда $x+y=3a$. Тогда из уравнения $xy(x+y)=6a^3$ имеем $xy=2a^2$. Таким образом, x и y являются корнями квадратного уравнения $z^2-3az+2a^2=0$. Итак, $x_1=a$, $y_1=2a$ и $x_2=2a$, $y_2=a$. ■

2.201. (3; 1), (3; −1), $(-5/3; \sqrt{65}/3)$, $(-5/3; -\sqrt{65}/3)$. ● Использовать подстановку $x+y=u$, $x-y=v$.

2.202. (2; −3). ● Использовать подстановку $\dfrac{1}{x+y-1}=u$, $\dfrac{1}{2x-y+3}=v$.

2.203. (3; 2), (1; 4), (−3; −4), (−5; −2). **2.204.** $\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a-b}{2}\right)$; $\left(\dfrac{a+b}{ab}; \dfrac{a-b}{ab}\right)$.

2.205. (2; 1), (6; −3), $(6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3})$, $(6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3})$. **2.206.** (3; 1), (−3; −1), $(14\sqrt{106}/53; 4\sqrt{106}/53)$, $(-14\sqrt{106}/53; -4\sqrt{106}/53)$. **2.207.** (5; 3), (−5; −3).

2.208. (2; 3), (3; 2), $\left(\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}; \dfrac{-7-\sqrt{73}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-7-\sqrt{73}}{2}; \dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$. **2.209.** (1; 4), (4; 1).

2.210. □ Составляя попарно разности двух уравнений, получаем, что $x=y=z$. Тогда любое из уравнений примет вид $u+u^2=2$, откуда $u_1=-2$, $u_2=1$. Ответ: (1; 1; 1), (−2; −2; −2). ■

2.211. □ Первые два уравнения запишем так: $\begin{cases} x+y=3-z, \\ x+2y=2+z. \end{cases}$ Отсюда находим $y=2z-1$, $x=-3z+4$. Тогда из третьего уравнения получим $(-3z+4)+z(3-z)=3$, откуда $z^2=1$. Итак, $z_1=1$, $y_1=1$, $x_1=1$ и $z_2=-1$, $y_2=-3$, $x_2=7$. ■

2.212. (0; 0; 0), (2; −1; −1). **2.213.** (3; −2; 1), (−1; 0; 3).

2.214. □ Первые два уравнения образуют систему $\begin{cases} x+(y+z)=6, \\ x(y+z)=5. \end{cases}$ Таким образом, x и $y+z$ являются корнями квадратного уравнения $u^2-6u+5=0$.

Отсюда $\begin{cases} x=1, \\ y+z=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5, \\ y+z=1. \end{cases}$ Наконец, из систем $\begin{cases} x=1, \\ y+z=5, \\ y(z+1)=8 \end{cases}$ и

$\begin{cases} x=5, \\ y+z=1, \\ y(z+5)=8 \end{cases}$ находим x, y, z. Ответ: (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; −1), (5; 4; −3). ■

2.215. (0; 0; 0), $(a-b;\ b-c;\ c-a)$. **2.216.** $x=abc$, $y=ab+bc+ca$, $z=a+b+c$.

2.217. $x=\dfrac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y=\dfrac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z=\dfrac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$.

2.218. □ Перемножив уравнения системы, получим $(xyz)^2=abc$, т. е. $xyz=\pm\sqrt{abc}$. Отсюда $x=\dfrac{xyz}{yz}=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{b}=\pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, $z=\pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$. ■

2.219. □ Запишем третье уравнение в виде $xyz=1$ и умножим на него два первых уравнения. Тогда придем к системе $\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+yz+zx=3, \\ xyz=1. \end{cases}$ Введем вспомогательную неизвестную u и для нее получим, что $u^3-3u^2+3u-1=0$ (см. замечание к решению задачи 2.149). Отсюда $(x-1)^3=0$, т. е. $u=1$. Значит, система имеет единственное решение $x=y=z=1$. ■

2.220. (1; 3; 5), (−1; −3; −5). **2.221.** (3; 0; 5).

2.222. □ Имеем $\begin{matrix} |2x+3y|=5, \\ |2x-3y|=1. \end{matrix}$ Воспользуемся определением модуля и рассмотрим различные случаи.

1-й случай: $\begin{cases} 2x+3y>0, \\ 2x-3y>0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2x-3y=1, \end{cases}$ откуда $x=3/2$, $y=2/3$. Легко видеть, что эти значения удовлетворяют данной системе.

2-й случай: $\begin{cases} 2x+3y>0, \\ 2x-3y<0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2x-3y=-1, \end{cases}$ откуда $x=1$, $y=1$.

3-й случай: $\begin{cases} 2x+3y<0, \\ 2x-3y>0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ 2x-3y=1, \end{cases}$ откуда $x=-1$, $y=-1$.

4-й случай: $\begin{cases} 2x+3y<0, \\ 2x-3y<0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ 2x-3y=-1, \end{cases}$ откуда $x=-3/2$, $y=-2/3$.

Ответ: (1; 1), (−1; −1), (3/2; 2/3), (−3/2; −2/3). ■

2.223. □ Составим разность уравнений системы: $(x-y)+(\sqrt{y}-\sqrt{x})=0$ или $(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)=0$. Отсюда либо $\sqrt{y}-\sqrt{x}=0$, т. е. $x=y=49$, либо $x+y=1$. В последнем случае, сложив уравнения системы, получим $x+y+(\sqrt{x}+\sqrt{y})-112=0$, откуда $\begin{cases} x+y=111, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1, \end{cases}$ а эта система не имеет решений. Ответ: (49; 49). ■

2.224. □ Перемножив уравнения системы, имеем $8=(x+y)-(x-y)$, откуда $y=4$. Затем возведем уравнения системы в квадрат и сложим их; тогда получим $\dfrac{5y}{x}+\dfrac{4x}{5y}=x$. При $y=4$ найдем $x=5$ ($x=-5$ — посторонний корень). Ответ: (5; 4). ■

2.225. (11; 1).

2.226. □ Запишем первое уравнение так: $(u^2-v^2)+\sqrt{u^2-v^2}-12=0$, откуда

$\sqrt{u^2-v^2}=3$. Тогда исходная система примет вид $\begin{cases} u^2-v^2=9, \\ u^2+v^2=41. \end{cases}$ Решив эту систему, получим ответ: (5; 4). ■

2.227. □ Имеем $\sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2}=1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{2y^2}{x^2+y^2}=1{,}6$. Таким образом, остается решить систему $\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{5}{4}, \\ xy=2. \end{cases}$ Ответ: (1; 2), (−1; −2). ■

2.228. □ Перепишем исходную систему так: $\begin{cases} (\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3=35, \\ 3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}=90. \end{cases}$ Тогда, сложив уравнения этой системы, придем к уравнению $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3=125$, откуда $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$. Далее имеем $\sqrt{y}=5-\sqrt{x}$; $y=25-10\sqrt{x}+x$; $y\sqrt{y}=125-$ $-75\sqrt{x}-x\sqrt{x}+15x$. Последнее выражение подставим во второе уравнение исходной системы и получим $x-5\sqrt{x}+6=0$, откуда $\sqrt{x}=2$, $\sqrt{x}=3$. Итак, $x_1=4$, $y_1=9$; $x_2=9$, $y_2=4$. ■

2.229. (1; 7), (49/64; 41/8), (7; −8). **2.230.** (4; 1), (121/64; 169/64).

2.231. □ Преобразуем левую часть первого уравнения. Так как $\sqrt{x^2+y^2}+$ $+\sqrt{x^2-y^2}=6$, то $\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=\frac{(x^2+y^2)-(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}$, т. е. $\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=\frac{2y^2}{6}$. Складывая это уравнение с уравнением $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6$, получим $2\sqrt{x^2+y^2}=6+\frac{y^2}{3}$. Далее, учитывая, что $y^2=\frac{6\sqrt{10}}{x}$, приходим к биквадратному уравнению $x^4-9x^2-10=0$. Отсюда $x=\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{6}$. Ответ: $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. ■

2.232. □ Сложив уравнения системы, найдем $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=6$. Вычитая из этого уравнения поочередно каждое из уравнений данной системы, придем к системе $\begin{cases} \sqrt{z+x}=3, \\ \sqrt{x+y}=1, \\ \sqrt{y+z}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} z+x=9, \\ x+y=1, \\ y+z=4. \end{cases}$ Снова применяя указанные выше действия к уравнениям последней системы, получим ответ: $x=3$, $y=-2$, $z=6$. ■

2.234. (1; 64), (64; 1). **2.235.** (1; 16), (16; 1).

2.236. □ Возведем первое уравнение в квадрат: $3x+2y+1-$ $-2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=1$. Учитывая, что $3x+2y=4$, и полагая $\sqrt{2x+y+1}=u$, $\sqrt{x+y}=v$, получим систему $\begin{cases} uv=2, \\ (u-v)^2=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} (u+v)^2=9, \\ (u-v)^2=1, \end{cases}$ из которой находим $u=2$, $v=1$. Итак, остается решить систему $\begin{cases}2x+y+1=4,\\x+y=1.\end{cases}$ Ответ: (2; -1). ■

2.237. (5; 4), (-9; 25). **2.238.** (1; 1). **2.239.** (2; 3), (13/3; $-5/3$). **2.240.** (10; 1), ($-21/2$; 53/12).

2.241. □ Положим $\sqrt{x^2+2y+1}=z$. Тогда $x^2+2y+1=z^2$, $x^2+2y=z^2-1$. Таким образом, первое уравнение системы примет вид $z^2+z-2=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=-2$ (посторонний корень, так как $z\geqslant 0$). Итак, $x^2+2y+1=1$. Из системы $\begin{cases}x^2+2y=0,\\2x+y=2\end{cases}$ находим x и y. Ответ: (2; -2). ■

2.242. (3; 3/2), (6; 3).

2.243. □ Имеем $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{xy}}=\dfrac{5}{2},\\|x+y|=5,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\sqrt{xy}=2,\\|x+y|=5.\end{cases}$

1-й случай: $x+y>0$. Тогда система примет вид $\begin{cases}xy=4,\\x+y=5,\end{cases}$ откуда $x_1=4$, $y_1=1$; $x_2=1$; $y_2=4$.

2-й случай: $x+y<0$. Тогда система примет вид $\begin{cases}xy=4,\\x+y=-5,\end{cases}$ откуда $x_1=-4$, $y_1=-1$; $x_2=-1$, $y_2=-4$.

Ответ: (1; 4), (4; 1), (-1; -4), (-4; -1). ■

2.244. $x_1=0$; $x_2=-10$.

2.245. □ Выполнив деление, получим:

$$\begin{array}{l|l} x^2+mx+n & x-m \\ \hline -\;x^2-mx & x+2m \\ \quad 2mx & \\ \quad -\;2mx-2m^2 & \\ \hline \qquad 2m^2+n & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2+mx+n & x-n \\ \hline -\;x^2-nx & x+m+n \\ \quad (m+n)\,x & \\ \quad -\;(m+n)\,x-mn-n^2 & \\ \hline \qquad mn+n^2+n & \end{array}$$

Согласно условию, $2m^2+n=m$, $mn+n^2+n=n$. Если $n=0$, то $2m^2=m$, т. е. $m=0$ либо $m=1/2$. Если $n\neq 0$, то $n=-m$, $m\,(m-1)=0$, т. е. $m=1$, $n=-1$. Ответ: (0; 0), (1/2; 0), (1; -1). ■

2.246. □ Имеем $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Пусть $x_1>x_2$; тогда, используя условие, получим: $(x_1-1)+(x_2+1)=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $(x_1-1)\,(x_2+1)=x_1x_2-x_2+x_1-1=$ $=\dfrac{c}{a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}-1$. Итак, $x^2+\dfrac{b}{a}\,x+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}-1\right)=0$ или ax^2+bx+ $+(c+\sqrt{b^2-4ac}-a)=0$. ■

2.247. □ Полагая $z=-1$, получим относительно m уравнение $m^2-m-6=0$, корнями которого являются $m=3$ и $m=-2$. При каждом из этих значений

m данное уравнение запишется так: $z^3-13z-12=0$. Это уравнение представим в виде $(z+1)(z+3)(z-4)=0$, откуда $z_1=-1$; $z_2=-3$; $z_3=4$. ■

2.248. □ Имеем $2b^2-9ac=0$ или $b^2=4{,}5ac$. Тогда если x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\sqrt{4{,}5ac}+\sqrt{0{,}5ac}}{2a}=-\frac{\sqrt{4{,}5}-\sqrt{0{,}5}}{2a}\sqrt{ac};$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{\sqrt{4{,}5}+\sqrt{0{,}5}}{2a}\sqrt{ac}.$$

Таким образом, $\frac{x_2}{x_1}=\frac{\sqrt{4{,}5}+\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{4{,}5}-\sqrt{0{,}5}}=\frac{(\sqrt{9}+\sqrt{1})\sqrt{0{,}5}}{(\sqrt{9}-\sqrt{1})\sqrt{0{,}5}}=2$, откуда $x_2=2x_1$. ■

2.249. □ Используя теорему Виета, имеем: $ab=1$, $a+b=-p$ и $bc=2$, $b+c=-q$. Тогда $pq=(a+b)(b+c)=b^2+ac+3$, откуда $b^2+ac=pq-3$, $(b-a)(b-c)=$ $=(b^2+ac)-3=(pq-3)-3=pq-6$. Итак, $(b-a)(b-c)=pq-6$. ■

2.250. □ Вычитая из первого уравнения второе, получим $ax-x+1-a=0$ или $(a-1)(x-1)=0$. Если $a=1$, то каждое из уравнений примет вид $x^2+x+1=0$, а такое уравнение не имеет действительных корней. Если же $a\neq 1$, то $x=1$ и, значит, $1+a+1=0$, т. е. $a=-2$. ■

2.251. $p>2$; $x_1=p+2$, $x_2=(2-p)/5$.

2.252. □ Имеем $x_1-x_2=5$, $x_1^3-x_2^3=35$, где x_1 и x_2 — корни уравнения x^2+px+ $+q=0$. Кроме того, $x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и $x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Итак, $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$ или $5(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=35$ или $x_1^2+x_1x_2+$ $+x_2^2=7$, т. е. получим систему $\begin{cases}p^2-q=7,\\ \sqrt{p^2-4q}=5.\end{cases}$ Решая ее, находим $p=1$, $q=-6$ и $p=-1$, $q=-6$. ■

2.253. $x^2+(4q-2p^2)x+(p^4-4p^2q)=0$.

2.254. □ Так как α и β — корни уравнения $3x^2+7x+4=0$, то $\alpha\beta=\frac{4}{3}$, $\alpha+\beta=-\frac{7}{3}$.

Далее, поскольку $\frac{\alpha}{\beta-1}$ и $\frac{\beta}{\alpha-1}$ — корни искомого уравнения $x^2+px+q=0$, находим

$$q=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{2}{7},\ p=-\left(\frac{\alpha}{\beta-1}+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)=-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=-\frac{23}{21}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид $x^2-\frac{23}{21}x+\frac{2}{7}=0$ или $21x^2-$ $-23x+6=0$. ■

2.255. □ Имеем $x^4+5x^3+15x-9=(x^2-3)(x^2+3)+5x(x^2+3)=(x^2+3)(x^2+$ $+5x-3)=0$, т. е. либо $x^2+3=0$ (это уравнение не имеет корней), либо $x^2+5x-3=0$. Поскольку дискриминант последнего квадратного уравнения положителен, оно имеет два корня: x_1 и x_2, причем $x_1x_2=-3$, $x_1+x_2=$ $=-5$. Легко видеть, что знаки этих корней противоположны. ■

2.256. □ Положим $x+\frac{1}{x}=z$; тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$. Отсюда $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=$

$=z^3-2z$ или $x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=z^3-2z$, т. е. $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$. Следовательно, $z^3-3z+z^2-2+z=6$ или $z^3+z^2-2z-8=0$. Замечаем, что $z_1=2$; далее после деления на $z-2$ получим $z^2+3z+4=0$, а это уравнение не имеет корней. Итак, $z=2$, откуда следует, что $x+\frac{1}{x}=2$ или $x^2-2x+1=0$, т. е. $x_{1,\,2}=1$. ■

2.257. □ Положим $x=z-4$. Тогда $x+3=z-1$, $x+5=z+1$. Следовательно, данное уравнение примет вид $(z-1)^4+(z+1)^4=16$. Отсюда $2z^4+12z^2+2=16$ или $z^4+6z^2-7=0$, т. е. $z^2=1$ и $z^2=-7$. Корнями первого уравненияя являются числа $z_1=1$, $z_2=-1$, а второе уравнение не имеет корней. Итак, $x_1=-3$, $x_2=-5$. ■

2.258. $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$. ● Использовать подстановку $x+1=z$.

2.259. $x_1=4$, $x_2=2$.

2.260. □ Запишем данное уравнение в виде $(3x)^3+(3x)^2-16\cdot 3x+20=0$ и положим $3x=z$. Тогда получим $z^3+z^2-16z+20=0$. Замечаем, что $z_1=2$, и после деления на $z-2$ имеем $z^2+3z-10=0$, т. е. $z_2=2$ и $z_3=-5$. Таким образом, $x_1=x_2=z_1/3=z_2/3=2/3$, $x_3=z_3/3=-5/3$. ■

2.261. □ Положим $\frac{9x}{9+x}=u$. Отсюда $9x=9u+xu$, т. е. $9\,(x-u)=x$. Таким образом, приходим к системе $\begin{cases}x^2+u^2=40,\\ 9\,(x-u)-xu=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}(x-u)^2=40-2xu,\\ 9\,(x-u)-xu=0.\end{cases}$ Из последней системы получаем $\begin{cases}x-u=-20,\\ xu=-180\end{cases}$ и $\begin{cases}x-u=2,\\ xu=18.\end{cases}$ Первая система не имеет решений, а решая вторую, находим $x_{1,\,2}=1\pm\sqrt{19}$. ■

2.262. $x_1=-1$, $x_2=2$. **2.263.** $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-1/2$.

2.264. $x=-1/2$. ● Использовать подстановку $x=1/y$.

2.265. □ Так как сумма коэффициентов уравнения равна нулю, то один из его корней равен единице: $x_1=1$. Тогда после деления на $x-1$ получим $x^2-2ax+(a^2-a)=0$, откуда $x_{2,\,3}=a\pm\sqrt{a}$. ■

2.266. $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$.

2.267. □ Замечаем, что одним из корней уравнения является $x_1=-3$. Тогда после деления на $x+3$ получим $x^2-3x-(p^2-p-2)=0$, откуда $x_2=p+1$, $x_3=-p+2$. ■

2.268. $x_1=1$, $x_{2,\,3}=a\pm\sqrt{m}$. **2.269.** $x_1=a$, $x_{2,\,3}=a\pm\sqrt{b}$.

2.270. □ Имеем $(4x^4+3x^2-1)-(16x^3-4x)=0$. Отсюда $4\,(x^2+1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-16x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0$, т. е. $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x^2-4x+1)=0$. Решая последнее уравнение, получаем ответ: $x_{1,\,2}=\pm 1/2$, $x_{3,\,4}=2\pm\sqrt{3}$. ■

2.271. □ Данное уравнение удобно записать как квадратное относительно a:

$$(x-2\sqrt{3})\,a^2-(2x^2-2\sqrt{3}x-12)\,a+(x^3-9x-6\sqrt{3})=0.$$

Отсюда $a=\dfrac{x^2-\sqrt{3}x-6}{x-2\sqrt{3}}$. Замечаем, что $x^2-\sqrt{3}x-6=(x-2\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Значит, $a(x-2\sqrt{3})=(x-2\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, откуда $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=a-\sqrt{3}$. Легко убедиться в том, что число $a-\sqrt{3}$ есть двукратный корень данного уравнения. Итак, получаем ответ: $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=x_3=a-\sqrt{3}$. ■

2.272. $x_1=1$, $x=1-a$. **2.273.** $x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$.

2.274. □ Данное уравнение удобно записать как квадратное относительно p: $(z-1)p^2-(2z^2-2z)p+(z^3-z^2-qz+q)=0$.

Отсюда $(z-1)p^2-2(z-1)zp+(z-1)(z^2-q)=0$, т. е. $(z-1)(p^2-2zp+z^2-q)=0$. Таким образом, $z-1=0$ и $p^2-2zp+z^2-q=0$. Из первого уравнения находим $z_1=1$, а из второго $p=z\pm\sqrt{q}$, т. е. $z_{2,3}=p\pm\sqrt{q}$. ■

2.275. □ Имеем $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$. Возведя это уравнение в квадрат, находим $2x+9+2\sqrt{x^2+9x}=2x+5+2\sqrt{x^2+5x+4}$, т. е. $\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2+5x+4}=-2$. Снова возведем уравнение в квадрат: $2x^2+14x+4-2\sqrt{(x^2+9x)(x^2+5x+4)}=4$, т. е. $x^2+7x=\sqrt{x^4+14x^3+49x^2+36x}$. Наконец, после еще одного возведения в квадрат получим $x^4+14x^3+49x^2=x^4+14x^3+49x^2+36x$ или $36x=0$, т. е. $x=0$. ■

2.276. □ После возведения уравнения в квадрат получим $2u^2+2+2\sqrt{(u^2-u-1)(u^2+u+3)}=2u^2+8$, т. е. $\sqrt{(u^2-u-1)(u^2+u+3)}=3$. Отсюда $(u^2-u-1)(u^2+u+3)=9$ или $u^4+u^2-4u-12=0$. Замечаем, что одним из корней последнего уравнения является $u=2$. Разделив на -2, приходим к уравнению $u^3+2u^2+5u+6=0$, которое не имеет положительных корней, так как все его коэффициенты положительны. Итак, $u=2$. ■

2.277. □ Положим $x^3+x^2-1=u$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $\sqrt{u}+\sqrt{u+3}=3$. Отсюда находим $\sqrt{u+3}-\sqrt{u}=\dfrac{u+3-u}{\sqrt{u}+\sqrt{u+3}}=\dfrac{3}{3}=1$, т. е. $\sqrt{u+3}-\sqrt{u}=1$. Складывая последнее уравнение с уравнением $\sqrt{u}+\sqrt{u+3}=3$, получим $2\sqrt{u}=2$, т. е. $u=1$. Таким образом, остается решить уравнение $x^3+x^2-1=1$, которое имеет единственный корень $x=1$. ■

2.278. $x=0$.

2.279. □ Возведем уравнение в квадрат: $2x+2\sqrt{x^2-4x+4}=x^2-2x+1$ или $2\sqrt{(x-2)^2}=x^2-4x+1$ или $2x-4=x^2-4x+1$, т. е. $x^2-6x+5=0$. Отсюда $x_1=5$, $x_2=1$. Сделав проверку, убеждаемся в том, что подходит только корень $x=5$. ■

2.280. □ Возведем данное уравнение в куб: $2x+11+3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)}=2x+11$, т. е. $\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)}=0$. Отсюда $(x+5)(x+6)(2x+11)=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1=-6$, $x_2=-5{,}5$, $x_3=-5$. ■

2.281. $x_1=0$, $x_2=1$.

2.282. □ Имеем $3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}+\sqrt{x^2-25x-150}=\sqrt{x^2-19x+204}$. Возведя это уравнение в квадрат и выполнив преобразования, получим $9\,\frac{x+5}{x-30}=324$. Отсюда $9\,(x+5)=324\,(x-30)$, т. е. $x=31$. ■

2.283. $x=79$.

2.284. □ Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{x+1}\,(\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1})=2\,(\sqrt{x+1})^2$. Отсюда $x_1=-1$. Остается решить уравнение $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}$. Возведя обе его части в квадрат, получим $2x+6+x-1+2\sqrt{(2x+6)\,(x-1)}=4\,(x+1)$ или $2\sqrt{(2x+6)\,(x-1)}=x-1$. Следовательно, $4\,(2x+6)\,(x-1)=x^2-2x+1$ или $7x^2+18x-25=0$, откуда $x_2=1$, $x_3=-25/7$. Сделав проверку, убедимся в том, что $x=-25/7$ — посторонний корень. Итак, $x_1=-1$, $x_2=1$. ■

2.285. □ Имеем $\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}\;\frac{x^2-2}{2x^2}=\frac{x}{2}\;\sqrt[7]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$. Отсюда $\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}\times\frac{(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2})}{x^2}=x\;\sqrt[7]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$ или $\sqrt[7]{(x-\sqrt{2})^8}=x^3\;\sqrt[7]{\frac{x^3}{(x+\sqrt{2})^8}}$. Таким образом, приходим к уравнению $(x-\sqrt{2})^8\,(x+\sqrt{2})^8=x^{24}$, из которого находим, что $x^2-2=\pm x^3$, т. е. $x^3-x^2+2=0$ и $x^3+x^2-2=0$. Первое уравнение имеет корень $x_1=-1$, второе — корень $x_2=1$. ■

2.286. □ Запишем данное уравнение в виде $(x^3+x-2)+\sqrt[3]{x^3+x-2}-10=0$. Положим $\sqrt[3]{x^3+x-2}=z$; тогда уравнение примет вид $z^3+z-10=0$. Замечаем, что $z_1=2$, и после деления на $z-2$ получим уравнение $z^2+2z+5=0$, которое не имеет корней. Следовательно, $x^3+x-2=2^3$, т. е. $x^3+x-10=0$. Это уравнение имеет единственный корень $x=2$. ■

2.287. $x_1=-1$, $x_2=1$. ● Записать уравнение в виде $5x^{6/15}+3x^{4/15}=8$ и использовать подстановку $\sqrt[15]{x^2}=y$.

2.288. $x_1=-1$, $x_2=4$.

2.289. □ Положим $x+8=u^4$, $x-8=v^4$. Тогда из системы $\begin{cases}u-v=2,\\ u^4-v^4=16\end{cases}$ находим $u=2$, $v=0$. Таким образом, $x=8$. ■

2.290. $x_1=63/5$, $x_2=-17/5$.

2.291. □ Полагая $\sqrt[6]{x-2}=a$, $\sqrt[6]{x-3}=b$, запишем уравнение в виде $a^2-5ab+6b^2=0$. Отсюда $(a-3b)\,(a-2b)=0$. Таким образом, $\sqrt[6]{x-2}=3\cdot\sqrt[6]{x-3}$, т. е. $x=2185/728$, и $\sqrt[6]{x-2}=2\cdot\sqrt[6]{x-3}$, т. е. $x=190/63$. ■

2.292. □ Запишем уравнение в следующем виде: $(x-1)+2\sqrt{(x-1)\,(x+3)}+(x+3)+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}-6=0$ или $(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})^2+(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})-6=0$. Отсюда получим $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; далее имеем $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\frac{(x+3)-(x-1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=\frac{4}{2}=2$. Значит, $\sqrt{x-1}=0$, откуда $x=1$. ■

2.293. $x=3$.

2.294. □ Имеем $\frac{\sqrt[5]{x^6}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{(\sqrt[5]{x}-1)(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}{\sqrt[5]{x}-1}=16$. Отсюда $\sqrt[5]{x^3}+$ $+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}-14=0$. Решая это уравнение как кубическое относительно $\sqrt[5]{x}$, находим его единственный действительный корень $x=32$. ■

2.295. $x=65$.

2.296. □ Возведем уравнение в квадрат: $\frac{x^4}{2x+15}+2x^2+(2x+15)=4x^2$ или $\frac{x^4}{2x+15}-2x^2+(2x+15)=0$ или $\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}-\sqrt{2x+15}\right)^2=0$. Таким образом, приходим к уравнению $x^2-2x-15=0$, корнями которого являются $x_1=$ $=-3$, $x_2=5$. Проверкой убеждаемся, что $x=-3$ — посторонний корень. Ответ: $x=5$. ■

2.297. $x_1=1$, $x_2=2\cdot\sqrt[3]{4}$, $x_3=-3\cdot\sqrt[3]{9}$. ● Умножить уравнение на x и решать его как кубическое относительно $x^{3/5}$.

2.298. $x=4$.

2.299. □ Умножив уравнение на $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}$, получим $(2-x)+(7+x)=$ $=3(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x})$ или $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}=3$. Возведем последнее уравнение в куб: $2-x+7+x+3\cdot3\cdot\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=27$, откуда $(2-x)(7+x)=8$. Итак, приходим к уравнению $x^2+5x-6=0$, корнями которого являются $x_1=1$, $x_2=-6$. ■

2.300. □ Для левой части уравнения имеем $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=$ $=\sqrt{2+2\sqrt{6x-8-x^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{1-(x-3)^2}}\leqslant 2$, а для правой части x^2-6x+ $+11=(x-3)^2+2\geqslant 2$. Следовательно, возможен лишь случай равенства обеих частей, т. е. $(x-3)^2+2=2$, откуда $x=3$. ■

2.301. $x_1=7$, $x_2=26$. ● Использовать подстановку $\sqrt[3]{34-x}=\lambda(1+t)$; $\sqrt[3]{x+1}=$ $=\lambda(1-t)$.

2.302. $x_1=7$, $x_2=14$, $x_{3,4}=\frac{21}{2}\pm\frac{7\sqrt{141}}{12}$. ● Использовать подстановку $\sqrt[3]{15-x}=$ $=\lambda(1+t)$; $\sqrt[3]{x-6}=\lambda(t-1)$.

2.303. □ Из первого уравнения найдем выражение для z: $z=4-x-y$. Подставив его во второе уравнение, получим $2xy-16-x^2-y^2+8x-8y-2xy=16$, откуда $(x-4)^2+(y-4)^2=0$. Сумма неотрицательных чисел может быть равна нулю только тогда, когда $\begin{cases}x-4=0,\\y-4=0\end{cases}$. Отсюда $x=4$, $y=4$. Значит, $z=-4$. Ответ: $(4; 4; -4)$. ■

2.304. □ Из первых двух уравнений выразим x и y через z и получим $x=-z$, $y=z$. Тогда третье уравнение системы перепишем так: $3(-z+2)^3+2(z+1)^3+$ $+(z+1)^3=27$. Отсюда $(z+1)^3-(z-2)^3=9$ или $((z+1)-(z-2))((z+1)^2+$ $+(z+1)(z-2)+(z-2)^2)=9$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, придем к уравнению $3z^2-3z+3=3$, откуда $z_1=0$, $z_2=1$. Значит, $x_1=0$, $x_2=-1$; $y_1=0$, $y_2=1$. Ответ: $(0; 0; 0)$, $(-1; 1; 1)$. ■

2.305. $(3;\ -2;\ 2),\ \left(\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}\right).$

2.306. □ Положим $\dfrac{x}{y}=u;\quad \dfrac{y}{z}=v;\quad \dfrac{z}{x}=w.$ Тогда $\begin{cases} u+v+w=3, \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=3, \\ uvw=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} u+v+w=3, \\ uv+uw+vw=3, \\ uvw=1. \end{cases}$ Составим вспомогательное кубическое уравнение: $t^3-3t^2+3t-1=0$ или $(t-1)^3=0$, т. е. $t=1$. Значит, $x=y=z$. Тогда из третьего уравнения данной системы найдем, что $3x=3$. Итак, $x=1$, $y=1$, $z=1$. ■

2.307. □ Полагая $x^2+y^2=u$, $2xy=v$, придем к системе $\begin{cases} \dfrac{1}{u}+v=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{v}+u=\dfrac{21}{4}. \end{cases}$ Переписав ее в виде $\begin{cases} \dfrac{1}{u}=\dfrac{21}{5}-v, \\ u=\dfrac{21}{4}-\dfrac{1}{v} \end{cases}$ и перемножив уравнения, получим $5v^2-21v+4=0$, откуда $v_1=4$, $v_2=\dfrac{1}{5}$. Тогда $u_1=5$, $u_2=\dfrac{1}{4}$. Итак, из систем $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2xy=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{4}, \\ 2xy=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ находим x и y. Ответ: $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-2;\ -1)$, $(-1;\ -2)$; $(\sqrt{5}/5;\ \sqrt{5}/10)$; $(\sqrt{5}/10;\ \sqrt{5}/5)$; $(-\sqrt{5}/5;\ -\sqrt{5}/10)$; $(-\sqrt{5}/10;\ -\sqrt{5}/5)$. ■

2.308. □ Положим $\dfrac{a+b}{x+y}=u;\ \dfrac{b+c}{y+z}=v;\ \dfrac{c+a}{z+x}=w$. Тогда, сложив уравнения заданной системы, придем к уравнению $u+v+w=3$. Вычитая из этого уравнения поочередно уравнения исходной системы, найдем $w=1$, $v=1$, $u=1$. Итак, остается решить систему $\begin{cases} x+y=a+b, \\ y+z=b+c, \\ z+x=c+a, \end{cases}$ откуда получим $x=a$, $y=b$, $z=c$. ■

2.309. □ Из первого уравнения следует, что $x/y=2$, а из второго — что $xy=2$ и $xy=-3$. Итак, имеем две системы: $\begin{cases} x/y=2, \\ xy=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x/y=2, \\ xy=-3. \end{cases}$ Легко видеть, что вторая система не имеет решений, а решениями первой служат пары $x_1=2$, $y_1=1$ и $x_2=-2$, $y_2=-1$. ■

2.310. □ Имеем $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}-14=0$. Замечаем, что $\dfrac{x}{y}=2$; тогда уравнение можно записать в виде $\left(\dfrac{x}{y}-2\right)\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+3\dfrac{x}{y}+7\right)=0$. Отсюда либо $\dfrac{x}{y}-2=0$, либо $\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+7=0$ (это уравнение не имеет корней). Итак, остается решить систему $\begin{cases}x/y=2,\\x+y=3.\end{cases}$ Ответ: (2; 1). ■

2.311. □ Запишем систему в виде $\begin{cases}x^2+2xy+y^2-(x+y)=102+2xy,\\(x+y)+xy=69\end{cases}$ и произведем замену $x+y=u$, $xy=v$. Тогда получим систему $\begin{cases}u^2-u=102+2v,\\u+v=69.\end{cases}$ Отсюда найдем $u_1=15$, $v_1=54$; $u_2=-16$, $v_2=85$. Итак, остается решить системы $\begin{cases}x+y=15,\\xy=54\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=-16,\\xy=85.\end{cases}$ Ответ: (6; 9), (9; 6). ■

2.312. □ После деления уравнений и раскрытия скобок получим $\frac{x^2+5xy+6y^2}{y^2+5xy+6x^2}=\frac{4}{7}$. Полагая $\frac{x}{y}=z$, имеем $\frac{z^2+5z+6}{1+5z+6z^2}=\frac{4}{7}$ или $17z^2-15z-38=0$, т. е. $z_1=2$ и $z_2=-19/17$. Отсюда и из первого уравнения данной системы заключаем, что $y^3\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{x}{y}+3\right)=60$, т. е. либо $y^3=1$, откуда $y_1=1$, $x_1=2$, либо $y^3=-\frac{17^3\cdot 4}{4^3}$, откуда $y_2=-\frac{17\cdot\sqrt[3]{4}}{4}$, $x_2=\frac{19\cdot\sqrt[3]{4}}{4}$. ■

2.313. (3; -1), (1; -3). **2.314.** (1; 1).

2.315. □ Имеем $\begin{cases}x^4+6x^2y^2+y^4=136,\\4x^3y+4xy^3=120.\end{cases}$ Складывая эти уравнения, находим $(x+y)^4=256$, т. е. $x+y=\pm 4$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(x-y)^4=16$, откуда $x-y=2$. Итак, остается решить системы $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-4,\\x-y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-4,\\x-y=-2.\end{cases}$ Ответ: (3; 1), (1; 3), (-1; -3), (-3; -1). ■

2.316. (0; 0), (-1; -2), (-2; -1), (2/3; $-1/3$), ($-1/3$; 2/3).

2.317. □ Складывая уравнения системы, получим $2xy+\frac{y^2-x^2}{xy}=3\,(x^2+y^2)$, а вычитая из первого уравнения второе, находим $xy=1$. Таким образом, $2+y^2-x^2=3\,(x^2+y^2)$, откуда $1-2x^2-y^2=0$. Учитывая, что $x=1/y$, придем к уравнению $1-\frac{2}{y^2}-y^2=0$, т. е. $y^4-y^2+2=0$. Очевидно, что последнее уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен. Значит, и данная система не имеет решений. ■

2.318. (2; 4), (4; 2), (0; 0).

2.319. □ Перемножив уравнения системы, получим $8xy+8+8+\frac{8}{xy}=9\,(xy)^2$ или $9\,(xy)^3-8\,(xy)^2-16xy+8=0$. Полагая $xy=z$, имеем $9z^3-8z^2-16z-8=0$. Следовательно, $(z-2)\,(9z^2+10z+4)=0$, т. е. либо $z-2=0$, откуда $z=2$, либо $9z^2+10z+4=0$ (это уравнение не имеет корней). Итак, $xy=2$, откуда $x=1$, $y=2$. ■

2.320. (1; 2), (2; 1). **2.321.** (2; -1), (-1; 2), (-2; 1), (1; -2). **2.322.** (-2; 3), (3; -2).

2.323. (2; 2; 2).

2.324. □ Запишем первое уравнение системы в виде $y+z=2-x$ и возведем его в квадрат: $y^2+z^2+2yz=4-4x+x^2$. Учитывая, что $y^2+z^2=6-x^2$, и приведя подобные слагаемые, имеем $yz=x^2-2x-1$. Теперь то же самое уравнение возведем в куб: $y^3+z^3+3yz\,(y+z)=8-12x+6x^2-x^3$. Учитывая, что $y^3+z^3=8-x^3$, и приведя подобные слагаемые, получим $x^3-2x^2-x+2=0$ или $(x^2-1)(x-2)=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=2$. Итак, на основании полученных результатов составляем три системы: $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=-2\end{cases}$, $\begin{cases}y+z=3,\\ yz=2\end{cases}$, $\begin{cases}y+z=0,\\ yz=-1\end{cases}$; из них находим y и z. Ответ: (1; −1; 2), (1; 2; −1), (−1; 1; 2), (−1; 2; 1), (2; 1; −1), (2; −1; 1). ■

2.325. (1; −2; 3), (1; −3; 2), (2; −1; 3), (2; −3; 1), (3; −1; 2), (3; −2; 1).

2.326. □ Сложив все три уравнения и сократив на 2, получим $xy+yz+zx=11$. Затем, вычитая из этого уравнения поочередно каждое уравнение данной системы, имеем $\begin{cases}zx=3,\\ yz=6,\\ xy=2.\end{cases}$ Наконец, перемножив эти уравнения, находим $(xyz)^2=36$, откуда $xyz=6$ и $xyz=-6$. Таким образом, в первом случае получаем $\frac{xyz}{zx}=2$, $\frac{xyz}{yz}=1$, $\frac{xyz}{xy}=3$, откуда $y=2$, $x=1$, $z=3$, а во втором $\frac{xyz}{zx}=-2$, $\frac{xyz}{yz}=1$, $\frac{xyz}{xy}=3$, откуда $y=-2$, $x=-1$, $z=3$. ■

2.327. $(a+1;\ a;\ a-1)$, $(-(a+1);\ -a;\ -(a-1))$.

2.328. □ Перемножим первые три уравнения: $u^2v^2w^2x^6=8\cdot 24\cdot 12$. Извлекая из обеих частей этого равенства квадратный корень, получим $uvwx^3=48$. Теперь поделим поочередно последнее уравнение на каждое из первых трех уравнений данной системы: $wx=6$, $ux=2$, $vx=4$, откуда $w=6/x$, $u=2/x$, $v=4/x$. Тогда из четвертого уравнения системы следует, что $\frac{12}{x}=x+4$. Отсюда $x^2+4x-12=0$, т. е. $x_1=2$, $x_2=-6$ (посторонний корень). Итак, $x=2$, $u=1$, $v=2$, $w=3$. ■

2.329. □ Возведем первое уравнение в квадрат: $x^2+y^2+2\sqrt{(x^2+5)(y^2-5)}=$ $=25$. Учитывая, что $x^2+y^2=13$, получим $\sqrt{(x^2+5)(y^2-5)}=6$ или $(x^2+5)(y^2-5)=36$. Так как $y^2=13-x^2$, то последнее уравнение примет вид $(x^2+5)(8-x^2)=36$ или $x^4-3x^2-4=0$, откуда $x=\pm 2$. Значит, $y=\pm 3$. Ответ: (2; 3), (−2; −3), (2; −3), (−2; 3). ■

2.330. (0; 0).

2.331. □ Возведя первое уравнение в квадрат, а второе — в куб, получим $\begin{cases}x+y+2\sqrt{xy}=81,\\ x+y+15\cdot\sqrt[3]{xy}=125.\end{cases}$ Вычтем из первого уравнения этой системы второе: $2\sqrt{xy}-15\cdot\sqrt[3]{xy}+44=0$. Положим $\sqrt[6]{xy}=z$; тогда $\sqrt{xy}=z^3$, $\sqrt[3]{xy}=z^2$ и приходим к уравнению $2z^3-15z^2+44=0$, имеющему единственный целочисленный корень $z=2$. Отсюда $\sqrt{xy}=8$, т. е. $xy=64$. Значит, $x+y=81-2\sqrt{xy}=65$. Итак, остается решить систему $\begin{cases}xy=64,\\ x+y=65,\end{cases}$ из которой находим $x_1=1$, $y_1=64$; $x_2=64$, $y_2=1$. ■

2.332. □ Из первого уравнения заключаем, что либо $x=y$, либо $x=y+1$. Возведя второе уравнение системы в шестую степень, получим $(x+y)^3-13(x+y)^2+48(x+y)-64=0$, откуда $x+y=8$. Следовательно, решения систем $\begin{cases}x+y=8,\\x=y\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=1\end{cases}$ и являются искомыми. Ответ: (4; 4), (4,5; 3,5). ■

2.333. □ Запишем первое уравнение в виде $\sqrt{x(x-y)}+\sqrt{y(x-y)}=3(\sqrt{x-y})^2$, откуда, разделив на $\sqrt{x-y}$, получим $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{x-y}$. Возведя это уравнение в квадрат, после упрощений придем к уравнению $\sqrt{xy}=4x-5y$. Снова возведем в квадрат: $xy=16x^2-40xy+25y^2$. Далее, разделив на xy, имеем $16\frac{x}{y}+25\frac{y}{x}-41=0$ или $16\left(\frac{x}{y}\right)^2-41\frac{x}{y}+25=0$. Итак, $x/y=25/16$ и $x/y=1$ (легко видеть, что $x=y$ не является решением системы). Следовательно, $y=(16/25)x$. Из второго уравнения системы находим $x^2=625/9$, т. е. $x=\pm 25/3$, и, значит, $y=\pm 16/3$. Сделав проверку, убеждаемся в том, что $x=-25/3$, $y=-16/3$ — посторонние корни. Ответ: (25/3; 16/3). ■

2.334. $(\sqrt{2}/4;\ -\sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4;\ \sqrt{2}/4)$.

2.335. □ Запишем первое уравнение в виде $u+v-12=-\sqrt{u^2-v^2}$. Возведя это уравнение в квадрат, получим $u^2+v^2+2uv+144-24u-24v=u^2-v^2$ или $v^2+uv-12u-12v+72=0$. Из второго уравнения системы находим $\sqrt{u^2-v^2}=12/v$. Подставив это выражение в первое уравнение системы, имеем $uv+v^2-12v+12=0$ или $v^2+uv=12v-12$. Таким образом, получаем систему $\begin{cases}v^2+uv-12u-12v+72=0,\\v^2+uv=12v-12,\end{cases}$ из которой находим $u=5$. Итак, $v^2+5v=12v-12$. Отсюда $v^2-7v+12=0$, т. е. $v_1=3$, $v_2=4$. Ответ: (5; 3), (5; 4). ■

2.336. $(8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13)$, $(8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13)$.

2.337. □ Сложив первое и второе уравнения, получим $3\sqrt{x-4}=-6+3\sqrt{z+4}$, откуда $\sqrt{x-4}=-2+\sqrt{z+4}$. Далее, умножив первое уравнение системы на -2 и сложив со вторым, имеем $-3\sqrt{y}=24+6\sqrt{z+4}$, откуда $\sqrt{y}=8-2\sqrt{z+4}$. Таким образом, $x-4=4-4\sqrt{z+4}+z+4$, т. е. $x=z-4\sqrt{z+4}+12$, и $y=64-32\sqrt{z+4}+4z+16$, т. е. $y=4z-32\sqrt{z+4}+80$. Подставив полученные для x и y выражения в третье уравнение системы, найдем $z=5$. Отсюда $x=5$, $y=4$. Ответ: (5; 4; 5). ■

2.338. □ Имеем $\sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=\sqrt[4]{x^2(x+y)-y^2(x+y)}=$
$=\sqrt[4]{(x+y)(x^2-y^2)}=\sqrt[4]{(x+y)^2(x-y)}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[4]{x-y}$. Обозначив $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt[4]{x-y}=v$, придем к системе $\begin{cases}u+v=8,\\uv=12.\end{cases}$ Следовательно, $u=6$, $v=2$ и $u=2$, $v=6$. Итак, остается решить системы $\begin{cases}\sqrt{x+y}=6,\\\sqrt[4]{x-y}=2\end{cases}$ и $\begin{cases}\sqrt{x+y}=2,\\\sqrt[4]{x-y}=6,\end{cases}$ откуда получаем ответ: (26; 10), (650; −646). ■

2.339. □ Имеем две системы
$$\begin{cases}\dfrac{ax+by}{bx+ay}=1,\\ \dfrac{x+1}{y}=4;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{ax+by}{bx+ay}=1,\\ \dfrac{x+1}{y}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Из первого уравнения обеих систем получаем, что $(a-b)\,x=(a-b)\,y$. Итак, если $a-b\neq 0$, то $x=y$, а значит, $x_1=1/3$, $y_1=1/3$ и $x_2=-4/3$, $y_2=-4/3$. Если же $a-b=0$, то система имеет бесконечное множество решений, представляющих собой координаты точек двух прямых $x-4y=-1$ и $4x-y=-4$. ■

2.340. □ Так как $\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2$, то $\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\sqrt{y}$. Сложив эти уравнения, получим $2\sqrt{x+\sqrt{y}}=2+\sqrt{y}$, откуда $4x+4\sqrt{y}=4+4\sqrt{y}+y$, т. е. $4x-y=4$. Далее, так как $\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1$, то $\sqrt{y+\sqrt{x}}+$ $+\sqrt{y-\sqrt{x}}=2\sqrt{x}$. Сложив эти уравнения, имеем $2\sqrt{y+\sqrt{x}}=1+2\sqrt{x}$, откуда $4y+4\sqrt{x}=1+4\sqrt{x}+4x$, т. е. $4x-4y=-1$. Наконец, из системы $\begin{cases}4x-y=4,\\ 4x-4y=-1\end{cases}$ находим $x=17/2$, $y=5/3$. ■

2.341. (1; 1; 1).

2.342. □ 1) Разделим на a обе части тождества $ax^3+bx^2+cx+d\equiv a\,(x-x_1)\times$ $\times(x-x_2)\,(x-x_3)$ и раскроем скобки. Выполнив приведение подобных членов, получим $x^3+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}x+\dfrac{d}{a}\equiv x^3-(x_1+x_2+x_3)\,x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\times$ $\times x-x_1x_2x_3$, откуда $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}$; $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$ — формулы обобщенной теоремы Виета для многочлена (и уравнения) третьей степени.

2) Имеем: $(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=2\,(x_1+x_2+x_3)=2\cdot\dfrac{20}{8}=5$, откуда $x_1+x_2+x_3=\dfrac{5}{2}$;

$$(x_1+x_2)\,(x_2+x_3)+(x_2+x_3)\,(x_3+x_1)+(x_3+x_1)\,(x_1+x_2)=\left(\frac{5}{2}-x_3\right)\left(\frac{5}{2}-x_1\right)+$$
$$+\left(\frac{5}{2}-x_1\right)\left(\frac{5}{2}-x_2\right)+\left(\frac{5}{2}-x_2\right)\left(\frac{5}{2}-x_3\right)=5;$$

$$(x_1+x_2)\,(x_2+x_3)\,(x_3+x_1)\equiv\left(\frac{5}{2}-x_3\right)\left(\frac{5}{2}-x_1\right)\left(\frac{5}{2}-x_2\right)=1.$$

Составляем уравнение $z^3-5z^2+5z-1=0$. Применяя разложение на множители, находим его корни: $z_1=1$, $z_2=2+\sqrt{3}$, $z_3=2-\sqrt{3}$. Для отыскания x_1, x_2, x_3 остается решить систему $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_2+x_3=2+\sqrt{3},\\ x_3+x_1=2-\sqrt{3}.\end{cases}$

Ответ: $x_1=1{,}5$, $x_2=0{,}5+\sqrt{3}$, $x_3=0{,}5-\sqrt{3}$. ■

2.343. □ Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного уравнения. Согласно обобщенной теореме Виета, находим $x_1x_2x_3=-6\sqrt{3}/3=-2\sqrt{3}$. Так как $x_1x_2=1$, то $x_3=-2\sqrt{3}$. Снова используя обобщенную теорему Виета, имеем x_1+x_2+ $+x_3=-2\sqrt{3}/3$, откуда $x_1+\dfrac{1}{x_1}-2\sqrt{3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, т. е. $3x_1^2-4\sqrt{3}x_1+3=0$. Отсюда получаем $x_1=\sqrt{3}$, $x_1'=\sqrt{3}/3$. Замечаем, что $x_1x_1'=1$ и, следовательно, $x_1'=x_2$. Ответ: $x_1=3$, $x_2=\sqrt{3}/3$, $x_3=-2\sqrt{3}$. ■

2.344. $x_1=a$, $x_2=1/a$, $x_3=1/2$.

2.345. □ Имеем

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)\ (x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}{x_1x_2x_3}=\frac{-ab}{-1}=ab. \ ■$$

2.346. □ Имеем $x_1=2x_2+0{,}5$. Таким образом, $8\,(2x+0{,}5)^3+4\,(2x+0{,}5)^2-$ $-34\,(2x+0{,}5)+15=0$ или $8\,(8x^3+6x^2+1{,}5x+0{,}125)+4\,(4x^2+2x+0{,}25)-$ $-34\,(2x+0{,}5)+15=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $64x^3+64x^2-48x=0$. Так как $x=0$ не является корнем исходного уравнения, то, сократив последнее уравнение на $16x$, имеем $4x^2+4x-3=0$, откуда $x=0{,}5$ и $x=-1{,}5$. Легко установить, что $x=-1{,}5$ — посторонний корень. Значит, $x_2=0{,}5$. Теперь остается найти другие корни: $x_1=1{,}5$, $x_3=-2{,}5$. ■

2.347. □ Пусть x_1, x_1q, x_1q^2 — корни данного уравнения. Тогда в силу обобщенной теоремы Виета имеем $x_1\cdot x_1q\cdot x_1q^2=x_1^3q^3=-c$ или $x_1q=-\sqrt[3]{c}$, откуда $x_2=-\sqrt[3]{c}$. ■

2.348. $x_1=1/8$, $x_2=-1/4$, $x_3=1/2$. ● Воспользоваться доказанным в задаче 2.347 утверждением и обобщенной теоремой Виета.

2.349. $x=-q$.

2.350. □ По условию, корнями данного уравнения являются числа x и $x+1$. Подставляя $x+1$ вместо x в уравнение, получаем $x^4-2x^3-5x^2+6x+6=0$. Корень x удовлетворяет как исходному, так и полученному уравнению, а значит, и их разности, т. е. уравнению $x^3-3x^2+2=0$. Поскольку сумма коэффициентов этого уравнения равна нулю, один из его корней равен 1. Разделив на $x-1$, получим $x^2-2x-2=0$. Оба корня $x_1=1+\sqrt{3}$ и $x_2=1-\sqrt{3}$ служат корнями данного уравнения. Два других корня получим прибавлением единицы к найденным корням: $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=2-\sqrt{3}$. ■

2.351. □ Данное уравнение можно записать в виде $(x+p)^3\,(x+q)=0$ или $(x^3+$ $+3px^2+3p^2x+p^3)\,(x+q)=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^4+(3p+q)\,x^3+(3p^2+3pq)\,x^2+(3p^2q+p^3)\,x+p^3q=0$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в данном и полученном уравнениях, приходим к системе $\begin{cases}3p+q=1,\\ 3p^2+3pq=-18,\\ 3p^2q+p^3=a,\\ p^3q=b.\end{cases}$ Из первых двух ее уравнений следует, что $2p^2-p-6=0$, т. е. $p=2$ и $p=-3/2$ (посторонний корень, так как p и q — целые числа). Далее находим $q=1-3p$, т. е. $q=-5$. Отсюда окончательно получаем $a=-52$, $b=-40$. ■

2.352. 1) $x^3-qx^2+prx-r^2=0$; 2) $x=\sqrt{2}$. **2.353.** $p=-60$, $q=36$.

2.354. □ Пусть x — корень уравнения $x+\dfrac{1}{x}=2\cos 40°$. Возведя это уравнение в квадрат, имеем $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4\cos^2 40°-2$ или $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2\cos 80°$. Снова возведя уравнение в квадрат, получим $x^4+\dfrac{1}{x^4}=2\cos 160°$. ■

2.355. □ Если уравнение имеет хотя бы одну пару корней, отличающихся только знаком, то на их отыскание не влияет присутствие в уравнении нечетных степеней переменной. Вычеркнув их, получим биквадратное уравнение $-x^4+x^2+2=0$. Решая его, находим $x^2=2$, откуда $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, и $x^2=-1$, что невозможно в области действительных чисел. Для отыскания третьего корня разделим данное уравнение на $-x^4+x^2+2$ и получим $-2x+1=0$, откуда $x_3=1/2$. ■

2.356. $x_1=2$, $x_2=-2$.

2.357. □ Согласно условию, корнями уравнения служат числа x и $-1/x$. Подставив вместо x в уравнение $-1/x$, получим $6x^3+17x^2+4x-12=0$. Корень x удовлетворяет одновременно исходному и полученному уравнениям, а следовательно, и разности между первым из них и удвоенным вторым, т. е. уравнению $-30x^2-25x+30=0$ или $6x^2+5x-6=0$. Отсюда $x_1=2/3$, $x_2=-3/2$. Учитывая, что $x_1x_2x_3=-1/2$, находим $x_3=1/2$. ■

2.358. □ Число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ есть корень уравнения первой степени $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$, коэффициенты которого не являются целыми. Возведя это уравнение в квадрат, получим уравнение $x^2-2\sqrt{2}x=1$, коэффициенты которого — не целые. Возведение в куб также не даст уравнения с целыми коэффициентами. Наконец, возведение в четвертую степень даст требуемое уравнение $x^4-10x^2+1=0$, одним из корней которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. ■

2.359. □ Умножив первое уравнение на 3 и вычтя из результата второе уравнение, получим $12x^2-20x+7=0$. Оно имеет корни $x=1/2$, $x=7/6$. Так как по условию существует общий корень двух заданных уравнений, то он будет корнем и последнего уравнения. Проверка показывает, что общим корнем двух заданных уравнений является лишь $x=1/2$. Разделив каждое из данных уравнений на $2x-1$, получим уравнения $x^2-2x+2=0$ и $3x^2-1=0$. Первое из них не имеет корней, корнями второго являются числа $x_{1,\,2}=\pm\sqrt{3}/3$. ■

2.360. $x=1+\lambda^{-1}$, где λ — действительное число, $\lambda\neq 0$.

2.361. □ Пусть x — корень второго уравнения; тогда число $2x$ должно удовлетворять первому уравнению. Поэтому $8x^3-24x^2-78x-10=0$. Вычитая это уравнение из второго уравнения, умноженного на 8, получим $32x^2-82x-390=0$. Можно проверить, что корень $x=5$ этого уравнения является также корнем и второго из данных уравнений, а $2x=10$ — корнем первого из них. Отсюда получаем:

$$x^3-6x^2-39x-10=(x-10)\,(x^2+4x+1)=0,\ \text{т. е. } x_1=10,\ x_{2,\,3}=-2\pm\sqrt{3};$$

$$x^3+x^2-20x-50=(x-5)\,(x^2+6x+10)=0,\ \text{т. е. } x=5.\ ■$$

2.362. $x=5$ и $x_1=10$, $x_{2,\,3}=\pm\sqrt{2}$.

2.363. □ Очевидно, что общий корень данных уравнений является корнем, например, и такого уравнения: $(x^4-x^3-22x^2+16x+96)-x\ (x^3-2x^2-3x+10)=0$. После преобразований получим уравнение $x^3-19x^2+6x+96=0$. Вычитая его из второго данного уравнения, приходим к уравнению $17x^2-9x-86=0$, имеющему корни -2 и $43/17$. Проверяем, что первый из них служит общим корнем данных уравнений. Тогда их можно записать в следующем виде: $(x+2)\ (x^3-3x^2-16x+48)=(x+2)\ (x-3)\ (x^2-16)=0$ и $(x+2)\ (x^2-4x+5)=0$. Отсюда получаем, что корнями первого уравнения являются числа $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=-4$, а корнем второго — число $x=-2$. ■

2.364. □ Необходимость. Пусть α и $-\alpha$ — корни уравнения, причем $\alpha\neq 0$. После подстановки их в уравнение получим тождества $\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c\equiv 0$ и $-\alpha^3+a\alpha^2-b\alpha+c\equiv 0$. Складывая и вычитая их, имеем $a\alpha^2+c\equiv 0$ и $\alpha^2+b\equiv 0$. Исключив α^2, находим $ab=c$.

Достаточность. Пусть известно, что $ab=c$. Используя это условие, запишем уравнение в виде $x^3+ax^2+bx+ab=0$ или $(x^2+b)\ (x+a)=0$, откуда $x_{1,\ 2}=\pm\sqrt{-b}$ (при $b<0$), $x_3=-a$. Итак, $x_1+x_2=\sqrt{-b}+(-\sqrt{-b})=0$. ■

2.366. □ Имеем $a/b=c/d=k$; тогда $a=bk$, $c=dk$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получаем $bkx^3+bx^2+dkx+d=0$. Отсюда $bx^2\ (kx+1)+d\ (kx+1)=0$ или $(kx+1)\ (bx^2+d)=0$, т. е. $x_1=-1/k=-b/a$, $x_{2,\ 3}=\pm\sqrt{-d/b}$. ■

2.367. □ Так как x_1^2, x_1x_2, x_2^2 — корни уравнения третьей степени, то $(x-x_1^2)\ (x-x_1x_2)\ (x-x_2^2)=x^3-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\ x^2+(x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3)\ x-x_1^3x_2^3=0$. Но

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=p^2-q;$

$x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3=x_1x_2\ (x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2=x_1x_2\ ((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)+x_1^2x_2^2=$
$=q\ (p^2-2q)+q^2=qp^2-q^2;\ x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3=q^3.$

Поэтому искомое уравнение имеет вид $x^3-(p^2-q)\ x^2+(p^2q-q^2)\ x-q^3=0$. ■

2.368. □ Положим $\sqrt{x^4+x-2}=z$; тогда $z^2+z-6=0$. Отсюда $z_1=2$, $z_2=-3$ (второй корень не подходит, так как $z\geqslant 0$). Таким образом, $\sqrt[4]{x^4+x-2}=2$, откуда $x^4+x-2=16$ или $x^4+x-18=0$. Замечаем, что $x=2$; тогда, разделив x^4+x-18 на $x-2$, получим уравнение $x^3+2x^2+4x+9=0$. Оно может иметь только отрицательные корни (так как все его коэффициенты положительны). Итак, $x=2$ — единственный положительный корень данного уравнения. ■

2.369. □ Так как α и β — корни уравнения, то $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ и $a\beta^2+b\beta+c=0$. Умножив первое уравнение на α^n, а второе — на β^n и сложив, получим $a\ (\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+b\ (\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+c\ (\alpha^n+\beta^n)=0$. Легко видеть, что если $S_n=\alpha^n+\beta^n$, то $S_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$; $S_{n+1}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$. Следовательно, искомое соотношение имеет вид $aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$. ■

2.370. $n=17$.

ГЛАВА 3

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

3.001. □ Искомые числа таковы: $k/5$; $k/3$; $k/20$; $0{,}15\cdot k/3=k/20$. По условию, $\frac{k}{3}-8=\frac{k}{5}+\frac{k}{20}+\frac{k}{20}$, откуда $k=240$. Ответ: 48; 80; 12; 12. ■

3.002. □ Пусть вклад составляет x руб. Тогда первый остаток равен $\frac{3x}{4}$; второй остаток $\frac{3x}{4}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3x}{4}-64\ 000=\frac{3x}{20}$. Следовательно, $\frac{3x}{4}-\frac{x}{3}-\frac{3x}{20}=64\ 000$, откуда $x=240\ 000$ (руб.). ■

3.003. 12; $24:18=16:12$. **3.004.** 180 000, 78 000 и 39 000 руб. **3.005.** 2850, 2250 и 1950 км. **3.006.** 40 и 30 л.

3.007. □ Площади участков равны x, y, $x-16$ (га). Согласно условию, $x=\frac{2}{5}(x+y-16+x)$ и $y:(x-16)=3/2:4/3$, откуда $y=\frac{9}{8}(x-16)$. Далее имеем $x=\frac{2}{5}\left(2x-16+\frac{9}{8}x-18\right)$ или $x=\frac{2}{5}\left(\frac{25x}{8}-34\right)$, откуда $x=\frac{272}{5}$. Теперь находим $y=\frac{9}{8}\left(\frac{272}{5}-16\right)=\frac{216}{5}$. Вся площадь составляет $\frac{544}{5}+\frac{216}{5}-$ $-16=136$ (га). ■

3.008. 500. **3.009.** 720 и 150.

3.010. □ Первоначально рабочие изготовляли за смену x и $72-x$ деталей, а затем $1{,}15x$ и $1{,}25(72-x)$ деталей. По условию, $1{,}15x+90-1{,}25x=86$; $0{,}1x=4$; $x=40$; $1{,}15\cdot 40=46$. Ответ: 46 и 40 деталей. ■

3.011. 10,26 и 11,6 ц. **3.012.** -220 и 264. **3.013.** 80; 100; 90. **3.014.** 240. **3.015.** 4/7, 8/21, 20/49.

3.016. □ Пусть x, y, z — площади участков. Тогда $x/y=6/4$, $y/z=4/3$, откуда $x=6k$, $y=4k$, $z=3k$. По условию, $(6k-4k)\cdot 18=72$, откуда $k=2$. Значит, площадь всех трех участков составляет $x+y+z=2(6+4+3)=26$ (га). ■

3.017. 105, 135 и 175 км. **3.018.** Серы 3 кг, селитры 19,5 кг, угля 2,5 кг. **3.019.** 20 скрипачей, 8 виолончелистов, 4 трубача. **3.020.** 280, 200, 220. **3.021.** 149 400 руб.

3.022. □ Пусть за 8 ч работы мастер изготовлял a деталей и зарабатывал b руб. Тогда расценка составляет b/a руб. за деталь, а производительность труда равна $a/8$ деталей в час. После увеличения производительности на $x\%$ мастер стал изготовлять $\frac{a}{8}+\frac{xa}{8\cdot 100}$ деталей в час. Поэтому за 7 ч он изготовил $\frac{7a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)$ деталей и заработал $\frac{7a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{b}{a}=\frac{7b}{8}\left(1+\right.$ $\left.+\frac{x}{100}\right)$ руб. Согласно условию, $\frac{7b}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)=1{,}05b$, откуда $x=20\%$. ■

3.023. На 7,1%.

3.024. □ Пусть зачетные нормы выполнили x юношей и $2x$ девушек. Таким образом, первоначальная численность команд составляет $x+48$ юношей и $2x+50$ девушек. По окончании первого дня соревнований выбыло $\frac{1}{6}(x+48)$ юношей и $\frac{1}{7}(2x+50)$ девушек. Позже еще выбыло из обеих команд одинаковое количество спортсменов, поэтому $48-\frac{1}{6}(x+48)=50-$ $-\frac{1}{7}(2x+50)$, откуда $x=24$. Итак, первоначальная численность команд — 72 и 98 человек. ■

3.025. 950 000, 400 000, 250 000, 300 000 руб. **3.026.** 233 000 руб. **3.027.** На 13,2%.

3.028. 5000 пар. **3.029.** На 38,8%. **3.030.** На 6%. **3.031.** 5. **3.032.** 1260, 1050, 945 тыс. руб. **3.033.** 50,150 и 200 г. **3.034.** 12,8 и 7 л. **3.035.** 2,5 кг. **3.036.** На 40%.

3.037. 40; 32; 24.

3.038. □ Составим следующую таблицу:

Фермер	Площадь, га	Урожайность, ц/га	Масса, ц
Первый	x	21	$21x$
Второй	$x-12$	25	$25(x-12)$

По условию, $25(x-12)-21x=300$, откуда $x=150$. Тогда $21x=3150$ (ц), а $25(x-12)=3450$ (ц). ■

3.039. 33. **3.040.** $(-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ и $(ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ л. **3.041.** На 45. **3.042.** 15 дм^2. **3.043.** 21. **3.044.** 8. **3.045.** 48 и 60. **3.046.** 175 и 450 кг. **3.047.** 20.

3.048. 100 км. **3.049.** 12 кг.

3.050. □ Пусть S — площадь парка, n — число равновеликих участков, Q — площадь участка. Тогда $S:n=Q$. Данными и искомыми значениями заполним таблицу в последовательности, указанной цифрами ①, ②, ..., ⑫ :

Парк	Первоначально			При новом разбиении		
	S	n	Q	S	n	Q
Первый	⑦ x	⑪ $\frac{108x}{110-x}$	⑨ $\frac{110-x}{108}$	① x	③ 75	⑤ $\frac{x}{75}$
Второй	⑧ $110-x$	⑫ $\frac{75(110-x)}{x}$	⑩ $\frac{x}{75}$	② $110-x$	④ 108	⑥ $\frac{110-x}{108}$

По условию, $\frac{108x}{110-x}=\frac{75(110-x)}{x}$, откуда $x=50$. Ответ: 50 и 60 га. ■

3.051. 38, 31, 5; 7 и 9. **3.052.** 6 и 10 мин. **3.053.** 18 и 24. **3.054.** Из 1,25 м.

3.055. 2160 млн. руб. **3.056.** $\pm 0,5$.

3.057. □ Пусть x — длина, а y — ширина площадки. Согласно теореме Пифагора, $x^2+y^2=185^2$. Кроме того, $(x-4)(y-4)=xy-1012$, откуда $xy-4(x+y)=xy-1028$; $x+y=257$; $y=257-x$. Решив квадратное уравнение $x^2+(257-x)^2-185^2=0$, находим $x_1=104$, $x_2=153$. Ответ: 100×149 м. ■

3.058. 40×50 м. **3.059.** $(\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a)/2$ и $(\sqrt{b^2+32a^2}+b+4a)/2$ м.

3.060. 3 см. **3.061.** 2,7 м. **3.062.** 10×20 см.

3.063. □ Пусть a и b — длины катетов; тогда $a-10+b-10$ — длина гипотенузы. Следовательно, $(a+b-20)^2=a^2+b^2$ и $\frac{ab}{2}=600$, откуда $a=40$ (см), $b=30$ (см), т. е. $A(40:0)$, $B(0:30)$. Находим угловой коэффициент прямой AB: $k=-\frac{3}{4}$. Значит, уравнение прямой AB имеет вид $y=-\frac{3}{4}x+30$, а уравнение окружности — вид $(x-10)^2+(y-10)^2=100$. Решение системы этих уравнений дает координаты точки P: $P(16;18)$. ■

3.064. □ Длина окружности колеса C, число оборотов n и расстояние s связаны формулой $Cn=s$. Таблицу значений этих величин заполним в порядке, указанном цифрами ①, ②, ..., ⑫ :

Колесо	До изменения			После изменения		
	C	s	n	C	s	n
Переднее	① x	③ 120	⑤ $\frac{120}{x}$	⑦ $\frac{5x}{4}$	⑨ 120	⑪ $\frac{120\cdot 4}{5x}$
Заднее	② y	④ 120	⑥ $\frac{120}{y}$	⑧ $\frac{6y}{5}$	⑩ 120	⑫ $\frac{120\cdot 5}{6y}$

Согласно условию, получим систему $\begin{cases} \frac{120}{x}-\frac{120}{y}=6, \\ \frac{96}{x}-\frac{100}{y}=4, \end{cases}$ откуда находим $x=4$ (м), $y=5$ (м). ■

3.065. 600 м. **3.066.** Можно увеличить на 2 дм. **3.067.** 4 и 6. **3.068.** 12, 16 и 20 Н. **3.069.** 2 и 26 Н.

3.070. □ Пусть годовой прирост массы x равен a; тогда, согласно условию, годовой прирост массы y равен $\frac{3a}{7}$. Имеем $a=0,4x$, $\frac{3a}{7}=0,5y \Rightarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{y}=\frac{7}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow x:y=35:12$. ■

3.071. ≈ 85 г. **3.072.** $1,5l/(b-a)$ м/с. **3.073.** 2500 руб; 550 кг. **3.074.** $(\sqrt{b^2k^2+4abk}-$ $-bk)/(2b)$. **3.075.** 12, 18, 24, 30 руб. **3.076.** 200 руб. **3.077.** 900 и 1350 тыс. руб. **3.078.** 75 000 и 100 000 руб. **3.079.** 85 кг. **3.080.** 120 кг и 4 млн. 860 тыс. руб; 180 кг и 7 млн. 560 тыс. руб. **3.081.** 2.

3.082. □ Пусть искомое число имеет вид $10x+y$. Тогда, по условию, $x+y=12$ (1) и $10x+y+36=10y+x$, т. е. $x-y+4=0$. (2) Складывая (1) и (2), получим $2x=8$, откуда $x=4$, а $y=8$. Ответ: 48. ■

3.083. 32. **3.084.** 21 и 12. **3.085.** 24. **3.086.** 64.

3.087. □ Пусть искомое число есть $10x+y$. Тогда, согласно условию, имеем систему $\begin{cases} 10x+y-3=4\,(x+y), \\ 10x+y-5=3xy. \end{cases}$ Решив ее, получим $x=2$, $y=3$. Ответ: 23. ■

3.088. 1632. **3.089.** 71. **3.090.** 24.

3.091. □ Пусть искомое трехзначное число имеет вид $100x+10y+2$; тогда после перенесения цифры 2 оно примет вид $200+10x+y$ (1). По условию, $200+10x+y-(100x+10y+2)=18$, откуда $10x+y=20$. Подставив это выражение в (1), получим $200+20=220$. Итак, первоначальное трехзначное число есть 202. ■

3.092. □ Пусть задумано число x. Далее, следуя тексту условия, получим числа $10x+7$, $10x+7-x^2$ и остаток $\frac{25}{100}\,(10x+7-x^2)$. Тогда $\frac{1}{4}\,(10x+7-x^2)-x=0$ или $x^2-6x-7=0$. Годится лишь значение $x=7$. ■

3.093. 32. **3.094.** 85 714. **3.095.** 54. **3.096.** 4/7; 8/21; 12/35. **3.097.** 75 и 60. **3.098.** $3\times$ $\times 3-4$. **3.099.** 5/9 и 10/9. **3.100.** 60 км. **3.101.** 2 и 6 ч. **3.102.** 65 и 100 км/ч. **3.103.** 150 км. **3.104.** 3×4 км. **3.105.** 30 и 60 км/ч. **3.106.** 88 км/ч. **3.107.** 48 мин; 25 км/ч. **3.108.** 32 и 36 км/ч. **3.109.** 60 и 63 км/ч.

3.110. □ Пусть t — намеченное время, v_1 и v_2 — скорости; тогда $\frac{s}{v_1}=t-n$, (1)

$\dfrac{s}{v_2}=t+3n$, (2) $v_1-v_2=r$. Вычитая (1) из (2), получим $s\left(\dfrac{1}{v_2}-\dfrac{1}{v_1}\right)=4n$ или

$(v_1-v_2)\,s=4nv_1v_2$, откуда $v_1v_2=\dfrac{sr}{4n}$. Теперь заметим, что решением системы $\begin{cases} v_1+(-v_2)=r, \\ v_1\,(-v_2)=-\dfrac{sr}{4n} \end{cases}$ являются корни $z_1=v_1$ и $z_2=-v_2$ квадратного уравнения

$z^2-rz-\dfrac{sr}{4n}=0$. В результате получаем ответ: $\dfrac{nr+\sqrt{nr\,(nr+s)}}{2n}$ и $\dfrac{-nr+\sqrt{nr\,(nr+s)}}{2n}$ км/ч. ■

3.111. 8 км; 4 км/ч. **3.112.** $s\,(a-b)/b$ и $s\,(a-b)/a$ км/ч.

3.113. □ Пусть t — время (в минутах), за которое вторая частица догонит первую. Расстояние, пройденное второй частицей, равно сумме t членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=3$, $d=0{,}5$; следовательно, $s=\dfrac{2a_1+d\,(t-1)}{2}\,t=\dfrac{6+0{,}5\,(t-1)}{2}\,t$. То же расстояние, пройденное первой частицей, составит $5\,(6{,}8+t)=34+5t$. Итак, $\dfrac{6+0{,}5\,(t-1)}{2}\,t=34+5t$, откуда $t=17$ (мин). ■

3.114. На середине пути; 3 ч.

3.115. □ Примерный график движения изображен на рис. Р.3.1. Пусть t — время (в часах), за которое второй турист догонит первого. Так как $v_{\text{вел}}=16$ км/ч, $v_{\text{мот}}=56$ км/ч, то $s_{\text{вел}}=(2{,}5+t)\,16$, $s_{\text{мот}}=56t$. Отсюда $56t=16t+40$, т. е. $t=1$ (ч). Итак, $s=56$ км. ■

3.116. 3 ч 20 мин. **3.117.** 850 км/ч.

3.118. □ Пусть скорость поезда до задержки равна x км/ч, а после нее $(x+15)$ км/ч. Тогда (рис. Р.3.2) $AB=\dfrac{x}{5}$, $CE=60$, $CD=60-\dfrac{x}{5}$, $BD=\dfrac{60-\dfrac{x}{5}}{x}$,

$AE=\dfrac{60}{x+15}$. Так как $BD=AE$, то $\dfrac{60-\dfrac{x}{5}}{x}=\dfrac{60}{x+15}$, откуда $x=60$ (км/ч). ■

3.119. 56 и 84 км/ч.

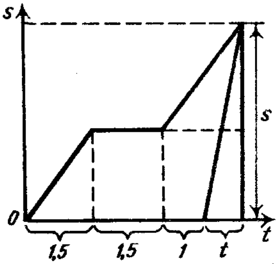

Рис. Р.3.1

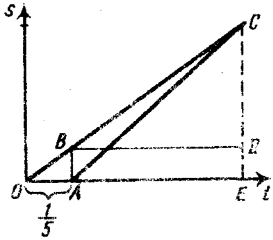

Рис. Р.3.2

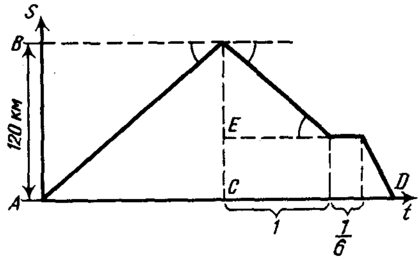

Рис. Р.3.3

3.120. □ По условию, $AC=CD$ (рис. Р.3.3). Имеем $AC=\frac{120}{x}$, где x — первоначальная скорость; $CD=1+\frac{1}{6}+\frac{120-x}{x+6}$. Итак, $\frac{120}{x}=\frac{7}{6}+\frac{120-x}{x+6}$, откуда $x=48$ (км/ч). ■

3.121. 20 км/ч. **3.122.** 14 и 28 км/ч. **3.123.** 5 и 3 км/ч.

3.124. □ Таблицу значений скорости, пути и времени заполним в порядке, указанном цифрами ①, ②, ..., ⑫ :

Турист	До встречи			После встречи		
	скорость, км/ч	время, ч	путь, км	скорость, км/ч	время, ч	путь, км
Пешеход	① x	③ 2	⑤ $2x$	⑦ x	⑪ $\frac{40-2x}{x}$	⑨ $40-2x$
Велосипедист	② $20-x$	④ 2	⑥ $40-2x$	⑧ $20-x$	⑫ $\frac{2x}{20-x}$	⑩ $2x$

По условию, $\frac{40-2x}{x}-\frac{2x}{20-x}=\frac{15}{2}$, откуда $x=4$ (км/ч). Ответ: 4 и 16 км/ч. ■

3.125. 1 ч 40 мин и 2 ч 5 мин. **3.126.** 12 и 10,5 км/ч. **3.127.** 4 и 8 ч. **3.128.** 140 км. **3.129.** 18 и 12 км/ч. **3.130.** 84 км; 6 и 4 км/ч. **3.131.** Через 10 с. **3.132.** $l(a+b)/(2ab)$ и $l(a-b)/(2ab)$ м/с. **3.133.** Через 3 ч 20 мин. **3.134.** $35/\pi\approx$ ≈ 11 м. **3.135.** 3 км/ч. **3.136.** 4 км/ч. **3.137.** $(3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2})/2$ км/ч. **3.138.** 68/3 км/ч. **3.139.** В 14 ч. **3.140.** 5/12 км/ч; 2 и 3 ч. **3.141.** $\sqrt{v(v-s)}$, где $v>s$. **3.142.** 420 и 400. **3.143.** 475, 480 и 375 ц.

3.144. □ Время (t), количество работы, выполняемой в единицу времени, т. е. производительность труда (W), и весь объем работы (V) связаны соотношением $V=Wt$. Примем $V=1$ и заполним следующую таблицу:

Станок	Время, дни	Объем работы	Производительность труда
Первый	x	1	$\frac{1}{x}$
Второй	$x-3$	1	$\frac{1}{x-3}$
Оба вместе	20	3	$\frac{3}{20}$

Так как при совместной работе станков их производительности складываются, то $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{20}$, откуда $x=15$. Ответ: 15 и 12 дней. ■

3.145. 12 и 24 ч. **3.146.** Десяти. **3.147.** 24 и 30 г.

3.148. □ Весь объем работы примем за 1. Производительность труда первой машины равна 1 (за 1 ч), второй $1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$ (за 1 ч). Работая вместе $\frac{1}{3}$ ч, они выполнят $\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{9}$ всей работы. Тогда на долю одной второй машины останется $\frac{2}{9}$ работы, для чего потребуется $\frac{2}{9}:\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$ (ч). Ответ: 10 мин. ■

3.149. 20 и 30 ч. **3.150.** 3. **3.151.** За 3 ч 45 мин. **3.152.** 8 и 9,6. **3.153.** 3 ч. **3.154.** 15.

3.155. 45 ч. **3.156.** $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ дней; должно быть $b>a$. **3.157.** 40 дней; 25%. **3.158.** За 6, 8 и 12 мин. **3.159.** За 132 и 110 мин.

3.160. Через 4 ч. **3.161.** 450 м^3. **3.162.** На 56/3, 14 и 24 мин. **3.163.** За $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ и $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин.

3.164. □ В целлюлозной массе содержится $0{,}85\cdot 500=425$ кг воды. Пусть выпарено x кг воды; тогда получим $425-x=0{,}75(500-x)$, откуда $x=200$ (кг). ■

3.165. 70 кг. **3.166.** 13,5 кг. **3.167.** 3165 г; $\approx 79{,}1\%$. **3.168.** 187,5 кг. **3.169.** 150 и 450 г. **3.170.** 280 и 175%.

3.171. □ Пусть x — вместимость первой бочки; тогда вместимость второй равна $\frac{3}{4}x$, а третьей $\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{7}{12}x$. По условию, $\frac{7}{12}x+50=x$, откуда $x=120$. Итак, вместимости бочек составляют 120, 90 и 70 ведер. ■

3.172. 13, 7 и 4 л.

3.173. □ По условию, $2V_A=V_B+V_C$ и $5V_B=V_A+V_C$. Пусть $V_A=xV_C$ и $V_B=yV_C$. Тогда получим систему $\begin{cases}2x-y=1,\\ -x+5y=1;\end{cases}$ откуда $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{V_C}{V_A+V_B}=\frac{1}{x+y}=1$. ■

3.174. 116 000 руб. **3.175.** 12; 8; 3; 2. **3.176.** 18.

3.177. 3. ● **Записать условие в виде системы трех уравнений. Из первых двух уравнений выразить x/z и y/z через k, а затем подставить полученные выражения x/z и y/z в третье уравнение и вычислить искомое значение k.**

3.178. На первом месте третий рабочий, на втором — второй, на третьем — первый. Количества выработанной ими продукции относятся, как $5:4:3$. **3.179.** $\approx$через 55 лет.

3.180. □ Пусть было m попаданий, а значит, $n-m$ промахов. Тогда $5m-3(n-m)=0$ или $8m=3n$, откуда $m=3n/8$. Так как m и n — натуральные числа, то n должно быть кратно восьми. В промежутке $10<n<20$ пригодно лишь значение $n=16$. Итак, произведено 16 выстрелов, из которых 6 удачных. ■

3.181. 62 м^3. **3.182.** 100 ц. **3.183.** $a(\sqrt{s}+\sqrt{r})/(\sqrt{s}-\sqrt{r})$ дней, где $s>r$. **3.184.** 10 и 15 ч или по 12 ч. **3.185.** 25 шариков и 16 колец или 16 шариков и 25 колец. **3.186.** 200 и 140 ч.

3.187. □ Пусть масса перевезенного груза составляет x т, а число машин равно n. По условию, $x=\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\right)(n+4)$ или $n^2+4n-8x=0$, откуда $n=2\left(-1+\sqrt{1+2x}\right)$ (n — натуральное). В интервале $55<x<64$ подходит только $x=60$. Тогда $n=2(-1+11)=20$. Итак, было 24 машины, на каждую из которых грузили по $60:24=2{,}5$ т. ■

3.188. 11 лип и 5 берез. **3.189.** 12. **3.190.** 28 июня.

3.191. □ Пусть получено x т творога жирностью 15,5%; тогда останется $1-x$ т сыворотки жирностью 0,5%. Следовательно, в 1 т молока содержится $\frac{15{,}5x}{100}+\frac{0{,}5(1-x)}{100}=\frac{15x+0{,}5}{100}$ т жира. По условию, $\frac{15x+0{,}5}{100}=\frac{5}{100}$, откуда $x=0{,}3$ (т). ■

3.192. На 20 досках. **3.193.** $\approx 41{,}4\%$. **3.194.** 20%. **3.195.** 27,75. **3.196.** 35 и 45 кг.

3.197. 4:1. **3.199.** Немного не покроются.

3.200. □ Пусть к стороне квадрата примыкает n кругов; тогда всего имеется n^2 кругов. К стороне треугольника примыкает $n+14$ кругов; значит, в треугольнике содержится $1+2+\ldots+(n+14)=\frac{(15+n)(n+14)}{2}$ кругов. По условию, $n^2=\frac{(15+n)(n+14)}{2}$, откуда $n=35$. Итак, каждая фигура содержит по 1225 кругов. ■

3.201. $D=(L^2+H^2-Hd)/H$.

3.202. □ Длина пути, пройденного точкой, равна сумме длин отрезков OA и $AB=a$ (рис. Р.3.4). Имеем $OA=\frac{a}{\sin\alpha}$ или $OA=\frac{b}{\sin(60°-\alpha)}$. Отсюда находим:

$$\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{b}{a};\qquad \frac{\sin 60°\cos\alpha-\cos 60°\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{a};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{2}=\frac{b}{a};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{2b+a}{a\sqrt{3}}.$$ Используя формулу

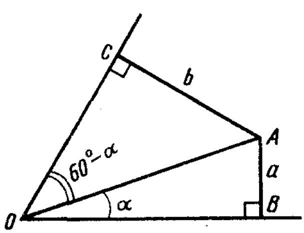

Рис. Р.3.4

$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, получим $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}$.

Итак искомая длина составляет $a+\frac{a}{\sin\alpha}=a+2\cdot\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. ■

3.203. $1\leqslant h\leqslant 1{,}4\ldots$.

3.204. □ Пусть x, y, z — числа зубцов трех шестеренок, причем $x>y>z$ и $x+y+z=60$ (1). Так как шестеренки сцеплены, то за время их вращения придет в соприкосновение одинаковое число зубцов каждой шестеренки, т. е. $10z=5y=4x-20$ (2). Решив систему уравнений (1), (2), находим $x=30$, $y=20$, $z=10$. ■

3.205. 300 и 600. **3.206.** 20 и 30. **3.207.** 9 и 2.

3.208. □ По условию, $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$, т. е. $3d^2+2ad-a^2=0$. Пусть $d=ak$ $(k>0)$; тогда $3a^2k^2+2a^2k-a^2=0$, откуда $3k^2+2k-1=0$. Годится лишь корень $k=\frac{1}{3}$. Находим искомые отношения: $\frac{a+d}{a}=1+\frac{d}{a}=\frac{4}{3}$; $\frac{a+2d}{a}=1+\frac{2d}{a}=\frac{5}{3}$. Ответ: 3:4:5. ■

3.209. $a+b-c$. **3.210.** $vd\,(a-b)$ м/с.

3.211. Через 7 с после начала падения первого тела. ● Воспользоваться известной из физики формулой $s=4{,}9t^2$.

3.212. После пяти ударов.

3.213. Через 5 с; за 0,5 м до линии поля. ● Воспользоваться формулой $s=vt+at^2$, где v и a — постоянные. Их значения можно вычислить из следующих условий: для мяча $s\,(1)=4$, $s\,(2)=7{,}25$; для футболиста $s\,(1)=3{,}5$, $s\,(2)=7{,}5$. Вместо указанной формулы можно использовать также формулу суммы n членов арифметической прогрессии, полагая, что искомое число $t=n$ — целое.

3.214. В каждом куске было по 5,6 м; 6750 и 4500 руб. **3.215.** 45, 36 и 30 м.

3.216. □ Пусть было куплено x красных и y синих карандашей. По условию, $27x+23y\leqslant 940$ и $y-x\leqslant 10$. Построим прямые $27x+23y=940$ (1) и $y-x=10$ (2). Из рис. Р.3.5 видно, что эти прямые пересекаются в точке A, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1) и (2), и при этом достигается максимально возможная сумма $x+y$. Решив систему (1), (2) и учитывая, что числа x и y — натуральные, получаем ответ: 14 красных и 24 синих карандаша. ■

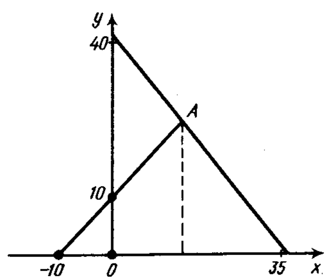

Рис. Р.3.5

3.217. 180 долларов. **3.218.** 15 или 95. **3.219.** 824 и 428.

3.220. □ Искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z образуют геометрическую прогрессию, т. е. $xz=y^2$ (1). Согласно условию, имеем $100z+10y+x=100x+10y+z-594$, откуда $x-z=6$ (2); $10y+z=10z+y+18$, откуда $y-z=2$ (3). Системе уравнений (1), (2), (3) удовлетворяют $x=8$, $y=4$, $z=2$. Искомое число есть 842. ■

3.221. 964. **3.222.** 13 и 63.

3.224. □ По условию, $x\,(x+10)-40-22=39x$, где x — искомый меньший множитель. Отсюда находим $x=31$ и $x+10=41$. ■

3.225. 53. **3.226.** 16 и 52.

3.227. □ Пусть было задумано число x; тогда, приписав к нему справа цифру y, получим число $10x+y$. Согласно условию, $10x+y-x^2=8x$, откуда $x^2-2x-y=0$, т. е. $x=1\pm\sqrt{1+y}$. Возможные значения y таковы: 0; 3; 8. Следовательно, задуманное число есть 2, или 3, или 4. ■

3.228. 50. **3.230.** 42 и 35. **3.231.** 12 и 1232.

3.232. □ Первоначальное шестизначное число имеет вид $2\cdot 10^5+x$. После перенесения цифры 2 на последнее место получим число $10x+2$. Согласно условию, $10x+2=3\,(2\cdot 10^5+x)$, откуда $x=85\,714$. Итак, первоначальное число есть 285 714. ■

3.233. 21 и 10. **3.234.** $\sqrt[k-1]{k}$. **3.235.** 4/15.

3.236. □ На рис. Р.3.6 изображены графики движения поездов до изменения скоростей. Находим $\operatorname{tg}\angle MCN=v^{(0)}_{\text{пас}}=288:3{,}2=90$ (км/ч). Пусть $v^{(0)}_{\text{тов}}=x$ км/ч; тогда $AB=NL=xt$ км; $CD=90\,(t-3{,}2)=xt$, откуда

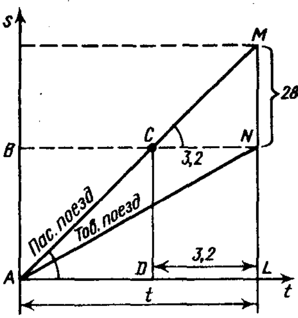

Рис. Р.3.6

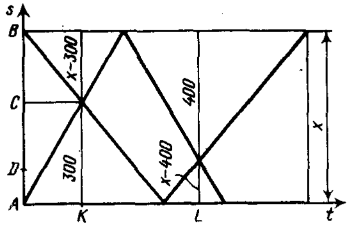

Рис. Р.3.7

$t=288/(90-x)$ (1). После изменения скоростей имеем $v^{(1)}_{пас}=100$ км/ч, $v^{(1)}_{тов}=x+10$ км/ч. По условию, $\frac{xt}{x+10}-\frac{xt}{100}=2{,}4$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2), получим $x=50$ км/ч, $t=7{,}2$ ч. Таким образом, $AB=xt=50\cdot 7{,}2=360$ (км). ■

3.237. □ На рис. Р.3.7 изображены графики бега двух спортсменов. Пусть $AB=x$ м, C и D — точки первой и второй встреч. Если v_1 и v_2 — скорости первого и второго спортсмена, то $\frac{300}{v_1}=\frac{x-300}{v_2}$ (1). За время, прошедшее между встречами (KL), спортсмены пробежали: первый $(x-300)+400=x+100$ м; второй $300+(x-400)=x-100$ м. Следовательно, $\frac{x+100}{v_1}=\frac{x-100}{v_2}$ (2). Из (1) и (2) получаем $\frac{x+100}{300}=\frac{x-100}{x-300}$, откуда $x=500$ (м). ■

3.238. 40 и 50 км/ч. **3.239.** 80 км. **3.240.** 100 и 60 км/ч. **3.241.** 3 ч 40 мин и 2 ч 12 мин. **3.242.** Вышедшего из B. **3.243.** 60 км/ч. **3.244.** 16 км/ч. **3.245.** 3,25; 31,25 и 32,5 км. **3.246.** 1375 км.

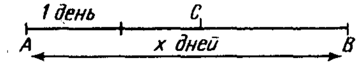

Рис. Р.3.8

3.247. □ Пусть отрезок AB (рис. Р.3.8) изображает весь путь юноши и количество дней (x), за которые он должен проехать его при норме v км в день. По условию, отрезок времени AC на 1 больше половины отрезка времени CB; следовательно, $AC-1=\frac{CB}{2}$ или $x-CB-1=\frac{CB}{2}$, откуда $CB=\frac{2x-2}{3}$ дней. Примем за 1 путь, изображенный отрезком CB. Тогда, согласно первому варианту, $\frac{2x-2}{3}(v+h)=1$, а согласно второму, $\left(\frac{2x-2}{3}-1\right)v+(v+2h)\cdot 1=1$. Исключая из этих двух уравнений v, находим $x=4$. ■

3.248. 2/3. **3.249.** Через 50 мин. **3.250.** 6, 9 и 12 км/ч. **3.251.** 100 км/ч.

3.252. □ Графики движения велосипедистов изображены на рис. Р.3.9. Выразим пройденные ими расстояния: для первого $AB=\left(\frac{1}{6}+x\right)a$; для третьего

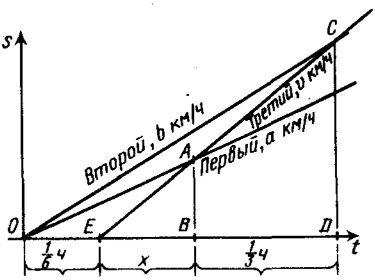

Рис. Р.3.9

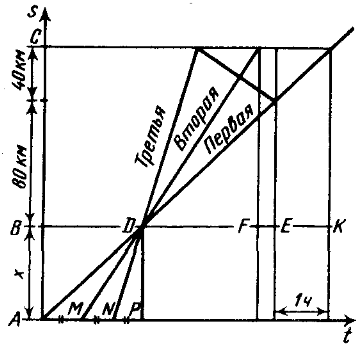

Рис. Р.3.10

$AB = x\text{v}$, где v — искомая скорость; $CD = \left(x + \frac{1}{3}\right)\text{v}$; для второго $CD = \left(\frac{1}{6} + x + \frac{1}{3}\right)b$. Имеем систему уравнений относительно x и v:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6} + x\right)a = x\text{v}, \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)b = \left(x + \frac{1}{3}\right)\text{v}. \end{cases}$$

Исключив x, находим $\text{v} = (a + \ \pm 3b + \sqrt{a^2 - 10ab + b^2})/4$ км/ч. ■

3.253. а) 3 км/ч; б) 4 км/ч; в) 5 км/ч. **3.254.** 8 ч 15 мин; 8 ч 53 мин; 9 ч 16 мин; 10 ч 01 мин. **3.255.** 3 км/ч. **3.256.** За 4 дня. **3.257.** 105 м. **3.258.** 1 км/ч.

3.259. $5 < \text{v} < 15$. ● Принять $AB = BC$ за 1 и решить неравенство $\frac{1}{\text{v}-5} + \frac{1}{\text{v}+5} > \frac{1}{5}$, где $\text{v} > 5$.

3.260. $\text{v} = 50$ км/ч. ● Условие задачи равносильно тому, что встречный поезд стоит, а пассажир мчится мимо него со скоростью, равной $(\text{v}+40)$ км/ч, где v — искомая скорость.

3.261. 75,6 км/ч; 147 м.

3.262. $2ab/(a+b)$; $2ab/(3b-a)$;
$2ab/(a+b)$; $2ab/(3a-b)$ м/мин, где $b/3 < a < 3b$. **3.263.** 22/15 м/с.

3.264. □ Пусть v_1, v_2, v_3 — скорости автомашин. Сравним промежутки времени (рис. Р.3.10), выразив их через отношение пути к скорости: $AP = x/\text{v}_1$, $MP = x/\text{v}_2$, $NP = x/\text{v}_3$. Согласно условию, $\frac{x}{\text{v}_1} - \frac{x}{\text{v}_2} = \frac{x}{\text{v}_2} - \frac{x}{\text{v}_3}$, откуда $\frac{1}{\text{v}_1} + \frac{1}{\text{v}_3} = \frac{2}{\text{v}_2}$ (1). Далее, $DE = 80/\text{v}_1$ и $DE = (80+40)/\text{v}_3$, откуда $80/\text{v}_1 = 120/\text{v}_3$ (2); $DK = 120/\text{v}_1$; $DF = 120/\text{v}_2$, откуда $\frac{120}{\text{v}_1} - \frac{120}{\text{v}_2} = 1$ (3). Решив систему уравнений (1), (2), (3), находим $\text{v}_1 = 30$ км/ч. ■

3.265. В $(\sqrt{5}+1)/2$ раз. **3.266.** Через 88 с. **3.267.** 240 км. **3.268.** 80 км/ч. **3.269.** 270 км. **3.270.** 3 м/с.

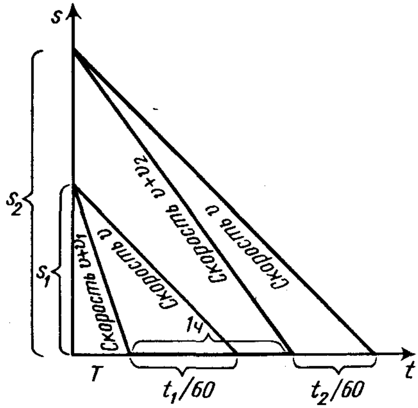

Рис. Р.3.11

3.271. □ Графическое изображение условий представлено на рис. Р.3.11. Имеем $s_1=(v+v_1)\,T=v\left(T+\dfrac{t_1}{60}\right)$; $s_2=(v_1+v_2)\,(T+1)=v\left(T+1+\dfrac{t_2}{60}\right)$. После упрощений и исключения T получаем $v=\dfrac{60v_1v_2}{v_1t_2-v_2t_1}$ км/ч. ■

3.272. 100 км/ч. **3.273.** Первоначально оба шли с одной скоростью 3 км/ч. **3.274.** 24 мин. **3.275.** 196 км; 84 км/ч. **3.276.** $(c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ и $(-c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ км/ч. **3.277.** 1/80 и 1/90. **3.278.** 12 или 60°. **3.279.** 12 и 3 м/с; 360 м. **3.280.** 1 ч $5\dfrac{5}{11}$ мин. **3.281.** Через $43\dfrac{7}{11}$ мин. **3.282.** 3 и 45 км/ч. **3.283.** 1 ч 21 мин; 1 ч 20 мин; 6 км.

3.284. □ Пусть l — путь по неподвижному эскалатору, $v_{эск}$ — скорость эскалатора, $v_{монт}$ — скорость движения монтера по неподвижному эскалатору. Тогда $l/v_{монт}=42$, $l/(v_{монт}+v_{эск})=24$. Требуется найти $l/v_{эск}$. Имеем $\dfrac{v_{монт}}{l}=\dfrac{1}{42}$, $\dfrac{v_{монт}}{l}+\dfrac{v_{эск}}{l}=\dfrac{1}{24}$; $\dfrac{v_{эск}}{l}=\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{56}$, откуда $\dfrac{l}{v_{эск}}=56$ с. ■

3.285. $0<v\leqslant 20$ км/ч.

3.286. □ Весь объем работы примем за единицу. Пусть первый механизм выполняет задание за x ч, а второй — за y ч. Так как при совместной работе мощности (производительности труда) складываются, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30},\\[2mm] 1-6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{40}{y}\end{cases}$$

Решив ее, находим $x=75$ ч, $y=50$ ч. ■

3.287. 5. **3.288.** Больше на 1 ч. **3.289.** 16 и 10 ч. **3.290.** 10 и 8 ч. **3.291.** $2a$. **3.292.** 20, 30 и 24 ч. **3.293.** За 15 и 7,5 дней. **3.294.** $0{,}4an/(11-n)$; $0{,}24an\,(n-9)$; $n=10$.

3.295. □ Весь объем работы примем за единицу. Пусть для ее выполнения в одиночку крану большей мощности нужно x дней, крану меньшей мощности — y дней, а при совместной работе одного крана большей и одного крана меньшей мощности — z дней. Производительность труда соответственно равна $1/x$, $1/y$ и $1/z$. По условию, $\frac{8}{x}+\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{y}\right)3=1$; $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{4,5}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Решив эту систему, находим $x=24$, $y=36$, $z=14,4$. Ответ: за 14,4 ч. ■

3.296. За 20 и 30 ч.

3.297. Значения искомых и заданных величин запишем в форме таблицы:

Труба	Время, ч	Вместимость	Производительность труда
Подающая	x	1	$\frac{1}{x}$
Отводящая	$x+2$	1	$\frac{1}{x+2}$
Обе вместе	8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$

По условию, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{24}$, откуда $x=6$. Ответ: за 6 и 8 ч. ■

3.298. 60 и 90 $м^3$. **3.299.** 65 и 20 $м^3$. **3.300.** 4 и 6 ч. **3.301.** 20 и 60%. **3.302.** 5 и 11%. **3.303.** 9 и 10 г. **3.304.** 40 и 100 т. **3.305.** 170 кг.

3.306. □ Пусть взято x частей первого металла и y частей второго. Тогда $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y=\frac{17}{44}(x+y)$, откуда $y=\frac{35}{9}x$. Ответ: 9 и 35 частей. ■

3.307. $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$ кг.

3.308. □ Первоначально в сосуде содержалось $16\cdot 8/100=32/25$ л кислорода. Выпущенные x л смеси содержат $16x/100=4x/25$ л кислорода. Теперь в сосуде на 8 л смеси приходится $(32-4x)/25$ л кислорода, что составляет $(16-2x)$%. Вторично выпущенные x л смеси содержат $(16-2x)\,x/100=$ $=(8-x)\,x/50$ л кислорода. Согласно условию, $\frac{32-4x}{25}-\frac{(8-x)\,x}{50}=9\cdot\frac{8}{100}$, откуда $x_1=2$, $x_2=14$. Ответ: 2 л. ■

3.309. □ Примеси составляют $\frac{1}{5}$ раствора. После первой фильтрации останется $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ примеси, а после k-й фильтрации — $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$. По условию, $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\leqslant$ $\leqslant 10^{-4}$; $-(k+1)\lg 5\leqslant -4$, откуда $k\geqslant 4,7$. Ответ: 5 фильтров. ■

3.310. □ Пусть 1 кг меда получается из x кг нектара. После удаления воды из нектара останется 300 г прочих веществ на каждый килограмм, а после удаления воды из меда — 830 г на килограмм. Имеем $300x=830$, откуда $x\approx 2,77$ (кг). ■

3.311. □ Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ — время, затраченное соответственно на решение первой, второй, ..., $(n-1)$-й, n-й задачи, а T — время, затраченное на решение всех n задач. Тогда, согласно условию, $T-t_1=63,5$ (1); $T-t_n=127$

(2); $T-t_1-t_2-t_{n-1}-t_n=30$ (3), где $T=\frac{t_1-t_nq}{1-q}$, $t_n=t_1q^{n-1}$. Из (1) и (2) получим $q(t_1-t_n)=63{,}5\,(1-q)$ (4), $t_1-t_n=127\,(1-q)$ (5), откуда $q=1/2$. Учитывая это, запишем уравнение (3) так: $2t_1-t_n-t_1-\frac{1}{2}t_1-2t_n-t_n=30$, откуда $t_1-8t_n=60$ (5). Теперь из (6) и (4) находим $t_1=64$, $t_n=1/2$. Наконец,

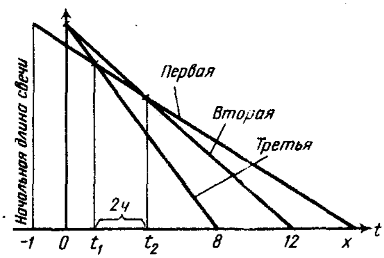

Рис. Р.3.12

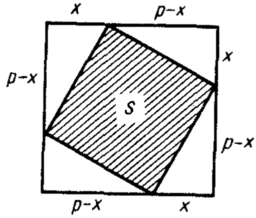

Рис. Р.3.13

из уравнения $\frac{1}{2}=64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ получим $n=8$. Ответ: 8 задач; 127,5 мин. ■

3.312. 16 ч. ● Начальную длину каждой свечи принять за 1 и, считая процесс горения равномерным, представить его графически (рис. Р.3.12). Скорости горения свечей: $v_{\text{I}}=x:1$, $v_{\text{II}}=12:1$, $v_{\text{III}}=8:1$. Искомое время: $x+1$ ч.

3.313. □ Пусть масса одной части камня равна x; тогда масса другой части равна $p-x$. По условию, $\frac{p^2}{x^2+(p-x)^2}=k$, откуда $x=\frac{p\left(k+\sqrt{k\,(2-k)}\right)}{2k}$ (карат), $p-x=\frac{p\left(k-\sqrt{k\,(2-k)}\right)}{2k}$, $k\leqslant 2$. Будем интерпретировать стоимость всего камня как площадь (p^2) квадрата с длиной стороны p единиц (рис. Р.3.13), а суммарную стоимость двух частей камня — как площадь (S) вписанного квадрата. Имеем $S(x)=p^2-2x\,(p-x)$. Функция $S(x)$ достигает наибольшего значения при $x=p/2$. Отсюда находим $k=2$. Итак, наибольшая потеря в стоимости бриллианта имеет место тогда, когда массы обеих его частей равны. ■

3.314. 6400 и 600 л. **3.315.** Третья.

3.316. □ Пусть в n-й мензурке после вливания из $(n-1)$-й оказалось x_n см^3 жидкости. Тогда после выливания $\frac{x_n}{n}$ см^3 в первую мензурку в n-й осталось $x_n-\frac{x_n}{n}=\frac{(n-1)\,x_n}{n}$ см^3 жидкости. По условию, $\frac{(n-1)\,x_n}{n}=a$, откуда $x=\frac{an}{n-1}$ — столько же жидкости было в каждой предыдущей мензурке (кроме первой) перед выливанием в последующую. Предположим, что в первой мензурке первоначально было $x_1^{(0)}$ см^3 жидкости; тогда получим уравнение

$$x_1^{(0)}-\frac{x_1^{(0)}}{n}+\frac{1}{n}\,\frac{an}{n-1}=a \text{ или } \frac{(n-1)\,x_1^{(0)}}{n}+\frac{a}{n-1}=a,$$

откуда $x_1^{(0)}=\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}$.

Для второй мензурки имеем

$$x_2^{(0)}+\frac{1}{n}\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}=\frac{an}{n-1},$$

откуда $x_2^{(0)}=\frac{a(n^2-2n+2)}{(n-1)^2}$.

Далее, для третьей мензурки получим

$$x_3^{(0)}+\frac{1}{n}\frac{an}{n-1}=\frac{an}{n-1},$$

откуда $x_3^{(0)}=a$. Следовательно, и в каждой из остальных мензурок первоначально содержалось по a см^3 жидкости.

Итак, получаем ответ: в первой мензурке $\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}$ см^3, во второй $\frac{a(n^2-2n+2)}{(n-1)^2}$ см^3, в остальных — по a см^3. ■

3.317. За $b+\sqrt{b(b-a)}$ дней. **3.318.** $p(n+1)/(n-1)$; 1/3. **3.320.** 77 или 86.

3.321. □ Пусть x — делитель, r — остаток; тогда $4r$ — частное и $180-r=4rx$, откуда $x=(180-r)/(4r)$. Так как x — целое, то подходящее значение $r=4$. В результате получаем $x=176/16=11$. ■

3.323. 423. ● Из условия следует, что цифра сотен равна 4.

3.324. 421. **3.325.** 211. **3.326.** 421. **3.327.** 121. **3.328.** 18. **3.329.** 300 млн. руб; 150 млн. руб. **3.330.** $(25+a\pm\sqrt{D})/(2a)$ и $(25-a\pm\sqrt{D})/(2a)$ кг, где $D=a^2-130a+625$, причем если $a>5$ — нет решений, если $0<a<5$ — два решения, если $a=5$ — одно решение (3 и 2 кг). **3.331.** Если $s\geqslant pq/(100r)$, то на расстоянии от B, не большем $s/2-pq/(200r)$. Если же $s<pq/(100r)$, то для любого пункта, расположенного на дороге AB, выгоднее брать уголь в A.

3.332. $1000(2{,}5a+sp)/(2000-sn)$ руб. Задача имеет решение при $sn<2000$.

3.333. $(\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc)/(2c)$ км; a, b, c — произвольные положительные числа.

3.334. □ Пройденные пешеходами расстояния удобно представить в виде схемы (рис. Р.3.14). Пусть $AB=x$ км. В течение первых двух часов первый пешеход на каждый километр пути затрачивал $2/x$ ч, а второй $2/(x+s)$ ч. В течение двух последующих часов на каждый километр пути они затрачивали соответственно $\frac{2}{x}-\frac{1}{6}=\frac{2}{BD}$ ч и $\frac{2}{x+s}-\frac{1}{6}=\frac{2}{CE}$ ч. С помощью схемы легко устанавливаем, что $CE-BD=2s$. Таким образом, получаем уравнение $\frac{12(x+s)}{12-x-s}-\frac{12x}{12-x}=2s$ или $x^2-(24-s)x+72-12s=0$. Ответ: $(24-s-\sqrt{s^2+288})/2$ и $(24+s-\sqrt{s^2+288})/2$ км. ■

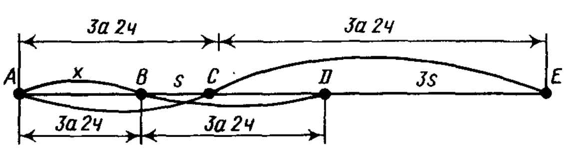

Рис. Р.3.14

3.335. За 80 с. **3.336.** $31b/(130v)$ ч.

3.337. 11 и 7 см. ● Построив графики движения частиц, легко определить, что $21v_1+10v_2=301$ и $56v_1-45v_2=301$, где v_1 и v_2 — скорости частиц m_1 и m_2.

3.338. В 10 раз. **3.339.** Через $ab/\sqrt{a^2+4ab}$ с. **3.340.** $\dfrac{100s-r(50+s)}{(3s-r)a}$ и $\dfrac{100s-r(50+s)}{(r-s)a}$ м/с, где $s<r<100s/(50+s)$. **3.341.** 6,4 км. **3.342.** $\dfrac{d(k-1)}{2Tk}\pm\dfrac{d}{2t}\left(1-\sqrt{1+\dfrac{t^2(k-1)^2}{T^2k^2}}\right)$.

3.343. □ Каждый должен проехать и пройти одинаковое расстояние; следовательно, велосипед надо оставить на середине пути, т. е. в 5 км от дома. Пусть v_1 (км/мин) — скорость ходьбы пешком, а v_2 (км/мин) — скорость езды на велосипеде. Тогда $\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{1}{v_2}=12$. Поэтому выигрыш во времени составит $\dfrac{10}{v_1}-\left(\dfrac{5}{v_1}+\dfrac{5}{v_2}\right)=5\left(\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{1}{v_2}\right)=5\cdot12=60$ (мин). ■

3.344. Через 4 мин; в 3 раза. **3.345.** $\dfrac{3(-a+\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ и $\dfrac{-3(3a-\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ ч; $a<30$. **3.346.** 60 км/ч. **3.347.** 340 км. **3.348.** Через $(av_1+bv_2)/(v_1^2+v_2^2)$ мин от начала полета. **3.349.** $2ak$ км. **3.350.** 70 км/ч. **3.351.** 36 и 54 км/ч. **3.352.** $(3m+\sqrt{9m^2+2500t^2v^2})/(50t)$ км/ч. **3.353.** Если $c<h/m$, то первая модель; если $c>h/m$, то вторая модель; если $c=h/m$, то одинаково. **3.354.** $a(1+\sqrt{2})$ ч. **3.355.** 120.

3.356. $(3a+2c+\sqrt{4c^2-4ac+9a^2})/4$ км/ч. **3.357.** 7,7 ч.

3.358. □ Пусть u — скорость течения реки, ku — скорость пловца в неподвижной воде; m, n, p — отрезки времени (рис. Р.3.15). Имеем: $AD=u(m+n)$ (1); $DC=(ku-u)n$ (2); $AC=(ku+u)m$ (3); $BD=(ku+u)p$ (4); $BC=u(n+p)$ (5). Но $DC=AC-AD$ (6) и $DC=BD-BC$ (7). Из (6), (1), (2) и (3) находим, что $m=n$, а из (7), (2), (4) и (5) — что $n=p$, т. е. $m=n=p$. Отсюда следует, что $AC=BD$, а также $AD=BC$ (8). Тогда $BC=l-AC=l-um(k+1)$ (9). Подставляя (9) и (1) в (8), получим $2mu=l-um(k+1)$, откуда $m=\dfrac{l}{u(3+k)}$ (10). Наконец, подставляя (10) в (2), получим $DC=\dfrac{(k-1)l}{3+k}$. Итак, расстояние, которое проплыл спортсмен, есть $s=l+2DC=l+\dfrac{2(k-1)l}{3+k}=\dfrac{l(3k+1)}{3+k}$ м. ■

3.359. 20 и 6 ч. **3.360.** 21; 6 ч. **3.361.** $a+\dfrac{-(a+b)+\sqrt{D}}{2(c+1)}$; $b+\dfrac{-(a+b)+\sqrt{D}}{2(c+1)}$; $\dfrac{-c(a+b)+c\sqrt{D}}{2(c+1)}$, где $D=(a-b)^2+4abc^2$.

3.362. □ Объем работы примем за 1. Количество работы, выполняемой I, II и III станками, обозначим соответственно $1/x$, $1/y$, $1/z$. Тогда за 1 ч три станка

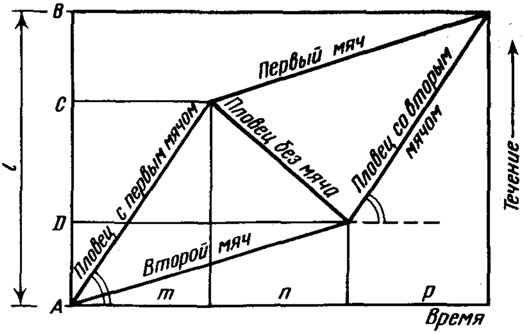

Рис. Р.3.15

вместе выполнят работу $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+xy+xz}{xyz}$. Следовательно, $\frac{xyz}{xy+yz+xz}$ — время выполнения работы тремя станками совместно; время при совместной работе II и III станков равно $\frac{yz}{y+z}$; для пар I и II, I и III соответственно $\frac{xy}{x+y}$ и $\frac{xz}{x+z}$. Суммарное время при раздельной работе станков, по условию, есть $\frac{yz}{y+z}+\frac{xz}{x+z}+\frac{xy}{x+y}$. При последовательном выполнении работы имеет место равенство $\frac{yz}{x(y+z)}+\frac{xz}{y(x+z)}+\frac{xy}{z(x+y)}=1$. Учитывая это, находим искомое отношение:

$$\left(\frac{yz}{y+z}+\frac{xz}{x+z}+\frac{xy}{x+y}\right):\frac{xyz}{xy+yz+xz}=\frac{yz+(y+z)\,x}{x\,(y+z)}+\frac{xz+y\,(x+z)}{y\,(x+z)}+$$
$$+\frac{xy+z\,(x+y)}{z\,(x+y)}=\frac{yz}{x\,(y+z)}+1+\frac{xz}{y\,(x+z)}+1+\frac{xy}{z\,(x+y)}+1=4.$$ ■

3.363. За 4 и 12 ч. **3.364.** За 96 или за 5 мин. **3.365.** 2,4 и 4,8 кг.

3.366. □ Изобразим массы сплавов равными прямоугольниками (рис. Р.3.16). Пусть x_A отрезан от куска A, а x_B — от куска B. По условию, состав новых слитков $(m-x)_A+x_B$ и $x_A+(m-x)_B$. Одинаковый процент меди в слитках возможен при условии, что количества сплава A и сплава B в слитках пропорциональны, т. е. $(m-x)/x=x/(m-x)$, откуда $x=m/2$. Итак, искомое отношение равно 2. ■

3.367. 40, 50 и 10%. **3.368.** 4 г/см³. **3.369.** $M_1\,(a\sqrt{3}-a;\ 0)$, $P_1\,(0;\ a\sqrt{3}-a)$, $M_2\,(-a\sqrt{3}-a;\ 0)$, $P_2\,(0;\ -a\sqrt{3}-a)$. **3.370.** 22 см³. **3.371.** 500, 1000 и 1500 л. **3.372.** 3; 4; 5. **3.373.** $r_1=(-r+\sqrt{6R^2-3r^2})/2$; $r<r_1\leqslant R$ при $(\sqrt{3}-1)/2\leqslant r/R<\sqrt{2}/2$; $r_1<r<R$ при $\sqrt{2}/2<r/R\leqslant 1$. **3.374.** $a\,(3\pm\sqrt{3\,(4m-1)})/6$; $1/4\leqslant m<1$.

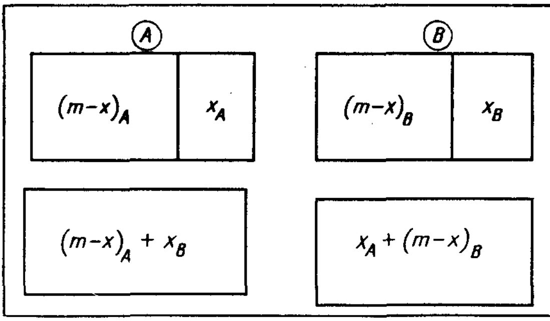

Рис. Р.3.16

3.375. $R \pm \sqrt{2a^2 - 3R^2}$; $3R^2/2 \leqslant a^2 < 2R^2$. **3.376.** От 2,5 до 3 км/ч. **3.377.** 1 и 4 см/с.
3.378. $(vt + \sqrt{2a^2 - v^2t^2})/(2a)$; $a = vt/\sqrt{2}$. **3.379.** $0 < a < 68$. При $a = 5$ расстояние между фермами 60,40 и 25 км.
3.380. 10 и 5 лет. ● Пусть T — период полураспада вещества A; тогда $1/2 = 2^{-\lambda_1 T}$ и $1 = 2 \cdot 2^{-\lambda_2 T/2}$, откуда $\lambda_1 = 1/T$, $\lambda_2 = 2/T$.

ГЛАВА 4

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

4.001. □ Перегруппировав слагаемые и использовав формулу (4.5), получим

$$((1+\operatorname{tg}2\alpha)+\cos^{-1}2\alpha)\,((1+\operatorname{tg}2\alpha)-\cos^{-1}2\alpha)=(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-\cos^{-2}2\alpha=$$
$$=1+2\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha=2\operatorname{tg}2\alpha.$$

4.004. □ Вынесем за скобки в числителе $\operatorname{tg}2\alpha$, а в знаменателе $\operatorname{tg}3\beta$ и воспользуемся формулой (4.4):

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha\,(1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}3\beta)}{\operatorname{tg}3\beta\,(\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}3\beta+1)}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}.\ ■$$

4.008. □ Обозначив левую часть тождества через A, сгруппируем члены так: $A=(\sin 4\alpha-\sin 6\alpha)+(\sin 7\alpha-\sin 5\alpha)$. После этого воспользуемся сначала формулой (4.20), а затем (4.22):

$$A=-2\sin\alpha\cos 5\alpha+2\sin\alpha\cos 6\alpha=2\sin\alpha\,(\cos 6\alpha-\cos 5\alpha)=$$
$$=-4\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.\ ■$$

4.011. □ I способ. Используя формулы (4.28), (4.15) и (4.4), получим

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}+\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}=\frac{2}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

II способ. Применяя формулы (4.18) и (4.4), находим

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\ ■$$

4.014. □ Имеем

$$2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha=\frac{1}{2}\sin^2 4\alpha=$$
$$=\frac{1}{4}(1-\cos 8\alpha)=\frac{1}{4}\left(1-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right).$$

Здесь были использованы формулы приведения, а также (4.13) и (4.16). ■

4.019. □ Используя формулы приведения, запишем левую часть в виде $\dfrac{\sin 6\alpha-\sin 4\alpha+\sin\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+\cos\alpha}$. Затем воспользуемся формулами (4.20) и (4.21):

$$\frac{2\sin\alpha\cos 5\alpha+\sin\alpha}{2\cos 5\alpha\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\,(2\cos 5\alpha+1)}{\cos\alpha\,(2\cos 5\alpha+1)}=\operatorname{tg}\alpha.\ ■$$

4.023. □ I способ. Применяя формулы (4.22), (4.20) и (4.1), получим

$$4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

II способ. Раскрыв скобки, находим

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$$
$$=2\,(1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\,(1-\cos(\alpha-\beta))=2\cdot 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(укажите формулы, которые были использованы при этом способе решения). ■

4.026. □ Доказываемое тождество равносильно следующему (после применения формул приведения): $\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha$. Преобразуя левую часть последнего равенства, получим

$$\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\,(\cos^2\alpha+1)}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2\alpha)\,(1+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha.\ ■$$

4.029. □ Применяя сначала формулы приведения, приведем левую часть к виду $\frac{2\,(1+\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$. Далее, используя формулы (4.17), (4.3), (4.13) и (4.15), находим

$$\frac{2\cdot 2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.\ ■$$

4.032. □ Применим последовательно формулы (4.16) и (4.22):

$$\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{4}-4\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{9\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=-\sin\,(2\pi-4\alpha)\,\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.\ ■$$

4.035. □ Имеем

$$\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=-\operatorname{tg}2\alpha\left(\frac{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}-\cos 4\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}2\alpha\,(2\cos^2 2\alpha-\cos 4\alpha)=-\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$$

(мы воспользовались равенством $2\cos^2 2\alpha-\cos 4\alpha=1$, которое вытекает из формулы (4.17)). ■

4.039. □ $\cos 4\alpha-\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\cos 4\alpha-2\cos^2 2\alpha=-1$. ■

4.042. □ Применяя формулы (4.17) и (4.27), получим

$$\frac{1+\cos\,(90^\circ-2\alpha)}{2}-\frac{1+\cos\,(120^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{\sin\,(150^\circ-2\alpha)+\sin\,(-2\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\alpha-\cos\,(120^\circ+2\alpha)-\sin\,(150^\circ-2\alpha)}{2}=\sin 2\alpha,$$

так как $\sin\,(150^\circ-2\alpha)=\sin\,(90^\circ+(60^\circ-2\alpha))=\cos\,(60^\circ-2\alpha)$, а $\cos\,(120^\circ+2\alpha)=\cos\,(180^\circ-(60^\circ-2\alpha))=-\cos\,(60^\circ-2\alpha)$. ■

4.045. □ Нетрудно вывести формулу $\operatorname{ctg}x=\frac{\operatorname{ctg}^2(x/2)-1}{2\operatorname{ctg}(x/2)}$ (сделайте это самостоятельно) и из нее получить, что первое слагаемое в левой части есть $\operatorname{ctg}4\alpha$. Далее находим

$$\operatorname{ctg}4\alpha-\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=\operatorname{ctg}4\alpha\,(1-\cos 8\alpha)=\operatorname{ctg}4\alpha\cdot 2\sin^2 4\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha=\sin 8\alpha$$

(использованы формулы (4.16) и (4.13)). ■

4.048. □ Умножив и разделив числитель и знаменатель на $\operatorname{tg}^2\alpha$, получим
$$\frac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{(\sin^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=1. \ ■$$

4.051. □ Заметим, что $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$, и используем тождество $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1$. Тогда получим $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+$ $+\cos^6\alpha=1$ или $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$. ■

4.054. □ Применяя формулы (4.14) и (4.13), преобразуем правую часть:
$$\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha(1-4\sin^2\alpha)=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha. \ ■$$

4.056. □ Используя формулы (4.16) и (4.22), находим
$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1-\cos 2\alpha-1+\cos 2\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta). \ ■$$

4.058. □ Упростим сначала первое слагаемое в левой части:
$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{-\operatorname{tg}\alpha(-\operatorname{tg}2\alpha)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}=\sin 2\alpha$$
(использованы формулы приведения и формула (4.24)). Затем упростим второе слагаемое:
$$2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$
$$=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sqrt{3}\cos 2\alpha$$
(использованы формулы приведения и (4.15)). Таким образом, левая часть примет вид $\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha=2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right)$. Заменив $\frac{1}{2}$ на $\cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\sin\frac{\pi}{3}$ и воспользовавшись формулой (4.8), окончательно получим
$$2\left(\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right). \ ■$$

4.062. □ $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=(1+\cos 2\alpha)-\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times$ $\times\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$ (укажите формулы, использованные при решении). ■

4.063. □ Применяя формулы приведения, а также (4.16), (4.13), находим
$$A=1+\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right).$$

Сумму $\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}$ можно найти различными способами. Укажем два из них:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}=\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$;

2) $\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{4}+\right.$

$\left.+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)$.

Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)$. Итак, $A=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)$. ■

4.064. $-\sin^2\alpha$. **4.065.** $1/8$. **4.066.** $-\operatorname{tg}(\alpha/8)$. **4.067.** $2\sin\alpha$.

4.068. □ $\sin^2\alpha\,\frac{\sin\alpha+1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha-1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=((\sin\alpha+\cos\alpha)+1)\,((\sin\alpha+\cos\alpha)-$

$-1)=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$. ■

4.069. $-0{,}5\sin 8\alpha$. **4.070.** $0{,}25\sin(3\alpha/2)$.

4.071. □ Используя формулы (4.16) и (4.22), получим

$$\frac{1-\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1-\cos(\alpha-4\beta)}{2}=\frac{\cos(\alpha-4\beta)-\cos(\alpha+4\beta)}{2}=\sin\alpha\sin 4\beta. \ ■$$

4.072. $\cos^{-3}2x$. **4.073.** $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$. **4.074.** $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$.

4.075. □ Возведя в квадрат, а затем применяя формулы (4.9) и (4.16), получим $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos 2\beta+\cos^2 2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin 2\beta+\sin^2 2\beta=$

$=2-2(\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)=2(1-\cos(\alpha+2\beta))=4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$. ■

4.076. □ Используя формулу (4.16), имеем

$$A=\frac{2\sin^2\alpha\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos(45^\circ+2\alpha)}{2(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}.$$

Преобразуем разность $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$ следующим образом: $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\alpha\right)=\sqrt{2}(\sin 45^\circ\sin 2\alpha-\cos 45^\circ\cos 2\alpha)=-\sqrt{2}\times$

$\times\cos(45^\circ+2\alpha)$. Ответ: $A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha$. ■

4.077. □ Воспользуемся сначала формулой (4.17), а затем (4.22):

$$\frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=\sin\frac{7\pi}{4}\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}. \ ■$$

4.078. $2\operatorname{tg}\alpha$. **4.079.** $0{,}5\operatorname{ctg}\alpha$. **4.080.** $\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$. **4.081.** 2. **4.082.** $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$.

4.083. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. **4.084.** $\operatorname{ctg}^4\alpha$.

4.085. □ Имеем

$$1-\frac{1}{1-\cos^{-1}\alpha}=1-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}=-\frac{1}{\cos\alpha-1}=\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{2\sin^2(\alpha/2)}$$

(использованы формула приведения и (4.16)). ■

4.086. $0{,}5\operatorname{tg}2\alpha$. **4.087.** 1.

4.088. □ Воспользуемся формулами приведения:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1.\ ■$$

4.089. 1. **4.090.** $\sin^2\alpha$.

4.091. □ $$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.\ ■$$

4.092. $-\cos\alpha$. **4.093.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

4.094. □ $$\frac{\sin^2 2\alpha+\operatorname{tg}^2 2\alpha+1}{\cos^2 2\alpha+\operatorname{ctg}^2 2\alpha+1}=\frac{\sin^2 2\alpha+\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha}}{\cos^2 2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2 2\alpha}}=\frac{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+1}{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+1}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}^2 2\alpha.\ ■$$

4.095. $-0{,}25\sin8\alpha$.

4.096. □ Используя формулы приведения, а также (4.16), находим

$$A=\frac{1}{2\operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha}+\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}+\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}.$$

Далее имеем

$$A=\frac{1}{\sin2\alpha}+\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}+\frac{1}{\sin2\alpha}=\frac{2}{\sin^3 2\alpha}.\ ■$$

4.097. $2/\cos^3\alpha$. **4.098.** 0.

4.099. □ $$\frac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha-4+4\sin^2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}=-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=-\operatorname{tg}^4\alpha.\ ■$$

4.100. $(1/\sqrt{2})\sin2\alpha$.

4.101. □ $$\operatorname{ctg}4\alpha\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}4\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)=\cos4\alpha.\ ■$$

4.102. □ К числителю применяем формулу (4.14), а затем формулу приведения; имеем $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\alpha\right)=\sin4\alpha$. В знаменателе получаем $\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$. Окончательно находим

$$A=\frac{\sin4\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{2\sin2\alpha\cos2\alpha}{0{,}5\sin2\alpha}=4\cos2\alpha.\ ■$$

4.103. $\operatorname{ctg}2\alpha$. **4.104.** $\cos4\alpha$. **4.105.** 2. **4.106.** $\operatorname{ctg}2\alpha$. **4.107.** $\operatorname{tg}4\alpha$.

4.108. □ $\dfrac{4\cos\alpha}{\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{4\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)\cos^2(\alpha/2)}{\cos^4(\alpha/2)-\sin^4(\alpha/2)}=$

$=\dfrac{4\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)\cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}=\dfrac{4\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)\cos^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}=\sin^2\alpha.$ ■

4.109. $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **4.110.** $\mathrm{ctg}\,4\alpha$.

4.111. □ $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-\cos 4\alpha-8\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\cos^2\alpha}{2\sin^2 2\alpha-8\sin^2\alpha}=\dfrac{4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{ctg}^4\alpha.$ ■

4.112. □ $\dfrac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$ ■

4.113. $2\cos\alpha$.

4.114. □ Заметим, что $2\cos^2 2\alpha-1=\cos 4\alpha$ (это вытекает из формулы (4.17)). Тогда $A=\sin 4\alpha-\cos 4\alpha$. Эту разность преобразуем в произведение следующим образом: $A=\sin 4\alpha-\sin(90^\circ-4\alpha)=2\cos 45^\circ\sin(4\alpha-45^\circ)=$ $=\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$ (использованы формула приведения и (4.20)). ■

4.115. □ I способ. Имеем

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}+2=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+2=\frac{2}{\sin\alpha}+2=\frac{2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Сумму $1+\sin\alpha$ можно преобразовать в произведение, например, так: $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. В результате получаем $A=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha$.

II способ. Находим

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}+2=\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}+1}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2\frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha.$$ ■

4.116. □ Имеем

$$\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}=-\frac{16\cos 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}=$$

$$=-16\operatorname{ctg}2\alpha\sin^{-3}2\alpha.$$

Мы использовали формулы (4.13), (4.14), (4.1) и (4.3). ■

4.117. $\operatorname{tg}^8\alpha$. **4.118.** $4\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)\sin^{-2}\alpha$. **4.119.** $4\sin(30^\circ-\alpha)\times\times\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha$.

4.120. □ $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=\dfrac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=4\cos 2\alpha\sin^{-2}2\alpha$. ■

4.121. $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. **4.122.** $4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$.

4.123. □ Используя сначала формулы приведения, а затем (4.16), (4.17) и (4.21), получим

$$\cos^2\beta-\sin^2\alpha=\frac{1+\cos 2\beta-1+\cos 2\alpha}{2}=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).\ ■$$

4.124. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **4.125.** $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.126. □ Воспользовавшись формулами приведения, после преобразований находим

$$A=1-\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=1+\cos 3\alpha-\frac{1+\cos 3\alpha}{\cos 3\alpha}\sin 3\alpha=$$

$$=\frac{(1+\cos 3\alpha)(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)}{\cos 3\alpha}.$$

Преобразуем множители в числителе: $1+\cos 3\alpha=2\cos^2\dfrac{3\alpha}{2}$, $\cos 3\alpha-\sin 3\alpha=$ $=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 3\alpha-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 3\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)$. Окончательно получим $A=2\sqrt{2}\cos^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)\cos^{-1}3\alpha$. ■

4.127. $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **4.128.** $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$.

4.129. □ $\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=2\cos 3\alpha\cos\alpha$. ■

4.130. $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. **4.131.** $2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^{-1}4\alpha$.

4.132. $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg}3\alpha$.

4.133. □ $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin\alpha-1=\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha\right)=$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha-\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ■.

4.134. $\operatorname{tg}5\alpha$. **4.135.** $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$.

4.136. □ I способ. $A=\sin 8\alpha(\sin 10\alpha+\sin 6\alpha)-2\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 8\alpha\cdot 2\sin 8\alpha\times$ $\times\cos 2\alpha-2\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha(\sin^2 8\alpha-\sin^2 2\alpha)=2\cos 2\alpha\cdot\dfrac{1}{2}(1-\cos 16\alpha-$ $-1+\cos 4\alpha)=2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\sin 10\alpha$.

II способ. $A=\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 14\alpha-\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)=$ $=\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 10\alpha\sin 4\alpha=\sin 10\alpha(\sin 8\alpha+\sin 4\alpha)=2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\sin 10\alpha.$

Укажите формулы, которые применялись в каждом из способов решения. ■

4.137. $\operatorname{ctg}(17\alpha/2)$. **4.138.** $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(13\alpha/2)$. **4.139.** $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\times$ $\times\cos(9\alpha/2)$.

4.140. □ Применив дважды формулы (4.19) и (4.21), получим

$$\frac{(\sin 13\alpha+\sin 15\alpha)+(\sin 14\alpha+\sin 16\alpha)}{(\cos 13\alpha+\cos 15\alpha)+(\cos 14\alpha+\cos 16\alpha)}=\frac{2\cos\alpha(\sin 14\alpha+\sin 15\alpha)}{2\cos\alpha(\cos 14\alpha+\cos 15\alpha)}=$$

$$=\frac{2\sin(29\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos(29\alpha/2)\cos(\alpha/2)}=\operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}.\ ■$$

4.141. $4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$. **4.142.** $4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(13\alpha/2)$.

4.143. $4\cos(3\alpha/2)\cos 2\alpha\cos(17\alpha/2)$.

4.144. □ Запишем данное выражение так: $A=4+4\cos 4\alpha-1+\cos 8\alpha=$ $=4(1+\cos 4\alpha)-(1-\cos 8\alpha)$. Тогда, применяя формулы (4.16) и (4.17), получим $A=8\cos^2 2\alpha-2\sin^2 4\alpha=8\cos^2 2\alpha-8\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha=8\cos^2 2\alpha(1-$ $-\sin^2 2\alpha)=8\cos^4 2\alpha$. ■

4.145. □ $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha})=$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\ ■$$

4.146. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **4.147.** $4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$.

4.148. □ Приведем одно из возможных решений. В левой части предполагаемого равенства сначала применим формулы приведения: $(\sin 20°+\sin 40°)\times$ $\times(\sin 20°+\sin 40°)+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 50°-\sin 70°)=\sin^2 20°+2\sin 20°\times$ $\times\sin 40°+\sin^2 40°+\sin^2 50°-2\sin 50°\sin 70°+\sin^2 70°$. Заметим, что $\sin^2 20°+\sin^2 70°=1$ и $\sin^2 40°+\sin^2 50°=1$, а $2\sin 20°\sin 40°=\cos 20°-\cos 60°$ и $2\sin 50°\sin 70°=\cos 20°-\cos 120°$ (согласно формуле (4.25)). После этого левая часть примет вид $2+\cos 20°-\cos 60°-\cos 20°+\cos 120°=2-1=1$, т. е. она равна правой части. ■

4.150. □ Сложив дроби в левой части равенства, получим

$$\frac{\sin 28°\cos 28°\cos 56°+\sin 2°\cos 2°\cos 4°}{\sin 2°\sin 28°}=\frac{\sin 56°\cos 56°+\sin 4°\cos 4°}{2\sin 2°\sin 28°}=$$

$$=\frac{\sin 112°+\sin 8°}{4\sin 2°\sin 28°}=\frac{\sqrt{3}\cos 52°}{4\sin 2°\sin 28°}=\frac{\sqrt{3}\sin 38°}{4\sin 2°\sin 28°}.$$

Здесь были использованы формулы (4.13), (4.19) и формулы приведения. ■

4.153. 2.

4.154. □ Имеем

$$\operatorname{tg}435°+\operatorname{tg}375°=\operatorname{tg}75°+\operatorname{tg}15°=\frac{\sin 90°}{\cos 75°\cos 15°}=\frac{2}{\cos 90°+\cos 60°}=4.$$

Здесь были использованы формулы приведения, а также (4.23) и (4.26). ■

4.155. $2\sqrt{3}$. **4.156.** 7/25. **4.157.** $2\sqrt{3}$. **4.158.** $-17\sqrt{2}/26$. **4.159.** $7\sqrt{2}/26$.
4.160. 65/113.

4.161. □ Используя формулу (4.29), находим $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-0{,}04}{1+0{,}04}=\frac{12}{13}$. Следовательно, $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}=\frac{2}{3+\frac{48}{13}}=\frac{26}{87}$. ■

4.162. 0,96.
4.163. □ $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=p^2 \Rightarrow \sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=p^2 \Rightarrow \sin 2\alpha=1-p^2$. ■
4.164. □ Сначала заметим, что $\operatorname{tg}\alpha=-5$. Затем, используя формулы (4.29) и (4.28), найдем $\cos 2\alpha=\frac{1-25}{1+25}=-\frac{12}{13}$, $\sin^{-1}2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{1+25}{-10}=-\frac{13}{5}$. Итак, $A=2+12-\frac{13}{5}=\frac{57}{5}$. ■

4.165. 2. **4.166.** $-22/9$.
4.167. □ Используя формулу (4.15), получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Имеем $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{12}{5}$, откуда $6\operatorname{tg}^2\alpha-5\operatorname{tg}\alpha-6=0$. Решив это уравнение, найдем два возможных значения для $\operatorname{tg}\alpha$: $(\operatorname{tg}\alpha)_1=\frac{3}{2}$ и $(\operatorname{tg}\alpha)_2=-\frac{2}{3}$. Первый корень $(\operatorname{tg}\alpha)_1=\frac{3}{2}$ не подходит, так как не выполнено условие задачи для α. Второй корень $(\operatorname{tg}\alpha)_2=-\frac{2}{3}$ дает ответ: $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. ■
4.169. $\pi-\operatorname{arctg}5$. **4.170.** 23/32.
4.171. □ Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta=7$. Теперь, согласно формуле (4.11), находим

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{4}{3}+7}{1-\frac{28}{3}}=-1$. Так как, по условию, $\alpha+\beta\in(0,\pi)$, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. ■

4.172. □ Имеем $\sin(\alpha-90^\circ)=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\frac{2}{3}$, т. е. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (так как α — угол IV четверти). Далее находим

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{2\cdot\frac{4}{9}-1}{2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{20}.\ ■$$

4.173. □ Заметим, что $0<\alpha<\pi/4$ и $0<\beta<\pi/4$ (объясните, почему). Тогда $0<2\beta<\pi/2$ и $0<\alpha+2\beta<3\pi/4$. Далее имеем $\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta$. Но $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{49}{50}}=\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\sin\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=\dfrac{4}{5}$. Следовательно,

$\cos(\alpha+2\beta)=\dfrac{7}{\sqrt{50}}\cdot\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{\sqrt{50}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$. ■

4.174. $-4\sqrt{6}/23$.

4.175. □ Имеем $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{3}{2}$. Так как $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{5+\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{15}{2}}=$

$=-1$. Учитывая, что $\alpha+\beta\in(0,\pi)$, получим $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$. ■

4.176. $\alpha+\beta=\pi/4$.

4.177. □ Приведем один из вариантов решения. Имеем

$$A=(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)=\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}\right).$$

Заметим, что $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$, а $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha.)$ Таким образом,

$$A=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}=2.\ ■$$

4.178. 2.

4.180. □ Имеем

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\geqslant 0.\ ■$$

4.181. □ Так как $x=\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, то $x=\dfrac{y}{1-y}$, откуда $x-xy=y$ или $x-y-=xy$. ■

4.183. □ Согласно свойству арифметической прогрессии, $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Используя формулы (4.20) и (4.22), преобразуем левую часть:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\operatorname{ctg}\beta.\ ■$$

4.184. □ Используя формулу $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, находим

$$32\cos^4 15°-10-8\sqrt{3}=32\left(\frac{1+\cos 30°}{2}\right)^2-10-8\sqrt{3}=$$
$$=8\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-10-8\sqrt{3}=4.$$

Далее получим

$$\frac{5}{1+\sqrt[3]{4}}=\frac{1+4}{1+\sqrt[3]{4}}=\frac{(1+\sqrt[3]{4})\,(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{1+\sqrt[3]{4}}=1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}.$$

Мы воспользовались формулой $a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$, где роль a и b играли соответственно 1 и $\sqrt[3]{4}$. ■

4.185. $m^4-4m^2+2.$

4.191. □ Используя формулы приведения, приведем левую часть к виду

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}\right)}.$$ Заметим далее, что $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$. После этого левая часть упрощается следующим образом:

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{1}{8}.\ ■$$

4.194. □ $$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}-1=\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.\ ■$$

4.197. □ После преобразований левая часть примет следующий вид: $A=\cos^2 2\alpha-$ $-3\sin^2 2\alpha=4\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$. Далее имеем

$$A=4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right). \blacksquare$$

4.200. □ Заметим, что $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha-1=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$ $=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$, $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, $\sin\alpha+\cos\alpha=$ $=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда левая часть тождества запишется так:

$$\frac{\cos^2\alpha\cdot\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=2,$$

поскольку $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. ■

4.204. □ Преобразуя левую часть, получим

$$-\operatorname{tg}4\alpha-\frac{1}{\cos 4\alpha}=-\frac{1+\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=-\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{\cos 4\alpha}=-\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=$$
$$=-\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}=-\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{(\sqrt{2})^2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}=$$
$$=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right). \blacksquare$$

Замечание. Выражение $\cos 4\alpha$ можно преобразовать и так: $\cos 4\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

4.207. □ Сначала, используя формулы приведения, преобразуем левую часть к виду $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$. Затем, применяя формулу (4.17), преобразуем правую часть:

$$8\cos^4 2\alpha=8\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)^2=2\left(1+2\cos 4\alpha+\frac{1+\cos 8\alpha}{2}\right)=3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha.$$

Итак, правая часть равна левой, т. е. тождество доказано. ■

4.209. ● Воспользоваться результатом, полученным при решении задачи 4.207.

4.211. □ $\dfrac{1}{\cos^6\alpha}-\dfrac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)\,(1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)}{\cos^4\alpha\,\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{1+\sin^2\alpha+1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}+1=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.\ ■$$

4.215. □ $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\dfrac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=$

$$=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.\ ■$$

4.218. □ $\dfrac{\sin6\alpha+\sin8\alpha+\sin7\alpha+\sin9\alpha}{\cos6\alpha+\cos8\alpha+\cos7\alpha+\cos9\alpha}=\dfrac{2\sin7\alpha\cos\alpha+2\sin8\alpha\cos\alpha}{2\cos7\alpha\cos\alpha+2\cos8\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sin7\alpha+\sin8\alpha}{\cos7\alpha+\cos8\alpha}=\frac{2\sin(15\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos(15\alpha/2)\cos(\alpha/2)}=\operatorname{tg}\frac{15\alpha}{2}.\ ■$$

4.220. □ Используя формулы приведения, а также (4.17) и (4.21), получим

$$\frac{1+\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha}{\cos2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos5\alpha\cos\alpha}{\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\frac{\cos\alpha(\cos\alpha+\cos5\alpha)}{\cos3\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos3\alpha\cos2\alpha}{\cos3\alpha}=2\cos2\alpha.\ ■$$

4.226. □ Предварительно напомним формулы $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ и $\operatorname{tg}3\alpha=$ $=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$. После этого можно записать, что

$$\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\frac{3\operatorname{tg}2\beta-\operatorname{tg}^3 2\beta}{1-3\operatorname{tg}^2\beta}-\frac{2\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}-\operatorname{tg}2\beta=$$

$$=\operatorname{tg}2\beta\left(\frac{3-\operatorname{tg}^2 2\beta}{1-3\operatorname{tg}^2 2\beta}-\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2\beta}-1\right)=\operatorname{tg}2\beta\,\frac{2\operatorname{tg}2\beta\,(3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}^3 2\beta)}{(1-3\operatorname{tg}^2 2\beta)\,(1-\operatorname{tg}^2 2\beta)}=$$

$$=\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}6\beta.\ ■$$

4.227. □ $\dfrac{\sin4\alpha}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot2\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)}=\dfrac{\sin4\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=\dfrac{\sin4\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4\alpha\right)}=$

$$=\frac{\sin4\alpha}{\cos4\alpha}=\operatorname{ctg}4\alpha.\ ■$$

4.229. □ $\dfrac{-\cos8\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\sin^2\left(-\dfrac{3\pi}{4}+4\alpha\right)}=-\dfrac{\cos8\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)}=$

$$=-\frac{\cos8\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+8\alpha\right)}=-\frac{\cos8\alpha}{\cos8\alpha}=-1.\ ■$$

4.231. □ $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\,(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)=$

$$=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2\alpha)=\frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha).$$

Здесь были использованы формулы (4.16), (4.17) и (4.13). ■

4.233. □ $\operatorname{ctg}(30°-\alpha)\operatorname{ctg}(150°-\alpha)\operatorname{ctg}(270°+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60°+\alpha)\operatorname{tg}(120°+\alpha)=$

$$=-\operatorname{tg}\alpha\frac{\sin(60°+\alpha)\sin(120°+\alpha)}{\cos(60°+\alpha)\cos(120°+\alpha)}=-\operatorname{tg}\alpha\frac{\cos 60°-\cos(180°+2\alpha)}{\cos 60°+\cos(180°+2\alpha)}=$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\alpha\cos 2\alpha}=-\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 3\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$$ Основную роль в преобразованиях играли формулы (4.25) и (4.26). ■

4.236. □ Сначала преобразуем правую часть:

$\sin 5\alpha=\sin 4\alpha\cos\alpha+\cos 4\alpha\sin\alpha=4\sin\alpha\cos^2\alpha\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\sin\alpha=$
$=\sin\alpha(4\cos^2\alpha\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos 4\alpha)=$
$=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-2\sin^2 2\alpha+\cos 4\alpha).$

Теперь выполним преобразования в левой части:

$16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin\alpha(16\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+4(1-\sin^2\alpha)+1)=$
$=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-4\sin^2 2\alpha+1)=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-2\sin^2 2\alpha+\cos 4\alpha).$

Итак, тождество справедливо. ■

4.240. $2|\operatorname{ctg}\alpha|$.

4.241. □ Имеем $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$ Так как по условию $90°<\alpha<135°$, то $180°<2\alpha<270°$ и $\sin 2\alpha<0$. Следовательно, $\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$ ■

4.242. $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **4.243.** -1. **4.244.** 1. **4.245.** $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$.

4.246. □ $\frac{2\sin 8\alpha\sin 6\alpha-2\sin 8\alpha\sin 2\alpha}{2\sin 8\alpha\cos 6\alpha+2\sin 8\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin 6\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 4\alpha}{2\cos 2\alpha\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$ ■

4.247. 1. **4.248.** $\sin 4x\cos^{-2}4x$.

4.249. □ $\frac{-4\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{ctg}^2 2\alpha}-1=\frac{-4\cos 4\alpha\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{(\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha)(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)}-1=$

$=\frac{-\cos 4\alpha\sin^2 4\alpha}{-\cos 4\alpha}-1=\sin^2 4\alpha-1=-\cos^2 4\alpha.$ ■

4.250. $-2\sin^2 2\alpha$. **4.251.** $\cos(40°+2\alpha)$. **4.252.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$.

4.253. □ Имеем $\frac{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$ Здесь были использованы формулы (4.18) и (4.17). ■

4.254. $\sin 4\alpha$.

4.255. □ $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha=(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)^2-\sin^2 4\alpha=\cos^2 4\alpha-$ $-\sin^2 4\alpha=\cos 8\alpha.$ ■

4.256. $-\sin 4\alpha$. **4.257.** $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$. **4.258.** $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

4.259. □ $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{-\cos 8\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-8\alpha\right)}{2\cos 8\alpha}=$$
$$=-\frac{1}{2}.\ ■$$

4.260. $-2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **4.261.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$. **4.262.** $8\sqrt{3}$.

4.263. □ Используя формулы приведения, а также (4.23) и (4.24), получим
$$\frac{\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{tg}75^\circ+\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{\sin 60^\circ\cos 75^\circ\cos 15^\circ}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ\sin 90^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\ ■$$

4.264. $\operatorname{tg}5x$. **4.265.** $\sin 3x$. **4.266.** $\cos 3x$. **4.267.** $2\,|\sin^{-1}2\alpha|$.

4.268. □ Приведем подкоренное выражение к виду $\frac{\cos^{-1}\alpha-\cos\alpha}{\sin^{-1}\alpha-\sin\alpha}=$
$=\frac{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin^2\alpha)}=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha$. Извлекая кубический корень, получим $\operatorname{tg}\alpha$. ■

4.269. □ Преобразуем отдельно числитель и знаменатель:
$$3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{3-3\cos 2\alpha-1-\cos 2\alpha}{2}=1-2\cos 2\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=$$
$$=2\,(\cos 60^\circ-\cos 2\alpha)=4\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ);$$
$$3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{3+3\cos 2\alpha-1+\cos 2\alpha}{2}=2\cos 2\alpha+1=2\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=2\,(\cos 2\alpha+\cos 60^\circ)=4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(\alpha-30^\circ).$$

Разделив первое выражение на второе, получим $\operatorname{tg}(\alpha+30^\circ)\operatorname{tg}(\alpha-30^\circ)$. ■

4.270. $2\sin 2\alpha$.

4.271. □ $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}=\sqrt{\frac{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2 2\alpha}}=\sqrt{4\operatorname{ctg}^2 4\alpha}=2\,|\operatorname{ctg}4\alpha|$. ■

4.272. $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. **4.273.** $\frac{1}{4}$.

4.274. □ $$\frac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{1-\cos 2\alpha-1+\cos 2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha-\beta)}=$$
$$=\sin(\alpha+\beta).\ ■$$

4.275. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **4.276.** $-\sin 2\alpha$.

4.277. □ К первым двум членам применим формулу (4.16), а к третьему — (4.21):
$$\frac{1}{2}\,(1-\cos(270^\circ-4\alpha)-1+\cos(420^\circ-4\alpha)-\sin(360^\circ-4\alpha)-\sin(30^\circ+4\alpha))=$$
$$=\frac{1}{2}\,(\sin 4\alpha+\cos(60^\circ-4\alpha)+\sin 4\alpha-\sin(30^\circ+4\alpha))=\sin 4\alpha.\ ■$$

4.278. а) $-2\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}\alpha$. **4.279.** $\cos\frac{\alpha}{2}$. **4.280.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$.

4.281. □ После применения формул приведения выражение примет вид $\cos 4\alpha - \cos^6 2\alpha + \sin^6 2\alpha$. Далее имеем

$$\cos^6 2\alpha - \sin^6 2\alpha = (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^4 2\alpha + \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha) =$$
$$= \cos 4\alpha\,((\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha)^2 - \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha) = \cos 4\alpha \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\right).$$

В результате получаем $\cos 4\alpha - \cos 4\alpha \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 4\alpha \sin^2 4\alpha =$
$= \frac{1}{8}\sin 4\alpha \sin 8\alpha$. ■

4.282. 1. **4.283.** $-\sin 6\alpha$.

4.284. □ Рассмотрим каждый из множителей по отдельности.

1) Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \alpha$; тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos x}{\sin x}$. Согласно формуле (4.15), находим

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = \frac{2\,\dfrac{1-\cos x}{\sin x}}{1 - \left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2} = \frac{2\sin x\,(1-\cos x)}{2\cos x - 2\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

2) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}} = \sqrt{\dfrac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}} = |\operatorname{ctg} x|$.

Итак, в произведении получаем: 1, если $\operatorname{ctg} x > 0$, и -1, если $\operatorname{ctg} x < 0$. ■

4.285. $2\sin(6\alpha - 60°)$.

4.286. □ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha - \cos 4\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4\alpha\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha - 60°)$. ■

4.287. $-8\cos 4\alpha$. **4.288.** $\dfrac{4\sqrt{2}\sin(x-45°)\sin(x-60°)\sin(x+60°)}{\cos^3 x}$.

4.289. $\dfrac{4\cos 2x \sin(60° - x)\sin(60° + x)}{\cos^4 x}$. **4.290.** $-8\cos(2\alpha + 60°)\cos(2\alpha - 60°)$.

4.291. □ Предварительно заметим, что $0 < \frac{\alpha}{4} \leqslant 45°$, $-45° \leqslant -\frac{\alpha}{4} < 0$, а $0 \leqslant 45° - \frac{\alpha}{4} < 45°$. Подкоренные выражения преобразуем так: $1 + \sin\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$ и $1 - \sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. Теперь получаем

$$\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right) = -2\sin\frac{\alpha}{4}. \ ■$$

4.292. □ $1 + \cos 4\alpha + 3\cos 4\alpha - 3 = 4(\cos 4\alpha - \cos 60°) = 8\sin(2\alpha + 30°)\sin(30° - 2\alpha)$. ■

4.293. $\sin^2(\alpha-\beta)$. **4.294.** $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}$.

4.295. □ Числитель приводится к выражению $2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, а знаменатель — к выражению $-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$. В результате получаем $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. ■

4.296. $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **4.297.** $-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$.

4.298. □ $$2+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\left(\frac{3}{4}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=4\left(\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=4\,\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}-1-\cos\alpha}{2}=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).\ ■$$

4.299. $4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **4.300.** $-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$.

4.301. □ $$\frac{\cos 4\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=1-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-$$
$$-\sin 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}(1+\cos 2\alpha)=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}.\ ■$$

4.302. $2\operatorname{ctg}4\alpha$.

4.303. □ Имеем $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+$
$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\beta-\cos^2(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\beta=1-\cos^2(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.
Теперь находим $1-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta)$. ■

4.304. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **4.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **4.306.** а) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4.307. □ $$1-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{4\operatorname{tg}2\alpha\cos 4\alpha\cos^2 2\alpha}{\sin 8\alpha}=1-\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha\right)=2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$ Здесь были использованы формулы (4.16), (4.14), (4.9). ■

4.308. $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$.

4.309. □ Используя формулы приведения, а также (4.17) и (4.21), получим $1+$
$$+\cos 8\alpha+\cos 4\alpha=2\cos^2 4\alpha+\cos 4\alpha=2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\cos 4\alpha\times$$
$$\times\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).\ ■$$

4.310. $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$.

4.311. □ $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha-1)=$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$. ■

4.312. $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4\alpha\right)$.

4.313. □ $\dfrac{\cos 2\alpha+2\cos^2\alpha-1}{1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}=\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2\cos^2\alpha+2\cos 5\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\cos 3\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha\cdot 2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=$
$=\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$. ■

4.314. $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$. **4.315.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$.
4.316. $-\sin 4\alpha$.

4.317. □ $\dfrac{-\sin^{-1}\alpha+\sin\alpha}{-\cos^{-1}\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{(\sin^2\alpha-1)\cos\alpha}{\sin\alpha(\cos^2\alpha-1)}=\operatorname{ctg}^3\alpha$. ■

4.318. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha$. **4.319.** $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45^\circ)$.

4.320. □ $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha}=$
$=\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. Здесь были использованы тождества
$2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha$, $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$
и $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. ■

4.321. $(\sqrt{2}/2)\sin 2\alpha$.

4.322. □ $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}-\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{(1+\sin 2\alpha)^2-(1-\sin 2\alpha)^2}{1-\sin^2 2\alpha}=\dfrac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$. ■

4.323. $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$. **4.324.** $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$.
4.325. $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$. **4.326.** $\cos\dfrac{(m+n)\alpha}{2}\cos\dfrac{(m-n)\alpha}{2}$.

4.327. □ $1-\operatorname{ctg}2\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}=$
$=\dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. ■

4.328. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. **4.329.** $\sin 4\alpha$.

4.330. □ $\sin\alpha-\dfrac{\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sin\alpha-\dfrac{1}{2}=\sin\alpha-\sin\dfrac{\pi}{6}=$
$=2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$. ■

4.331. $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70°$.

4.335. □ Преобразуем отдельно числитель и знаменатель:

$$\frac{\cos 60° + \cos 68° - \cos 60° - \cos 112°}{2} = \cos 68°;$$

$$\frac{\cos 30° + \cos 112° - \cos 30° - \cos 68°}{2} = -\cos 68°.$$

Таким образом, частное равно -1. ■

4.340. □ В левой части предполагаемого равенства перейдем к вычислению числителя и знаменателя. Имеем $\cos 10° \cos 50° \cos 70° = \frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 40°)\cos 70° = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 70° + \frac{1}{2}\cos 110° + \frac{1}{2}\cos 30°\right) = \frac{1}{4}\cos 30°$. Аналогично находим $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{4}\sin 30°$. В итоге получаем ответ: $\operatorname{ctg} 30°$. ■

4.343. □ Сначала используем формулу (4.25), а затем (4.27):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° \sin 40° \sin 80° = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 80° (\cos 20° - \cos 60°) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sin 80° \cos 20° - \frac{1}{2}\sin 80°\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 100° + \frac{1}{2}\sin 60° - \frac{1}{2}\sin 80°\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}. \ ■$$

4.348. □ $\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 81° - (\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 63°) + \operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 75° = \frac{2}{\cos 90° + \cos 72°} - \frac{2}{\cos 90° + \cos 36°} + \frac{2}{\cos 90° + \cos 60°} = \frac{2(\cos 36° - \cos 72°)\cdot 2}{\cos 36° + \cos 108°} + 4 = 8$. ■

4.351. □ $1 - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin^2\frac{3\alpha}{2} + 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. ■

4.353. □ $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{2\sin(30° - 10°)}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{2\sin 20°}{\sin 10° \cos 10°} = 4$. ■

4.355. 3/2. **4.356.** 3/16.

4.357. □ I способ. Пусть $A = \cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$. Умножив обе части этого равенства на $2\sin\frac{3\pi}{5}$, получим $2A\sin\frac{3\pi}{5} = 2\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$, или $2A\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{6\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$, или $2A\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{12\pi}{5}$, или $2A\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}$. Но

$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{5}$, откуда $A=\frac{1}{4}$.

II способ. Имеем $A=\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}=\dfrac{2\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{6\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{5}}=$

$$=\frac{\sin\frac{12\pi}{5}}{4\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{1}{4}.\ \blacksquare$$

4.358. $\square$ $\dfrac{\cos 76^\circ+\cos 60^\circ-\cos 104^\circ-\cos 60^\circ}{\cos 76^\circ+\cos 30^\circ-\cos 104^\circ-\cos 30^\circ}=1.$ $\blacksquare$

4.359. 1. **4.360.** 0. **4.361.** 1. **4.362.** $-85/44$.

4.363. $\square$ Имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)}=$$

$$=\frac{2}{\cos\frac{5\pi}{2}+\cos 2x}=\frac{2}{\cos 2x}.$$

Так как $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x=\frac{3}{4}$, то $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$ и, значит, $\cos 2x=$ $=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\dfrac{7}{25}$. Ответ: $-\dfrac{50}{7}$. $\blacksquare$

4.364. $\square$ Имеем $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{21}{65}$, $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65}$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}$. Так как $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$, то $\pi<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}$ (III четверть). Теперь находим $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{-\frac{7}{9}}{\sqrt{1+\frac{49}{81}}}=-\dfrac{7}{\sqrt{130}}$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{9}{\sqrt{130}}$. $\blacksquare$

4.365. $27/(7\sqrt{130})$. **4.366.** $(3n-n^3)/2$. **4.367.** $-9/4$.

4.371. $\square$ $\dfrac{\sin(\pi-(A+B))}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B.$ $\blacksquare$

4.374. $\square$ Так как $A+B+C=\pi$, то $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$. Далее находим

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=1. \blacksquare$$

4.375. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$. **4.376.** $\frac{1-m}{1+m}$. **4.377.** $\frac{m^2-1}{2}$.

4.378. □ Имеем $\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{p}{q}$ или $\frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{p}{q}$. Отсюда $\operatorname{ctg}\beta=$ $=\frac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha$. ■

4.379. $\frac{1+6m^2-3m^4}{4}$. **4.380.** $\sin 2\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$, $\cos 2\alpha=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2pq}{q^2-p^2}$.

4.381. □ Решив квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg}\alpha$, находим $(\operatorname{ctg}\alpha)_1=$ $=-1/2$ $((\operatorname{tg}\alpha)_1=-2)$ и $(\operatorname{ctg}\alpha)_2=-3$ $((\operatorname{tg}\alpha)_2=-1/3)$. Теперь, используя условие задачи, получаем ответ: а) $(\cos 2\alpha)_1=-3/5$; б) $(\cos 2\alpha)_2=4/5$. ■

4.382. а) 4/5; б) 3/5. **4.383.** $\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha$.

4.384. □ $$\frac{1-2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=$$

$$=2\frac{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}=-2. \blacksquare$$

4.385. □ Имеем

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\frac{\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,\frac{-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Мы воспользовались тем, что $\cos\frac{\gamma}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. ■

4.386. -1. **4.387.** $-2/3$.

4.388. □ $-\sin(70^\circ+\alpha)\,(-\cos(20^\circ-\alpha))+\cos 60^\circ\,(-\cos(40^\circ-2\alpha)=$

$=\sin(70^\circ+\alpha)\cos(20^\circ-\alpha)-\cos 60^\circ\cos(40^\circ-2\alpha)=$

$$=\frac{\sin 90^\circ+\sin(50^\circ+2\alpha)-\cos(40^\circ-2\alpha)}{2}=\frac{1}{2}.\ ■$$

4.390. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$.

4.392. □ Имеем $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, откуда $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=2.$

Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1}{3}.\ ■$$

4.393. □ $\dfrac{p(\cos^3\alpha\sin\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha)+(\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{p\sin\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=p+2.\ ■$$

4.394. $f(\alpha)=7/9$.

4.398. □ Имеем

$$\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}(1+\sin 2\alpha)\frac{1}{\cos 2\alpha}+2\cos 4\alpha=\frac{1-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+2\cos 4\alpha=$$

$$=1+2\cos 4\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}(\sin 2\alpha+2\cos 4\alpha\sin 2\alpha)=\frac{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Здесь были использованы формулы $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}$ и (4.27). ■

4.401. □ Находим

$$\sin 6\alpha\sin^3 2\alpha+\cos 6\alpha\cos^3 2\alpha=\sin^2 2\alpha\,\frac{\cos 4\alpha-\cos 8\alpha}{2}+\cos^2 2\alpha\,\frac{\cos 8\alpha+\cos 4\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 8\alpha(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)+\cos 4\alpha)=\frac{1}{2}\cos 4\alpha\ (1+\cos 8\alpha)=\cos^3 4\alpha.$$

Здесь были использованы формулы (4.25), (4.26), (4.14) и (4.17). ■

4.405. □ Преобразуем числитель:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Аналогично в знаменателе получаем $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$, откуда и вытекает справедливость тождества. ■

4.408. □ $\frac{1+\cos 2\alpha+1+\cos 4\alpha+\ldots+1+\cos 2n\alpha}{2}=$

$$=\frac{n}{2}+\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\ldots+\sin(2n+1)\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{n}{2}+\frac{\sin(2n+1)\alpha-\sin\alpha}{4\sin\alpha}=$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}.\ ■$$

4.410. $(3/4)\sin 8\alpha$. **4.411.** $2\sin^3 2\alpha$. **4.412.** $-\cos^3 2x$. **4.413.** $(3/4)\sin 4\alpha$.

4.414. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$. **4.415.** $8\cos 16\alpha\cos^3 2\alpha$.

4.419. □ Сначала находим

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ}{4}=\frac{\sqrt{3}\left(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\sin 100^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)}{4}=\frac{3}{16}.$$

Аналогично получаем, что $(\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ)^2=\frac{1}{256}$. Наконец, имеем $\frac{3}{16}:\frac{1}{256}=48$. ■

4.422. □ Умножив и разделив левую часть на $2\sin\frac{\pi}{15}$, получим

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}\cdot 2}=\frac{\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}}{2^4\sin\frac{\pi}{15}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2^5\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}}{2^5\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2^6\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2^7\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2^7}. \blacksquare$$

4.425. $\square$ $\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}+4\cos 70^\circ=\dfrac{\cos 70^\circ+2\sin 140^\circ}{\cos 20^\circ}=$

$$=\frac{\cos 40^\circ\cos 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 40^\circ+2\sin 140^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 40^\circ\cos 30^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}. \blacksquare$$

4.429. $\square$ Пусть $\operatorname{arctg} 3=\alpha$ и $\operatorname{arcctg}(-1/2)=\beta$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{ctg}\beta=-1/2$, $\cos^2\alpha=1/10$, $\sin^2\alpha=9/10$, $\cos^2\beta=1/5$, $\sin^2\beta=4/5$, $\sin\alpha=3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{10}$, $\cos\beta=-1/\sqrt{5}$, $\sin\beta=2/\sqrt{5}$. Заметим, что $\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha\cos^2\beta+$ $+\cos^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$. После этого получаем $\sin^2(\alpha-\beta)=$ $=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}-2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}$. $\blacksquare$

4.434. $\square$ Пусть $\arccos\frac{36}{85}=\alpha$, $\arccos\frac{15}{17}=\beta$. Далее находим $\sin(\alpha-\beta)=\frac{77}{85}\cdot\frac{15}{17}-$ $-\frac{36}{85}\cdot\frac{8}{17}=\frac{3}{5}$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}$. Поскольку углы $\alpha-\beta$ и $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$ принадлежат I четверти, доказываемое равенство справедливо. $\blacksquare$

4.441. $-a/b$. **4.442.** $-b/a$. **4.443.** $-(2/3)\sqrt[4]{2}$.

4.444. $\square$ Заметим, что $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)=\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}$, $\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{5}$. Далее воспользуемся формулой $a^6-b^6=$ $=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$ и в результате получим — 0,007. $\blacksquare$

4.445. 6/25. **4.446.** 6/25.

4.447. $\square$ Пусть $\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)=\alpha$; тогда $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}+1$. Следовательно, $\cos 2\alpha=$ $=-1/\sqrt{2}$, откуда $\arccos(-1/\sqrt{2})=3\pi/4$. $\blacksquare$

4.448. $-\pi/4$. **4.449.** $(1-a^2)/(2a)$. **4.450.** 0,009. **4.451.** 1/8. **4.452.** $(1-\sqrt{5})/2$.

4.453. $\sqrt{10}-3$. **4.454.** 0,98. **4.455.** $-119/120$.

4.456. $\square$ Пусть $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$; тогда $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Аналогично, пусть $\operatorname{arcctg}(-2)=\beta$; отсюда $\sin 2\beta=-\frac{4}{5}$, $\cos 2\beta=-\frac{3}{5}$. В результате получим $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\frac{1}{5}$. $\blacksquare$

4.457. -2. **4.458.** $11/2$. **4.459.** $-2\sqrt{5}/5$. **4.460.** $-2\sqrt{5}/5$. **4.461.** $2a/b$. **4.462.** $-1/2$.

4.463. $\square$ Используя формулы (4.28) и (4.29), получим уравнение $\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}-\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$. Решив это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}(x/2)=z$, находим $z_1=3+2\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}(x/2)=\sqrt{2}/2$ и $\operatorname{ctg}(x/2)=3-\sqrt{2}$. $\blacksquare$

4.465. $\square$ Имеем $\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha}{2}=\sin 2\alpha$, откуда $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2m^2}{1+m^2}$. $\blacksquare$

4.466. $\square$ Заметим, что $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2m^2-1$. Теперь находим

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2=\frac{1+3m^2}{4}.\ \blacksquare$$

4.467. $m(m^2+1)/2$. **4.468.** $2(1-m^2)$. **4.469.** $-38/125$.

4.472. $\square$ В левой части получаем $2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+$ $+2\sin\frac{2n+1}{2}C\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C$. Учитывая, что $A+B+C=\pi$, находим

$$\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)=\sin\frac{2n+1}{2}(\pi-C)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)-\frac{2n+1}{2}C\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}C;\ \sin\frac{2n+1}{2}C=(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}(A+B).$$

Следовательно,

$$2\cos\frac{2n+1}{2}C\left((-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}(A+B)\right)=$$

$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C,$$

т. е. мы пришли к выражению, стоящему в правой части. $\blacksquare$

4.474. $\square$ Допустим, что $\sin^x\varphi+\cos^x\varphi=1$ при любом φ. Тогда должно быть $\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^x=1$, т. е. $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=1$, а это возможно только при $x=2$. $\blacksquare$

4.475. $2+\cos 2\alpha$. **4.476.** $1/\sqrt{2}$ при $\alpha=\pi/16$. **4.477.** 2 при $\alpha=\pi/16$.

4.481. □ Имеем $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}=\dfrac{\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin 4\alpha}$. Наименьшее значение этого выражения, равное 2, достигается при $\alpha=\pi/8$. ■

4.482. 1/2 при $\alpha=\pi/4$. **4.484.** $-76/125$. **4.485.** 4 при $\alpha=\pi/4$.

4.486. □ Наименьшее значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-0{,}5\sin^2 2\alpha$ равно 1/2 и достигается при $\alpha=\pi/4$. Следовательно, наибольшее значение выражения $1/(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$ равно 2 и достигается при $\alpha=\pi/4$. ■

4.487. 41/125.

4.488. □ Имеем

$$\overbrace{(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)}^{A}=\overbrace{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)}^{B}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB=BA\Rightarrow(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-$$
$$-\sin^2\gamma)\Rightarrow A^2=B^2=\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\Rightarrow A=B=|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|.$$ ■

4.490. □ Имеем $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-(3/4)\sin^2 2\alpha$. Наименьшее значение этого выражения равно 1/4 и достигается при $\alpha=\pi/4$. ■

4.491. 1/2 при $\alpha=\pi/4$.

4.492. □ Заметим, что $2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)=(\cos(\alpha+x)+\cos(\alpha-x))\cos(\alpha+x)$. Далее имеем

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^2(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)\cos(\alpha+x)+\cos^2(\alpha+x)=$$
$$=\cos^2 x-\cos(\alpha-x)\cos(\alpha+x)=\cos^2 x-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2x)=$$
$$=\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}(2\cos^2 x-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\sin^2\alpha=\text{const}.$$ ■

4.493. $\dfrac{\sin(n+1)2\alpha\cdot\cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$.

4.495. □ Находим

$$\operatorname{tg}142^\circ30'=-\operatorname{tg}37^\circ30'=-\operatorname{tg}\frac{45^\circ+30^\circ}{2}=\frac{\cos(45^\circ+30^\circ)-1}{\sin(45^\circ+30^\circ)}=$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1-2\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2}=$$
$$=2-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Отсюда получаем, что заданная сумма равна 2. ■

4.496. □ Согласно теореме косинусов, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2+2bc(1-$ $-\cos A)=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}$, откуда $a\geqslant 2\sin\frac{A}{2}\sqrt{bc}$. Следовательно, $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}$. Окончательно имеем

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1.$$ ■

4.497. □ Так как $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z)=\operatorname{tg}\pi$, то $\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1-yz}}{1-x\dfrac{x+z}{1-yz}}=0$. Следовательно, $x+y+z=xyz$. ■

4.499. □ Воспользуемся тем, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, то $8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant 1$ (см. задачу 4.496). Подберем α, β, γ так, чтобы $\beta+\gamma=A$, $\alpha+\gamma=B$ и $\alpha+\beta=C$ (это возможно сделать всегда). Заметим, что $\sin\alpha=\cos(\beta+\gamma)$, $\sin\beta=\cos(\alpha+\gamma)$, $\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)$. Таким образом, $8\cos A\cos B\cos C\leqslant 1$. ■

4.500. □ Покажем сначала, что $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$. Действительно, вычитая из правой части этого равенства левую и учитывая, что $A+B+C=\pi$, получим

$$1-\sin^2 A+1-\sin^2 B-\sin^2(A+B)-2\cos A\cos B\cos(A+B)=$$
$$=\cos^2 A+\cos^2 B-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2-2\cos A\cos B(\cos A\cos B-$$
$$-\sin A\sin B)=\cos^2 A+\cos^2 B-\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B-2\cos^2 A\cos^2 B=$$
$$=\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A)-\cos^2 A(\sin^2 B+\cos^2 B)=0.$$

Итак, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C\leqslant 2+2\cdot\frac{1}{8}=2\frac{1}{4}$. ■

ГЛАВА 5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

(Всюду, если нет иных указаний, предполагается, что k, l, m, n принимают любые целые значения.)

5.001. □ Разделив на 2 обе части уравнения и учитывая, что $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$, имеем

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x;$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0;\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0.$$

Отсюда получим:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0,\ 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1);$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0,\ x_2=\frac{\pi}{12}+\pi k.$ ■

5.002. $z_1=35°+120°\cdot k,\ z_2=55°+120°\cdot k.$ **5.003.** $z_1=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ z_2=\frac{\pi}{20}(8k+3).$

5.004. □ Перепишем уравнение в виде $\cos 4x=\sin x\cos 3x+0{,}5(\sin 4x+\sin 2x)$. Преобразуем правую часть уравнения:

$\sin x\cos 3x+0{,}5\cdot 2\sin 3x\cos x=\sin 4x.$

Значит, $\cos 4x=\sin 4x$, откуда $\operatorname{tg} 4x=1$, $4x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$ (деление на $\cos 4x$ возможно, так как $\cos 4x=0$ не является решением уравнения). ■

5.005. $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1),\quad x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}.$ **5.006.** $z_1=\pi k,\quad z_2=\frac{\pi}{6}(12k\pm 5).$

5.007. $x_1=\frac{\pi k}{5},\ x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm 3).$

5.008. □ Используя формулы приведения, имеем $\cos t\cos 6t+\sin t\sin 6t=2\cos 5t\cos t$; $\cos 5t=2\cos 5t\cos t$; $\cos 5t(1-2\cos t)=0$. Отсюда получим:

1) $\cos 5t=0;\ 5t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_1=\frac{\pi}{10}(2k+1);$

2) $\cos t=\frac{1}{2};\ t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$ ■

5.009. $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1),\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}.$ **5.010.** $x_1=75°+180°\cdot k,\ x_2=45°\cdot k-3°45'.$

5.011. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$ **5.012.** $x_1=\frac{2\pi k}{5},\ x_2=\frac{2\pi}{9}(3k-2).$

5.013. □ $2\sin 4x\cos x=\sin 4x;\ \sin 4x(2\cos x-1)=0;$

1) $\sin 4x=0,\ 4x=\pi k;\ x_1=\frac{\pi k}{4}$;

2) $\cos x=\frac{1}{2},\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. ■

5.014. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **5.015.** $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.016. $x_1=\frac{\pi}{12}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **5.017.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.018. $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-\frac{1}{\pi}$.

5.019. □ $\cos x-\cos 3x=\sqrt{3}\sin x$; $2\sin x\sin 2x=\sqrt{3}\sin x$; $\sin x(2\sin 2x-\sqrt{3})=0$;
1) $\sin x=0,\ x_1=\pi k$;

2) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. ■

5.020. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7}$. **5.021.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(8k\pm3)$.

5.022. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$. **5.023.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$.

5.024. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$.

5.025. □ $2\sin 30^\circ\cos(15^\circ-x)=1$; поскольку $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, имеем $\cos(15^\circ-x)=1$, $15^\circ-x=-360^\circ\cdot k$, $x=15^\circ+360^\circ\cdot k$. ■

5.026. $x_1=100^\circ+360^\circ\cdot k$, $x_2=-20^\circ+360^\circ\cdot k$. **5.027.** $x_1=135^\circ+360^\circ\cdot k$, $x_2=-105^\circ+$ $+360^\circ\cdot k$. **5.028.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **5.029.** $x=180^\circ\cdot k-25^\circ$.

5.030. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **5.031.** $x=\frac{\pi k}{3}$.

5.032. □ Представив $2\sin 3x$ в виде $\sin 3x+\sin 3x$, имеем $\sin 9x-\sin 3x=\sin 3x$; $2\cos 6x\sin 3x=\sin 3x$. Отсюда получим:

1) $\sin 3x=0,\ 3x=\pi k;\ x_1=\frac{\pi k}{3}$;

2) $\cos 6x=1/2,\ 6x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{18}(6k\pm1)$. ■

5.033. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **5.034.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **5.035.** $x_1=$ $=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$.

5.036. □ Заметив, что $\sin z+\sin 3z=2\sin 2z\cos z$, а $\cos z+\cos 3z=2\cos 2z\cos z$, имеем

$2\sin 2z\cos z+\sin 2z=2\cos 2z\cos z+\cos 2z$;

$\sin 2z(2\cos z+1)=\cos 2z(2\cos z+1)$; $(2\cos z+1)(\sin 2z-\cos 2z)=0$; отсюда получим:

1) $2\cos z+1=0$, $\cos z=-1/2$; $z_1=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$;

2) $\sin 2z=\cos 2z$, $\operatorname{tg} 2z=1$, $2z=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. ■

5.037. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **5.038.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **5.039.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{10}(4k+1)$. **5.040.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **5.041.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$.
5.042. $x=\frac{\pi k}{5}$.

5.043. □ $2\sin^2 3x=\operatorname{tg} 3x$, $\cos 3x\neq 0$; $2\sin^2 3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$; $2\sin^2 3x\cos 3x=\sin 3x$;

1) $\sin 3x=0$, $3x=\pi k$; $x_1=\frac{\pi k}{3}$;

2) $2\sin 3x\cos 3x=1$; $\sin 6x=1$, $6x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. ■

5.044. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **5.045.** $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\frac{4\pi}{3}(3k\pm 1)$.
5.046. $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **5.047.** $t_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{3}(2k+1)$.
5.048. □ $1+\sin 2x=\cos^2 3x+2\sin 3x\cos 3x+\sin^2 3x$;
$1+\sin 2x=1+\sin 6x$; $\sin 6x-\sin 2x=0$; $\cos 4x\sin 2x=0$;

1) $\sin 2x=0$; $2x=\pi k$; $x_1=\frac{\pi k}{2}$;

2) $\cos 4x=0$; $4x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. ■

5.049. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **5.050.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3)$.
5.051. □ $2\sin 4x\cos x=2\left(\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}\right)$;
$2\sin 4x\cos x=\cos 4x+\cos 6x$; $\sin 4x\cos x=\cos 5x\cos x$;

1) $\cos x=0$, $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$;

2) $\cos 5x=\sin 4x$; $\cos 5x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{9x}{2}\right)=0$; отсюда получим:

а) $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ — эти значения входят в решение x_1;
б) $\frac{9x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi k$, $9x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. ■

5.052. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{11}$. **5.053.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.054. $x=\frac{\pi}{12}(2k+1)$.

5.055. □ $2(\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x)=3$; $1+\cos 6x+1+\cos 8x+1+\cos 10x=3$; $\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=0$; $\cos 8x+2\cos 8x\cos 2x=0$;

1) $\cos 8x=0$, $8x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$;

2) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. ■

5.056. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **5.057.** $x_1=\pi k/2$, $x_2=\pi k/5$.

5.058. $x_1=\pi k/2$, $x_2=\pi k/9$. **5.059.** $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **5.060.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{5}$, $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$.

5.061. □ $4\cos z\cdot 2\cos(60^\circ-z)\cos(60^\circ+z)+1=0$; $4\cos z(\cos 120^\circ+\cos 2z)+1=0$; $-2\cos z+4\cos z\cdot\cos 2z+1=0$; $-2\cos z+2(\cos 3z+\cos z)+1=0$; $\cos 3z=-\frac{1}{2}$; $3z=\pm 120^\circ+360^\circ\cdot k$; $z=$ $=\pm 40^\circ+120^\circ\cdot k$. ■

5.062. $z=(-1)^k\cdot 10^\circ+60^\circ\cdot k$. **5.063.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **5.064.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi k}{7}$. **5.065.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **5.066.** $x=\frac{\pi k}{10}$.

5.067. □ $2\cos(x+1)\sin 2(x+1)=2\cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$; $\sin 3(x+1)+\sin(x+1)=\sin 7(x+1)+\sin(x+1)$; $\sin 3(x+1)-\sin 7(x+1)=0$; $\sin 2(x+1)\cos 5(x+1)=0$;

1) $\sin 2(x+1)=0$; $2(x+1)=\pi k$; $x_1=\frac{\pi k}{2}-1$;

2) $\cos 5(x+1)=0$; $5(x+1)=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. ■

5.068. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{9}(6k\pm 1)$. **5.069.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **5.070.** $x=\frac{2\pi}{9}(3k\pm 1)$.

5.071. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$.

5.072. □ Заметим, что

$2\cos x\cos 2x=\cos 3x+\cos x$,

$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)=\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)$,

$2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-\sin(\pi-9x)$.

Тогда получим

$\cos 3x+\cos x=\cos 3x+\sin 5x+\cos x-\sin 9x$;

$\sin 9x-\sin 5x=0$; $\sin 2x\cos 7x=0$;

1) $\sin 2x=0$; $2x=\pi k$; $x_1=\frac{\pi k}{2}$;

2) $\cos 7x=0$; $7x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$ — это решение включает значения $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ из решения x_1. Исключив указанные значения из x_1, получим ответ: $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. ■

5.073. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.074.** $x=\frac{\pi k}{6}$. **5.075.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. **5.076.** $x=\frac{\pi k}{4}$.

5.077. $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$.

5.078. □ Заменив $2\sin^2\frac{t}{2}$ на $1-\cos t$, имеем: $\operatorname{ctg} t-\sin t=1-\cos t$; $\operatorname{ctg} t-1=$ $=\sin t-\cos t$; $\sin t\neq 0$; $\frac{\cos t-\sin t}{\sin t}=\sin t-\cos t$; $(\sin t-\cos t)(\sin t+1)=0$. Отсюда получим:

1) $\sin t-\cos t=0$, $\operatorname{tg} t=1$, $t_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

2) $\sin t=-1$, $t_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. ■

5.079. $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **5.080.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.081. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.082.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **5.083.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.084. □ Заменяя $2\cos^2\frac{x}{2}$ на $1+\cos x$ и разлагая левую часть уравнения на множители, имеем: $\cos^3 x+\cos^2 x-2(1+\cos x)=0$; $\cos^2 x(\cos x+1)-$ $-2(1+\cos x)=0$; $(1+\cos x)(\cos^2 x-2)=0$; $\cos^2 x-2\neq 0$, так как $|\cos x|\leqslant 1$; $1+\cos x=0$; $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi k$. ■

5.085. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.086.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.087.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.088. □ Левая часть уравнения определена при $\sin x\neq 0$. Заменив $2\sin^2 x$ на $1-\cos 2x$, а $2\cos^2 x$ на $1+\cos 2x$, получим квадратное уравнение относительно $\cos 2x$:

$6\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}-(1+\cos 2x)=3$; $6+6\cos 2x-1+\cos^2 2x=3-3\cos 2x$;
$\cos^2 2x+9\cos 2x+2=0$.

Так как $\left|\frac{-9-\sqrt{73}}{2}\right|>1$, то $\cos 2x\neq\frac{-9-\sqrt{73}}{2}$; следовательно, $\cos 2x=\frac{-9+\sqrt{73}}{2}$, $2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+2\pi k$; $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+$ $+\pi k$. ■

5.089. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **5.090.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)-\frac{1}{2},$ $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}-\frac{1}{2}.$

5.091. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **5.092.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1).$ **5.093.** $x=\pm\arccos 0{,}8+2\pi k.$

5.094. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **5.095.** $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,$ $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1).$

5.096. □ $\operatorname{tg}^2 3x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4};$ $\operatorname{tg}^2 3x=1;$ $\operatorname{tg}^2 3x=\frac{1}{2};$

$\operatorname{tg} 3x=\pm 1,$ $3x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k;$ $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}.$

$\operatorname{tg} 3x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$ $3x=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k;$ $x_2=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}.$ ■

5.097. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1).$ **5.098.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1).$ **5.099.** $z=\frac{\pi}{4}(2k+1).$ **5.100.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1).$

5.101. □ Воспользуемся тождеством $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$, откуда $\sin^4 x+\cos^4 x=$ $=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. Тогда получим $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\sin^2 2x+$ $+\frac{1}{4};$ $1-2\sin^2 2x=0;$ $\cos 4x=0,$ $4x=\frac{\pi}{2}+\pi k;$ $x=\frac{\pi}{8}(2k+1).$ ■

5.102. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1).$ **5.103.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1).$

5.104. □ Уравнение определено при $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$. Преобразуем его левую часть:

$$7+2\sin 2x+\frac{3}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$
$$=7+2\sin 2x+\frac{3(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}=7+2\sin 2x+\frac{3}{\sin 2x}.$$

Имеем: $2\sin^2 2x+7\sin 2x+3=0;$ $\sin 2x\neq\frac{-7-5}{4}=-3;$ $\sin 2x=\frac{-7+5}{4}=-\frac{1}{2},$

$2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;$ $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}.$ ■

5.105. $x=\frac{\pi}{12}(4k\pm 1).$ **5.106.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}.$

5.107. □ Уравнение определено при $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 4x\neq 0$. Так как $\operatorname{tg} x+$ $+\operatorname{ctg} x=\frac{2}{\sin 2x}$, то $\frac{2}{\sin 2x}=\frac{2}{\cos 4x}$, откуда $\sin 2x=\cos 4x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-$ $-\cos 4x=0;$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0;$

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0,$ $\frac{\pi}{4}+x=\pi k;$ $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1);$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0,$ $\frac{\pi}{4}-3x=-\pi k;$ $x_2=\frac{\pi}{12}(4k+1)$ — это решение включает x_1, поэтому $x=\frac{\pi}{12}(4k+1).$ ■

5.108. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.109.** $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi k$.

5.110. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$2\sin^3 x-\sin x-\cos 2x=\sin x\,(2\sin^2 x-1)-\cos 2x=-\cos 2x\,(\sin x+1)$.

Имеем $(1+\sin x)\cos 2x=0$, откуда получим:

1) $\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$;

2) $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. ■

5.111. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.112.** $x=\frac{\pi}{6}(3k+1)$.

5.113. □ Уравнение определено при $\sin z\neq 0$, $1+\cos z\neq 0$. Имеем $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-$ $-\frac{\cos z}{\sin z}$; $\frac{\sin z}{1+\cos z}=\frac{2\sin z-\cos z}{\sin z}$; $\sin^2 z=2\sin z-\cos z+2\sin z\cos z-\cos^2 z$;

$1+\cos z=2\sin z\,(1+\cos z)$; так как $1+\cos z\neq 0$, то $\sin z=\frac{1}{2}$, $z=(-1)^k\frac{\pi}{6}+$ $+\pi k$. ■

5.114. $t=\frac{\pi}{6}\left(3k\pm 1\right)$.

5.115. □ Так как $\cos x=0$ не является решением уравнения, то, разделив на $\cos x$, получим $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3=0$; $\operatorname{tg} x=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2$; $\operatorname{tg} x=-1$, $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $\operatorname{tg} x=3$, $x_2=\operatorname{arctg} 3+\pi k$. ■

5.116. $x=\frac{\pi}{9}(3k\pm 1)$. **5.117.** $x_1=\pi k-\operatorname{arctg} 3$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.118.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **5.119.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.120. □ $\sin z=\sin^2 z+\cos^2 z-\cos z$; $\sin z=1-\cos z$;

$2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}=2\sin^2\frac{z}{2}$, $\cos\frac{z}{2}\neq 0$; $\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}=0$;

1) $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=0$, $\frac{z}{2}=\pi k$; $z_1=2\pi k$;

2) $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=1$, $\frac{z}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. ■

5.121. $z_1=2\operatorname{arcctg} 3+2\pi k$, $z_2=-2\operatorname{arctg} 7+2\pi k$. **5.122.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.123. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arcctg} 5+\pi k$. **5.124.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi k$.

5.125. $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\operatorname{arctg} 4+\pi k$.

5.126. □ $4\sin^2 x-4\sin x\cos x+2\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$;

$3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$, $\cos x\neq 0$;

$3\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+1=0$; $\operatorname{tg} x=\frac{2\pm 1}{3}$;

1) $\operatorname{tg} x=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

2) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. ■

5.127. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **5.128.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$.

5.129. □ $4\cdot 2\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{3z}{2}+\frac{1}{3}\left(\cos^2\frac{3z}{2}-\sin^2\frac{3z}{2}\right)=3\left(\sin^2\frac{3z}{2}+\cos^2\frac{3z}{2}\right)$, $\cos^2\frac{3z}{2}\neq 0$;

$24\operatorname{tg}\frac{3z}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{3z}{2}=9\operatorname{tg}^2\frac{3z}{2}+9$; $5\operatorname{tg}^2\frac{3z}{2}-12\operatorname{tg}\frac{3z}{2}+4=0$; $\operatorname{tg}\frac{3z}{2}=\frac{6\pm 4}{5}$;

1) $\frac{3z}{2}=\operatorname{arctg}2+\pi k$; $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2\pi k}{3}$;

2) $\frac{3z}{2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi k$; $z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{3}$. ■

5.130. $z_1=\frac{\pi}{10}(4k+1)$, $z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2\pi k}{5}$. **5.131.** $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$.

5.132. $x_1=\frac{3\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\pi(3k\pm 1)$. **5.133.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$.

5.134. □ $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2}\neq 0$; $2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}$; $\sin\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$;

$x=\pi(4k+1)$. ■

5.135. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.136.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. **5.137.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$.

5.138. □ $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ)=1-\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ$; $\operatorname{tg} x=\frac{1-\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ}{\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ}$;

$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\operatorname{tg}(20^\circ+40^\circ)}$; $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}60^\circ$; $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}30^\circ$; $x=30^\circ+180^\circ\cdot k$. ■

5.139. $x=60^\circ+180^\circ\cdot k$. **5.140.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **5.141.** $t_1=-31^\circ+180^\circ\cdot k$, $t_2=89^\circ+180^\circ\cdot k$. **5.142.** $x=\pm 40^\circ+120^\circ\cdot k$. **5.143.** $x=\pi k/8$.

5.144. □ $2\sin z\cos z(\sin^2 z-\cos^2 z)=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\sin 2z\cos 2z=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

$\sin 4z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$; $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$. ■

5.145. $t=\frac{\pi}{16}(4k+1)$.

5.146. □ $\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+2\,\frac{\operatorname{tg} x-1+\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x-1}=4$, $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $|\operatorname{tg} x|\neq 1$;

$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}+\frac{4\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=4$; $\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-2\operatorname{tg}2x=4$; $\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x=2$;

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=2;\ \frac{2\cos 4x}{\sin 4x}=2;\ \operatorname{ctg} 4x=1;\ 4x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ x=\frac{\pi}{16}(4k+1).\ \blacksquare$$

5.147. $x=\frac{\pi}{12}(6k+1)$. **5.148.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2=\pi k$. **5.149.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.150. $\square$ $\dfrac{\frac{4\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}+\sin^2 2x+1=0,\ \sin x\neq 0;$

$4\sin x\cos x+\sin^2 2x+1=0;\ \sin^2 2x+2\sin 2x+1=0;$

$(\sin 2x+1)^2=0;\ \sin 2x=-1;\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ x=\frac{\pi}{4}(4k-1).\ \blacksquare$

5.151. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **5.152.** $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$.

5.153. $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$.

5.154. $\square$ $5(1+\cos x)=2+(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x);$
$5+5\cos x=2+(1-\cos^2 x)-\cos^2 x;\ 2\cos^2 x+5\cos x+2=0;$

$\cos x\neq\frac{-5-\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5-3}{4}=-2,\ \cos x=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2};\ x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1).\ \blacksquare$

5.155. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **5.156.** $t_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.157. $\square$ $\dfrac{\sin^2 x-2}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},\ \cos\frac{x}{2}\neq 0;$

$\dfrac{\sin^2 x-2}{4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2};\ \dfrac{2-\sin^2 x}{4\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2};$

$2-\sin^2 x=4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2};\ 2-\sin^2 x=\sin^2 x;\ \sin^2 x=1;\ \sin x=\pm 1;$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k.\ \blacksquare$

5.158. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.159.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.160.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$.

5.161. $\square$ $\dfrac{4\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x+4(\sin^2 x-1)}+1-2\operatorname{tg}^2 x=0,\ \cos x\neq 0;$

$\dfrac{4\sin^2 x(\cos^2 x-1)}{4\cos^2 x(\sin^2 x-1)}+1-2\operatorname{tg}^2 x=0;$

$\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x+1=0;\ (\operatorname{tg}^2 x-1)^2=0;\ \operatorname{tg} x=\pm 1;\ x=\frac{\pi}{4}(2k+1).\ \blacksquare$

5.162. $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(4k+1)$. **5.163.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.164.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$.

5.165. □ $\frac{1+\sin^2 z+1+\cos^2 z}{1+\sin^2 z+\cos^2 z+\sin^2 z\cos^2 z}=\frac{16}{11}$; $\frac{3}{2+\sin^2 z\cos^2 z}=\frac{16}{11}$;

$33=32+4\sin^2 2z$; $4\sin^2 2z=1$; $\sin 2z=\pm\frac{1}{2}$; $2z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. ■

5.166. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **5.167.** $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$.

5.168. □ $2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+t\right)-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-t\right)=2\sin t$;

$1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)-\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2t\right)\right)=2\sin t$;

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-2t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)=2\sin t$; $2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2t=2\sin t$; $\sqrt{2}\sin t\cos t=\sin t$;

1) $\sin t=0$, $t_1=\pi k$;

2) $\cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k\pm1)$. ■

5.169. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.170.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$.

5.171. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.172. □ $\frac{2\sin(x-15^\circ)\cos(x+15^\circ)}{2\cos(x-15^\circ)\sin(x+15^\circ)}=\frac{1}{3}$, $\cos(x-15^\circ)\neq0$; $\sin(x+15^\circ)\neq0$;

$\frac{2\sin 2x-30^\circ}{2\sin 2x+30^\circ}=\frac{1}{3}$; $\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+1}=\frac{1}{3}$; $2\sin 2x+1\neq0$;

$6\sin 2x-3=2\sin 2x+1$;

$\sin 2x=1$; $2x=90^\circ+360^\circ k$; $x=45^\circ(4k+1)$. ■

5.173. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **5.174.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.175. □ $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot9^{1/\cos x}$, $\cos x\neq0$; $9^{\cos x}=9^{\sin x+1/\cos x}$;

$\cos x=\sin x+1/\cos x$; $\cos^2 x=\sin x\cos x+1$;

$\cos^2 x=\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x$; $\sin^2 x+\sin x\cos x=0$;

1) $\sin x=0$; $x_1=\pi k$;

2) $\sin x=-\cos x$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. ■

5.176. □ Здесь $\cos 2x\neq0$, $\cos 5x\neq0$. Тогда $\cos 2x\cos 5x+\sin 2x\sin 5x=$
$=\sqrt{2}\sin 2x\cos 3x$; $\cos 3x=\sqrt{2}\sin 2x\cos 3x$. Отсюда получим:

1) $\cos 3x=0$; $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, но при $k=3l+1$ имеем $\cos 5x=0$, поэтому
$x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$;

2) $\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. ■

5.177. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **5.178.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k+1)$.

5.179. □ Здесь $\cos 6x\neq 0$. Следовательно, $\sin 6x\cos 2x-\sin 2x\cos 6x=$ $=2\sin 4x\cos 6x$; $\sin 4x=2\sin 4x\cos 6x$, откуда получим:

1) $\sin 4x=0$; $x=\frac{\pi k}{4}$, но при $k=2l+1$ имеем $\cos 6x=0$, поэтому $x_1=\frac{\pi k}{2}$;

2) $\cos 6x=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$. ■

5.180. $x_1=\frac{\pi}{15}(6k\pm 1)$, $x_2=\pi k$. **5.181.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.182. □ Запишем данное уравнение в виде $2\sin 2x\cdot 2\sin 6x\cos 4x+\cos 12x=0$ и преобразуем его левую часть:

$$2\sin 2x(\sin 10x+\sin 2x)+\cos 12x=2\sin 2x\sin 10x+2\sin^2 2x+\cos 12x=$$
$$=\cos 8x-\cos 12x+2\sin^2 2x+\cos 12x=2\cos^2 4x-1+1-\cos 4x=$$
$$=\cos 4x(2\cos 4x-1).$$

Имеем $\cos 4x(2\cos 4x-1)=0$, откуда получим:

1) $\cos 4x=0$; $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$;

2) $\cos 4x=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. ■

5.183. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **5.184.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.185.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{24}(2k+1)$. **5.186.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.187. □ Имеем $\operatorname{tg}(120°+3x)+\operatorname{tg}(40°+x)=2\sin(80°+2x)$. Пусть $40°+x=y$; тогда

$\operatorname{tg}3y+\operatorname{tg}y=2\sin 2y$; $\cos 3y\neq 0$, откуда следует $\cos y\neq 0$;

$$\frac{\sin 4y}{\cos y\cos 3y}=2\sin 2y;\ \frac{\sin 2y\cos 2y}{\cos y\cos 3y}=\sin 2y.$$

Отсюда получим:

1) $\sin 2y=0$; так как $\cos y\neq 0$, то $\sin y=0$, т. е. $y_1=180°\cdot k$;

2) $\cos 2y=\cos y\cos 3y$; $2\cos 2y=\cos 4y+\cos 2y$; $\cos 2y-\cos 4y=0$; $\sin 3y\times$ $\times\sin y=0$; $\sin 3y=0$, $y_2=60°\cdot k$ (это решение включает y_1).

Ответ: $x=60°\cdot k-40°$. ■

5.188. $x_1=-5°+60°\cdot k$, $x_2=70°+90°\cdot k$. **5.189.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$.

5.190. $t_1=\frac{\pi k}{4}$ $(k\neq 4l+2)$, $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$.

5.191. □ $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0$, $\sin 3x\neq 0$, $\sin 5x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$;

$$\frac{\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0;\ -\frac{\cos 5x}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=0;$$

1) $\cos 5x=0$; $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$;

2) $2\sin 5x-2\cos 2x\sin 3x=0$; $2\sin 5x=\sin 5x+\sin x$;
$\sin 5x-\sin x=0$; $\sin 2x\cos 3x=0$;

$x_2=\frac{\pi k}{2}$, $k\neq 2l$, так как при этом $\sin 3x=\sin 5x=0$; $x_3=\frac{\pi}{6}(2k+1)$ включает решение x_2..

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. ■

5.192. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$.

5.193. □ Здесь $\cos 5t\neq 0$, откуда следует $\cos t\neq 0$. Тогда $\frac{\sin t}{\cos t\cos^2 5t}-$ $-\frac{\sin 5t}{\cos 5t\cos^2 t}=0$; $\sin t\cos t-\sin 5t\cos 5t=0$; $\sin 2t-\sin 10t=0$;
$\sin 4t\cos 6t=0$. Далее имеем:

1) $\cos 6t=0$; $t_1=\frac{\pi}{12}(2k+1)$;

2) $\sin 4t=0$, $t=\frac{\pi k}{4}$; при этом $k\neq 4l+2$, поскольку $\cos 5t\neq 0$, следовательно, остаются значения $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t=\pi k$. Но первая часть решения входит в t_1 и, значит, $t_2=\pi k$. ■

5.194. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.195.** $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **5.196.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$.

5.197. □ Здесь $\operatorname{tg} x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos x\neq 0$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\operatorname{tg} x\,\frac{3\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x-3\sin^2 x}=\operatorname{tg} x\,\frac{2\cos^2 x+\cos 2x}{\cos 2x-2\sin^2 x}=\operatorname{tg} x\,\frac{1+2\cos 2x}{2\cos 2x-1}=$$
$$=\frac{\sin x+2\sin x\cos 2x}{2\cos x\cos 2x-\cos x}=\frac{\sin x+\sin 3x-\sin x}{\cos x+\cos 3x-\cos x}=\operatorname{tg} 3x.$$

Тогда $\operatorname{tg} 3x=\sin 6x$, откуда получим:

1) $\sin 3x=0$; $x_1=\frac{\pi k}{3}$;

2) $\cos^2 3x=\frac{1}{2}$, $1+\cos 6x=1$, $\cos 6x=0$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. ■

5.198. $z=-20^\circ+60^\circ\cdot k$. **5.199.** $t=\frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k\neq 7l+3$.

5.200. □ Пусть $y=35^\circ+x$. Тогда $\operatorname{tg} y\operatorname{tg}(45^\circ+y)=\frac{2}{3}$, $\cos y\neq 0$, $\operatorname{tg}(45^\circ+y)\neq 0$;

$\operatorname{tg} y \dfrac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}=\dfrac{2}{3}$; $\quad 3\operatorname{tg} y+3\operatorname{tg}^2 y=2-2\operatorname{tg} y$; $\quad 3\operatorname{tg}^2 y+5\operatorname{tg} y-2=0$; $\quad \operatorname{tg} y_1=\dfrac{1}{3}$;
$\operatorname{tg} y_2=-2$; $x_1=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}-35°+180°\cdot k$; $x_2=-\operatorname{arctg} 2-35°+180°\cdot k$. ■

5.201. $x=45°+180°\cdot k$. **5.202.** $x_1=\dfrac{\pi k}{4}$, $\quad x_2=\dfrac{\pi}{12}(2k+1)$. **5.203.** $t=\dfrac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

5.204. $x_1=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$, $\quad x_2=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $\quad x_3=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\pi k$.

5.205. $z_1=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$, $z_2=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.206.** $t_1=\dfrac{\pi k}{3}$, $t_2=\dfrac{\pi}{12}(2k+1)$.

5.207. □ Здесь $\cos z\neq 0$, $\sin z\neq 0$. Заметим, что

$$\operatorname{ctg} 2z\operatorname{ctg} z+1=\frac{\cos 2z\cos z+\sin 2z\sin z}{\sin 2z\sin z}=\frac{\cos z}{2\sin z\cos z\sin z}=\frac{1}{2\sin^2 z}.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{\sin^4 z}+\frac{1}{\cos^4 z}=\frac{160}{9};\ \sin^4 z+\cos^4 z=\frac{160}{9}\sin^4 z\cos^4 z.$$

Так как $\sin^4 z+\cos^4 z+2\sin^2 z\cos^2 z=(\sin^2 z+\cos^2 z)^2=1$, то уравнение примет вид $1-2\sin^2 z\cos^2 z=\dfrac{160}{9}\sin^4 z\cos^4 z$, или $20\sin^4 2z+9\sin^2 2z-18=0$, или $20u^2+9u-18=0$, где $u=\sin^2 2z$. Отсюда находим $u=\dfrac{3}{4}$ (берем только положительный корень). Итак, $\sin 2z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $z=\dfrac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. ■

5.208. $z=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.209.** $x=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.210.** $z=\dfrac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

5.211. □ Преобразуем левую часть уравнения (здесь $\sin z\neq 0$, $\cos z\neq 0$):

$$\frac{\sin^3 z}{\cos^3 z}+\frac{\cos^3 z}{\sin^3 z}-\frac{8}{8\sin^3 z\cos^3 z}=\frac{\sin^6 z+\cos^6 z-1}{\sin^3 z\cos^3 z}=$$
$$=\frac{\sin^6 z+\cos^6 z-(\sin^2 z+\cos^2 z)^3}{\sin^3 z\cos^3 z}=\frac{-3\sin^4 z\cos^2 z-3\sin^2 z\cos^4 z}{\sin^3 z\cos^3 z}=$$
$$=\frac{-3(\sin^2 z+\cos^2 z)}{\sin z\cos z}=\frac{-6}{\sin 2z}.$$

Следовательно, $\sin 2z=-\dfrac{1}{2}$, откуда $z=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$. ■

5.212. $t_1=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=(-1)^k\dfrac{1}{2}\arcsin(1-\sqrt{3})+\dfrac{\pi k}{2}$.

5.213. □ Воспользовавшись формулой $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, получим $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}=$ $=3$; $4\operatorname{tg}^2 x+2=3\operatorname{tg} x+3\operatorname{tg}^3 x$. Заметим, что $\operatorname{tg} x=1$ — решение этого уравнения; значит, $x=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$. Других решений нет. Действительно, $3\operatorname{tg}^3 x-$ $-4\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-2=3\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} x-2=(3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+$ $+2)(\operatorname{tg} x-1)$, где $3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+2\neq 0$ (поскольку $D<0$). ■

5.214. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.215.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.216. □ Имеем $2\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-5\cos^3 x=0$. Так как $\cos x=0$ не является решением уравнения, то после деления на $\cos^3 x$ получим $2\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg}^2 x-5=0$. Замечаем, что $\operatorname{tg} x=1$ удовлетворяет уравнению, поэтому можно выделить множитель $\operatorname{tg} x-1$:

$$2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg} x+5\operatorname{tg} x-5=0;\ (\operatorname{tg} x-1)(2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+5)=0.$$

Но $2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+5\neq 0$ (поскольку $D<0$). Итак, получаем ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. ■

5.217. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi k}{2}$. **5.218.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$.

5.219. □ $-\sin^3 2x+3\sin 2x\cos^2 2x+2\cos^3 2x=0$, $\cos 2x\neq 0$;

$\operatorname{tg}^3 2x-3\operatorname{tg} 2x-2=0$; $(\operatorname{tg} 2x+1)^2(\operatorname{tg} 2x-2)=0$; $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi k}{2}$. ■

5.220. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.221.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$.

5.222. □ $4\sin^4 x=1-\cos 4x+12\cos^4 x$; $4\sin^4 x-2\sin^2 2x-12\cos^4 x=0$; $2\sin^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x-6\cos^4 x=0$; $\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x-3=0$; $u^2-2u-3=0$, где $u=\operatorname{tg}^2 x$; $u=3$ (берем только положительный корень). Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. ■

5.223. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.224.** $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **5.225.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.226. □ Имеем $6\cos^3 2t+2\sin^3 2t=\cos 4t\,(3\cos 2t-\sin 2t)$, т. е. полагаем $3\cos 2t-\sin 2t\neq 0$ и, значит, $\operatorname{tg} 2t\neq 3$. Так как $\cos 4t=\cos^2 2t-\sin^2 2t$, то, раскрыв скобки и разделив на $\cos^3 2t\neq 0$, получим

$6+2\operatorname{tg}^3 2t=3-3\operatorname{tg}^2 2t-\operatorname{tg} 2t+\operatorname{tg}^3 2t$;
$\operatorname{tg}^3 2t+3\operatorname{tg}^2 2t+\operatorname{tg} 2t+3=0$; $(\operatorname{tg} 2t+3)(\operatorname{tg}^2 2t+1)=0$;

$\operatorname{tg}^2 2t+1\neq 0$, $\operatorname{tg} 2t=-3$; $t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3+\frac{\pi k}{2}$. ■

5.227. $t=\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k$.

5.228. □ Записав уравнение в виде

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin^2 t+2\sin t\cos t-\sin^2 t-\cos^2 t}{\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t+\cos^2 t},$$

разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 t$ ($\cos t\neq 0$): $\operatorname{tg} t=\frac{2\operatorname{tg} t-1}{2-2\operatorname{tg} t+\operatorname{tg}^2 t}$; $\operatorname{tg}^2 t-2\operatorname{tg} t+2\neq 0$ (поскольку $D<0$), следовательно, $\operatorname{tg}^3 t-2\operatorname{tg}^2 t+1=0$; $(\operatorname{tg} t-1)(\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{tg} t-1)=0$, откуда $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $t_3=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. ■

5.229. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=-\operatorname{arctg}2+\pi k$. **5.230.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, $x_3=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$.

5.231. □ Здесь $2\cos x-\sin x\neq 0$, т. е. $\operatorname{tg}x\neq 2$. Тогда $\sin^3 x+\cos^3 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(2\cos x-\sin x)$; $\cos^3 x-2\cos x\sin^2 x-\sin x\cos^2 x=0$, откуда получим:

1) $\cos x=0$; $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$;

2) $2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0$, $\cos x\neq 0$; $2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-1=0$; $\operatorname{tg}x=-1$, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. ■

5.232. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{2}$. **5.233.** $t_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$.

5.234. $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **5.235.** $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi k}{3}$.

5.236. □ Заметив, что $1+\sin 2z=(\sin z+\cos z)^2$, а $\cos 2z=(\sin z+\cos z)(\cos z-\sin z)$, разложим левую часть уравнения на множители: $(\sin z+\cos z)\times(\sin z+\cos z+1+\cos z-\sin z)=0$; $(\sin z+\cos z)(1+2\cos z)=0$. Отсюда имеем:

1) $\sin z+\cos z=0$; $\operatorname{tg}z=-1$; $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$;

2) $1+2\cos z=0$; $\cos z=-\frac{1}{2}$; $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. ■

5.237. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.238.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.239. □ Заметив, что $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$, а $\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos 2x$, получим $1-\sin 2x+\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=0$; $1-\sin 2x+\cos 2x(1-\sin 2x)=0$; $(1-\sin 2x)(1+\cos 2x)=0$, откуда $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. ■

5.240. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

5.241. □ $\sin^2 x+1-\cos x-\sin x(1-\cos x)+\operatorname{ctg}x=0$, $\sin x\neq 0$;
$\sin^3 x+\sin^2 x\cos x-\sin x\cos x-\sin^2 x+\sin x+\cos x=0$;
$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x+1)=0$, $\sin^2 x-\sin x+1\neq 0$; $\sin x+\cos x=0$;
$\operatorname{tg}x=-1$; $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. ■

5.242. $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **5.243.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$.

5.244. □ $\sin 2x\cos 2x\sin x+\sin 2x\sin x-(1+\cos 2x)=0$;
$\sin 2x\sin x(\cos 2x+1)-(1+\cos 2x)=0$; $(\sin 2x\sin x-1)(1+\cos 2x)=0$;
$\sin 2x\sin x-1\neq 0$; $\cos 2x=-1$; $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. ■

5.245. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **5.246.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

5.247. $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k$, $x_3=\pi k-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

5.248. □ $2\sin x\cos x-2\cos^2 x+4\left(\sin x-\cos x+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)=0$, $\cos x\neq 0$;

$(\sin x-\cos x)\left(\cos x+2+\frac{2}{\cos x}\right)=0$, $\quad \cos^2 x+2\cos x+2\neq 0$; $\quad \sin x-\cos x=0$;

$\operatorname{tg} x=1$; $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. ■

5.249. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}(8k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. **5.250.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=2\pi k$.

5.251. □ $\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$, $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$;
$\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$;
$(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x-\sin x\cos x)=0$;

1) $\sin x+\cos x=0$; $\operatorname{tg} x=-1$; $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$;

2) $\cos x-\sin x-\sin x\cos x=0$. Положим $\cos x-\sin x=y$; тогда $(\cos x-\sin x)^2=y^2$ или $1-2\sin x\cos y=y^2$, т. е. $\sin x\cos x=\frac{1-y^2}{2}$. Решаем полученное квадратное уравнение: $y-\frac{1-y^2}{2}=0$; $y^2+2y-1=0$; $y=-1\pm\sqrt{2}$; $\cos x-\sin x\neq -1-\sqrt{2}$, так как $-1-\sqrt{2}<-2$ (напомним, что $|\cos x-\sin x|\leqslant\sqrt{2}$); значит, $\cos x-\sin x=-1+\sqrt{2}$; $\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-1+\sqrt{2}$; $\quad 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-1+\sqrt{2}$; $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$;

$x_2=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. ■

5.252. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $\quad x_2=\frac{\pi}{6}(12k-1)$, $\quad x_3=\frac{\pi}{3}(6k-1)$. $\quad$ **5.253.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.254. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **5.255.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$.

5.256. □ Разложим на множители левую часть уравнения: $\sin^3 2t(2\sin^2 2t-1)-3(2\sin^2 2t-1)=(2\sin^2 2t-1)(\sin^3 2t-3)$. Далее имеем $(2\sin^2 2t-1)\times(\sin^3 2t-3)=0$; $\sin^3 2t-3\neq 0$; $1-2\sin^2 2t=0$; $\cos 4t=0$; $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. ■

5.257. $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

5.258. □ Здесь $\cos t\neq 0$, $\sin 2t\neq 0$. Преобразуем выражение $\frac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}$:

$$\frac{2\sin 2t+2\sin 2t\cos 2t}{2\sin 2t-2\sin 2t\cos 2t}=\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}=\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}=\operatorname{ctg}^2 t.$$

Далее имеем $\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{ctg}^2 t=2\operatorname{ctg}2t$; $(\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t)(\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t)=2\operatorname{ctg}2t$; $-2\operatorname{ctg}2t(\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t)=2\operatorname{ctg}2t$; $\operatorname{ctg}2t(\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t+1)=0$; $\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t+1\neq 0$; $\operatorname{ctg}2t=0$; $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. ■

5.259. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **5.260.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$.

5.261. □ $2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}3x)+\operatorname{tg}2x(1+\operatorname{tg}3x)=0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$, $\cos 3x\neq 0$; $(1+\operatorname{tg}3x)(2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x)=0$;

1) $\operatorname{tg}3x=-1$; $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, но $k\neq 3l+1$, так как при $k=3l+1$ не существует $\operatorname{tg}2x$;

2) $2\operatorname{tg}x+\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$, $\operatorname{tg}x=0$, $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$, $x_3=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $k\neq 3l+1$. ■

5.262. $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.263. □ $\dfrac{2(1+\cos 2t)-1}{\sin t}=(1+2\cos 2t)\operatorname{ctg}t$, $\sin t\neq 0$;

$(1+2\cos 2t)\left(\dfrac{1}{\sin t}-\operatorname{ctg}t\right)=0$;

1) $\cos 2t=-\frac{1}{2}$; $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$;

2) $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}\neq 0$, поскольку при $\cos t=1$ имеем $\sin t=0$. ■

5.264. $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. **5.265.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.266. □ $\dfrac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin^2 x}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{2}\sin x\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$, $\sin x\neq 0$;

$\sin x(\sin 2x+\cos 2x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

$\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$; $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}\left(\cos\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$; $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$;

2) $\sin x=1$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. ■

5.267. □ Здесь $\cos x\neq 0$, $\sin 2x\neq 1$, $\operatorname{tg}x\neq 1$. Имеем

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-3=0.$$

Разделив числитель и знаменатель первой дроби на $\cos^2 x \neq 0$, получим

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0;\ \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2+2\,\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$$

Обозначим $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=y$. Тогда $y^2+2y-3=0$; $y_1=-3$, $y_2=1$. Итак:

1) $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=-3$, $\operatorname{tg} x=2$; $x_1=\operatorname{arctg} 2+\pi k$;

2) $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1$, $\operatorname{tg} x=0$; $x_2=\pi k$. ■

5.268. $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$. **5.269.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.270. □ Пусть $\frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}=y$. Тогда $y+\frac{1}{y}+2=0$; $(y+1)^2=0$, $y\neq 0$. Так как $\frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}=\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} z}$,

то получим $\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} z}=-1$; $\frac{2\operatorname{tg} z}{(1-\operatorname{tg}^2 z)\operatorname{tg} z}=-1$, $\operatorname{tg} z\neq 0$; $\operatorname{tg}^2 z=3$; $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. ■

5.271. $z_1=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$, $z_2=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$.

5.272. □ $$\frac{3\cos 2x\left(1+\frac{1}{\sin 2x}\right)}{\cos 2x\left(\frac{1}{\sin 2x}-1\right)}-2(\sin 2x+1)=0,\ \cos 2x\neq 0,\ \sin 2x\neq 0;$$

$$\frac{3(\sin 2x+1)}{1-\sin 2x}-2(\sin 2x+1)=0;$$

$\sin 2x\neq -1$, так как при этом $\cos 2x=0$;

$$\frac{3}{1-\sin 2x}=2,\ \sin 2x=-\frac{1}{2};\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}.$$ ■

5.273. $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$.

5.274. □ $\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=\operatorname{ctg} x\,(\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)-1)$;

$$\frac{\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)}{\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)-1}=\operatorname{ctg} x \text{ (при этом } \operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)-1\neq 0);$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}(15^\circ+x+25^\circ)}=\operatorname{ctg} x;\ \operatorname{tg}(x+40^\circ)=\operatorname{tg}(90^\circ-x);$$

$x+40^\circ=90^\circ-x+180^\circ\cdot k$; $x=25^\circ+90^\circ\cdot k$. ■

5.275. $z=\frac{\pi}{8}(4k-1)$.

5.276. □ $$\frac{\cos x}{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{8}(1-\sin 2x);$$

$$\frac{\cos x}{2\operatorname{ctg} x \dfrac{2}{\sin x}}=\frac{1}{8}(1-\sin 2x),\ \cos x\neq 0,\ \sin x\neq 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{4}=\frac{1}{8}(1-\sin 2x);\ 1-\cos 2x=1-\sin 2x;\ \operatorname{tg} 2x=1;\ x=\frac{\pi}{8}(4k+1).\ \blacksquare$$

5.277. $x=\operatorname{arctg} 3+\pi k$. **5.278.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$.

5.279. $\square$ Преобразуем левую часть уравнения $\left(\sin\frac{x}{2}\neq 0,\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+2-2+\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{\cos^3\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2-2+\frac{\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2-2+\frac{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^2}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

Но $\dfrac{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^2}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Обозначив $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=y$, получим уравнение $y^2+y-6=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=2$. Имеем:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-3$, $\dfrac{2}{\sin x}=-3$; $x_1=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=2$; $\dfrac{2}{\sin x}=2$; $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. $\blacksquare$

5.280. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3+\frac{\pi k}{2}$.

5.281. $\square$ Здесь $\cos 3x\neq 0$, $\cos 5x\neq 0$. Перенесем $\operatorname{tg} 3x$ в правую часть уравнения:

$\operatorname{tg} 5x-\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 5x$; $\operatorname{tg} 5x-\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 3x\,(1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 5x)$;

$\dfrac{\operatorname{tg} 5x-\operatorname{tg} 3x}{1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 5x}=\operatorname{tg} 3x$ (при этом $1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 5x\neq 0$); $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$; $3x=2x+\pi k$;

$x=\pi k$. $\blacksquare$

5.282. $x=\pi k$. **5.283.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.284. □ Преобразуем $\operatorname{tg} 3x$:

$$\operatorname{tg} 3x=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}=\frac{\operatorname{tg} x+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{1-\operatorname{tg} x \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\operatorname{tg} x \frac{1-\operatorname{tg}^2 x+2}{1-\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg} x \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Тогда уравнение примет вид $37\operatorname{tg} x \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=11\operatorname{tg} x$, откуда имеем:

1) $\operatorname{tg} x=0$; $x_1=\pi k$;

2) $\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}=\frac{11}{37}$; $\operatorname{tg}^2 x=25$; $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg} 5$. ■

5.285. □ Заметим, что $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)^2-2$. Преобразуем правую часть уравнения:

$$(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x=\left(\operatorname{tg} x \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+1\right)\cos 2x=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cos 2x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\cos 2x=1.$$

Далее имеем $(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)^2=2+\frac{82}{9}$; $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{10}{3}$. Но $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=$ $=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2-2$, откуда $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sin 2x}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. ■

5.286. $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.287. □ Заметив, что $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}=2\operatorname{ctg} 2x$, преобразуем левую часть уравнения:

$2\operatorname{ctg} 2x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x+8=4\operatorname{ctg} 4x-4\operatorname{tg} 4x+8=8\operatorname{ctg} 8x+8.$

Отсюда $\operatorname{ctg} 8x=-1$, $8x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. ■

5.288. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **5.289.** $z=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.290.** $t_1=\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$, $t_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$.

5.291. $x_1=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{157}-6}{11}+\pi k$. ● Положить $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x=z$; тогда $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=z^2+2$.

5.292. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **5.293.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\pi k$.

5.294. □ $\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}+\frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}=\frac{8\cos^2 4x+10\sin^2 4x}{\sin^3 4x}+4\sqrt{3}$, $\sin 2x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$;

$$\frac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}-\frac{8}{\sin^3 4x}-\frac{2}{\sin 4x}=4\sqrt{3};$$

$$\frac{(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-2\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin^3 2x\cos^3 2x}-\frac{1}{\sin^3 2x\cos^3 2x}-\frac{2}{\sin 4x}=4\sqrt{3};$$

$$-\frac{2}{\sin 2x\cos 2x}-\frac{2}{\sin 4x}=4\sqrt{3};\ -\frac{6}{\sin 4x}=4\sqrt{3},\ \sin 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}.\ ■$$

5.295. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

5.296. □ Имеем $\sin 6x=2\cos 4x-2$; $\sin 6x=-4\sin^2 2x$. Вычтем $\sin 2x$ из обеих частей уравнения: $\sin 6x-\sin 2x=-4\sin^2 2x-\sin 2x$; $2\sin 2x\cos 4x=-\sin 2x\,(4\sin 2x+1)$. Итак:

1) $\sin 2x=0,\ 2x=\pi k;\ x_1=\frac{\pi k}{2}$;

2) $2\cos 4x+4\sin 2x+1=0;\ 2-4\sin^2 2x+4\sin 2x+1=0;\ 4\sin^2 2x-4\sin 2x-3=0,\ \sin 2x=-\frac{1}{2},\ \sin 2x\neq\frac{3}{2};\ x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. ■

5.297. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k\pm 1)$. **5.298.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **5.299.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_3=\frac{\pi}{6}(12k\pm 1)$. **5.300.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\pi k$, $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

5.301. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1}{2}\cos(104^\circ-2t)+\frac{1}{2}\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\cos(284^\circ-2t)+\frac{1}{2}\cos 60^\circ=$$
$$=-\frac{1}{2}\cos(14^\circ-2t)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(14^\circ-2t)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Имеем $\sin t+\cos t=1$, $\sin t=2\sin^2\frac{t}{2}$, $2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin^2\frac{t}{2}$;

1) $\sin\frac{t}{2}=0;\ t_1=360^\circ\cdot k$;

2) $\sin\frac{t}{2}=\cos\frac{t}{2},\ \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}=1;\ t_2=90^\circ(4k+1)$. ■

5.302. $t_1=90^\circ\cdot k$, $t_2=\pm 15^\circ+90^\circ k$. **5.303.** $z_1=\frac{2\pi k}{15}$, $k\neq 15l$; $z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1)$, $k\neq 17l+8$. **5.304.** $x=\frac{\pi k}{14}$, $k\neq 14l$.

5.305. □ Преобразуем левую часть уравнения, используя то, что $\sin^2 z=1-\cos^2 z$ и $\cos^2 z=1-\sin^2 z$:

$$(1-\cos^2 z)\sin z\sin 3z+(1-\sin^2 z)\cos z\cos 3z=\sin z\sin 3z+\cos z\cos 3z-$$
$$-\sin z\cos z(\cos z\sin 3z+\sin z\cos 3z)=\cos 2z-\sin z\cos z\sin 4z=$$
$$=\cos 2z(1-2\sin z\cos z\cdot\sin 2z)=\cos 2z(1-\sin^2 2z)=\cos^3 2z.$$

Имеем $\cos 2z=\cos 4z$, откуда $\sin z\sin 3z=0$ и $z=\pi k/3$. ■

5.306. $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm1)$. **5.307.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **5.308.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$.

5.309. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.310.** $t=\frac{\pi k}{4}$.

5.311. □ Запишем уравнение в виде

$$\cos 10x+2\cos^2 4x-\cos x=2\cos x\cos 3x\,(4\cos^2 3x-3).$$

Преобразуем правую часть уравнения:

$$2\cos x\cos 3x\,(4\cos^2 3x-3)=2\cos x\cos 3x\,(2\cos 6x-1)=$$
$$=2\cos x\,(2\cos 3x\cos 6x-\cos 3x)=2\cos x\,(\cos 9x+\cos 3x-\cos 3x)=$$
$$=2\cos x\cos 9x=\cos 10x+\cos 8x.$$

Тогда получим $\cos 10x+1+\cos 8x-\cos x=\cos 10x+\cos 8x$, откуда $\cos x=1$; $x=2\pi k$. ■

5.312. $x=\pi k/12$. **5.313.** $x=\frac{\pi}{30}(6k\pm1)$.

5.314. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x)-\cos^2 2x=$$
$$=\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 2x=$$
$$=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-\cos^2 2x-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\cos^2 2x-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Далее имеем $\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{16}$; $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$; $\cos 4x=1-2\sin^2 2x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. ■

5.315. $t_1=\pi(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **5.316.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **5.317.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **5.318.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$.

5.319. □ $(\cos 2t+\sin 2t)(\cos^2 2t-\cos 2t\sin 2t+\sin^2 2t)=1-\frac{1}{2}\sin 4t$;

$$(\cos 2t+\sin 2t)\left(1-\frac{1}{2}\sin 4t\right)=1-\frac{1}{2}\sin 4t;$$

$1-\frac{1}{2}\sin 4t\neq0$; $\cos 2t+\sin 2t=1$; $\sin 2t=1-\cos 2t$; $\sin^2 t-\sin t\cos t=0$;

1) $\sin t=0$; $t_1=\pi k$;

2) $\sin t=\cos t$, $\operatorname{tg} t=1$; $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. ■

5.320. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$.

5.321. □ Здесь $\cos 2x\neq0$, $\cos 5x\neq0$, $\sin 2x\neq0$, $\sin 5x\neq0$, $\cos 3x\neq0$. Имеем:

$$\frac{\cos 5x\cos 2x}{\sin 7x}-\frac{\sin 5x\sin 2x}{\sin 7x}=\operatorname{tg} 3x,\ \sin 7x\neq0;$$
$$\frac{\cos 7x+\cos 3x}{2\sin 7x}-\frac{\cos 3x-\cos 7x}{2\sin 7x}=\operatorname{tg} 3x;$$

$\operatorname{ctg} 7x = \operatorname{tg} 3x$, $7x = \frac{\pi}{2} - 3x + \pi k$; $10x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x = \frac{\pi}{20}(2k+1)$, где $k \neq 5l+2$, так как при $k = 5l+2$ не существует $\operatorname{tg} 2x$. ■

5.322. $z_1 = \frac{\pi}{14}(2k+1)$, $k \neq 7l+3$; $z_2 = \frac{\pi}{28}(4k+3)$, $k \neq 7l+1$. **5.323.** $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

5.324. □ Здесь $\sin t \neq 0$, $\cos t \neq 0$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\sin^2 t}{2\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{1+\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1+\sin^4 t + \cos^4 t}{2+\sin^2 t \cos^2 t} = \frac{1+(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t}{2+\sin^2 t \cos^2 t} = \frac{2-0{,}5\sin^2 2t}{2+0{,}25\sin^2 2t}.$$

Так как $2+0{,}25\sin^2 2t \neq 0$, то уравнение примет вид $8 - 2\sin^2 2t = 15\cos 4t$; $7+\cos 4t = 15\cos 4t$; $\cos 4t = 0{,}5$; $t = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. ■

5.325. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$.

5.326. □ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin x} = \sqrt{2}\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \neq 0$, $\sin x \neq 0$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos x \sin x$; $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$

$= \sqrt{2}\sin x \cos x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\sin x \cos x$; $\cos x = \sqrt{2}\sin x \cos x$;

1) $\cos x = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, поскольку при $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+1)$ не существует $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

2) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. ■

5.327. $z_1 = \pi k$, $z_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$. **5.328.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **5.329.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.330. □ $\frac{\sin^2 2t}{1+\cos 2t} = \frac{1}{\cos^2 2t} - 1$, $\cos 2t \neq 0$, $\cos 2t \neq -1$; $\frac{\sin^2 2t}{1+\cos 2t} = \operatorname{tg}^2 2t$;

1) $\sin 2t = 0$, $2t = 2\pi k$, так как $\cos 2t = -1$ при $2t = \pi(2k+1)$;

2) $\cos^2 2t = 1 + \cos 2t$; $\cos 2t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\cos 2t \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, поскольку $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Ответ: $t_1 = \pi k$, $t_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$. ■

5.331. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(3k+1)$. **5.332.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.333.** $x_1 = \frac{\pi}{24}(8k-1)$,

$x_2=\frac{\pi}{16}(8k+5)$. **5.334.** $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.335.** $x=\frac{\pi}{12}(3k+1)$. **5.336.** $t=\frac{\pi}{6}(3k+1)$.

5.337. $t=\pi k$. **5.338.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.339**. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.340. □ Здесь $\sin 2t\neq 0$, $\cos 4t\neq 0$. Имеем $4\cos^2 2t=\operatorname{tg}4t+\operatorname{ctg}2t$;

$4\cos^2 2t=\frac{\sin 2t\sin 4t+\cos 2t\cos 4t}{\sin 2t\cos 4t}$; $4\cos^2 2t=\frac{\cos 2t}{\sin 2t\cos 4t}$. Отсюда получим:

1) $\cos 2t=0$; $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$;

2) $4\sin 2t\cos 2t\cos 4t=1$ (так как $\sin 2t\cos 4t\neq 0$), $\sin 8t=1$; $t_2=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. ■

5.341. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **5.342.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.343.** $t=$ $=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$.

5.344. □ Здесь $\sin t\neq 0$, $\cos t\neq 0$. Преобразуем выражение $\frac{\sin^2 t-\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t-\operatorname{ctg}^2 t}$:

$\frac{\operatorname{tg}^2 t\,(\cos^2 t-1)}{\operatorname{ctg}^2 t\,(\sin^2 t-1)}=\frac{\operatorname{tg}^4 t}{\operatorname{ctg}^2 t}=\operatorname{tg}^6 t$. Тогда получим уравнение $\operatorname{tg}^6 t+2\operatorname{tg}^3 t+1=0$;

$(\operatorname{tg}^3 t+1)^2=0$; $\operatorname{tg} t=-1$; $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. ■

5.345. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. **5.346.** $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **5.347.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$.

5.348. $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **5.349.** $x=2\pi k$. **5.350.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm 3)$.

5.351. $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.352. □ Здесь $\cos(t^2-t)\neq 0$; имеем $\operatorname{tg}(t^2-t)=\operatorname{tg}2$, откуда

$t^2-t=2+\pi k$, $t^2-t-2-\pi k=0$; $t=\frac{1\pm\sqrt{1+4(2+\pi k)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$, $k\geqslant 0$. ■

5.353. $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. **5.354.** $x=\pi k-2$.

5.355. □ Так как $\operatorname{ctg}^4 x\geqslant 0$; $\cos^2 2x-1\leqslant 0$, то приходим к системе уравнений $\begin{cases}\operatorname{ctg}^4 x=0,\\ \cos^2 2x-1=0.\end{cases}$ Отсюда находим: 1) $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $x=\frac{\pi k}{2}$, но во втором случае при $k=2l$ не существует $\operatorname{ctg} x$. Итак, получаем ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. ■

5.356. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

5.357. $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

5.358. □ Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то равенство $\sin 2z-\sin 6z=-2$ возможно только при $\sin 2z=-1$, $\sin 6z=1$. Если $\sin 2z=-1$, то $2z=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, откуда $z=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. При этих значениях z равенство $\sin 6z=1$ выполняется. Итак, $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. ■

5.359. $x=4\pi k$. **5.360.** $x=8\pi k$. **5.361.** $x=\frac{\pi}{12}(12k+7)$. **5.362.** $x=\pi k$.

5.363. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)^2+(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x)^2=$$
$$=(1+\sin 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=2+2\sin^2 2x.$$

Далее имеем $2+2\sin^2 2x=3-\sin 4x$; $\sin 4x=1-2\sin^2 2x$; $\sin 4x=\cos 4x$; $\operatorname{tg} 4x=1$; $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. ■

5.364. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.365. □ Имеем $\sin x\cos x>0$, но при $\sin x<0$, $\cos x<0$ левая часть уравнения отрицательна, поэтому $\sin x>0$, $\cos x>0$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^3 x\,\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}+\cos^3 x\,\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=$$
$$=\sin x+\cos x.$$

Тогда получим $\sin x+\cos x-2\sqrt{\sin x\cos x}=0$; $(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x})^2=0$; $\sin x=$ $=\cos x$; $\operatorname{tg} x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, так как $\sin x>0$, $\cos x>0$. ■

5.366. $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

5.367. □ Возведем обе части уравнения в квадрат (при этом возможно появление лишних корней, поэтому все решения следует проверить). Имеем:

$$(1-\cos x)^2=1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x};$$
$$-2\cos x+\cos^2 x=-|\cos x|\sqrt{4-7\cos^2 x};$$
$$\cos x(-2+\cos x)=-\cos x\sqrt{4-7\cos^2 x}$$

(заметим, что $|\cos x|=\cos x$, так как в исходном уравнении правая часть не больше 1, т. е. в левой части $\cos x\geqslant 0$). Отсюда получим:

1) $\cos x=0$; $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (удовлетворяет уравнению);

2) $2-\cos x=\sqrt{4-7\cos^2 x}$; $4-4\cos x+\cos^2 x=4-7\cos^2 x$; $2\cos^2 x-\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$. Подставляя $\cos x=\frac{1}{2}$ в уравнение, имеем $\frac{1}{2}=\sqrt{1-\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-7\cdot\frac{1}{16}}}$; $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Итак, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. ■

5.368. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **5.369.** $x=2\pi k$. **5.370.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.371. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=$
$=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x.$

Остается решить уравнение $3\sin x-4\sin^3 x=a\sin x$. Имеем:

1) $\sin x=0$; $x_1=\pi k$ при любом a;

2) $\sin^2 x=\frac{3-a}{4}$; здесь $0\leqslant\frac{3-a}{4}\leqslant 1$; $0\leqslant 3-a\leqslant 4$; $-3\leqslant -a\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant a\leqslant 3$ — при таких a существует $\sin x$. Итак, $2\sin^2 x=\frac{3-a}{2}$, $1-\cos 2x=\frac{3-a}{2}$; $\cos 2x=\frac{a-1}{2}$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}+\pi k$ при $-1\leqslant a\leqslant 3$. ■

5.372. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при любом m; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{m+1}{2}+\pi k$ при $-3\leqslant m\leqslant 1$.

5.373. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\alpha$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$, при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ решений нет.

5.374. $x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{8}+\frac{\pi}{6}(6k+1)$, при $-8\leqslant m\leqslant 8$. **5.375.** $x=\pi k-\frac{3}{2}+$ $+(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$ при любом α. **5.376.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.377. □ Имеем $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{1-\sin^2 x}=6$; $2^{\sin^2 x}+\frac{8}{2^{\sin^2 x}}=6$. Пусть $2^{\sin^2 x}=y$. Тогда

$y^2-6y+8=0$, $y_1=4$, $y_2=2$. Итак:

1) $2^{\sin^2 x}\neq 4$, поскольку $\sin^2 x\neq 2$;

2) $2^{\sin^2 x}=2$, $\sin^2 x=1$, $\sin x=\pm 1$; $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. ■

5.378. $x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$. **5.379.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **5.380.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.381. □ Имеем $1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots=\frac{1}{1-\sin x}$ — сумма бесконечной геометрической прогрессии, где $|\sin x|<1$ (при $|\sin x|=1$ решений нет). Отсюда

$3^{\frac{1}{1-\sin x}}=3^{2/3}$; $\frac{1}{1-\sin x}=\frac{2}{3}$; $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. ■

5.382. $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$.

5.383. □ Здесь $\cos x>0$, $\cos x\neq 1$. Используя формулу $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, преобразуем уравнение следующим образом:

$\log_4\cos x\cdot\log_2\cos^2 x=1$; $\log_4\cos x\cdot\log_4\cos^4 x=1$; $\log_4\cos x\cdot 4\log_4\cos x=1$;

$\log_4^2\cos x=\frac{1}{4}$.

Далее имеем:

1) $\log_4 \cos x \neq \frac{1}{2}$, так как $4^{1/2}=2\neq\cos x$;

2) $\log_4 \cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=4^{-1/2}=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. ■

5.384. $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. **5.385.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **5.386.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.387. □ Здесь $\sin x\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$, $\sin 3x\neq 0$. Заметив, что

$$\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=$$
$$=\frac{\cos 2x\,\sin 3x+\cos 3x\,\sin 2x}{\sin 2x\,\sin 3x}=\frac{\sin 5x}{\sin 2x\,\sin 3x},$$

перепишем уравнение так: $\sin 5x+\frac{1}{\sin x}=0$ $(\sin 2x\,\sin 3x\neq 0)$. Значит, $\sin 5x\,\sin x=-1$; поскольку $|\sin\alpha|\leqslant 1$, это возможно только в двух случаях:

1) $\begin{cases}\sin 5x=1,\\ \sin x=-1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin 5x=-1,\\ \sin x=1.\end{cases}$

Если $\sin x=-1$, то $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $5x=\frac{5\pi}{2}(4k-1)$, $\sin 5x=-1$.

Если $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $5x=\frac{5\pi}{2}(4k+1)$, $\sin 5x=1$.

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней. ■

5.389. □ Если x_1, x_2, x_3 — углы треугольника, то $x_1+x_2+x_3=\pi$. Покажем, что корни данного уравнения не удовлетворяют этому условию. Действительно, из уравнения $3\cos x-2=0$ получим $\cos x_1=2/3$. Далее имеем:

$14\sin^2 x+2\sin x\cos x-12(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$;
$\sin^2 x+\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$, $\cos x\neq 0$;
$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-6=0$; $\operatorname{tg} x_2=2$, $\operatorname{tg} x_3=-3$.

Значит, $\cos x_1<\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} x_2>\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x_3<0$, откуда следует, что $x_1>\pi/3$, $x_2>\pi/3$, $x_3>\pi/2$. Очевидно, что ни в каком сочетании сумма углов не равна π $(x_1+x_2+x_3>\pi$, $x_1+x_1+x_2>\pi$, $x_1+x_2+x_2>\pi$ и т. д.). ■

5.390. $\alpha=\arcsin(3/5)$, $\beta=\arcsin(5/13)$, $\gamma=\pi-\arcsin(56/65)$. **5.392.** $\sin\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$.

5.393. □ Пусть $\alpha=\beta-\frac{\pi}{12}$, $\gamma=\beta+\frac{\pi}{12}$. Так как, по условию, $\operatorname{tg}\beta=q\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\gamma=q^2\operatorname{tg}\alpha=q\operatorname{tg}\beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\beta}\text{ или }\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right).$$

Преобразуем правую часть этого уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Тогда получим $\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}^4\beta=\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}$; $\operatorname{tg}^4\beta=1$; поскольку $0<\beta<\pi/2$, имеем $\operatorname{tg}\beta=1$, т. е. $\beta=\pi/4$.

Ответ: $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/3$. ■

5.394. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_1=\frac{2\pi}{3}(3n\pm1)$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$.

5.395. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$. **5.396.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y=\frac{\pi}{6}(6k-1)$.

5.397. $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)$, $y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)$, $y_2=\frac{2\pi}{3}+\pi(k+n)$.

5.398. $x=\frac{1}{6}(6k-1)$, $y=\frac{1}{6}(6k+1)$. **5.399.** $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $y_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k$. **5.400.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$, $y=\frac{\pi}{4}(4n\pm1)$, k и n — числа одной четности. **5.401.** $x_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k$, $y_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$; $x_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$, $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi n$. **5.402.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$.

5.403. □ Имеем $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{3}{4},\\ \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=3.\end{cases}$ Из второго уравнения получим $\frac{3/4}{\cos x\cos y}=3$,

откуда $\cos x\cos y=\frac{1}{4}$. Тогда придем к системе $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{3}{4},\\ \cos x\cos y=\frac{1}{4}.\end{cases}$ Складывая уравнения и вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$\begin{cases}\sin x\sin y+\cos x\cos y=1,\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=-\frac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=2\pi k,\\ x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n.\end{cases}$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$. ■

5.404. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\frac{\pi}{3}(1-3k)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$, $y_2=\frac{\pi}{2}(1-2k)$.

5.405. $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $y=\frac{\pi}{6}(1-6k)$.

5.406. □ Имеем: 1) $\cos^2x+\cos^{-2}x\geqslant2$; действительно, $\cos^2x+\cos^{-2}x-2=$

$=(\cos x+\cos^{-1}x)^2\geqslant 0$; 2) $1+\operatorname{tg}^2 2y\geqslant 1$; 3) $2\leqslant 3+\sin 3z\leqslant 4$. Значит, левая часть уравнения не меньше 4; равенство возможно лишь при $\cos^2 x=1$, $\operatorname{tg} 2y=0$, $\sin 3z=-1$.

Ответ: $x=\pi k$, $y=\pi m/2$, $z=\frac{\pi}{6}(4n-1)$. ■

5.407. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{2}(4m+1)$, $z=\frac{\pi n}{3}$. **5.408.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

5.409. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. **5.410.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi n$. **5.411.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.412. $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

5.413. □ $3\operatorname{tg} 2x-3\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 2x$;
$3(\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x)=\operatorname{tg} 3x(1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x)$, $1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x\neq 0$;
$\frac{3(\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x)}{1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x}=-\operatorname{tg} 3x$; $3\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x=0$;
$3\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}=0$, $1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\neq 0$;
$3\operatorname{tg} x-3\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x=0$;
$4\operatorname{tg} x-3\operatorname{tg}^2 x\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$; $\operatorname{tg} x=0$; $x_1=\pi k$;
$2-2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}^2 x+1=0$, $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$; $x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}6}+\pi k$. ■

5.414. □ Преобразуем левую часть уравнения:
$$\frac{3\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}\cdot 2\cos t\cos 2t=\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}(3-\operatorname{tg}^2 t)\cos t\cos 2t=$$
$$=\operatorname{tg} 2t(3\cos^2 t-\sin^2 t)\cos 2t\frac{1}{\cos t}=$$
$$=\frac{\sin 2t}{\cos t}(2\cos^2 t+\cos 2t)=2\sin 2t\cos t+2\sin t\cos 2t=2\sin 3t$$
(сокращение на $\cos t$ и $\cos 2t$ допустимо, поскольку $\cos t\neq 0$, $\cos 2t\neq 0$). Тогда уравнение примет вид $\sin 3t=\sin 5t$, откуда $\sin t\cos 4t=0$. **Ответ:** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. ■

5.415. □ $\frac{\operatorname{tg} t\cos^2 t}{2\cos^2 t-1}2\sin t\cos 2t=\frac{2\sin^2 t}{\cos^2 t-3\sin^2 t}$, $\sin t\neq 0$, $\cos t\neq 0$, $\cos 2t\neq 0$;
$\cos t=\frac{1}{\cos^2 t-3\sin^2 t}$, $\cos^2 t-3\sin^2 t\neq 0$, $\operatorname{tg}^2 t\neq 1/3$;
$\cos t(\cos^2 t-\sin^2 t-2\sin^2 t)=1$; $\cos t(2\cos 2t-1)=1$;
$\cos t+\cos 3t-\cos t=1$; $\cos 3t=1$; $t=\frac{2\pi k}{3}$, но $k\neq 3l$, так как $\sin t\neq 0$. **Ответ:** $t=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. ■

5.416. □ $\operatorname{tg}^2 5x-\operatorname{tg}^2 3x=\operatorname{tg} 2x(1-\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x)$, $\cos 3x\cos 5x\neq 0$;
$\sin^2 5x\cos^2 3x-\sin^2 3x\cos^2 5x=\operatorname{tg} 2x(\cos^2 3x\cos^2 5x-\sin^2 3x\sin^2 5x)$;
$\sin 8x\sin 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cos 8x\cos 2x$, $\cos 2x\neq 0$;

1) $\sin 2x=0$; $x=\frac{\pi k}{2}$, но $k\neq 2l+1$, поскольку $\cos 3x\cos 5x\neq 0$;

2) $\sin 8x=\cos 8x$; $\operatorname{tg} 8x=1$.

Ответ: $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{32}(4k+1)$. ■

5.417. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.418. □ Разделив на $\cos^2 x^2\neq 0$, получим

$\operatorname{tg} x^2+2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x\,(2-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} x^2)=0$; $2\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg}^3 x=\operatorname{tg}^4 x\operatorname{tg} x^2-\operatorname{tg} x^2$;
$2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)=\operatorname{tg} x^2\,(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^2 x+1)$, $1+\operatorname{tg}^2 x\neq 0$;
$2\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x^2\,(\operatorname{tg}^2 x-1)$, $\operatorname{tg}^2 x-1\neq 0$; $-\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x^2$, $x^2=\pi k-2x$, $x^2+2x-\pi k=0$, $x=-1\pm\sqrt{1+\pi k}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. ■

5.419. $t_1=0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$, $k\neq l\,(2l+1)$, $t_3=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$, $k\neq l\,(2l-1)$, $k>0$, $l>0$.

5.420. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\sin x\,(\cos^{-1}x-1)+3\cos x\,(\sin^{-1}x-1)+2\sin x\sin^{-1}x+3\cos x\cos^{-1}x=$$
$$=2\sin x\,(\cos^{-1}x-1+\sin^{-1}x)+3\cos x\,(\sin^{-1}x-1+\cos^{-1}x)=$$
$$=(2\sin x+3\cos x)\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}-1\right).$$

Далее имеем:

1) $2\sin x+3\cos x=0$, $\cos x\neq 0$; $\operatorname{tg} x=-1{,}5$; $x_1=-\operatorname{arctg} 1{,}5+\pi k$;

2) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}-1=0$, $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$; $\sin x+\cos x=\sin x\cdot\cos x$. Пусть $\sin x+\cos x=y$; тогда $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$, т. е. $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Значит, $y^2-2y-1=0$; $y=1\pm\sqrt{2}$, но $\cos x+\sin x\neq 1+\sqrt{2}$. Итак, $\sin x+\cos x=1-\sqrt{2}$, $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1-\sqrt{2}$; $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1$;

$x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}+2\pi k$. ■

5.421. □ 1) $\sin x+\cos x=0$; $\operatorname{tg} x=-1$; $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$;

2) Покажем, что $\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1\neq 0$. Действительно, $\cos^4 x+1+2\sin x\,(\sin^2 x-1)=\cos^4 x+1-2\sin x\cos^2 x=\cos^4 x+1-\sin 2x\cos x>0$, так как $\cos^4 x+1\geqslant 1$, а $\sin 2x\cos x<1$. ■

5.422. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

5.423. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$\operatorname{tg} x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x+1+2\,(2\cos x-\cos^{-1}x)=$$
$$=\sin x\cos^{-1}x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x+\cos x\cos^{-1}x+$$
$$+2\,(2\cos x-\cos^{-1}x)=\sin x\,(\cos^{-1}x-2\cos x)-\cos x\,(2\cos x-\cos^{-1}x)+$$
$$+2\,(2\cos x-\cos^{-1}x)=(2\cos x-\cos^{-1}x)\,(2-\sin x-\cos x).$$

Отсюда получим:

1) $2-\sin x-\cos x\neq 0$;

2) $2\cos x-\dfrac{1}{\cos x}=0$, $\cos x\neq 0$; $2\cos^2 x-1=0$; $\cos 2x=0$; $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$. ■

5.424. $x=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$.

5.425. □ Имеем

$$\frac{\operatorname{tg} x\,(3-\operatorname{tg}^2 x)}{2\cos^2 x-1}\cos^2 x=\frac{2+\cos\dfrac{6x}{5}}{\cos 2x\cos x},\ \cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0;$$

$$\sin x\cos^2 x\,(3-\operatorname{tg}^2 x)=2+\cos\frac{6x}{5}.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=2\sin x\cos^2 x+\sin x\,(\cos^2 x-\sin^2 x)=$$
$$=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=\sin 3x.$$

Тогда получим $\sin 3x-\cos\dfrac{6x}{5}=2$, откуда следует

$\begin{cases}\sin 3x=1,\\ \cos\dfrac{6x}{5}=-1,\end{cases}$ т. е. $\begin{cases}3x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ \dfrac{6x}{5}=\pi+2\pi n.\end{cases}$ Значит, $\pi+4\pi m=5\pi+10\pi n$, т. е. $2m=2+5n$. Из этого равенства вытекает, что n — четное число; пусть $n=2k$. Тогда $x=\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{10\pi k}{3}=\dfrac{5\pi}{6}(4k+1)$, где $k\neq 3l+2$, так как в этом случае $\cos x=0$. Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}(4k+1)$, $k\neq 3l+2$. ■

5.426. $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.427. □ Положим $\sin x+\sin^{-1}x=z$. Тогда $\sin^2 x+\sin^{-2}x=(\sin x+\sin^{-1}x)^2-2=$ $=z^2-2$. Имеем $2z^2+z-10=0$, $z_1=2$, $z_2=-\dfrac{5}{2}$. Отсюда получим:

1) $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=2$; $\sin x=1$; $x_1=\dfrac{\pi}{2}(4k+1)$;

2) $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{5}{2}$; $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ $(\sin x\neq -2)$; $x_2=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. ■

5.428. $x_1=\dfrac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$.

5.429. □ Преобразуем левую часть уравнения:

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2-12=4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg} 2x+(\operatorname{ctg} x-$$
$$-\operatorname{tg} x)^2-12=4\,(\operatorname{ctg}^3 2x-3\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x-3)=4\,(\operatorname{ctg}^2 2x-3)(\operatorname{ctg} 2x+1).$$

Отсюда получим:

1) $\operatorname{ctg}^2 2x-3=0$; $\operatorname{ctg} 2x=\pm\sqrt{3}$; $x_1=\dfrac{\pi}{12}(6k\pm 1)$;

2) $\operatorname{ctg} 2x=-1$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$. ■

5.430. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+3)$, $x_2=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi k}{4}$.

5.431. □ Вычтем $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ из обеих частей уравнения:

$2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+4\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} 3x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Тогда левая часть уравнения преобразуется так:

$2\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x+4\operatorname{ctg} 2x=-4\operatorname{ctg} 2x+4\operatorname{ctg} 2x=0$.

Значит, $\operatorname{ctg} 3x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$; $3x=\frac{x}{2}+\pi k$; $x=\frac{2\pi k}{5}$, $k\neq 5l$ (при $k=5l$ определены не все функции, входящие в уравнение). ■

5.432. $t=\frac{\pi}{12}(6k+5)$.

5.433. □ Имеем $12(\operatorname{tg}^2 x+1)+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{3}+10\left(2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{ctg} x}{3}\right)-1=0$. Пусть $2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{ctg} x}{3}=y$; тогда $4\operatorname{tg}^2 x+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{9}=y^2-\frac{4}{3}$. Следовательно, $3y^2+10y+7=0$, т. е. $y_1=-1$, $y_2=-\frac{7}{3}$. Итак:

1) $2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{ctg} x}{3}\neq -1$;

2) $2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{ctg} x}{3}=-\frac{7}{3}$, $6\operatorname{tg}^2 x+7\operatorname{tg} x+1=0$, $\operatorname{tg} x_1=-1$, $\operatorname{tg} x_2=-\frac{1}{6}$;

$x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$. ■

5.434. $x_1=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$, $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k$.

5.435. $z_1=2\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. ● Положить $\cos z-\sin z=y$.

5.436. $z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi k$.

5.437. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. ● Положить $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=y$.

5.438. □ Пусть $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=y$; тогда $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2-2=y^2-2$, $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^3-3\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x\operatorname{ctg}^2 x=y^3-3y$. Уравнение примет вид $y^3+y^2-3y-6=0$. Заметив, что $y=2$ удовлетворяет уравнению, выделим в его левой части множитель $y-2$: $y^3-2y^2+3y^2-6y+3y-6=(y-2)(y^2+3y+3)$, т.е. $(y-2)(y^2+3y+3)=0$. Отсюда получим:

1) $y=2$, $\frac{2}{\sin 2x}=2$, $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ (при этом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ существуют);

2) $y^2+3y+3\neq 0$ (поскольку $D<0$). ■

5.439. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi k}{2}$.

5.440. □ $1+\sin\frac{t}{2}\sin t-\cos\frac{t}{2}\sin t\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$;

$\sin\frac{t}{2}\sin t\left(1-2\cos^2\frac{t}{2}\right)=\sin t$; $-\sin\frac{t}{2}\sin t\cos t=\sin t$;

1) $\sin t=0$, $t_1=\pi k$;

2) $\sin\frac{t}{2}\cos t=-1$, $\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}=-2$, что возможно только при $\sin\frac{3t}{2}=-1$, $\sin\frac{t}{2}=1$, так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$. Если $\sin\frac{t}{2}=1$, то $\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\sin\frac{3t}{2}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi k\right)=-1$, при этом значения $t=\pi(4k+1)$ входят в решение t_1. Ответ: $t=\pi k$. ■

5.441. $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$.

5.442. □ Имеем

$$2(3-\mathrm{tg}^2 x)\cos 2x\cos x=\frac{4\cos 3x\cos 2x}{\sin 2x},\ \sin 2x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0,\ \cos x\neq 0;$$

$\sin 2x\cos x(3-\mathrm{tg}^2 x)=2\cos 3x$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$6\sin x\cos^2 x-2\sin^3 x=4\sin x\cos^2 x+2\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)=$$
$$=2(\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x)=2\sin 3x.$$

Уравнение примет вид $\sin 3x=\cos 3x$ или $\mathrm{tg}\,3x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$, но при $k=3l+2$ получаем $\cos 2x=0$. Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$, $k\neq 3l+2$. ■

5.443. □ Отметим, что $\sin t\neq 0$, и рассмотрим два случая:

1) $\cos t>0$, $\sqrt{3}\cos t=1+\mathrm{ctg}\,t$, $\sin t+\cos t-\sqrt{3}\sin t\cos t=0$;

2) $\cos t<0$, $-\sqrt{3}\cos t=1+\mathrm{ctg}\,t$, $\sin t+\cos t+\sqrt{3}\sin t\cos t=0$.

Решим каждое из полученных уравнений:

1) Положим $\sin t+\cos t=y$; тогда $\sin t\cos t=\frac{y^2-1}{2}$; $\sqrt{3}y^2-2y-\sqrt{3}=0$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(y=\sqrt{3}\neq\sin t+\cos t)$; $\sin t+\cos t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=-\frac{1}{\sqrt{6}}$; $t+\frac{\pi}{4}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k$, так как $\cos t>0$.

2) Аналогично предыдущему находим $\sin t+\cos t=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $t+\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k$ $(\cos t<0)$.

Оба результата можно объединить. **Ответ**: $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. ■

5.444. $t=\pm 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\pi k$. **5.445.** $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **5.446.** $t=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1)$.

5.447. □ Дополним левую часть уравнения так, чтобы получить $(\cos^2 x+1)^2$:

$\cos^4 x+2\cos^2 x+1-2\cos^2 x-1+4\cos x-1=0;$
$(\cos^2 x+1)^2-2(\cos x-1)^2=0;$

$(\cos^2 x+1+\sqrt{2}(\cos x-1))(\cos^2 x+1-\sqrt{2}(\cos x-1))=0.$

Далее имеем:

1) $\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+1+\sqrt{2}\neq 0;$

2) $\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x+1-\sqrt{2}=0;$

$$\cos x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\left(\cos x\neq\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right).$$

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi k$. ■

5.448. $x=\pm\arccos\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi k$. **5.449.** $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$, $x_2=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$.

5.450. □ Имеем $\operatorname{ctg}^4 2z-1=\cos^2 4z$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$(\operatorname{ctg}^2 2z-1)(\operatorname{ctg}^2 2z+1)=\frac{\cos^2 2z-\sin^2 2z}{\sin^2 2z}\cdot\frac{\cos^2 2z+\sin^2 2z}{\sin^2 2z}=\frac{\cos 4z}{\sin^4 2z}.$$

Тогда $\frac{\cos 4z}{\sin^4 2z}=\cos^2 4z$, $\sin 2z\neq 0$. Отсюда получим:

1) $\cos 4z=0$; $4z=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$;

2) $\frac{1}{\sin^4 2z}=\cos 4z$, откуда следует

$\begin{cases}\cos 4z=1,\\ \sin 2z=\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}4z=2\pi k,\\ 2z=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$ — система не имеет решений.

Ответ: $z=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. ■

5.451. □ Сначала находим

$$1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots=\frac{1}{1+\sin t};$$

$$1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots=\frac{1}{1-\sin t},\ |\sin t|<1.$$

Далее имеем

$$\frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{2\sin^2 t}{2\cos^2 t};\ \frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t};$$

$$2\sin^2 t+\sin t-1=0,\ \sin t\neq -1,\ \sin t=\frac{1}{2};\ t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.\ ■$$

5.452. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **5.453.** $x=\pi k$.

5.454. □ Решение возможно только при $|\operatorname{tg} x|<1$. Имеем $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$.

Заменив $\sin 2x$ на $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, получим $1+\operatorname{tg} x=1-\operatorname{tg} x+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg} x_1=0$; $x=\pi k$; $1+\operatorname{tg}^2 x=1-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}^2 x=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x\neq -1$. Ответ: $x=\pi k$. ■

5.455. $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

5.456. □ Сначала воспользуемся формулами понижения степени:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{64}.$$

Затем после возведения в степень и приведения подобных членов получим:

$$5\cos^4 2x+10\cos^2 2x+1=\frac{29}{4};\ \cos^4 2x+2\cos^2 2x-\frac{5}{4}=0;\ \cos 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x=\frac{\pi}{8}(2k+1).\ ■$$

5.457. $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm1)$.

5.458. □ Очевидны решения $|\sin 3x|=1$ (тогда $\cos 3x=0$) и $|\cos 3x|=1$ (тогда $\sin 3x=0$), откуда $3x=\frac{\pi k}{2}$, т. е. $x=\frac{\pi k}{6}$. Покажем, что других решений нет, предварительно преобразовав правую часть уравнения:

$$4\,\frac{(\sin^2 3x+\cos^2 3x)(\sin^4 3x-\sin^2 3x\cos^2 3x+\cos^4 3x)}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}=$$

$$=4\,\frac{(\cos^2 3x-\sin^2 3x)^2+\sin^2 3x\cos^2 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}=1.$$

Если $|\sin 3x|<1$, $|\cos 3x|<1$, то $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x<\sin^2 3x+\cos^2 3x=1$, т. е. кроме указанных выше, решений нет. ■

5.459. □ Имеем $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin t\right)$; $\pi\cos t=\frac{\pi}{2}-\pi\sin t+\pi k$; $\cos t+\sin t=$ $=\frac{1}{2}+k$, что возможно лишь при $k=0$, $k=-1$.

1) Если $k=0$, то $\sin t+\cos t=\frac{1}{2}$; $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2) Если $k=-1$, то $\sin t+\cos t=-\frac{1}{2}$; $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

При таких значениях t все исходные функции определены.

Ответ: $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k$. ■

5.460. $t=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{2k+1}+\frac{\pi n}{2}$, $k=3, 4, \ldots; k=-4, -5$. **5.461.** $t_1=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k$, $t_2=\frac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

5.462. □ Из условия следует: 1) $x=\sqrt{x}+2\pi k$, $\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{1+8\pi k}}{2}$; 2) $x=-\sqrt{x}+2\pi k$, $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1+8\pi k}}{2}$ (берем только положительный корень каждого уравнения, так как $\sqrt{x}\geqslant 0$); при этом $k=0, 1, 2, \ldots$.

Ответ: $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ ■

5.463. $t=\frac{-2\pm\sqrt{4+2k}}{2}$, $k\geqslant -1$, $k\neq 2$ (l^2-1).

5.464. □ В левой части имеем $\cos^{-4}x+\cos^4 x\geqslant 2$; действительно, $\cos^{-4}x+\cos^4 x-2=(\cos^{-2}x-\cos^2 x)^2\geqslant 0$. Теперь оценим правую часть уравнения: $1+\cos 2x-2\sin^2 2x\leqslant 2$, поскольку $\cos 2x\leqslant 1$, $2\sin^2 2x\geqslant 0$. Таким образом, равенство возможно лишь при $\cos^4 x=\cos 2x=1$, $\sin 2x=0$. Ответ: $x=\pi k$. ■

5.465. $x=\pi\ (4k+1)$.

5.466. □ Имеем $(\sin^2 x+1)^2+\cos x\ (2\cos^2 x-1)=0$; $(\sin^2 x+1)^2+\cos x\cos 2x=0$. Но $(\sin^2 x+1)^2\geqslant 1$, $|\cos x\cos 2x|\leqslant 1$; следовательно, $\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x\cos 2x=-1.\end{cases}$ Равенство $\cos x\cos 2x=-1$ выполняется, если $\begin{cases}\cos x=-1,\\ \cos 2x=1\end{cases}$ либо $\begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}$ Последнее невозможно, так как $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Ответ: $x=\pi\ (2k+1)$. ■

5.467. $x=\frac{\pi}{2}\ (4k+1)$.

5.468. $x=2\pi k$. ● Воспользоваться тем, что $(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2\geqslant 0$, $|\cos\ (x+4\operatorname{tg}x)|\leqslant 1$.

5.469. $x=\pi\ (2k+1)$.

5.470. □ Имеем

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos^2 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos^2 2x+2=3;$$

$$-4\cos^2 2x\left(1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Левая часть уравнения неположительна, правая — неотрицательна; следовательно, равенство возможно лишь при $4\cos^2 2x\left(1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Отсюда $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$; при этом $1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, $\cos 2x=0$. Ответ: $x=\frac{\pi}{4}\ (8k+1)$. ■

5.471. □ Имеем

$$4\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right);$$
$$4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right).$$

Так как $4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 4$, $5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)\geqslant 4$, то

$$\begin{cases}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1,\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ \frac{\pi}{3}+4x=\pi+2\pi n.\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$. ■

5.472. $t_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $t_2=-\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. 5.473. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$.

5.474. □ Имеем $\cos x=-\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}$, т. е. $\cos x<0$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат приходим к однородному уравнению:

$\cos^2 x=\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x$; $\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+3=0$; $\operatorname{tg}x=1$, $\operatorname{tg}x=3$.

Так как $\cos x<0$, то получаем следующий ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+5)$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi+2\pi k=\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. ■

5.475. $x_1=\frac{\pi}{8}(8k+3)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 5.476. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=2\pi k$.

5.477. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.478. □ Возведя в куб обе части уравнения, получим

$\sin^2 x+3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\,(\sqrt[3]{\cos^2 x}-\sqrt[3]{\sin^2 x})-\cos^2 x=2\cos 2x$;

Так как, по условию, $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$, то

$-\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\,\sqrt[3]{2\cos 2x}=\cos 2x$; $-2\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x=\cos^3 2x$;

$\cos 2x\left(\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=0$; $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. ■

5.479. □ Пусть $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}=u$, $\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=v$; тогда $u-v=1$, $u^4+v^4=10+8\sin^2 x+8\cos^2 x-1=17$. Преобразуем u^4+v^4 так, чтобы найти uv:

$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2$; $(u^2+v^2)^2=17+2u^2v^2$;
$u^2+v^2=(u-v)^2+2uv=1+2uv$.

Следовательно, приходим к уравнению

$(1+2uv)^2=17+2u^2v^2$ или $u^2v^2+2uv-8=0$.

Отсюда $uv=2$, $uv\neq-1$, так как $u>0$, $v\geqslant 0$. Далее имеем $\begin{cases} u-v=1, \\ uv=2, \end{cases}$ т. е. $u=2$, $v=1$ $(u\neq-1,\ v\neq-2)$. Итак, $\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1$; $\cos x=\pm\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. ■

5.480. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **5.481.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}6+\pi k$.

5.482. □ Пусть $\sqrt[5]{0{,}5-\sin x}=u$, $\sqrt[5]{0{,}5+\sin x}=v$; тогда $\begin{cases} u+v=1, \\ u^5+v^5=1. \end{cases}$ Пользуясь этими соотношениями, выполним преобразования, чтобы найти uv:

$u^5+v^5=(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)$; $\quad u^4+v^4-uv(u^2+v^2)+u^2v^2=$
$=(u^2+v^2)^2-u^2v^2-uv(u^2+v^2)=(u^2+v^2+uv)(u^2+v^2-uv)-uv(u^2+v^2)$.

Так как $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$, $u+v=1$, то

$u^5+v^5=(1-uv)(1-3uv)-uv(1-2uv)=1-5uv+5(uv)^2$.

Поэтому имеем уравнение $5(uv)^2-5uv+1=1$, откуда $uv=0$, $uv=1$. Таким образом, получим:

1) $\begin{cases} u+v=1, \\ uv=0; \end{cases}$ $\quad u=0,\ v=1;\ u=1,\ v=0;$

2) $\begin{cases} u+v=1, \\ uv=1; \end{cases}$ система не имеет действительных решений.

Итак, $\sqrt[5]{0{,}5-\sin x}=0$ или $\sqrt[5]{0{,}5-\sin x}=1$; $\sin x=\pm0{,}5$. Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. ■

5.483. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$.

5.484. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. ● Положить $\sin x=u$, $\sqrt{2-\sin^2 x}=v$.

5.485. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

5.486. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $\quad x_2=-\operatorname{arctg}4+\pi k$. ● Положить $\sqrt{1+3\operatorname{ctg}x}=y$; тогда $\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}}=\frac{1}{y}$.

5.487. □ Имеем

$$\cos z\sqrt{\sin^2 z\left(\frac{1}{\cos^2 z}-1\right)}+\sin z\sqrt{\cos^2 z\left(\frac{1}{\sin^2 z}-1\right)}=2\sin z;$$
$$\frac{\cos z}{|\cos z|}\sin^2 z+\frac{\sin z}{|\sin z|}\cos^2 z=2\sin z.$$

Рассматривая все возможные сочетания знаков $\sin z$ и $\cos z$, получим:

1) $\sin z>0,\ \cos z>0:\ \sin^2 z+\cos^2 z=2\sin z,\ \sin z=\frac{1}{2},\ z=\frac{\pi}{6}+2\pi k;$

2) $\sin z>0$, $\cos z<0: -\sin^2 z+\cos^2 z=2\sin z$, $\sin z=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $z=\pi-$
$-\arcsin\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+2\pi k$;

3) $\sin z<0$, $\cos z>0: \sin^2 z-\cos^2 z=2\sin z$, $\sin z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $z=$
$=-\arcsin\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+2\pi k$,

4) $\sin z<0$, $\cos z<0: -\sin^2 z-\cos^2 z=2\sin z$, $\sin z=-\frac{1}{2}$, $z=\pi+\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $z_2=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k$. ■

5.488. $x=\frac{\pi}{8}(8k+3)$. **5.489.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

5.490. □ Заметим, что $\sin x\geqslant 0$, так как $\sqrt{1+\sin x}\geqslant\sqrt{1-\sin x}$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$1+\sin x-2\sqrt{1-\sin^2 x}+1-\sin x=1+2\cos x+\cos^2 x$;
$\cos^2 x+2\cos x+2|\cos x|-1=0$.

Рассмотрим два случая:

1) $\cos x>0$, $\cos^2 x+4\cos x-1=0$, $\cos x=-2+\sqrt{5}$; $x_1=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi k$ (при этом $\sin x>0$);
2) $\cos x<0$, $\cos^2 x=1$, $\cos x=-1$; $x_2=\pi(2k+1)$. ■

5.491. □ Здесь $\sin x>0$, $\cos x>0$, $\sin x\neq 1$. Имеем $\log_{\sin x}(\sin x\cos x)=2$; $\log_{\sin x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$; $1+\log_{\sin x}\cos x=2$; $\log_{\sin x}\cos x=1$; $\sin x=\cos x$;

$\operatorname{tg} x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, так как $\sin x>0$, $\cos x>0$. ■

5.492. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$.

5.493. □ Имеем

$$\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x},\ \sin 2x\neq 0,\ \sin 3x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{2\cos 2x\sin 3x-3\cos 3x\sin 2x}{\sin 2x\sin 3x}=$$
$$=\frac{2(\cos 2x\sin 3x-\sin 2x\cos 3x)-\sin 2x\cos 3x}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{2\sin x-\sin 2x\cos 3x}{\sin 2x\sin 3x}$$

Так как $\sin x\neq 0$ (при $\sin x=0$ получаем $\sin 2x=0$), то уравнение примет вид $\frac{1-\cos x\cos 3x}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{\cos x}{\cos 2x}$, откуда $\cos 2x=\cos x(\sin 2x\sin 3x+\cos 2x\cos 3x)$; $\cos 2x=\cos^2 x$; $\sin^2 x=0$, но $\sin x\neq 0$, т. е. исходное уравнение не имеет корней. ■

5.494. □ Запишем данную систему так:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2}=\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2},\\ |x|+|y|=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sin\dfrac{x+y}{2}=0$; отсюда $x+y=2\pi k$, причем $k=0$, поскольку $|x+y|\leqslant|x|+|y|=$ $=\dfrac{\pi}{4}$. Значит, $x+y=0$, т. е. $x=-y$; итак, $|x|=|y|=\dfrac{\pi}{8}$.

2) $\cos\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{y-x}{2}$; отсюда $\cos\dfrac{x+y}{2}+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{y-x}{2}\right)=0$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{y}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0$. Здесь мы не получаем решений исходной системы, так как при $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0$ имеем $x=-\dfrac{\pi}{2}-2\pi k$, т. е. $|x|>\dfrac{\pi}{4}$; при $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{y}{2}\right)=0$ имеем $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, т. е. $|y|>\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $y_1=-\dfrac{\pi}{8}$; $x_2=-\dfrac{\pi}{8}$, $y_2=\dfrac{\pi}{8}$. ■

5.495. $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $y=\dfrac{\pi}{4}(2k+5)+2\pi n$. **5.496.** $x_1=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\pi n$; $x_2=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi n$. **5.497.** $x_1=\dfrac{\pi}{3}(6k+1)$, $y_1=\dfrac{\pi}{3}(6n+1)$; $x_2=2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$, $y_2=2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$; $x_3=2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$, $y_3=2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$. **5.498.** $x=\dfrac{\pi}{4}(8k+1)$, $y=\dfrac{\pi}{4}(8n+5)$. **5.499.** $x_1=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+$ $+\pi k$, $y_1=(-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m$, $z_1=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, k, m, n — числа одной четности; $x_2=y_3=z_4=\dfrac{\pi}{6}(12k+1)$, $y_2=z_3=x_4=\dfrac{\pi}{6}(12m+7)$, $z_2=x_3=y_4=\dfrac{\pi}{6}(12n-1)$, $x_5=y_6=z_7=\dfrac{\pi}{6}(12k+5)$, $y_5=z_6=x_7=\dfrac{\pi}{6}(12m-1)$, $z_5=x_6=y_7=\dfrac{\pi}{6}(12n+7)$.

5.500. □ Положим $t=\dfrac{\sin x}{1}=\dfrac{\sin y}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin z}{2}$. Если $t=0$, то очевидны решения $x=y=0$, $z=\pi$; $x=z=0$, $y=\pi$; $x=\pi$, $y=z=0$. Пусть $t\neq0$; проверим, можно ли построить треугольник из отрезков t, $t\sqrt{3}$, $2t$ (тогда x, y, z можно рассматривать как внутренние углы этого треугольника). Имеем $t^2+3t^2=4t^2$, т. е. получим прямоугольный треугольник; следовательно, $z=\pi/2$, $t=1/2$, $\sin x=1/2$, $\sin y=\sqrt{3}/2$. Ответ: $x_1=\pi/6$, $y_1=\pi/3$, $z_1=\pi/2$; $x_2=y_3=z_4=0$, $y_2=z_3=x_4=0$, $z_2=x_3=y_4=\pi$. ■

ГЛАВА 6
ПРОГРЕССИИ

6.001. 9. **6.002.** 119/3.

6.003. □ Пусть x — число промахов в серии из 25 выстрелов. Тогда, используя формулу (6.2), получим уравнение $\frac{2\cdot 1+0{,}5\,(x-1)}{2}\,x=7$ или x^2+ $+3x-28=0$, откуда $x_1=4$, $x_2=-7$ (не подходит). Следовательно, стрелок попал в цель 21 раз. ■

6.004. 1) 2; -1; -4; 2) -10; -7; -4.

6.005. □ Согласно условию, имеем систему $\begin{cases}(a_1+d)\,d=30,\\ a_1+2d+a_1+4d=32.\end{cases}$ Отсюда находим два решения: 1) $a_1=1$, $d=5$; 2) $a_1=7$, $d=3$. Для каждого из них воспользуемся формулой (6.2).

1) При $a_1=1$, $d=5$ получим $112=\frac{2+5\,(n-1)}{2}\,n$, откуда $n_1=7$, $n_2=-6{,}4$ (не подходит). В этом случае первые три члена таковы: 1; 6; 11.

2) При $a_1=7$, $d=3$ получим $112=\frac{14+3\,(n-1)}{2}\,n$, откуда $n_1=7$, $n_2=-32/3$ (не подходит). В этом случае первые три члена таковы: 7; 10; 13. Заметим, что в обоих случаях число членов равно 7. ■

6.006. За 8 ч. **6.007.** 3 и 4.

6.008. □ Согласно условию, получаем систему $\begin{cases}a_1\,(1+q^3)=-49,\\ a_1q\,(1+q)=14.\end{cases}$ Отсюда $2q^2+5q+2=0$, т. е. $q_1=-2$, $q_2=-1/2$. Тогда искомыми четырьмя числами являются 7; -14; 28; -56. ■

6.009. □ Используя формулы (6.9) и (6.5), приходим к системе $\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{8}{5},\\ b_1\,q=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ Далее имеем $16q^2-16q-5=0$, откуда $q_1=-1/4$, $q_2=5/4>1$ (не подходит). Следовательно, $b_3=(-1/2)\,(-1/4)=1/8$. ■

6.010. 3; 3/2; 3/4.

6.011. □ Согласно условию, получаем систему $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=2,\\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=14/9.\end{cases}$ Далее, используя формулу (6.2), имеем $\frac{a_1+a_3}{2}\cdot 3=2$, откуда $a_1+a_3=4/3$ и, значит, $a_2=2/3$. Таким образом, приходим к системе $\begin{cases}a_1+a_3=4/3,\\ a_1^2+a_3^2=10/9,\end{cases}$ решив которую получим $a_1=1/3$, $a_3=1$ либо $a_1=1$, $a_3=1/3$. Итак, искомыми числами являются 1/3; 2/3; 1. ■

6.012. 44.

6.013. □ Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, d — ее разность.

Согласно условию, $\frac{(2a_1+2d)\,3}{2}=15$, откуда $a_1+d=5$ (1). Далее, так как числа a_1-1, a_1+d-1, a_1+2d+1 образуют геометрическую прогрессию, то в силу формулы (6.7) имеем $(a_1+d-1)^2=(a_1-1)(a_1+2d+1)$ (2). Решив систему уравнений (1), (2), получим два решения: 1) $a_1=3$, $d=2$; 2) $a_1=9$, $d=-4$. Однако второе решение не подходит ($d=-4<0$). Итак, $S_{10}=\frac{2\cdot 3+2\cdot 9}{2}\cdot 10=120$. ■

6.014. 1; 9; 17.

6.015. □ Заметим, что $(2n)^2-(2n-1)^2=4n-1$. Число n найдем из равенства $4n-1=200^2-199^2$ или $4n-1=399$, откуда $n=100$. Покажем, что последовательность $a_n=(2n)^2-(2n-1)^2$ есть арифметическая прогрессия. Действительно, $a_n-a_{n-1}=((2n)^2-(2n-1)^2)-((2n-2)^2-(2n-3)^2)=4n-1-4n+5=4$, т. е. $d=4$. Теперь находим $-S_{100}=\frac{3+399}{2}\cdot 100=20\,100$, откуда $S=-20\,100$. ■

6.016. 1) 7; -28; 112; -448; 2) $-11\frac{2}{3}$; $-46\frac{2}{3}$; $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **6.017.** 3; -6; 12; -24.

6.018. □ Так как $b_4=b_1q^3$, то $\frac{1}{54}=b_1\cdot\frac{1}{27}$, откуда $b_1=\frac{1}{2}$. Теперь, используя формулу (6.6а), получим уравнение $\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{\frac{2}{3}}=\frac{121}{162}$, из которого находим $n=5$. ■

6.019. □ Согласно условию, имеем систему $b_1q(q^2-1)=-\frac{45}{32}$, $b_1q^3(q^2-1)=-\frac{45}{512}$, откуда $q^2=\frac{1}{16}$. В результате получаем два решения: 1) $b_1=6$, $q=1/4$; 2) $b_1=-6$, $q=-1/4$. ■

6.020. 5 и 405.

6.021. □ Используя формулу (6.2) и условие задачи, имеем равенство $\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\,n=5n^2$ или $2a_1-d=(10-d)\,n$. Так как в этом равенстве может изменяться только n, то $d=10$. При $d=10$ находим $a_1=5$. Следовательно, три первых члена этой прогрессии таковы: 5; 15; 25. ■

6.022. 1) 3 и 4; 2) 48 и 1/4.

6.023. □ Воспользуемся формулой (6.9), справедливой при условии $|x|<1$:

а) $2x+1+\frac{x^2}{1+x}=\frac{13}{6}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{7}{9}$;

б) $\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{7}{2}\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$. ■

6.024. 9 или 31.

6.025. □ Применив к обеим прогрессиям формулу (6.9), получим b_1+b_1q+ $+b_1q^2+...=\dfrac{b_1}{1-q}$ и $b_1^2+(b_1q)^2+(b_1q^2)^2+...=\dfrac{b_1^2}{1-q^2}$. Согласно условию, имеем систему $\dfrac{b_1}{1-q}=16$, $\dfrac{b_1^2}{1-q^2}=153{,}6$, откуда $q=1/4$, $b_1=12$. Следовательно, $b_4=3/16$. ■

6.026. □ В силу условия имеем

$$\begin{cases} a_1(a_1+d)(a_1+2d)=6, \\ a_1(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)=24 \end{cases} \Rightarrow a_1+3d=4 \Rightarrow a_1=4-3d.$$

Таким образом, приходим к кубическому уравнению $3d^3-22d^2+48d-$ $-29=0$ или $3d^3-3d^2-19d^2+19d+29d-29=0$, откуда $(d-1)(3d^2-19d+$ $+29)=0$. Условию задачи удовлетворяет только корень $d=1$. Итак, получаем ответ: 1; 2; 3; 4. ■

6.027. 37,5 или 52,5. **6.028.** 6. **6.029.** 810. **6.030.** 1/5. **6.031.** 9.

6.032. □ Согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} a_3a_6=406, \\ a_9=2a_4+6 \end{cases} \text{или} \begin{cases} (a_1+2d)(a_1+5d)=406, \\ a_1+8d=2(a_1+3d)+6. \end{cases}$$

Отсюда находим два решения: 1) $a_1=4$, $d=5$; 2) $a_1=-79/7$, $d=-37/14$. Условию задачи удовлетворяет только первое из них. ■

6.033. 6; 3; 3/2; ... .

6.034. □ В силу условия имеем систему

$$\begin{cases} a_1+a_1q+a_1q^2=65, \\ \log_{15}a_1+\log_{15}a_1q+\log_{15}a_1q^2=3. \end{cases}$$

Записав второе уравнение в виде $\log_{15}(a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2)=3$, получим $a_1^3q^3=15^3$, т. е. $a_1q=15$. Таким образом, приходим к системе $a_1q=15$, $a_1+15q=50$, которая имеет два решения: 1) $a_1=5$, $q=3$; 2) $a_1=45$, $q=1/3$.

Ответ: 1) 5; 15; 45; 2) 45; 15; 5. ■

6.035. 3/5.

6.036. □ Согласно условию, имеем

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2)=21, \\ a_1^2(1+q^2+q^4)=189. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части первого уравнения: $a_1^2(1+q^2+q^4)+$ $+2a_1^2q(1+q+q^2)=441$. Вычитая из этого уравнения второе уравнение системы, получим $2a_1^2q(1+q+q^2)=252$, откуда $a_1q=6$. Теперь из системы

$$\begin{cases} a_1(1+q^2)=15, \\ a_1q=6 \end{cases}$$ находим два решения: 1) $q=2$, $a_1=3$; 2) $q=1/2$, $a_1=12$.

Проверка показывает, что оба решения подходят. ■

6.038. □ Имеем $a_{2n}/a_{2m}=-1 \Rightarrow a_{2n}+a_{2m}=0 \Rightarrow (a_1+(2n-1)d)+(a_1+(2m-1)d)=$ $=0 \Rightarrow a_1+(n+m-1)d=0$. Это означает, что $(n+m)$-й член прогрессии равен нулю. ■

6.039. 14. **6.040.** 1) 1; 3; 9; 2) 1/9; 7/9; 49/9. **6.041.** 7. **6.042.** 82 350.

6.043. □ Так как $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots=\frac{a_1}{1-q}$ и $a_1^3+a_1^3q^3+a_1^3q^6+\ldots=\frac{a_1^3}{1-q^3}$, то получим систему

$$\begin{cases}\frac{a_1}{1-q}=4,\\ \frac{a_1^3}{1-q^3}=192\end{cases} \text{ или } \begin{cases}4\,(1-q)=a_1,\\ 48\,(1+q+q^2)=a_1^2.\end{cases}$$

Далее имеем $2q^2+5q+2=0$, откуда $q=-2$ (не подходит), $q=-1/2$. Следовательно, $a_1=6$. ■

6.044. □ Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — искомые числа. Используя условия, а также формулы (6.3) и (6.7), получим систему

$$\begin{cases}a_2^2=a_1a_3,\\ 2a_3=a_2+a_4,\\ a_1+a_4=21,\\ a_2+a_3=18.\end{cases}$$

Исключив из этих уравнений a_1, a_2, a_4, имеем $4a_3^2-75a_3+324=0$, откуда находим $a_3=12$ либо $a_3=6{,}75$. Ответ: 1) 3; 6; 12; 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75; 2,25. ■

6.045. 5103 или 7/81.

6.046. □ По условию, числа a, aq, aq^2 образуют геометрическую прогрессию, числа a, $aq+2$, aq^2 — арифметическую прогрессию, а числа a, $aq+2$, aq^2+ $+9$ — снова геометрическую прогрессию. Используя формулы (6.3) и (6.7), получим систему уравнений $\begin{cases}aq+2=\frac{a+aq^2}{2},\\ (aq+2)^2=a\,(aq^2+9),\end{cases}$ из которой находим два решения: 1) $a=4$, $q=2$; 2) $a=4/25$, $q=-4$. Ответ: 1) 4; 8; 16; 2) 4/25; $-16/25$; 64/25. ■

6.047. 1) 8; 4; 2; 2) 2; 4;8. **6.049.** $\frac{127}{8}$. **6.050.** 70 336. **6.051.** $2n+\frac{(4^n-1)\,(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$.

6.052. □ Имеем:

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots=S_1=\frac{a_1}{1-q};$$

$$a_1-a_1q+a_1q^2-\ldots=S_2=\frac{a_1}{1+q};$$

$$a_1^2+a_1^2q^2+a_1^2q^4+\ldots=S=\frac{a_1^2}{1-q^2}.$$

Отсюда следует, что $S=\frac{a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{a_1}{1+q}=S_1S_2$. ■

6.055. $S^2/(2S-1)$. **6.056.** 2. **6.061.** 7. **6.062.** 1) $12+24+48+96$; 2) $4{,}5+13{,}5+$ $+40{,}5+121{,}5$. **6.063.** 7. **6.064.** 1) 3; 6; 12; 2) 27; 18; 12. **6.065.** $\frac{(a+b)\,S-2ab}{2S-(a+b)}$.

6.066. $3n$.

6.067. □ Пусть x, y, z — искомые числа. Тогда, используя условия, получим систему

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{11}{18}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=18, \\ \dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $x=1/9$, $y=1/6$, $z=1/3$. ■

6.068. -2.

6.069. □ Пусть x, y, z — соответственно цифры сотен, десятков и единиц искомого числа. Тогда, используя условия, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 100x+10y+z-792=100z+10y+x, \\ y^2=xz, \\ 2y=x-4+z. \end{cases}$$

Решив ее, находим $x=9$, $y=3$, $z=1$. Итак, искомое число есть 931. ■

6.070. □ Сначала находим $u_{10}=S_{10}-S_9=(2\cdot 100+30)-(2\cdot 81+27)=41$.

Теперь докажем, что при любом n разность $u_{n+1}-u_n$ постоянна. Это и будет означать, что последовательность $\{u_n\}$ есть арифметическая прогрессия. Итак, $u_{n+1}-u_n=(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}=2\,(n+1)^2+3\,(n+1)-4n^2-6n+2\,(n-1)^2+3\,(n-1)=4$, что и требовалось установить. ■

6.071. 1064. **6.072.** Меньше 2. **6.073.** $25\dfrac{25}{27}$.

6.074. □ 1) Если разность прогрессии d отлична от нуля, то можно записать

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right),$$

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right),$$

. . . .

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Сложив эти равенства, в правой части получим $\dfrac{1}{d}\,\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$, что и требовалось доказать.

2) Если $d=0$, то $a_1=a_2=\ldots=a_n$ и доказываемое равенство очевидно: $\dfrac{n}{a_1^2}=\dfrac{n}{a_1^2}$. ■

6.075. 101.

6.077. □ Легко установить, что $|q| \neq 1$ (проверьте). Согласно условию,

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 (q^4-1)}{q-1} = -40, \\ \dfrac{a_1^2 (q^8-1)}{q^2-1} = 3280. \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений a_1, придем к уравнению четвертой степени относительно q: $21q^4+82q^3+82q^2+82q+21=0$. Это так называемое возвратное уравнение. Разделив все его члены на q^2, имеем $21\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)+$ $+82\left(q+\dfrac{1}{q}\right)+82=0$. Теперь положим $q+\dfrac{1}{q}=t$ и получим уравнение $21t^2+$ $+32t+40=0$, откуда $t=-4/7$ (не подходит), $t=-10/3$. Далее, из уравнения $q+\dfrac{1}{q}=-\dfrac{10}{3}$ находим $q=-3$ и $q=-1/3$, которым соответствуют значения $a_1=2$ и $a_1=-54$. Ответ: 2; -6; 18; -54 или -54; 18; -6; 2. ■

6.078. $x=q^{1/\alpha}$. **6.079.** $2^{n+1}(n-1)+2-0{,}5n(n+1)$. **6.080.** $3^{n+1}(n-1)+3$. **6.081.** $(S/\sigma)^{n/2}$. **6.082.** 9. **6.084.** 0. **6.085.** В 7381 раз. **6.086.** 0,25. **6.087.** 2. **6.088.** $\approx 0{,}95$.

6.089. □ Числитель представляет собой сумму пяти членов геометрической прогрессии, первый член которой равен x^8, а знаменатель равен $x^{-2}y^2$; следовательно, в числителе получим

$$\frac{x^8(1-(x^{-2}y^2)^5)}{1-x^{-2}y^2}=\frac{x^8-x^{-2}y^{10}}{1-x^{-2}y^2}=\frac{x^{10}-y^{10}}{x^2-y^2}.$$

Аналогично, в знаменателе имеем

$$\frac{x^4(1-(x^{-1}y)^5)}{1-x^{-1}y}=\frac{x^4-x^{-1}y^5}{1-x^{-1}y}=\frac{x^5-y^5}{x-y}.$$

Разделив первое выражение на второе, находим

$$\frac{x^{10}-y^{10}}{x^2-y^2}:\frac{x^5-y^5}{x-y}=\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4. \ ■$$

6.090. При произвольном первом члене a_1 арифметической прогрессии ее разность $d=0$ или $d=a_1(-2\pm\sqrt{2})$.

ГЛАВА 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

7.001. □ Приведем все степени к одному основанию 2. Имеем $\frac{1}{16\sqrt{2}}=2^{-\frac{9}{2}}$; $0{,}125^{\frac{1}{x}}=(2^{-3})^{\frac{1}{x}}=2^{-\frac{3}{x}}$; $4^{\frac{1-x}{2}}=(2^2)^{\frac{1-x}{2}}=2^{1-x}$. Тогда уравнение примет вид $2^{-\frac{9}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{x}}=2^{1-x}$ или $2^{-\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{x}\right)}=2^{1-x}$. Используя указание 1^0, перейдем к равносильному уравнению $-\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{x}\right)=1-x$. После преобразований получим $\begin{cases}2x^2-11x-6=0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ откуда $x_1=-1/2$, $x_2=6$. ■

7.002. $x=35$. **7.003.** $x=81$.

7.004. □ Применив правило извлечения корня из степени и формулы (1.19) и (1.16), получим

$$2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{3}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{2x}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}} \text{ или } 2^{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}}=2^{\frac{7}{3}}.$$

Согласно указанию 1^0, переходим к равносильному уравнению $\frac{5x^2-3}{6x}=\frac{7}{3}$, откуда $x_1=-1/5$, $x_2=3$. ■

7.005. □ Приводим все степени к одному основанию 2: $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$; $0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}=2^{-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}$; $16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$. Тогда получим

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}=0 \text{ или } 2^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}.$$

Полагая $\sqrt{x}=y\geqslant 0$, переходим к равносильному уравнению $\frac{1}{2}-\frac{5}{2(2y+5)}=\frac{2}{y+1}$, которое имеет корни $y_1=5$ и $y_2=-2$ (последний не подходит, поскольку должно быть $y\geqslant 0$). Итак, $\sqrt{x}=5$, откуда $x=25$. ■

7.006. $x=5/3$. **7.007.** $x_1=1$, $x_2=2$. **7.008.** $x_1=-2{,}5$, $x_2=3$. **7.009.** $x=9/4$.

7.010. $x=4$.

7.011. □ Имеем

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^5;\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}}=\left(\frac{5}{10}\right)^5\cdot 5^5.$$

Умножив обе части уравнения на 5/2, получим

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{6} \text{ или } \frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}+\sqrt{9-x}=6.$$

Полагаем $\sqrt{9-x}=y>0$ и после преобразований переходим к уравнению $y^2-5y+4=0$, корни которого $y_1=1$ и $y_2=4$ удовлетворяют условию $y>0$. Отсюда находим: $\sqrt{9-x}=1$, $9-x=1$, $x_1=8$; $\sqrt{9-x}=4$, $9-x=16$, $x_2=$ $=-7$. ■

7.012. □ Разделив обе части уравнения на положительное число $\left(\frac{7}{4}\right)^x$, получим

$$4^x\cdot 2^{\frac{2x^2-6}{2}}-1=0 \text{ или } 2^{x^2-3+2x}=2^0 \text{ или } x^2+2x-3=0.$$

Итак, $x_1=-3$, $x_2=1$. ■

7.013. $x=10$. **7.014.** $x_1=0$, $x_2=25$.

7.015. □ Сгруппируем степени с основанием 2 в левой части, а степени с основанием 3 в правой части уравнения и разложим каждую часть на множители. Имеем

$$2^{x^2-1}(1+2^3)=3^{x^2-1}(1+3) \text{ или } 2^{x^2-1}\cdot 3^2=3^{x^2-1}\cdot 2^2.$$

Разделив обе части уравнения на $3^{x^2-1}\cdot 2^2\neq 0$, получим

$$\frac{2^{x^2-1}\cdot 3^2}{3^{x^2-1}\cdot 2^2}=1 \text{ или } \frac{2^{x^2-3}}{3^{x^2-3}}=1 \text{ или } \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Отсюда $x^2-3=0$, т. е. $x_{1,\,2}=\pm\sqrt{3}$. ■

7.016. $x=-3$. **7.017.** $x=1$.

7.018. □ Логарифмическая функция $y=\log_3 x$ определена при $x>0$. Поэтому, согласно формуле (7.6), имеем $\log_3 x^2=2\log_3 x$. Следовательно,

$$2^{2\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=20^2 \text{ или } 4^{\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=20^2 \text{ или } 20^{\log_3 x}=20^2.$$

Отсюда $\log_3 x=2$, т. е. $x=3^2=9$. ■

7.019. □ Имеем $5^{2x-1}=5^{2x}\cdot 5^{-1}$; $5^{x-1}=5^x\cdot 5^{-1}$; $0{,}2=5^{-1}$. После деления всех членов данного уравнения на 5^{-1} оно примет вид $3\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^x=1$. Положим $5^x=y$, где $y>0$. Тогда получим уравнение $3y^2-2y-1=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-1/3$ (не подходит, так как не выполнено условие $y>0$). Значит, $y=1$, откуда $x=0$. ■

7.020. □ Предварительно выполним преобразования: $10^{2/x}=(2\cdot 5)^{2/x}=2^{2/x}\cdot 5^{2/x}$; $25^{1/x}=(5^2)^{1/x}=5^{2/x}$; $50^{1/x}=(2\cdot 5^2)^{1/x}=2^{1/x}\cdot 5^{2/x}$. Разделив обе части данного уравнения на $5^{2/x}\neq 0$, получим уравнение $2^{2/x}+1=4{,}25\cdot 2^{1/x}$, которое решаем подстановкой $y=2^{1/x}$. Ответ: $x_{1,\,2}=\pm 1/2$. ■

7.021. $x_{1,\,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,\,4}=\pm 1$. **7.022.** $x=3$. **7.023.** $x=20$. **7.024.** $x=9$. **7.025.** $x_1=-1$, $x_2=9$.

7.026. □ Имеем $8^{\frac{2}{x}}=(2^3)^{\frac{2}{x}}=2^{\frac{6}{x}}$ и $2^{\frac{3x+3}{x}}=2^{3+\frac{3}{x}}=2^3\cdot 2^{\frac{3}{x}}$. Тогда уравнение примет вид $2^{6/x}-2^3\cdot 2^{3/x}+12=0$. Введя новую переменную $2^{3/x}=y>0$, получим уравнение $y^2-8y+12=0$, корни которого $y_1=2$ и $y_2=6$ положительны. Из уравнения $2^{3/x}=2$ находим $3/x=1$, т. е. $x_1=3$. Остается решить уравнение $2^{3/x}=6$. Логарифмируя его левую и правую части по основанию 2, получим $\frac{3}{x}\log_2 2=\log_2 6$ или $\frac{3}{x}=\log_2 6$, откуда $x_2=\frac{3}{\log_2 6}=3\log_6 2$. ■

7.027. $x=3$. **7.028.** $x_{1,\,2}=\pm 1$. **7.029.** $x_1=-1/3$, $x_2=0$. **7.030.** $x_{1,\,2}=\pm\sqrt{10}$, $x_{3,\,4}=\pm 1/\sqrt{10}$. **7.031.** $x_1=10^{-6}$, $x_2=10^3$.

7.032. □ Логарифмическая функция определена при $x>0$; значит, левая и правая части данного уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10 и используя формулы (7.6) и (7.2), получаем $\frac{\lg x+5}{3}\lg x=5+\lg x$. Положим $y=\lg x$ и решим уравнение $y^2+5y=15+3y$, откуда $y_1=-5$, $y_2=3$. Из уравнений $\lg x=-5$ и $\lg x=3$ находим $x_1=10^{-5}$, $x_2=10^3$. ■

7.033. □ Учитывая область определения логарифмической функции ($x>0$), прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $\lg 2\cdot\lg x-\lg x\cdot\lg 2=0$. Это уравнение выполняется при любом $x>0$. Ответ: $(0,\infty)$. ■

7.034. $x_1=2$, $x_2=64$. **7.035.** $x_1=1/\sqrt{10}$, $x_2=100$. **7.036.** $x_{1,\,2}=2^{\pm\sqrt{6}/2}$. **7.037.** $x_1=1/\sqrt[4]{3}$, $x_2=3$. **7.038.** $x_1=0{,}01$, $x_2=100$. **7.039.** $x_1=0{,}1$, $x_2=1000$. **7.040.** $x_1=3$, $x_2=27^3$.

7.041. □ По условию, число n — натуральное; значит, последовательность 2, 5, 8, ..., $3n-1$ есть арифметическая прогрессия с разностью $d=3$. В левой части уравнения выполним умножение степеней с одинаковым основанием и получим $3^{2+5+8+\ldots+3n-1}=(3^3)^5$. Используя формулу суммы n членов арифметической прогрессии, имеем $3^{0{,}5\,(2+3n-1)\,n}=3^{15}$, откуда $n+3n^2=30$. Последнее уравнение имеет корни $n_1=3$ и $n_2=-10/3$ (не подходит). Итак, $n=3$. ■

7.042. □ Имеем $(2^x+2^{-x})^2=2^{2x}+2+2^{-2x}=4^x+4^{-x}+2$. Так как, по условию, $4^x+4^{-x}=23$, то $(2^x+2^{-x})^2=25$. Учитывая, что $2^x+2^{-x}>0$ (в силу свойства 2° показательной функции), окончательно получим $2^x+2^{-x}=5$. ■

7.043. □ Применив последовательно формулы (7.8), (7.1) и (7.9), получим

$$\frac{\left((3^3)^{\log_3 2}+5^{\log_5 7}\right)\left((9^2)^{\log_9 4}-(2^3)^{\log_2 3}\right)}{3+5^{\log_{25}16}\cdot 3}=$$

$$=\frac{(2^3+7)\left((9^{\log_9 4})^2-3^3\right)}{3\,(1+5^{\log_5 4})}=\frac{15\,(4^2-3^3)}{3\,(1+4)}=-11.\ ■$$

7.044. 10. **7.045.** 890.

7.046. □ Используя формулы (7.6) и (7.2), находим

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{2}}} = -\log_2 \log_2 2^{1/8} = -\log_2 (1/8) = -(-3) \log_2 2 = 3. \blacksquare$$

7.047. 2. **7.048.** 24. **7.049.** 19. **7.050.** 1. **7.051.** 8.

7.052. □ Обозначим данное выражение через A. Согласно свойству 1^0 логарифмической функции, $a>0$. Применив сначала формулу (7.9), а затем (7.1) и (7.6), получим

$$A=(2^{\log_2 a^4}-3^{\log_3 (a^2+1)}-2a):(49^{2\log_{49} a}-(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} a}-1)=$$

$$=(a^4-(a^2+1)-2a):(49^{\log_{49} a^2}-a-1)=(a^4-(a^2+1+2a)):$$

$$:(a^2-a-1)=\frac{a^4-(a+1)^2}{a^2-a-1}.$$

Эта дробь определена при условии $a^2-a-1\neq 0$. Решив уравнение $a^2-a-1=0$, находим его корни: $a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (последний не удовлетворяет условию $a>0$). Следовательно, $a^2-a-1\neq 0$, если $a\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Теперь можно провести дальнейшее преобразование:

$$A=\frac{(a^2+a+1)(a^2-a-1)}{a^2-a-1}=a^2+a+1, \text{ где } a>0 \text{ и } a\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \blacksquare$$

7.053. □ В силу определения и свойства 1^0 логарифмической функции имеем $a>0$, $a\neq 1$ (1) и $a^2-1>0 \Rightarrow |a|>1 \Rightarrow a<-1$ или $a>1$ (2). Из (1) и (2) следует, что $a>1$. Далее, так как знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, то $a^2-1\neq 1$ и, значит, $a\neq\pm\sqrt{2}$. Теперь заметим, что $\log_{1/a}\sqrt{a^2-1}=-\log_a\sqrt{a^2-1}$ (согласно (7.7)), и, используя формулу (7.9), находим

$$A=\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_a^2\sqrt{a^2-1}}{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_a\sqrt{a^2-1}}=\log_a\sqrt{a^2-1}, \text{ где } a>1 \text{ и } a\neq\sqrt{2}. \blacksquare$$

7.054. $ab(a-b)^2$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$. **7.055.** $1+a$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.056.** $\log_a b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ и $ab\neq 1$. **7.057.** $\log_a b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ и $b\neq a$.

7.058. □ Применяя последовательно формулы (7.9), (7.8) и снова (7.9), получим

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}=\log_3 \sqrt[3]{a}=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}} 3}=\frac{1}{\log_a 27}=\frac{1}{b}. \blacksquare$$

7.059. $-(1+2a)/a$. **7.060.** $1/a^2$. **7.061.** $(b+3a-2)/(2a)$.

7.062. □ Прибавив к обеим частям равенства $x^2+4y^2=12xy$ по $4xy$, получим $(x+2y)^2=16xy$. Так как $x>0$, $y>0$, то $x+2y=\sqrt{16xy}$. Прологарифмируем последнее равенство по основанию 10:

$$\lg(x+2y)=\frac{1}{2}\lg(16xy);\ \lg(x+2y)=\frac{1}{2}\lg 16+\frac{1}{2}(\lg x+\lg y);$$

$$\lg(x+2y)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y). \blacksquare$$

7.063. □ Из условия следует, что $y>0$, $z>0$, а $x^2=\log_2 y$ (1), $y^2=\log_2 z$ (2). Так как $z=2^{y^2}$, где $y>0$, то $z>1$ и, значит, $\log_2 z>0$. Из равенства (2) выразим $y=\sqrt{\log_2 z}$ и подставим в (1). Имеем $x^2=\log_2\sqrt{\log_2 z}$, откуда $x=\pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$. Это выражение принимает действительные значения, если $\log_2\log_2 z\geqslant 0$, откуда $\log_2 z\geqslant 1$, т. е. $z\geqslant 2$. ■

7.064. □ Из определения логарифма следует, что $\sqrt{x}>0$, $\sqrt{x}\neq 1$, т. е. $x>0$, $x\neq 1$. Применяя формулы (7.9) и (7.6), получим $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\lg x$. Согласно указанию 4⁰, переходим к равносильной данному уравнению системе

$$\begin{cases}x>0,\ x\neq 1,\\ \sqrt{6+x}+6=x\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x>0,\ x\neq 1,\\ \sqrt{6+x}=x-6.\end{cases}$$

В левой части уравнения $\sqrt{6+x}\geqslant 0$, поэтому $x-6\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 6$, и можно обе части уравнения возвести в квадрат. Имеем

$$\begin{cases}x\geqslant 6,\\ 6+x=x^2-12x+36\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x\geqslant 6,\\ x^2-13x+30=0.\end{cases}$$

Находим корни уравнения: $x_1=3$, $x_2=10$; из них неравенству $x\geqslant 6$ удовлетворяет только $x=10$. ■

7.065. $x=0{,}5$. **7.066.** $x_1=2$, $x_2=3$.

7.067. □ Учитывая область определения квадратного корня, заключаем, что $2x-7\geqslant 0$. При этих значениях x имеем $\sqrt{2x-7}\geqslant 0$; $\sqrt{2x-7}+1>0$, $\sqrt{2x-7}+7>0$ и $\sqrt{2x-7}+7\geqslant 7$, т. е. $\log_5(\sqrt{2x-7}+7)\neq 0$. Умножив обе части уравнения на $\log_5(\sqrt{2x-7}+7)$, получим

$$\log_5(\sqrt{2x-7}+1)=0{,}5\log_5(\sqrt{2x-7}+7) \text{ или}$$

$$\log_5(\sqrt{2x-7}+1)=\log_5\sqrt{\sqrt{2x-7}+7}.$$

Согласно указанию 4⁰, переходим к системе

$$\begin{cases}2x-7\geqslant 0,\\ \sqrt{2x-7}+1=\sqrt{\sqrt{2x-7}+7}.\end{cases}$$

Введя новую переменную $\sqrt{2x-7}+1=y>0$, приходим к уравнению $y=\sqrt{y+6}$ или $y^2-y-6=0$, имеющему корни $y_1=3$ и $y_2=-2$ (последний не удовлетворяет условию $y>0$). Итак, остается решить уравнение $\sqrt{2x-7}+1=3$, откуда $x=5{,}5$, что удовлетворяет неравенству $2x-7\geqslant 0$. ■

7.068. $x=5$.

7.069. □ Имеем $\lg(3-x)^3=\lg(27-x^3)$, что равносильно системе

$$\begin{cases}3-x>0,\\ (3-x)^3=27-x^3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<3,\\ (3-x)^3=(3-x)(9+3x+x^2).\end{cases}$$

Далее получим $(3-x)(9-6x+x^2-9-3x-x^2)=0$ или $(3-x)(-9x)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=3$ (не удовлетворяет неравенству $x<3$). Итак, $x=0$. ■

7.070. $x=5$.

7.071. □ Учитывая область определения логарифмической функции, имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+10>0, \\ 2x-1>0, \\ 21x-20>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-10, \\ x>1/2, \\ x>20/21 \end{cases} \Rightarrow x>20/21.$$

Согласно указанию 5^0, получаем равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases} x>20/21, \\ \lg(5(x+10))=\lg\dfrac{10(21x-20)}{2x-1} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>20/21, \\ 5(x+10)=\dfrac{10(21x-20)}{2x-1}. \end{cases}$$

Решая уравнение, находим $x_1=10$, $x_2=1{,}5$ (оба значения удовлетворяют неравенству $x>20/21$). ■

7.072. $x=-2$. **7.073.** $x=13$.

7.074. □ Учитывая области определения логарифмической функции и квадратного корня, имеем систему неравенств $3x+1\geqslant 0$ (при этом условии $\sqrt{3x+1}+4>0$), $x>0$, решением которой является $x>0$. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg 2x\neq 0, \\ 2-\lg 4+\lg 0{,}12=\lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg 2x. \end{cases} \qquad (1)$$

Используя указание 5^0, приходим к уравнению

$$\lg\frac{100\cdot 0{,}12}{4}=\lg\frac{\sqrt{3x+1}+4}{2x} \quad \text{или} \quad 3=\frac{\sqrt{3x+1}+4}{2x}.$$

После умножения обеих частей уравнения на $2x$ (при этом приобретения корней не произойдет, поскольку $x>0$) получим иррациональное уравнение $\sqrt{3x+1}=6x-4$ (2). Так как $\sqrt{3x+1}\geqslant 0$, то и $6x-4\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 2/3$. Возведем обе части уравнения (2) в квадрат: $3x+1=36x^2-48x+16$ или $36x^2-51x+15=0$. Отсюда находим $x_1=1$, $x_2=5/12$ (не удовлетворяет условию $x\geqslant 2/3$). Остается убедиться в том, что для $x=1$ выполняется второе из условий системы (1): $\lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg 2x=\lg 6-\lg 2=\lg 3\neq 0$. Итак, $x=1$. ■

7.075. $x=37$. **7.076.** $x=4-\sqrt{11}$.

7.077. □ Умножив обе части уравнения на 2 и учитывая указание 5^0, получим равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases} x^2-55x+90>0, & (1) \\ x-36>0, & (2) \\ \lg\dfrac{x^2-55x+90}{x-36}=\lg 2. & (3) \end{cases}$$

Решаем уравнение (3). Имеем $\dfrac{x^2-55x+90}{x-36}=2$ или $x^2-57x+162=0$, откуда $x_1=54$, $x_2=3$. Значение $x_2=3$ не удовлетворяет неравенству (2), а $x_1=54$ ему удовлетворяет. Подстановкой в неравенство (1) убеждаемся, что $x=54$ удовлетворяет и ему. Итак, $x=54$. ■

7.078. $x=6$. **7.079.** $x=29$.

7.080. □ Для существования логарифмов необходимо, чтобы одновременно были выполнены неравенства $x>0$, $\lg x>0$, $3\lg x-2>0$ или $x>0$, $x>1$, $\lg x>2/3$. Отсюда $\lg x>2/3$. Теперь переходим к равносильной данному уравнению системе $\begin{cases}\lg x>2/3,\\ \lg x\,(3\lg x-2)=1.\end{cases}$ После замены переменной $y=\lg x$ получим уравнение $3y^2-2y-1=0$, корни которого $y_1=1$, $y_2=-1/3$. Из этих значений неравенству $\lg x>2/3$ удовлетворяет только первое. Итак, $\lg x=1$, откуда $x=10$. ■

7.081. $x_1=3$, $x_2=3+\sqrt{2}$. **7.082.** $x_1=-1$, $x_2=7$.

7.083. □ Здесь $x\neq 3$. Записав правую часть уравнения в виде $3=3\log_3 3=\log_3 3^3$, переходим к равносильному уравнению $(x-3)^2\,|x-3|=3^3$ при условии $x\neq 3$. Так как $a^2=|a|^2$, то получим $|x-3|^3=3^3$ или $|x-3|=3$, откуда $x_1=0$, $x_2=6$. ■

7.084. $x=5$. **7.085.** $x_1=1$, $x_2=2$. **7.086.** $x=10$. **7.087.** $x=5-\sqrt{11}$. **7.088.** $x=10$.

7.089. $x=5$. **7.090.** $x_1=\sqrt[3]{2}$, $x_2=4$. **7.091.** $x_1=33/8$, $x_2=17/4$, $x_3=8$, $x_4=12$.

7.092. $x_{1,\,2}=\pm 3$. **7.093.** $x=-10$.

7.094. □ Здесь $x>0$. После несложных преобразований получим равносильное уравнение $(2+\lg x)^2+(1+\lg x)^2=14-\lg x$. Полагая $\lg x=y$, приходим к квадратному уравнению $2y^2+7y-9=0$, имеющему корни $y_1=-9/2$, $y_2=1$. Следовательно, $x_1=10^{-9/2}$, $x_2=10$. ■

7.095. $x=3$.

7.096. □ Здесь $x>0$, $x\neq 1$. После преобразований приведем уравнение к виду $(2\log_x 3+2)\log_3^2 x=4$, откуда, учитывая, что $\log_x 3\cdot\log_3 x=1$, получим $2\log_3 x+2\log_3^2 x=4$. Решив это уравнение с помощью подстановки $\log_3 x=y$, в результате находим $x_1=1/9$, $x_2=3$. ■

7.097. $x_1=1/128$, $x_2=2$. **7.098.** $x=\sqrt{3}$.

7.099. □ Используя формулу (7.7), получим уравнение

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=11 \quad\text{или}\quad \log_2 x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=11,$$

откуда $\log_2 x=6$, т. е. $x=64$. ■

7.100. $x_1=1/27$, $x_2=9$. ● Воспользоваться подстановкой $\log_{27} x=y$.

7.101. $y=x$, где $x>0$ и $x\neq 1$. **7.102.** $x_1=5$, $x_2=25$.

7.103. $x_1=1/9$, $x_2=9$. ● Используя формулу (7.7), перейти к основанию 3.

7.104. $x_1=\sqrt[9]{a}$, $x_2=a^9$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.105.** $x_1=\sqrt[4]{2}$, $x_2=\sqrt{2}$.

7.106. □ Учитывая область определения логарифмической функции и ограничения, налагаемые на основание логарифма, имеем систему неравенств $10-x>0$, $x>0$, $x\neq 1$, откуда $0<x<1$, $1<x<10$ (1). Так как $x\neq 1$, то $\log_4 x\neq 0$. Умножив обе части уравнения на $\log_4 x$ (при этом приобретения корней не будет), после преобразований получим уравнение $\log_4 x+\log_4(10-x)=\log_4 16$ или $x^2-10x+16=0$. Его корни $x_1=2$ и $x_2=8$ являются и корнями данного уравнения, поскольку удовлетворяют условиям (1). ■

7.107. □ Здесь $1-x>0$, $1-x\neq 1$, т. е. $x<1$, $x\neq 0$ (1). Далее имеем $\log_{1-x} 1{,}5 = 0{,}5$; $1{,}5=(1-x)^{0{,}5}$; $2{,}25=1-x$; $x=-1{,}25$. Это значение удовлетворяет условиям (1). Итак, $x=-1{,}25$. ■

7.108. $x=1/2$.

7.109. □ Здесь $3^x-5^{2-x}>0$ (1). Воспользуемся тем, что $2-x=\log_5 5^{2-x}$, и запишем уравнение в виде $\log_5(2^3\cdot 5^{2-x})=\log_5(3^x-5^{2-x})$. Далее имеем

$2^3\cdot 5^{2-x}=3^x-5^{2-x}$; $5^{2-x}(2^3+1)=3^x$; $5^{2-x}=3^{x-2}$.

Наконец, умножив обе части уравнения на $3^{2-x}\neq 0$, получим $(5\cdot 3)^{2-x}=1 \Rightarrow 15^{2-x}=15^0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$. Этот корень удовлетворяет неравенству (1). ■

7.110. □ Учитывая области определения квадратного корня и логарифмической функции, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x^2-9>0, \\ 7-x>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>-3, \\ |x|>3, \\ x<7. \end{cases}$$

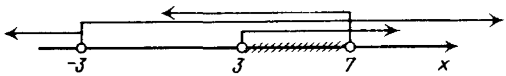

Рис. Р.7.1

С помощью рис. Р.7.1 находим $3<x<7$ (1). Преобразуем левую часть уравнения:

$$(2^{-2})^{\log_2\sqrt{x+3}-\log_2\sqrt{x^2-9}}=\left(2^{\log_2\sqrt{x+3}}\right)^{-2}:\left(2^{\log_2\sqrt{x^2-9}}\right)^{-2}=\frac{(\sqrt{x+3})^{-2}}{(\sqrt{x^2-9})^{-2}}=$$
$$=\frac{x^2-9}{x+3}=x-3.$$

Остается решить уравнение $x-3=\sqrt{2(7-x)}$. Из неравенства (1) следует, что $x-3>0$, и обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. После упрощений получим $x^2-4x-5=0$. Значение $x_1=-1$ не удовлетворяет условию (1), а $x_2=5$ — удовлетворяет. Ответ: $x=5$. ■

7.111. $x_1=0$, $x_2=2$. **7.112.** $x=0$. **7.113.** $x=0$. **7.114.** $x=2$.

7.115. □ Согласно указанию 2°, $x>0$ (1). Далее, учитывая область определения логарифмической функции, получим $x^2-1>0$ или $|x|>1$, откуда $x<-1$, $x>1$ (2). Из (1) и (2) следует, что $x>1$ (при этом автоматически выполняется ограничение $x\neq 1$ на основание логарифма). Теперь имеем $x^{\log_x\sqrt{x^2-1}}=5$ или $\sqrt{x^2-1}=5$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{26}$. Данному уравнению удовлетворяет только $x=\sqrt{26}$. ■

7.116. $x\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$. **7.117.** $x=2$. **7.118.** $x_1=-1$, $x_2=5$. **7.119.** $x=3$.
7.120. $x=1$. **7.121.** $x_{1,2}=\pm 3$. **7.122.** $x_{1,2}=\pm 1$. **7.123.** $x_1=5$, $x_2=15$. **7.124.** $x=7$.
7.125. $x_1=2$, $x_2=11$. **7.126.** $x=1$. **7.127.** $x_1=2$, $x_2=6$. **7.128.** $x=2$. **7.129.** $x=2$.
7.130. $x=2$.

7.131. □ Сгруппируем степени с основанием 7 в левой части уравнения, а степени с основанием 5 — в правой:

$$7^{\lg x}+13\cdot 7^{\lg x-1}=3\cdot 5^{\lg x-1}+5^{\lg x+1}.$$

Вынеся за скобки степень с меньшим показателем и проведя дальнейшие преобразования, получим

$$7^{\lg x-1}(7+13)=5^{\lg x-1}(3+5^2);\ \frac{7^{\lg x-1}\cdot 20}{5^{\lg x-1}\cdot 28}=1;\ \left(\frac{7}{5}\right)^{\lg x-2}=\left(\frac{7}{5}\right)^0.$$

Отсюда $\lg x-2=0$, т. е. $x=100$. ■

7.132. $x_1=1$, $x_2=3$. **7.133.** $x=\sqrt[3]{2}$. **7.134.** $x_1=1$, $x_2=100$. **7.135.** $x=1$. **7.136.** $x=5$.
7.137. $x=9$. **7.138.** $x=7$. **7.139.** $x=2$.

7.140. □ Отметим, что в левой части выражение под знаком логарифма положительно при всех x. Упростим правую часть: $\log_5 0{,}2=\log_5\frac{1}{5}=\log_5 1-\log_5 5=-1=\log_3 3^{-1}$. Итак, $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_3 3^{-1}$. Далее имеем

$$3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3};\ 3^{x^2-13x+28}=3^{-2};$$

$x^2-13x+28=-2$; $x^2-13x+30$; $x_1=3$, $x_2=10$. ■

7.141. $x=2$. **7.142.** $x_1=7$, $x_2=8$. **7.143.** $x_1=2$, $x_2=4$. **7.144.** $x=-2$.

7.145. □ Положим $3^x=u>0$ и $2^{y/2}=v>0$. Тогда получим

$$\begin{cases}u^2-v^2=725,\\ u-v=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u-v)(u+v)=725,\\ u-v=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v=29,\\ u-v=25,\end{cases}$$

откуда $u=27$, $v=2$. Итак, остается решить систему $3^x=3^3$, $2^{y/2}=2$, откуда $x=3$, $y=2$. Ответ: (3; 2). ■

7.146. □ Согласно указанию 2°, $x>0$. Прологарифмируем оба уравнения по основанию 5:

$$\begin{cases}(2y^2-1)\log_5 x=1,\\ (y^2+2)\log_5 x=3.\end{cases}$$

Здесь $2y^2-1\neq 0$ и $\log_5 x\neq 0$, так как правая часть уравнения отлична от нуля. Разделив почленно второе уравнение на первое, получим $\frac{y^2+2}{2y^2-1}=3$ или $5y^2=5$, откуда $y=\pm 1$. Из первого уравнения находим $\log_5 x=1$, т. е. $x=5$. Ответ: (5; 1), (5; −1). ■

7.147. $(2^{\sqrt[3]{4}};\ 2^{2\sqrt[3]{2}})$. **7.148.** (1/2; −3/2).

7.149. □ В первом уравнении введем новую переменную $2^{(x+y)/6}=z>0$. Тогда получим уравнение $z^2+z-6=0$, имеющее корни $z_1=2$, $z_2=-3$ (не удовлетворяет условию $z>0$). Следовательно, $2^{(x+y)/6}=2$, откуда $(x+y)/6=1$, т. е. $x+y=6$. В результате приходим к системе $\begin{cases}x+y=6,\\ x^2+5y^2=6xy,\end{cases}$ которую решаем способом подстановки. Ответ: (3; 3), (5; 1). ■

7.150. (1; 1). ● Прологарифмировать все члены уравнения по основанию 2.

7.151. (9; 16). ● Возвести обе части второго уравнения в степень $2x-y$ и подставить полученное выражение в первое уравнение.

7.152. (5; 5). **7.153.** (3; 9), (9; 3).

7.154. □ Учитывая область определения логарифмической функции, заключаем, что должны выполняться неравенства $2x+y>0$ и $2x-y>0$ (1). Положим в первом уравнении $2^{(x-y)/2}=z$ и получим $z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}$ или $2z^2-5z+2=0$, откуда $z_1=2$, $z_2=0{,}5$. Составим и решим две новые системы, равносильные данной:

1) $\begin{cases} 2^{(x-y)/2}=2, \\ \lg\left((2x-y)\cdot 10\right)=\lg\left((y+2x)\cdot 6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)/2=1, \\ 5\,(2x-y)=3\,(y+2x) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=2, \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow x=4,\ y=2.$ Условия (1) выполняются.

2) $\begin{cases} 2^{(x-y)/2}=0{,}5, \\ 5\,(2x-y)=3\,(y+2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2, \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow x=-4,\ y=-2.$ Здесь условия (1) не выполняются.

Ответ: (4; 2). ■

7.155. (4,5; 0,5). **7.156.** (4; 2), (4; −2). **7.157.** (2; 18), (18; 2). **7.158.** (1; 1), (4; 2).

7.159. (6; 8), (8; 6). **7.160.** (3; 27). **7.161.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

7.162. □ Здесь $x>0$. Логарифмируя второе уравнение по основанию 4, получим систему

$$\begin{cases} y=1+\log_4 x, \\ y\cdot\log_4 x=6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y+(-\log_4 x)=1, \\ y\cdot(-\log_4 x)=-6. \end{cases}$$

Значит, y и $(-\log_4 x)$ являются корнями квадратного уравнения $z^2-z-6=0$. Отсюда получаем две системы: $y=3$, $-\log_4 x=-2$ и $y=-2$, $-\log_4 x=3$. Ответ: (16; 3), (1/64; −2). ■

7.163. □ Здесь $x>0$, $y>0$ (1). Перейдем в первом уравнении к основанию 4 и получим систему

$$\begin{cases} \log_4 \frac{x}{y^2}=\log_4 1, \\ x^2-2y^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y^2}=1, \\ x^2-2y^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2, \\ x^2-2x-8=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x_1=4$, $x_2=-2$ (не удовлетворяет условиям (1)); тогда $y^2=4$, т. е. $y_1=2$, $y_2=-2$ (не удовлетворяет условиям (1)). Ответ: (4; 2). ■

7.164. (4; 16). **7.165.** (16; −28), (1; 2). **7.166.** (25; 36). **7.167.** (3; −3).

7.168. □ Приведя все степени к основанию 5, получим $5^{\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}}=5^{3(x-4)-2(x-2)}$. Согласно указанию 1^0, перейдем к равносильному уравнению

$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}=3x-12-2x+4$. Сократив на $\sqrt{x}+2>0$ (при этом потери корней не произойдет), после преобразований придем к уравнению $x-\sqrt{x}-6=0$. Положим $\sqrt{x}=y\geqslant 0$ и решим уравнение $y^2-y-6=0$, откуда $y_1=-2$ (не годится), $y_2=3$. Таким образом, $x=9$. ■

7.169. $x=25$.

7.170. □ Имеем $|x-3|^{\frac{x+1}{4}}=|x-3|^{\frac{x-2}{3}}$. Согласно указанию 2^0, корнями данного уравнения являются решения системы

$$\begin{cases} |x-3|>0, \\ |x-3|\neq 1, \\ \frac{x+1}{4}=\frac{x-2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\neq 3, \\ x\neq 2,\ x\neq 4, \\ 3x+3=4x-8 \end{cases}$$

и, быть может, решения уравнения $|x-3|=1$. Уравнение системы имеет корень $x=11$, а условию $|x-3|=1$ удовлетворяют $x=2$ и $x=4$, также являющиеся решением системы, поскольку при этих значениях функции $\frac{x+1}{4}$ и $\frac{x-2}{3}$ определены. Итак, $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=11$. ■

7.171. $x_1=1/3$, $x_2=2$, $x_3=4$. **7.172.** $x_1=-1/5$, $x_2=1/2$, $x_3=1$, $x_4=3$.

7.173. □ Сгруппировав степени с основанием 4 в левой части уравнения, а степени с основанием 9 — в правой и вынося общий множитель за скобки, имеем

$$3\cdot 4^x(1-2\cdot 4)=9^{x+1}\left(-3-\frac{1}{2}\right) \text{ или } 3\cdot 2^{2x}(-7)=3^{2x+2}\left(-\frac{7}{2}\right).$$

Разделим обе части уравнения на $-21/2$ и получим $2^{2x+1}=3^{2x+1}$. Это равенство возможно только при условии $2x+1=0$, откуда $x=-1/2$. ■

7.174. $x=4$.

7.175. □ Полагая $3^x=y>0$, получим кубическое уравнение $y^3-13y^2+39y-27=0$. Разложим его левую часть на множители: $(y^3-27)-13y(y-3)=0$ или $(y-3)(y^2-10y+9)=0$. Решив уравнения $y-3=0$ и $y^2-10y+9=0$, находим $y_1=3$, $y_2=1$, $y_3=9$. Ответ: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. ■

7.176. □ Запишем уравнение в виде $3\cdot 2^{4x}+2\cdot 3^{4x}=5(2\cdot 3)^{2x}$. Так как $(2\cdot 3)^{2x}=2^{2x}\cdot 3^{2x}>0$ при любом x, то, разделив все члены уравнения на $2^{2x}\cdot 3^{2x}$, получим

$$3\cdot\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+2\cdot\frac{3^{2x}}{2^{2x}}=5 \text{ или } 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+2\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=5.$$

Теперь положим $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=y>0$ и придем к уравнению $3y+\frac{2}{y}=5$ или $3y^2-5y+2=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=2/3$. Остается решить уравнения $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=1$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}$. Ответ: $x_1=0$, $x_2=1/2$. ■

7.177. $x_1=1$, $x_2=\log_2(3+\sqrt{29})-1$.

7.178. □ Левая часть уравнения представляет собой куб разности двух чисел $3\cdot 2^{-x}$ и 2^x. Поэтому $(3\cdot 2^{-x}-2^x)^3=8$ или $3\cdot 2^{-x}-2^x=2$. Это уравнение решаем подстановкой $2^x=y>0$. Ответ: $x=0$. ■

7.179. $x=3$. **7.180.** $x=0$. **7.181.** $x=2{,}5$.

7.182. $z_{1,\,2}=\pm 2$. ● Воспользоваться тем, что $\sqrt{7+\sqrt{48}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$.

7.183. $x=1$. **7.184.** $x=-2$.

7.185. □ Согласно определению корня, $x\neq 0$. Запишем уравнение в виде

$5^x\cdot 2^{\frac{3x-3}{x}}=5^3\cdot 2^2$. Разделив обе части на $5^3\cdot 2^2\neq 0$, получим

$$5^{x-3}\cdot 2^{\frac{3x-3}{x}-2}=1 \text{ или } 5^{x-3}\cdot 2^{\frac{x-3}{x}}=1 \text{ или } \left(5\cdot 2^{\frac{1}{x}}\right)^{x-3}=1.$$

Так как $5\cdot 2^{1/x}>0$ и $5\cdot 2^{1/x}\neq 1$, то $x-3=0$, т. е. $x=3$. ■

7.186. $x_1=1$, $x_2=3$.

7.187. □ Запишем уравнение в виде $4^{x-2}(3-a)=a-27$ (1). Отсюда при условии $3-a\neq 0$ получим $4^{x-2}=\dfrac{a-27}{3-a}$ (2). Так как $4^{x-2}>0$ при любом x, то уравнение (2) имеет решение, если $\dfrac{a-27}{3-a}>0$.

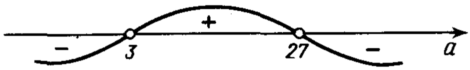

Рис. Р.7.2

Решим это неравенство методом интервалов. Используя рис. Р.7.2, находим $3<a<27$. При этих значениях a равенство (2) можно прологарифмировать по основанию 4: $x-2=\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$, откуда $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$.

Пусть теперь $\dfrac{a-27}{3-a}\leqslant 0$, т. е. $a<3$ и $a\geqslant 27$; тогда уравнение (2) не имеет решений.

Пусть, наконец, $3-a=0$; тогда уравнение (1) примет вид $4^{x-2}\cdot 0=$ $=3-27\neq 0$, т. е. оно не имеет решений.

Итак, получаем ответ: $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$ при $3<a<27$; нет решений при $a\leqslant 3$ и $a\geqslant 27$. ■

7.188. $(2a-1)/(a+3)$ при $a\neq -3$, $a\neq -2$, $a\neq 1/2$; нет решений при $a=-3$, $a=-2$, $a=1/2$.

7.189. □ Упростим дробь:

$$\frac{\log_{100}a}{\lg a}=\frac{1}{\log_a 100\cdot\lg a}=\frac{1}{2\log_a 10\cdot\lg a}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично, $\dfrac{\log_{100}b}{\lg b}=\dfrac{1}{2}$. В результате получим

$$(b^{1/2}a^{1/2})^{2\log_{ab}(a+b)}=(ab)^{\log_{ab}(a+b)}=a+b,$$

причем должны быть выполнены условия $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $ab\neq1$. ■

7.190. □ Имеем

$$A=((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}+2)^{1/2}-\log_b a-\log_a b=$$

$$=\left(\left(\log_b^4 a+\frac{1}{\log_b^4 a}+2\right)^{1/2}+2\right)^{1/2}-\log_b a-\frac{1}{\log_b a}=$$

$$=\left(\left(\frac{\log_b^8 a+2\log_b^4 a+1}{\log_b^4 a}\right)^{1/2}+2\right)^{1/2}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}.$$

Заметим, что $\log_b^8 a+2\log_b^4 a+1=(\log_b^4 a+1)^2$ и $((\log_b^4 a+1)^2)^{1/2}=|\log_b^4 a+1|=\log_b^4 a+1$, так как $\log_b^4 a+1>0$. Далее находим

$$A=\left(\frac{\log_b^4 a+1}{\log_b^2 a}+2\right)^{1/2}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\left(\frac{\log_b^4 a+2\log_b^2 a+1}{\log_b^2 a}\right)^{1/2}-$$

$$-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\frac{\log_b^2 a+1}{|\log_b a|}-\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}.$$

Пусть $\log_b a>0$; тогда $|\log_b a|=\log_b a$, откуда $A=0$.

Пусть $\log_b a<0$; тогда $|\log_b a|=-\log_b a$, откуда $A=-\dfrac{2(\log_b^2 a+1)}{\log_b a}$.

Остается решить неравенства $\log_b a>0$ и $\log_b a<0$. Для неравенства $\log_b a>0$ имеем: если $0<b<1$, то и $0<a<1$; если же $b>1$, то и $a>1$. Для неравенства $\log_b a<0$ получаем: если $0<b<1$, то $a>1$; если же $b>1$, то $0<a<1$.

Ответ: 0, если $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}a>1,\\b>1\end{cases}$; $-2(\log_b a+\log_a b)$, если $\begin{cases}a>1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}0<a<1,\\b>1.\end{cases}$ ■

7.191. $(1+\log_2 x)^3$, где $x>1$. **7.192.** $x+1$, где $x>0$, $x\neq1$. **7.193.** $\log_a b$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq1$, $b\neq1$. **7.194.** $3-2\log_a b$, если $0<b\leqslant a^3$, $b\neq1$; -3, если $b>a^3$. **7.195.** $1/(\log_a b-1)$, где $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $a\neq b$, $ab\neq1$.

7.196. $\dfrac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}}$.

7.197. □ Прологарифмировав данные равенства по основанию 10, получим $\lg\beta=\dfrac{1}{1-\lg\alpha}$, $\lg\gamma=\dfrac{1}{1-\lg\beta}$. Следовательно, $\lg\gamma=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\lg\alpha}}=\dfrac{\lg\alpha-1}{\lg\alpha}$, откуда

$\lg\alpha=\dfrac{1}{1-\lg\gamma}$. Согласно определению логарифма, имеем $\alpha=10^{\frac{1}{1-\lg\gamma}}$. ■

7.201. 0.

7.202. □ Используя последовательно формулы (7.6), (7.7), (7.4), (7.5), получим

$$\log_{30} 8 = 3\log_{30} 2 = \frac{3\lg 2}{\lg 30} = \frac{3\lg \frac{10}{5}}{\lg (3\cdot 10)} = \frac{3\,(1-\lg 5)}{\lg 3+1} = \frac{3\,(1-a)}{b+1}.\ \blacksquare$$

7.203. $a\,(b+3)$.

7.204. □ Учитывая область определения логарифмической функции, имеем

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-\sqrt{x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2, \\ 0\leqslant x<4 \end{cases} \Rightarrow 0\leqslant x<2. \quad (1)$$

Согласно указанию 5^0, переходим к уравнению $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}}$. Разделив обе его части на $\sqrt{2-x}$ (при этом потери корней не будет, так как при условии (1) $\sqrt{2-x}>0$), получим $\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Решаем это уравнение возведением обеих его частей в квадрат и последующей подстановкой $\sqrt{x} = y\geqslant 0$. В результате находим его корни $x_1=0$, $x_2=16/9$, причем оба удовлетворяют условию (1). ■

7.205. $x_1=-1$, $x_2=3$.

7.206. □ Здесь $x>0$. Упростим правую часть уравнения:

$$x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}} = \left(x^{\log_x 3}\right)^{\log_3 4} = 3^{\log_3 4} = 4.$$

Теперь запишем уравнение в виде

$\log_4 9 + \log_4 x^2 = 4\log_4 4$ или $\log_4 (9x^2) = \log_4 4^4$,

т. е. $9x^2=4^4$, откуда $x_{1,\,2}=\pm 16/3$. Условию $x>0$ удовлетворяет только корень $x=16/3$. ■

7.207. □ Применяя формулы (7.8) и (7.6), получим:

$$\frac{1}{\log_x\sqrt{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[6]{3}} + \ldots + \frac{1}{\log_x \sqrt[16]{3}} = 36;$$

$$\frac{2}{\log_x 3} + \frac{4}{\log_x 3} + \frac{6}{\log_x 3} + \ldots + \frac{16}{\log_x 3} = 36; \quad \frac{1}{\log_x 3}\,(2+4+6+\ldots+16) = 36. \quad (1)$$

Выражение в скобках представляет собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1=2$, $a_n=16$, $d=2$. Воспользуемся формулой $a_n=a_1+d\,(n-1)$ и получим $16=2+2\,(n-1)$, откуда $n=8$. Тогда

$$2+4+6+\ldots+16 = S_8 = \frac{a_1+a_8}{2}\cdot 8 = \frac{2+16}{2}\cdot 8 = 72.$$

Подставив это значение в уравнение (1), имеем $\frac{1}{\log_x 3}\cdot 72 = 36$ или $72\log_3 x = 36$, откуда $x=3^{1/2}=\sqrt{3}$. ■

7.208. $x={}^{10}\sqrt{10}$. **7.209.** $x_{1,\,2}=\pm 5$. **7.210.** $x=16$. **7.211.** $x_1=8$, $x_2=9$.

7.212. $x=1023$. ● Перейти к логарифмам по основанию 2.

7.213. $x=1/\sqrt[3]{3}$.

7.214. □ Здесь должны быть выполнены условия $x\neq 0$, $x-1>0$, откуда $x>1$. Далее имеем $\log_{a^2} x^2=\log_a x$ (поскольку $x>0$, что следует из условия $x>1$) и $\log_a \log_{\sqrt{5}} 5=\log_a 2$. Тогда получим уравнение $\log_a x+\log_a (x-1)=\log_a 2$ или $\log_a (x\,(x-1))=\log_a 2$, откуда $x\,(x-1)=2$. Корень $x_1=-1$ не удовлетворяет условию $x>1$, а корень $x_2=2$ — удовлетворяет. Итак, $x=2$. ■

7.215. $x=a^6$, где $a>0$ и $a\neq 1$. ● Перейти к логарифмам по основанию a.

7.216. $x=a^6$, где $a>0$ и $a\neq 1$.

7.217. □ Учитывая область определения логарифмической функции, квадратного корня и ограничения, наложенные на основание логарифма, заключаем, что

$$\begin{cases}4+x>0,\\ 4-x>0,\\ a>0,\ a\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4<x<4,\\ a>0,\ a\neq 1.\end{cases} \qquad (1)$$

Приведем все члены уравнения к основанию a^2:

$$\log_{a^2}(4+x)+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^2}(16-x^2)=2 \text{ или } \log_{a^2}\frac{(4+x)\,(4-x)^3}{(4-x)\,(4+x)}=2.$$

Сократив дробь на $(4-x)\,(4+x)$ (потери корней не будет, так как при условии (1) $(4-x)\,(4+x)>0$), получим $\log_{a^2}(4-x)^2=2$, откуда $2\log_{a^2}(4-x)=2$, поскольку $4-x>0$. Следовательно, $x=4-a^2$.

Найдем те значения a, при которых $-4<x<4$. Имеем $-4<4-a^2<4$; $-8<-a^2<0$; $0<a^2<8$. Учитывая, что $a>0$, $a\neq 1$, получаем $0<a<1$ и $1<a<2\sqrt{2}$. Ответ: $x=4-a^2$, где $0<a<1$ и $1<a<2\sqrt{2}$. ■

7.218. $x=2$. **7.219.** $x=17$.

7.220. □ Здесь $x>0$. Используя формулы (7.6) и (7.8), преобразуем данное уравнение:

$$5\log_{x/9} x+3\log_{9/x} x+16\log_{9x^2} x=2; \qquad (1)$$

$$\frac{5}{\log_x \frac{x}{9}}+\frac{3}{\log_x \frac{9}{x}}+\frac{16}{\log_x 9x^2}=2. \qquad (2)$$

Заметим, что в уравнении (2) должно быть $x\neq 1$, но $x=1$ не является корнем исходного уравнения и уравнения (1) (в чем убеждаемся подстановкой) и, следовательно, уравнение (2) равносильно исходному при условиях $x>0$, $x\neq 1$. После дальнейших преобразований уравнение (2) примет вид

$$\frac{5}{1-\log_x 9}+\frac{3}{\log_x 9-1}+\frac{16}{\log_x 9+2}=2.$$

Полагая $\log_x 9=y$, приходим к уравнению $\dfrac{2}{1-y}+\dfrac{16}{y+2}=2$, которое имеет корни $y_1=2$, $y_2=4$. Остается решить уравнения $\log_x 9=2$ и $\log_x 9=4$. Из первого находим $x^2=9$, а из второго $x^4=9$. Учитывая, что $x>0$, получаем ответ: $x_1=3$, $x_2=\sqrt{3}$. ■

7.221. $x=1/3$. **7.222.** $x=4\log_3 2$. **7.223.** $x_1=1/16$, $x_2=1$. **7.224.** $x=5$.

7.225. □ Уравнение имеет смысл, если выполнены условия $9-2^x>0$ и $3-x\neq 0$ (1). Умножив обе его части на $3-x\neq 0$, получим $\log_2(9-2^x)=3-x$, откуда $9-2^x=2^{3-x}$. Положим $2^x=y>0$ и решим уравнение $9-y=\frac{8}{y}$, которое имеет корни $y_1=1$, $y_2=8$. Отсюда $2^x=1$, т. е. $x=0$; $2^x=8$, т. е. $x=3$, — это значение не удовлетворяет условиям (1). Итак, $x=0$. ■

7.226. □ Учитывая, что $\lg x^2=2\lg x$ (так как $x>0$), приведем данное уравнение к виду

$$2^{2\lg x+2}-2^{\lg x}\cdot 3^{\lg x}-2\cdot 3^{2\lg x+2}=0 \text{ или } 4\cdot 2^{2\lg x}-2^{\lg x}\cdot 3^{\lg x}-18\cdot 3^{2\lg x}=0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $3^{2\lg x}\neq 0$:

$$4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\lg x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}-18=0.$$

Полагая $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}=y>0$, получим квадратное уравнение $4y^2-y-18=0$, корни которого $y_1=9/4$ и $y_2=-2$ (не подходит, так как должно быть $y>0$). Итак, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}=\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, откуда $\lg x=-2$, т. е. $x=0{,}01$. ■

7.227. $x_1=1/3$, $x_2=3$. **7.228.** $x=1$. **7.229.** $x=0$. **7.230.** $x=4$.

7.231. □ Заметим, что

$$5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_{1/25}(3-4x^2)}=3-4x^2;$$

$$1{,}5\log_{1/8}4^x=1{,}5x\log_{2^{-3}}2^2=1{,}5x\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-x.$$

Тогда уравнение примет вид $3-4x^2-x=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3/4$. При этом должно быть выполнено условие $3-4x^2>0$, которому удовлетворяет только значение $x=3/4$. ■

7.232. $x_1=\sqrt[5]{7}$, $x_2=7$. **7.233.** $x=3$. **7.234.** $x=\sqrt{3}$.

7.235. □ Воспользуемся тем, что произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, но при этом второй множитель определен. В данном случае, учитывая область определения логарифмической функции, получим $x^3+2x+1>0$.

Решим сначала уравнение $16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0{,}048=0$. Перепишем его в виде $\frac{16}{5}\cdot 5^{2x}-\frac{2}{5}\cdot 5^x-\frac{6}{125}=0$; полагая $5^x=y>0$, после преобразований получим уравнение $200y^2-25y-3=0$. Оно имеет корни $y_1=1/5$ и $y_2=-3/40$ (не подходит, так как не удовлетворяет условию $y>0$). Следовательно, $5^x=5^{-1}$, откуда $x=-1$. Однако при $x=-1$ не выполнено условие $x^3+2x+1>0$, т. е. это значение не является корнем данного уравнения.

Решим теперь уравнение $\lg(x^3+2x+1)=0$. Имеем $x^3+2x+1=1$ или $x(x^2+2)=0$, откуда $x=0$ ($x^2+2\neq 0$ ни при каком значении x). Итак, корнем этого, а значит, и данного уравнения является $x=0$. ■

7.236. □ Здесь должно быть $-x>0$, откуда $x<0$. Тогда $\lg x^2=2\lg(-x)$ и данное уравнение примет вид $4\lg(-x)-\lg^2(-x)=4$. Полагая $\lg(-x)=y$, находим $y=2$, откуда $\lg(-x)=2$, т. е. $-x=100$ и $x=-100$. ■

7.237. $x=-1000$. **7.238.** $x=-1/2$.

7.239. □ Имеем $3^{\log_3^2 x}=(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}=x^{\log_3 x}$. Тогда уравнение примет вид $2x^{\log_3 x}=162$ или $x^{\log_3 x}=81$. Так как $x>0$, то можно прологарифмировать обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3^2 x=4 \Rightarrow \log_3 x=\pm 2 \Rightarrow x_1=1/9,\ x_2=9$. ■

7.240. □ Здесь $x>0$. При этих значениях x обе части уравнения положительны и их можно прологарифмировать по основанию 10. Тогда получим $2\lg^3 x=1+3\lg x$ или $2y^3-3y-1=0$ (где $y=\lg x$). Разложив левую часть уравнения на множители, имеем $(y+1)(2y^2-2y-1)=0$. Решив уравнения $y+1=0$ и $2y^2-2y-1=0$, находим $y_1=-1$, $y_{2,3}=0{,}5(1\pm\sqrt{3})$. В результате получаем ответ: $x_1=0{,}1$, $x_{2,3}=10^{0{,}5(1\pm\sqrt{3})}$. ■

7.241. $x=100$. **7.242.** $x_1=0{,}1$, $x_2=\sqrt{10}$, $x_3=100$. **7.243.** $x_1=0{,}001$, $x_2=1$, $x_3=10$.

7.244. □ Используя формулы (4.13) и (4.16), получим

$$2^{2\sin 2x}+\frac{6}{2^{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}}-4=0.$$

После применения формулы приведения имеем

$$2^{2\sin 2x}+\frac{6}{2^{1-\sin 2x}}-4=0 \text{ или } 2^{2\sin 2x}+3\cdot 2^{\sin 2x}-4=0.$$

Положим $2^{\sin 2x}=y>0$ и получим уравнение $y^2+3y-4=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-4$ (не удовлетворяет условию $y>0$). Остается решить уравнение $2^{\sin 2x}=1$. Имеем $\sin 2x=0$, откуда $2x=\pi n$, т. е. $x=\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

7.245. $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

7.246. □ Так как левая часть уравнения неотрицательна (арифметический корень), то должно быть выполнено неравенство $-\log_x 5>0$, т. е. $\log_x 5<0$, откуда $0<x<1$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $\log_x \sqrt{5x}=\log_x^2 5$ или $\dfrac{1}{2}\log_x 5+\dfrac{1}{2}=\log_x^2 5$. Полагая $\log_x 5=y<0$, получим уравнение $2y^2-y-1=0$, имеющее корни $y_1=-0{,}5$, $y_2=1$ (не подходит, поскольку не выполнено условие $y<0$). Итак, $\log_x 5=-0{,}5$, откуда $x^{-0{,}5}=5$, т. е. $x=5^{-2}=1/25$. ■

7.247. □ Вследствие ограничений, налагаемых на основание логарифма, имеем систему неравенств $4x+1>0$, $4x+1\neq 1$, $9x>0$, $9x\neq 1$, откуда $x>0$ и $x\neq 1/9$ (1). Данное уравнение преобразуем к виду $\dfrac{1}{\log_7(4x+1)}+\dfrac{1}{\log_7 9x}=0$. Умножив обе части уравнения на $\log_7(4x+1)\cdot\log_7 9x\neq 0$, при выполнении условий (1) получим

$\log_7 9x+\log_7(4x+1)=0$ или $\log_7(9x(4x+1))=\log_7 1$ или $9x(4x+1)=1.$

Отсюда находим $x_1=-1/3$ (не удовлетворяет условиям (1)), $x_2=1/12$. Итак, $x=1/12$. ■

7.248. $x=2$. **7.249.** $x_1=1/625$, $x_2=5$.

7.250. $x_1=1/(4\sqrt[5]{8})$, $x_2=1$, $x_3=4$. ● Перейти к логарифмам по основанию $4x$.

7.251. □ Чтобы сумма в левой части уравнения была равна нулю, необходимо, чтобы первое слагаемое было отрицательно, т. е. $\log_{\sqrt{3}}x<0$. Отсюда следует, что $0<x<1$ (1). При этом условии $\log_x 9<0$ и, значит, подкоренное выражение положительно. Перенесем 4 в другую часть уравнения и возведем обе его части в квадрат: $\log^2_{\sqrt{3}}x\,(2-2\log_x 3)=16$. Так как

$$\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}=\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x}}=\frac{2}{\log_{\sqrt{3}}x},\text{ то}$$

$$\log^2_{\sqrt{3}}x\left(2-\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}x}\right)=16\text{ или }2\log^2_{\sqrt{3}}x-4\log_{\sqrt{3}}x-16=0.$$

Полагая $\log_{\sqrt{3}}x=y<0$ (согласно условию (1)) и решая соответствующее уравнение, находим $y_1=4$, $y_2=-2$. Данному уравнению удовлетворяет только значение $y=-2$, т. е. $\log_{\sqrt{3}}x=-2$, откуда $x=1/3$. ■

7.252. $x=4$. **7.253.** $x=3$. **7.254.** $x=2$. **7.255.** $x=1$.

7.256. □ Здесь должны быть выполнены неравенства $x+20>0$, $x>0$, $x\neq 1$, откуда $x>0$ и $x\neq 1$ (1). После преобразований получим

$$\lg\frac{x+20}{x}=-\log_{0,1}x\text{ или }\lg\frac{x+20}{x}=\lg x.$$

Отсюда находим $x_1=-4$, $x_2=5$. Условиям (1) удовлетворяет только $x=5$. ■

7.257. $x_1=1/\sqrt[3]{2}$, $x_2=4$. **7.258.** $x=1$. **7.259.** $x=1$.

7.260. □ Учитывая области определения логарифмической функции и квадратного корня, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_{0,04}x+1\geqslant 0,\\ \log_{0,2}x+3\geqslant 0.\end{cases}\qquad(1)$$

Воспользуемся тем, что $\log_{0,2}x=\log_{0,04}x^2=2\log_{0,04}x$ (поскольку $x>0$). Тогда, полагая $\log_{0,04}x=y$, получим уравнение $\sqrt{y+1}+\sqrt{2y+3}=1$ или $\sqrt{2y+3}=1-\sqrt{y+1}$. Возведем обе его части в квадрат:

$2y+3=1+y+1-2\sqrt{y+1}$ или $2\sqrt{y+1}=-1-y$.

Так как $2\sqrt{y+1}\geqslant 0$, то $-1-y\geqslant 0$, откуда $y\leqslant -1$. Снова возведя в квадрат обе части уравнения, имеем $4(y+1)=1+y^2+2y$ или $y^2-2y-3=0$, откуда $y_1=-1$, $y_2=3$ (не удовлетворяет условию $y\leqslant -1$). Значит, $\log_{0,04}x=-1$, т. е. $x=0{,}04^{-1}=25$. При этом условия (1) выполнены. ■

7.261. $x_1=-64$, $x_2=-1$.

7.262. □ Здесь $x>0$, $x\neq 1$. Полагая $\log_5 x=z\neq 0$ (поскольку $x\neq 1$), получим уравнение

$$\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}+2}=2{,}5 \text{ или } \sqrt{\frac{z^4+2z^2+1}{z^2}}=2{,}5 \text{ или } \sqrt{\frac{(z^2+1)^2}{z^2}}=2{,}5.$$

Учитывая, что $z^2+1>0$ при любом z, перепишем его в виде $\frac{z^2+1}{|z|}=2{,}5$ или $z^2+1=2{,}5\,|z|$ $(z\neq 0)$.

Рассмотрим два случая. Если $z>0$, то $|z|=z$ и, значит, $z^2-2{,}5z+1=0$, откуда $z_1=1/2$, $z_2=2$. Если же $z<0$, то $|z|=-z$ и, следовательно, $z^2+2{,}5z+1=0$, откуда $z_3=-2$, $z_4=-1/2$. Остается найти соответствующие значения x: $x_1=5^{1/2}=\sqrt{5}$, $x_2=5^2=25$, $x_3=5^{-2}=1/25$, $x_4=5^{-1/2}=1/\sqrt{5}$. ■

7.263. $x_1=1/8$, $x_2=8$. **7.264.** $x=-2\sqrt[3]{2}$. **7.265.** $x=256$. **7.266.** $x=2$.

7.267. $x=5$. ● Привести радикалы к одному показателю 6 и ввести новую переменную.

7.268. □ Здесь $x-1>0$, откуда $x>1$. Воспользуемся тем, что $\lg(x-1)^2=2\lg(x-1)$, $\lg(x-1)^3=3\lg(x-1)$, и запишем уравнение в виде $16\lg^4(x-1)+9\lg^2(x-1)=25$. Полагая $\lg^2(x-1)=y\geqslant 0$, получим уравнение $16y^2+9y-25=0$, которое имеет корни $y_1=1$, $y_2=-25/16$ (не подходит).

Значит, $y=\lg^2(x-1)=1$, откуда $\lg(x-1)=1$ или $\lg(x-1)=-1$. Из первого уравнения находим $x_1=11$, из второго $x_2=1{,}1$. Оба корня удовлетворяют условию $x>1$. ■

7.269. □ Выражения $|\log_{\sqrt{3}}x-2|$ и $|\log_3 x-2|$ обращаются в нуль соответственно при $x=3$ и $x=9$. Воспользуемся тем, что функции $\log_{\sqrt{3}}x$ и $\log_3 x$ возрастающие, и рассмотрим решения заданного уравнения на интервалах $0<x<3$, $3\leqslant x<9$ и $x\geqslant 9$.

Если $0<x<3$, то $\log_{\sqrt{3}}x-2<0$, $\log_3 x-2<0$ и уравнение примет вид $-\log_{\sqrt{3}}x+2-(2-\log_3 x)=2$ или $-\log_3 x^2+\log_3 x=2$ или $\log_3 x=-2$, т. е. $x=1/9$. Это значение является корнем уравнения, так как $0<1/9<3$.

Если же $3\leqslant x<9$, то $\log_{\sqrt{3}}x-2\geqslant 0$, $\log_3 x-2<0$ и уравнение примет вид $\log_{\sqrt{3}}x-2-(2-\log_3 x)=2$ или $\log_3 x^2+\log_3 x=6$ или $\log_3 x=2$; $x=9$ не является корнем уравнения, поскольку не удовлетворяет неравенству $3\leqslant x<9$.

Наконец, если $x\geqslant 9$, то $\log_{\sqrt{3}}x-2>0$, $\log_3 x-2\geqslant 0$ и уравнение примет вид $\log_3 x^2-2-(\log_3 x-2)=2$ или $\log_3 x=2$; $x=9$ есть корень уравнения, так как удовлетворяет неравенству $x\geqslant 9$.

Итак, получаем ответ: $x_1=1/9$, $x_2=9$. ■

7.270. $x=m$, где $m>0$ и $m\neq 1$. **7.271.** $x=a$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.272.** $x_1=1/a$, $x_2=\sqrt{a}$, $x_3=a^2$. **7.273.** $x_1=1/3$, $x_2=9$. **7.274.** $x=a$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.275.** $x_1=1/\sqrt[3]{4}$, $x_2=8$.

7.276. $x=6$. **7.277.** (2; 4). **7.278.** $(10^5; 0)$, $(10^{-1}; 0)$.

7.279. □ Здесь должны выполняться неравенства $y>0$, $x+y>0$, $x^2-xy+y^2>0$ (1). Согласно указаниям 5^0 и 4^0, с учетом условий (1) преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases}\log_2 \dfrac{4}{y}=\log_2 (x+y)^2,\\ \log_2 ((x+y)(x^2-xy+y^2))=\log_2 2;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{4}{y}=(x+y)^2,\\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-xy+y^2}{x+y}=\dfrac{y}{2},\\ (x+y)^2 y=4\end{cases}$$

Запишем первое уравнение в виде $2x^2-2xy+2y^2=xy+y^2$ или $2x^2-3xy+y^2=0$. Разделив обе части на y^2, получим $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\dfrac{x}{y}+1=0$.

Полагая $x/y=t$, имеем $2t^2-3t+1=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=1/2$. Остается решить системы уравнений

$$\begin{cases}x/y=1,\\ (x+y)^2 y=4\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x/y=1/2,\\ (x+y)^2 y=4.\end{cases}$$

Для первой системы имеем $x=y$, откуда $4x^3=4$; следовательно, $x_1=1$ и $y_1=1$; аналогично, для второй системы имеем $y=2x$, откуда $18x^3=4$; значит, $x_2=\sqrt[3]{6}/3$ и $y_2=2\sqrt[3]{6}/3$. ■

7.280. (2; 2). **7.281.** (2; 4). **7.282.** (6; 2). **7.283.** (2; 1).

7.284. □ Рассмотрим два случая. 1) Пусть $y>0$, $y\neq 1$. Тогда из первого уравнения следует, что $5x^2-51x+10=0$, откуда $x_1=10$, $x_2=0{,}2$. Из второго уравнения находим $y_1=1{,}5$, $y_2=75$.

2) Пусть $y=1$. Тогда первое уравнение выполняется при любом $x\in\mathbf{R}$. Из второго уравнения следует, что $x=15$.
Ответ: (10; 1,5), (0,2; 75), (15; 1). ■

7.285. (2; 4).

7.286. □ Умножив обе части второго уравнения на $6^{y-x^2}>0$, получим систему

$$\begin{cases}(x^2+y)\,2^{y-x^2}=1,\\ 9\,(x^2+y)\cdot 2^{y-x^2}\cdot 3^{y-x^2}=1.\end{cases}$$

Разделим почленно второе уравнение на первое: $9\cdot 3^{y-x^2}=1$ или $3^{y-x^2+2}=3^0$, откуда $y-x^2+2=0$ или $y-x^2=-2$. Остается решить систему уравнений

$$\begin{cases}y-x^2=-2,\\ (x^2+y)\,2^{-2}=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y-x^2=-2,\\ y+x^2=4.\end{cases}$$

Эту систему решаем алгебраическим сложением: $2y=2$, т. е. $y=1$; $2x^2=6$, т. е. $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$. Ответ: $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$. ■

7.287. (27; 4), (1/81; −3). ● Прологарифмировать второе уравнение по основанию 3.

7.288. □ Запишем первое уравнение в виде $3^{2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}}=3^3\cdot 3^{\sqrt{y}}$ и прологарифмируем его по основанию 3; тогда получим $2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}=3+\sqrt{y}$. Далее, второе уравнение запишем в виде $\lg(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y})=\lg(4-\sqrt[4]{x})$ при условиях

$x>0,\ y>0,\ 4-\sqrt[4]{x}>0$ (1), откуда $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}=4-\sqrt[4]{x}$. Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}=3+\sqrt{y},\\ \sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}=4-\sqrt[4]{x}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sqrt{y}\,(2\sqrt[4]{x}-1)=3,\\ \sqrt[4]{x}\,(\sqrt{y}+1)=4.\end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $\sqrt[4]{x}=\dfrac{4}{\sqrt{y}+1}$, где $\sqrt{y}+1\neq 0$, и подставим это выражение в первое уравнение: $\sqrt{y}\left(\dfrac{8}{\sqrt{y}+1}-1\right)=3$ или $y-4\sqrt{y}+3=0$.

Отсюда $\sqrt{y_1}=3$, $\sqrt{y_2}=1$, а $\sqrt[4]{x_1}=1$, $\sqrt[4]{x_2}=2$. Соответствующие значения $y_1=9$, $x_1=1$ и $y_2=1$, $x_2=16$ удовлетворяют условиям (1). Ответ: (1; 9), (16; 1). ■

7.289. $(-2;\ 7)$. **7.290.** $(8;\ 4)$. **7.291.** $(5;\ 2)$. **7.292.** $(16;\ 20)$, $(0;\ 4)$. **7.293.** $(1;\ 0)$, $(2;\ 1)$. **7.294.** $(9a;\ 2a)$, $(a;\ 18a)$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.295.** $(4;\ 1)$.

7.296. □ Положим $2^{\sqrt{xy}-1}=u>0$ и $\dfrac{x+y}{x-y}=v$. Тогда получим систему $\begin{cases}\dfrac{u}{2}+u^2=5,\\ 3v+\dfrac{5}{v}=8.\end{cases}$

Решая каждое уравнение самостоятельно, находим: $u_1=2$, $u_2=-5/2$ (не удовлетворяет условию $u>0$); $v_1=5/3$, $v_2=1$. В результате имеем следующие две системы:

1) $$\begin{cases}2^{\sqrt{xy}-1}=2,\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{xy}-1=1,\\ x=4y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy=4,\\ x=4y,\end{cases}$$ откуда $4y^2=4$; $y_1=-1$, $y_2=1$;

тогда $x_1=-4$, $x_2=4$;

2) $$\begin{cases}2^{\sqrt{xy}-1}=2,\\ \dfrac{x+y}{x-y}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{xy}-1=1,\\ y=0.\end{cases}$$ Однако $y=0$ не удовлетворяет первому уравнению и, значит, эта система не имеет решений.
Ответ: $(4;\ 1)$, $(-4;\ -1)$. ■

7.297. $(\sqrt[3]{4}/2;\ -3)$, $(\sqrt{2};\ 2)$.

7.298. □ Здесь $x>0$, $y>0$. После несложных преобразований получим систему

$$\begin{cases}x^3+y^3=12xy,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x+y)\,(x^2-xy+y^2)=12xy,\\ 3\,(x+y)=xy.\end{cases}$$

Далее, разделив первое уравнение на второе, имеем

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-xy+y^2}{3}=12,\\ x+y=\dfrac{xy}{3}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x+y)^2=36+3xy,\\ x+y=\dfrac{xy}{3}.\end{cases}$$

Теперь положим $xy=z$, причем $z>0$, так как $x>0$ и $y>0$. В результате придем к уравнению $z^2-27z-324=0$, откуда $z_1=36$, $z_2=-9$ (не удовлетворяет условию $z>0$). Решив систему $xy=36$, $x+y=12$, окончательно находим $x=y=6$. ■

7.299. (3; 5), (6; 2), (1; 7). ● См. задачу 7.284.

7.300. (2; 4), $(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})$. ● В первом уравнении положить $\log_x y=z$ и решить это уравнение относительно z.

7.301. (3; 9). **7.302.** (6; 2).

7.303. □ Здесь должны быть выполнены неравенства

$$\begin{cases}3x+2y>0,\\ 2x+3y>0,\\ x>0,\ x\neq 1,\\ y>0,\ y\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0,\ x\neq 1,\\ y>0,\ y\neq 1.\end{cases} \qquad (1)$$

При этих условиях данную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases}3x+2y=x^2,\\ 2x+3y=y^2.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $x-y=x^2-y^2$ или $(x-y)(1-x-y)=0$, откуда либо $x-y=0$, либо $x+y-1=0$. Таким образом, получаем следующие две системы:

$$\begin{cases}3x+2y=x^2,\\ x-y=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3x+2y=x^2,\\ x+y-1=0.\end{cases}$$

Во втором уравнении каждой из систем выразим y через x и подставим в первое уравнение. Тогда для первой системы получим $x^2-5x=0$, откуда $x=0$ (не удовлетворяет условиям (1)), $x=5$, а соответствующее значение $y=5$. Для второй системы получим $x^2-x-2=0$, откуда $x=-1$ (не удовлетворяет условиям (1)), $x=2$, а соответствующее значение $y=-1$ также не удовлетворяет условиям (1). Итак, $x=5$, $y=5$. ■

7.304. (3; 9), (9; 3). **7.305.** (5; 3), (1; −1).

7.306. □ Здесь $x+y\neq 0$, $y>0$, $x\neq 0$. Применив указания 3^0, 4^0, 5^0, перейдем к системе $\begin{cases}|x+y|=10,\\ \dfrac{y}{|x|}=2.\end{cases}$

Если $x>0$, то $y=2x$; поэтому $|x+y|=|3x|=3x$, откуда $3x=10$, т. е. $x=10/3$, а $y=20/3$.

Если $x<0$, то $y=-2x$; тогда $|x+y|=|-x|=|x|=-x$, откуда $-x=10$, т. е. $x=-10$, а $y=20$.

Ответ: (10/3; 20/3), (−10; 20). ■

7.307. (1; 4).

7.308. □ Положим $5^{\sqrt[3]{x}}=u>0$, $2^{\sqrt{y}}=v>0$ и получим систему

$$\begin{cases}uv=200,\\ u^2+v^2=689\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2uv=400,\\ u^2+v^2=689.\end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения и учитывая, что $u+v>0$, приходим к следующим двум системам:

$$\begin{cases} u+v=33, \\ u-v=17 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u+v=33, \\ u-v=-17. \end{cases}$$

Из первой системы находим $u=25$, $v=8$; из второй $u=8$, $v=25$. Остается решить системы

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=25, \\ 2^{\sqrt{y}}=8 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=8, \\ 2^{\sqrt{y}}=25. \end{cases}$$

Ответ: $(8; 9)$, $(27\log_5^3 2; 4\log_2^2 5)$. ■

7.309. (4; 2), (–4; 2). **7.310.** (1/2; 4). **7.311.** (2; 3). **7.312.** (1; 3). **7.313.** (2/9; 1/9).

7.314. □ Здесь $x>0$. Логарифмируя первое уравнение по основанию 6, придем к системе

$$\begin{cases} (x-2y)\log_6 x=2, \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4(x-2y)\log_6 x=8, \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9. \end{cases}$$

Таким образом, значения выражений $4(x-2y)$ и $\log_6 x$ можно считать корнями квадратного уравнения $z^2-9z+8=0$, откуда $z_1=8$, $z_2=1$. В результате получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} 4(x-2y)=8, \\ \log_6 x=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4(x-2y)=1, \\ \log_6 x=8. \end{cases}$$

Первая из них имеет решение $x=6$, $y=2$, а решение второй системы не удовлетворяет требуемому условию, поскольку значение y не является целым. ■

7.315. $\lg b$, где $b>1$.

7.316. □ Обозначим данное выражение через A. Так как, по условию, $a>1$ и $b>1$, то $\log_a b>0$ и $\log_b a>0$ (1). Используя формулы (7.6), (7.4), (7.5), (7.2) и (7.8), получим

$$A=2\log_a^{1/2} b\left(\left(\frac{1}{4}(1+\log_a b)+\frac{1}{4}(\log_b a+1)\right)^{1/2}-\left(\frac{1}{4}(\log_a b-1)+\frac{1}{4}(\log_b a-1)\right)^{1/2}\right)=$$

$$=2\log_a^{1/2} b\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}\left((2+\log_a b+\log_b a)^{1/2}-(\log_a b+\log_b a-2)^{1/2}\right)=$$

$$=\log_a^{1/2} b\left(\left(2+\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\right)^{1/2}-\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}-2\right)^{1/2}\right)=$$

$$=\log_a^{1/2} b\left(\left(\frac{2\log_a b+\log_a^2 b+1}{\log_a b}\right)^{1/2}-\left(\frac{\log_a^2 b+1-2\log_a b}{\log_a b}\right)^{1/2}\right).$$

Согласно условиям (1), $1+\log_a b>0$ и $((1+\log_a b)^2)^{1/2}=|1+\log_a b|=1+\log_a b$. Следовательно,

$$A=\log_a^{1/2} b\left(\frac{1+\log_a b}{\log_a^{1/2} b}-\frac{|\log_a b-1|}{\log_a^{1/2} b}\right)=1+\log_a b-|\log_a b-1|.$$

1) Если $\log_a b-1\geqslant 0$, т. е. $\log_a b\geqslant 1$ и, значит, $b\geqslant a>1$, то $|\log_a b-1|=\log_a b-1$. Отсюда $A=1+\log_a b-\log_a b+1=2$.

2) Если $\log_a b-1<0$, т. е. $\log_a b<1$ и, значит, $a>b>1$, то $|\log_a b-1|=1-\log_a b$. Отсюда $A=1+\log_a b-1+\log_a b=2\log_a b$.

Ответ: 2, если $b\geqslant a>1$; $2\log_a b$, если $a>b>1$. ■

7.317. □ Данное выражение определено при условиях $n>0$, $n\neq 1$, $p>0$, $p\neq 1$, $np\neq 1$. Обозначим его через A и преобразуем следующим образом:

$$A=\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\,(\log_n p-\log_{np} p)\sqrt{\log_n p}=$$

$$=\sqrt{\log_n^2 p+1+2\log_n p}\left(\log_n p-\frac{1}{\log_p np}\right)=$$

$$=\sqrt{(1+\log_n p)^2}\left(\frac{1}{\log_p n}-\frac{1}{\log_p n+1}\right)=|1+\log_n p|\,\frac{1}{\log_p n\,(\log_p n+1)}=$$

$$=|1+\log_n p|\cdot\frac{\log_n^2 p}{\log_n p+1}.$$

Так как $\sqrt{\log_n p}$ определен при $\log_n p\geqslant 0$ и $p\neq 1$, то $\log_n p>0$, а потому $1+\log_n p>0$ и $|1+\log_n p|=1+\log_n p$. Значит, $A=\log_n^2 p$. Остается решить неравенство $\log_n p>0$. Если $0<n<1$, то оно выполняется при $0<p<1$; если же $n>1$ — при $p>1$.

Ответ: $\log_n^2 p$, где $\begin{cases}0<n<1,\\ 0<p<1\end{cases}$ или $\begin{cases}n>1,\\ p>1.\end{cases}$ ■

7.318. -2, если $b\geqslant a>1$; $-2\log_a b$, если $a>b>1$. **7.319.** $1-\log_a(a-b)$, если $\begin{cases}0<a<1,\\ b<0\end{cases}$ или $\begin{cases}a>1,\\ 0<b<a;\end{cases}$ $\log_a(a-b)-1$, если $0<b<a<1$ или $\begin{cases}a>1,\\ b<0.\end{cases}$

7.320. □ Пусть $A=((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}-2)^{1/2}$. Имеем

$$A=\left(\left(\log_b^4 a+\frac{1}{\log_b^4 a}+2\right)^{1/2}-2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\left(\frac{\log_b^8 a+1+2\log_b^4 a}{\log_b^4 a}\right)^{1/2}-2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\left(\frac{(\log_b^4 a+1)^2}{\log_b^4 a}\right)^{1/2}-2\right)^{1/2}.$$

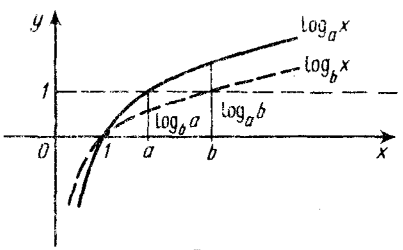

Рис. Р.7.3

Так как $\log_b^4 a+1>0$ и $\log_b^2 a>0$, то

$$A=\left(\frac{\log_b^4 a+1}{\log_b^2 a}-2\right)^{1/2}=\left(\frac{(\log_b^2 a-1)^2}{\log_b^2 a}\right)^{1/2}=\left|\frac{\log_b^2 a-1}{\log_b a}\right|=|\log_b a-\log_a b|.$$

Согласно условию, $1<a<b$, поэтому $\log_a b>1$, $0<\log_b a<1$ (рис. Р.7.3). Таким образом, $\log_a b>\log_b a$ и окончательно получаем $A=$ $=\log_a b-\log_b a$. ■

7.321. □ Пусть $\log_{135}675=x$, $\log_{45}75=y$. Тогда $675=135^x$ (1), $75=45^y$ (2). Так как $675=9\cdot75$, $135=3\cdot45$, то равенство (1) можно записать в виде $9\cdot75=3^x\cdot45^x$, откуда, используя равенство (2), получим $9\cdot45^y=3^x\cdot45^x$. Из равенства произведений можно составить пропорцию $\frac{3^2}{3^x}=\frac{45^x}{45^y}$. Далее имеем

$1<\log_{135}675<2 \Rightarrow 1<x<2 \Rightarrow 3^x<3^2$; тогда в правой части пропорции получим $45^y<45^x \Rightarrow y<x$, т. е. $\log_{135}675>\log_{45}75$, что и требовалось определить. ■

7.322. $x=\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0<x<1$. **7.324.** $\log_A(mnp)\cdot\log_m A\cdot\log_n A\cdot\log_p A$.

7.326. □ Запишем данное уравнение в виде

$$\lg(x^2+2px)=\lg(8x-6p-3). \qquad (1)$$

Согласно указанию 4^0, оно равносильно системе

$$\begin{cases}8x-6p-3>0,\\ x^2+2px=8x-6p-3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}8x>6p+3, & (2)\\ x^2-2(4-p)x+6p+3=0. & (3)\end{cases}$$

Найдем корни квадратного уравнения (3): $x_{1,\,2}=4-p\pm\sqrt{(4-p)^2-(6p+3)}=4-p\pm\sqrt{p^2-14p+13}$. В том случае, когда $p^2-14p+13=0$, т. е. при $p_1=1$, $p_2=13$, оно имеет единственный корень ($x_1=3$ при $p_1=1$ и $x_2=-9$ при $p_2=13$). Однако из этих двух пар значений неравенству (2) удовлетворяет только пара $x=3$, $p=1$. Таким образом, при $p=1$ уравнение (1) имеет единственный корень.

Рис. Р.7.4

Рассмотрим теперь случай, когда $p^2-14p+13>0$. Используя рис. Р.7.4, находим, что $p<1$ или $p>13$. В этом случае уравнение (3) имеет два корня $x_1=4-p+\sqrt{p^2-14p+13}$ и $x_2=4-p-\sqrt{p^2-14p+13}$. Чтобы уравнение (1) имело единственный корень, нужно, чтобы один из указанных корней удовлетворял этому уравнению, а другой — нет.

Найдем такие значения p, при которых корни x_1 и x_2 удовлетворяют неравенству (2). Подставив сначала значение x_1 в это неравенство, получим

$$8(4-p+\sqrt{p^2-14p+13})>6p+3;\ 8\sqrt{p^2-14p+13}>14p-29. \qquad (4)$$

При $p<1$ и $p>13$ в левой части имеем $8\sqrt{p^2-14p+13}>0$; поэтому если в правой части $14p-29\leqslant0$, т. е. $p\leqslant29/14$, то неравенство (4) выполняется.

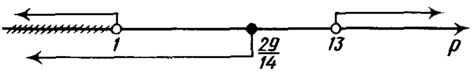

Рис. Р.7.5

Объединяя перечисленные условия (рис. Р.7.5), заключаем, что x_1 является корнем уравнения (1) при $p<1$ (5).

Если же $p>29/14$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства (4) получим

$64p^2-896p+832>196p^2-812p+841$ или $44p^2+28p+3<0$.

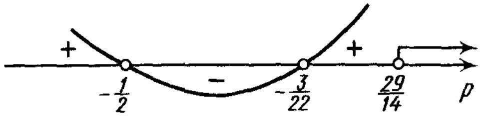

Рис. Р.7.6

Но $44p^2+28p+3=0$ при $x_1=-1/2$, $x_2=-3/22$; с помощью рис. Р.7.6 устанавливаем, что при $p>29/14$ неравенство (4) не имеет решений. Следовательно, x_1 не является корнем уравнения (1).

Теперь в неравенство (2) подставим значение x_2:

$$8\left(4-p-\sqrt{p^2-14p+13}\right)>6p+3;\ 8\sqrt{p^2-14p+13}<29-14p. \qquad (6)$$

При $p<1$ и $p>13$ левая часть неравенства (6) положительна; поэтому если $29-14p\leqslant 0$, т. е. $p\geqslant 29/14$, то оно не имеет решений.

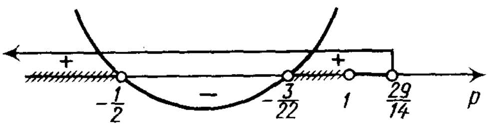

Рис. Р.7.7

Если же $p<29/14$, то после возведения обеих частей неравенства (6) в квадрат и упрощений получим $44p^2+28p+3>0$. С помощью рис. Р.7.7 устанавливаем, что неравенство (6) справедливо при $p<-1/2$ или $-3/22<p<1$ (7). Таким образом, x_2 является корнем уравнения (1) при условиях (7).

Из условий (5) и (7) следует, что при $-1/2\leqslant p\leqslant 3/22$ корень x_1 удовлетворяет уравнению (1), а корень x_2 — нет, т. е. данное уравнение имеет единственный корень.

Итак, получаем ответ: $p=1$ и $p\in[-1/2,\ -3/22]$. ■

7.327. $a=12$ и $a\in(-\infty,\ 0]$.

7.328. □ Приведем все члены уравнения к одному основанию. Имеем $\sqrt[3]{0,5}+$ $+\sqrt[3]{4}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+(\sqrt[3]{2})^2=\frac{1+(\sqrt[3]{2})^3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; $\quad 13,5=\frac{27}{2}=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$. Итак, $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^x=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$, откуда $x=3$. ■

7.329. $x_1=1$, $x_2=4$.

7.330. □ Уравнение имеет смысл, если одновременно выполняются неравенства $\frac{4-x}{10}>0$, $x>0$, $x\neq 1$, откуда $0<x<1$, $1<x<4$ (1). При этих условиях преобразуем его следующим образом:

$(1+\log_x(4-x)-\log_x 10)\lg x=\lg 3-1;$

$$\lg x+\frac{\log_x(4-x)}{\log_x 10}-1=\lg 3-1;\ 1+\log_x(4-x)=\log_x 10^{\lg 3};$$

$$\log_x(x(4-x))=\log_x 3.$$

Итак, получаем уравнение $x(4-x)=3$. Из двух его корней $x_1=3$, $x_2=1$ условиям (1) удовлетворяет только $x=3$. ■

7.331. $x_1=1/8$, $x_2=1/2$. **7.332.** $x=64$. **7.333.** $x=3$. **7.334.** $x=7$.

7.335. □ Заметив, что $0{,}25=2^{-2}$, получим уравнение

$$2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 2^{\frac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}-1=0.$$

Далее, используя формулу (4.13) и формулу приведения, упростим дробь в показателе степени:

$$\frac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\frac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$=\frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$$2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 2^{-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-1=0.$$

Полагая $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=y>0$ и решив уравнение $y-\frac{2}{y}-1=0$, находим $y_1=2$, $y_2=-1$ (не подходит). Значит, $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2$ или $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, откуда $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, т. е. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

7.336. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, где $1<p\leqslant 100$. **7.337.** $x=4$. **7.338.** $x=\sqrt[k]{k}$, где $k\geqslant 2$.

7.339. $x=1+b^2$, где $b>0$ и $b\neq 1$. **7.340.** $x_1=1/3$, $x_2=3$.

7.341. □ Здесь $x>0$. Рассмотрим два случая. 1) Пусть $|x-1|>0$ и $|x-1|\neq 1$, т. е. $x\neq 1$, $x\neq 2$, $x\neq 0$. Тогда получим уравнение $\lg^2 x-\lg x^2=3$ или $\lg^2 x-2\lg x-3=0$ или $y^2-2y-3=0$, где $y=\lg x$. Отсюда находим $y_1=3$, $y_2=-1$, т. е. $x_1=1000$, $x_2=0{,}1$.

2) Пусть $|x-1|=1$, т. е. $x=2$ и $x=0$. Однако $x=0$ не является корнем данного уравнения. Таким образом, $x_3=2$. ■

7.342. □ Здесь должны быть выполнены неравенства $x>0$ и $6-x>0$, откуда $0<x<6$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a\neq 1$. Тогда $2\lg x-\lg(6-x)=0$ или $\lg x^2=\lg(6-x)$ или $x^2=6-x$, откуда $x_1=2$, $x_2=-3$. Условию $0<x<6$ удовлетворяет только $x=2$.

2) Пусть $a=1$. Тогда уравнение выполняется при любом показателе степени. Поэтому решением уравнения является любое значение из интервала $(0, 6)$.

Ответ: 2, если $0<a<1$ или $1<a<\infty$; $(0, 6)$, если $a=1$. ■

7.343. 2, если $0<p<1$ или $1<p<\infty$; $(-2, \infty)$, если $p=1$. **7.344.** $x_{1,\,2}=\pm 1$, $x_3=2$.

7.345. $x_1=1$, $x_2=3$. **7.346.** $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=4$.

7.347. □ Здесь должны выполняться условия $x>0$, $x\neq 1$, $x+12>0$, $x+12\neq 1$, откуда $x>0$ и $x\neq 1$ (1). Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\log_x (x+12)^2=\frac{8}{\log_x (x+12)};\ 2\log_x (x+12)=\frac{8}{\log_x (x+12)};$$

$$\log_x^2 (x+12)=4;\ \log_x (x+12)=\pm 2.$$

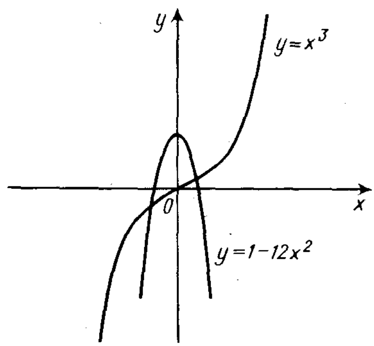

Рис. Р.7.8

Остается решить уравнения $x+12=$ $=x^2$ и $x+12=x^{-2}$. Первое из них является квадратным и имеет корни $x_1=4$ и $x_2=-3$, причем условиям (1) удовлетворяет только $x=4$. Второе приводит к кубическому уравнению $x^3+12x^2=1$ или $x^3=1-12x^2$. Решим его графически. Из рис. Р.7.8, на котором построены графики функций $y=x^3$ и $y=1-12x^2$, видно, что абсцисса точки пересечения этих графиков принадлежит интервалу $(0, 1)$, т. е. корень не является целым. Итак, $x=4$. ■

7.348. $x=100$.

7.349. □ Уравнение имеет смысл, если одновременно выполняются неравенства $3x-1>0$ и $5-2x>0$, т. е. $1/3<x<5/2$ (1). Заметим, что из равенства $|a|=|b|$ следует, что либо $a=b$, либо $a=-b$. Решаем два уравнения, соответствующие указанным двум равенствам:

1) $\log_2(3x-1)-\log_2 3=\log_2(5-2x)-\log_2 2$;

$$\log_2\frac{3x-1}{3}=\log_2\frac{5-2x}{2};\ \frac{3x-1}{3}=\frac{5-2x}{2},$$

откуда $x_1=17/12$, что удовлетворяет условию (1);

2) $\log_2(3x-1)-\log_2 3=\log_2 2-\log_2(5-2x)$;

$$\frac{3x-1}{3}=\frac{2}{5-2x};\ 6x^2-17x+11=0;\ x_2=11/6;\ x_3=1,$$

причем оба корня удовлетворяют условию (1). ■

7.350. $x_{1,\,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_3=1$. **7.351.** $x_1=1/3$, $x_2=9$.

7.352. □ Учитывая область определения логарифмической функции и ограничения, налагаемые на основание логарифма, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}3-\sqrt{1-2x+x^2}>0,\\ x+3>0,\\ x+3\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3-|x-1|>0,\\ x>-3,\\ x\neq -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2<x<4,\\ x>-3,\\ x\neq -2\end{cases} \Rightarrow -2<x<4. \quad (1)$$

Перепишем уравнение в виде $\log_{x+3}(3-|x-1|)=1/2$, откуда $3-|x-1|=$ $=(x+3)^{1/2}$ (2). Воспользуемся тем, что $|x-1|=0$ при $x=1$, и рассмотрим два случая: $-2<x<1$ и $1\leqslant x<4$.

1) Если $-2<x<1$, то $|x-1|=1-x$ и уравнение (2) примет вид $3-1+x=\sqrt{x+3}$ или $2+x=\sqrt{x+3}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, после упрощений имеем $x^2+3x+1=0$. Отсюда $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\approx$ $\approx\dfrac{-3+2{,}2}{2}=-0{,}4$, что удовлетворяет условию (1); $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx$ $\approx\dfrac{-3-2{,}2}{2}=-2{,}6$, т. е. это значение не удовлетворяет условию (1).

2) Если $1\leqslant x<4$, то уравнение (2) примет вид $3-x+1=\sqrt{x+3}$. После преобразований получим уравнение $x^2-9x+13=0$. Следовательно, $x_1=\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}\approx\dfrac{9+5{,}4}{2}=7{,}7$, т. е. это значение не удовлетворяет условию (1); $x_2=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}\approx\dfrac{9-5{,}4}{2}=1{,}8$, что удовлетворяет условию (1).

Ответ: $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$, $x_2=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$. ■

7.353. $x=16$. **7.354.** $(3/2;\ 1/2)$.

7.355. □ Здесь должны выполняться следующие ограничения: $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$. Таким образом, обе части первого уравнения положительны и их можно прологарифмировать по основанию a: $p\log_a x=q\log_a y$ или $\dfrac{\log_a x}{\log_a y}=\dfrac{q}{p}$. Подставив этот результат во второе уравнение системы, получим $\log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{q}{p}$. Следовательно, $\dfrac{x}{y}=a^{q/p}$, откуда $x=ya^{q/p}$ (1). Теперь выражение (1) подставим в первое уравнение системы: $y^p a^q=y^q$ или $y^{p-q}=a^{-q}$. Возведя обе части последнего равенства в степень $\dfrac{1}{p-q}$ ($p-q\neq 0$, так как $p\neq q$), находим $y=a^{-\frac{q}{p-q}}$ или $y=a^{\frac{q}{q-p}}$ (2). Наконец, выражение (2) подставляем в (1) и получаем $x=a^{\frac{q^2}{p(q-p)}}$. **Ответ:** $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}},\ a^{\frac{q}{q-p}}\right)$. ■

7.356. $(1/4;\ 1/3)$. **7.357.** $(-a^3;\ -1/a)$; $(-1/a;\ -a^3)$.

7.358. □ Предварительно преобразуем выражение $y^{\log_8 x}$ так:

$$y^{\log_8 x}=y^{\frac{\log_y x}{\log_y 8}}=y^{\log_8 y\cdot\log_y x}=(y^{\log_y x})^{\log_8 y}=x^{\log_8 y}.$$

Тогда первое уравнение системы примет вид $2x^{\log_8 y}=4$ или $x^{\log_8 y}=2$. Записав второе уравнение системы в виде $\log_4\frac{x}{y}=\log_4 4$, приходим к следующей системе: $\begin{cases}x^{\log_8 y}=2,\\ \frac{x}{y}=4.\end{cases}$ Выразив из второго уравнения x через y и подставив в первое, имеем $(4y)^{\log_8 y}=2$. Учитывая, что $y>0$, прологарифмируем обе части по основанию 8:

$\log_8 y\cdot\log_8(4y)=\log_8 2$; $\log_8 y\,(2\log_8 2+\log_8 y)=1/3$.

Положим $\log_8 y=z$ и получим уравнение $3z^2+2z-1=0$, имеющее корни $z_1=1/3$, $z_2=-1$. Отсюда находим $y_1=8^{1/3}=2$, $y_2=8^{-1}=1/8$ и соответствующие значения $x_1=8$, $x_2=1/2$. Ответ: (8; 2), (1/2; 1/8). ■

7.359. □ Согласно указанию 1^0, переходим к равносильной системе

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy-8)=0, & (1)\\ (x-y)(x^2+xy+2x-16)=0. & (2)\end{cases}$$

Воспользуемся тем, что произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, и рассмотрим три случая.

1) Пусть $x+y=0$, т. е. $y=-x$. Тогда, подставив это выражение в уравнение (2), получим $2x(x^2-x^2+2x-16)=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=8$ и, следовательно, $y_1=0$, $y_2=-8$.

2) Пусть $x-y=0$, т. е. $y=x$. Тогда, подставив это выражение в уравнение (1), имеем $2x(x^2-x^2-8)=0$, т. е. $x=0$ (это значение уже было получено ранее).

3) Пусть $x+y\neq 0$ и $x-y\neq 0$. Тогда в уравнениях (1) и (2) равны нулю вторые сомножители и приходим к системе

$$\begin{cases}x^2-xy-8=0,\\ x^2+xy+2x-16=0.\end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим $2x^2+2x-24=0$ или $x^2+x-12=0$, откуда $x_3=3$, $x_4=-4$. Из первого уравнения следует, что $y=\frac{x^2-8}{x}$ и, значит, $y_3=1/3$, $y_4=-2$.

Ответ: (0; 0), (8; −8), (3; 1/3), (−4; −2). ■

7.360. (3; 9), (1/9; 1/3).

ГЛАВА 8

НЕРАВЕНСТВА

8.001. □ Предположим, что неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ верно. Так как все его члены положительны, то верно и неравенство $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$ или $a+2\sqrt{ab}+b>a+b$ или $2\sqrt{ab}>0$. Последнее действительно верно, поскольку $a>0$ и $b>0$ по условию. В результате мы пришли к такому неравенству, из которого можно получить данное.

Для доказательства проведем все рассуждения в обратном порядке: неравенство $2\sqrt{ab}>0$ верно; следовательно, верно и неравенство $a+b+$ $+2\sqrt{ab}>a+b$ или $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>a+b$; так как $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ и $a+b>0$, то верно и неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$. ■

8.002. □ Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt[4]{ab}=\frac{2\sqrt{ab}-\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[4]{ab}\,(2\sqrt[4]{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=-\frac{\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant 0,$$

поскольку $\sqrt[4]{ab}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2>0$ при $a\neq b$ и $(\sqrt[4]{a}-$ $-\sqrt[4]{b})^2=0$ при $a=b$. Итак, $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt[4]{ab}\leqslant 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant\sqrt[4]{ab}$. ■

8.003. □ Используя известное неравенство $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (при $a>0$, $b>0$), запишем $\frac{p+2}{2}\geqslant\sqrt{2p}$, $\frac{q+2}{2}\geqslant\sqrt{2q}$, $\frac{p+q}{2}\geqslant\sqrt{pq}$. Так как неравенства с положительными членами можно почленно перемножить, то получим

$$\frac{(p+2)\,(q+2)\,(p+q)}{8}\geqslant 2pq \text{ или } (p+2)\,(q+2)\,(p+q)\geqslant 16pq. \ ■$$

8.004. ● Определить знак разности между левой и правой частями неравенства.

8.005. □ Очевидно, что $m>0$, $n>0$, $p>0$. Пусть $p\geqslant m\geqslant n$. Согласно свойству сторон треугольника, имеем $m-n<p$, $p-m<n$, $p-n<m$. Следовательно, верны неравенства $(m-n)^2<p^2 \Rightarrow m^2-2mn+n^2<p^2$; $(p-m)^2<n^2 \Rightarrow p^2-$ $-2pm+m^2<n^2$; $(p-n)^2<m^2 \Rightarrow p^2-2pn+n^2<m^2$. Сложив их, получим

$2m^2+2n^2+2p^2-2\,(mn+pm+pn)<p^2+n^2+m^2$ или

$m^2+n^2+p^2<2\,(mn+pm+pn)$. ■

8.007. □ Преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2+2y^2+2xy+6y+10=(x^2+2xy+y^2)+(y^2+6y+9)+1=$$
$$=(x+y)^2+(y+3)^2+1>0,$$

так как $(x+y)^2\geqslant 0$, $(y+3)^2\geqslant 0$ и $1>0$. ■

8.009. □ Пусть $x_1<0$, $x_2<0$ — корни данного уравнения. Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена $x^2-(a+1)\,x+a+4$ неотрицателен, т. е. $(a+1)^2-4\,(a+4)\geqslant 0$. Кроме того, согласно теореме Виета, $x_1x_2=a+4>0$, $x_1+x_2=a+1<0$. Таким образом, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+2a+1-4a-16\geqslant 0, \\ a+4>0, \\ a+1<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2-2a-15\geqslant 0, \\ a>-4, \\ a<-1. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство; имеем $a^2-2a-15=0$ при $a=-3$, $a=5$. Далее устанавливаем, что $a\leqslant -3$ или $a\geqslant 5$ (рис. Р.8.1). Наконец, с помощью рис. Р.8.2 получаем ответ: $(-4, -3]$. ■

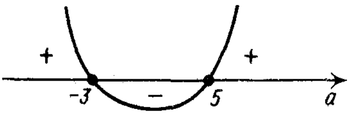

Рис. Р.8.1

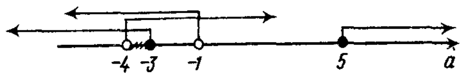

Рис. Р.8.2

8.010. □ Имеем

$$\frac{5x+1}{x-1}-(2x+2)>0;\ \frac{5x+1-2(x^2-1)}{x-1}>0;\ \frac{2x^2-5x-3}{x-1}<0.$$

Разложив числитель на множители, получим $\frac{2(x+0{,}5)(x-3)}{x-1}<0$. Применим метод интервалов и с помощью рис. Р.8.3 устанавливаем, что $x<-0{,}5$ или $1<x<3$. В этих интервалах содержится только одно целое положительное значение $x=2$. ■

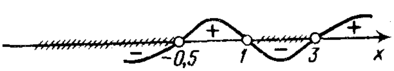

Рис. Р.8.3

8.011. ● Решить каждое неравенство самостоятельно, а затем выбрать те значения x, которые удовлетворяют системе.

8.012. □ Приведем неравенство к виду $x^2-mx-\frac{2}{m}>0$. Оно выполняется при любых x, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, т. е. $m^2+\frac{8}{m}<0\Rightarrow\frac{m^3+8}{m}<0\Rightarrow\frac{(m+2)(m^2-2m+4)}{m}<0$. Так как $m^2-2m+4>0$ при любом m $(D=-12<0)$, то, решив неравенство $\frac{m+2}{m}<0$ методом интервалов, окончательно находим $-2<m<0$. ■

8.013. □ Данная функция определена при условии $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}\geqslant 0$. Решив это неравенство методом интервалов, получим ответ: $(-\infty, -1)\bigcup[4, \infty)$. ■

8.014. $(-\infty, 0)\bigcup[2, 3]$.

8.015. □ Имеем

$$\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1\Rightarrow\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{4-x^2}<0\Rightarrow\frac{x^2-4x+8}{4-x^2}<0.$$

Поскольку $x^2-4x+8>0$ при любом x $(D=-16<0)$, остается решить неравенство $4-x^2<0$, откуда получаем ответ: $(-\infty, -2)\bigcup(2, \infty)$. ■

8.016. $(-1, 2)\bigcup(2, 3)$. **8.017.** $(-\infty, 1)\bigcup(4/3, 2)$. **8.018.** $(-4{,}5;\ -2)\bigcup(3, \infty)$.

8.019. $(-\infty, 1/3)\bigcup(3, 5)\bigcup(5, \infty)$.

8.020. □ Так как $2x^2-9x+15>0$ при любом x ($D=-39<0$), то $|2x^2-9x+15|=$ $=2x^2-9x+15$. Решив неравенство $2x^2-9x+15\geqslant 20$, в результате получаем ответ: $(-\infty;\ -0{,}5]\bigcup[5,\ \infty)$. ■

8.021. □ Неравенство $|x^2-5x|<6$ равносильно двойному неравенству $-6<$ $<x^2-5x<6$ или системе $\begin{cases}x^2-5x-6<0,\\ x^2-5x+6>0.\end{cases}$ Каждое неравенство системы решаем самостоятельно, используя метод интервалов. Для первого неравенства находим $-1<x<6$, а для второго $x<2$ или $x>3$. Объединяя эти решения (рис. Р.8.4), получим ответ: $(-1,\ 2)\bigcup(3,\ 6)$. ■

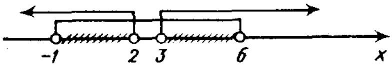

Рис. Р.8.4

8.022. $[0,\ 8]$.

8.023. □ Введем вспомогательную переменную $x^3=y$; тогда неравенство примет вид $y^2-9y+8>0$. Используя метод интервалов, находим $y<1$ или $y>8$. Далее решаем неравенства $x^3<1$ и $x^3>8$, откуда $x<1$ или $x>2$. Итак, получаем ответ: $(-\infty,\ 1)\bigcup(2,\ \infty)$. ■

8.024. □ Разложим левую часть на множители:

$$x^6(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)<0;\ (x^2-6x+9)(x^6-1)<0;$$
$$(x-3)^2(x^2-1)(x^4+x^2+1)<0.$$

Так как $(x-3)^2>0$ при $x\neq 3$, а $x^4+x^2+1>0$ при любом x, то остается решить неравенство $x^2-1<0$. В результате получаем ответ: $(-1,\ 1)$. ■

8.025. $(-1,\ 1)$. **8.026.** $(-1,\ \infty)$.

8.027. □ Так как $x^2+1>0$ при любом x, то можно умножить все части неравенства на x^2+1. Тогда получим

$$x^2+1<3x^2-7x+8<2x^2+2,\ \text{т. е.}\ \begin{cases}x^2-7x+6<0,\\ 2x^2-7x+7>0.\end{cases}$$

Первое неравенство системы выполняется при $1<x<6$, а второе — при всех x. Ответ: $(1,\ 6)$. ■

8.028. $(-1,\ 5)$. **8.029.** $(1,\ 3)\bigcup(3,\ 5)$.

8.030. □ Имеем

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1\Rightarrow\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}-1\geqslant 0\Rightarrow\frac{6x}{(x+1)(x+2)}\leqslant 0.$$

Применяем метод интервалов и с помощью рис. Р.8.5 устанавливаем, что $x<-2$ или $-1<x\leqslant 0$. Ответ: $(-\infty,\ -2)\bigcup(-1,\ 0]$. ■

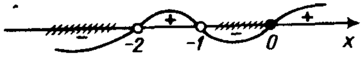

Рис. Р.8.5

8.031. $(-1,\ 4)$. **8.032.** $(-8,\ 1]$.

8.033. □ Разлагая числитель и знаменатель на множители, получим $\dfrac{(x^2-4)(x^2+2)}{(x+1)^2}<0$. Заметим, что $(x+1)^2>0$ при $x\neq-1$, а $x^2+2>0$ при любом x. Решив неравенство $x^2-4<0$, находим $-2<x<2$. Наконец, учитывая, что $x\neq-1$, получаем ответ: $(-2,\ -1)\bigcup(-1,\ 2)$. ■

8.034. $(-\infty,\ -3)\bigcup(-2,\ -1)$.

8.035. □ Данное неравенство можно рассматривать лишь при условии $4x^2-$ $-19x+12>0$, откуда находим, что $x<0{,}75$ или $x>4$ (1). При этих значениях x имеем $\sqrt{4x^2-19x+12}>0$ и достаточно решить неравенство $x-7<0$, т. е. $x<7$ (2). Из системы неравенств (1), (2) получаем ответ: $(-\infty;\ 0{,}75)\bigcup$ $\bigcup(4,\ 7)$. ■

8.036. $(-3,\ 1)$.

8.037. □ Согласно указанию 5^0, это иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-x^2\geqslant 0, \\ 4-x>0, \\ 3x-x^2<16-8x+x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\,(3-x)\geqslant 0, \\ x<4, \\ 2x^2-11x+16>0. \end{cases}$$

Но последнее неравенство выполняется при любом x (поскольку $D<0$); поэтому решение системы из первых двух неравенств дает ответ: $[0,\ 3]$. ■

8.038. □ Согласно указанию 5^0, имеем систему

$$\begin{cases} 9x-20\geqslant 0, \\ x>0, \\ 9x-20<x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant 20/9, \\ x>0, \\ x^2-9x+20>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant 20/9, \\ x<4,\ \ x>5. \end{cases}$$

В результате получаем ответ: $[20/9,\ 4)\bigcup(5,\ \infty)$. ■

8.039. □ Из условия следует неравенство $\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}>0$ или $\sqrt[4]{10+x}>\sqrt{2-x}$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} 10+x\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \\ 10+x>(2-x)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant -10, \\ x\leqslant 2, \\ x^2-5x-6<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -10\leqslant x\leqslant 2, \\ -1<x<6. \end{cases}$$

Решением последней системы является промежуток $(-1,\ 2]$. ■

8.040. □ Заметив, что $0{,}(4)=\frac{4}{9}$, а $0{,}(6)=\frac{6}{9}$, запишем данное неравенство в виде $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\,(x^2-1)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6}$. Так как основание степени $0<2/3<1$, то, согласно указанию 7^0, переходим к неравенству $2\,(x^2-1)<x^2+6$. Решив его, получаем ответ: $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$. ■

8.041. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **8.042.** $(0,\ 2]$. **8.043.** $(0;\ 0{,}5)$. **8.044.** $(-\infty,\ 11]$.

8.045. □ Так как $0{,}64=0{,}8^2$, а $1=0{,}8^0$, то имеем неравенство $0{,}8^2<0{,}8^{\frac{x\,(x-3)}{2}}<0{,}8^0$. Отсюда, учитывая, что $0<0{,}8<1$, приходим к системе

$$2>\frac{x\,(x-3)}{2}>0 \Rightarrow 0<x^2-3x<4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x>0, \\ x^2-3x-4<0. \end{cases}$$

Решив ее, получим ответ: $(-1,\ 0)\bigcup(3,\ 4)$. ■

8.046. $(-\infty;\ 0{,}5)\bigcup(1,\ \infty)$. **8.047.** $(-1,\ 0)\bigcup(0,\ 1)$. **8.048.** $[0;\ 0{,}5]$.

8.049. □ Пусть $5^{\sqrt{x}}=y$; тогда $5^{2\sqrt{x}}=y^2$ и неравенство примет вид $y^2+5<5y+y$ или $y^2-6y+5<0$. Решив его, находим $1<y<5$. Остается решить неравенство $5^0<5^{\sqrt{x}}<5$. Имеем $0<\sqrt{x}<1$, откуда $0<x<1$. ■

8.050. $(0,\ \infty)$. **8.051.** $(0,\ 1)$.

8.052. □ Неравенство имеет смысл при $x\neq 0$. Запишем его в виде $2^{2\left(\frac{1}{x}-1\right)}-2^{\frac{1}{x}-1}\,2^{-1}-3\leqslant 0$. Положив $2^{\frac{1}{x}-1}=y>0$ и решив неравенство $2y^2-y-6\leqslant 0$, находим $-1,5 \leqslant y \leqslant 2$. Так как $2^{\frac{1}{x}-1} > 0$ при всех $x \neq 0$, то остается решить неравенство $2^{\frac{1}{x}-1} \leqslant 2$. Имеем $\frac{1}{x} - 1 \leqslant 1$ или $\frac{1-2x}{x} \leqslant 0$, откуда получаем ответ: $(-\infty, 0) \bigcup [0,5; \infty)$. ■

8.053. $(3, \infty)$.

8.054. □ В левой части неравенства вынесем за скобки множитель 2^{x+2}, а в правой — множитель 5^{x+1}:

$$2^{x+2}(1-2-2^2) > 5^{x+1}(1-5); \ -5 \cdot 2^{x+2} > -4 \cdot 5^{x+1}.$$

Разделив обе части последнего неравенства на отрицательное число $-10 \cdot 5^{x+1}$, получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{x+2}}{5^{x+1}} < \frac{2}{5} \text{ или } \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < \frac{2}{5}, \text{ откуда } x+1>1, \text{ т. е. } x>0. \ ■$$

8.055. $[0, 4)$. **8.056.** $(-1, 1)$. **8.057.** $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

8.058. □ Заметим, что $1 = \log_3 3$, а основание логарифма больше 1. Согласно указанию 8^0, переходим к системе

$$\begin{cases} \frac{3x-5}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-5}{x+1} > 0, \\ \frac{-8}{x+1} < 0. \end{cases}$$

Во втором неравенстве системы $-8 < 0$, откуда следует, что $x+1>0$, а значит, в первом неравенстве должно быть $3x-5>0$. Решив систему $\begin{cases} x+1>0, \\ 3x-5>0 \end{cases}$, получим ответ: $(5/3, \infty)$. ■

8.059. $(-\infty, -2) \bigcup (5/8, \infty)$.

8.060. □ Данное неравенство можно переписать в виде $|\log_{0,2}(x-1)| > 2$, откуда либо $\log_{0,2}(x-1) < -2$ (1), либо $\log_{0,2}(x-1) > 2$ (2). Решаем неравенство (1). Так как $-2 = \log_{0,2} 0,2^{-2}$, то, учитывая, что $0 < 0,2 < 1$, получим $x-1 > 25$, т. е. $x > 26$. Решив неравенство (2), найдем $0 < x-1 < 0,4$, т. е. $1 < x < 1,04$. Ответ: $(1; 1,04) \bigcup (26, \infty)$. ■

8.061. $(2, 32)$. **8.062.** $(4, 6)$. **8.063.** $(2; 3)$.

8.064. □ Заметив, что $\log_{1/9} x = -\log_9 x$, запишем данное неравенство в виде $\log_2(1 - 2\log_9 x) < \log_2 2$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ 1-2\log_9 x > 0, \\ 1-2\log_9 x < 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>0, \\ 0 < 1-2\log_9 x < 2. \end{cases}$$

ешаем второе неравенство: $-2<2\log_9 x-1<0$; $-1<2\log_9 x<1$; $-1/2<$ $<\log_9 x<1/2$; $\log_9 9^{-1/2}<\log_9 x<\log_9 9^{1/2}$. Следовательно, $3^{-1}<x<3$ и получаем ответ: (1/3, 3) (неравенство $x>0$ выполняется автоматически). ■

8.065. $(8/3, \infty)$. **8.066.** $(0, 3)\bigcup(7, \infty)$.

8.067. □ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+27>0, \\ 16-2x>0, \\ x>0, \\ \log_\pi \dfrac{x+27}{16-2x}<\log_\pi x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-27, \\ x<8, \\ x>0, \\ \dfrac{x+27}{16-2x}<x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<8, \\ \dfrac{2x^2-15x+27}{16-2x}<0. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим ответ: (3; 4,5). ■

8.068. $(3, 4)\bigcup(4, \infty)$. **8.069.** $(2, 3)$.

8.070. □ Все слагаемые приведем к логарифмам по основанию 9: $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{1/2}=$ $=\log_9 3$; $\log_3 5x=\log_9 25x^2$; $\log_{1/3}(x+3)=-\log_3(x+3)=-\log_9(x+3)^2=$ $=\log_9(x+3)^{-2}$. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ x+3>0, \\ \log_9 \dfrac{3x\,(x+3)^2}{25x^2}>\log_9 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ \dfrac{3\,(x+3)^2}{25x}-1>0. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим ответ: $(0, \infty)$. ■

8.071. $(0, 27)$. **8.072.** $(-1, 2)$.

8.073. □ Согласно условию, логарифм числа 0,3, меньшего 1, положителен. Это может быть только в том случае, когда основание логарифма есть положительное число, меньшее 1 (рис. Р.8.6). Таким образом, имеем систему неравенств $0<\dfrac{x-1}{x+5}<1$, решив которую получим ответ: $(1, \infty)$. ■

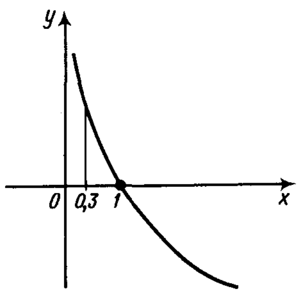

Рис. Р.8.6

8.074. [0,5; 4]. ● Положить $\log_{0,5} x=y$.

8.075. □ Имеем $0<\log_7 3<1\Rightarrow 0<1-\log_7 3<1\Rightarrow 0<$ $<\dfrac{1}{2}(1-\log_7 3)<\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow \log_{1,7}\left(\dfrac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)<$ <0. Значит, достаточно решить неравенство $4x^2-1\geqslant 0$, откуда получаем ответ: $(-\infty; -0,5]\bigcup[0,5; \infty)$. ■

8.076. $(-\infty, 2)\bigcup(8, \infty)$.

8.077. □ При любом x имеем $x^2+4\geqslant 4$ и, значит, $x^2+4>1$, т. е. $\log_{0,3}(x^2+4)<0$. Поэтому достаточно решить неравенство $3x^2-16x+21>0$, откуда получаем ответ: $(-\infty, 7/3)\bigcup(3, \infty)$. ■

8.078. $(0, 4)$. **8.079.** $(-1, 91/9)$.

8.080. □ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{3x+6}{x^2+2}>0, \\ \log_2 \dfrac{3x+6}{x^2+2}>0, \\ \log_{1/3}\log_2 \dfrac{3x+6}{x^2+2}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+6}{x^2+2}>0, \\ \dfrac{3x+6}{x^2+2}>1, \\ \log_2 \dfrac{3x+6}{x^2+2}>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+6}{x^2+1}>1, \\ \dfrac{3x+6}{x^2+2}>2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3x+6}{x^2+2}>2.$$

Заметим, что при переходе от второй системы к третьей из первых двух неравенств остается только второе, а в третьей системе достаточно решить только третье неравенство. В результате получаем ответ: $(-0{,}5;\ 2)$. ■

8.081. $(0;\ 0{,}4)\bigcup(1,\ \infty)$. **8.082.** $[1,\ 4]$. **8.083.** $(0,\ 40)$. **8.084.** $(2,\ \infty)$.

8.085. □ Данное неравенство можно рассматривать при условиях

$$\begin{cases} 3^x-9>0, \\ \log_9(3^x-9)>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 3^x>3^2, \\ 3^x-9>1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x>2, \\ 3^x>10. \end{cases}$$

Прологарифмировав второе неравенство по основанию 3, находим $x>\log_3 10>2$, т. е. в данном неравенстве основание логарифма $x>1$. Значит, $\log_9(3^x-9)<x$, откуда $3^x-9<9^x$ (1). Положим $3^x=y$ и получим неравенство $y^2-y+9>0$, которое выполняется при любом y. Поэтому неравенство (1) выполняется при всех x, а решением исходного неравенства является промежуток $x>\log_3 10$. Ответ: $(1/\lg 3,\ \infty)$. ■

8.086. □ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ \log_5 x>0, \\ \log_{1/3}\log_5 x>1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ 0<\log_5 x<1/3. \end{cases}$$

Достаточно решить систему $0<\log_5 x<1/3$, откуда $\log_5 1<\log_5 x<\log_5 5^{1/3}$, т. е. $1<x<\sqrt[3]{5}$. ■

8.087. □ Запишем данное неравенство в виде $2^{2-x}>2\cdot 3$. Прологарифмировав его по основанию 2, получим $2-x>1+\log_2 3$, откуда $x<1-\log_2 3$ (при логарифмировании знак неравенства сохранился, так как основание $2>1$). ■

8.088. $(0;\ 0{,}25)\bigcup(4,\ \infty)$.

8.089. □ Данная функция определена при условиях $4-x^2\geqslant 0$, $x-1\neq 0$. Решив эту систему, получим ответ: $[-2,\ 1)\bigcup(1,\ 2]$. ■

8.090. □ Здесь должны быть выполнены условия $\dfrac{x-1}{x+5}>0$, $\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}\geqslant 0$. Решив эту систему, получим ответ: $(1,\ \infty)$. ■

8.091. $[2,\ \infty)$.

8.092. □ Здесь должны выполняться условия

$$\begin{cases} x-1>0, \\ -x^2+2x+8>0, \\ -\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\geqslant 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $\sqrt{-x^2+2x+8}>0$, и, значит, в третьем неравенстве должно быть $\log_{0,3}(x-1)\leqslant 0$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} x>1, \\ (x-4)(x+2)<0, \\ \log_{0,3}(x-1)\leqslant 0, \end{cases}$$

решив которую получим ответ: $[2, 4)$. ■

8.093. 2. **8.094.** 2; 3.

8.095. □ Здесь требуется доказать, что $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$ при условии $a>0$, $b>0$, $c>0$. Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1-9=$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-6.$$

Так как в силу (8.3) имеем $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 2$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$, то, сложив эти неравенства, получим $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant 6$. Итак, $(a+b+c)\times$ $\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\geqslant 0$, т. е. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$. ■

8.096. □ Здесь $a^2+a+1>0$ при любом a. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}=\frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}=\sqrt{a^2+a+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}},$$

а это сумма двух положительных взаимно обратных чисел, которая, как известно, не меньше 2. Итак, данное неравенство верно при любом a. ■

8.097. ● Выразить $y=0,5\,(10-5x)$, подставить это выражение в неравенство и рассмотреть разность между левой и правой частями неравенства.

8.100. □ Нам нужно доказать, что $\frac{1}{2}\leqslant\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\leqslant\frac{3}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (1). Если это неравенство верно, то, умножив все его части на $2(x^2+1)>0$, получим верное неравенство $x^2+1\leqslant 2(x^2+x+1)\leqslant 3(x^2+1)$ (2). Вычитая из всех частей этого неравенства x^2+1, имеем

$$0\leqslant x^2+1+2x\leqslant 2(x^2+1) \text{ или } 0\leqslant (x+1)^2\leqslant 2(x^2+1). \qquad (3)$$

Отметим, что $(x+1)^2\geqslant 0$ (4) верно при любом x. Рассмотрим теперь разность $(x+1)^2-2(x^2+1)$. Имеем $(x+1)^2-2(x^2+1)=-x^2+2x-1=$ $=-(x-1)^2\leqslant 0$ при любом x, т. е. $(x+1)^2\leqslant 2(x^2+1)$ (5). Из (4) и (5) следует справедливость (3), а значит, верно (2) и (1), что и требовалось установить. ■

8.101. □ Данное выражение определено при условии $(a+1)x^2-2(a-1)x+$ $+3a-3\geqslant 0$ (1).

1) Пусть $a+1=0$, т. е. $a=-1$. Тогда неравенство (1) примет вид $4x-6\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 3/2$, т. е. оно выполняется не при любом x.

2) Пусть $a+1\neq 0$. Тогда неравенство (1) выполняется при любом x, если дискриминант квадратного трехчлена неположителен и $a+1>0$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$\begin{cases}4(a-1)^2-4(a+1)\cdot 3(a-1)\leqslant 0,\\ a+1>0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}2(a-1)(a+2)\geqslant 0,\\ a+1>0,\end{cases}$$

откуда получаем ответ: $[1, \infty)$. ■

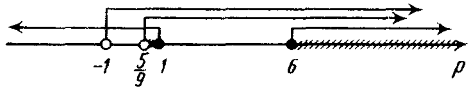

Рис. Р.8.7

8.102. □ Квадратный трехчлен $x^2+2(p+1)x+9p-5$ имеет корни, если $D=$ $=4(p+1)^2-4(9p-5)\geqslant 0$. Пусть x_1 и x_2 — корни трехчлена; тогда, по условию, $x_1<0$ и $x_2<0$. Далее, согласно теореме Виета, $x_1x_2=9p-5>0$, $x_1+x_2=-2(p+1)<0$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases}(p+1)^2-(9p-5)\geqslant 0,\\ 9p-5>0,\\ p+1>0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}p^2-7p+6\geqslant 0,\\ p>5/9,\\ p>-1\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}p\leqslant 1,\ p\geqslant 6,\\ p>5/9,\\ p>-1.\end{cases}$$

Используя рис. Р.8.7, находим решение последней системы: $5/9<p\leqslant 1$ или $p\geqslant 6$. ■

8.103. $(-\infty, -3)\bigcup(2, 6]$.

8.104. □ Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию, $-1<x_1<2$ и $-1<x_2<2$ (1). Следовательно, $f(x)=4x^2-(3m+1)x-m-2$ — квадратичная функция, а ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Эта функция имеет корни, поэтому парабола либо пересекает ось Ox в двух точках, либо касается ее в одной точке (на рис. Р.8.8 изображены возможные расположения параболы относительно оси Ox). Согласно неравенствам (1), эти точки должны принадлежать интервалу $(-1, 2)$. При этом $f(-1)>0$ и $f(2)>0$. Следовательно, получаем систему неравенств

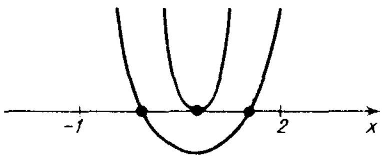

Рис. Р.8.8

$$\begin{cases}4+3m+1-m-2>0,\\ 16-6m-2-m-2>0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}2m+3>0,\\ -7m+12>0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}m>-3/2,\\ m<12/7,\end{cases}$$

откуда $-3/2<m<12/7$. ■

8.105. $-\infty<a<-1{,}75$.

8.106. □ Здесь должно выполняться условие $x-13\neq 0$, т. е. $x\neq 13$. При этом $\left|\dfrac{2}{x-13}\right|>0$ и данное неравенство равносильно следующему: $\left|\dfrac{x-13}{2}\right|<\dfrac{9}{8}$. Решая его, получим $-\dfrac{9}{8}<\dfrac{x-13}{2}<\dfrac{9}{8}$; $-9<4x-52<9$; $43<4x<61$. Итак, $10{,}75<x<15{,}25$ и $x\neq 13$. Целыми значениями x, удовлетворяющими этим условиям, являются 11, 12, 14, 15. ■

8.107. $[37/7, 7]$. **8.108.** 1. **8.109.** $-6<a<6$.

8.110. □ Так как $x^2-8x+20>0$ при всех x, то при любом x должно выполняться неравенство $mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$ (1).

1) Пусть $m=0$. Тогда неравенство (1) примет вид $2x+4<0$, т. е. оно верно только при $x<-2$, но не при любом x.

2) Пусть $m \neq 0$. Тогда неравенство (1) выполняется при любом x, если $D = 4(m+1)^2 - 4m(9m+4) < 0$ (2) и $m < 0$. Решаем неравенство (2):

$m^2 + 2m + 1 - 9m^2 - 4m < 0$; $-8m^2 - 2m + 1 < 0$; $(2m+1)(-4m+1) < 0$,

откуда $m < -0,5$ или $m > 0,25$. Но $m < 0$ и, следовательно, окончательно получаем $m < -0,5$. ■

8.111. $(-3, -2) \bigcup (1, 2) \bigcup (3, \infty)$. **8.112.** $-6 < m < 2$. **8.113.** $-7 < m < 1$. **8.114.** $(-2, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (5, \infty)$.

8.115. □ Имеем

$$\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| < 3 \Rightarrow -3 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1+3(x-3)}{x-3} > 0, \\ \dfrac{3x+1-3(x-3)}{x-3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6x-8}{x-3} > 0, \\ \dfrac{10}{x-3} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $x - 3 < 0$, а значит, в первом неравенстве должно быть $6x - 8 < 0$. Итак, $\begin{cases} x-3<0, \\ 6x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ x<4/3, \end{cases}$ т. е. $x < 4/3$. ■

8.116. □ Должно выполняться неравенство $\sqrt{4-x^3} > 0$, которое имеет место, если $4 - x^3 > 0$, т. е. если $x < \sqrt[3]{4}$. При этом условии достаточно решить неравенство $|x+2| - |x| > 0$ (1). Учитывая, что $|x+2| = 0$ при $x = -2$ и $|x| = 0$ при $x = 0$, рассмотрим различные интервалы изменения x.

1) Пусть $x < -2$. Тогда $|x+2| - |x| = -x - 2 + x = -2 < 0$, т. е. эти значения не удовлетворяют неравенству (1).

2) Пусть $-2 \leqslant x < 0$. Тогда $|x+2| - |x| = x + 2 + x = 2x + 2$ и неравенство (1) примет вид $2x + 2 > 0$, откуда $x > -1$. Следовательно, в этом случае $-1 < x < 0$ (2).

3) Пусть $0 \leqslant x < \sqrt[3]{4}$. Тогда $|x+2| - |x| = x + 2 - x = 2 > 0$ при любом x из рассматриваемого интервала. Значит, в этом случае $0 \leqslant x < \sqrt[3]{4}$ (3).

Объединяя неравенства (2) и (3), получаем ответ: $-1 < x < \sqrt[3]{4}$. ■

8.117. □ Упростим левую часть неравенства:

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{8x} \cdot \frac{(1-x)(x+2)^2 - (x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2} > 0;$$

$$\frac{(x+2)^3}{8x} \cdot \frac{(1-x)((x+2)^2-(x-2)^2)}{(x+2)^2} > 0; \quad \frac{(x+2)^3}{8x} \cdot \frac{(1-x)\,8x}{(x+2)^2} > 0.$$

Неравенство определено при условиях $x \neq -2$, $x \neq 0$ и можно сократить дробь, в результате чего получим неравенство $(x+2)(1-x) > 0$. Ответ: $(-2, 0) \bigcup (0, 1)$. ■

8.118. $[1,5; 2)$.

8.119. □ Преобразуем данное неравенство: $3m^2x + 3 - 2m^2x - 6 < m + 9x$; $m^2x - 9x < m + 3$; $(m-3)(m+3)x < m + 3$. Далее находим решения неравенства при различных значениях параметра m.

1) Пусть $(m-3)(m+3) > 0$, т. е. $m < -3$ или $m > 3$. Тогда неравенство имеет решение $x < 1/(m-3)$.

2) Пусть $(m-3)(m+3) < 0$, т. е. $-3 < m < 3$. Тогда неравенство имеет решение $x > 1/(m-3)$.

3) Пусть $(m-3)(m+3) = 0$, т. е. $m = 3$ или $m = -3$. Тогда если $m = 3$, то неравенство примет вид $0 \cdot x < 6$ и, значит, выполняется при любом $x \in \mathbf{R}$. Если же $m = -3$, то неравенство примет вид $0 \cdot x < 0$ и, следовательно, не имеет решений. ■

8.120. □ Имеем

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}+1\geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x}{x^2-4}\geqslant 0, \\ \dfrac{5x-8}{x^2-4}\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x\,(x-2{,}5)}{(x+2)\,(x-2)}\geqslant 0, \\ \dfrac{5\,(x-1{,}6)}{(x+2)\,(x-2)}\geqslant 0. \end{cases}$$

Применим метод интервалов сразу к двум неравенствам и с помощью рис. Р.8.9 найдем те значения x, при которых обе дроби неотрицательны. В результате получим $0\leqslant x\leqslant 1{,}6$, $x\geqslant 2{,}5$. ■

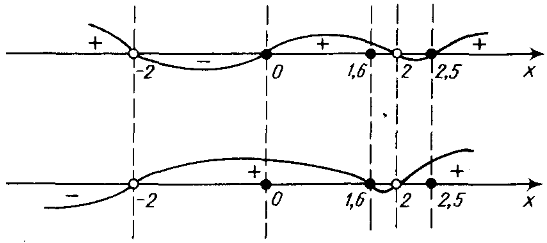

Рис. Р.8.9

8.121. □ Разложив числитель на множители:

$(x^3-8)+(x^4+2x^3+4x^2)=(x-2)\,(x^2+2x+4)+x^2\,(x^2+2x+4)=$
$=(x^2+2x+4)\,(x^2+x-2)$,

придем к неравенству $\dfrac{(x^2+2x+4)\,(x^2+x-2)}{x^2}<0$. Так как $x^2>0$ при $x\neq 0$ и $x^2+2x+4>0$ при любом x, то остается решить неравенство $x^2+x-2<0$. Учитывая, что $x\neq 0$, получаем ответ: $(-2,\ 0)\bigcup(0,\ 1)$. ■

8.122. $(-\infty,\ -4/3)\bigcup(-79/75,\ 3/2)\bigcup(2,\ \infty)$. **8.123.** $(-\infty,\ -7)\bigcup(-1,\ 0)\bigcup(0,\ 1)\bigcup(3,\ \infty)$. **8.124.** $(-\infty,\ -1)\bigcup(-1,\ 2]$. **8.125.** $(-2;\ -1{,}5)\bigcup[1;\ 2)\bigcup[5,\ \infty)$.

8.126. $(-\infty,\ 2)\bigcup[3{,}5;\ 4)\bigcup[7,\ \infty)$. **8.127.** $(-\sqrt{14},\ -3)\bigcup(-1,\ 1)\bigcup(3,\ \sqrt{14})$.

8.128. $(-1/2,\ 1/3)$. ● Положить $x^3=y$.

8.129. □ Очевидно, что $x^2-5x+9>0$ при любом x; поэтому $|x^2-5x+9|=$ $=x^2-5x+9$.

1) Пусть $x<6$. Тогда неравенство примет вид $-(x-6)>x^2-5x+9\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-4x+3<0$. Отсюда находим $1<x<3$.

2) Пусть $x\geqslant 6$. Тогда неравенство примет вид $x-6>x^2-5x+9\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-6x+15<0$, что невозможно.

Итак, получаем ответ: $(1,\ 3)$. ■

8.130. $(-\sqrt[4]{12},\ \sqrt[4]{12})$. **8.131.** $(-\infty,\ -5)\bigcup(-3,\ -1)\bigcup(1,\ 2)$. **8.132.** $(-\infty,\ -2)\bigcup(1,\ 2)\bigcup(3,\ \infty)$. **8.133.** $(-\sqrt{5},\ \infty)$.

8.134. □ Положим $x^2+4x+10=y$; тогда получим неравенство $y^2-7\,(y+1)+$ $+7<0$ или $y^2-7y<0$, откуда $0<y<7$. Следовательно, $0<x^2+4x+10<7$. Но $x^2+4x+10>0$ при любом x, поэтому остается решить неравенство $x^2+4x+3<0$. В результате получаем ответ: $(-3,\ -1)$. ■

8.135. □ Полагая $y=\sqrt{2-x}$, получим неравенство $\dfrac{4}{y}-y<2$ (1). При $x<2$ имеем $y>0$ и, значит, можно умножить обе части неравенства (1) на y. Следовательно, $4-y^2<2y$ или $y^2+2y-4>0$. Отсюда находим $y<-1-\sqrt{5}$ или $y>\sqrt{5}-1$. Однако значения $y<-1-\sqrt{5}$ не удовлетворяют неравенству (1), поскольку должно быть $y>0$. Таким образом, $y>\sqrt{5}-1$ и остается решить неравенство $\sqrt{2-x}>\sqrt{5}-1$. Так как $\sqrt{5}-1>0$, то в силу указания 6^0 это иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ (\sqrt{2-x})^2>(\sqrt{5}-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2, \\ 2-x>6-2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2, \\ x<2\sqrt{5}-4, \end{cases}$$

откуда получаем ответ: $(-\infty, 2\sqrt{5}-4)$. ■

8.136. □ Согласно указанию 5^0, данное иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0, \\ (\sqrt{x+3})^2<(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -3, \\ x\geqslant 1, \\ x\geqslant 2, \\ x+3<2x-3+2\sqrt{(x-1)(x-2)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ 6-x<2\sqrt{(x-1)(x-2)}. \end{cases}$$

В силу указания 6^0 второе неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)\geqslant 0, \\ 6-x\geqslant 0, \\ 36-12x+x^2<4(x^2-3x+2); \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} (x-1)(x-2)\geqslant 0, \\ 6-x<0. \end{cases} \quad (2)$$

Решаем систему (1). Из первых двух ее неравенств находим $2\leqslant x\leqslant 6$. Третье неравенство после преобразований примет вид $3x^2-28>0$, откуда $x<-\sqrt{\frac{28}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{21}$ или $x>\sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{21}$. Таким образом, решением системы (1) является промежуток $2\sqrt{21}/3<x\leqslant 6$.

Решаем систему (2). Из первого ее неравенства находим $x\leqslant 1$ или $x\geqslant 2$, а из второго $x>6$. Следовательно, $x>6$ — решение системы (2).

Объединяя решения систем (1) и (2), получаем ответ: $(2\sqrt{21}/3, \infty)$. ■

8.137. $(-\infty, 0]\bigcup(4{,}5; \infty)$. **8.138.** $(1, 2/\sqrt{3}]$.

8.139. □ Приведем данное неравенство к виду $(x-3)(\sqrt{x^2+4}-(x+3))\leqslant 0$. Рассмотрим два случая: $x-3\geqslant 0$ и $x-3<0$. В первом случае получим систему

$$\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ \sqrt{x^2+4}-(x+3)\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ \sqrt{x^2+4}\leqslant x+3. \end{cases}$$

При $x\geqslant 3$ обе части второго неравенства положительны и их можно возвести в квадрат. Следовательно, $x^2+4\leqslant x^2+6x+9$ или $6x+5\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -5/6$. Итак, в этом случае $x\geqslant 3$.

Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} x-3<0, \\ \sqrt{x^2+4}-(x+3)\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ \sqrt{x^2+4}\geqslant x+3. \end{cases}$$

Согласно указанию 6^0, второе неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2+4 \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0, \\ x^2+4 \geqslant x^2+6x+9; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x^2+4 \geqslant 0, \\ x+3<0. \end{cases} \quad (2)$$

Первое неравенство системы (1) выполняется при всех x, второе — при $x \geqslant -3$, третье — при $x \leqslant -5/6$. Таким образом, $-3 \leqslant x \leqslant -5/6$ есть решение системы (1). Очевидно, что система (2) имеет решение $x<-3$. Отсюда заключаем, что в этом случае $-\infty<x \leqslant 5/6$.
Объединяя решения, найденные в рассмотренных двух случаях, получаем ответ: $(-\infty, -5/6] \bigcup [3, \infty)$. ■

8.140. $(0{,}5(\sqrt{34}-1), \infty)$. **8.141.** $[-1, \infty)$.

8.142. □ Здесь должно выполняться условие $\frac{12x}{x-2} \geqslant 0$, откуда находим $x \leqslant 0$ или $x>2$. Положим $y=\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} \geqslant 0$ и получим неравенство $y^4-2y^2-4y>0$. Разложим его левую часть на множители:

$$y^4-2y^2-4y=y(y^3-2y-4)=y(y^3-4y+2y-4)=$$
$$=y(y(y^2-4)+2(y-2))=y(y-2)(y^2+2y+2).$$

Так как $y^2+2y+2>0$ при любом y, то достаточно решить неравенство $y(y-2)>0$. Имеем $y<0$ (что невозможно) или $y>2$. Остается решить неравенство $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>2$ (с учетом условий $x \leqslant 0$ или $x>2$). В результате получаем ответ: $(2, 8)$. ■

8.143. □ Так как основание степени $0<0{,}5<1$, то приходим к неравенству $\sqrt{3}>\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}>1$. Далее, согласно формулам (4.13) и (4.16), имеем $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x$. Остается решить неравенство $1<\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$. Построив график функции $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. Р.8.10), получим ответ: $\pi/6+\pi n<x<\pi/4+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

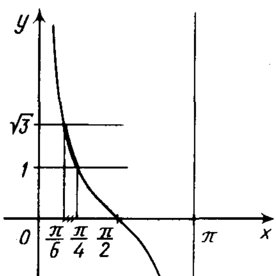

Рис. Р.8.10

8.144. $(-2, -5/3) \bigcup (0, 1/13)$. **8.145.** $(2, \infty)$.

8.146. $(1, 2) \bigcup (64, \infty)$.

8.147. □ Приведя степени к основанию 3/2, получим

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2(x+2)^2}$$

Далее имеем $2\log_2(x^2-3x-10)>\log_2(x+2)^2$ или $2\log_2(x^2-3x-10)>$ $>2\log_2|x+2|$, откуда переходим к системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-10>0, \\ |x+2|>0, \\ x^2-3x-10>|x+2|. \end{cases}$$

Из первых двух неравенств находим $x<-2$ или $x>5$ (1). Решим третье неравенство. Если $x<-2$, то оно примет вид $x^2-3x-10>-x-2$ и в этом случае получим $x<-2$. Если же $x>-2$, то неравенство примет вид $x^2-3x-10>x+2$ и в этом случае находим $x>6$. Оба решения удовлетворяют условиям (1). Ответ: $(-\infty, -2)\bigcup(6, \infty)$. ■

8.148. $[-3, -\sqrt{6})\bigcup(-\sqrt{6}, -2]\bigcup[2, \sqrt{6})\bigcup(\sqrt{6}, 3]$. **8.149.** $(0, \infty)$.

8.150. □ Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$16\cdot 5^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-9^{\log_2(x-1)-1};$$

$$8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}(2\cdot 5-1)>9^{\log_2(x-1)-1}(9-1);$$

$$5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)-2};\ \left(\frac{5}{9}\right)^{\log_2(x-1)-2}>1.$$

Значит, $\log_2(x-1)-2<0$, откуда $0<x-1<4$. Ответ: $(1, 5)$. ■

8.151. $(-1/3, \infty)$. **8.152.** $(0, 2)$.

8.153. □ Заметив, что $\frac{1}{2}=\log_{0,25}\frac{1}{2}$, перейдем к равносильному неравенству $0<\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$. Если $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}>0$, то $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{2x+1}{x+3}<0$; если же $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}<0$, то $-\frac{2x+1}{x+3}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{2x+1}{x+3}+1>0$. Решаем две системы неравенств:

$$1)\ \begin{cases}\dfrac{5x+5}{x+3}>0,\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x+3}<0\end{cases}\Rightarrow \frac{5(x+1)(2x+1)}{(x+3)^2}<0\Rightarrow -1<x<-1/2;$$

$$2)\ \begin{cases}\dfrac{5x+5}{x+3}<0,\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x+3}+1>0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{5(x+1)}{x+3}<0,\\[2mm] \dfrac{3x+4}{x+3}>0\end{cases}\Rightarrow \frac{5(x+1)(3x+4)}{(x+3)^2}<0\Rightarrow -4/3<x<-1.$$

Ответ: $(-4/3, -1)\bigcup(-1, -1/2)$. ■

8.154. $[-3, 1)$. **8.155.** $(1, \infty)$. **8.156.** $(2, 5)$.

8.157. □ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_3 x>0,\\ \log_3(9\sqrt[3]{x})>0,\\ 2\log_3\log_3 x-\log_3\log_3(9\sqrt[3]{x})\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x>0,\\ x>1,\\ 9\sqrt[3]{x}>1,\\ \log_3\dfrac{\log_3^2 x}{2+\frac{1}{3}\log_3 x}\geqslant\log_3 3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{\log_3^2 x}{2+\frac{1}{3}\log_3 x}\geqslant 3.\end{cases}$$

Полагая $\log_3 x=y>0$, получим неравенство $\dfrac{y^2}{2+\dfrac{y}{3}}\geqslant 3$, откуда находим

$-6<y\leqslant -2$ (не годится) или $y\geqslant 3$. Система $\begin{cases}x>1,\\ \log_3 x\geqslant 3\end{cases}$ или $\begin{cases}x>1,\\ x\geqslant 27\end{cases}$ дает

ответ: $[27, \infty)$. ■

8.158. □ Полагая $\sqrt{4x+5}=y$, приходим к неравенству $\dfrac{\log_2(y-1)}{\log_2(y+11)}>\dfrac{1}{2}$ (1). Далее, учитывая область определения логарифмической функции, имеем $y-1>0$, $y+11>0$, откуда $y>1$ и, значит, $\log_2(y+11)>0$. Теперь умножим обе части неравенства (1) на $2\log_2(y+11)$ и получим $2\log_2(y-1)>\log_2(y+11)$ или $(y-1)^2>y+11$. Отсюда находим $y<-2$ или $y>5$. Неравенство $\sqrt{4x+5}<-2$ не имеет решений, а из неравенства $\sqrt{4x+5}>5$ получаем $x>5$. ■

8.159. $(-2, 13)$.

8.160. □ Пусть выполнены неравенства $0<x-1<1$, т. е. $1<x<2$, и $\log_2(x-1)<0$ (1). Тогда $2<x+1<3$ и $\log_2\sqrt{x+1}=0{,}5\log_2(x+1)>0$ (2). Из (1) и (2) следует, что при $1<x<2$ данное неравенство очевидно.

Пусть теперь $x-1>1$, т. е. $x>2$. Тогда оба логарифма положительны и приходим к неравенству $\log_2\sqrt{x+1}<\log_2(x-1)$, решая которое получим $x>3$. Ответ: $(1, 2)\bigcup(3, \infty)$. ■

8.161. $(-3, -2)\bigcup(-1, 0)$.

8.162. □ Заметив, что $\log_{1/4}\dfrac{x+1}{4x-1}=\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}$, $\log_{1/3}\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}=$

$=-\log_3\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}$, преобразуем данное неравенство:

$$\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1}+\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1}<0;$$

$$2\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1}<0;\ 0<\log_4\frac{4x-1}{x+1}<1;\ 1<\frac{4x-1}{x+1}<4.$$

Решив последнюю систему, получим ответ: $(2/3, \infty)$. ■

8.163. □ Учитывая область определения логарифмической функции и квадратного корня, заключаем, что $x>0$ и $\sqrt{x}-1>0$, откуда $x>1$. Приведем все логарифмы к основанию 2: $\log_2\sqrt{x}+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2 2$ или $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)<2$. Положим $\sqrt{x}=y>0$ и решим неравенство $y^2-y-2<0$, откуда $-1<y<2$. Но $\sqrt{x}>1$ и, значит, $1<\sqrt{x}<2$, т. е. $1<x<4$. Целыми значениями x, удовлетворяющими этому неравенству, являются 2 и 3. ■

8.164. $(0; 0{,}5)\bigcup[\sqrt{2}, \infty)$. **8.165.** $(4^{\log_{0,8}0{,}2}, \infty)$. **8.166.** $(1/8, 1/4)\bigcup(4, 8)$.

8.167. □ Так как $\log_{|x-1|}0{,}5>0$, то $0<|x-1|<1$. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ -1<x-1<1, \\ \log_{|x-1|}0{,}5>\log_{|x-1|}|x-1|^{0{,}5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ 0<x<2, \\ 0{,}5<\sqrt{|x-1|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \text{ или } 1<x<2, \\ 0{,}25<|x-1|. \end{cases}$$

Последняя система распадается на две системы: $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0{,}25<1-x \end{cases}$ и $\begin{cases} 1<x<2, \\ 0{,}25<x-1. \end{cases}$

В результате получаем ответ: $(0;\ 0{,}75)\bigcup(1{,}25;\ 2)$. ■

8.168. $(1/3,\ 1)\bigcup(1,\ 2)$. ● Рассмотреть два случая: $0<x<1$ и $x>1$.

8.169. □ Здесь должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x>0, \\ 2x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<0{,}5;\ 0{,}5<x<2;\ x>3. \qquad (1)$$

При этих условиях данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} 0<2x<1, \\ x^2-5x+6>2x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x>1, \\ x^2-5x+6<2x. \end{cases}$$

Отсюда находим $0<x<0{,}5$ и $1<x<6$. Учитывая условия (1), получаем ответ: $(0;\ 0{,}5)\bigcup(1,\ 2)\bigcup(3,\ 6)$. ■

8.170. $(1,\ 3)\bigcup(3^9,\ \infty)$. ● Рассмотреть два случая: $0<\log_3 x<1$ и $\log_3 x>1$.

8.171. □ Неравенство имеет смысл, если $\log_{x-1}9>0$, откуда $x-1>1$, т. е. $x>2$ (1). Из данного неравенства следует $0<\log_2\log_{x-1}9<1\Rightarrow 1<\log_{x-1}9<2\Rightarrow$ $\Rightarrow x-1<9<(x-1)^2$. Решив систему $\begin{cases} x<10, \\ x-1>3 \end{cases}$, получим $4<x<10$, что удовлетворяет условию (1). ■

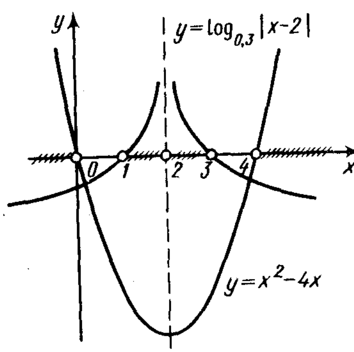

Рис. P.8.11

8.172. $(1,\ 4)$.

8.173. □ I способ. На одном чертеже построим графики функций $y=\log_{0{,}3}|x-2|$ и $y=x^2-4x$ (рис. P.8.11) и определим те значения x, при которых функции имеют разные знаки. Используя рис. P.8.11, получим ответ: $(-\infty,\ 0)\bigcup$ $\bigcup(1,\ 2)\bigcup(2,\ 3)\bigcup(4,\ \infty)$.

II способ. Решаем системы неравенств

$$\begin{cases} \log_{0{,}3}|x-2|>0, \\ x^2-4x<0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \log_{0{,}3}|x-2|<0, \\ x^2-4x>0 \end{cases}$$

и в результате получаем тот же ответ. ■

8.174. $(0,\ 1/2)\bigcup(2,\ 3)$.

8.175. $(0,\ 1/3)\bigcup(243,\ \infty)$. ● Привести обе части неравенства к одному основанию 2/5 и положить $\log_3 x=y$.

8.176. □ Заметим, что $2^{\log^2_{0{,}5}x}=2^{\log^2_2 x}=(2^{\log_2 x})^{\log_2 x}=x^{\log_2 x}$, и положим $x^{\log_2 x}=y$.

Тогда получим неравенство $y+\dfrac{1}{y}>\dfrac{5}{2}$, откуда находим $y<1/2$ или $y>2$.

Итак, $x^{\log_2 x}<1/2$ или $x^{\log_2 x}>2$. Эти неравенства решаем логарифмированием по основанию 2. Из первого имеем $\log_2^2 x<-1$, что невозможно; второе дает $\log_2^2 x>1$, т. е. $\log_2 x<-1$ или $\log_2 x>1$. Ответ: $(0,\ 1/2)\bigcup(2,\ \infty)$. ■

8.177. $[1/8,\ 4]$. ● Прологарифмировать обе части неравенства по основанию 0,5. **8.178.** $(0{,}01;\ \infty)$. **8.179.** $(-\infty;\ -0{,}1]\bigcup[-0{,}001;\ 0)$. **8.180.** $(0{,}25;\ 1)\bigcup(1,\ 4)$. **8.181.** $(0{,}2;\ 5)$. **8.182.** $(-4,\ -3)\bigcup(8,\ \infty)$.

8.183. □ Учитывая область определения логарифмической функции и ограничения на основание логарифма, имеем $x\neq 0$, $x\neq 1$, $\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$. Но из данного неравенства следует, что $\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>1\Rightarrow\log_{x^2}2>1\Rightarrow\log_{x^2}2>$ $>\log_{x^2}x^2$. Если $0<|x|<1$, то $2<x^2$ и, значит, $|x|>\sqrt{2}$, что невозможно. Если же $|x|>1$, то $2>x^2$, т. е. $|x|<\sqrt{2}$. Таким образом, получаем следующие две системы:

$$\begin{cases}x>0,\\ 1<x<\sqrt{2}\end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases}x<0,\\ -\sqrt{2}<x<-1.\end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{2},\ -1)\bigcup(1,\ \sqrt{2})$. ■

8.184. $(2^{-28},\ 1)$. **8.185.** $(a^4,\ a^{-1})$, если $0<a<1$, и $(a^{-1},\ a^4)$, если $a>1$. **8.186.** $(0,\ \sqrt[4]{2}]$. **8.187.** $(1,\ 1+2^{-5/4})\bigcup(3,\ \infty)$.

8.188. □ Пусть $0<|x-3|<1$; тогда $2x^2-7x<0$, т. е.

$$\begin{cases}x\neq 3,\\ -1<x-3<1,\\ x\,(2x-7)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 3,\\ 2<x<4,\\ 0<x<3{,}5\end{cases}\Rightarrow 2<x<3\ \text{или}\ 3<x<3{,}5.$$

Пусть $|x-3|>1$; тогда $2x^2-7x>0$, т. е.

$$\begin{cases}x-3<-1\ \text{или}\ x-3>1,\\ x\,(2x-7)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<2\ \text{или}\ x>4,\\ x<0\ \text{или}\ x>3{,}5\end{cases}\Rightarrow x<0\ \text{или}\ x>4.$$

Ответ: $(-\infty,\ 0)\bigcup(2,\ 3)\bigcup(3;\ 3{,}5)\bigcup(4,\ \infty)$. ■

8.189. □ Здесь должно выполняться условие $\cos x\neq 0$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Произведем преобразования:

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\frac{4\sin x}{\cos x}<0;\ \frac{\sqrt{3}-4\sin x\cos x}{\cos^2 x}<0;\ \frac{\sqrt{3}-2\sin 2x}{\cos^2 x}<0.$$

Так как $\cos^2 x>0$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, то достаточно решить неравенство $\sqrt{3}-2\sin 2x<0$, т. е. $\sin 2x>\sqrt{3}/2$. Полагая $z=2x$ и построив график функции $y=\sin z$ (рис. Р.8.12), устанавливаем, что $\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ или $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$. В эти интервалы значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ не входят. Итак, получаем ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, где $n\in\mathbf{Z}$. ■

8.190. □ Имеем $\sin 2x\neq 0$, т. е. $2x\neq\pi n$ или $x\neq\pi n/2$. Выполним преобразования:

$$\sin 4x+\cos 4x\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}>1;\ \frac{\sin 4x\sin 2x+\cos 4x\cos 2x}{\sin 2x}>1;\ \frac{\cos 2x}{\sin 2x}>1,\ \text{т. е. } \operatorname{ctg}2x>1.$$

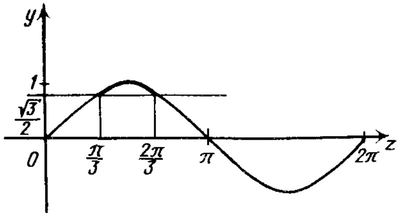

Рис. Р.8.12

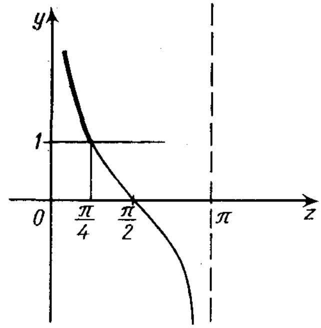

Рис. Р.8.13

Теперь с помощью графика функции $y=\operatorname{ctg} z$ (рис. Р.8.13) устанавливаем, что $\pi n<2x<\frac{\pi}{4}+\pi n$, откуда $\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. Значения $x=\pi n/2$ не входят в эти интервалы. Ответ: $\left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8}(4n+1)\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

8.191. □ Учитывая, что $2x\neq\frac{\pi n}{2}$, т. е. $x\neq\frac{\pi n}{4}$, выполним преобразования:

$$2+\operatorname{tg}2x+\frac{1}{\operatorname{tg}2x}<0;\ \frac{2\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}^2 2x+1}{\operatorname{tg}2x}<0;\ \frac{(1+\operatorname{tg}2x)^2}{\operatorname{tg}2x}<0.$$

Отметим, что $(1+\operatorname{tg}2x)^2>0$, если $\operatorname{tg}2x\neq-1$. Из уравнения $\operatorname{tg}2x=-1$ находим $2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, т. е. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. Следовательно, если $x\neq-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, то достаточно решить неравенство $\operatorname{tg}2x<0$. Имеем $\pi n-\frac{\pi}{2}<2x<\pi n$, т. е. $\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi n}{2}$. Однако найденные интервалы содержат значения $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, которые нужно исключить из ответа. Таким образом, окончательно получаем $\left(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cup\left(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

8.192. □ Здесь $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Выполнив преобразования, получим

$$2\cos^2 x-4\sqrt{2}\sin x-5<0;\ 2(1-\sin^2 x)-4\sqrt{2}\sin x-5<0;$$
$$2\sin^2 x+4\sqrt{2}\sin x+3>0.$$

Далее положим $\sin x=y$ и придем к неравенству $2y^2+4\sqrt{2}y+3>0$. Так как уравнение $2y^2+4\sqrt{2}y+3=0$ имеет корни $y_1=-3\sqrt{2}/2$, $y_2=-\sqrt{2}/2$, то $y<-3\sqrt{2}/2$ или $y>-\sqrt{2}/2$. Первое решение не удовлетворяет данному неравенству, поскольку $|y|=|\sin x|\leqslant 1$. Остается решить неравенство $\sin x>-\sqrt{2}/2$. Используя график функции $y=\sin x$, устанавливаем, что

$2\pi n-\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n$. Из этих интервалов нужно исключить значения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, поэтому окончательно получаем ответ: $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\bigcup \bigcup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

8.193. □ Функция определена, если $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4\geqslant 0$, т. е. $2^{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+ +4\geqslant 0$. Пусть $2^{\frac{1}{x}}=y>0$; тогда получим неравенство $4y^2-17y+4\geqslant 0$, откуда $y\leqslant 1/4$ или $y\geqslant 4$. Итак:

$$2^{\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x}\leqslant -2\Rightarrow\frac{1+2x}{x}\leqslant 0\Rightarrow -0{,}5\leqslant x<0;$$

$$2^{\frac{1}{x}}\geqslant 4\Rightarrow\frac{1}{x}\geqslant 2\Rightarrow\frac{1-2x}{x}\geqslant 0\Rightarrow 0<x\leqslant 0{,}5.$$

Ответ: $[-0{,}5;\ 0)\bigcup(0;\ 0{,}5]$. ■

8.194. $[0, 3)\bigcup(3, 4)$. **8.195.** $(0, 1/64)\bigcup(4, \infty)$.

8.196. □ Здесь должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases}|x-3|>0,\\ \log_3|x-3|>0,\\ \log_{1/3}\log_3|x-3|\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 3,\\ |x-3|>1,\\ \log_3|x-3|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\neq 3,\\ x-3<-1 \text{ или } x-3>1,\\ |x-3|\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 3,\\ x<2 \text{ или } x>4,\\ 0\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

С помощью рис. Р.8.14 получаем ответ: $[0, 2)\bigcup(4, 6]$. ■

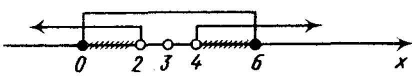

Рис. Р.8.14

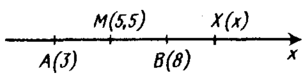

Рис. Р.8.15

8.197. $(3;\ 3{,}5]\bigcup[5, \infty)$. **8.198.** $[-98, 2)\bigcup(2, 102]$.

8.199. Имеем

$$\begin{cases}2^{\log_{x-3}0{,}5}-1>0,\\ 2x-6>0,\\ \log_3(2x-6)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{x-3}0{,}5>0,\\ x>3,\\ 2x-6\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x-3<1,\\ x>3,\\ x\neq 3{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3<x<4,\\ x>3,\\ x\neq 3{,}5.\end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 3{,}5)\bigcup(3{,}5;\ 4)$. ■

8.200. $(4, 5)\bigcup(5, \infty)$.

8.201. □ Функция определена, если выполняется неравенство $|x-3|-|8-x|\geqslant 0$, т. е. $|x-3|\geqslant|8-x|$ (1). Заметим, что на числовой оси $|x-3|$ и $|x-8|$ — это расстояния от точки с координатой x до точек с координатами 3 и 8.

Поэтому неравенство (1) означает, что расстояние от точки X (x) до точки A (3) больше или равно, чем расстояние до точки B (8) (рис. Р.8.15). Найдем координату середины M отрезка с концами в точках A и B: $\frac{3+8}{2}=5{,}5$. Тогда все точки, расположенные правее M, находятся дальше от A, чем от B. В результате получаем ответ: $[5{,}5;\ \infty)$. ■

Замечание. Для решения неравенства (1) с помощью определения модуля следует рассмотреть три случая: $x<3$, $3\leqslant x<8$, $x\geqslant 8$.

8.202. $(-\infty,\ -7)\bigcup(-7,\ -2]\bigcup(1,\ 7)\bigcup(7,\ 8]\bigcup(11,\ \infty)$. **8.203.** $[-5,\ 3)\bigcup(3,\ 5]$.

8.204. $(-\infty,\ -1)\bigcup(3,\ \infty)$.

8.205. □ Данное выражение определено, если $(p-1)\,x^2+2px+3p-2>0$ (1). Пусть $p-1=0$, т. е. $p=1$. Тогда неравенство (1) примет вид $2x+1>0$, откуда $x>-1/2$; таким образом, оно выполняется не при любом x. Пусть теперь $p-1\neq 0$. Тогда левая часть неравенства (1) является квадратным трехчленом и оно выполняется при любом x, если $p-1>0$, а $D=4p^2-4\,(p-1)\,(3p-2)<0$. Решив эту систему неравенств, получим ответ: $(2,\ \infty)$. ■

8.206. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

8.207. □ Сначала найдем разность

$a_2-a_1=-1-\log_2\sin x-\log_{1/2}\sin 2x=-1-\log_2\sin x+$

$+\log_2\,(2\sin x\cos x)=-1-\log_2\sin x+1+\log_2\sin x+\log_2\cos x=\log_2\cos x.$

Так как $0<x<\pi/4$, то $\sqrt{2}/2<\cos x<1$ и $\log_2\cos x<0$. Поэтому $a_2-a_1<0$, т. е. $a_2<a_1$ (1).

Теперь найдем разность

$$a_3-a_1=\log_{1/2}\,(1-\cos 2x)-\log_{1/2}\sin 2x=\log_{1/2}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\log_{1/2}\operatorname{tg} x.$$

Поскольку $0<x<\pi/4$, имеем $0<\operatorname{tg} x<1$, откуда $\log_{1/2}\operatorname{tg} x>0$, т. е. $a_3>a_1$ (2).

Итак, из (1) и (2) следует, что $a_2<a_1<a_3$. ■

8.208. $(0,\ \pi/2]$.

8.209. □ Заданные неравенства определены при условиях

$$\begin{cases} x^2-9x+20\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0, \\ x^2-13\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant 4;\ x\geqslant 5, \\ x\geqslant 1, \\ x\leqslant-\sqrt{13};\ x\geqslant\sqrt{13}. \end{cases}$$

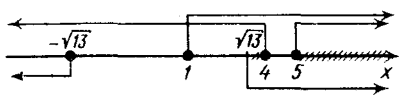

Рис. Р.8.16

С помощью рис. Р.8.16 устанавливаем, что $\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 4$ или $x\geqslant 5$ (1). При этих значениях x все части неравенств неотрицательны и их можно возвести в квадрат, откуда получаем систему

$$\begin{cases} x^2-9x+20\leqslant x-1, \\ x-1\leqslant x^2-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-10x+21\leqslant 0, \\ x^2-x-12\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\leqslant x\leqslant 7, \\ x\leqslant -3;\ x\geqslant 4, \end{cases}$$

т. е. $4\leqslant x\leqslant 7$ (2). Объединяя решения (1) и (2), получаем ответ: $4\bigcup[5,\ 7]$. ■

8.210. $(5,\ 8)\bigcup(8,\ 29)$. **8.211.** $(-8;\ -6{,}5)\bigcup(0,\ 5)$. **8.212.** $[1{,}75;\ 4)$. **8.213.** $(-1,\ 3)$.

8.214. □ Решаем каждое неравенство самостоятельно:

1) $|x^2+5x|<6 \Rightarrow -6<x^2+5x<6 \Rightarrow \begin{cases} x^2+5x+6>0, \\ x^2+5x-6<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -6<x<-3$ или $-2<x<1$ (1);

2) $|x+1|\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant x+1\leqslant 1 \Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 0.$ (2)

Объединяя решения (1) и (2), получим ответ: $(-2, 0]$. ■

8.215. $(-1, 2)$.

8.216. □ Используя известное неравенство (8.2), запишем $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}, \frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$, откуда после почленного сложения имеем $\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$. Рассуждая аналогично по отношению к числам $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{c+d}{2}$, получим

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}. \ ■$$

8.217. ● Воспользоваться неравенством, доказанным в задаче 8.216.

8.218. □ Запишем очевидные неравенства: $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}, \frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{yz}, \frac{z+x}{2}\geqslant\sqrt{zx}$. Перемножив их, получим $\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\geqslant xyz$. Наконец, после умножения обеих частей неравенства на $\frac{8}{xyz}>0$ имеем

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geqslant 8 \text{ или } \left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geqslant 8. \ ■$$

8.219. ● Определить знак разности между левой и правой частями неравенства.

8.220. □ Рассмотрим разность

$$\frac{a^4+b^4}{2}-\frac{(a+b)^4}{16}=\frac{8a^4+8b^4-(a^2+2ab+b^2)^2}{16}.$$

Далее, используя формулу квадрата трехчлена, получим

$$\frac{8a^4+8b^4-a^4-4a^2b^2-b^4-4a^3b-2a^2b^2-4ab^3}{16}=$$

$$=\frac{7a^4+7b^4-6a^2b^2-4a^3b-4ab^3}{16}=$$

$$=\frac{3(a^4+b^4-2a^2b^2)+4(a^4+b^4-a^3b-ab^3)}{16}=$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2+4(a^3(a-b)-b^3(a-b))}{16}=$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2+4(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{16}\geqslant 0,$$

поскольку $(a^2-b^2)^2\geqslant 0$, $(a-b)^2\geqslant 0$, $a^2+ab+b^2>0$. Итак, $\frac{a^4+b^4}{2}-$ $-\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\geqslant 0$, откуда $\frac{a^4+b^4}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. ■

8.221. □ Так как $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}=\sqrt[n]{4-3}=1$, то числа $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}$ и $\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$ — взаимно обратные. Согласно известному неравенству (8.3), имеем $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$. ■

8.222. □ Умножив все части неравенств на $x^2-x+1>0$, получим

$$-9x^2+9x-9<3x^2+px-6<6x^2-6x+6\Rightarrow\begin{cases}12x^2+(p-9)\,x+3>0,\\ 3x^2-(6+p)\,x+12>0.\end{cases}$$

Эти неравенства выполняются при любом x, если дискриминант каждого квадратного трехчлена отрицателен, что приводит к системе

$$\begin{cases}(p-9)^2-144<0,\\ (6+p)^2-144<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|p-9|<12,\\ |6+p|<12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12<p-9<12,\\ -12<6+p<12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<p<21,\\ -18<p<6.\end{cases}$$

Решением последней системы является промежуток $-3<p<6$. ■

8.223. $-2<m<4$.

8.224. □ Корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ являются числа $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, а корнями уравнения $cx^2+bx+a=0$ — числа $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$. Выберем $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$. Далее находим

$$x_1x_2=\left(-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right)=\frac{b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1.$$

Следовательно, x_1 и x_2 — взаимно обратные положительные числа и, как известно, их сумма не меньше, чем 2. Итак, для каждого положительного корня первого уравнения существует такой положительный корень второго уравнения, что $x_1+x_2\geqslant 2$. ■

Замечание. Можно не выбирать один корень первого уравнения и соответствующий корень второго уравнения, а доказать, что корни этих уравнений являются взаимно обратными числами.

8.226. □ Имеем $|x^3-1|=x^3-1$, если $x^3-1\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 1$; $|x^3-1|=1-x^3$, если $x^3-1<0$, т. е. $x<1$. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x^3-1>1-x\end{cases}\quad(1)\qquad\begin{cases}x<1,\\ 1-x^3>1-x.\end{cases}\quad(2)$$

Решаем систему (1):

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ (x-1)\,(x^2+x+1)+(x-1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ (x-1)\,(x^2+x+2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow x>1.$$

Решаем систему (2):

$$\begin{cases}x<1,\\(1-x)(1+x+x^2)-(1-x)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\(1-x)(x+x^2)>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\(1-x)x(1+x)>0\end{cases}\Rightarrow x<-1 \text{ или } 0<x<1.$$

Объединяя решения систем (1) и (2), получаем ответ: $(-\infty,\ -1)\bigcup(0,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$. ■

8.227. $(-\infty,\ 3)$. **8.228.** $(-\infty,\ 0)\bigcup(6,\ \infty)$. **8.229.** $(-5,\ -2)\bigcup(2,\ 3)\bigcup(3,\ 5)$.

8.230. □ Данное неравенство можно рассматривать при условиях

$$\begin{cases}x\neq 0,\\4-x^2\geqslant 0,\\2-\sqrt{4-x^2}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\|x|\leqslant 2,\\4-x^2\neq 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow -2\leqslant x<0 \text{ или } 0<x\leqslant 2.$$

Выполним преобразования:

$$\frac{4-2\sqrt{4-x^2}+2+\sqrt{4-x^2}}{4-(\sqrt{4-x^2})^2}>\frac{1}{x};\ \frac{6-\sqrt{4-x^2}}{x^2}>\frac{1}{x}.$$

Умножив обе части неравенства на $x^2>0$, получим $6-\sqrt{4-x^2}>x$, откуда $\sqrt{4-x^2}<6-x$. Согласно указанию 5^0, это иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\6-x>0,\\4-x^2<36-12x+x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\x<6,\\x^2-6x+16>0.\end{cases}$$

Последнее неравенство верно при любом x, откуда, учитывая область определения данного неравенства, получаем ответ: $[-2,\ 0)\bigcup(0,\ 2]$. ■

8.231. $(5,\ \infty)$. **8.232.** $(-\infty,\ \sqrt[3]{2})\bigcup(\sqrt[3]{2},\ \infty)$. **8.233.** $(-\infty,\ -2)\bigcup(0,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$.

8.234. □ Преобразуем данное неравенство так:

$$\log_5 x+1-\log_x 3<\log_x 3\log_5 x\ (2-\log_3 x);$$

$$\log_5 x+1-\frac{\log_5 3}{\log_5 x}<2\log_5 3-\log_5 x.$$

Положим $\log_5 x=y$ и, решив неравенство $2y+1-\frac{\log_5 3}{y}-2\log_5 3<0$, находим $y<-1/2$ или $0<y<\log_5 3$. Итак, $\log_5 x<-1/2$ или $0<\log_5 x<\log_5 3$, откуда получаем ответ: $(0,\ \sqrt{5}/5)\bigcup(1,\ 3)$. ■

8.235. □ Пусть $\sin x=y$. Решив неравенство $\frac{y-2}{4y^2-1}>2$ методом интервалов, получим $-1/2<y<0$ или $1/8<y<1/2$. Таким образом, $-1/2<\sin x<0$ или $1/8<\sin x<1/2$. С помощью рис. Р.8.17 получаем ответ: $\left(2\pi n-\pi,\ 2\pi n-\frac{5\pi}{6}\right)\bigcup\left(2\pi n-\frac{\pi}{6},\ 2\pi n\right)\bigcup\left(\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi-\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■.

8.236. $[0{,}8;\ 1)$. **8.237.** $(0,\ 1)\bigcup(1,\ 2)$.

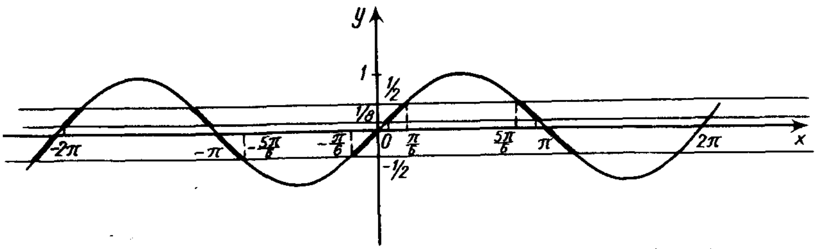

Рис. Р.8.17

8.238. □ Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}$ и перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} x^2+3x+2\geqslant 0, \\ x^2-x+1\geqslant 0, \\ x^2+3x+2<1+x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant -2;\ x\geqslant -1, \\ \sqrt{x^2-x+1}>2x. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} x\leqslant -2;\ -1\leqslant x\leqslant 0, \\ x^2-x+1\geqslant 0; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x>0, \\ x^2-x+1>4x^2. \end{cases} \quad (2)$$

Решением системы (1) являются промежутки $x\leqslant -2$ и $-1\leqslant x\leqslant 0$, а решением системы (2) — промежуток $0<x<(\sqrt{13}-1)/6$. Объединяя эти решения, получим ответ: $(-\infty,\ -2]\bigcup[-1,\ (\sqrt{13}-1)/6)$. ■

8.239. $(3,\ \infty)$. **8.240.** $(\log_4 13,\ 2]$.

8.241. □ Преобразуем данное неравенство, а затем перейдем к равносильной системе:

$$0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}\operatorname{tg} x}}>0{,}3 \Rightarrow \sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}\operatorname{tg} x}<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x>0, \\ \log_{1/\sqrt{3}}\operatorname{tg} x\geqslant 0, \\ \log_{1/\sqrt{3}}\operatorname{tg} x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x>0, \\ \operatorname{tg} x\leqslant 1, \\ \operatorname{tg} x>1/\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 1/\sqrt{3}<\operatorname{tg} x\leqslant 1.$$

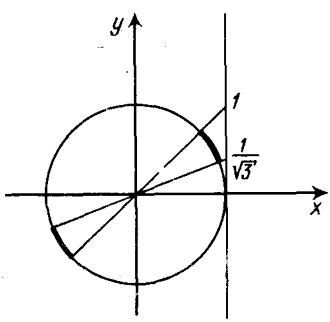

Рис. Р.8.18

С помощью рис. Р.8.18, на котором изображены единичный круг и линия тангенсов, получим ответ:

$$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.\ ■$$

8.242. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\bigcup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$

8.243. $\left(2\pi n-\frac{3\pi}{4},\ 2\pi n-\frac{\pi}{4}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$ **8.244.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$

8.245. $(\log_9 7,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$. **8.246.** -5; 1. **8.247.** $[1/2,\ 1)$.

8.248. $[1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt[5]{4})\bigcup(1,\ \sqrt{2}]$. **8.249.** $(-3,\ -1)$.

8.250. □ Здесь должны выполняться условия $4^x+1>0$ и $4^x+1\neq1$, что справедливо при любом $x\in\mathbf{R}$. Полагая $\log_3(4^x+1)=y$, получим неравенство $y+\frac{1}{y}>\frac{5}{2}$, откуда $y<1/2$ или $y>2$. Остается решить неравенства $\log_3(4^x+1)<1/2$ и $\log_3(4^x+1)>2$. Для первого из них имеем $4^x+1<3^{1/2}$; $4^x<\sqrt{3}-1$; $x<\log_4(\sqrt{3}-1)$. Аналогично решаем второе неравенство: $4^x+1>3^2$; $4^x>8$; $x\log_2 4>\log_2 8$; $x>1{,}5$. Ответ: $(-\infty,\ \log_4(\sqrt{3}-1))\bigcup\bigcup(1{,}5;\ \infty)$. ■

8.251. $(\log_3(28/27),\ \log_3 4)$. **8.252.** $(p,\ 1)\bigcup(1/p,\ \infty)$, если $0<p<1$; $(1/p,\ 1)$, если $p>1$.

8.253. □ Здесь должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases}x>0,\ x\neq1,\\ x+1>0,\ x+1\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\ x\neq1,\\ x>-1,\ x\neq0\end{cases}\Rightarrow x>0,\ x\neq1.$$

Запишем данное неравенство в виде $\log_x(x^3+1)\cdot\dfrac{1}{\log_x(x+1)}>2$ (1) и рассмотрим два случая: $0<x<1$ и $x>1$.

1) Пусть $0<x<1$; тогда, умножив обе части неравенства (1) на $\log_x(x+1)<0$, получим

$$\log_x(x^3+1)<2\log_x(x+1)\Rightarrow x^3+1>(x+1)^2\Rightarrow(x+1)(x^2-2x)>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -1<x<0 \text{ или } x>2,$$

что невозможно.

2) Пусть $x>1$; тогда, умножив обе части неравенства (1) на $\log_x(x+1)>0$, получим

$$\log_x(x^3+1)>2\log_x(x+1)\Rightarrow x^3+1>(x+1)^2\Rightarrow -1<x<0 \text{ или } x>2.$$

Ответ: $(2,\ \infty)$. ■

8.254. $(0,\ 1)\bigcup((\sqrt{5}+1)/2,\ 2)$. **8.255.** $(-\infty,\ -11)$. **8.256.** $((\sqrt{21}-3)/2,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$.

8.257. $(-\infty,\ (\sqrt{17}+1)/4]$.

8.258. □ Рассмотрим два случая: $0<x^2<1$ и $x^2>1$.

1) Пусть $0<x^2<1$, т. е. $-1<x<0$ или $0<x<1$; тогда $x-3<0$ и, значит, $|x-3|=3-x$. Учитывая область определения логарифмической функции, заключаем, что $\dfrac{2x}{3-x}>0$, откуда $0<x<3$. Итак, в данном случае нужно решить систему

$$\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{2x}{3-x}\geqslant x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{x^2-x}{3-x}\geqslant0,\end{cases}$$

которая, как легко установить, не имеет решений.

2) Пусть $x^2>1$, т. е. $x<-1$ или $x>1$. Тогда если $x<-1$, то $\dfrac{2x}{3-x}>0$, т. е. $0<x<3$, и, следовательно, решений нет. Если же $x>1$, то данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 1<x<3, \\ \dfrac{2x}{3-x}>0, \\ \dfrac{2x}{3-x}\leqslant x; \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x>3, \\ \dfrac{2x}{x-3}>0, \\ \dfrac{2x}{x-3}\leqslant x \end{cases} \quad (2)$$

Решаем систему (1):

$$\begin{cases} 1<x<3, \\ 0<x<3, \\ \dfrac{x^2-x}{3-x}\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x<3, \\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ x>3; \end{cases} \text{здесь нет решений.}$$

Решаем систему (2):

$$\begin{cases} x>3, \\ x<0;\ x>3, \\ \dfrac{5x-x^2}{x-3}\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3, \\ 0\leqslant x<3,\ x\geqslant 5 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant 5.$$

Ответ: $[5, \infty)$. ■

8.259. $(-\infty, -1/2)\bigcup(1, \infty)$. ● Рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} 4x^2+2x+1>1, \\ x^2-x>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x^2+2x+1<1, \\ x^2-x<0. \end{cases}$$

8.260. $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \dfrac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.261.** $(-1, 0)\bigcup(0, 1)\bigcup(1, 2)$. **8.262.** $(2/3, 1)\bigcup(2, 6)$.

8.263. $(3, \infty)$. **8.264.** $(-\infty, 0)\bigcup(5, \infty)$.

8.265. □ Здесь необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+1>0, \\ \log_{1/2}\sqrt{x+3}\neq 0, \\ \log_{1/2}(x+1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x>-1, \\ \sqrt{x+3}\neq 1, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq -2, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow -1<x<0 \text{ или } x>0,$$

Если $-1<x<0$, то $\sqrt{2}<\sqrt{x+3}<\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{x+3}>1$; тогда $\log_{1/2}\sqrt{x+3}<0$ (1); далее, так как $0<x+1<1$, то $\log_{1/2}(x+1)>0$ (2). Из (1) и (2) следует, что данное неравенство очевидно при $x\in(-1, 0)$.

Если же $x>0$, то $\sqrt{x+3}>\sqrt{3}>1$ и $\log_{1/2}\sqrt{x+3}<0$, а $x+1>1$ и, значит, $\log_{1/2}(x+1)<0$. Умножив обе части данного неравенства на $\log_{1/2}\sqrt{x+3}\times$ $\times\log_{1/2}(x+1)>0$, получим неравенство $\log_{1/2}(x+1)\leqslant\log_{1/2}\sqrt{x+3}$, решив которое находим $x\geqslant 1$. Ответ: $(-1, 0)\bigcup[1, \infty)$. ■

8.266. $(0, 1)\bigcup[4/3, 4)$. **8.267.** $(3, 9)$. **8.268.** $[-1, -\sqrt{2}/2]\bigcup[\sqrt{2}/2, 1]$.

8.269. □ Перейдем к основанию 3 и получим неравенство

$$8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+3^{2(\sqrt[4]{x}+1)}-3^{2\sqrt{x}}\geqslant 0.$$

Разделив обе его части на $3^{2\sqrt{x}}>0$, имеем

$$8\cdot 3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}+3^{2(\sqrt[4]{x}-\sqrt{x})}\cdot 9-1\geqslant 0.$$

Пусть $3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}=y>0$; тогда неравенство примет вид $9y^2+8y-1\geqslant 0$, откуда $y\leqslant -1$ или $y\geqslant 1/9$. Так как $y>0$, то $3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}\geqslant 3^{-2}$, т. е. $\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\geqslant -2$. Теперь положим $\sqrt[4]{x}=z\geqslant 0$ и придем к неравенству $z^2-z-2\leqslant 0$, откуда $-1\leqslant z\leqslant 2$. Поскольку $z\geqslant 0$, остается решить неравенство $0\leqslant\sqrt[4]{x}\leqslant 2$; в результате получим ответ: $[0, 16]$. ■

8.270. $(-2, -1]\bigcup[-1/2, 0]$. ● Рассмотреть три случая: $x^2+x+1>1$, $x^2+x+1<1$ и $x^2+x+1=1$.

8.271. □ Данное неравенство равносильно следующему: $|x+7|<|x^2-3x+2|$. Чтобы решить его, построим графики функций $y=|x+7|$ и $y=|x^2-3x+2|$ и с помощью рис. Р.8.19 получаем ответ: $(-\infty, -1)\bigcup(5, \infty)$. ■

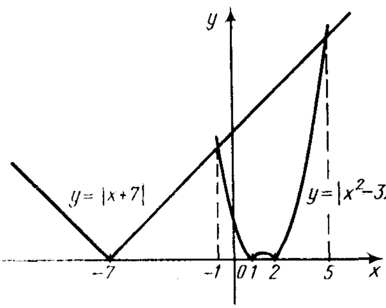

Рис. Р.8.19

Замечание. Можно воспользоваться определением модуля и решить указанное неравенство на интервалах $-\infty<x<-7$, $-7\leqslant x<1$, $1\leqslant x<2$, $2\leqslant x<\infty$.

8.272. $(0, a^2)\bigcup(1, \infty)$. **8.273.** $0<x<3^{2/(\log_3 7-\log_7 3)}$

8.274. $(0, a)\bigcup(1/a^4, \infty)$. ● Прологарифмировать обе части неравенства по основанию a.

8.275. $(-2, -1]\bigcup[-2/3, 1/3)$. ● Положить $3x^2+5x+2=y$.

8.276. $(\sqrt[5]{5}, 5)$.

8.277. $(0, 3)$. ● Записать неравенство в виде $|\log_3 x|<|\log_3 x-2|$ и решить его на интервалах $0<x<1$, $1\leqslant x<9$ и $x\geqslant 9$.

8.278. $(-\sqrt{12}, -2)\bigcup(2, \sqrt{12})$.

8.279. □ Здесь должны быть выполнены условия

$$\begin{cases}35-x^3>0,\\ 5-x>0,\\ \log_a(5-x)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\sqrt[3]{35},\\ x<5,\\ 5-x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x<\sqrt[3]{35}.$$

Так как $3<\sqrt[3]{35}<4$, то $5-x>1$. Теперь воспользуемся формулой (7.7) и в левой части данного неравенства получим $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}=\log_{5-x}(35-x^3)$. Таким образом, нужно решить неравенство

$\log_{5-x}(35-x^3)>3$ при условии $5-x>1$. Имеем $35-x^3>(5-x)^3$, откуда получаем ответ: $2<x<3$. ■

Замечание. Вместо преобразования левой части неравенства с помощью формулы (7.7) можно было рассмотреть две системы

$$\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a(35-x^3)<\log_a(5-x)^3\end{cases} \text{ и } \begin{cases}a>1,\\ \log_a(35-x^3)>\log_a(5-x)^3.\end{cases}$$

Каждая из них дает один и тот же ответ: $2<x<3$.

8.280. $(1, 2)$. **8.281.** $(-5, -7\pi/6]\bigcup[\pi/6, 5\pi/6]$. **8.282.** $[-1/3, 0)\bigcup(0, 1]$.

8.283. □ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x+5\geqslant 0,\\ \sqrt{x+5}-x+1>0,\\ \sqrt{x+5}-x+1<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geqslant -5,\\ \sqrt{x+5}>x-1,\\ \sqrt{x+5}<x.\end{cases}$$

Рассмотрим решения этой системы на интервалах $-5\leqslant x<0$, $0\leqslant x<1$ и $1\leqslant x<\infty$.

1) Пусть $-5\leqslant x<0$; тогда второе неравенство очевидно, а третье невозможно, т. е. система не имеет решений.

2) Пусть $0\leqslant x<1$; тогда второе неравенство очевидно, а третье равносильно неравенству $x+5<x^2$, т. е. $x^2-x-5>0$, откуда $x<(1-\sqrt{21})/2<-1$ или $x>(1+\sqrt{21})/2>2$; поэтому система не имеет решений.

3) Пусть $x\geqslant 1$; тогда получим систему

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x+5>x^2-2x+1,\\ x+5<x^2,\end{cases}$$

решив которую находим $(\sqrt{21}+1)/2<x<4$. Этому интервалу принадлежит только одно целое значение x, а именно $x=3$. ■

8.284. □ Сначала докажем, что $2<\log_3 2+\log_2 3$. Действительно, так как $\log_3 2\times\times\log_2 3=1$, причем $\log_3 2>0$ и $\log_2 3>0$, $\log_3 2\neq 1$, $\log_2 3\neq 1$, то $\log_3 2$ и $\log_2 3$ — это положительные взаимно обратные числа, а их сумма, как известно, больше, чем 2.

Теперь докажем, что $\log_3 2+\log_2 3<3$. Имеем $0<\log_3 2<1$, $1<\log_2 3<2$, откуда после почленного сложения находим $1<\log_3 2+\log_2 3<3$. Объединяя доказанные результаты, окончательно получим $2<\log_3 2+\log_2 3<3$. ■

8.286. $x\in(0, 1)$. **8.287.** $a\in(-\infty, 0)$.

8.288. □ Решив неравенство $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30)<0$ методом интервалов, получим, что оно выполняется при $-6<x<-5$ или $-3<x<-2$. Построим часть графика функции $y=\sin 2x$ (при $-2\pi<x<0$) и с помощью рис. Р.8.20 устанавливаем, что при $-6<x<-5$ и $-3<x<-2$ действительно имеет место неравенство $\sin 2x>0$. ■

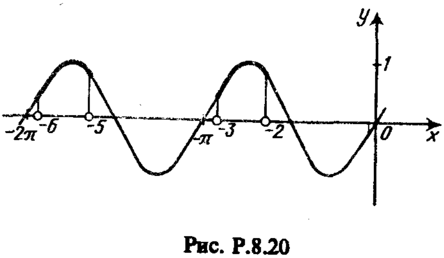

Рис. Р.8.20

8.289. $(\pi/2, 3)$.

8.290. □ Положим $A=\cos 20°\cos 40°\cos 70°$. Так как $\cos 70°=\sin 20°$, то $A=\cos 20°\sin 20°\cos 40°$. Применив дважды формулу (4.13), получим $A=$

$=\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ=\frac{1}{4}\sin 80^\circ=\frac{1}{4}\cos 10^\circ$. Таким образом, нужно показать, что $\frac{1}{8}<\frac{\cos 10^\circ}{4}<\frac{1}{4}$, т. е. $\frac{1}{2}<\cos 10^\circ<1$. Но последнее неравенство очевидно, поскольку $\frac{1}{2}=\cos 60^\circ<\cos 10^\circ<1$. Итак, мы доказали, что $\frac{1}{8}<\frac{\cos 10^\circ}{4}<\frac{1}{4}$, а значит, $\frac{1}{8}<\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<\frac{1}{4}$. ■

8.293. □ Поскольку $\operatorname{ctg} 45^\circ=1$, достаточно доказать, что $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geqslant 2$. Рассмотрим левую часть этого неравенства. Учитывая, что углы $45^\circ+\alpha$ и $45^\circ-\alpha$ — дополнительные, получаем $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)$. Согласно условию, $360^\circ\cdot n-45^\circ<\alpha<45^\circ+360^\circ\cdot n$, откуда $360^\circ\cdot n<45^\circ+\alpha<90^\circ+360^\circ\cdot n$, а значит, $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)>0$ и $\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)>0$. Таким образом, имеем сумму положительных взаимно обратных чисел, которая, как известно, не меньше, чем 2. Итак, мы доказали, что $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geqslant 2$, и тем самым требуемое неравенство доказано. ■

8.294. □ Применив формулу (4.9), получим неравенство $-\cos 5x>\sin 10x\Rightarrow\sin 10x+\cos 5x<0\Rightarrow\cos 5x\,(2\sin 5x+1)<0$. Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\cos 5x>0,\\ \sin 5x<-1/2;\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos 5x<0,\\ \sin 5x>-1/2.\end{cases}$$

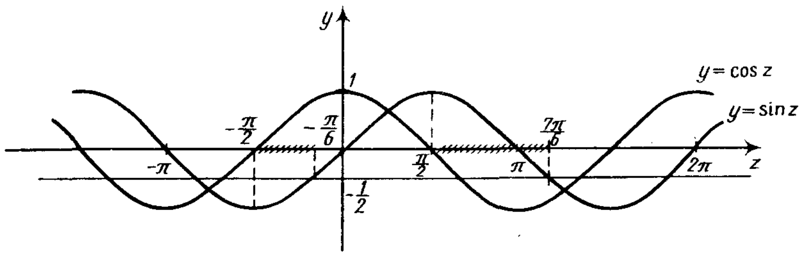

Рис. Р.8.21

Обе системы решаем одновременно. Построив на одном чертеже графики функций $y=\sin z$ и $y=\cos z$, где $z=5x$, с помощью рис. Р.8.21 устанавливаем, что $2\pi n-\frac{\pi}{2}<z<2\pi n-\frac{\pi}{6}$ или $2\pi n+\frac{\pi}{2}<z<2\pi n+\frac{7\pi}{6}$. В результате получаем ответ: $\frac{2\pi n}{5}-\frac{\pi}{10}<x<\frac{2\pi n}{5}-\frac{\pi}{30}$ или $\frac{2\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}<x<\frac{2\pi n}{5}+\frac{7\pi}{30}$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

8.295. □ Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^2 x\cdot\sin x\cos 3x+\cos^2 x\cdot\cos x\sin 3x=$$

$$=\sin^2 x\,\frac{\sin(-2x)+\sin 4x}{2}+\cos^2 x\,\frac{\sin 2x+\sin 4x}{2}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x\sin 2x+\sin^2 x\sin 4x+\cos^2 x\sin 2x+\cos^2 x\sin 4x}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2x\,(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sin 4x\,(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2x\cos 2x+\sin 4x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin 4x+\sin 4x}{2}=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Остается решить неравенство $\frac{3}{4}\sin 4x>\frac{3\sqrt{3}}{8}$, т. е. $\sin 4x>\frac{\sqrt{3}}{2}$. Полагая $4x=z$ и построив график функции $y=\sin z$ (см. рис. Р.8.12), находим $\frac{\pi}{3}+2\pi n<z<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ или $\frac{\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. Отсюда $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

8.296. □ В результате преобразований получим

$$1-\cos 2x+2\cos 2x\sin x-1<0\Rightarrow\cos 2x\ (2\sin x-1)<0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}\cos 2x>0,\\ \sin x<1/2;\end{cases}\quad(1)\qquad\begin{cases}\cos 2x<0,\\ \sin x>1/2.\end{cases}\quad(2)$$

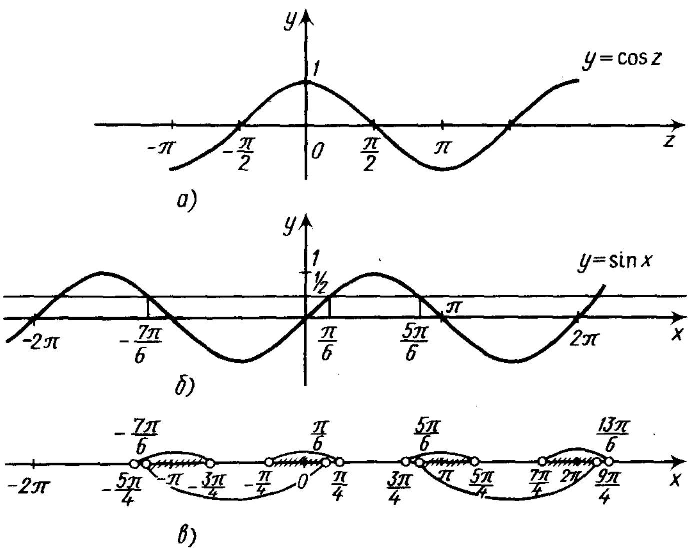

Рис. Р.8.22

Положим $2x=z$ и построим графики функций $y=\cos z$ и $y=\sin x$.
1) Используя рис. Р.8.22, *а*, *б*, находим

$$2\pi n-\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow 2\pi n-\frac{\pi}{2}<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow \pi n-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}+\pi n,$$

$$2\pi n-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n.$$

Составим следующую таблицу:

	$n=-1$	$n=0$	$n=1$
$\cos 2x>0$	$\left(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
$\sin x<1/2$	$\left(-\frac{19\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}\right)$	$\left(-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$

С помощью рис. Р.8.22, *в* устанавливаем, что система (1) имеет решение $2\pi n-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n$ и $2\pi n+\frac{5\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

2) Снова используя рис. Р.8.22, *а, б*, находим

$$2\pi n+\frac{\pi}{2}<z<\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow 2\pi n+\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow \pi n+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n,$$

$$2\pi n+\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n.$$

С помощью рис. Р.8.22, *в* устанавливаем, что система (2) имеет решение $2\pi n+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$.

Ответ: $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi n+\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

8.297. □ Последовательно преобразуя левую часть неравенства, получим

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x=\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x=$$

$$=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x=2\operatorname{ctg}2x-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x=$$

$$=\frac{2}{\operatorname{tg}2x}-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x=\frac{2\cdot 2(1-\operatorname{tg}^2 2x)}{2\operatorname{tg}2x}-4\operatorname{tg}4x=$$

$$=\frac{4}{\operatorname{tg}4x}-4\operatorname{tg}4x=\frac{4\cdot 2(1-\operatorname{tg}^2 4x)}{2\operatorname{tg}4x}=\frac{8}{\operatorname{tg}8x}=8\operatorname{ctg}8x.$$

Итак, имеем неравенство $8\operatorname{ctg}8x>8\sqrt{3}$ или $\operatorname{ctg}8x>\sqrt{3}$. Полагая $8x=z$, с помощью графика функции $y=\operatorname{ctg}z$ устанавливаем, что $\pi n<z<\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $\pi n<8x<\frac{\pi}{6}+\pi n$, т. е. $\frac{\pi n}{8}<x<\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

8.298. $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n, \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **8.299.** $\left(\pi n-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

8.300. $\left(\frac{\pi}{18}(12n-7), \frac{\pi}{18}(12n+1)\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

ГЛАВА 9

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

9.001. а) □ Имеем $A_x^2=x(x-1)$, $C_x^{x-1}=x$. Отсюда $x^2(x-1)=48$; $x^2(x-1)=4^2\cdot 3$; следовательно, $x=4$ ■; б) $x=7$.

9.002. а) $x=5$; б) $x=5$. **9.003.** а) $x=5$; б) $x_1=6$, $x_2=11$. **9.004.** а) $x=8$; б) $x=7$.

9.005. а) $x=5$; б) $x=7$.

9.007. □ а) Имеем $P_{n-1}=(n-1)!$; $P_{n-2}=(n-2)!$. Таким образом,

$$(n-1)((n-1)!+(n-2)!)=(n-1)(n-2)!(n-1+1)=n!=P_n.$$

б) Левая часть искомого тождества есть

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!},$$

а правая часть

$$\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}.$$

Итак, тождество доказано. ■

9.008. 240; 3-е слагаемое. **9.009.** $C_{10}^8a^2=45a^2$. **9.010.** $15/28<x<10/13$. **9.011.** 924.

9.012. $252ab$. **9.013.** 1547/1024.

9.014. □ Биномиальные коэффициенты 4-го и 2-го слагаемых равны соответственно C_m^3 и m. Следовательно, $\frac{m(m-1)(m-2)}{3!m}=5$ или $(m-1)(m-2)=30$, откуда $m=7$. Тогда 4-е слагаемое разложения имеет вид $T_4=C_7^3 2^{2(x-1)}\times\frac{1}{2^x}$ и приходим к уравнению $C_7^3 2^{x-2}=140$, откуда находим $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}\cdot 2^{x-2}=140$; $2^{x-2}=4$; $x=4$. ■

9.015. 240. **9.016.** 5. **9.017.** 55 440.

9.018. □ Из семи человек следует выбрать и председателя, и его заместителя. Это можно сделать $A_7^2=42$ способами. ■

9.019. 1140.

9.020. □ Для каждого звукосочетания клавиши нажимаются одновременно, поэтому для k звуков имеем C_{10}^k звукосочетаний. Таким образом, искомое количество есть $C_{10}^3+C_{10}^4+\ldots+C_{10}^{10}=C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=2^{10}-1-10-45=968$. ■

9.021. 253. **9.022.** 64. **9.023.** 240.

9.024. □ Первую цифру можно было выбрать пятью способами, вторую — также пятью, т. е. для двузначного числа имелось 5^2 вариантов. Значит, всего трехзначных чисел в этих условиях было $5^3=125$ и удачной попытке предшествовало 124 неудачных. ■

9.025. 32 760. **9.026.** 25!/20!.

9.027. □ Первую ладью можно поставить на любое из 64 полей. При этом 14 полей оказываются под угрозой, т. е. для второй ладьи остается любое из $64-15=49$ полей. Таким образом, общее число вариантов составляет $64\cdot 49=3136$. ■

9.028. 896. **9.029.** 8!.

9.030. □ Имеем $A_{x+1}^{y+1}=(x+1)!/(x-y)!$, $P_{x-y}=(x-y)!$, $P_{x-1}=(x-1)!$, откуда $\frac{(x+1)!\,(x-y)!}{(x-y)!\,(x-1)!}=72$ или $x(x+1)=72$, т. е. $x=8$. Учитывая, что $x-y>0$ и y — целое число, получаем $y=0$, $y=1$, ..., $y=7$. ■

9.031. □ Очевидно, что при $x=10$ левая часть уравнения на 1 меньше суммы биномиальных коэффициентов разложения бинома $(a+b)^{10}$. Эта сумма равна 1024. Следовательно, $x=10$ является решением данного уравнения. Других решений нет, так как при $x<10$ не существует C_x^{x-10}, а при $x>10$ левая часть уравнения больше 1023. ■

9.032. $x=7$.

9.033. а) □ Из второго уравнения имеем $(x+1)!=720$. Так как $720=6!$, то $x=5$. Учитывая, что $C_y^{y-x}=C_y^x$, перепишем первое уравнение так: $A_y^5:P_4+C_y^5=126$. Но $A_y^5:P_4=5C_y^5$, откуда $6C_y^5=126$ или $y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=21\cdot 120$. Далее имеем $21\cdot 120=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$, т. е. $y=7$ ■; б) $x=5$, $y=3$.

9.034. а) $x=8$, $y=3$; б) $x=7$, $y=3$. **9.035.** а) $x=7$, $y=3$; б) $x=7$, $y=3$.

9.036. □ а) Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}.$$

Но $C_{n+1}^k=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$, и тождество доказано. ■

9.037. 6. **9.038.** 7290; 3-е слагаемое. **9.039.** $x_1=\sqrt{2}/4$, $x_2=5\sqrt{5}$.

9.040. □ Четвертое слагаемое от начала имеет вид $T_4=C_n^3 n^{n-3}\frac{1}{n^3}$, а четвертое слагаемое от конца — вид $T_{n-2}=C_n^{n-3}n^3\frac{1}{n^{n-3}}$. Следовательно, $T_4T_{n-2}=$ $=(C_n^3)^2=14\,400$, откуда $C_n^3=120$. Далее имеем $n(n-1)(n-2)=720$; $n(n-1)(n-2)=10\cdot 9\cdot 8$; $n=10$. Итак, наибольший биномиальный коэффициент, входящий в слагаемое, одинаково удаленное от концов разложения, есть $C_{10}^5=252$. ■

9.041. $U_3=10z^2$, $V_4=20z^2$.

9.042. □ Указанные в условии коэффициенты равны C_n^2. Имеем $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=$ $=9900$ или $n(n-1)=100\cdot 99$, откуда $n=100$. Тогда $T_{k+1}=C_{100}^k 3^{(100-k)/4}4^{k/3}$; согласно условию, $k/3$ и $(100-k)/4$ — числа целые, т. е. k делится на 12. Для $n=100$ таких чисел имеется $\left[\frac{100}{12}\right]+1=9$. ■

9.043. $x=2$. **9.044.** $30!/(10!)^3$.

9.045. □ Искомые числа оканчиваются пятью или нулем. Если на последнем месте стоит 0, то таких чисел $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24$; если же на последнем месте стоит 5, то на первом не может оказаться 0 (искомые числа — четырехзначные); в этом случае таких чисел $A_4^3-A_3^2=18$. Итак, условию задачи удовлетворяют 42 числа. ■

9.046. $9!$.

9.047. ☐ Убрав первый том, получим 29! перестановок книг. Первый том можно поставить рядом со вторым двумя способами; следовательно, в $2\cdot 29!$ случаях первый и второй тома стоят рядом. Так как всего имеется 30! перестановок, то в $30!-2\cdot 29!$ из них первый и второй тома не стоят рядом. ■

9.048. 2520. **9.049.** $12!/(2!)^6$. **9.050.** 204. **9.051.** $2\cdot 9!$.

9.052. ☐ Участников первой партии можно выбрать C_{16}^2 способами, а участников второй C_{14}^2 способами. Так как порядок выбора пар не имеет значения, то участников двух партий можно выбрать $C_{16}^2 C_{14}^2/2!$ способами, участников трех партий $C_{16}^2 C_{14}^2 C_{12}^2/3!$ способами, ..., и, наконец, участников восьми партий $C_{16}^2 C_{14}^2 C_{12}^2 \dots C_2^2/8! = 15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = 2\,027\,025$ способами. ■

9.053. 5^6; $6\cdot 4^5$. **9.054.** 2^{10}.

9.055. ☐ Первый пассажир может выйти на любой из 16 остановок, так же как и второй, т. е. для двух пассажиров имеется 16^2 возможностей. Следовательно, для 100 пассажиров существует 16^{100} способов. ■

9.056. 40. **9.057.** $80!/(3!\cdot 75!)$. **9.058.** $10!/48$. **9.059.** 3^6; $6!$. **9.060.** 2304. **9.061.** 15 368.

9.062. ☐ Имеем $C_{15}^4 C_{10}^3 C_{12}^5 C_{20}^1 = 15!\cdot 10/7!$. ■

9.063. $28!/(7!)^4$. **9.064.** 15 015. **9.065.** 3^5. **9.066.** 10^8.

9.067. ☐ Находим $C_{16}^3 C_{13}^3 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^1 C_1^1 = 16!/(2^6\cdot 3^2)$. ■

9.068. 420. **9.069.** 1800. **9.070.** 105.

9.071. ☐ Букв, содержащих ровно k символов, имеется 2^k; значит, всего можно изобразить $2^1+2^2+\dots+2^5 = 2\,(2^5-1)/(2-1) = 62$ буквы. ■

9.072. $9\cdot 10^6$.

9.073. ☐ Отделим границей деревья, предназначенные для посадки в течение каждого дня. Таких границ две, и для них имеется 9 мест (количество промежутков между десятью деревьями). Имеем $C_9^2 = 36$. ■

9.074. 60.

9.075. ☐ Воспользуемся тождеством $1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\dots+C_n^n = 2^n$ и перепишем его n раз следующим образом:

$$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\dots+C_n^n = 2^n-1,$$
$$C_n^2+C_n^3+\dots+C_n^n = 2^n-1-C_n^1,$$
$$C_n^3+\dots+C_n^n = 2^n-1-C_n^1-C_n^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_n^n = 2^n-1-C_n^1-C_n^2-\dots-C_n^{n-1}.$$

Учитывая, что $1 = C_n^n$, сложим все написанные равенства:

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n = n2^n - nC_n^n - (n-1)\,C_n^{n-1} - (n-2)\,C_n^2 - \dots - C_n^{n-1}.$$

Обозначив числитель заданной дроби через S, получим $S = n2^n - S$, откуда $S = n2^{n-1}$, т. е. тождество доказано. ■

9.077. ☐ Сначала покажем, что $nP_n = (n+1)!-n!$. Действительно, $nP_n = n\cdot n! = n\cdot n! + n! - n! = (n+1)! - n!$. Отсюда имеем $1\cdot 1! = 2!-1!$; $2\cdot 2! = 3!-2!$, ..., $n\cdot n! = (n+1)!-n!$. Теперь, суммируя все эти равенства, получаем $P_1+2P_2+\dots+nP_n = (n+1)!-1$. ■

9.078. ☐ Перепишем требуемое неравенство так:

$$\frac{(2n+x)\dots(n+x+1)}{n!}\cdot\frac{(2n-x)\dots(n-x+1)}{n!} \leqslant \left(\frac{2n\dots(n+1)}{n!}\right)^2. \qquad (1)$$

Умножив обе части неравенства (1) на $(n!)^2$ и разделив на $2n\dots(n+1)\,(2n-x)\dots(n-x+1)$, получим

$$\frac{(2n+x)(2n+x-1)\dots(n+x+1)}{2n(2n-1)\dots(n+1)} \leqslant \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{(2n-x)(2n-x-1)\dots(n-x+1)}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) очевидно, так как все дроби слева не превосходят соответствующих дробей справа: $\frac{2n+x}{2n} \leqslant \frac{2n}{2n-x}$, $\frac{2n-1+x}{2n-1} \leqslant \frac{2n-1}{2n-1-x}$ и т. д. Итак, исходное неравенство доказано. ■

9.079. 2^{36}.

9.080. □ Рассмотрим отношение двух соседних слагаемых T_{k+2}/T_{k+1}. Так как $T_{k+1}=C_{20}^{k}\sqrt{2^{k}\cdot 5^{20-k}}$, $T_{k+2}=C_{20}^{k+1}\sqrt{2^{k+1}\cdot 5^{19-k}}$, то $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{20-k}{k+1}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Эта функция монотонно убывает с ростом k; слагаемые возрастают, если $T_{k+2}/T_{k+1}>1$. Решим неравенство $\frac{20-k}{k+1}\sqrt{\frac{2}{5}}>1$; имеем $(\sqrt{2}+\sqrt{5})\,k<20\sqrt{2}-\sqrt{5}$; $k<\frac{20\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=7\sqrt{10}-15\approx 7$, т. е. при $k=7$ получим наибольшее слагаемое $T_9=C_{20}^{9}2^4\cdot 5^6=314\,925\cdot 10^5$. ■

9.081. $5/8<x<20/21$.

9.082. □ Добавим к данному выражению $1+(1+x)+(1+x)^2+\dots+(1+x)^8$. Очевидно, что при этом коэффициент при x^9 не изменится. Но $1+(1+x)+\dots$ $\dots+(1+x)^{14}=\frac{(1+x)^{15}-1}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{15}-1}{x}$, откуда имеем $T_{10+1}=C_{15}^{10}\cdot 1\cdot x^{10}=$ $=C_{15}^{5}x^{10}$. Итак, искомый коэффициент равен 3003. ■

9.083. $2\,(6!)^2$. **9.084.** 2^{200}.

9.085. □ 1) Каждый материал можно доставить восемью способами, поэтому всего имеется 8^6 способов.

2) Чтобы определить, в скольких случаях на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов, найдем, сколькими способами можно доставить на этот этаж один материал и не доставить ни одного. Если на восьмой этаж не доставлен ни один материал, то на остальные 7 этажей доставлены 6 материалов, что можно сделать 7^6 способами; если же один из материалов доставлен на восьмой этаж, то на остальные 7 этажей доставлены 5 материалов, что можно сделать $6\cdot 7^5$ способами; в остальных $8^6-7^6-6\cdot 7^5=8^6-13\cdot 7^5$ случаях на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов. ■

9.086. $2\,(11!)^2$.

9.087. □ Пусть имеется $10-x$ книг по математике и $10+x$ книг по логике. Из условия следует, что $x\leqslant 5$. Число различных наборов составляет $C_{10-x}^{5}\cdot C_{10+x}^{5}$; при $x=0$ имеем $(C_{10}^{5})^2$. Но $C_{10-x}^{5}\cdot C_{10+x}^{5}\leqslant (C_{10}^{5})^2$ (см. задачу 9.078), что и требовалось установить. ■

9.088. □ Группы могут быть составлены $C_9^2C_7^3C_4^4$ способами, а распределены по этажам A_{10}^{3} способами. Таким образом, искомое число составляет $A_{10}^{3}C_9^2C_7^3=10!/4$. ■

9.089. □ В предложение обязательно входят подлежащее и сказуемое. Каждое из слов «улыбающийся», «босиком» и словосочетание «на рыбалку» можно как включать, так и не включать в предложение, т. е. имеем $2^3=8$ предложений. Добавив в каждое из них слово «утром», получим еще 8 предложений, из которых можно получить еще 8 добавлением слова «ранним». Так как среди этих 24 предложений есть и исходное, то всего можно составить 23 новых предложения. ■

9.090. □ Существует 8! различных составов партнеров и 2^8 распределений цветов фигур; поэтому количество исходов жеребьевки равно $2^8\cdot 8!$. ■

ГЛАВА 10

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

10.001. □ Для упрощения воспользуемся формулами (1.9), (1.10):

$$A=\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\frac{m^4-2m^2+1}{4m^2}}=\frac{m}{m^2+1}\sqrt{\frac{m^4+2m^2+1}{4m^2}}=$$

$$=\frac{m}{m^2+1}\sqrt{\frac{(m^2+1)^2}{4m^2}}=\frac{m\,|m^2+1|}{(m^2+1)\,2\,|m|}=\frac{m}{2\,|m|},$$

поскольку $m^2+1>0$ при любом m, а $|m^2+1|=m^2+1$. Теперь, используя определение модуля и учитывая, что $m\neq0$, получаем ответ: $A=1/2$, если $m>0$; $A=-1/2$, если $m<0$. ■

10.002. $\sqrt[4]{b-a}$, где $b>a$. **10.003.** $\operatorname{ctg}33°$. **10.004.** $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$.

10.005. $x_{1,\,2}=\frac{-3\pm\sqrt{16m-7}}{4}$ при $m\geqslant\frac{7}{16}$; $x_1=x_2=-\frac{3}{4}$ при $m=\frac{7}{16}$.

10.006. □ Находим область определения уравнения: $x+2>0$, откуда $x>-2$, и $x\neq0$, т. е. $(-2,\ 0)\bigcup(0,\ \infty)$. Полагая $\frac{\sqrt{x+2}}{|x|}=y$, получаем уравнение $y+\frac{1}{y}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ или $3y^2-4\sqrt{3}y+3=0$. Отсюда $y_{1,\,2}=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-9}}{3}=$ $=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{3}$; $y_1=\sqrt{3}$, $y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Далее решаем два уравнения:

1) $\frac{\sqrt{x+2}}{|x|}=\sqrt{3}$; $\frac{x+2}{x^2}=3$; $3x^2-x-2=0$; $x_1=-2/3$, $x_2=1$.

Это рациональные корни и они входят в область определения уравнения.

2) $\frac{\sqrt{x+2}}{|x|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{x+2}{x^2}=\frac{1}{3}$; $x^2-3x-6=0$; $x_{1,\,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{2}$.

Это иррациональные корни, а значит, они не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x_1=-2/3$, $x_2=1$. ■

10.007. $x=1$. **10.008.** $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=1$.

10.009. □ Имеем $|x+1|=0$ при $x=-1$, а $|x-1|=0$ при $x=1$. Далее будем решать данное уравнение на интервалах $(-\infty,\ -1)$, $[-1,\ 1)$, $[1,\ \infty)$.

1) Если $x<-1$, то $-x-1-x+1=2x^3$; $2x^3+2x=0$; $x\,(x^2+1)=0$. Так как $x^2+1>0$ при любом x, то $x=0$; это значение не входит в интервал $(-\infty,\ -1)$.

2) Если $-1\leqslant x<1$, то $x+1-x+1=2x^3$; $2x^3=2$; $x^3=1$; $x=1\notin[-1,\ 1)$.

3) Если $x\geqslant1$, то $x+1+x-1=2x^3$; $x^3-x=0$; $x\,(x^2-1)=0$; $x\,(x-1)\,(x+1)=0$; $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Интервалу $[1,\ \infty)$ принадлежит только значение $x=1$.

Итак, получаем ответ: $x=1$. ■

10.010. $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_{5,6}=\pm 1$, $x_7=0$.

10.011. □ Так как $x^2=|x|^2$, то решаем неравенство $|x|^2-4|x|+3>0$. Его левая часть есть квадратный трехчлен относительно $|x|$, который обращается в нуль при $|x|=1$ и $|x|=3$. Используя метод интервалов, находим $|x|<1$ или $|x|>3$. Отсюда следует, что $-1<x<1$, $x<-3$; $x>3$. **Ответ:** $(-\infty, -3)\bigcup(-1, 1)\bigcup(3, \infty)$. ■

10.012. $(-3, 2)\bigcup(2, 3)$. **10.013.** $(-\infty, -2/7]\bigcup(3, \infty)$. **10.014.** $(2, 3)$. **10.015.** $(2, 4)\bigcup(4, 6)$. **10.016.** $(0, \infty)$.

10.017. □ Имеем $|x+1|=0$ при $x=-1$, $|x+2|=0$ при $x=-2$. Далее будем решать данное неравенство на интервалах $(-\infty, -2)$, $[-2, -1)$ и $[-1, \infty)$.

1) Если $x<-2$, то неравенство примет вид $-x-1>-2x-4$, откуда $x>-3$. Значит, $-3<x<-2$ (1).

2) Если $-2\leqslant x<-1$, то $-x-1>2x+4$ или $3x<-5$, т. е. $x<-5/3$. Поэтому $-2\leqslant x<-5/3$ (2).

3) Если $x\geqslant -1$, то $x+1>2x+4$, откуда $x<-3$. В этом случае решений нет. Объединяя решения (1) и (2), получаем ответ: $(-3, -5/3)$. ■

10.018. □ В зависимости от различных сочетаний знаков x и y данная система распадается на четыре системы:

$$1)\ \begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ 2x-3y=1 & \\ x+2y=4 & \Big| -2 \Big|; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ 2x-3y=1 \\ -2x-4y=-8; \end{cases}$$

$$-7y=-7;\ y=1>0,\ x=4-2y=2>0;$$

решение системы $(2; 1)$;

$$2)\ \begin{cases} x<0, \\ y<0, \\ 2x+3y=1, & \\ -x+2y=4 & \Big| 2 \Big|; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ y<0, \\ 2x+3y=1 \\ -2x+4y=8 \end{cases}$$

$$7y=9;\ y=9/7>0 \text{ — решений нет;}$$

$$3)\ \begin{cases} x>0, \\ y<0, \\ 2x+3y=1, & \\ x+2y=4 & \Big| -2 \Big|; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ y<0, \\ 2x+3y=1, \\ -2x-4y=-8; \end{cases}$$

$$-y=-7;\ y=7>0 \text{ — решений нет;}$$

$$4)\ \begin{cases} x<0, \\ y>0, \\ 2x-3y=1, & \\ -x+2y=4 & \Big| 2 \Big|; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ y>0, \\ 2x-3y=1, \\ -2x+4y=8; \end{cases}$$

$$y=9;\ x=2y-4=14>0 \text{ — решений нет.}$$

Ответ: $(2; 1)$. ■

10.019. (3; 2). ● Сложить и вычесть почленно данные уравнения.

10.020. $(-2; -1)$, $(2; 1)$. **10.021.** $(0; 2)$, $(2; 0)$. **10.022.** $(1/2; \sqrt{2}/5)$.

10.024. □ Так как $x>1$, то $\log_3 x>0$. Прологарифмировав первое неравенство по основанию 9, получим $\log_9 x\cdot\log_9\log_3 x\leqslant 0$. Далее, при $x>1$ имеем $\log_9 x>0$; значит, $\log_9\log_3 x\leqslant 0$, откуда $0<\log_3 x\leqslant 1$, т. е. $1<x\leqslant 3$. Находим целые значения $x\in(1, 3]$ и получаем ответ: $x_1=2$, $x_2=3$. ■

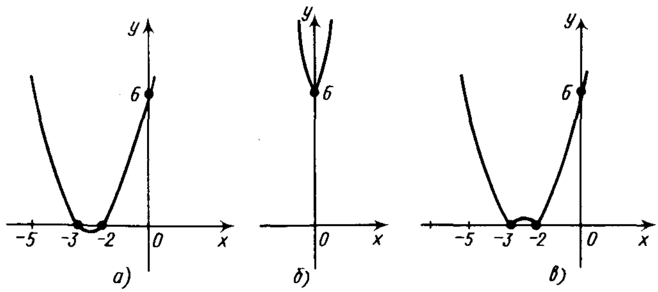

Рис. Р.10.1

10.025. □ а) Находим корни функции: $x^2+5x+6=0$ при $x_1=-3$ и $x_2=-2$; затем найдем точку пересечения параболы с осью $Oy: y=6$ при $x=0$. Кроме того, определим координаты вершины параболы: $x_в=-(3+2)/2=$ $=-2{,}5$; $y_в=6{,}25-11{,}5+6=-0{,}25$. Строим параболу по точкам $(-3; 0)$, $(-2; 0)$, $(-2{,}5; -0{,}25)$, $(0; 6)$ и симметричной последней точке $(-5; 6)$ (рис. Р.10.1, *а*).

б) Функция $f(x)$ — четная, так как $f(-x)=f(x)$, а потому ее график симметричен относительно оси Oy. Чтобы построить этот график, нужно взять часть полученной выше параболы при $x\geqslant 0$ и отобразить эту часть симметрично относительно оси Oy (рис. Р.10.1, *б*).

в) Отметим, что $y=|x^2+5x+6|\geqslant 0$ при любом x. График данной функции можно получить из графика функции $y=x^2+5x+6$. При тех значениях x, где $y\geqslant 0$, указанный график сохраняется, а при тех значениях x, где $y<0$, он отображается симметрично относительно оси Ox вверх (рис. Р.10.1, *в*).

г) Имеем $y=|x^2+5|x|+6|=x^2+5|x|+6$, так как $x^2+5|x|+6\geqslant 0$ при любом x. График этой функции изображен на рис. Р.10.1, *б*. ■

10.026. а) — г) См. соответственно рис. Р.10.2, *а—г*.

10.028. □ Запишем функцию в виде

$$y=\begin{cases}x+1 & \text{при } x>0,\\ x-1 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Строим графики линейных функций при указанных значениях аргумента x. Точки $(0; 1)$ и $(0; -1)$ графику не принадлежат (рис. Р.10.3). ■

10.032. □ I способ. Имеем $y=|x+2|+|x-2|$. Воспользуемся определением модуля и построим график на различных участках числовой оси: если $x<-2$, то $y=-x-2-x+2=-2x$; если $-2\leqslant x<2$, то $y=x+2-x+2=4$; если $x\geqslant 2$, то $y=x+2+x-2=2x$ (рис. Р.10.4, *а*).

II способ. Построим на одном чертеже графики функций $y=|x+2|$ и $y=|x-2|$, а затем сложим их графически (рис. Р.10.4, *б*). ■

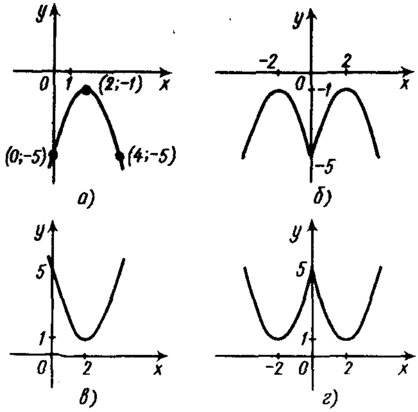

Рис. Р.10.2

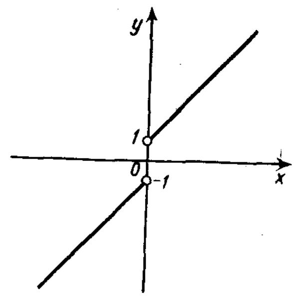

Рис. Р.10.3

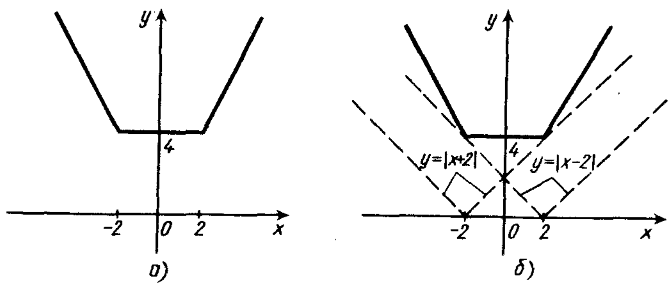

Рис. Р.10.4

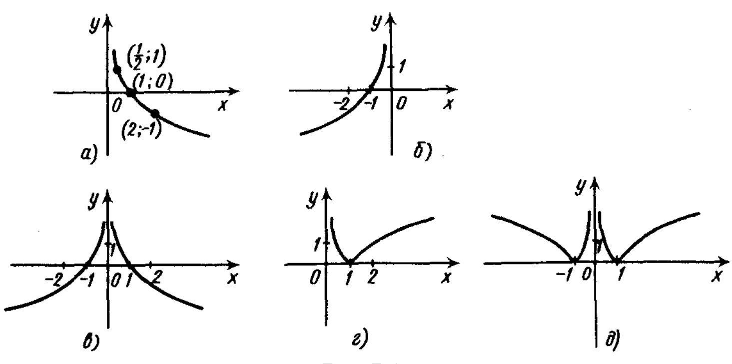

Рис. Р.10.5

10.038. □ а) Строим график по точкам (1; 0), (1/2; 1), (2; −1) (рис. Р.10.5, *а*).

б) Функция определена, если $-x>0$, т. е. $x<0$. График функции $y=\log_{1/2}(-x)$ симметричен графику функции $y=\log_{1/2}x$ относительно оси Oy (рис. Р.10.5, *б*).

в) Функция $y=\log_{1/2}|x|$ — четная; ее область определения $x\neq0$. График функции состоит из двух кривых, симметричных относительно оси Oy (рис. Р.10.5, *в*). ■

г) — д) См. рис. Р.10.5, *г, д*.

10.039. □ Функция $y=2^{1/x}$ определена при $x\neq 0$, причем $2^{1/x}>0$ во всей области определения. Если $x\to 0$ справа, то $1/x\to +\infty$, т. е. $2^{1/x}\to +\infty$; если же $x\to 0$ слева, то $1/x\to -\infty$, т. е. $2^{1/x}\to 0$; далее, если $x\to +\infty$, то $1/x\to 0$ и $1/x>0$, т. е. $2^{1/x}\to 1$ (причем $2^{1/x}>1$); если же $x\to -\infty$, то $1/x\to 0$ и $1/x<0$, т. е. $2^{1/x}\to 1$ (причем $2^{1/x}<1$). Искомый график изображен на рис. Р.10.6. ■

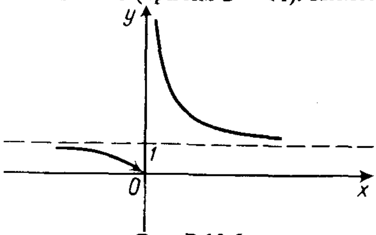

Рис. Р.10.6

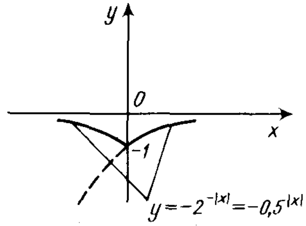

Рис. Р.10.7

10.040. См. рис. Р.10.7.

10.042. □ Здесь $x>0$. Если $\lg x\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 1$, то $y=2\lg x$; если же $\lg x<0$, т. е. $0<x<1$, то $y=0$. Искомый график изображен на рис. Р.10.8. ■

10.043. □ Имеем $y=\sqrt{10^{2\lg|x|}}=10^{\lg|x|}=|x|$ при условии $x\neq 0$. Таким образом, если из графика функции $y=|x|$ удалить точку (0; 0), то получим искомый график (рис. Р.10.9). ■

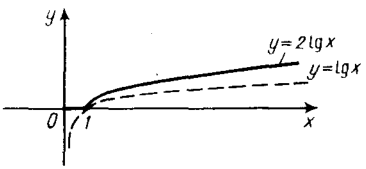

Рис. Р.10.8

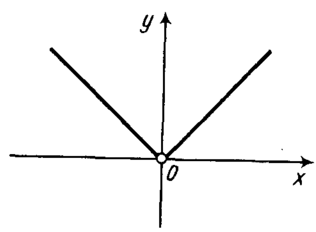

Рис. Р.10.9

10.044. □ Функция определена, если $x>0$ и $x\neq 1$. При этих значениях x имеем $y=2$. Искомый график изображен на рис. Р.10.10. ■

10.048. □ Найдем область определения функции: $\dfrac{x^2-4}{x-2}>0\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2,\\ x+2>0\end{cases}\Rightarrow -2<$ $<x<2$; $x>2$. При этих значениях x функция имеет вид $y=\log_2(x+2)$. Ее график изображен на рис. Р.10.11. ■

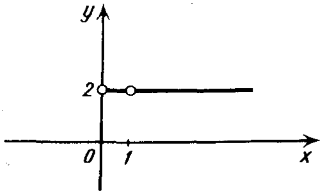

Рис. Р.10.10

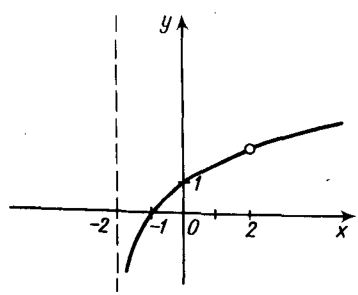

Рис. Р.10.11

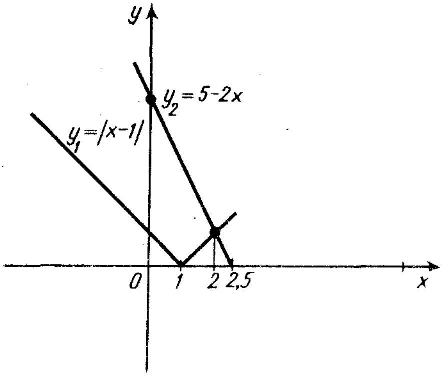

Рис. Р.10.12

10.052. □ Запишем уравнение в виде $|x-1|=5-2x$. Так как $|x-1|\geqslant 0$ при любых x, то и $5-2x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 2{,}5$. Рассмотрим функции $y_1=|x-1|$, $y_2=5-2x$ и построим на одном чертеже их графики при $x\leqslant 2{,}5$ (рис. Р.10.12). Решением данного уравнения является абсцисса точки пересечения данных графиков. С помощью рис. Р.10.12 устанавливаем, что $x=2$. ■

10.053. □ Так как $b^2-4ac=0$ и $a>0$, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет равные корни: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Значит, $y=$ $=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|$; имеем $y=0$ при $x=-\dfrac{b}{2a}$. Строим график функции $y=\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ (прямую), а затем часть этой прямой при $x<-\dfrac{b}{2a}$ отображаем симметрично относительно оси Ox вверх (рис. Р.10.13). Отметим, что рис. Р.10.13 иллюстрирует случай, когда $\dfrac{b}{2a}>0$; если же $\dfrac{b}{2a}<0$, то точка пересечения прямой с осью Ox окажется правее точки $x=0$. ■

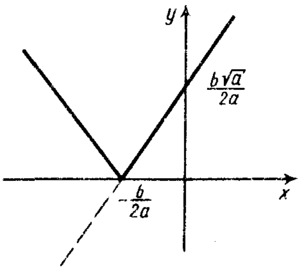

Рис. Р.10.13

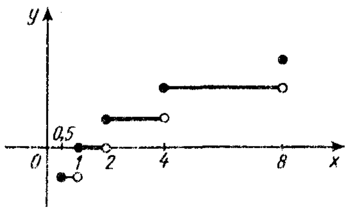

Рис. Р.10.14

10.054. □ Согласно условию, $y=[\log_2 x]$. Если $x=0{,}5$, то $[\log_2 0{,}5]=-1$; такое же значение принимает функция при $x\in[0{,}5;\ 1)$; если $x=1$, то $[\log_2 1]=0$, а также при всех $x\in[1,\ 2)$; если $x=2$, то $[\log_2 2]=1$, а также при всех $x\in[2,\ 4)$; если $x=4$, то $[\log_2 4]=2$, а также при всех $x\in[4,\ 8)$; наконец, если $x=8$, то $[\log_2 8]=3$. Искомый график изображен на рис. Р.10.14. ■

10.055. Да.

10.056. □ Сначала построим график функции $y=\lg x^2=2\lg|x|$ (рис. Р.10.15). Прежде чем построить график функции $y=\lg^2 x$, отметим, что она определена при $x>0$, а ее значения $y>0$. Далее находим производную $y'=2\lg x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}$ и исследуем функцию на экстремум. Имеем $y'=0$ при $x=1$;

если $x<1$, то $y'<0$, а если $x>1$, то $y'>0$. Итак, $x=1$ — точка минимума, причем $y_{\min}=0$. Теперь построим график функции $y=\lg^2 x$ (рис. Р.10.15). ■

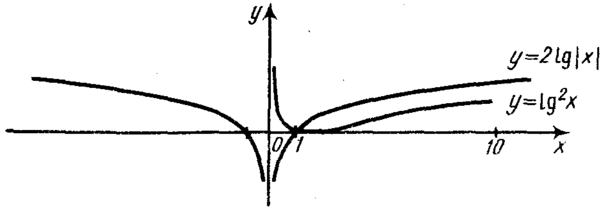

Рис. Р.10.15

10.057. □ I способ. Построим графики заданных функций (рис. Р.10.16).

1) Функция $y=4^x-3\cdot 2^x$ обращается в нуль, когда $2^x(2^x-3)=0$, т. е. $2^x-3=0$, откуда $x=\log_2 3$. Если $x<\log_2 3$, то $y<0$; если же $x>\log_2 3$, то $y>0$. Далее, если $x\to+\infty$, то $y\to\infty$; если же $x\to-\infty$, то $y\to 0$. Исследуем данную функцию на экстремум. Находим $y'=2^{2x}\ln 2\cdot 2-3\cdot 2^x\ln 2=$ $=2^x\ln 2\,(2^x\cdot 2-3)$; $y'=0$, если $2^{x+1}-3=0$, т. е. $x=\log_2 3-1$. При $x<\log_2 3-1$ имеем $y'<0$, а при $x>\log_2 3-1$ имеем $y'>0$; значит, $x=$ $=\log_2 3-1$ — точка минимума. Найдем соответствующее значение функции: $y_{\min}=2^{\log_2 3-1}(2^{\log_2 3-1}-3)=3\cdot\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1}{2}-3\right)=-\frac{9}{4}=-2\frac{1}{4}$.

2) Функция $y=-(5\cdot 2^{-x}+1)<0$ при любом x. Исследуем ее на экстремум: $y'=-5\cdot 2^{-x}\ln 2\cdot(-1)=5\cdot 2^{-x}\ln 2>0$ при любом x, т. е. функция не имеет экстремумов и возрастает на всей числовой оси. Найдем значение функции при $x=\log_2 3-1$: $y=-(5\cdot 2^{1-\log_2 3}+1)=-(5\cdot 2\cdot 3^{-1}+1)=-4\frac{1}{3}$. Из рис. Р.10.16 видно, что построенные кривые не имеют общих точек.

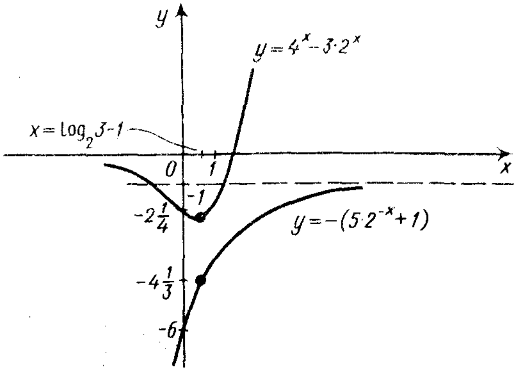

Рис. Р.10.16

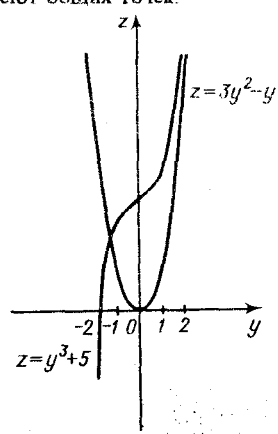

Рис. Р.10.17

II способ. Если кривые имеют общие точки, то уравнение $4^x - 3\cdot 2^x = -(5\cdot 2^{-x}+1)$ (1) имеет решение. Решим это уравнение. Полагая $2^x = y > 0$, получим $y^2 - 3y = -\frac{5}{y} - 1$ или $y^3 - 3y^2 + y + 5 = 0$ (2). Запишем последнее уравнение в виде $y^3 + 5 = 3y^2 - y$ и решим его графически. Построим на одном чертеже графики функций $z = y^3 + 5$ и $z = 3y^2 - y$ (рис. Р.10.17). При $y > 0$ функция $y^3 + 5$ возрастает быстрее, чем $3y^2 - y$, и графики не пересекаются. Уравнение (2) имеет единственный корень $y = -1 < 0$, но он не удовлетворяет уравнению (1). Итак, уравнение (1) не имеет решений, т. е. графики заданных функций не имеют общих точек. ■

10.058. (2; 2), (−3; 57).

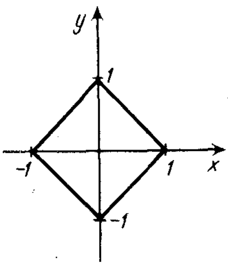

Рис. Р.10.18

10.059. □ Перепишем данное соотношение в виде $|y| = 1 - |x|$. В силу того, что $|y| \geqslant 0$, имеем $1 - |x| \geqslant 0$, откуда $|x| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Искомый график симметричен относительно оси Oy, поскольку y не зависит от знака x, и симметричен относительно оси Ox, так как $y = \pm|1 - |x||$. Достаточно построить график при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а затем отобразить его симметрично относительно осей координат (рис. Р.10.18). ■

10.061. См. рис. Р.10.19.

10.062. □ Заданное равенство определено при $x \neq 0$. Так как $|y| \geqslant 0$, то $\log_{1/2}|x| \geqslant 0$; значит, $|x| \leqslant 1$, откуда $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Искомый график симметричен относительно осей Ox и Oy. Сначала построим график при $x > 0$, $y \geqslant 0$, а затем отобразим его симметрично относительно осей координат (рис. Р.10.20). ■

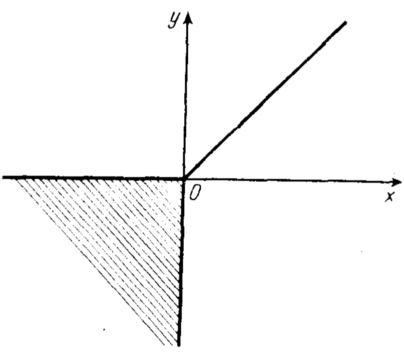

Рис. Р.10.19

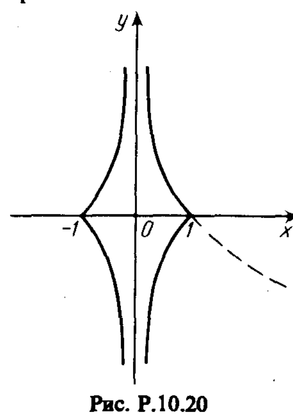

Рис. Р.10.20

10.064. $a = 2$. **10.065.** Нет.

10.066. □ Ветви параболы направлены вниз; следовательно, $a < 0$. Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Согласно теореме Виета, $x_1 x_2 = c/a < 0$; но $a < 0$ и, значит, $c > 0$. (Иначе: при $x = 0$ имеем $y = c$ и из того, что $y > 0$, следует $c > 0$.) Абсцисса вершины параболы $x_в > 0$; так как $x_в = -\frac{b}{2a} > 0$ и $a < 0$, то $b > 0$. ■

10.067. $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$. **10.068.** $y = -2x^2 - x + 3$.

10.069. □ По условию, при $x = 0$ значение $y = 1$, откуда $c = 1$. Далее, так как абсцисса вершины параболы $x_в = -\frac{b}{2a}$ и при $x = -0{,}75$ имеем $y_{наиб} = 3{,}25$, то

$-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{4}$, откуда $b=\frac{3}{2}a$. Тогда искомая функция примет вид $y=ax^2+\frac{3}{2}ax+1$. Подставив в это равенство координаты вершины параболы, получим $\frac{13}{4}=\frac{9}{16}a+\frac{3}{2}a\left(-\frac{3}{4}\right)+1$. Решим последнее уравнение относительно a и найдем $a=-4$; значит, $b=-6$. Итак, искомая функция имеет вид $y=-4x^2-6x+1$. ■

10.070. $x=-1$. **10.071.** $(k+1)^3(k-1)^2$.

10.072. □ Здесь $x\in\mathbf{R}$ и $y\geqslant 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $(x^2-4x+4)+(y-6\sqrt{y}+9)=(x-2)^2+(\sqrt{y}-3)^2$. Получаем уравнение $(x-2)^2+(\sqrt{y}-3)^2=0$. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда оба числа одновременно равны нулю, т. е. $x-2=0$, $\sqrt{y}-3=0$, откуда $x=2$, $y=9$. Это единственная точка плоскости, координаты которой удовлетворяют данному уравнению. ■

10.074. $a\in(6/5,\ 2)$. ● См. решение аналогичной задачи 8.104.

10.075. □ I способ. Согласно условию, $6\leqslant x^2+5x+6\leqslant 12$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$\begin{cases}x^2+5x\geqslant 0,\\ x^2+5x-6\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -5;\ x\geqslant 0,\\ -6\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

В результате получаем ответ: $-6\leqslant x\leqslant -5$ и $0\leqslant x\leqslant 1$.

II способ. Построим параболу $y=x^2+5x+6$ и прямые $y=6$ и $y=12$ (рис. Р.10.21). С помощью рисунка устанавливаем, что значения функции $y=x^2+5x+6$ заключены в промежутке $[6,\ 12]$ при $-6\leqslant x\leqslant -5$ и $0\leqslant x\leqslant 1$. ■

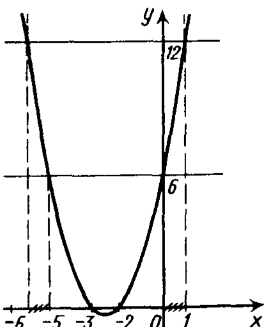

Рис. Р.10.21

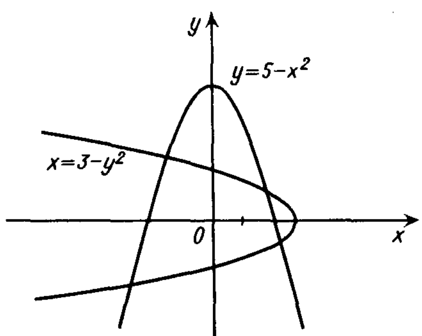

Рис. Р.10.22

10.076. □ Решением системы являются координаты точек пересечения графиков функций, заданных этими уравнениями. Запишем исходную систему в виде $\begin{cases}y=5-x^2,\\ x=3-y^2.\end{cases}$ Графиком первого уравнения является парабола с осью симметрии Oy, а графиком второго — парабола с осью симметрии Ox. Построив эти графики (рис. Р.10.22), получим четыре точки их пересечения, т. е. данная система имеет четыре действительных решения. ■

10.077. 0.

10.078. □ Общий вид биквадратного уравнения таков: $ax^4+bx^2+c=0$. По условию, оно имеет корни $x_1=\sqrt{3}-1$ и $x_2=\sqrt{3}+1$. Корни биквадратного уравнения попарно противоположны; следовательно, имеются еще корни

$x_3=-(\sqrt{3}-1)$ и $x_4=-(\sqrt{3}+1)$. Полагая $a=1$, представим левую часть уравнения в виде произведения:

$(x-(\sqrt{3}-1))\,(x+(\sqrt{3}-1))\,(x-(\sqrt{3}+1))\,(x+(\sqrt{3}+1))=0;$

$(x^2-(\sqrt{3}-1)^2)\,(x^2-(\sqrt{3}+1)^2)=0;\ (x^2-4+2\sqrt{3})\,(x^2-4-2\sqrt{3})=0;$

$(x^2-4)^2-(2\sqrt{3})^2=0;\ x^4-8x^2+16-12=0;\ x^4-8x^2+4=0.$ ■

10.079. □ Имеем $x^3y+xy^3=xy\,(x^2+y^2+2xy-2xy)=xy\,((x-y)^2+2xy)=3\,(4^2+2\cdot 3)=66.$ ■

10.080. □ Здесь $D>0$, т. е. уравнение имеет два корня x_1 и x_2. Согласно теореме Виета, $x_1+x_2=3$, $x_1x_2=-10$. Далее находим

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\,(x_1^2-x_1x_2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2)=$$
$$=(x_1+x_2)\,((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=3\,(3^2-3\,(-10))=117. \ ■$$

10.081. Нет. **10.082.** $p=\pm 12$. **10.083.** $q=6$. **10.084.** $k_1=2$, $k_2=-2/9$.

10.085. □ Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда $x_1x_2=a-2$, $x_1+x_2=-a$. Отсюда выразим $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2a+4=f(a)$. Так как $f(a)$ — квадратичная функция, первый коэффициент которой положителен, то $f(a)$ принимает наименьшее значение. Оно достигается при $a=1$. ■

10.086. □ Пусть $x_1>0$ и $x_2>0$ — корни квадратного трехчлена $(\lambda-1)\,x^2+(\lambda-3)\,x+\lambda-2$. Тогда должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \lambda-1\neq 0, \\ x_1+x_2=-\dfrac{\lambda-3}{\lambda-1}>0, \\ x_1x_2=\dfrac{\lambda-2}{\lambda-1}>0, \\ D=(\lambda-3)^2-4\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\neq 1, \\ \dfrac{\lambda-3}{\lambda-1}<0, \\ \dfrac{\lambda-2}{\lambda-1}>0, \\ 3\lambda^2-6\lambda-1\leqslant 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства находим, что $1<\lambda<3$, из третьего — что $\lambda<1$ или $\lambda>2$, а из последнего — что $(3-\sqrt{12})/3\leqslant\lambda\leqslant(3+\sqrt{12})/3$. С помощью рис. Р.10.23 получим ответ: $2<\lambda\leqslant(3+\sqrt{12})/3$. ■

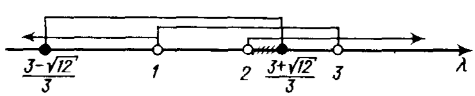

Рис. Р.10.23

10.087. $-5<a<3$.

10.088. □ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^3-7x-6=(x^3-x)-6\,(x+1)=x\,(x-1)\,(x+1)-6\,(x+1)=$$
$$=(x+1)\,(x^2-x-6)=(x+1)\,(x+2)\,(x-3).$$

Очевидно, что уравнение $(x+1)\,(x+2)\,(x-3)=0$ имеет корни $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=3$. При этом $x_1+x_2+x_3=0$, т. е. сумма всех корней данного уравнения равна нулю.

В этом можно убедиться и не находя корней уравнения. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3; тогда $x^3-7x-6=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Перемножив эти двучлены и приведя подобные члены, получим

$$x^3-7x-6=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Так как в левой части член с x^2 отсутствует, то и в правой части $x_1+x_2+x_3=0$, что и требовалось установить. ■

10.089. □ I способ. Разложив левую часть уравнения на множители, получим $(x-1)\times(x^2+x+3)=0$. Так как $x^2+x+3>0$ при любом x, то $x-1=0$, откуда $x=1$. Значит, уравнение не имеет отрицательных корней. II способ. Решим данное уравнение графически. Записав его в виде $x^3=-2x+3$, построим графики функций $y=x^3$ и $y=-2x+3$ (рис. Р.10.24). С помощью рисунка устанавливаем, что $x=1>0$ и других корней нет. ■

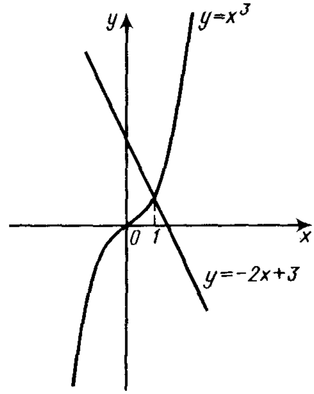

Рис. Р.10.24

10.091. $(a-1)(a+3)(a^2+3)$.

10.092. □ Разложим данный многочлен на множители:

$$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-8x+16=(x^4-2x^3+x^2)+(x^2-8x+16)=x^2(x^2-2x+1)+(x-4)^2=x^2(x-1)^2+(x-4)^2.$$

Очевидно, что $x^2(x-1)^2>0$ при $x\neq 0$, $x\neq 1$, а $(x-4)^2>0$ при $x\neq 4$. Таким образом, $f(x)$ является суммой двух неотрицательных слагаемых, которые одновременно не обращаются в нуль, т. е. $f(x)>0$ при любом x. ■

10.093. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$.

10.094. ● Упростить левую часть равенства и доказать, что это равенство есть тождество при условии $a\neq b\neq c$.

10.095. Нет.

10.096. □ Имеем $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-5)^2}}=\dfrac{1}{|x-5|}$. Найдем область определения функции: $|x-5|\neq 0$, т. е. $x\neq 5$. Значения функции слева и справа от точки $x=5$ одинаковы, так как $|-a|=|a|$; следовательно, график функции симметричен относительно прямой $x=5$. ■

10.097. □ Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3.$$

Следовательно, $0\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 2$, $0\leqslant\sqrt{3-x}\leqslant 2$, откуда $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}<17$, т. е. уравнение не имеет корней. ■

10.098. $(-\infty,\ -1)\bigcup(-1,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$. **10.099.** $(-\infty,\ -3)\bigcup[-2,\ 0)\bigcup(0,\ 3)\bigcup[5,\ \infty)$. **10.100.** $(1/2,\ 1)\bigcup[3,\ \infty)$.

10.101. □ Данная функция определена при условиях

$$\begin{cases}x>0,\\ |x-3|\leqslant 1,\\ \arcsin(x-3)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ 2\leqslant x\leqslant 4,\\ x\neq 3.\end{cases}$$

Решив последнюю систему, получаем ответ: $[2,\ 3)\bigcup(3,\ 4]$. ■

10.102. $(-3,\ -2/3]$. **10.103.** $(0,\ 1)$.

10.104. □ I способ. Функция определена при условии $2^x-3^x\geqslant 0$, т. е. $2^x\geqslant 3^x$.

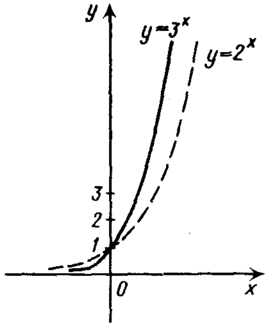

Рис. Р.10.25

Разделив обе части неравенства на $3^x>0$, имеем $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant 1$, откуда получаем ответ: $x\leqslant 0$.

II способ. На одном чертеже строим графики функций $y=2^x$ и $y=3^x$ (рис. Р.10.25). С помощью рисунка получаем ответ: $(-\infty, 0]$. ■

10.105. $(0, 1)$. **10.106.** $2\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **10.107.** $(0, 1/2]\cup(1, 2]$. **10.108.** $(1, 4]$. **10.109.** $x\in\mathbf{R}$; да, $x=1$ — ось симметрии.

10.110. □ Функция не определена, если $x=0$ или $3\cdot 81^{1/x}-10\cdot 9^{1/x}+3<0$. Положим $9^{1/x}=y>0$ и придем к неравенству $3y^2-10y+3<0$, откуда находим $1/3<y<3$. Далее имеем

$$3^{-1}<3^{2/x}<3\Rightarrow -1<\frac{2}{x}<1\Rightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+1>0,\\ \frac{2}{x}-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2+x}{x}>0,\\ \frac{2-x}{x}<0.\end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим ответ: $(-\infty, -2)\cup(2, \infty)\cup 0$. ■

10.111. □ Данная функция определена при условиях

$$\begin{cases}1-\sin x\geqslant 0,\\ -3x^2+10x-3>0,\\ \lg(-3x^2+10x-3)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\leqslant 1,\\ 3x^2-10x+3<0,\\ -3x^2+10x-3\neq 1.\end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при любом x, второе — при $1/3<x<3$; наконец, из последнего условия имеем $x\neq(5\pm\sqrt{13})/3$. Таким образом, решение системы имеет вид $\left(\frac{1}{3}, \frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}, \frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{13}}{3}, 3\right)$. Целыми значениями x, принадлежащими области определения функции,являются 1 и 2. ■

10.112. Равенство не имеет смысла. **10.113.** $(-\infty, -7]$.

10.114. □ Согласно определению модуля, $|a|=a$, если $a\geqslant 0$. Решив неравенство $x^2-8x+12\geqslant 0$, устанавливаем, что $x\leqslant 2$ или $x\geqslant 6$. Ответ: $(-\infty, 2]\cup[6, \infty)$. ■

10.115. $(-\infty, 2]\cup(4, 6)\cup[8, \infty)$. **10.116.** $(-\infty, -1)\cup[0, 1)$. **10.117.** $[-1; 0{,}11]$.

10.118. □ Здесь $x^2-1>0\Rightarrow|x|>1\Rightarrow x<-1$; $x>1$. Полагаем $\sqrt{x^2-1}=y>0$. Далее имеем $y-\frac{6}{y}=1$; $y^2-y-6=0; y_1=-2<0$ (не подходит), $y_2=3$. Итак, получаем уравнение $\sqrt{x^2-1}=3$, откуда $x^2-1=9$, т. е. $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$. Оба корня принадлежат области определения уравнения. ■

10.119. □ Здесь $\frac{1+x}{x}\geqslant 0$. Решив это неравенство методом интервалов, находим

$x\leqslant-1$ или $x>0$. Запишем данное уравнение так: $\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}=5$. Полагая $1/x=y$, получим $\sqrt{y+1}+y=5$ или $\sqrt{y+1}=5-y$ (1). Область определения уравнения (1) есть $y\geqslant-1$: в этой области $\sqrt{y+1}\geqslant0$; следовательно, и $5-y\geqslant0$, т. е. $y\leqslant5$. Итак, искомый корень принадлежит интервалу $-1\leqslant y\leqslant5$. Возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$$y+1=25-10y+y^2;\ y^2-11y+24=0;\ y_1=3\in[-1,5];\ y_2=8\notin[-1,5].$$

Наконец, решив уравнение $1/x=3$, находим $x=1/3>0$ — корень данного уравнения. ■

Замечания. 1. Полученный корень полезно проверить.

2. Можно выполнить все указанные действия без нахождения области определения уравнения, но следует помнить, что возведение в квадрат обеих частей уравнения расширяет его область определения и могут появиться посторонние корни. После такого решения обязательна проверка корней подстановкой их в исходное уравнение.

10.120. $x_1=-31/11$, $x_2=3$. **10.121.** $x=64$. **10.122.** $x_1=4{,}5$, $x_2=6$. **10.123.** $x_1=1/6$, $x_2=6$. **10.124.** $x_1=1/16$, $x_2=4$. **10.125.** $x=3$.

10.126. □ Запишем уравнение в виде $x+\lg(1+4^x)=1+\lg5$. Нетрудно установить, что значение $x=1$ удовлетворяет уравнению. Левая часть уравнения есть $f(x)=x+\lg(1+4^x)$ — функция возрастающая; поэтому если $x<1$, то $f(x)<1+\lg5$, а если $x>1$, то $f(x)>1+\lg5$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=1$. ■

10.127. $x_{1,2}=\pm2$, $x_3=1$.

10.128. □ Если $\cos^{58}x=0$, то $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. При этих значениях x имеем $\sin x=\pm1$; тогда $\sin^{40}x=1$, т. е. значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ удовлетворяют уравнению. Если же $\sin^{40}x=0$, то $\sin x=0$, откуда $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. При этих значениях x имеем $\cos x=\pm1$; поэтому $\cos^{58}x=1$, т. е. значения $x=\pi n$ также удовлетворяют уравнению. Объединяя найденные решения, получим $x=\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$.

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Пусть $x\neq\pi n/2$; тогда $\sin^2x<1$ и $\cos^2x<1$; так как $\sin^{40}x<\sin^2x$, $\cos^{58}x<\cos^2x$, то $\cos^{58}x+\sin^{40}x<\sin^2x+\cos^2x$, т. е. $\cos^{58}x+\sin^{40}x<1$ и, следовательно, других корней уравнение не имеет. Ответ: $x=\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

10.129. □ Здесь должны выполняться условия $\sin x>0$, $\cos x>0$, $\cos x\neq1$. Из первых двух неравенств следует, что $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$, а из данного уравнения — что $\sin x=\cos x$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos x\neq0$, получим $\operatorname{tg}x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Однако интервалу $\left(2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ принадлежат только значения $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

10.130. □ Из уравнения следует, что $\sin x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Так как $|\sin x|\leqslant1$, то $\sin x=\frac{\pi}{4}$, откуда $x=(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. ■

10.131. (0; 1).

10.132. $\square$ I способ. Корни уравнения должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} a-6x\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geqslant 6x, \\ x\geqslant 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим

$$a-6x=x^2-2x+1 \text{ или } x^2+4x+1-a=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет решения, если $\frac{D}{4}=4-1+a=3+a\geqslant 0$, откуда $a\geqslant -3$. Если $a=-3$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x_1=x_2=-2$, который не удовлетворяет условиям (1). Если же $a>-3$, то уравнение (2) имеет два корня: $x_1=-2-\sqrt{3+a}$ и $x_2=-2+\sqrt{3+a}$. Однако корень x_1 при всех значениях x отрицателен и, значит, не удовлетворяет условиям (1). Выясним, при каких значениях a этим условиям удовлетворяет корень x_2. Для этого решим систему

$$\begin{cases} a\geqslant 6\,(-2+\sqrt{3+a}), \\ -2+\sqrt{3+a}\geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\sqrt{3+a}\leqslant a+12, \\ \sqrt{3+a}\geqslant 3. \end{cases}$$

Легко установить, что первое неравенство выполняется при $a\geqslant -3$, а второе — при $a\geqslant 6$. Итак, при $6\leqslant a<\infty$ уравнение имеет единственный корень $x=-2+\sqrt{3+a}$, а при $-\infty<a<6$ оно не имеет корней.

II способ. Положим $\sqrt{a-6x}=t\geqslant 0$. Тогда $a-6x=t^2$, откуда $x=\frac{a-t^2}{6}$, а заданное уравнение примет вид $t^2+6t+6=a$. Решим это уравнение графически, для чего построим параболу $y=t^2+6t+6$ и прямую $y=a$ (рис. Р.10.26). Эти линии пересекаются в двух точках, имеющих абсциссы $t=-3-\sqrt{3+a}$ и $t=-3+\sqrt{3+a}$. Требованию $t\geqslant 0$ может удовлетворять только второй корень; нетрудно установить, что это требование выполняется при $a\geqslant 6$ (соответствующая часть параболы выделена на рисунке жирной линией). Теперь вернемся к старой переменной x; находим $x=\frac{a-(\sqrt{3+a}-3)^2}{6}=\frac{a-3-a+6\sqrt{3+a}-9}{6}=-2+\sqrt{3+a}$. В результате получаем тот же ответ, что и при I способе решения. $\blacksquare$

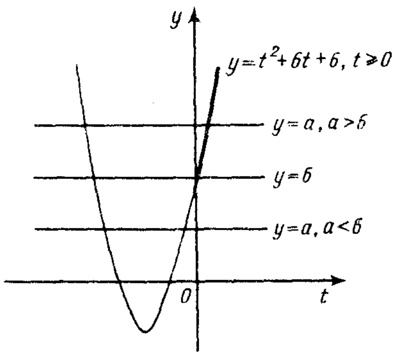

Рис. Р.10.26

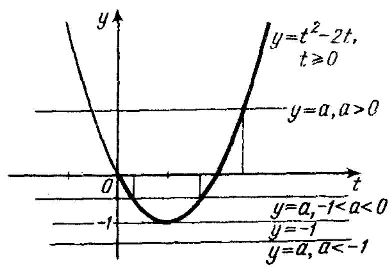

Рис. Р.10.27

10.133. □ Здесь и далее для уравнений с параметрами возможен аналитический способ решения, однако ввиду его громоздкости будем использовать графический способ. Положим $\sqrt{3a-2x}=t\geqslant 0$. Тогда $3a-2x=t^2$, откуда $x=\frac{3a}{2}-\frac{t^2}{2}$; данное уравнение примет вид $t^2-2t=a$. Построим параболу $y=t^2-2t$ и прямую $y=a$ (на рис. Р.10.27 соответствующая условию $t\geqslant 0$ часть параболы выделена жирной линией). С помощью рисунка устанавливаем, что при $a<-1$ уравнение не имеет корней, при $-1<a\leqslant 0$ оно имеет два корня, а при $a=-1$ и при $a>0$ — один корень. Остается найти эти корни. Для этого решаем уравнение $t^2-2t-a=0$, откуда получим $t_{1,2}=1\pm\sqrt{a+1}$ или, возвращаясь к старой переменной, $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a+1}$. Итак, при $-1<a\leqslant 0$ уравнение имеет два корня: $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a+1}$; при $a=-1$ — один корень $x=-2$; при $a>0$ — один корень $x=a-1-\sqrt{a+1}$; наконец, при $a<-1$ оно не имеет корней. ■

10.134. □ Умножив и разделив левую часть уравнения на сопряженное выражение, приведем уравнение к виду $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=a$. Построим график функции $y=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (рис. Р.10.28). Из рисунка видно, что при $0<a\leqslant\sqrt{2}$ прямая $y=a$ пересекает этот график в единственной точке, а при $a\leqslant 0$ и при $a>\sqrt{2}$ она не пересекает его. Для нахождения абсциссы точки пересечения прямой $y=a$ с графиком функции $y=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ решим систему уравнений

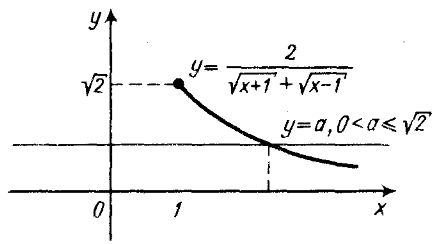

Рис. Р.10.28

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=a,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\frac{2}{a}.\end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим $2\sqrt{x+1}=a+\frac{2}{a}$ или $\sqrt{x+1}=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$, откуда $x+1=\frac{a^2}{4}+1+\frac{1}{a^2}$, т. е. $x=\frac{a^4+4}{4a^2}$. Итак, при $0<a\leqslant\sqrt{2}$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a^4+4}{4a^2}$, а при $a\leqslant 0$ и $a>\sqrt{2}$ оно не имеет корней. ■

10.135. При $-1{,}25<a\leqslant 5$ уравнение имеет два корня: $x_{1,2}=-1{,}5\pm 0{,}5\sqrt{5+4a}$; при $a=-1{,}25$ — один корень $x=-1{,}5$; при $a>5$ — один корень $x=-1{,}5-0{,}5\sqrt{5+4a}$; при $a<-1{,}25$ нет корней. **10.136.** При $-\sqrt{6}\leqslant a\leqslant\sqrt{6}$ уравнение имеет один корень $x=-0{,}5a\sqrt{12-a^2}$; при $a<-\sqrt{6}$ и $a>\sqrt{6}$ нет корней. **10.137.** При $2{,}75<a\leqslant 3$ уравнение имеет два корня: $x_{1,2}=0{,}02\ (-5\pm\sqrt{4a-11})$; при

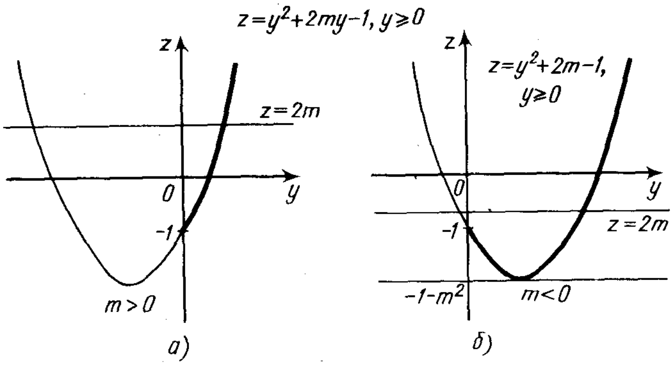

Рис. Р.10.29

$a=2{,}75$ — один корень $x=-0{,}1$; при $a>3$ — один корень $x=0{,}02\,(-5+$ $+\sqrt{4a-11})$; при $a<2{,}75$ нет корней.

10.138. □ Если $m=0$, то уравнение примет вид $2=x+4$ и, значит, имеет единственный корень $x=-2$. Пусть $m\neq 0$. Положим $\sqrt{1-m\,(x+2)}=y\geqslant 0$, откуда после преобразований найдем $x=\dfrac{1-y^2}{m}-2$. Тогда данное уравнение запишется так: $2y=\dfrac{1-y^2}{m}-2+4$ или $2my=1-y^2+2m$ или $y^2+2my-1=2m$.

Теперь построим графики функций $z=y^2+2my-1$ и $z=2m$. Так как в уравнении параболы коэффициент при y содержит параметр m, то нужно рассмотреть два случая: $m>0$ и $m<0$. В обоих случаях, учитывая условие $y\geqslant 0$, берем только ту часть параболы, которая расположена правее оси Oz (рис. Р.10.29, *а*, *б*). Если $m>0$, то прямая $z=2m$ пересекает указанную часть параболы в единственной точке при условии $2m>-1$, т. е. при $m>-1/2$; значит, в этом случае $m>0$. Если же $m<0$, то прямая $z=2m$ пересекает эту часть параболы в единственной точке также при условии $2m>-1$, т. е. при $m>-1/2$; следовательно, такое пересечение получается при $-1/2<m<0$. Кроме того, в случае $m<0$ уравнение имеет единственный корень при условии, что прямая $z=2m$ касается параболы $z=y^2+2m-1$ в ее вершине. Записав уравнение параболы в виде $z=(y+m)^2-1-m^2$, устанавливаем, что ордината вершины равна $-1-m^2$; значит, условие касания примет вид $-1-m^2=2m$, откуда $m=-1$. Таким образом, объединив все полученные сведения, заключаем, что уравнение имеет единственный корень при $m=-1$ и при $-1/2<m<\infty$. ■

10.139. $0<p\leqslant 2/3$. **10.140.** $-\infty<c<-4$, $-4<c\leqslant -2$. **10.141.** $-\infty<k<-4$.

10.142. □ Пусть $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+K=0$ — алгебраическое уравнение, где $A, B, C, \ldots, K$ — целые числа и $A\neq 0$. Запишем его в виде

$$x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+\frac{C}{A}x^{n-2}+\ldots+\frac{K}{A}=0. \tag{1}$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1), то его можно представить следующим образом:

$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0$ или

$x^n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,x_1x_2\ldots x_n=0.$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x, в частности свободные члены: $(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = K/A$. Из этого равенства следует, что если уравнение (1) имеет целый корень, то K делится на этот корень. ■

10.143. □ Согласно условию, левую часть уравнения можно представить в виде $(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D)=0$, где A, B, C и D — целые числа. Выполнив умножение, получим

$$x^4+(A+C)x^3+(B+D+AC)x^2+(AD+BC)x+BD=0.$$

Сравним коэффициенты при одних и тех же степенях x в данном и в полученном уравнениях: $A+C=-4$, $AD+BC=37$, $BD=-14$. Так как B и D — целые числа, то возможны следующие варианты: 1) $B=7$, $D=-2$; 2) $B=-7$, $D=2$; 3) $B=2$, $D=-7$; 4) $B=-2$, $D=7$; 5) $B=14$, $D=-1$; 6) $B=-14$, $D=1$; 7) $B=1$, $D=-14$; 8) $B=-1$, $D=14$.

1) Если $B=7$, $D=-2$, то имеем систему $\begin{cases}-2A+7C=37,\\ A+C=-4,\end{cases}$ откуда $9C=29$, т. е. $C=29/9$ не является целым числом и этот случай не годится.

2) Если $B=-7$, $D=2$, то имеем систему $\begin{cases}2A-7C=37,\\ A+C=-4,\end{cases}$ откуда $9A=9$, т. е. $A=1$, $C=-5$, и данное уравнение примет вид $(x^2+x-7)(x^2-5x+2)=0$. Остается решить уравнения $x^2+x-7=0$ и $x^2-5x+2=0$.

Другие варианты рассматривать не следует, так как уравнение уже решено. ■

10.144. □ Заданное равенство можно рассматривать только при $x>0$. Построим на одном чертеже графики функций $y=x$ и $y=\log_2 x$. Из рис. Р.10.30 видно, что графики не имеют общих точек; значит, данное равенство невозможно. ■

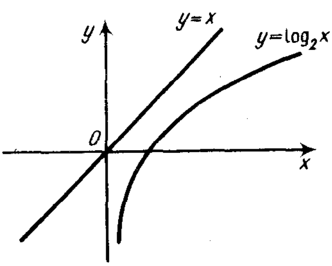

Рис. Р.10.30

10.145. □ Пусть корень уравнения $x=\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда получим тождество

$$\frac{m^2}{n^2}+p\frac{m}{n}+q=0 \quad \text{или} \quad m^2+pmn+qn^2=0$$

или $\quad m^2=-n(pm+qn)$. $\qquad$ (1)

Правая часть равенства (1) представляет собой целое число, делящееся на n; тогда m^2, а значит, и m делится на n, что невозможно, поскольку дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима. Таким образом, рациональный корень не может быть дробью, т. е. x — целое число. ■

10.147. Нет.

10.148. □ I способ. Разложив левую часть уравнения на множители, получим $\sqrt{10}\sin(\varphi+2x)=4$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$. Отсюда $\sin(\varphi+2x)=\dfrac{4}{\sqrt{10}}>1$, т. е. уравнение не имеет решений.

II способ. Сумма в левой части равна 4 только тогда, когда $\sin 2x = \cos 2x = 1$. Однако это невозможно, так как если $\sin 2x=1$, то $\cos 2x=0$, и наоборот. ■

10.149. $(-\infty, -\sqrt{3}/3]\cup[\sqrt{3}/3, \infty)$.

10.150. □ Уравнение имеет смысл при $z>0$. Прологарифмировав его по основанию 5, имеем

$$\log_5 3z\cdot\log_5 z=2+\frac{4}{3}\log_5 z \text{ или } (\log_5 3+\log_5 z)\log_5 z=2+\frac{4}{3}\log_5 z.$$

Пусть $\log_5 z=y$; тогда $z=5^y$, а уравнение примет вид

$$y^2-y\left(\frac{4}{3}-\log_5 3\right)-2=0. \qquad (1)$$

Если z_1 и z_2 — корни данного уравнения, то $z_1 z_2=5^{y_1}\cdot 5^{y_2}=5^{y_1+y_2}$. (2)

Согласно теореме Виета, для уравнения (1) находим $y_1+y_2=\frac{4}{3}-\log_5 3$. Подставив это значение в равенство (2), получим

$$z_1 z_2=5^{\frac{4}{3}-\log_5 3}=5^{\frac{4}{3}\log_5 5-\log_5 3}=5^{\log_5 \frac{5^{4/3}}{3}}=\frac{5^{4/3}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{5}. \ \blacksquare$$

10.151. $k=7$. **10.153.** $k=4$ и $k<0$. **10.154.** $(-2; 0)$, $(2; 0)$. **10.155.** $(0; 25)$. **10.156.** 16.
10.157. Область определения $(2\pi n,\ \pi+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; область значений $(-\infty, 0]$.
10.159. $\square$ Рассмотрим разность

$$A=(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{3}=\frac{3a^2+3b^2+3c^2-1}{3}.$$

В числителе прибавим и вычтем выражение $2ab+2ac+2bc$, а затем сгруппируем слагаемые:

$$A=\frac{1}{3}((a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)+$$

$$+(a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)-1)=$$

$$=\frac{(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2-1}{3}.$$

Согласно условию, $a+b+c=1$; значит,

$$A=\frac{1+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2-1}{3}=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{3}\geqslant 0,$$

поскольку $(a-b)^2\geqslant 0$, $(a-c)^2\geqslant 0$, $(b-c)^2\geqslant 0$. Итак, $(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{3}\geqslant 0$, т. е.

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}. \ \blacksquare$$

10.161. $\square$ Пусть ABC — прямоугольный треугольник; $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. Р.10.31); требуется доказать, что $a^3+b^3<c^3$. Проведем $CK\perp AB$: тогда $BK=a_c$ и $AK=b_c$ — проекции катетов на гипотенузу. Так как катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, то справедливы равенства $a^2=ca_c$, $b^2=cb_c$. Умножив обе части первого из них на a, а обе части второго — на b, получим $a^3=ca_ca$, $b^3=cb_cb$. Сложим эти равенства почленно: $a^3+b^3=ca_ca+cb_cb=$ $=c\,(aa_c+bb_c)$. Но $aa_c<a^2$, $bb_c<b^2$, откуда $aa_c+bb_c<a^2+b^2$. Следовательно, $a^3+b^3<c\,(a^2+b^2)$; так как, по теореме Пифагора, $a^2+b^2=c^2$, то окончательно имеем $a^3+b^3<c^3$. $\blacksquare$
10.162. ● Через вершины данного треугольника провести прямые, параллельные его противоположным сторонам, и воспользоваться тем, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.

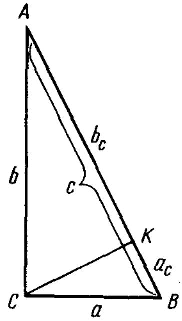

Рис. Р.10.31

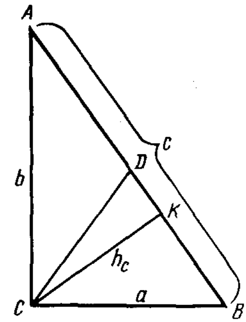

Рис. Р.10.32

10.163. □ Пусть ABC — прямоугольный треугольник; $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. Р.10.32). Требуется доказать, что $a+b\leqslant c\sqrt{2}$ (1). Предположим, что неравенство (1) верно. Преобразуем его так, чтобы получить неравенство, из которого следует справедливость данного неравенства.

Так как все члены неравенства (1) положительны, то $(a+b)^2\leqslant(c\sqrt{2})^2$ или $a^2+2ab+b^2\leqslant 2c^2$. Но $a^2+b^2=c^2$, а значит, $2ab\leqslant c^2$ (2). Теперь проведем $CK\perp AB$ и положим $CK=h_c$. Имеем $S_{\triangle ABC}=\frac{ab}{2}=\frac{ch_c}{2}$, откуда $ab=ch_c$ и неравенство (2) примет вид $2ch_c\leqslant c^2$ или $h_c\leqslant c/2$ (3).

Покажем, что неравенство (3) действительно справедливо. Из геометрии известно, что если $a=b$, то $h_c=c/2$. Пусть $a\neq b$. Проведем медиану CD к гипотенузе: тогда $CD=c/2$. Но из прямоугольного треугольника KCD следует, что $CK<CD$, т. е. $h_c<c/2$. Итак, неравенство (3) верно для любого прямоугольного треугольника. Теперь, взяв в качестве исходного верное неравенство (3) и проведя все рассуждения в обратном порядке, придем к неравенству (1). ■

10.164. $[-2,\ 1]\bigcup[2,\ \infty)$. **10.165.** $(-3,\ 0)\bigcup(2,\ \infty)$. **10.166.** $(-4,\ 0)\bigcup(0,\ 4)$.

10.167. $(-1,\ 1)\bigcup(2,\ \infty)$. **10.168.** $[1/3,\ 3/4)$.

10.169. $(-\infty,\ \infty)$. ● Воспользоваться тем, что $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

10.170. $(-2,\ 0)\bigcup(2,\ \infty)$. **10.171.** $(-2,\ 1)\bigcup(3,\ \infty)$. **10.172.** $(-3,\ -2)\bigcup(0,\ 1)$.

10.173. $(-3,\ 2)$. **10.174.** $(0,\ 1)\bigcup(100,\ \infty)$. **10.175.** $(0,\ 1)$. **10.176.** $(1/3,\ 3)$. **10.177.** $(0,\ 1/2)\bigcup[\sqrt{2},\ \infty)$.

10.178. □ Неравенство имеет смысл при $x>0$. Упростим первое слагаемое:

$$x^{\log_{0,2}0,3}=x^{\frac{\log_x 0,3}{\log_x 0,2}}=(x^{\log_x 0,3})^{\log_{0,2}x}=0,3^{\log_{0,2}x}.$$

Тогда неравенство примет вид $2\cdot 0,3^{\log_{0,2}x}\leqslant 0,3^2\cdot 2$ или $0,3^{\log_{0,2}x}\leqslant 0,3^2$ и далее $\log_{0,2}x\geqslant 2$, откуда получаем ответ: $(0;\ 0,04]$. ■

10.179. $(1,\ \sqrt{3})$. **10.180.** $(-2,\ 2)$.

10.181. □ Здесь должно быть $x>0$. Рассмотрим два случая: $0<x<1$ и $x>1$.

1) Если $0<x<1$, то $-3x-8<7$, откуда $x>-5$; значит, в этом случае решением является промежуток $(0,\ 1)$.

2) Если $x>1$, то $-3x-8>7$, откуда $x<-5$; таким образом, в этом случае решений нет.
Ответ: $(0, 1)$. ■

10.182. □ Здесь должны быть выполнены условия

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow -1<x<0,\ 0<x<\infty. \qquad (1)$$

В правой части неравенства переходим к основанию 2; имеем $\log_{x+1} 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 (x+1)} = \dfrac{4}{\log_2 (x+1)}$. Полагая $\log_2 (x+1) = y$, получим неравенство $y - \dfrac{4}{y} > 0$, откуда находим $-2<y<0$ или $y>2$. Далее имеем:

$$-2<\log_2 (x+1)<0 \Rightarrow 0{,}25<x+1<1 \Rightarrow -0{,}75<x<0;$$

$$\log_2 (x+1)>2 \Rightarrow x+1>4 \Rightarrow x>3.$$

Оба решения удовлетворяют условиям (1). ■

10.183. □ Запишем неравенство в виде $\log_{0,5} (2^x-1) > \log_{0,5} 0{,}5^{x-1}$. Так как $0<0{,}5<1$, то переходим к равносильной системе $\begin{cases} 2^x-1<2^{1-x}, \\ 2^x-1>0. \end{cases}$ Положим в первом неравенстве $2^x=y>0$ и придем к неравенству $y-1<\dfrac{2}{y}$. Решив его, находим $y<-1$, что невозможно, или $0<y<2$, откуда имеем систему $\begin{cases} 2^x<2, \\ 2^x>2^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>0. \end{cases}$ Ответ: $(0, 1)$. ■

10.184. $(3, 4) \bigcup (5, \infty)$. **10.185.** $[-3, -2\sqrt{2}) \bigcup (2\sqrt{2}, 3]$. **10.186.** -6; -5; -4; -2; -1; 0.

10.187. □ Запишем неравенство в виде $0{,}3^{18}<0{,}3^{x^2-5x+4}<0{,}3^{-2}$. Так как $0<0{,}3<1$, то

$$18>x^2-5x+4>-2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x-14<0, \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2)<0, \\ (x-2)(x-3)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+2)(x-2)(x-3)<0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $-2<x<2$ или $3<x<7$. Находим целые значения x, принадлежащие этим интервалам, и получаем ответ: -1; 0; 1; 4; 5; 6. ■

10.188. $[0, 3)$.

10.189. □ Данные величины можно сравнивать только при $x>0$. Рассмотрим разность $M=\lg x^2-\lg^2 x=2\lg x-\lg^2 x=\lg x\,(2-\lg x)$. Имеем:
$M=0$, если $\lg x=0$ или $\lg x=2$, т. е. при $x=1$ и $x=100$ справедливо равенство $\lg x^2=\lg^2 x$;
$M>0$, если $0<\lg x<2$, т. е. при $1<x<100$ выполняется неравенство $\lg x^2>\lg^2 x$;
$M<0$, если $\lg x<0$ или $\lg x>2$, т. е. при $0<x<1$ и при $x>100$ выполняется неравенство $\lg x^2<\lg^2 x$. ■

10.190. $0<x<1$.

10.191. □ Приведем данные числа к одному показателю степени, равному 100. Имеем $3^{400}=3^{4\cdot 100}=(3^4)^{100}$; $4^{300}=4^{3\cdot 100}=(4^3)^{100}$. Так как из двух степеней с одинаковым положительным показателем 100 больше та, у которой основание больше, то $3^{400}>4^{300}$. ■

10.192. $-1/3<a<4$. **10.193.** $(-\infty, \quad 1)\bigcup(1, \quad \infty)$. **10.194.** $(3, \quad 6)$. **10.195.** $[1, 4-2\sqrt{2})\bigcup(4+2\sqrt{2}, 7]$. **10.196.** $[-1, 0)\bigcup(8, 9]$. **10.197.** $(-\sqrt{3}; 4), (-1; 2), (1; 2), (\sqrt{3}; 4)$.

10.198. □ По условию, n и m — натуральные числа и $n<m$; значит, $m=n+k$, где k — некоторое натуральное число, причем $k<m$ $(k=m-n)$. Имеем:

$$\frac{n}{m}<1 \Rightarrow \frac{n}{m}=\frac{m-k}{m}=1-\frac{k}{m}; \ \frac{m}{n}>1 \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{n+k}{n}=1+\frac{k}{n}; \ n<m \Rightarrow \frac{k}{m}<\frac{k}{n}.$$

Итак, на числовой оси точки расположены следующим образом: $\frac{n}{m}$; 1; $\frac{m}{n}$; при этом точка $\frac{n}{m}$ ближе к 1, чем точка $\frac{m}{n}$ (рис. Р.10.33). ■

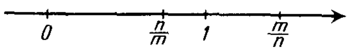

Рис. Р.10.33

10.199. □ Для изображения на числовой оси иррациональных чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ воспользуемся теоремой Пифагора: $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$, $\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}$, $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}$. Тогда точки, изображающие числа $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, находим как сумму и разность построенных отрезков (рис. Р.10.34). ■

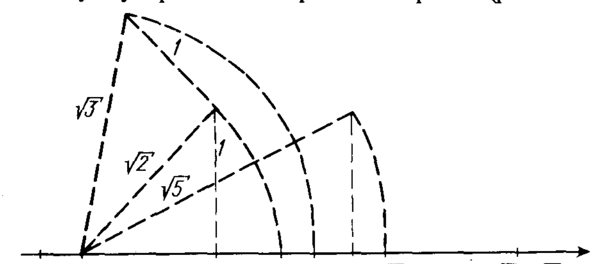

Рис. Р.10.34

10.200. □ Имеем

$$\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n\,(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

По условию, n — натуральное число, т. е. n, $n+1$, $n+2$ — три последовательных натуральных числа; значит, среди них по крайней мере одно делится на 2 и одно делится на 3. Итак, их произведение делится на 6 и, следовательно, данная сумма есть число натуральное. ■

10.204. □ Все целые числа делятся на четные и нечетные. Если число a — четное, т. е. $a=2k$, то $a^2=4k^2$. Значит, квадрат четного числа делится на 4, т. е. при делении на 4 дает остаток 0. Если же число a — нечетное, т. е. $a=2k+1$, то $a^2=4k^2+4k+1$. Таким образом, квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1. Рассмотрим сумму квадратов двух нечетных чисел: $(2k+1)^2+(2n+1)^2=4\,(k^2+n^2)+4\,(k+n)+2$. Иначе говоря, при делении на 4 сумма квадратов двух нечетных чисел дает в остатке 2, в то время как квадрат любого целого числа при делении на 4 дает в остатке либо 0, либо 1. Итак, сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа. ■

10.205. □ Пусть $\sqrt{ab}=\frac{m}{n}$, где $a\in\mathbf{N}$, $b\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$. Требуется доказать, что $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — число рациональное. Имеем $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{|b|}=\frac{m}{n\,|b|}$. В этой дроби $m\in\mathbf{Z}$, $n\,|b|\in\mathbf{N}$; значит, число $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — рациональное. ■

10.206. □ Имеем $2^{2001}+1=(2^{667})^3+1^3$, т. е. данное число представляет собой сумму кубов и, следовательно, является составным. ■

10.207. □ Всякое целое число n либо кратно 3, либо не кратно 3. Если n кратно 3, то $n=3k$ (где $k\in\mathbf{N}$) и, значит, $n^2=9k^2$, т. е. при делении n^2 на 3 остаток равен нулю. Если же n не кратно 3, то $n=3k+1$ либо $n=3k+2$; тогда $n^2=9k^2+6k+1$ либо $n^2=9k^2+6k+4$, т. е. при делении n^2 на 3 в остатке получится 1. Итак, в остатке никогда не получается 2. ■

10.209. □ Согласно условию, имеем функцию $f(x)=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$, где $x\in\mathbf{N}$ и $x\geqslant 2$. Представим $f(x)$ в виде $f(x)=3^x(1+3+3^2)=3^x\cdot 13$. При $x=2$ имеем $f(2)=3^2\cdot 13=117$, а при $x>2$ получим $f(x)=3^2\cdot 13\cdot 3^{x-2}=117\cdot 3^{x-2}$. Итак, если $x\geqslant 2$, то $f(x)$ делится на 117 без остатка. ■

10.210. Один.

10.211. □ I способ. Запишем уравнение в виде $2^x=3-x^2$ и построим на одном чертеже графики функций $y=2^x$ и $y=3-x^2$. Из рис. Р.10.35 видно, что уравнение имеет два корня, которые больше $-\sqrt{3}$, причем один из них равен 1.

II способ. Из уравнения $2^x=3-x^2$ следует, что $3-x^2>0$; значит, $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, т. е. корни уравнения больше $-\sqrt{3}$. При $x=1$ имеем $2^1=2$ и $3-1^2=2$, т. е. один из корней равен 1. ■

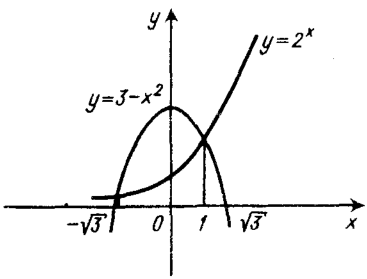

Рис. Р.10.35

10.214. Нет; да. **10.216.** Если $c=0$, то $x=a$, y — любое число, кроме $y=b$; если $c\neq 0$, то $x_1=a+c$, $y_1=b+1$, $x_2=a-c$, $y_2=b-1$. **10.217.** (1; 2; 3).

10.218. □ Система имеет бесконечное множество решений либо не имеет решений, если коэффициенты при x и y пропорциональны. Следовательно, $\frac{2}{m+1}=\frac{m-1}{4}$ (здесь $m+1\neq 0$; легко убедиться в том, что при $m=-1$ система имеет единственное решение). Далее имеем $(m+1)(m-1)=8$; $m^2-1=8$, откуда $m=\pm 3$. При $m=3$ получим $\frac{2}{4}=\frac{2}{4}\neq\frac{3}{-3}$, т. е. система не имеет решений. При $m=-3$ получим $\frac{2}{-2}=\frac{-4}{4}=\frac{3}{-3}$; т. е. система имеет бесконечное множество решений. ■

10.219. $\left(\frac{14-13b}{2(1-b^2)};\frac{12-15b}{2(1-b^2)}\right)$ при $b\neq\pm 1$; не имеет бесконечного множества решений ни при каком b; нет решений при $b=\pm 1$.

10.220. □ Система $\begin{cases} x+my=3m, \\ mx+9y=6 \end{cases}$ имеет решение, если коэффициенты при x и y не пропорциональны, т. е. $1/m \neq m/9$ $(m \neq 0)$ (1). Из уравнения $1/m = m/9$ находим $m = \pm 3$. Итак, при $m \neq \pm 3$ система имеет (и притом единственное) решение. Решаем систему методом алгебраического сложения, умножив все члены первого уравнения на $(-m)$:

$$\begin{cases} -mx-m^2y=-3m^2, \\ mx+9y=6, \end{cases} \text{ откуда } (9-m^2)\,y=3\,(2-m^2).$$

Если $m \neq \pm 3$, то $y=\dfrac{3\,(2-m^2)}{9-m^2}$, $x=3m-my=\dfrac{21m}{9-m^2}$. Следовательно, $\left(\dfrac{21m}{9-m^2}; \dfrac{3\,(2-m^2)}{9-m^2}\right)$ — решение системы.

Используя условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, составим систему $\begin{cases} \dfrac{21m}{9-m^2} \geqslant 0, \\ \dfrac{3\,(2-m^2)}{9-m^2} \geqslant 0, \end{cases}$ которая сводится к двум системам:

$$\begin{cases} 9-m^2>0, \\ 21m \geqslant 0, \\ 2-m^2 \geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 9-m^2<0, \\ 21m \leqslant 0, \\ 2-m^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением первой из них является промежуток $0 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}$, а решением второй — промежуток $m<-3$.

Условие (1) выполняется при $m \neq 0$. Рассмотрим случай $m=0$, при котором система примет вид $\begin{cases} x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+9y=6, \end{cases}$ откуда $x=0$, $y=2/3$ — единственное решение, причем условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ выполнены. Итак, при любых $m \in (-\infty, -3) \bigcup [0, \sqrt{2}]$ система имеет единственное решение, для которого $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. ■

10.222. $(x^2-2x+2)\,(x^2+2x+2)$. **10.223.** $(x^4+\sqrt{2}\,x^2y^2+y^4)\,(x^4-\sqrt{2}\,x^2y^2+y^4)$.

10.224. $(a^2-2ab+2b^2)\,(a^2+2ab+2b^2)$.

10.225. $y_{\min}=2$ при $1 \leqslant x \leqslant 3$. ● См. решение задачи 10.032.

10.226. $y_{\min}=2$. **10.227.** $y_{\max}=2$.

10.228. □ I способ. Функция $y=x^2-2x$ при $x=1$ достигает наименьшего значения, равного -1; поэтому функция $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x}=2^{-(x^2-2x)}$ при $x=1$ принимает наибольшее значение $y_{\max}=2$.

II способ. Исследуем данную функцию на экстремум, для чего найдем производную: $y'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x}(2x-2)\ln\dfrac{1}{2}=-2\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x}(x-1)$; $y'=0$ при $x=1$. Если $x<1$, то $y'>0$, а если $x>1$, то $y'<0$. Следовательно, при $x=1$ функция принимает наибольшее значение $y_{\max}=2$. ■

10.229. $y_{\min}=4$.

10.230. □ I способ. Найдем область определения данной функции:

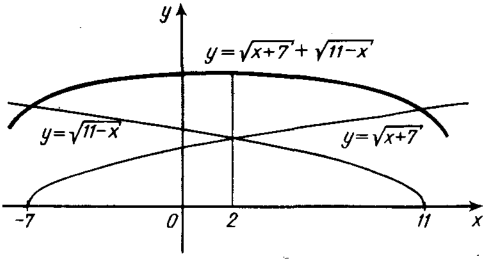

Рис. Р.10.36

$\begin{cases} x+7\geqslant 0, \\ 11-x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -7, \\ x\leqslant 11 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -7\leqslant x\leqslant 11.$

Построим графики функций $y=\sqrt{x+7}$ и $y=\sqrt{11-x}$, а затем сложим их графически (рис. Р.10.36). Из рисунка видно, что $y_{max}=6$ при $x=2$.

II способ. Данная функция положительна во всей области определения, и если она принимает наибольшее значение a, то прямая $y=a$ касается графика функции. Найдем значение a, при котором уравнение $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=a$ имеет кратные корни. После преобразований получим $x+7+11-x+2\sqrt{(x+7)\,(11-x)}=a^2$ или $2\sqrt{(x+7)\,(11-x)}=a^2-18$.

Уравнение имеет решение при условии $a^2-18\geqslant 0$. Далее находим

$4\,(-x^2+4x+77)=(a^2-18)^2$ или $-x^2+4x+77=\left(\dfrac{a^2-18}{2}\right)^2$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-4x-77+\left(\dfrac{a^2-18}{2}\right)^2$. Она имеет кратные корни, если $\dfrac{D}{4}=4+77-\left(\dfrac{a^2-18}{2}\right)^2=0$. Тогда $\left(\dfrac{a^2-18}{2}\right)^2=81$ или $\dfrac{a^2-18}{2}=\pm 9$, откуда $a^2=\pm 18+18$. Так как данная функция положительна, то $a>0$. Значит, $a=6$, откуда находим $y_{max}=6$.

III способ. Находим производную:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+7}}-\frac{1}{2\sqrt{11-x}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}\,\sqrt{11-x}}.$$

Очевидно, что $y'=0$, когда $\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}=0$, откуда $x=2$. Если $-7<x<2$, то $y'>0$, если же $2<x<11$, то $y'<0$. Итак, при $x=2$ имеем $y_{max}=6$. ■

10.231. $y_{min}=4$. **10.232.** $y_{max}=0{,}1$.

10.233. □ I способ. Область определения функции находим из условия $x^2-9\neq$ $\neq 0$, откуда $x\neq\pm 3$, т. е. прямые $x=-3$ и $x=3$ не пересекают график функции. Так как $f(-x)=f(x)$, то функция четная и поэтому достаточно построить ее график на интервале $[0,\ \infty)$, а затем отобразить его симметрично относительно оси ординат. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: при $x=0$ имеем $y=-1/9$. Найдем теперь точки, в которых $f(x)=\pm 1$:

$$\frac{1}{x^2-9}=1\Rightarrow x^2-9=1\Rightarrow x^2=10\Rightarrow x=\pm\sqrt{10};$$

$$\frac{1}{x^2-9}=-1\Rightarrow x^2-9=-1\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}.$$

Если $x\to 3$ слева, то $x^2-9\to 0$, будучи отрицательной; значит, $y\to-\infty$; если же $x\to 3$ справа, то $x^2-9\to 0$, будучи положительной; поэтому $y\to+\infty$.

Наконец, если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, причем $y > 0$. График схематически изображен на рис. Р.10.37.

II способ. Построим сначала параболу — график функции $y_2 = x^2 - 9$ (на рис. Р.10.37 она изображена пунктирной линией). Значения функции $y_1 = \frac{1}{x^2-9}$ обратны значениям функции $y_2 = x^2 - 9$. Если $x = 0$, то $y_2 = -9$, а значит, $y_1 = -1/9$. При $x^2 - 9 = \pm 1$ имеем $y_1 = y_2 = \pm 1$, т. е. прямые $y = -1$ и $y = 1$ пересекают параболу в точках, которые принадлежат графику функции y_1. Из графика функции $y_2 = x^2 - 9$ видно, что при $x \to 3$ как слева, так и справа значения $y_2 \to 0$; вместе с тем если $x \to 3$ слева, то $y_2 < 0$, а если $x \to 3$ справа, то $y_2 > 0$. Следовательно, $y_1 \to -\infty$ при $x \to 3$ слева и $y_1 \to +\infty$ при $x \to 3$ справа. Используя все полученные сведения, строим искомый график. ■

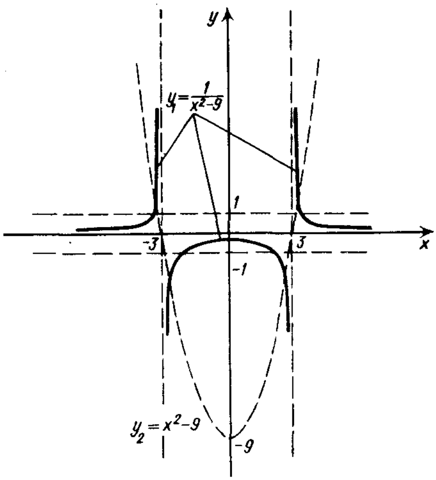

Рис. Р.10.37

10.238. См. рис. Р.10.38.

10.239. □ Построим на плоскости прямые $3x - 4y + 12 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ (рис. Р.10.39). Каждая из них делит плоскость на две области; точки одной из них удовлетворяют соответствующему неравенству, а точки другой — нет. Чтобы установить, точки какой из этих двух областей удовлетворяют заданному неравенству, достаточно подставить в него координаты точки (0; 0). Тогда получим $12 > 0$, $-2 < 0$, т. е. начало координат удовлетворяет заданным неравенствам. Теперь укажем стрелками направления от каждой из прямых в сторону начала координат и возьмем общую часть этих двух областей (на рис. Р.10.39 она заштрихована). Это и есть искомая часть плоскости xOy, причем точки самих прямых ей не принадлежат. ■

Замечание. Направление нужной области плоскости можно также получить, если записать данные неравенства в виде $y < (3/4)x + 3$ и $y < -x + 2$, т. е. ординаты искомых точек меньше ординат прямых $y = (3/4)x + 3$ и $y = -x + 2$. Поэтому нужно взять направление вниз от обеих прямых.

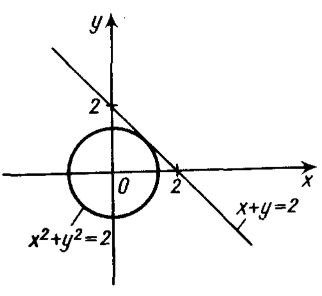

Рис. Р.10.38

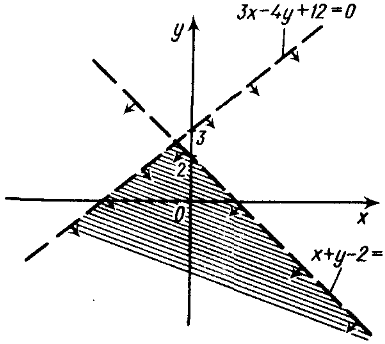

Рис. Р.10.39

10.241. □ а) Область определения функции ($x \neq \pi n$) симметрична относительно начала координат. Пусть m принадлежит области определения функции. Тогда $f(m) = \sin^3 m + \operatorname{ctg}^5 m$, $f(-m) = \sin^3(-m) + \operatorname{ctg}^5(-m)$. В силу нечетности функций $\sin x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеем $\sin(-m) = -\sin m$, $\operatorname{ctg}(-m) = -\operatorname{ctg} m$, откуда $f(-m) = (-\sin m)^3 + (-\operatorname{ctg} m)^5 = -(\sin^3 m + \operatorname{ctg}^5 m) = -f(m)$. Итак, $f(-m) = -f(m)$, т. е. данная функция нечетная.

б) Здесь область определения функции ($x \in \mathbf{R}$) симметрична относительно начала координат. Имеем $f(m) = \sin 2m + \cos 3m$, $f(-m) = \sin 2(-m) + \cos 3(-m)$. Первое слагаемое — функция нечетная, а второе — четная; значит, $\sin(-2m) = -\sin 2m$, а $\cos(-3m) = \cos 3m$ и $f(-m) = -\sin 2m + \cos 3m \neq \pm f(m)$, т. е. данная функция не является ни четной, ни нечетной.

в) Находим область определения функции: $\sin x + 1 \neq 0$; $\sin x \neq -1$; $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Она не симметрична относительно начала координат, и поэтому вопрос о четности и нечетности функции ставить нельзя. Функция ни четная, ни нечетная.

г) Область определения ($x \in \mathbf{R}$) симметрична относительно начала координат. Имеем $f(m) = \sin^4 m + m^2 + 1$, $f(-m) = \sin^4(-m) + (-m)^2 + 1 = (-\sin m)^4 + m^2 + 1 = \sin^4 m + m^2 + 1 = f(m)$. Итак, $f(-m) = f(m)$, т. е. данная функция четная.

д) Область определения функции находим из условия $-1 \leqslant x/2 \leqslant 1$, откуда $-2 \leqslant x \leqslant 2$, т. е. она симметрична относительно начала координат. Далее имеем $f(m) = \arcsin\frac{m}{2}$, $f(-m) = \arcsin\left(-\frac{m}{2}\right) = -\arcsin\frac{m}{2} = -f(m)$. Итак, данная функция нечетная. ■

е) Ни четная, ни нечетная; ж) нечетная; з) ни четная, ни нечетная; и) нечетная; к) ни четная, ни нечетная; л) нечетная.

10.244. □ Пусть T_1 — период функции $f(x)$, а T_2 — период функции $\varphi(x)$, т. е. $f(x+T_1) = f(x)$ и $\varphi(x+T_2) = \varphi(x)$. Рассмотрим функцию $Q(x) = f(x) + \varphi(x)$. Предположим, что $Q(x)$ имеет период T; тогда $Q(x+T) = f(x+T) + \varphi(x+T) = f(x) + \varphi(x)$. Если T кратно T_1 и T_2, т. е. $T/T_1 = n$ и $T/T_2 = k$, где $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, то $Q(x+T) = f(x+nT_1) + \varphi(x+kT_2) = f(x) + \varphi(x)$. Значит, в этом случае T — период функции $Q(x)$.

Так, например, для функций $f(x) = \sin 2x$ и $\varphi(x) = \cos 3x$, имеющих соответственно периоды $T_1 = \pi$ и $T_2 = 2\pi/3$, их сумма также является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$.

Однако можно привести пример функции, которая представляет собой сумму двух периодических функций, но сама не является периодической. Такова функция $Q(x) = \{x\} + \sin x$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Период функции $f(x) = \{x\}$ равен 1, период функции $\varphi(x) = \sin x$ равен 2π, но функция $Q(x) = f(x) + \varphi(x)$ не имеет периода. Итак, на поставленный в условии вопрос следует дать отрицательный ответ. ■

10.245. $\pi/3$. **10.246.** а) 6π; б) 30π. **10.249.** а), б) См. рис. Р.10.40, *а*; в), г) см. рис. Р.10.40, *б*. **10.250.** См. рис. Р.10.41. **10.251.** См. рис. Р.10.42. **10.252.** См. рис. Р.10.43. **10.253.** См. рис. Р.10.44. **10.254.** См. рис. Р.10.45. **10.256.** См. рис. Р.10.46; $f(\pi) = 0$. **10.257.** См. рис. Р.10.47.

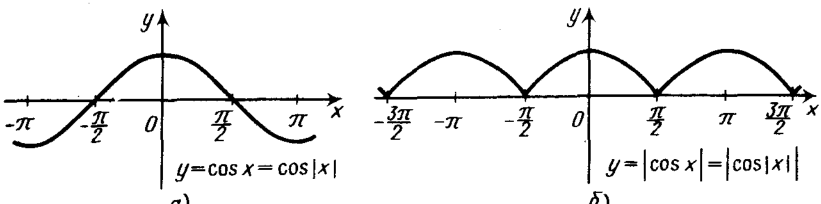

Рис. Р.10.40

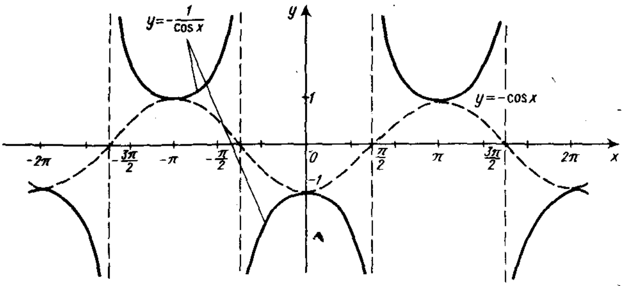

Рис. P.10.41

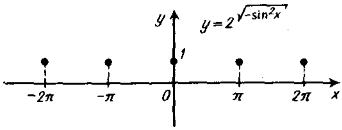

Рис. P.10.42

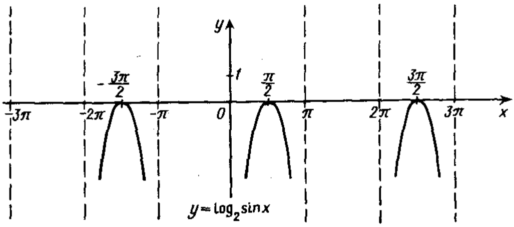

Рис. P.10.43

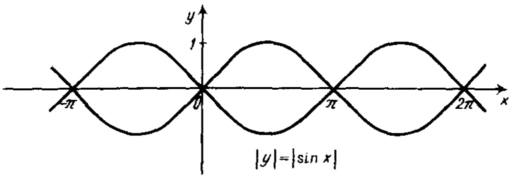

Рис. P.10.44

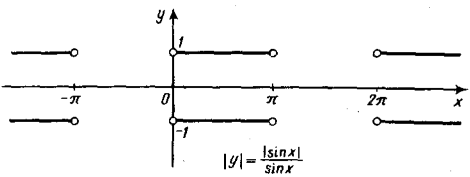

Рис. P.10.45

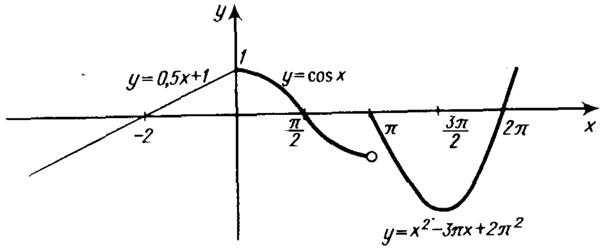

Рис. Р.10.46

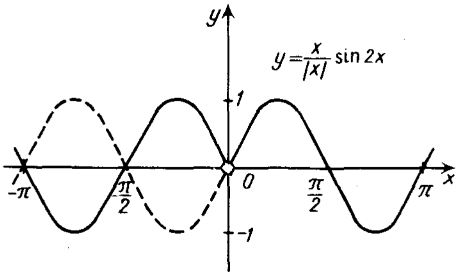

Рис. Р.10.47

10.259. □ Имеем

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0;\ -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:

1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0;\ \frac{\alpha+\beta}{2}=\pi n;\ \alpha+\beta=2\pi n;$

2) $\sin\frac{\alpha}{2}=0;\ \frac{\alpha}{2}=\pi n;\ \alpha=2\pi n,\ \beta$ — любое число;

3) $\sin\frac{\beta}{2}=0;\ \frac{\beta}{2}=\pi n;\ \beta=2\pi n,\ \alpha$ — любое число.

Итак, получаем ответ: $\alpha+\beta=2\pi n$; $\alpha=2\pi n$, а $\beta\in\mathbf{R}$; $\beta=2\pi n$, а $\alpha\in\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{Z})$. ■

10.260. $(-1{,}25;\ -1)\cup(9,\ \infty)$. **10.261.** $[-9,\ -1]\cup[0,\ 1]$.

10.262. □ Обозначив данное выражение через A, перейдем к аргументу $\alpha/2$ и выполним следующие преобразования:

$$A=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.\quad(1)$$

Выражение A определено при условии $\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\neq0.$

Решим уравнения $\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}=0$. Так как $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m$ существует, то $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$. Разделив обе части уравнений на $\sin\frac{\alpha}{2}$, получим $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\pm 1=0$, откуда $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm 1=m$. Итак, выражение A определено при условии $m\neq\pm 1$. Далее, сократив дробь (1) на $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$ и разделив числитель и знаменатель на $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, находим

$$A=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}=\frac{m-1}{m+1}.\ \blacksquare$$

10.263. ☐ Выразим $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Согласно теореме Виета, имеем $x_1x_2=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=q>0$, $x_1+x_2=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=-p>0$, откуда $p<0$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{q-1}{-p}=\frac{1-q}{p}. \qquad (1)$$

Так как, по условию, $0<\alpha+\beta<\pi/2$, то $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)>0$, т. е. $\frac{1-q}{p}>0$. Но $p<0$ и, значит, $1-q<0$, откуда $q>1$ (2). Далее, поскольку уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни, заключаем, что $D=p^2-4q\geqslant 0$, т. е. $q\leqslant p^2/4$ (3). Итак, из (1) следует, что $\alpha+\beta=\operatorname{arcctg}\frac{1-q}{p}$, а из (2) и (3) — что $1<q\leqslant p^2/4$. ■

10.264. $-2\sqrt{5}/5$. **10.265.** $-23/36$. **10.266.** Три. **10.267.** Нет.

10.269. ☐ Графиком функции $y=x^2-x+5{,}35$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Эта функция принимает наименьшее значение в вершине параболы, т. е. в точке $x_в=0{,}5$, $y_в=y_{\min}=0{,}25-0{,}5+5{,}35=5{,}1$. Найдем теперь область значений функции $y=2\sin x+3$. Так как $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, то $-2\leqslant 2\sin x\leqslant 2$, откуда $1\leqslant 2\sin x+3\leqslant 5$, т. е. $y_{\max}=5$. Итак, парабола расположена не ниже прямой $y=5{,}1$, а кривая $y=2\sin x+3$ не выше прямой $y=5$, т. е. эти кривые не имеют общих точек. ■

10.270. $y_{\max}=0{,}75$. **10.271.** $y_{\max}=\sin 1$. **10.272.** $y_{\min}=2$, $y_{\max}=3$. **10.273.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; $y_{\min}=4$. **10.274.** $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

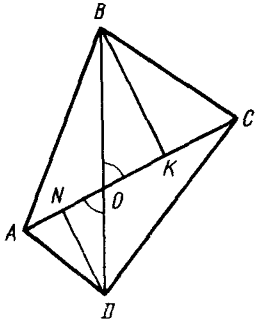

Рис. Р.10.48

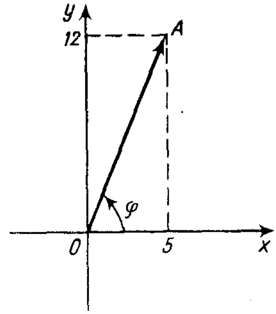

Рис. Р.10.49

10.275. □ Пусть $ABCD$ — четырехугольник; $AC=m$, $BD=n$ (рис. Р.10.48). Имеем $S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK+\frac{1}{2}AC\cdot DN$, где $BK\perp AC$ и $DN\perp AC$. Пусть $\angle BOC=\alpha$; тогда $BK=BO\sin\alpha$ (из ΔBOK), а $DN=DO\sin\alpha$ (из ΔDON). Следовательно, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\,(BO\sin\alpha+DO\sin\alpha)=\frac{1}{2}AC\sin\alpha\times$ $\times(BO+DO)=\frac{1}{2}mn\sin\alpha$. Поэтому площадь четырехугольника окажется наибольшей, если $\sin\alpha=1$, т. е. $\alpha=90°$. Итак, указанным свойством обладают четырехугольники с взаимно перпендикулярными диагоналями. ■

10.276. □ Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, то $y=(\sin x+\cos x)^2=$ $=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Но $0\leqslant\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, откуда $0\leqslant 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2$, т. е. область значений данной функции — промежуток $[0, 2]$. ■

10.277. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

10.278. □ В координатной плоскости xOy построим точку A (5; 12) и рассмотрим вектор $\overline{OA}$ (рис. Р.10.49). Пусть этот вектор образует с осью абсцисс угол φ. Тогда из рисунка видно, что $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{25+144}}=\frac{5}{13}$, $\sin\varphi=\frac{12}{\sqrt{25+144}}=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{12}{5}$, т. е. $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Преобразуем данную функцию так:

$$y=13\left(\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x\right)=13\,(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=13\sin\,(x-\varphi),$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Очевидно, что $-1\leqslant\sin\,(x-\varphi)\leqslant 1$, откуда $-13\leqslant y\leqslant 13$. ■

10.280. Нет. **10.281.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **10.282.** 17.

10.285. □ Согласно теореме синусов, имеем $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Из первых двух отношений выражаем b, а из первого и третьего c: $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$. Подставив эти выражения в левую часть доказываемого равенства, получим

$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=$

$$=a(\sin B-\sin C)+\frac{a\sin B}{\sin A}(\sin C-\sin A)+\frac{a\sin C}{\sin A}(\sin A-\sin B)=$$

$$=a\sin B-a\sin C+\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}-a\sin B+a\sin C-\frac{a\sin C\sin B}{\sin A}=0,$$

что и требовалось установить. ■

10.286. □ Из данного равенства выразим $\cos C=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-b}{a}\right)=\frac{b}{2a}$. С другой стороны, по теореме косинусов имеем $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. Подставив выражение $\cos C$ в последнее равенство, получим $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{b}{2a}=a^2$. Значит, $c=a$, т. е. треугольник — равнобедренный. ■

10.288. □ Требуется доказать, что

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C=1, \qquad (1)$$

где A, B, C — углы треугольника. Так как $A+B+C=180°$, то $C=180°-(A+B)$. Пусть C — наибольший угол треугольника. Возможны два случая:

1) Если $C=90°$, то $A+B=90°$ и $B=90°-A$. Рассмотрим левую часть равенства (1):

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}(90°-A)+\operatorname{ctg}90°(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}(90°-A))=$$
$$=\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}A+0(\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}A)=1.$$

Значит, в этом случае равенство (1) верно.

2) Если $C\neq 90°$, то левую часть равенства (1) выразим через тангенсы: $\frac{1}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}+\operatorname{ctg}C\left(\frac{1}{\operatorname{tg}A}+\frac{1}{\operatorname{tg}B}\right)$. Но $\operatorname{ctg}C=\operatorname{ctg}(180°-(A+B))=-\operatorname{ctg}(A+B)$ и тогда левая часть равенства (1) примет вид $\frac{1}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}-\frac{1}{\operatorname{tg}(A+B)}\cdot\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$.

Используя формулу тангенса суммы, получим

$$\frac{1}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}-\frac{(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A)}{(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{1-1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=1,$$

т. е. равенство (1) верно и в этом случае. ■

10.291. а) «$<$»; б) «$<$»; в) □ в данном случае $0\leqslant\sin\alpha<1$, $0\leqslant\cos\alpha<1$, а потому $\sin^{1/3}\alpha>\sin^2\alpha$ и $\cos^{1/3}\alpha>\cos^2\alpha$. Сложив почленно последние неравенства, получим $\sin^{1/3}\alpha+\cos^{1/3}\alpha>\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, откуда $\sqrt[3]{\sin\alpha}+\sqrt[3]{\cos\alpha}>1$ ■; г) «$>$».

10.293. 0. **10.294.** Да.

10.295. □ Прологарифмировав данные равенства по основанию 10, получим $\lg x=\cos t$, $\lg y=\sin t$. Тогда $\cos^2 t+\sin^2 t=\lg^2 x+\lg^2 y$ или $\lg^2 x+\lg^2 y=1$. ■

10.296. $\lg^{2/3}u+\lg^{2/3}v=1$. **10.297.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.298.** $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

10.299. □ Если равенство $\sin^n x+\cos^n x=1$ является тождеством, то оно выполняется и при $x=\pi/4$. Тогда получим

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=1\Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=1\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=\frac{1}{2}\Rightarrow(\sqrt{2})^n=2.$$

Последнее равенство справедливо только при $n=2$: если $n>2$, то $(\sqrt{2})^n>2$, а если $n<2$, то $(\sqrt{2})^n<2$. Значит, и данное равенство тождественно только при $n=2$. ■

10.300. Если $k=0$, то $y>1$; если $k=1$, то $y\geqslant 1$; если $k=2$, то $y=1$; если $k=3$, то $0<y\leqslant 1$. **10.301.** $\sin^2 6°=0{,}5\ (1-\sqrt{1-\sin^2 12°})$. **10.302.** Минус.

10.303. □ Сначала упростим левую часть данного равенства:

$$\log_a \sin 40°+\log_a \operatorname{tg} 40°-\log_a \cos 40°=\log_a \frac{\sin 40° \sin 40°}{\cos 40° \cos 40°}=2\log_a \operatorname{tg} 40°=b.$$

Теперь упростим искомую сумму и получим

$$\log_a \sin 50°+\log_a \operatorname{tg} 50°-\log_a \cos 50°=2\log_a \operatorname{tg} 50°=2\log_a \operatorname{ctg} 40°=$$

$$=2\log_a \frac{1}{\operatorname{tg} 40°}=-2\log_a \operatorname{tg} 40°=-b. \ ■$$

10.304. □ Так как $0<\operatorname{tg} 40°<1$, а $\operatorname{tg} 70°>1$, то при любом a числа $\log_a \operatorname{tg} 40°$ и $\log_a \operatorname{tg} 70°$ имеют разные знаки, т. е. $\log_a \operatorname{tg} 40° \cdot \log_a \operatorname{tg} 70°<0$. Значит, данное число не существует. ■

10.305. □ Воспользуемся тем, что $\arcsin(\sin x)=x$, если $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$. Отсюда находим: $f(1)=\arcsin(\sin 1)=1$, так как $0<1<\pi/2$; $f(2)=\arcsin(\sin 2)=$ $=\arcsin(\sin(\pi-2))=\pi-2$, так как $\pi/2<2<\pi$, а $0<\pi-2<\pi/2$; $f(3)=\pi-3$; $f(4)=\pi-4$; $f(5)=5-2\pi$; $f(6)=6-2\pi$; $f(7)==7-2\pi$. ■

10.306. $x=0$.

10.307. □ При решении уравнения $\sin 2x+7\cos 2x+7=0$ были использованы формулы $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и $\cos 2x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, которые справедливы при условии $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. Поэтому сначала нужно было подставить значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ в данное уравнение. Тогда получим $\sin(\pi+2\pi n)+7\cos(\pi+$ $+2\pi n)+7=0$; $0+7(-1)+7=0$, т. е. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ — корни уравнения. После этого следует решить уравнение указанным в условии способом и найти вторую серию корней. ■

Замечание. Потери корней не произойдет, если применить формулы синуса и косинуса двойного угла. В этом случае получим

$2\sin x\cos x+7(\cos^2 x-\sin^2 x)+7(\cos^2 x+\sin^2 x)=0$;
$2\sin x\cos x+14\cos^2 x=0$; $2\cos x(\sin x+7\cos x)=0$.

Отсюда:

1) $\cos x=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$;

2) $\sin x+7\cos x=0$ $(\cos x\neq 0)$; $\operatorname{tg} x+7=0$; $\operatorname{tg} x=-7$;
$x=\operatorname{arctg}(-7)+\pi n=\pi n-\operatorname{arctg} 7$.

10.308. □ Для сравнения $\sin 2x$ и $2\sin x$ находим их разность:

$A=\sin 2x-2\sin x=2\sin x\cos x-2\sin x=2\sin x(\cos x-1)$.

Воспользуемся неравенствами $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ и $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. Вычитая по 1 из всех частей второго неравенства, получим $-2\leqslant\cos x-1\leqslant 0$. Таким образом, имеем:

если $-1\leqslant\sin x\leqslant 0$, то $A=2\sin x(\cos x-1)\geqslant 0$, т. е. если $2\pi n-\pi\leqslant x\leqslant$ $\leqslant 2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$, то $\sin 2x\geqslant 2\sin x$;
если $0\leqslant\sin x\leqslant 1$, то $A=2\sin x(\cos x-1)\leqslant 0$, т. е. если $2\pi n\leqslant x\leqslant\pi+$ $+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$, то $\sin 2x\leqslant 2\sin x$. ■

Замечание. Этот результат можно наглядно проиллюстрировать графически, построив на одном рисунке графики функций $y=\sin 2x$ и $y=2\sin x$.

10.309. а) $2\pi n-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; б) $\pi n-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **10.310.** $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$, если $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **10.311.** $m=-1/4,\ M=1/4$.

10.313. □ Рассмотрим разность $y-2$ и применим формулы понижения степени:

$$y-2=(a-b)\,\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-2=$$

$$=\frac{2a-2b-2a\cos 2x+2b\cos 2x+a+b+a\cos 2x+b\cos 2x-8}{4}=$$

$$=\frac{(3a-b-8)+(3b-a)\cos 2x}{4}.$$

Согласно условию, $y-2=0$ тождественно, а это возможно, если $3a-b-8=0$, $3b-a=0$. Решив эту систему, находим $a=3$, $b=1$. ■

10.314. □ Сначала выразим $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$. Имеем

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+$$
$$+\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)=\sin\alpha(2-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Следовательно, $\sin 30°=3\sin 10°-4\sin^3 10°$, откуда $3\sin 10°-4\sin^3 10°=0{,}5$ или $8\sin^3 10°-6\sin 10°+1=0$. Положим $\sin 10°=x$ и рассмотрим функцию $f(x)=8x^3-6x+1$. При $x=0{,}1$ получим $f(0{,}1)=8\cdot 0{,}001-6\cdot 0{,}1+1>0$ (1), а при $x=0{,}2$ получим $f(0{,}2)=8\cdot 0{,}008-6\cdot 0{,}2+1<0$ (2). Из неравенств (1) и (2) следует, что корень функции $f(x)$ существует и что он заключен между 0,1 и 0,2. Итак, $0{,}1<\sin 10°<0{,}2$. ■

10.315. $\sin 54°=(\sqrt{5}+1)/4$.

10.316. □ Имеем $\pi x^2=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$ или $\pi x^2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, т. е.

$x^2=2n\pm\frac{2}{3}$, откуда $x=\pm\sqrt{2n\pm\frac{2}{3}}$. Это возможно, если $2n+\frac{2}{3}\geqslant 0$ и $2n-\frac{2}{3}\geqslant 0$.

Первое неравенство выполняется при $n\geqslant -\frac{1}{3}$, а второе — при $n\geqslant\frac{1}{3}$. Отсюда следует, что в первом случае $n\geqslant 0$, а во втором $n\geqslant 1$. Итак, получаем ответ:

$x_1=\pm\sqrt{2n+\frac{2}{3}}$, где $n\in\mathbf{Z},\ n\geqslant 0$; $x_2=\pm\sqrt{2n-\frac{2}{3}}$, где $n\in\mathbf{N}$. ■

10.317. $x=4n^2$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $n\geqslant 0$. **10.318.** $x=0$ при $a\in\mathbf{R}$. **10.319.** $[2\pi n,\ \pi+2\pi n),\ n\in\mathbf{Z}$.

10.320. $\left(\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \frac{5\pi}{12}+\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}$. **10.321.** 0; $[\pi/3,\ \pi/2]$. **10.322.** $-7/24$. **10.323.** $-\sqrt{3}/2$.

10.324. □ Имеем

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\sqrt{1-\frac{9}{25}}\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{3+8\sqrt{2}}{15}.\ ■$$

10.325. □ Так как $\operatorname{arctg} 1=\pi/4<1$, а $\operatorname{tg} 1>\operatorname{tg} 45°=1$, то $\operatorname{tg} 1>\operatorname{arctg} 1$. ■

10.326. □ Имеем $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\frac{\pi}{2}$, $0<\operatorname{arctg}\frac{5}{8}<\frac{\pi}{2}$, откуда $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}<\pi$. Используя формулу тангенса суммы двух углов, получим

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}}=\frac{28}{27}>1.$$

Следовательно, $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$. ■

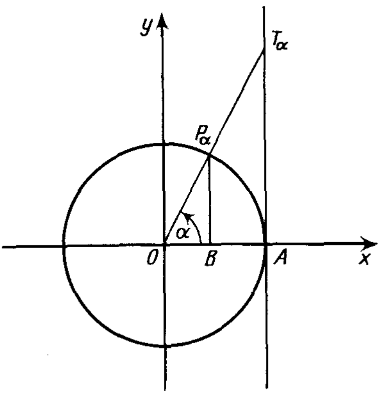

Рис. Р.10.50

10.327. $\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{2}{3}$.

10.328. □ Ордината точки T_α линии тангенсов есть $\operatorname{tg}\alpha$, а ордината точки P_α единичной окружности есть $\sin\alpha$ (рис. Р.10.50). Так как, по условию, $\operatorname{tg}\alpha=2\sin\alpha$, то $OB=1/2$. Отсюда вытекает следующий способ построения: из точки B оси Ox с координатой $1/2$ восставим перпендикуляр к этой оси до пересечения с окружностью в точке P_α, а затем точку P_α соединим с O; полученный угол $P_\alpha OB=\alpha$ — искомый. ■

10.329. 0,5.

10.330. □ Имеем $0<\log_7 3<1 \Rightarrow 0<1-\log_7 3<1 \Rightarrow 0<0{,}5\,(1-\log_7 3)<1 \Rightarrow \log_{1,7}(0{,}5\,(1-\log_7 3))<0$. ■

10.331. Минус. 10.332. Минус.

10.333. □Так как $\operatorname{arctg} 2>\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, то $\operatorname{arctg} 2>\pi/3$ и, значит, $\operatorname{arctg} 2>1$. Поэтому $\lg\operatorname{arctg} 2>0$. ■

10.334. Минус. 10.335. $a^{1/a}$, где $a>0$ и $a\neq 1$. 10.336. 3. 10.337. 12,5. 10.338. 4. 10.339. 0.

10.340. □ Произведение равно нулю, так как среди множителей есть число $\lg\operatorname{tg} 45°=0$. ■

10.341. 0. 10.342. 0.

10.343. 0,3010. ● Привести все множители к основанию 10.

10.344. □ Упростим искомое выражение: $\log_2 36=2\log_2 6=2\,(1+\log_2 3)$ (1); кроме того, $\log_{12} 9=2\log_{12} 3=\frac{2\log_2 3}{\log_2 12}=\frac{2\log_2 3}{2+\log_2 3}$. По условию, $\frac{2\log_2 3}{2+\log_2 3}=m$. Из этого равенства находим $\log_2 3=\frac{2m}{2-m}$, где $m\neq 2$. Теперь подставим найденное значение $\log_2 3$ в равенство (1) и получим $\log_2 36=\frac{2\,(2+m)}{2-m}$, $m\neq 2$. ■

10.345. Минус.

10.346. □ Поскольку $2<\log_2 5<3$, число $\log_2 5$ не является целым. Предположим, что $\log_2 5=m/n$, где m и n — натуральные числа. Согласно определению логарифма, $2^{m/n}=5$. Возведя обе части этого равенства в степень n, получим $2^m=5^n$, что возможно только при $m=n=0$, а это противоречит тому, что m и n — натуральные числа. Поэтому число $\log_2 5$ не является дробным. Итак, число $\log_2 5$ — иррациональное. ■

10.347. Равенство верно при $a=b/(b-1)$, где $b>1$.

10.349. □ Неравенство $2\log_a \frac{1}{2}>3\log_a \frac{1}{2}$ верно только тогда, когда $a>1$; в этом случае $\log_a \frac{1}{2}<0$ и при сокращении на $\log_a \frac{1}{2}$ знак указанного неравенства следует изменить на противоположный, в результате чего получится верное неравенство $2<3$. ■

10.350. □ Имеем:

$$\log_{bc} ab=\log_{bc} a+\log_{bc} b; \tag{1}$$

$$\log_b a=\frac{\log_{bc} a}{\log_{bc} b}\Rightarrow \log_{bc} a=m\log_{bc} b=m\frac{1}{1+\log_b c}=m\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n+1}; \tag{2}$$

$$\log_c b=\frac{\log_{bc} b}{\log_{bc} c}\Rightarrow \log_{bc} b=n\log_{bc} c=n\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим $\log_{bc} ab=$ $=\frac{n(m+1)}{n+1}$. ■

10.351. 1000^q. **10.353.** $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4}}{2}$. **10.354.** а) $0{,}8^{-1,4}$; б) $\log_{1/3} 0{,}5$.

10.355. □ Находим $\lg 2^{100}=100\lg 2\approx 100\cdot 0{,}3010=30{,}10$. Значит, число 2^{100} содержит 31 цифру. ■

10.356. $\frac{1}{b_1^{-1}+b_2^{-1}+\ldots+b_k^{-1}}$. **10.357.** 2 кв. ед. **10.358.** $c=1000$. **10.359.** $2^{14}+2^{12}+$ $+2^{10}+\ldots+2^2+2^0$. **10.360.** $a-b$. **10.361.** $xy=0{,}5\,(2a^2\pm\sqrt{2\,(a^4+b^4)})$.

10.362. □ Четное число, не кратное четырем, можно записать в виде $(2n+1)\cdot 2=$ $=4n+2$, $n\in\mathbb{Z}$. Из последней формулы видно, что это число при делении на 4 дает в остатке 2. Предположим, что $4n+2=p^2-q^2$, где $p\in\mathbb{N}$ и $q\in\mathbb{N}$, и рассмотрим следующие случаи:

1) Если p и q — четные числа, то $p^2-q^2=(2k)^2-(2m)^2=4\,(k^2-m^2)$, т. е. при делении заданного числа на 4 в остатке получается 0.

2) Если же p и q — нечетные числа, то $p^2-q^2=(2k+1)^2-(2m+1)^2=$ $=4\,(k^2-m^2)+4\,(k-m)$, т. е. заданное число снова кратно четырем.

3) Если, наконец, одно из чисел p или q четно, а другое нечетно, то $p^2-q^2=(2k+1)^2-(2m)^2=4\,(k^2-m^2)+4k+1$, т. е. при делении числа на 4 в остатке получается 1.

Итак, ни при каких $p\in\mathbb{N}$ и $q\in\mathbb{N}$ число p^2-q^2 при делении на 4 не дает в остатке 2, откуда следует, что число $4n+2$ нельзя представить в виде p^2-q^2. ■

10.363. $\sqrt[512]{a^{511}}$. **10.366.** $\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $\pi n-\frac{\pi}{6}<x<\pi n$, $n\in \mathbb{Z}$. **10.368.** $a\%$ от b равно $b\%$ от a.

10.369. □ Примем первоначальную цену за 100%. Тогда после первого снижения новая цена окажется равной $100\%-15\%=85\%$ первоначальной. Второе снижение цены на 20% по отношению к первому составит $85\%\cdot 0{,}2=17\%$ от первоначальной цены. Таким образом, после второго снижения новая цена будет равна $85\%-17\%=68\%$ первоначальной. Итак, общее снижение цены составляет $100\%-68\%=32\%$. ■

10.370. За 1,875 ч. **10.371.** За 7,5 ч. **10.372.** $x=55$.

10.373. □ а) Имеем $S_n=n^2$ или $\frac{a_1+a_n}{2}\,n=n^2$. Так как $n\neq 0$, то $a_1+a_n=2n$, откуда $a_n=2n-a_1$. Это линейная функция относительно n и, значит, такая прогрессия существует.

б) $S_n=n^3\Rightarrow\frac{a_1+a_n}{2}\,n=n^3\Rightarrow a_n=2n^2-a_1$ — квадратичная функция относительно n; поэтому такой прогрессии не существует. ■

10.374. $x\in(1/2,\ 2)$.

10.375. □ Пусть b_1, b_2, ..., b_{2n} — геометрическая прогрессия со знаменателем q и числом членов $2n$; тогда $S_{2n}=\frac{b_1\,(q^{2n}-1)}{q-1}$, $q\neq 1$. Далее, пусть b_1, b_3, ..., b_{2n-1} — геометрическая прогрессия, составленная из членов предыдущей, расположенных на нечетных местах; тогда ее знаменатель равен q^2, а число членов n и, следовательно, $S_n=\frac{b_1\,(q^{2n}-1)}{q^2-1}$, $q\neq\pm 1$. Так как, по условию, $S_{2n}=3S_n$, то получаем уравнение $\frac{b_1\,(q^{2n}-1)}{q-1}=\frac{3b_1\,(q^{2n}-1)}{q^2-1}$, откуда, сократив на $\frac{b_1\,(q^{2n}-1)}{q-1}\neq 0$, находим $q=2$. ■

10.376. $1/(1-2^x)$.

10.377. □ Расположим данные числа в порядке возрастания: $a<b<c$. Предположим, что a, b и c — члены арифметической прогрессии с разностью d и номерами n, m и p; тогда

$$a=a_n=a_1+d\,(n-1);\ b=a_m=a_1+d\,(m-1);\ c=a_p=a_1+d\,(p-1). \qquad (1)$$

Находим $c-a=d\,(p-1-n+1)=d\,(p-n)$, $c-b=d\,(p-1-m+1)=d\,(p-m)$, откуда $\frac{c-a}{c-b}=\frac{p-n}{p-m}$. Так как n, m и p — натуральные числа, то $p-n=A\in\mathbb{N}$, $p-m=B\in\mathbb{N}$ и $\frac{c-a}{c-b}=\frac{A}{B}$ (2). Равенство (2) показывает, что n, m и p можно подобрать так, чтобы получилось рациональное число $\frac{c-a}{c-b}$. Таким образом, на поставленный в условии вопрос следует дать положительный ответ. ■

Пусть, например, $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=2$. Тогда $\frac{c-a}{c-b}=\frac{2-\frac{2}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}$; значит, $p-n=8$, $p-m=3$. Положим, например, $p=9$; следовательно, $n=1$, $m=6$. Подставив эти значения, а также a, b и c в равенства (1), получим $\frac{2}{3}=a_1+0\cdot d$, $\frac{3}{2}=a_1+5d$, $2=a_1+8d$. Отсюда находим $a_1=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{6}$ и получаем следующую арифметическую прогрессию: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{6}$; 2; ... (в ней первый, пятый и восьмой члены — заданные рациональные числа).

10.378. 2,4.

10.379. □ Находим разность

$$y_{n+1}-y_n=\frac{10\,(n+1)+7}{2\,(n+1)}-\frac{10n+7}{2n}=\frac{10n^2+10n+7n-10n^2-7n-10n-7}{2n\,(n+1)}=$$

$$=\frac{-7}{2n\,(n+1)}<0 \text{ при любом } n\in\mathbf{N}.$$

Итак, $y_{n+1}-y_n<0$; значит, $y_{n+1}<y_n$, т. е. последовательность убывает. ■

10.380. а), б) Возрастающие; в) не монотонная; г) убывающая.

10.381. □ Используя определение факториала, находим $\frac{1\cdot2\cdot3...n}{n!\,(n+1-1)}=\frac{1}{n}$. ■

10.382. $(n+3)/(n+1)$. **10.383.** $(n+2)/(n+1)$. **10.384.** $1/(n+2)$.

10.385. □ Оценим левую часть доказываемого неравенства:

$$f(n)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+...+\frac{1}{1\cdot2\cdot3...n}<$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}.$$

Последнее выражение представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 1/2. Следавательно,

$$f(n)<\frac{1-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}<2 \text{ при любом } n\in\mathbf{N}.\ ■$$

10.386. □ Имеем

$$f(n)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{3\cdot3}+...+\frac{1}{n\cdot n}<$$

$$<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{(n-1)\,n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Итак, мы доказали, что $f(n)<\frac{n-1}{n}$. ■

10.387. □ Так как числа p и q — простые, то они являются нечетными. Следовательно,

$$p^2-q^2=(2n+1)^2-(2k+1)^2=2\ (n+k+1)\cdot 2\ (n-k)=4\ (n+k+1)\ (n+k-2k)=$$
$$=4\ (n+k+1)\ (n+k)-8\ (n+k+1)\ k\ \ (n\geqslant 2,\ k\geqslant 2).$$

Заметим, что $(n+k+1)\ (n+k)$ — это произведение двух последовательных натуральных чисел; значит, одно из них кратно 2, т. е. первое слагаемое делится на 8. Второе слагаемое также кратно 8, т. е. p^2-q^2 делится на 8. Пусть число p имеет вид $p=3r+1$, где $p>3$, т. е. $r\geqslant 1$. Так как p должно быть нечетным, то $r=2m\ (m\in\mathbb{N})$, откуда $p=6m+1$. Аналогично устанавливаем, что $q=6l+1$. Таким образом, $p^2-q^2=(6m+1)^2-(6l+1)^2=36\ (m^2-l^2)+12\ (m-l)$, откуда видно, что p^2-q^2 делится на 3. Итак, p^2-q^2 делится на 8 и на 3, т. е. на 24.

Для полноты доказательства следует рассмотреть еще случай, когда $p=6m-1$ и $q=6l-1$. В этом случае получаем тот же результат. ■

10.390. □ Требуется доказать, что

$$S\ (n)=1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\ (2n^2-1).$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $n=1$ утверждение справедливо. В самом деле, $S\ (1)=1^3=1$; с другой стороны, $n^2\ (2n^2-1)=1^2\ (2\cdot 1^2-1)=1$. Итак, равенство $S\ (n)=n^2\ (2n^2-1)$ при $n=1$ справедливо.

Предположим теперь, что утверждение верно при $n=k$, т. е. $S\ (k)=k^2\ (2k^2-1)$, и докажем, что оно верно и при $n=k+1$, т. е.

$$S\ (k+1)=(k+1)^2\ (2\ (k+1)^2-1)=(k^2+2k+1)\ (2k^2+4k+1)=$$
$$=2k^4+8k^3+11k^2+6k+1.$$

Действительно,

$$S\ (k+1)=S\ (k)+(2\ (k+1)-1)^3=k^2\ (2k^2-1)+(2k+1)^3=$$
$$=2k^4-k^2+8k^3+12k^2+6k+1=2k^4+8k^3+11k^2+6k+1.$$

Итак, из справедливости равенства при $n=k$ следует его справедливость и при $n=k+1$. Согласно принципу математической индукции, заключаем, что равенство верно при любом $n\in\mathbb{N}$. ■

10.395. □ Сначала докажем, что $|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|$. Для этого рассмотрим различные случаи сложения действительных чисел:

если $\alpha_1\geqslant 0$ и $\alpha_2\geqslant 0$, то $|\alpha_1+\alpha_2|=|\alpha_1|+|\alpha_2|$;

если $\alpha_1<0$ и $\alpha_2<0$, то $|\alpha_1+\alpha_2|=|\alpha_1|+|\alpha_2|$;

если α_1 и α_2 имеют разные знаки, то $|\alpha_1+\alpha_2|=||\alpha_1|-|\alpha_2||<|\alpha_1|+|\alpha_2|$.

Итак, неравенство $|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|$ верно.

Докажем теперь, что $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$. Для случая $n=2$ это только что доказано. Предположим, что верно неравенство $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|$, и докажем, что тогда верно и неравенство $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{k+1}|$. Имеем

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}|\leqslant|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k|+|\alpha_{k+1}|\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|+|\alpha_{k+1}|,$$

т. е. из справедливости неравенства при $n=k$ вытекает его справедливость при $n=k+1$. В силу принципа математической индукции заключаем, что неравенство верно при любом $n\in\mathbb{N}$. ■

ГЛАВА 11

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11.001. -3. **11.002.** 0,8. **11.003.** 0. **11.004.** $-145/42$.

11.005. □ Числитель и знаменатель данной дроби представляют собой квадратичные функции относительно $\sqrt{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}=\frac{5}{-1}=-5.\ ■$$

11.006. 1.

11.007. □ Разложим знаменатель дроби на множители: $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3=(\sqrt[3]{x}-1)^2+4\sqrt[3]{x}-4=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+3)$. Теперь, сократив дробь на $\sqrt[3]{x}-1\neq 0$ при $x\to 0$, находим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}+3}=0{,}25$. ■

11.008. -1. **11.009.** 1,5.

11.010. □ Умножив числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{2x+3}+1)(\sqrt{5+x}+2)$, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3-1)(\sqrt{5+x}+2)}{(5+x-4)(\sqrt{2x+3}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{5+x}+2)}{\sqrt{2x+3}+1}=\frac{2\cdot 4}{2}=4.\ ■$$

11.011. □ Находим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{3x-9}=2\frac{1}{3}\quad (1),\quad 5+\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{8-x^3}=5-2\frac{2}{3}=2\frac{1}{3}\quad (2).$$

Из (1) и (2) следует, что данное равенство верно. ■

11.012. Верно. **11.013.** Неверно.

11.014. □ Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}=\frac{3}{2}$. Для нахождения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{x+1}$ и 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Итак, получаем неравенство $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}<\cos\frac{\pi}{10}$, которое неверно, поскольку $\left|\cos\frac{\pi}{10}\right|<1$. ■

11.015. Неверно. **11.016.** Неверно. **11.017.** Верно.

11.018. □ Находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x(x+2)}=1{,}5;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=\lim_{x\to 2}\frac{2^x\cdot 4-16}{(2^x)^2-(2^2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4\,(2^x-4)}{(2^x-4)\,(2^x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{2^x+4}=0,5.$$

Итак, получаем $1,5-0,5=1$, т. е. данное равенство верно. ■

11.019. $y'=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+7x^2\sqrt{x}-\frac{3}{x^4}$. **11.020.** а) $y'=6x\,(x^4-x^2+1)^2\,(2x^2-1)$; б) $y'=\frac{2x^3-6x^2+6x-1}{(x-1)^2}$. **11.021.** а) $y'=\frac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$; б) $y'=\frac{12}{(x-10)\,(x+2)\ln 10}$.

11.022. а) $y'=\frac{2x\,(6x-7)}{3\,\sqrt[3]{(4x^3-7x^2+1)^2}}$; б) $y'=e^x\,(\sin 2x+\sin^2 x+1)$.

11.023. □ а) Запишем данную функцию в виде $y=(x^2-1)^{1/3}\,(x^4-1)$, откуда

$$y'=\frac{1}{3}\,(x^2-1)^{-2/3}\cdot 2x\,(x^4-1)+(x^2-1)^{1/3}\cdot 4x^3=$$

$$=\frac{2x\,(x^4-1)}{3\,\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}+4x^3\,\sqrt[3]{x^2-1}=\frac{2x\,(x^2-1)\,(7x^2+1)}{3\,\sqrt[3]{(x^2-1)^2}};\ ■$$

б) $y'=\frac{x}{x^2-1}$.

11.024. а) $y'=e^{x^3-5x^2}\,(3x^2-10x)$; б) $y'=\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{3\,\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2\,\sqrt[3]{x}}{3\,\sqrt[3]{1-x}}=\frac{1-3x}{3\,\sqrt[3]{x^2\,(1-x)}}$.
11.025. а) $y'=\frac{5x+2}{3\,\sqrt[3]{x}}$; б) $y'=\frac{8}{\sin^2 4x}$. **11.026.** а) $y'=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$; б) $y'=1+\cos 2x$. **11.027.** а) $y'=-3\sin 6x$; б) $y'=\frac{1}{2}\sin x$. **11.028.** а) $y'=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$; б) $y'=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$. **11.029.** $y'=2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1$. **11.030.** а) $y'=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$; б) $y'=-\frac{3\sqrt{1+x^2}}{x^4}$. **11.031.** а) $y'=-\frac{2}{\sqrt{(x^2-2)^3}}$; б) $y'=-\frac{2}{x^2\sqrt{2-x^2}}$. **11.032.** а) $y'=3x^2\cos 2x-2\,(x^3+1)\sin 2x$; б) $y'=2\sin 2x$. **11.033.** а) $y'=\frac{5x^2+1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}$; б) $y'=\frac{1}{x}$.
11.034. $x=e^{-1}$. **11.035.** $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 5/2)$. **11.036.** $[-4,\ -3]$. **11.037.** $x_1=3$, $x_2=4$.

11.038. □ Сначала находим $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+2\,\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{2}{(x+1)^2}$. Теперь, полагая $x=1$, получим $f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$. ■

11.039. 4/9. **11.040.** 2/3. **11.041.** −2. **11.042.** 1/8. **11.043.** 1/8. **11.044.** −2. **11.045.** 0.
11.046. □ Имеем

$$f'(x)=\frac{-\sin x\,(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}.\ ■$$

11.047. 1. **11.048.** 1/30. **11.049.** 39. **11.050.** 7/6. **11.051.** 1. **11.052.** $-1/2$. **11.053.** $3\ln 2$. **11.054.** $3\sqrt{2}/8$. **11.055.** $0{,}5\ln 2$. **11.056.** -3. **11.057.** -1. **11.058.** $2/\sqrt{\pi}$. **11.059.** 1. **11.060.** а) $f''(x)=2\ln x+3-4\cos 2x$; $f''(1)=3-4\cos 2$; $f''(\pi)=2\ln\pi-1$; б) $f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{9}\sin\frac{x}{3}$; $f''(3)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin 1$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{18}$. **11.061.** $y'(0)<0$.
11.062. Убывает от 1,5 до 0,25. **11.063.** $[-8,\ 8]$. **11.065.** Возрастает от 0 до $\ln 9$.
11.066. $[-1,\ 4]$ и $(-1,\ 4)$. **11.068.** $a=-1$, $b=1$.

11.069. □ Находим $f'(x)=5\cos x-3\sin x$, $f'(0)=5$. Согласно условию, имеем уравнение $5=5\cos x-3\sin x\Rightarrow 5\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=5\Rightarrow$ $\Rightarrow -2\sin\frac{x}{2}\left(5\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}\right)=0$, откуда $\sin\frac{x}{2}=0$ либо $5\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}=0$. Из первого уравнения получаем $x_1=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, а из второго $x_2=$ $=2\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi n=2\pi n-2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

11.070. $x_1=-7/3$, $x_2=0$. **11.071.** $g'(0)=0$.

11.073. □ Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке $x=0$, должно выполняться равенство $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0\ (x<0)} f'(x)$. Если $x\geqslant 0$, то $f'(x)=$ $=-p\sin x+q\cos x$, т. е. $f'(0)=q$; если же $x<0$, то $f'(x)=p$ и $\lim\limits_{x\to 0\ (x<0)} f'(x)=p$, откуда следует, что $p=q$. Однако, по условию, $p\neq q$ и, значит, при $x=0$ данная функция не дифференцируема. ■

11.074. □ Для уравнения $0{,}5\,(x^2-\cos x)=7{,}8$ (1) рассмотрим функцию $\varphi(x)=$ $=0{,}5\,(x^2-\cos x)-7{,}8$. Найдем знаки $\varphi(2\pi)$ и $\varphi(3\pi)$. Имеем $\varphi(2\pi)=$ $=0{,}5\,(4\pi^2-1)-7{,}8=2\pi^2-8{,}3$; так как $3<\pi<4$, то $18<2\pi^2<32$, т. е. $\varphi(2\pi)>0$; аналогично, $\varphi(3\pi)=4{,}5\pi^2-7{,}3$, т. е. $\varphi(3\pi)>0$. Таким образом, на $[2\pi,\ 3\pi]$ функция $\varphi(x)$ непрерывна, возрастает (сообразите, почему) и не меняет знак на концах интервала; значит, уравнение (1) на $[2\pi,\ 3\pi]$ не имеет корней. Проведя аналогичные рассуждения для уравнения $f'(x)=7{,}8$, заключаем, что на промежутке $[2\pi,\ 3\pi]$ оно имеет по крайней мере один корень. ■

11.075. $a>3$.

11.076. □ Первая сумма — это сумма n членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=x$, $q=x$ и $x\neq 1$, т. е. $S_n=\frac{x\,(1-x^n)}{1-x}$. Вторая сумма представляет собой производную от первой суммы. Следовательно,

$$S_n'=\frac{(1-(n+1)x^n)\,(1-x)-x\,(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n-x+(n+1)x^{n+1}+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)\,x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.\ ■$$

11.078. $a>4$. **11.080.** $p>1$.

11.083. □ Имеем $y'=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.
Из уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=0$ находим $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Далее решаем

неравенства $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)>0$ и $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)<0$. Первое из них выполняется, если $2\pi n-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, а второе — если $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (рис. Р.11.1). Итак, данная функция возрастает на $\left(2\pi n-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$ и убывает на $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

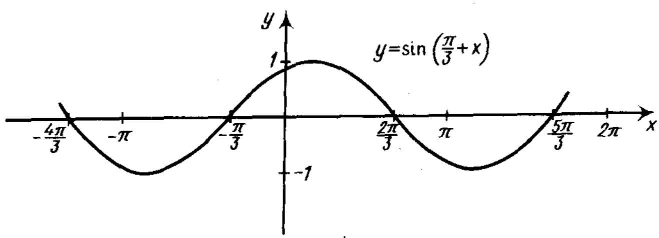

Рис. Р.11.1

11.084. Возрастает на $(-\infty, -1/2)$, убывает на $(-1/2, \infty)$. **11.085.** Возрастает на $(1, 3)$, убывает на $(-\infty, 1)$ и на $(3, \infty)$. **11.086.** Возрастает на $(-6, 0)$ и на $(0, 2)$, убывает на $(-\infty, -6)$ и на $(2, \infty)$. **11.087.** Возрастает на $(-\infty, 1)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(1, 2)$. **11.088.** Возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, \infty)$, убывает на $(-1, 0)$ и на $(0, 1)$; $f(x_1)<f(x_2)$. **11.089.** Возрастает на $(1, \infty)$, убывает на $(0, 1)$; $f(x_2)>f(x_1)$.

11.090. □ Сначала находим значения y на концах промежутка: $y(-2)=-24$, $y(2)=4$. Теперь найдем критические точки, принадлежащие промежутку $[-2, 2]$. Имеем $y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$; уравнение $y'=0$ имеет корень $x=1$, причем $y(1)=3$. Сравнивая между собой значения $y(-2)$, $y(2)$ и $y(1)$, заключаем, что $y_{\text{наим}}=-24$, $y_{\text{наиб}}=4$. ■

11.091. $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=17$. **11.092.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=3$. **11.093.** $y_{\text{наим}}=-10/3$, $y_{\text{наиб}}=-2$. **11.094.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=2{,}125$.

11.095. □ Сначала найдем значения $f(x)$ на концах промежутка: $f(0)=0$, $f(\pi/2)=0$. Далее находим

$$f'(x)=\frac{2\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$$

Решим уравнение $f'(x)=0$. Имеем:

$$\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0;$$

$$\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0; \qquad \cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0;\ \cos 2x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0.$$

Так как

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x},$$

то в результате придем к уравнению $\cos 2x\left(1+\frac{1}{1+\sin 2x}\right)=0$. Следовательно, $\cos 2x=0$ либо $\frac{2+\sin 2x}{1+\sin 2x}=0$. Из первого уравнения находим $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, а второе не имеет решений. Промежутку $[0, \pi/2]$ принадлежит только значение $x=\pi/4$, для которого $f(\pi/4)=1$. Итак, получаем ответ: $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=1$. ■

11.096. $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=3\sqrt{3}/8$. **11.097.** а) $y_{\text{наим}}=0{,}8$, $y_{\text{наиб}}=1$; б) $y_{\text{наим}}=1/\sqrt{5}$, $y_{\text{наиб}}=2/3$. **11.098.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=\pi/2$. **11.099.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=2\sqrt{3}/3$. **11.100.** $y_{\text{наим}}=0{,}5$, $y_{\text{наиб}}=0{,}75$. **11.101.** $y_{\text{наим}}=-\pi/4$, $y_{\text{наиб}}=\pi/4$. **11.102.** а) $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=1{,}25$; б) $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=1{,}25$. **11.103.** а) $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=\sqrt[3]{4/3}$; б) $y_{\text{наим}}=\sqrt[3]{9/2}$, $y_{\text{наиб}}=\sqrt[3]{1{,}8}$. **11.104.** а) $y_{\text{наим}}=-1{,}5$, $y_{\text{наиб}}=7$; б) $y_{\text{наим}}=2{,}5$, $y_{\text{наиб}}=9$. **11.105.** а) $y_{\text{наим}}=5$, $y_{\text{наиб}}=12$; б) $y_{\text{наим}}=-1/64$, $y_{\text{наиб}}=0$.

11.106. □ Находим $f'(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}}\ln 2\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}$; $f'(x)\neq 0$ при любом x; y' не существует при $x=0$.

а) Если $x\in[-8, -1]$, то $f(-8)=2^4=16$, $f(-1)=2$; значит, $y_{\text{наим}}=2$, $y_{\text{наиб}}=16$.

б) Если $x\in[-1, 1]$, то $f(-1)=2$, $f(1)=2$, $f(0)=1$, откуда $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=2$. ■

11.107. а) $y_{\text{наим}}=3$, $y_{\text{наиб}}=5$; б) $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=5$. **11.108.** $y_{\text{наим}}=2$, $y_{\text{наиб}}=2e^2-1$.

11.109. □ Имеем $f(0)=0$, $f(\pi/2)=0$. Далее находим

$$y'=-\sin x\sqrt{\sin x}+\cos x\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x=$$

$$=\frac{\cos^2 x-2\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{1-3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Таким образом, $y'=0$, если $\sin^2 x=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Промежутку $[0, \pi/2]$ принадлежит только $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. В результате получим $f\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}=2^{1/2}\cdot 3^{-3/4}$ — это наибольшее значение $f(x)$ на $[0, \pi/2]$. ■

11.110. □ Сначала исследуем поведение функции $f(x)$ при стремлении x к нулю справа и к π слева. Если $x\to 0$, то $f(x)\to+\infty$; если $x\to\pi$, то $f(x)\to+\infty$.

Теперь находим

$$f'(x)=2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{-\sin^2 x-(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2(2+\cos x)(-2\cos x-1)}{\sin^3 x}.$$

Значит, $f'(x)=0$, если $2\cos x+1=0$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Промежутку $(0,\ \pi)$ принадлежит только $x=2\pi/3$. Окончательно получим $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{2+(-0,5)}{0,5\sqrt{3}}\right)^2=3$ — это наименьшее значение $f(x)$ на $(0,\ \pi)$. ■

11.111. $y_{\text{наим}}=f(0)=2$.

11.112. □ Пусть x — первое слагаемое; тогда $18-x$ — второе слагаемое. Согласно условию, получим функцию $S(x)=x^2+(18-x)^2$, где, по смыслу задачи, $0<x<18$. Найдем наименьшее значение $S(x)$. Имеем $S'(x)=4x-36$; $S'(x)=0$ при $x=9$; если $0<x<9$, то $S'(x)<0$; если же $9<x<18$, то $S'(x)>0$. Итак, $x=9$ — точка минимума $S(x)$ и, значит, каждое из слагаемых равно 9. ■

11.113. 40; 60; 80. **11.114.** 0,5.

11.115. □ Пусть x и y (рис. P.11.2) — линейные размеры участка (в метрах); тогда площадь участка есть $xy=294$, откуда $y=294/x$. Длина всего забора выразится функцией $f(x)=3x+2y=3x+\frac{588}{x}=\frac{3x^2+588}{x}$, причем, по смыслу задачи, $x>0$. Далее имеем $f'(x)=\frac{3x^2-588}{x^2}$, откуда $f'(x)=0$ при $x=14$ (поскольку $x>0$). Если $0<x<14$, то $f'(x)<0$; если же $x>14$, то $f'(x)>0$; поэтому $x=14$ есть точка минимума функции $f(x)$. В результате получаем ответ: 14×21 м. ■

11.116. 18 дм^3.

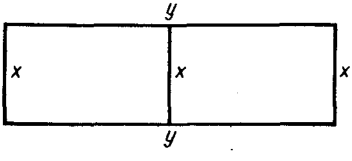

Рис. P.11.2

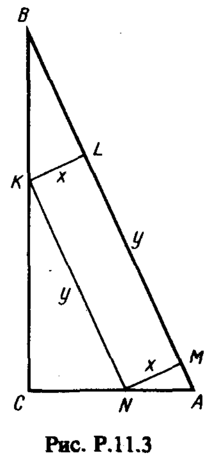

Рис. P.11.3

11.117. □ По условию, $AB=24$ см, $\angle A=60°$, откуда $\angle B=30°$ (рис. P.11.3). Пусть x и y — линейные размеры прямоугольника $MNKL$ (в сантиметрах). Выразим y через x. Из $\triangle KBL$: $BL=KL\operatorname{ctg}30°=x\sqrt{3}$; из $\triangle MNA$: $AM=MN\operatorname{ctg}60°=x\frac{\sqrt{3}}{3}$; тогда $y=ML=AB-BL-AM=24-x\sqrt{3}-x\frac{\sqrt{3}}{3}=$ $=24-\frac{4x\sqrt{3}}{3}$. Площадь прямоугольника $MNKL$ выразится функцией $S(x)=xy=x\left(24-\frac{4x\sqrt{3}}{3}\right)=24x-\frac{4x^2\sqrt{3}}{3}$. Далее имеем $S'(x)=24-\frac{8\sqrt{3}}{3}x$, откуда $S'(x)=0$ при $x=3\sqrt{3}$. Если $x<3\sqrt{3}$, то $S'(x)>0$, а если $x>3\sqrt{3}$, то $S'(x)<0$, т. е. $x=3\sqrt{3}$ — точка максимума $S(x)$. Итак, получаем ответ: $3\sqrt{3}\times 12$ см. ■

11.118. □ Пусть $BC=a$, $AF\perp BC$ и $AF=h$; $BMNK$ — параллелограмм, в котором $MN=x$ (рис. Р.11.4). Имеем $S_{BMNK}=$ $=MN\cdot LF$. Выразим LF через x; так как $\triangle MAN\sim\triangle BAC$, то $\frac{MN}{BC}=\frac{AL}{AF}$ или $\frac{x}{a}=\frac{h-LF}{h}$, откуда $LF=\frac{h(a-x)}{a}$. Площадь параллелограмма $BMNK$ выражается функцией $S(x)=x\frac{h(a-x)}{a}=\frac{h}{a}(ax-x^2)$. Далее находим $S'(x)=\frac{h}{a}(a-2x)$, откуда

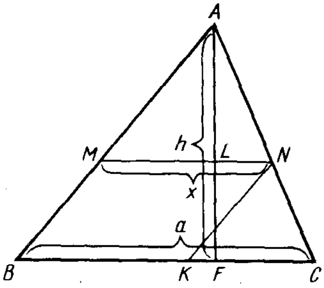

Рис. Р.11.4

$S'(x)=0$ при $x=a/2$. Если $x<a/2$, то $S'(x)>0$; если же $x>a/2$, то $S'(x)<0$, т. е. $x=a/2$ — точка максимума $S(x)$. Итак, площадь параллелограмма является наибольшей, если две его стороны представляют собой средние линии данного треугольника. ■

11.119. Прямоугольный треугольник с катетом a. **11.120.** 100 см. **11.121.** 12 и 9 см. **11.122.** 12 и 9 см.

11.123. □ Время, за которое велосипедист догонит пешехода, составит $6/9=$ $=2/3$ (ч). До встречи пешеход был в пути $\frac{6}{v}+\frac{2}{3}$ (ч) и прошел $v\left(\frac{6}{v}+\frac{2}{3}\right)$ (км). Этот же путь они преодолели обратно с одинаковой скоростью 4 км/ч и затратили время $\frac{v\left(\frac{6}{v}+\frac{2}{3}\right)}{4}$ (ч). Тогда время, затраченное пешеходом на всю прогулку, выразится функцией

$$t(v)=\frac{6}{v}+\frac{2}{3}+\frac{v\left(\frac{6}{v}+\frac{2}{3}\right)}{4}=\frac{6}{v}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{v}{6}=\frac{v^2+13v+36}{6v},\text{ где } v>0.$$

Находим

$$t'(v)=\frac{(2v+13)v-(v^2+13v+36)}{6v^2}=\frac{v^2-36}{6v^2},$$

откуда $t'(v)=0$ при $v=6$. Легко установить, что $v=6$ — точка минимума функции $t(v)$. Итак, получаем ответ: 6 км/ч. ■

11.124. 9 и 7,5 см. **11.125.** $2R=14\sqrt{2}$ см. **11.126.** 60°.

11.127. □ Пусть $\widehat{\overline{AB},\ \overline{AC}}=\varphi$ (рис. Р.11.5). Воспользуемся формулой $\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|}$. Учитывая, что $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, получим

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\,(\overline{AB}+\overline{BC})}{|\overline{AB}|\,|\overline{AB}+\overline{BC}|}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{AB}|\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{BC}}}.$$

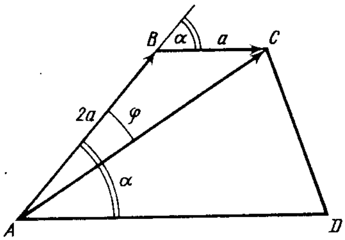

Рис. Р.11.5

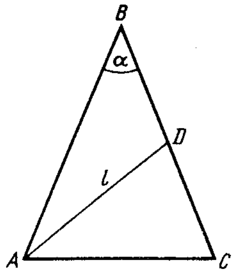

Рис. Р.11.6

Согласно условию, $|\overline{AB}|=2\,|\overline{BC}|$. Пусть $|\overline{BC}|=a$; тогда $|\overline{AB}|=2a$ и, следовательно, $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=|\overline{AB}|\,|\overline{BC}|\cos(\widehat{\overline{AB},\ \overline{BC}})=2a\cdot a\cos\alpha=2a^2\cos\alpha$. Тогда выражение для $\cos\varphi$ примет вид

$$\cos\varphi=\frac{4a^2+2a^2\cos\alpha}{2a\sqrt{4a^2+a^2+2\cdot 2a^2\cos\alpha}}=\frac{2a^2\,(2+\cos\alpha)}{2a\cdot a\sqrt{5+4\cos\alpha}}=\frac{2+\cos\alpha}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}=f(\alpha).$$

Далее находим

$$f'(\alpha)=\frac{-\sin\alpha\sqrt{5+4\cos\alpha}-(2+\cos\alpha)\dfrac{-2\sin\alpha}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}}{5+4\cos\alpha}=$$

$$=-\frac{\sin\alpha\,(5+4\cos\alpha-4-2\cos\alpha)}{\sqrt{(5+4\cos\alpha)^3}}=-\frac{\sin\alpha\,(1+2\cos\alpha)}{\sqrt{(5+4\cos\alpha)^3}}.$$

Значит, $f'(\alpha)=0$, если $\sin\alpha=0$ либо $1+2\cos\alpha=0$. Из первого уравнения получаем $\alpha=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, что не подходит (так как $0<\alpha<\pi$), а из второго $\alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Условию задачи удовлетворяет только $\alpha=2\pi/3$. При этом если $\alpha<2\pi/3$, то $\cos\alpha>-0{,}5$ и $f'(\alpha)<0$, а если $\alpha>2\pi/3$, то $\cos\alpha<-0{,}5$ и $f'(\alpha)>0$, т. е. $\alpha=2\pi/3$ — точка минимума функции $f(\alpha)$. В этой точке $\cos\varphi$ принимает наименьшее, а угол φ — наибольшее значение. Находим эти значения: $\cos\varphi=\dfrac{2-0{,}5}{\sqrt{5-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Итак, наибольшая величина угла BAC равна $\pi/6$ и достигается при $\alpha=2\pi/3$. ■

11.128. □ Пусть $AB=BC$, $\alpha=\angle ABC$, $AD=l$ — медиана к BC (рис. Р.11.6). Имеем $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\alpha$, т. е. $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2\sin\alpha$. Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов находим $l^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha=AB^2+\dfrac{AB^2}{4}-2AB\,\dfrac{AB}{2}\times$ $\times\cos\alpha=AB^2\left(\dfrac{5}{4}-\cos\alpha\right)$, откуда $AB^2=\dfrac{4l^2}{5-4\cos\alpha}$. Таким образом, $S_{\triangle ABC}=$ $=\dfrac{2l^2\sin\alpha}{5-4\cos\alpha}=S(\alpha)$, где $0<\alpha<\pi$ по смыслу задачи. При $\alpha\to 0$ и $\alpha\to\pi$ имеем $S(\alpha)\to 0$, причем $S(\alpha)>0$. Если на интервале $(0,\ \pi)$ функция $S(\alpha)$ имеет критическую точку, то в ней $S(\alpha)$ принимает наибольшее значение. Нахо-

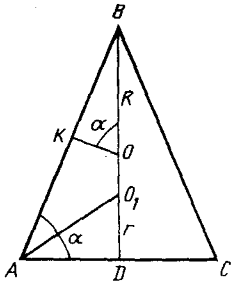

Рис. Р.11.7

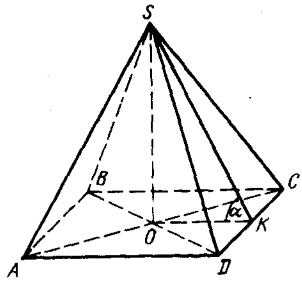

Рис. Р.11.8

дим $S'(\alpha)=2l^2\dfrac{5\cos\alpha-4}{(5-4\cos\alpha)^2}$; значит, $S'(\alpha)=0$, если $5\cos\alpha-4=0$, откуда $\cos\alpha=4/5$. Итак, площадь треугольника ABC является наибольшей при $\cos\alpha=4/5$. ■

11.129. $\alpha=\pi/3$; 1/2. ● Пусть в $\triangle ABC$ точки O и O_1 — центры описанной и вписанной окружностей, а R и r — радиусы этих окружностей (рис. Р.11.7). Выразить отношение r/R через α и исследовать полученную функцию $r/R=f(\alpha)=\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ на экстремум.

11.130. $H=R=\sqrt[3]{V/\pi}$.

11.131. □ Объем пирамиды S_{ABCD} (рис. Р.11.8) выражается формулой $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO$. Пусть $AD=a$; тогда $S_{ABCD}=a^2$, а из $\triangle SOK$ находим $SO=OK\,\mathrm{tg}\angle SKO=\dfrac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Значит, $V=\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{6}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (1). Далее, пусть $S_{\triangle SDC}=Q=\dfrac{1}{2}a\cdot SK$, где $SK=\dfrac{OK}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2\cos\alpha}$. Поэтому $Q=\dfrac{a^2}{4\cos\alpha}$, откуда $a=\sqrt{4Q\cos\alpha}$ (2). Подставив (2) в (1), получим

$$V=V(\alpha)=\frac{1}{6}(\sqrt{4Q\cos\alpha})^3\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4Q}{3}\sin\alpha\sqrt{Q\cos\alpha},$$

где $0<\alpha<\pi/2$ по смыслу задачи. Если $\alpha\to 0$ и $\alpha\to\pi/2$, то $V(\alpha)\to 0$, причем $V(\alpha)>0$ на $(0,\ \pi/2)$. Находим $V'(\alpha)=\dfrac{4}{3}Q^2\dfrac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sqrt{Q\cos\alpha}}$; $V'(\alpha)=0$, если $2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$; далее имеем $\mathrm{tg}^2\alpha=2$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\pm\sqrt{2}$; $\alpha=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Условию задачи удовлетворяет только значение $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. Итак, объем пирамиды является наибольшим при $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. ■

11.132. $a/2$; $H/2$. **11.133.** $\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}/2)$. **11.134.** $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. **11.135.** $\pi/3$. **11.136.** $\pi/4$.

11.137. □ По условию, $y=k/x$ или $k=xy$; значит, $k=9{,}6\cdot 3{,}05=29{,}28$. Если $y=30$, то $x=29{,}28/30\approx 0{,}98$; если $x=0{,}1$, то $y=29{,}28/0{,}1=292{,}8$. Расстояние от начала координат (0; 0) до точки $(x;\ y)$, лежащей на гиперболе, равно $\sqrt{x^2+y^2}$. Таким образом, нужно исследовать на экстремум функцию $f(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{k^2}{x^2}}$, где $x\in(0,\ \infty)$. Находим

$$f'(x)=\frac{2x-\dfrac{k^2}{x^4}\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+\dfrac{k^2}{x^2}}}=\frac{x\left(1-\dfrac{k^2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^2+\dfrac{k^2}{x^2}}}.$$

Значит, $f'(x)=0$, если $1-\dfrac{k^2}{x^4}=0$ или $x^4=k^2$, откуда $x=\sqrt{|k|}$. При $k>0$ имеем $y=k/\sqrt{k}=\sqrt{k}$, т. е. $x=y=\sqrt{k}$. Итак, $x=y\approx 5{,}4$. ■

11.138. $R=r$.

11.139. □ Имеем $y'=4x^3-12x=f(x)$. Находим значения функции $f(x)$ на концах промежутка $[-1, 3]$: $f(-1)=8$, $f(3)=72$. Теперь найдем критические точки функции $f(x)$, принадлежащие этому промежутку: $f'(x)=y''=12x^2-12=12(x^2-1)$; $f'(x)=0$, если $x=\pm 1$. Тогда получим $f(-1)=8$ (это значение было найдено ранее), $f(1)=-8$. Итак, $y'_{\text{наим}}=-8$, $y'_{\text{наиб}}=72$. ■

11.140. $y=x-e$. **11.141.** $y=3x-\pi$.

11.142. □ Угловой коэффициент касательной к графику функции $g(x)$ равен $k=g'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где x_0 — абсцисса точки касания, а α — угол наклона касательной к оси Ox. Находим

$$g'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1).$$

При $x_0=1$ получим $g'(1)=1$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=1$ и, значит, $\alpha=\pi/4$. ■

11.143. $y=x+1$.

11.144. □ Пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка касания. Так как касательная параллельна оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной в этой точке равен нулю. Имеем $y'=4(x-4)^2(x-1)$; $k=y'(x_0)=4(x_0-4)^2(x_0-1)=0$, откуда находим $(x_0)_1=4$, $(x_0)_2=1$ и, значит, $(y_0)_1=0$, $(y_0)_2=-27$. Итак, получаем искомые точки касания $(4;\ 0)$ и $(1;\ -27)$. ■

11.146. $\pi/3$.

11.148. □ Пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка касания. Угловой коэффициент касательной в этой точке есть $k=2$. Находим $y'=x^2-2x-1$; $k=y'(x_0)=x_0^2-2x_0-1=2$. Решив уравнение $x_0^2-2x_0-3=0$, получим $(x_0)_1=3$, $(x_0)_2=-1$, откуда $(y_0)_1=-2$, $(y_0)_2=2/3$. Итак, искомыми точками касания являются $(3;\ -2)$ и $(-1;\ 2/3)$. ■

11.149. $(2;\ 8/3)$ и $(3;\ 7/2)$. **11.150.** $3\pi/4$. **11.151.** $\pi/4$. **11.152.** $(1/2;\ -15/32)$.

11.153. $y=x/e$.

11.154. □ Чтобы найти точки пересечения данных кривых, решим систему уравнений $\begin{cases} y=2x^2-5, \\ y=x^2-3x+5, \end{cases}$ из которой получим $x_1=-5$, $x_2=2$ и $y_1=45$, $y_2=3$. Таким образом, имеем две точки пересечения: $A(-5;\ 45)$ и $B(2;\ 3)$. Далее найдем производные данных функций $y'=4x$ и $y'=2x-3$, а затем угловые коэффициенты касательных к заданным кривым в точке A: $k_1=4(-5)=-20$, $k_2=2(-5)-3=-13$. Значит, уравнения касательных в точке A имеют вид $y-45=-20(x+5)$ и $y-45=-13(x+5)$ или $y=-20x-55$ и $y=-13x-20$. Аналогично для точки B находим $k_1=8$ и $k_2=1$, а уравнения касательных запишутся в виде $y=8x-13$ и $y=x+1$. ■

11.155. □ Имеем $y'=\dfrac{10}{3}x^4-\dfrac{1}{3}x^2$; $y'(1)=3=\operatorname{tg}\alpha$, где α — острый угол, состав-

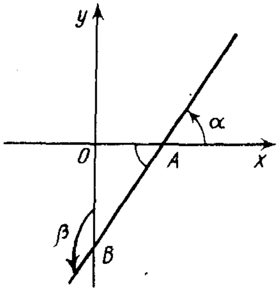

Рис. Р.11.9

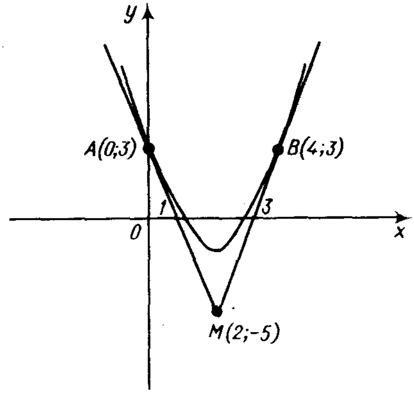

Рис. Р.11.10

ленный касательной с осью Ox ($\operatorname{tg}\alpha>0$). Пусть β — угол, составленный касательной с осью Oy (рис. Р.11.9); тогда $\beta=\angle AOB+\angle OAB$, т.е. $\beta=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}3$. ■

11.156. □ Полагая $x=2$, находим $y=4-8+3=-1\neq-5$, т. е. точка M не лежит на кривой и не является точкой касания. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка касания. Имеем $y'=2x-4$, $k=2x_0-4$. Составим уравнение касательной, проходящей через точку M:

$$-5-y_0=(2x_0-4)\ (2-x_0)\ \text{или}\ y_0=-5-(2x_0-4)\ (2-x_0). \qquad (1)$$

Поскольку точка $(x_0;\ y_0)$ лежит на кривой, получим $y_0=x_0^2-4x_0+3$ (2). Теперь, решив систему уравнений (1), (2), находим две точки касания: A (0; 3) и B (4; 3). Итак, существуют две касательные к данной кривой; одна из них имеет угловой коэффициент $k_1=-4$ и уравнение $y=-4x+3$, а другая — угловой коэффициент $k_2=4$ и уравнение $y=4x-13$ (рис. Р.11.10). ■

11.157. $x+ey-2e=0$. **11.158.** $y=8x+14$. **11.159.** (1; 0), $(-1/3;\ -44/27)$. **11.160.** (4; 3), (0; -1). **11.161.** а) $y=x-0{,}09$; б) $\pi/24$, $\pi/8$, $13\pi/24$, $5\pi/8$. **11.162.** а) $3\pi/4$; б) $7\pi/18$. **11.163.** $\pi/6$.

11.164. □ Поскольку $y(1)=8$, точка M лежит на кривой и является точкой касания. Находим $y'=-(5-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$. Следовательно, угловой коэффициент касательной $k=y'(1)=-2$, а уравнение касательной имеет вид $y=-2x+10$. Эта касательная пересекает координатные оси в точках A (0; 10) и B (5; 0), откуда $AB=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$. ■

11.165. □ Сначала составим уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке M (3; 2): $3x-2y-5=0$. Уравнения биссектрис координатных углов имеют вид $y=x$ и $y=-x$, причем эти биссектрисы взаимно перпендикулярны. Решив системы $\begin{cases}3x-2y-5=0,\\ y=x\end{cases}$ и $\begin{cases}3x-2y-5=0,\\ y=-x,\end{cases}$ находим точки пересечения касательной с биссектрисами: A (5; 5) и B (1; -1). Тогда получим прямоугольный треугольник OAB, площадь которого требуется найти. Имеем $OA=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, откуда $S_{\triangle ABC}=0{,}5OA\cdot OB=5$ (кв. ед.). ■

11.166. $S_1=S_2=S_3=8$ кв. ед.

11.167. □ Пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка касания, лежащая на кривой $y=x^2$. Тогда $y_0=x_0^2$, угловой коэффициент касательной $k=y'(x_0)=2x_0$, а уравнение касательной $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$ (1). Обозначим через AB отрезок любой касательной от точки $(x_0;\ y_0)$ до оси Ox, а через AC — проекцию этого отрезка на ось Ox (рис. Р.11.11). Из уравнения (1) находим абсциссу точки A: при $y=0$ получим $x=\frac{x_0}{2}$. Следовательно,

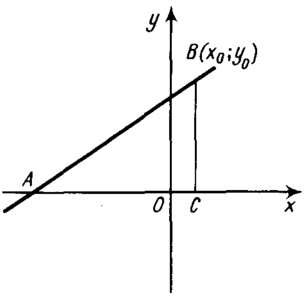

Рис. Р.11.11

$$AC=\left|x_0-\frac{x_0}{2}\right|=\left|\frac{x_0}{2}\right|. \qquad (2)$$

Аналогично, для кривой $y=x^4$ с той же абсциссой x_0 точки касания уравнение касательной имеет вид $y-x_0^4=4x_0^3(x-x_0)$. Полагая $y=0$, найдем абсциссу точки A: $x=\frac{3x_0^4}{4x_0^3}=\frac{3x_0}{4}$. Значит,

$$AC=\left|x_0-\frac{3x_0}{4}\right|=\left|\frac{x_0}{4}\right|. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что первая проекция вдвое больше второй. ■

11.169. □ Функция определена при $x>0$ и $x\neq 1$. Имеем $y'=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$; отсюда $y'=0$ при $\ln x-1=0$, т. е. при $x=e$. Составим таблицу:

Интервал	(0, 1)	(1, e)	(e, ∞)
y'	−	−	+
y	↘	↘	↗

Следовательно, $x=e$ — точка минимума. ■

11.170. $x=1/e$ — точка максимума. **11.171.** $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума. **11.172.** $x=3$ — точка максимума. **11.173.** $y_{\min}=0{,}25-\ln 2$ при $x=0{,}5$. **11.174.** $x=\ln 2$ — точка максимума; $\pi/4$. **11.175.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ — точки максимума; $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ — точки минимума; $\pi/4$.

11.176. □ Имеем $y'=\frac{x}{1+x}$; $y'=0$ при $x=0$, причем если $-1<x<0$, то $y'<0$, а если $x>0$, то $y'>0$. Значит, $x=0$ — точка минимума.

Подставив в уравнение прямой $y=kx+b$ координаты точек A и B, получим систему $\begin{cases}3=2k+b,\\ 4=-k+b,\end{cases}$ из которой найдем $k=-1/3$. Но угловой коэффициент прямой AB равен угловому коэффициенту касательной к графику данной функции и, следовательно, $k_{кас}=y'(x_0)=\frac{x_0}{1+x_0}=-\frac{1}{3}$. Отсюда находим абсциссу точки касания $x_0=-0,25$, а затем ординату этой точки $y_0=-0,25-$ $-\ln 0,75$. ■

11.177. $y_{max}=-4$ при $x=-1$, $y_{min}=4$ при $x=1$; $y=11,25x+13$. **11.178.** $y_{max}=9$ при $x=0$; 0, 0 и 9.

11.179. □ Имеем $y'=-e^{-x}+2e^{-2x}=e^{-2x}(2-e^{x})$; $y'=0$ при $e^{x}=2$, т. е. при $x=\ln 2$. Если $x<\ln 2$, то $y'>0$, а если $x>\ln 2$, то $y'<0$. Значит, при $x=\ln 2$ функция имеет максимум, равный $y_{max}=e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}=e^{\ln 0,5}-e^{\ln 0,25}=0,25$; в интервале $(-\infty, \ln 2)$ она возрастает, а в интервале $(\ln 2, \infty)$ — убывает. ■

11.180. $y_{min}=0$ при $x=0$, $y_{max}=4e^{-2}$ при $x=2$; возрастает на (0, 2), убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$. **11.181.** $y_{max}=0,5\sqrt{2}e^{-\pi/4}$ при $x=\pi/4$; возрастает на $(0, \pi/4)$, убывает на $(\pi/4, \pi)$. **11.182.** $y_{max}=\ln 2-0,5$ при $x=-0,5$; возрастает на $(-\infty;$ $-0,5)$, убывает на $(-0,5; 0,5)$. **11.183.** $y_{min}=-25/96$ при $x=7/11$; возрастает на (7/11, 5), убывает на $(-\infty, 7/11)$ и на $(5, \infty)$.

11.184. □ Находим $y'=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Уравнение $y'=0$ имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=1$. Составим таблицу:

Интервал	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
y'	−	+	−
y	↘	↗	↘

Итак, при $x=-1$ функция имеет минимум, а при $x=1$ — максимум; в интервале $(-1, 1)$ она возрастает, а в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ — убывает. ■

11.185. $x=2$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 2)$, возрастает на $(2, \infty)$. **11.186.** $x=\sqrt[3]{0,5}$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \sqrt[3]{0,5})$, возрастает на $(\sqrt[3]{0,5}, \infty)$. **11.187.** $x=2$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на (0, 2). **11.188.** $x=0$ — точка минимума; убывает на $(-\infty,$ $0)$, возрастает на $(0, \infty)$. **11.189.** $x=-2$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, -2)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(-2, 2)$. **11.190.** $x=2$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 2)$, возрастает на $(2, \infty)$. **11.191.** $x=$ $=-4$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, -8)$ и на $(-8, -4)$, убывает на $(-4, 0)$ и на $(0, \infty)$. **11.192.** Убывает на $(-\infty, -3)$, на $(-3, 3)$ и на $(3, \infty)$. **11.193.** $x=1$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, 1)$, убывает на $(1, \infty)$. **11.194.** $x=1/2$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 1/2)$, возрастает на (1/2, 2) и на $(2, \infty)$. **11.195.** $x=2$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(2, \infty)$, возрастает на $(-2, 2)$. **11.196.** $x=1-\sqrt{3}$ — точка максимума, $x=1+\sqrt{3}$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ и на $(1+\sqrt{3}, \infty)$, убывает на $(1-\sqrt{3}, 1)$ и на $(1, 1+\sqrt{3})$. **11.197.** $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, возрастает на (0, 2). **11.198.** $x=-1$ — точка минимума; $x=1$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, \infty)$, возрастает на $(-1, 1)$. **11.199.** $x=-\sqrt[3]{2}$ — точка минимума, $x=0$ — точка максимума;

убывает на $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$, на $(0, 1)$ и на $(1, \infty)$, возрастает на $(-\sqrt[3]{2}, 0)$. **11.200.** $x=3$ — точка минимума; убывает на $(0, 3)$, возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(3, \infty)$. **11.201.** $x=2{,}5$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, 1)$ и на $(1; 2{,}5)$, убывает на $(2{,}5; 4)$ и на $(4, \infty)$. **11.202.** $y_{\max}=0$ при $x=-1$, $y_{\min}=-1$ при $x=0$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(0, \infty)$, убывает на $(-1, 0)$. **11.203.** $y_{\min}=-8$ при $x=\pm 2$, $y_{\max}=0$ при $x=0$; убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(0, 2)$, возрастает на $(-2, 0)$ и на $(2, \infty)$. **11.204.** $y_{\min}=-16$ при $x=\pm\sqrt{5}$, $y_{\max}=9$ при $x=0$; убывает на $(-\infty, -\sqrt{5})$ и на $(0, \sqrt{5})$, возрастает на $(-\sqrt{5}, 0)$ и на $(\sqrt{5}, \infty)$.

11.205. □ Находим $y'=x^2-x-2=0=(x+1)(x-2)$. Уравнение $y'=0$ имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=2$. Если $-\infty<x<-1$, то $y'>0$; если $-1<x<2$, то $y'<0$; если $2<x<\infty$, то $y'>0$. Таким образом, при $x=-1$ имеем $y_{\max}=25/6$, а при $x=2$ имеем $y_{\min}=-1/3$; функция возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(-1, 2)$. Для более точного построения графика найдем еще точки его пересечения с осями координат. При $x=0$ получим $y=3$, т. е. $(0; 3)$ — точка пересечения графика с осью Oy. Для нахождения точек пересечения графика с осью Ox решим кубическое уравнение:

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+3=0 \Rightarrow 2x^3-3x^2+6(3-2x)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(2x-3)-6(2x-3)=0 \Rightarrow (2x-3)(x^2-6)=0.$$

Итак, $y=0$, если $x_1=1{,}5$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$. Эскиз графика изображен на рис. Р.11.12. ■

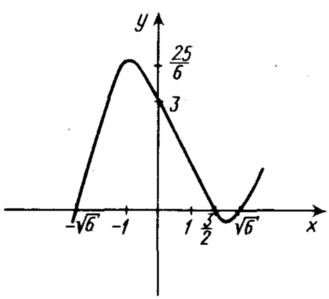

Рис. Р.11.12

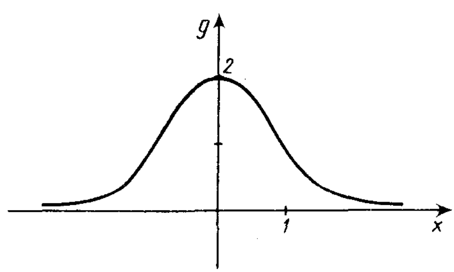

Рис. Р.11.13

11.206. $y_{\max}=2$ при $x=0$, $y_{\min}=-2$ при $x=2$; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. **11.207.** $y_{\max}=28$ при $x=2$, $y_{\min}=27$ при $x=3$; возрастает на $(-\infty, 2)$ и на $(3, \infty)$, убывает на $(2, 3)$. **11.208.** $y_{\max}=9$ при $x=\pm 1$, $y_{\min}=8$ при $x=0$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(0, 1)$, убывает на $(-1, 0)$ и на $(1, \infty)$. **11.209.** $y_{\min}=-6{,}25$ при $x=\pm 2$, $y_{\max}=-2{,}25$ при $x=0$; убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(0, 2)$, возрастает на $(-2, 0)$ и на $(2, \infty)$. **11.210.** $y_{\max}=0$ при $x=0$, $y_{\min}=-9{,}6$ при $x=2$; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. **11.211.** $y_{\max}=2$ при $x=0$; возрастает на $(-\infty, 0)$, убывает на $(0, \infty)$; ось Ox — асимптота графика функции (рис. Р.11.13).

11.212. □ Сначала находим скорость точки $v=s'(t)=\frac{2}{3}t^{-1/3}$, а затем ее ускорение $a=v'(t)=s''(t)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{t^4}}=-\frac{2}{9(s(t))^2}$. Таким образом, $a=\frac{k}{(s(t))^2}$, где $k=-\frac{2}{9}$. ■

11.213. □ Имеем $v(t)=s'(t)=\frac{13}{(t+4)^2}$; $v(9)=\frac{1}{13}$ (м/с). ■

11.214. 21 м/с; 24 м/с^2. **11.215.** 1 с; 4 с.

11.216. □ Имеем $v(t)=s'(t)=-2+48t-1{,}5t^4$. Чтобы определить наибольшее значение $v(t)$, находим $v'(t)=48-6t^3$. Уравнение $v'(t)=0$ имеет корень $t=2$, причем если $t<2$, то $v'(t)>0$, а если $t>2$, то $v'(t)<0$. Значит, $t=2$ — точка максимума функции $v(t)$; при этом $v(2)=70$ (м/с). ■

11.217. $v_1=8$ м/с и $v_2=10$ м/с; $v_1=24$ м/с и $v_2=22$ м/с. **11.218.** $a_1=14$ м/с^2, $a_2=18$ м/с^2. **11.219.** $v_1=36$ м/с, $v_2=35$ м/с.

11.220. □ а) Находим время подъема тела, для чего определяем $v(t)=h'(t)=8-10t$. В наивысшей точке подъема $v(t)=0$, откуда $t=0{,}8$ (с). Так как $h(0)=0$, то время подъема и время спуска одинаковы; скорость свободного падения тела выражается формулой $v=gt$, откуда получаем ответ: $v(0{,}8)=10\cdot 0{,}8=8$ (м/с).

б) Здесь, как и ранее, время подъема тела $t=0{,}8$ с, но, поскольку $h(0)=4$ (м), необходимо определить время его свободного падения. Находим высоту подъема $h(0{,}8)=7{,}2$ м и используем закон свободного падения $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, откуда $7{,}2=\frac{10t^2}{2}$. Значит, $t=\sqrt{1{,}44}=1{,}2$ (с) и скорость тела в момент соприкосновения с Землей составит $v=10\cdot 1{,}2=12$ (м/с). ■

11.221. □ Из курса физики известно, что $F=m_0 a$. Воспользуемся тем, что $a(t)=v'(t)=s''(t)$. Имеем $s'(t)=-\frac{4}{(2t-1)^2}$, $a(t)=s''(t)=\frac{16}{(2t-1)^3}$ или $a(t)=2\left(\frac{2}{2t-1}\right)^3=2(s(t))^3$. Итак, сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути. ■

11.223. □ Из условия следует, что $r(t)=2t$. Находим поверхность шара и его объем: $S(t)=4\pi r^2=16\pi t^2$, $V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32\pi t^3}{3}$. Определяем скорости возрастания $S(t)$ и $V(t)$: $v_1=S'(t)=32\pi t$, $v_2=V'(t)=32\pi t^2$. При $r=10$ получим $10=2t$, откуда $t=5$ (с). Следовательно, $v_1(5)=160\pi$ (см^2/с), $v_2(5)=800\pi$ (см^3/с). ■

11.224. $\omega=12$ рад/с; $t=2$ с.

11.225. □ Найдем плотность стержня: $\rho(l)=g'(l)=8l-2$, откуда $\rho(4)=30$ (г/см). Тогда средняя плотность $\rho_{ср}=\frac{g(25)}{25}=\frac{4\cdot 25^2-2\cdot 25}{25}=98$ (г/см). ■

11.226. □ Если $x\geqslant 0$, то $f(x)=x$ и $F(x)=0{,}5x^2+C$; если $x<0$, то $f(x)=-x$ и $F(x)=-0{,}5x^2+C$. ■

11.227. □ Имеем $F(x)=4\frac{x^3}{3}+9\frac{x^{-1}}{-1}+C$. Подставив в это равенство координаты точки $M_0(3;\ -2)$, получим $-2=\frac{4}{3}3^3-9\cdot 3^{-1}+C$, откуда $C=-35$. Итак, $F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{9}{x}-35$. ■

11.228. $F(x)=\frac{x^4}{12}-2x^2+\frac{x}{3}+7$. **11.229.** $F(x)=\frac{x^5+11}{5}$. **11.230.** $F(x)=\frac{3-\cos 2x}{2}$.

11.231. □ Используя правило 3° в), находим $F(x)=\frac{1}{3}(-\operatorname{ctg} 3x)+C$. Подставляем в это равенство координаты точки $M_0\left(\frac{\pi}{12};\ -1\right)$ и получаем $-1=$ $=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+C$, откуда $C=-\frac{2}{3}$. Значит, $F(x)=-\frac{2+\operatorname{ctg} 3x}{3}$. ■

11.232. $F(x)=-\frac{71x^3+8}{24x^3}$. **11.233.** $F(x)=x^4-x^3+3$. **11.234.** $F(x)=\frac{2\sin 4x-9}{8}$.

11.235. □ Запишем производную в виде $S'(x)=2(5-x)^{-1/2}$. Тогда, используя правило 3° в), находим $S(x)=2\frac{1}{-1}\frac{(5-x)^{1/2}}{1/2}+C=-4\sqrt{5-x}+C$. Полагая $x=1$, получим $S(1)=-4\cdot 2+C=-1$, откуда $C=7$. Итак, $S(x)=$ $=7-4\sqrt{5-x}$. ■

11.236. □ Так как $v(t)=s'(t)$, то $s(t)=2\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+C$. Полагая $C=0$, получим $s(1)=\frac{13}{6}$, $s(4)=\frac{200}{3}$. Искомый путь составит $s(4)-s(1)=64{,}5$ (м). Далее находим ускорение $a(t)=v'(t)=4t+3$, откуда $a(2)=11$ (м/с^2). ■

11.237. 11,25 м; 1/12 м/с^2.

11.238. □ $$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}dx+\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)=\frac{\pi}{2}.\ ■$$

11.239. $3\pi/4$.

11.240. □ $$\int_8^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_8^{27}x^{-2/3}\,dx=\frac{x^{1/3}}{1/3}\Big|_8^{27}=3\left(27^{1/3}-8^{1/3}\right)=3.\ ■$$

11.241. □ $$\int_0^{\pi/4}(\sin 2t-\cos 2t)^2\,dt=\int_0^{\pi/4}(\sin^2 2t-2\sin 2t\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt=$$
$$=\int_0^{\pi/4}dt-\int_0^{\pi/4}\sin 4t\,dt=\left(t+\frac{1}{4}\cos 4t\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-2}{4}.\ ■$$

11.242. $9\sqrt{3}/2$. **11.243.** $\sqrt{3}/3$. **11.244.** 2.

11.245. □ $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) \Big|_0^{\pi/2} =$

$= -\frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{1}{2}$. ■

11.246. 0.

11.247. □ $\int\limits_0^{2} (1+3x)^4\, dx = \frac{1}{3} \frac{(1+3x)^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{1}{15} (7^5 - 1) = 1120{,}4$. ■

11.248. $-101{,}25$.

11.249. □ $\int\limits_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx = \int\limits_0^{7/3} \frac{3(x+1)}{3\sqrt[3]{3x+1}}\, dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{7/3} \frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx +$

$+ \frac{1}{3} \int\limits_0^{7/3} \frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx = \frac{1}{3} \left(\int\limits_0^{7/3} (3x+1)^{2/3}\, dx + 2 \int\limits_0^{7/3} (3x+1)^{-1/3}\, dx \right) =$

$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{5/3}}{5/3} \Big|_0^{7/3} + \frac{2}{3} \frac{(3x+1)^{2/3}}{2/3} \Big|_0^{7/3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} (8^{5/3} - 1) + (8^{2/3} - 1) \right) = \frac{46}{15}$. ■

11.250. $(4-\sqrt{2})/6$. **11.251.** 2. **11.252.** $0{,}5 \ln 2 - 1{,}5$. **11.253.** $3(\sqrt[3]{9}-1)/4$.

11.254. □ $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1}\, dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} dx =$

$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos x \sin x} \right)^{-1} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x\, dx = \frac{1}{4} (-\cos 2x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} =$

$= -\frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8}$. ■

11.255. □ $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx =$

$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$. ■

11.256. $3\pi/16$. **11.257.** $11/96$.

11.258. 1/8. ● В числителе подынтегральной функции прибавить и вычесть 1, а затем разбить на два интеграла от степени функции $x+1$.

11.259. 12. ● Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

11.260. □ $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{-\sin x + \sin 5x}{2}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{5}\cos 5x \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(-1-1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5}. \ ■$$

11.261. 4/9. **11.262.** 0,6. **11.263.** $3{,}6\sqrt{10}\lg e \approx 4{,}9$.

11.264. □ Заданные линии образуют фигуру ABC (на рис. Р.11.14 она заштрихована). Абсциссу точки A найдем, решив систему $y=x^3$, $y=1$, откуда $x=1$. Искомая площадь равна разности между площадями криволинейной трапеции $DACE$ и квадрата $DABE$. Согласно формуле (11.8), имеем

$$S = S_{DACE} - S_{DABE} = \int\limits_1^2 x^3\, dx - 1 = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - 1 =$$

$$= \frac{16-1}{4} - 1 = \frac{11}{4} \text{ (кв. ед.)}. \ ■$$

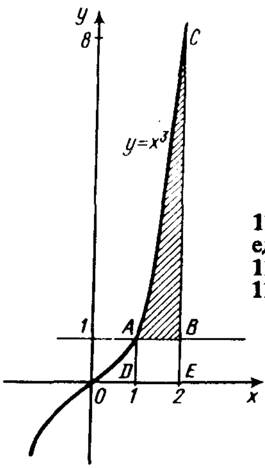

Рис. Р.11.14

11.265. $\sqrt{2}$ кв. ед. **11.266.** 8/3 кв. ед. **11.267.** 5/12 кв. ед. **11.268.** 1/6 кв. ед. **11.269.** 0,3 кв. ед. **11.270.** 1,6 кв. ед. **11.271.** $12-5\ln 5 \approx 4$ кв. ед.

11.272. □ Сначала построим график функции $y=x^3-4x$ при $x \geqslant 0$. Находим точки экстремума: $y'=3x^2-4$; $3x^2-4=0$; $x=\pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1{,}1$. При $x \geqslant 0$ функция убывает на $(0,\ 2/\sqrt{3})$, возрастает на $(2/\sqrt{3},\ \infty)$, а $x=2/\sqrt{3}$ — точка минимума, причем $y_{\min} = -16/(3\sqrt{3}) \approx -3$. Итак, требуется найти площадь фигуры OAB (рис. Р.11.15). Так как функция $y=x^3-4x$ принимает на (0, 2) отрицательные значения, то $S = \left|\int\limits_0^2 (x^3-4x)\, dx\right|$. Имеем $\int\limits_0^2 (x^3-$

$$-4x)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = -4, \text{ откуда получаем ответ: } S=4 \text{ (кв. ед.)}. \ ■$$

11.273. □ Сначала составим уравнение касательной к параболе. Так как $y'= =4x-2$, то при $x_0=2$ получим $k=y'(2)=6$. Находим ординату точки касания: $y_0 = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 5$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y-5=6(x-2)$ или $y=6x-7$. Фигура, площадь которой требуется определить, на рис. Р.11.16 заштрихована. Имеем $S_{OABD} = S_{OABC} - S_{\Delta DBC}$. Абсциссу точки D найдем из условия $6x-7=0$, т. е. $x=7/6$. Значит, $DC = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$, откуда $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot 5 = \frac{25}{12}$ (кв. ед.). Далее находим

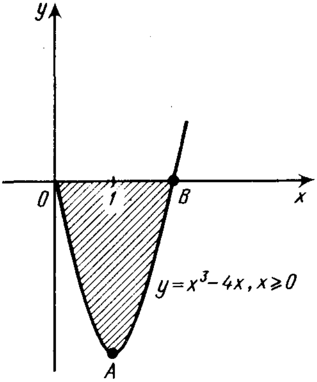

Рис. Р.11.15

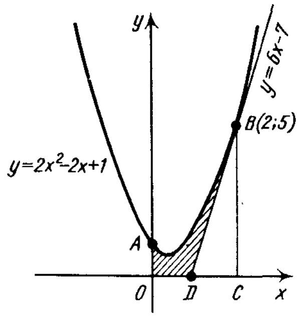

Рис. Р.11.16

$$S_{OABC}=\int_0^2 (2x^2-2x+1)\,dx=\left(2\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{10}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

и окончательно получим $S_{OABD}=\frac{10}{3}-\frac{25}{12}=\frac{5}{4}$ (кв. ед.). ■

11.274. □ а) I способ. Искомое уравнение имеет вид $y''=-cy$, где $c=\omega^2$. Так как $\omega=2$, то $c=4$ и в результате получаем $y''=-4y$ или $y''+4y=0$.
II способ. Находим $y'=-8\cos(2x+3)$, $y''=16\sin(2x+3)$. Итак, получаем ответ: $y''+4y=0$; ■ б) $y''+0{,}36y=0$.

11.275. □ а) Решением уравнения является функция вида $y=Ce^{kx}$, где C — произвольная постоянная. Продифференцировав это выражение, получим $y'=Cke^{kx}$ и после подстановки y и y' в данное уравнение имеем $Cke^{kx}=-36Ce^{kx}$. Отсюда находим $k=-36$, т. е. $y=Ce^{-36x}$.
б) Решением уравнения является функция вида $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные. Для нахождения ω продифференцируем y дважды: $y'=A\omega\sin(\omega x+\varphi)$, $y''=-A\omega^2\cos(\omega x+\varphi)$. Подставив y и y'' в данное уравнение, имеем $-A\omega^2\cos(\omega x+\varphi)=-36A\cos(\omega x+\varphi)$, откуда $\omega^2=36$, т. е. $\omega=6$. Итак, получаем ответ: $y=A\cos(6x+\varphi)$. ■

ОГЛАВЛЕНИЕ