под ред. М.И.Сканави

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ (С РЕШЕНИЯМИ). Кн. 2. Геометрия

Книга написана в соответствии с программой по геометрии для поступающих в вузы. Настоящее издание (6-е — 1992 г.) существенно переработано и дополнено. Задачи объединены по принципу однородности тем, типов, методов решения и разбиты на три группы по уровню их сложности. Ко многим задачам даны подробные решения. В каждой главе приведены сведения справочного характера и примеры решения задач.

Для поступающих в вузы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1
ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. Произвольный треугольник (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=\frac{1}{2}ah_a; \tag{1.1}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{1.2}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \tag{1.3}$$

$$r=\frac{S}{p}; \tag{1.4}$$

$$R=\frac{abc}{4S}; \tag{1.5}$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}; \tag{1.6}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов)}; \tag{1.7}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \text{ (теорема синусов)}. \tag{1.8}$$

2°. Прямоугольный треугольник (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S=\frac{1}{2}ab; \tag{1.9}$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c; \tag{1.10}$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}; \tag{1.11}$$

$$R=\frac{c}{2};\qquad (1.12)$$

$$a^2+b^2=c^2 \text{ (теорема Пифагора)};\qquad (1.13)$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c};\qquad (1.14)$$

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c};\qquad (1.15)$$

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c};\qquad (1.16)$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{ctg}\beta.\qquad (1.17)$$

3^0. Равносторонний треугольник:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\qquad (1.18)$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\qquad (1.19)$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\qquad (1.20)$$

4^0. Произвольный выпуклый четырехугольник (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S=\frac{1}{2}\,d_1d_2\sin\varphi.\qquad (1.21)$$

5^0. Параллелограмм (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}\,d_1d_2\sin\varphi.\qquad (1.22)$$

6^0. Ромб:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}\,d_1d_2.\qquad (1.23)$$

7^0. Прямоугольник:

$$S=ab=\frac{1}{2}\,d_1d_2\sin\varphi.\qquad (1.24)$$

8^0. Квадрат (d — диагональ):

$$S=a^2=d^2/2.\qquad (1.25)$$

9°. Трапеция (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l=\frac{a+b}{2}; \tag{1.26}$$

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=lh. \tag{1.27}$$

10°. Описанный многоугольник (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S=pr. \tag{1.28}$$

11°. Правильный многоугольник (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3=R\sqrt{3};\ a_4=R\sqrt{2};\ a_6=R; \tag{1.29}$$

$$S=\frac{na_nr}{2}. \tag{1.30}$$

12°. Окружность, круг (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C=2\pi r; \tag{1.31}$$

$$S=\pi r^2. \tag{1.32}$$

13°. Сектор (l — длина дуги, ограничивающей сектор; $n°$ — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l=\frac{\pi r n°}{180°}=r\alpha; \tag{1.33}$$

$$S=\frac{\pi r^2 n°}{360°}=\frac{1}{2}r^2\alpha. \tag{1.34}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1°. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

□ Пусть медианы AD и BE пересекаются в точке O (рис. 1.1). Построим четырехугольник $MNDE$, где M и N — середины отрезков AO и BO. Тогда $MN \| AB$ и $MN=\frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника AOB; $ED \| AB$ и $ED=\frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника ABC. Поэтому $MN \| ED$ и $MN=ED$, т. е. фигура $MNDE$ — параллелограмм с диагоналями MD и NE. Значит, $MO=OD$ и так как $MO=AM$, то $AM=MO=OD$. Следовательно, точка O делит медиану AD в отношении $AO:OD=2:1$ и в таком же отношении эта точка делит медиану BE.

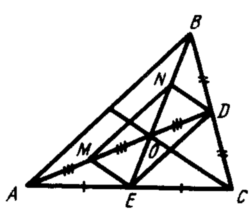


Рис. 1.1

Очевидно, что в том же отношении должна де-

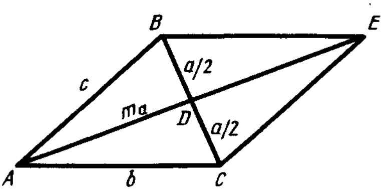


Рис. 1.2

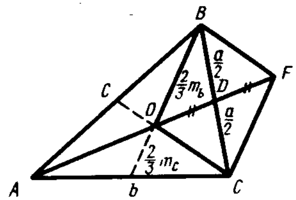


Рис. 1.3

лить и третью медиану точка ее пересечения как с первой, так и со второй медианами. При этом третья медиана не может пересечь их в точках, отличных от O, поскольку тогда на каждой медиане имелись бы две различные точки, делящие ее в отношении 2 : 1, считая от вершины, что невозможно. ■

2^0. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

□ Продолжим медиану AD (рис. 1.2) на расстояние $DE=AD$ и построим отрезки BE и EC. В полученном четырехугольнике $ABEC$ точка D пересечения диагоналей $AE=2m_a$ и $BC=a$ делит каждую из них пополам; следовательно, $ABEC$ — параллелограмм. Теперь используем теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Составив уравнение и решив его относительно m_a, получим искомое соотношение. ■

3^0. Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2},$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника.

□ Отметим на медиане AD точку O пересечения медиан треугольника (рис. 1.3); согласно свойству 1^0, она делит AD в отношении $AO:OD=2:1$. Продолжим OD на расстояние $DF=OD=\frac{1}{3}m_a$ и соединим точку F с B и C.

Теперь составим уравнение, связывающее длины сторон $BO=\frac{2}{3}m_b$, $CO=\frac{2}{3}m_c$ и диагоналей $OF=\frac{2}{3}m_a$, $BC=a$ параллелограмма $OBFC$. Решив это уравнение относительно a, получим искомое соотношение. ■

4^0. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

□ I способ. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 1.4). Треугольники BDC и ADC с основаниями a_1 и b_1 имеют общую высоту. Пусть их площади равны соответственно S_1 и S_2; тогда $S_1:S_2=a_1:b_1$. С другой стороны, в силу формулы (1.2) имеем $S_1=\frac{1}{2}a\cdot CD\sin\frac{C}{2}$, $S_2=\frac{1}{2}b\cdot CD\sin\frac{C}{2}$, откуда $S_1:S_2=a:b$. Сравнивая полученные пропорции, заключаем, что $a_1:b_1=a:b$.

II способ. Пусть $\angle BDC=\beta$ (рис. 1.4); тогда $\angle ADC=\pi-\beta$. Согласно теореме синусов (1.8), имеем $a_1:a=\sin\frac{C}{2}:\sin\beta$ (из ΔBCD)

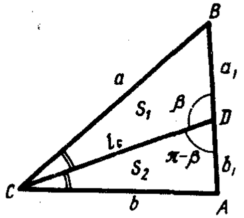


Рис. 1.4

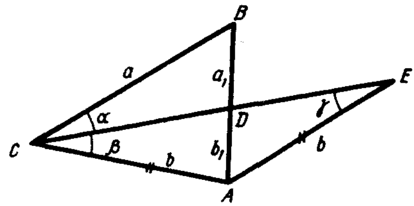


Рис. 1.5

и $b_1 : b = \sin\frac{C}{2} : \sin(\pi-\beta) = \sin\frac{C}{2} : \sin\beta$ (из $\triangle ACD$). Сравнивая эти пропорции, заключаем, что $a_1 : a = b_1 : b$, откуда $a_1 : b_1 = a : b$.

III способ. Продолжим биссектрису CD до пересечения в точке E с прямой $AE \| CB$ (рис. 1.5). Имеем $\angle\alpha = \angle\beta$ (по условию) и $\angle\alpha = \angle\gamma$ (углы при параллельных CB и AE и секущей CE). Сопоставив эти равенства, получим $\angle\beta = \angle\gamma$. Следовательно, $\triangle ACE$ — равнобедренный и $AE = AC = b$; $\triangle AED \sim \triangle BCD$ (вследствие равенства углов), откуда $a_1 : b_1 = a : b$. ■

5⁰. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

где a и b — длины двух сторон треугольника ABC; a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны (рис. 1.4).

□ Применив теорему косинусов (1.7) к треугольникам с равными углами BCD и ACD, составим уравнение

$$\frac{l_c^2 + a^2 - a_1^2}{2al_c} = \frac{l_c^2 + b^2 - b_1^2}{2bl_c},$$

откуда $b(l_c^2 + a^2 - a_1^2) = a(l_c^2 + b^2 - b_1^2)$ или $l_c^2(b-a) - ab(b-a) = (a_1 b)a_1 - (ab_1)b_1$. Используя равенство $ab_1 = a_1 b$ (вытекающее из свойства 4⁰), получаем

$$(b-a)(l_c^2 - ab) = ab_1 a_1 - a_1 b b_1 \text{ или } (b-a)(l_c^2 - ab) = -a_1 b_1 (b-a).$$

Полагая $b \neq a$, разделим обе части последнего равенства на $b-a$, откуда $l_c^2 = ab - a_1 b_1$. ■

6⁰. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

□ Запишем соотношение из п. 5⁰ в виде $l_c^2 = ab - a_1(c - a_1)$. Далее, используя свойство 4⁰, получаем $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{c-a_1}$, т. е. $a_1 = \frac{ac}{a+b}$. Отсюда находим $l_c^2 = ab - \frac{ac}{a+b}\left(c - \frac{ac}{a+b}\right)$ и требуемое значение l_c. ■

7⁰. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

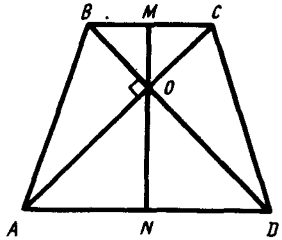


Рис. 1.6

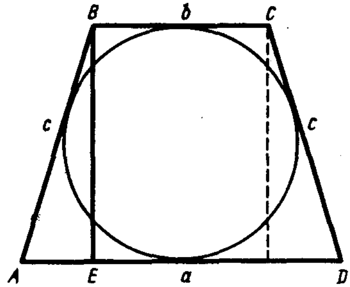


Рис. 1.7

□ Используя формулы (1.4) и (1.1), записываем: $S=rp$, $2S=ah_a=bh_b=ch_c$. Отсюда находим

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{S}=p\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{r}.\ \blacksquare$$

8⁰. Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т. е. $S=h^2$.

□ В равнобедренной трапеции осью симметрии является перпендикуляр MN к ее основаниям, проходящий через точку O пересечения диагоналей (рис. 1.6). Так как $\angle AOD=90°$, то $AD=2ON$ и $BC=2OM$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot MN=(ON+OM)MN=MN^2=h^2.\ \blacksquare$$

9⁰. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

□ Так как в четырехугольнике, описанном около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то $a+b=2c$ (рис. 1.7), откуда $AB=\frac{a+b}{2}$. Далее имеем $AE=\frac{a-b}{2}$ и из прямоугольного треугольника ABE находим $BE^2=AB^2-AE^2$, т. е. $h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$. ■

Пример 1. Площадь треугольника ABC равна 30 см². На стороне AC взята точка D так, что $AD:DC=2:3$. Длина перпендикуляра DE, проведенного на сторону BC, равна 9 см. Найти BC.

□ Проведем BD (рис. 1.8); треугольники ABD и BDC имеют общую

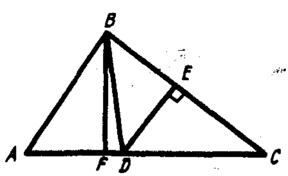


Рис. 1.8

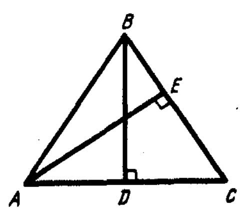


Рис. 1.9

высоту BF; следовательно, их площади относятся как длины оснований, т. е. $S_{\Delta ABD}:S_{\Delta BDC}=AD:DC=2:3$, откуда $S_{\Delta BDC}=\frac{3}{5}S_{\Delta ABC}=18$ см^2. С другой стороны, согласно формуле (1.1), $S_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot DE$ или $18=\frac{1}{2}BC\cdot 9$, откуда $BC=4$ см. ■

Пример 2. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12 см. Найти длину основания.

□ В ΔABC имеем $AB=BC$, $BD\perp AC$, $AE\perp BC$, $BD=10$ см и $AE=12$ см (рис. 1.9). Пусть $AC=x$, $AB=BC=y$. Прямоугольные треугольники AEC и BDC подобны (угол C — общий); следовательно, $BC:AC=BD:AE$ или $y:x=10:12=5:6$. Применяя теорему Пифагора (1.13) к ΔBDC, имеем $BC^2=BD^2+DC^2$, т. е. $y^2=100+\frac{x^2}{4}$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ y^2=100+\frac{x^2}{4}, \end{cases}$$

получим $x=15$. Итак, $AC=15$ см. ■

Пример 3. Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. Расстояние от точки касания до центра второй окружности равно утроенному радиусу этой окружности. Во сколько раз длина первой окружности больше длины второй окружности?

□ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, A — точка касания (рис. 1.10). Тогда $O_1A=R_1$, $O_1O_2=R_1+R_2$, $O_2A=3R_2$ (по условию). Требуется найти отношение $2\pi R_1:2\pi R_2=R_1:R_2$. В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 ($\angle A=90°$) имеем $O_1O_2^2=O_1A^2+O_2A^2$ или $(R_1+R_2)^2=R_1^2+(3R_2)^2$. Упростив это равенство, получим $R_1=4R_2$, откуда $R_1:R_2=4$. ■

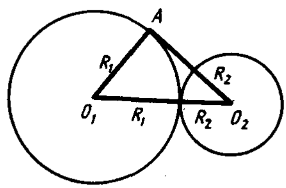


Рис. 1.10

Пример 4. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n. Доказать, что площадь треугольника $S=mn$. Найти площадь прямоугольника, вписанного в данный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а противоположная вершина — с точкой касания окружности и гипотенузы.

□ Пусть D, E, F — точки касания (рис. 1.11); тогда $AD=AF=m$, $BD=BE=n$, $CE=CF=r$ — радиус вписанной окружности, $p=r+m+n$ — полупериметр. Да-

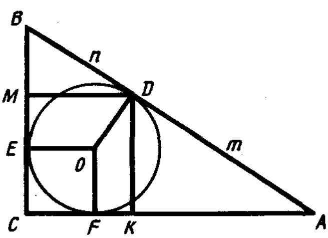


Рис. 1.11

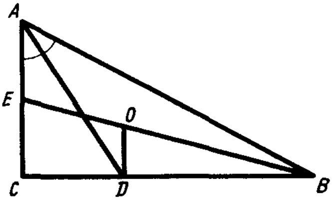


Рис. 1.12

лее, используя формулу (1.9), находим $S=\frac{(r+m)(r+n)}{2}$ или $2S=r^2+r(m+n)+mn=r(r+m+n)+mn=rp+mn$. Так как в силу равенства (1.4) $rp=S$, то $2S=S+mn$, откуда $S=mn$.

Пусть $CMDK$ — вписанный прямоугольник. Поскольку $DK \| BC$, используя гомотетию с центром в A и коэффициентом $k=\frac{m}{m+n}$, найдем площадь S_1 треугольника ADK:

$$S_1=S_{\Delta ABC}\cdot\frac{m^2}{(m+n)^2}=\frac{m^3n}{(m+n)^2}.$$

Аналогично для площади S_2 треугольника BDM имеем

$$S_2=S_{\Delta ABC}\cdot\frac{n^2}{(m+n)^2}=\frac{mn^3}{(m+n)^2}.$$

Искомая площадь

$$S_{CMDK}=mn-\frac{m^3n+mn^3}{(m+n)^2}=\frac{2m^2n^2}{(m+n)^2}. \blacksquare$$

Пример 5. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла; отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти углы треугольника.

□ Пусть BE — медиана, O — точка пересечения медиан, AD — биссектриса и $OD \perp BC$ (рис. 1.12). Согласно свойству точки пересечения медиан, $EO:OB=1:2$. Так как $OD \| EC$, то по теореме Фалеса $CD:DB=EO:OB=1:2$. Используя свойство биссектрисы треугольника, получаем $CD:DB=AC:AB$, т. е. $AC:AB=1:2$. Следовательно, $\sin B=1/2$, откуда $\angle B=30°$, $\angle A=60°$. ■

Группа А

1.001. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

1.002. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найти стороны треугольника.

1.003. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найти длину гипотенузы.

1.004. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении $1:2$.

1.005. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

1.006. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18 см.

1.007. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

1.008. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 м проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

1.009. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см^2. Определить его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1:2.

1.010. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.

1.011. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

1.012. Найти длины сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если известно, что длины его высот AN и BM равны соответственно n и m.

1.013. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

1.014. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания равна 15 см.

1.015. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно a, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

1.016. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

1.017. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC=8$ см, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4 см.

1.018. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

1.019. Длина основания треугольника равна 36 см. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

1.020. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 3:1, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади исходного треугольника?

1.021. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

1.022. Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

1.023. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

1.024. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет 2/3 внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

1.025. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

1.026. Две окружности радиусов $R=3$ см и $r=1$ см касаются внешним образом. Найти расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

1.027. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определить радиус окружности.

1.028. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найти радиус большей окружности.

1.029. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

1.030. В окружности проведены две хорды $AB=a$ и $AC=b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

1.031. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90 и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.

1.032. В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найти радиус окружности.

1.033. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P?

1.034. В окружности радиуса r проведена хорда, равная $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

1.035. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга. Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

1.036. Круг радиуса R разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

1.037. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Определить радиус последней.

1.038. Определить площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны C_1 и C_2 $(C_1>C_2)$.

1.039. Хорда AB постоянной длины скользит своими концами по окружности радиуса R. Точка O этой хорды, находящаяся на расстояниях a и b от концов A и B хорды, описывает при полном обороте окружность. Вычислить площадь кольца, заключенного между данной окружностью и окружностью, описанной точкой C.

1.040. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

1.041. В круговой сектор с центральным углом в 120° вписан круг. Найти радиус описанного круга, если радиус данного круга равен R.

1.042. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

1.043. Круг радиуса R обложен четырьмя равными кругами, касающимися данного так, что каждые два соседних из этих четырех кругов касаются друг друга. Вычислить площадь одного из этих кругов.

1.044. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Прямые, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны 6 и 4 см.

1.045. Три равные окружности радиуса r попарно касаются одна другой. Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания.

1.046. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60 и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

1.047. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них построить как на диаметре полуокружность (внутри данного полукруга), то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления до пересечения с окружностью.

1.048. Определить площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса R с хордой $2a$.

1.049. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

1.050. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

1.051. Круг разделен на два сегмента хордой, равной стороне правильного вписанного треугольника. Определить отношение площадей этих сегментов.

1.052. Круг, радиус которого равен R, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

1.053. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Определить площадь части круга, содержащейся между хордами.

1.054. Три окружности радиусов $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого совпадают с центрами этих окружностей.

1.055. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

1.056. В круг радиуса R вписаны два правильных треугольника так, что при их взаимном пересечении каждая из сторон разделилась на три равных отрезка. Найти площадь пересечения этих треугольников.

1.057. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r (рассмотреть два возможных случая расположения окружностей).

1.058. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей (рассмотреть два возможных случая).

1.059. Одна из двух параллельных прямых касается окружности радиуса R в точке A, а другая пересекает эту окружность в точках B и C. Выразить площадь треугольника ABC как функцию расстояния x между прямыми.

1.060. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

1.061. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 3 и 5 см. Найти катеты треугольника.

1.062. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности равен 6 см. Найти стороны треугольника.

1.063. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см. Найти площадь треугольника.

1.064. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как $5:2$. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a.

1.065. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найти площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

1.066. На большем катете треугольника как на диаметре построена полуокружность. Найти ее длину, если длина меньшего катета 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и полуокружности, равна 24 см.

1.067. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

1.068. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а один из катетов равен 10 см.

1.069. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

1.070. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а гипотенуза равна c. Определить площадь круга, вписанного в треугольник.

1.071. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 м.

1.072. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, проведенная к гипотенузе, делит последнюю на отрезки длиной 25,6 и 14,4 см.

1.073 Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

1.074. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

1.075. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противоположного острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе треугольника, а катет треугольника равен a.

1.076. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, проведенной к гипотенузе.

1.077. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найти длины сторон этих треугольников.

1.078. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 25 см, а радиус вписаннной окружности равен 8 см. Найти длину основания треугольника.

1.079. В равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и боковой стороной a вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

1.080. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

1.081. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом 120°, если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$ см.

1.082. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

1.083. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 24 см, а боковая сторона 13 см.

1.084. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

1.085. На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найти радиус окружности, если длина высоты, проведенной к основанию треугольника, равна 3 см.

1.086. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса R в точках B и C так, что треугольник ABC — равносторонний. Найти его площадь.

1.087. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна Q^2. Доказать, что радиус окружности равен $2Q\sqrt[4]{3}/3$.

1.088. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности.

1.089. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна a.

1.090. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части, и соответственные точки деления, считая в одном направлении, соединены между собой. В полученный правильный треугольник вписана окружность радиуса $r=6$ см. Определить стороны треугольников.

1.091. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M — сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Показать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

1.092. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

1.093. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого равна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

1.094. На диаметре $2R$ полукруга построен правильный треугольник, стороны которого равны диаметру. Как относятся площади частей треугольника, лежащих вне и внутри круга?

1.095. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами $15°$ и $60°$. Найти площадь треугольника.

1.096. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в треугольник кругов.

1.097. В треугольнике длины сторон относятся как $2:3:4$. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найти отношение площади полукруга к площади треугольника.

1.098. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

1.099. Расстояние от центра круга до хорды длиной 16 см равно 15 см. Найти площадь треугольника, описанного около круга, если периметр треугольника равен 200 см.

1.100. Доказать, что отношение периметра треугольника к одной из его сторон равно отношению высоты, проведенной на эту сторону, к радиусу вписанной окружности.

1.101. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

1.102. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна m. Найти сторону треугольника.

1.103. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

1.104. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

1.105. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Определить отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

1.106. В квадрате, сторона которого a, середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найти площадь полученного треугольника.

1.107. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры масс треугольника и квадрата совпадают (центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан).

1.108. Площадь равнобедренного треугольника равна 1/3 площади квадрата, построенного на основании данного треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найти длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

1.109. Найти площадь правильного треугольника, вписанного в квадрат со стороной a при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.

1.110. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c вне этого треугольника построены квадраты. Центры этих квадратов соединены между собой. Найти площадь полученного треугольника.

1.111. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Определить площадь внутреннего треугольника.

1.112. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы в 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

1.113. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, две другие — на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата.

1.114. Около квадрата со стороной a описана окружность. В один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Определить площадь этого квадрата.

1.115. В сегмент, дуга которого равна 60°, вписан квадрат. Вычислить площадь квадрата, если радиус круга равен $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$.

1.116. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi-4)$ см^2. Найти площадь квадрата.

1.117. Площадь прямоугольника равна 9 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120°. Найти стороны прямоугольника.

1.118. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Определить стороны прямоугольника.

1.119. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определить, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4 м.

1.120. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

1.121. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении $2:3$. Диагонали ромба равны m и n. Найти стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

1.122. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

1.123. В ромб с острым углом 30° вписан круг, площадь которого равна Q. Найти площадь ромба.

1.124. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как $3:4$. Найти площадь ромба.

1.125. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна S, а длины диагоналей относятся как $m:n$.

1.126. Периметр ромба равен $2p$; длины диагоналей относятся как $m:n$. Вычислить площадь ромба.

1.127. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба.

1.128. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n (m считать от вершины острого угла). Определить диагонали ромба.

1.129. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равновелик кругу радиуса R. Определить сторону ромба.

1.130. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг — квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

1.131. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружностей.

1.132. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Найти сторону ромба.

1.133. Доказать, что если в четырехугольнике диагонали лежат на биссектрисах его углов, то такой четырехугольник есть ромб.

1.134. На сторонах ромба как на диаметрах описаны полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определить площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны a и b.

1.135. Периметр параллелограмма равен 90 см, а острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найти стороны параллелограмма.

1.136. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

1.137. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

1.138. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.

1.139. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла на сторону DA, делит ее в отношении 5 : 3, считая от вершины D. Найти отношение $AC : BD$, если $AD : AB = 2$.

1.140. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR = \frac{2}{3}AB$, $AE = \frac{1}{3}AD$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

1.141. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ расстояния от любой точки диагонали AC до прямых BC и CD обратно пропорциональны длинам этих сторон.

1.142. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в 2 раза больше площади данного четырехугольника.

1.143. Две окружности радиуса R с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга. Их пересекает прямая в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найти площадь четырехугольника O_1ADO_2.

1.144. В точках пересечения двух окружностей с радиусами 4 и 8 см касательные к ним взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь фигуры O_1ABO_2, где AB — общая касательная к окружностям, а O_1 и O_2 — их центры.

1.145. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

1.146. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

1.147. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 и 44 см, а непараллельные — 17 и 25 см.

1.148. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон — 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

1.149. Основания трапеции равны a и b, углы при большем основании равны $\pi/6$ и $\pi/4$. Найти площадь трапеции.

1.150. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ $(AD\|BC)$, если длины ее оснований относятся как $5:3$ и площадь треугольника ADM равна 50 см^2, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

1.151. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см, и двум непараллельным сторонам, равным 13 и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

1.152. В трапеции, площадь которой равна 594 м^2, высота 22 м, а разность параллельных сторон равна 6 м, найти длину каждой из параллельных сторон.

1.153. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из непараллельных сторон и длины перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой.

1.154. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найти отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

1.155. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота трапеции равна 2 см, а боковая сторона 4 см.

1.156. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно a, а большая боковая сторона равна b.

1.157. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

1.158. Определить боковые стороны равнобедренной трапеции, если ее основания и площадь равны соответственно 8 см, 14 см и 44 см^2.

1.159. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

1.160. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 см, а другое 24 см. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

1.161. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

1.162. Большее основание трапеции в 2 раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух полученных трапеций к высоте трапеции.

1.163. Основания равнобедренной трапеции a и b, боковая сторона ее равна c, а диагональ равна d. Доказать, что $d^2=ab+c^2$.

1.164. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

1.165. В равнобедренной трапеции даны основания $a=21$ см, $b=9$ см и высота $h=9$ см. Найти радиус описанного круга.

1.166. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

1.167. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислить радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

1.168. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

1.169. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

1.170. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного круга.

1.171. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $32\sqrt{3}$ см^2. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/3$.

1.172. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2. Определить стороны трапеции, если угол при основании содержит 30°.

1.173. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/6$.

1.174. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить радиус круга, если угол при основании трапеции равен 30°.

1.175. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R. Верхнее основание трапеции в 2 раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

1.176. Найти площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если ее большее основание равно a, а угол при меньшем основании равен 120°.

1.177. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

1.178. В равнобедренную трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

1.179. Равносторонний шестиугольник $ABCDEF$ состоит из двух трапеций, имеющих общее основание CF. Известно, что $AC = 13$ см, $AE = 10$ см. Найти площадь шестиугольника.

1.180. Найти сторону правильного шестиугольника, равновеликого равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

1.181. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

1.182. Найти отношение площадей равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, длины сторон которых равны.

1.183. В правильный треугольник со стороной, равной a, вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.

1.184. Около квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Определить площадь шестиугольника.

1.185. Из точки M, находящейся на расстоянии a от окружности, проведена к этой окружности касательная длиной $2a$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

1.186. В правильный треугольник вписана окружность, а в нее — правильный шестиугольник. Найти отношение площадей треугольника и шестиугольника.

1.187. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a.

1.188. В правильный шестиугольник, сторона которого равна a, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определить площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

1.189. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

1.190. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного шестиугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, есть величина постоянная.

Группа Б

1.191. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

1.192. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

1.193. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найти длину гипотенузы.

1.194. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника.

1.195. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Найти его стороны, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

1.196. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны a и b.

1.197. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5 см, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4 см. Вычислить площадь треугольника.

1.198. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

1.199. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен $2p$, а площадь равна m^2.

1.200. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник высотой и медианой, проведенными к большей по величине стороне.

1.201. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

1.202. Числа h_1, h_2 и h_3 выражают длины высот некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $(h_1/h_2)^2+(h_1/h_3)^2=1$, то треугольник является прямоугольным.

1.203. Медианы треугольника равны 5, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

1.204. Числа m_1, m_2 и m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$, то треугольник является прямоугольным.

1.205. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади прямоугольного треугольника с указанной гипотенузой. Найти отношение катетов.

1.206. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстояния b, c, d. Найти высоту треугольника.

1.207. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $AM=BM=2$ см, а $CM=1$ см.

1.208. Показать, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

1.209. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $2a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.

1.210. Точка C перемещается по отрезку AB длиной l. На отрезках AC и CB как на основаниях построены правильные треугольники по одну сторону от AB. Где нужно взять точку C, чтобы расстояние между вершинами треугольников было наименьшим?

1.211. В равнобедренном треугольнике угол при основании содержит 72°, а биссектриса этого угла имеет длину, равную m. Найти длины сторон треугольника.

1.212. В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит 36°, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

1.213. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Определить основание треугольника.

1.214. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а боковой стороны — 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

1.215. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона — 12. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

1.216. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD:DC=1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

1.217. Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 5 и 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки к его сторонам. Найти расстояние от этой точки до каждой стороны треугольника.

1.218. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании, как $\sqrt{3}:12$.

1.219. Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b, а медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

1.220. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

1.221. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24, 20 и 56 см. Найти боковые стороны.

1.222. Дан треугольник ABC, в котором $2h_c = AB$ и $\angle A = 75°$. Найти величину угла C.

1.223. Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстояния $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найти расстояние от этой точки до сторон угла.

1.224. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{10}$ см. Найти длину третьей стороны, зная, что эта сторона равна проведенной к ней высоте.

1.225. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC равны соответственно 2 и 4 см. Вычислить расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

1.226. Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

1.227. Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20 см.

1.228. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная основанию AC. Площадь треугольника ABC равна 8 кв. ед., а площадь треугольника DEC равна 2 кв. ед. Найти отношение отрезка DE к длине основания треугольника ABC.

1.229. Длины сторон треугольника относятся как $m:n:m$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

1.230. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE; M — точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

1.231. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

1.232. В треугольнике ABC известны: $BC = 15$ см, $AC = 14$ см, $AB = 13$ см. Вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

1.233. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

1.234. Медианы одного треугольника равны сторонам другого треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

1.235. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Найти площадь треугольника.

1.236. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 и 24 см. Найти площадь треугольника.

1.237. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 м. Найти площадь треугольника.

1.238. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

1.239. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

1.240. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC. Найти зависимость между углами A и B.

1.241. На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, построена точка E так, что $DE=\frac{1}{4}BD$. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найти площадь треугольника AFC.

1.242. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении $1:3$, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

1.243. Две окружности касаются внешним образом. Их радиусы относятся как $3:1$, а длина их общей внешней касательной равна $6\sqrt{3}$. Определить периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними частями окружностей.

1.244. Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

1.245. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом. Найти угол, определяемый хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

1.246. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков.

1.247. Две окружности радиусов r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.

1.248. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом треугольник вписан круг. Найти его площадь.

1.249. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный $60°$. Найти OM, если $AM=10$ см, а $BM=4$ см.

1.250. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

1.251. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

1.252. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2+BD^2=4R^2$.

1.253. Через точку A окружности радиуса 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB=16$ см.

1.254. Через точку P диаметра данной окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол $60°$. Вычислить радиус окружности, если $AP=a$ и $BP=b$.

1.255. В круге радиуса R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в $60°$, другая — $120°$. Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

1.256. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 $см^2$. Определить длину дуги сектора.

1.257. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

1.258. Определить площадь сегмента, если его периметр равен p, а дуга содержит 120°.

1.259. Два круга концентричны, причем окружность меньшего круга делит большой круг на равновеликие части. Доказать, что часть кольца, заключенная между параллельными касательными к окружности меньшего радиуса, равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

1.260. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой. Определить радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен r и расстояние от ее центра до вершины угла равно a.

1.261. В угол, содержащий 60°, вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность (начиная со второй) касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти кругов больше площади меньшего круга?

1.262. На отрезке AC длиной 12 см построена точка B так, что $AB=4$ см. На отрезках AB и AC как на диаметрах в одной полуплоскости с границей AC построены полуокружности. Вычислить радиус окружности, касающейся построенных окружностей и AC.

1.263. На отрезке AB и на каждой его половине построены как на диаметрах полукруги (по одну сторону от AB). Считая радиус большого полукруга равным R, найти сумму площадей криволинейных треугольников, образовавшихся при построении круга, касательного ко всем трем данным кругам.

1.264. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB отрезка AB как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей на зависит от положения точки C на отрезке AB.

1.265. Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса R. Найти площадь этого треугольника.

1.266. Круг с центром O разделен диаметром AB на два полукруга. В одном из них построены два новых полукруга, опирающиеся на OA и OB как на диаметры. В криволинейную фигуру, ограниченную контурами этих трех полукругов, вписан круг. Во сколько раз его площадь меньше площади данного круга?

1.267. Две окружности радиуса R пересекаются так, что каждая проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

1.268. Окружность радиуса R разделена на шесть равных дуг, и внутри круга, ограниченного этой окружностью, через каждые две соседние точки деления проведены равные дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенной между проведенными дугами.

1.269. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h; радиус вписанной окружности равен r. Найти гипотенузу.

1.270. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$ см.

1.271. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

1.272. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.

1.273. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.

1.274. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1.275. На большом катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 5 см.

1.276. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

1.277. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, равны соответственно 4 и 3 см. Найти расстояние между их центрами.

1.278. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

1.279. В прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых построенными прямыми.

1.280. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

1.281. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружностей равна сумме его катетов.

1.282. Сторона правильного треугольника равна a. Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса $a/3$, центр которого совпадает с центром треугольника.

1.283. В круг радиуса R вписан правильный треугольник, высоты которого продолжены до пересечения с окружностью. Эти точки пересечения соединены между собой, в результате чего получается новый треугольник. Вычислить ту часть площади круга, которая находится вне этих треугольников.

1.284. В равносторонний треугольник ABC со стороной $a=2$ см вписан круг; точка A является центром второго круга с радиусом 1 см. Найти площадь пересечения этих кругов.

1.285. Внутри правильного треугольника со стороной a расположены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.

1.286. Центр равностороннего треугольника со стороной, равной

6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

1.287. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

1.288. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

1.289. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их общими касательными, а основание касается большей из окружностей. Найти основание треугольника.

1.290. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3/2 см, а описанной 25/8 см?

1.291. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

1.292. Дан равнобедренный треугольник с основанием, равным a, и боковой стороной, равной b. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании в отношении $(a+b):b$, считая от вершины угла.

1.293. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки длиной 4 и 3 см.

1.294. Дан треугольник ABC такой, что $AB=15$ см, $BC=12$ см и $AC=18$ см. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C?

1.295. Стороны треугольника относятся как $5:4:3$. Найти отношение отрезков сторон, на которые они делятся точкой касания вписанной окружности.

1.296. Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

1.297. В треугольник вписан круг. Прямые, соединяющие центр круга с вершинами, делят площадь треугольника на части с площадями 4, 13 и 15 см^2. Найти стороны треугольника.

1.298. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2 см. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 и 6 см. Определить вид треугольника и вычислить его площадь.

1.299. Для треугольника со сторонами 26, 28 и 30 см найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

1.300. Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны $\pi/3$ и $\pi/4$.

1.301. Пусть BD — высота треугольника ABC, точка E — середина BC. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если $AB=30$ см, $BC=26$ см и $AC=28$ см.

1.302. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC; угол COC_1, где O — центр окружности, описанной около треугольника, является прямым. Доказать, что $|\angle B-\angle A|=90^\circ$.

1.303. Доказать, что расстояние от ортоцентра (точки пересечения высот) до вершины треугольника больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

1.304. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Длина стороны AB равна a. Найти длину медианы CN.

1.305. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

1.306. На отрезке AB взята точка M, а на отрезках AM и MB по одну сторону от прямой AB построены квадраты, описанные окружности которых пересекаются в точке N. Доказать, что прямая AN проходит через вершину второго квадрата и что треугольник ANB прямоугольный.

1.307. Дан квадрат, сторона которого равна a. Определить стороны равновеликого ему равнобедренного треугольника, у которого сумма длин основания и высоты, опущенной на основание, равна сумме длин двух боковых сторон.

1.308. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

1.309. Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

1.310. Найти отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой 180°, к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой 90°.

1.311. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в 3 раза больше стороны квадрата. Найти площадь круга, если сторона квадрата равна a.

1.312. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

1.313. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

1.314. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

1.315. Вершина прямоугольника, вписанного в окружность, делит ее на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из бóльших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см.

1.316. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

1.317. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q. Найти стороны треугольника.

1.318. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

1.319. Точки M, N, P, Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна 100 см^2.

1.320. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

1.321. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны 3 и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF. Вычислить площадь четырехугольника $BFDE$.

1.322. Длины диагоналей ромба относятся как 3:4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

1.323. В ромб вписана окружность радиуса R. Найти площадь ромба, если его бо́льшая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

1.324. Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 и 6 см, а второй получен поворотом первого на 90° вокруг его центра.

1.325. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

1.326. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

1.327. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

1.328. Параллелограмм $ABCD$, у которого $AB=153$ см, $AD=180$ см, $BE=135$ см (BE — высота) разделен на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с AD?

1.329. Длины сторон и диагоналей параллелограмма равны соответственно a, b, c и f. Найти углы параллелограмма, если $a^4+b^4=c^2f^2$.

1.330. Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий равны p и q. Найти площадь четырехугольника.

1.331. В окружность вписан четырехугольник с углами 120, 90, 60 и 90°. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

1.332. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30 см^2, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найти площадь данного четырехугольника.

1.333. Вся дуга окружности радиуса R разделена на четыре большие и четыре малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в 2 раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления дуги окружности.

1.334. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна a^2. Определить высоту трапеции.

1.335. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см^2. Найти высоту трапеции.

1.336. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

1.337. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 18 см. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40 см?

1.338. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой h, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $120°$.

1.339. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, делит ее высоту в отношении $3:4$ (считая от большего основания). Найти основания трапеции, если ее средняя линия равна высоте, а радиус окружности равен 10.

1.340. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?

1.341. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

1.342. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 32 см^2. Острый угол трапеции равен $30°$. Определить стороны трапеции.

1.343. Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а основания равны 16 и 12 см. Определить площадь описанного круга.

1.344. В некоторый угол вписана окружность радиуса 8 см. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найти стороны полученной трапеции.

1.345. В некоторый угол вписана окружность радиуса R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь этой трапеции.

1.346. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

1.347. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9 см. Найти стороны трапеции.

1.348. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $4r/3$.

1.349. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

1.350. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2 см. Найти площадь трапеции.

1.351. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B таких, что $\cup AB=45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр,— в точке D. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно диаметру AM, пересекает его в точке C. Найти площадь трапеции $OCBD$.

1.352. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

1.353. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

1.354. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Доказать, что $MN=2ab/(a+b)$, где a и b — длины оснований.

1.355. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

1.356. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

1.357. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD=24$ см и $BC=8$ см и диагоналей $AC=13$ см, $BD=5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.

1.358. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD=a$, $BC=b$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от площади трапеции 1/4 ее часть. Найти длину отрезка CM.

1.359. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $AD=12$ см, $BC=8$ см на луче BC взята такая точка M, что AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти CM.

1.360. Дан квадрат со стороной a. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

Группа В

1.361. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, равны соответственно 12 и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

1.362. Вычислить длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $a=18$ см, $b=15$ см, $c=12$ см.

1.363. Точка C_1 — основание высоты CC_1 треугольника ABC. Найти зависимость между углами A и B, если $CC_1^2=C_1A\cdot C_1B$.

1.364. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?

1.365. Через точку D, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону BC в точке E. Доказать, что AE, CD и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке.

1.366. Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении 2:1, а основания треугольника — на части, меньшая из которых равна 1 см. Определить площадь этого треугольника.

1.367. Сторона BC треугольника ABC равна a; каждая из двух высот, опущенных на стороны AB и AC, не меньше стороны, на которую она опущена. Найти длины сторон AB и AC.

1.368. В треугольнике ABC каждая высота h_c и h_b не меньше стороны, на которую она опущена. Найти углы треугольника.

1.369. В треугольнике ABC со сторонами $a=14$ см, $b=15$ см, $c=13$ см найти расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

1.370. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка, и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны S_1, S_2

и S_3. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

1.371. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними.

1.372. Площадь треугольника ABC равна S_1; площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения высот, равна S_2. На прямой CO взята такая точка K, что треугольник ABK — прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABK есть среднее геометрическое между S_1 и S_2.

1.373. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:4$. Найти отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.

1.374. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными большей стороне. Найти расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне.

1.375. Основания высот некоторого остроугольного треугольника соединены прямыми. Доказать, что биссектрисами углов нового треугольника являются высоты исходного.

1.376. Даны два правильных треугольника площадью S, из которых второй получен поворотом первого треугольника вокруг его центра на угол 30°. Вычислить площадь пересечения этих треугольников.

1.377. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен основанию. Доказать, что и биссектриса равна основанию.

1.378. Площадь прямоугольного треугольника равна $2r^2/3$, где r — радиус окружности, касающейся одного катета и продолжений другого катета и гипотенузы. Найти стороны треугольника.

1.379. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, радиус вписанной окружности равен r. Определить катеты. При каком соотношении между r и m задача имеет решение?

1.380. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\sqrt{3}+1$.

1.381. Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

1.382. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 и 0,8 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

1.383. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$) вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $AC=4$ см, $BC=3$ см.

1.384. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника.

1.385. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найти длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

1.386. В равнобедренном треугольнике ABC дано: $AB=BC=25$ см и $AC=14$ см. Вычислить радиус круга, касающегося BC в точке D — основании высоты AD и проходящего через середину AC.

1.387. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра описана окружность радиуса $a/3$. Определить площадь части треугольника, лежащей вне окружности.

1.388. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника равен b. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного.

1.389. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

1.390. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, содержит 2,4 см. Найти основание треугольника.

1.391. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды DC, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние a.

1.392. Высота и медиана треугольника, проведенные внутри него из одной его вершины, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Определить радиус описанной окружности, если медиана равна m.

1.393. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке F. Точки B, D, E, F лежат на одной окружности. Показать, что угол B равен 60°.

1.394. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Показать, что медиана CN образует со сторонами AC и BC такие же углы, что и медианы AL и BM со стороной AB.

1.395. Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами другого треугольника, периметр которого равен $2p$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен R.

1.396. Круг с центром на стороне AB треугольника ABC касается двух других его сторон. Найти площадь круга, если $a=13$ см, $b=14$ см, $c=15$ см, где a, b и c — длины сторон треугольника.

1.397. Через точку M, расположенную на диаметре окружности радиуса 4 см, проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 30°. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная данному диаметру. Найти площадь треугольника ABC, если $AM:MB=2:3$.

1.398. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8 см.

1.399. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до конца диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

1.400. На отрезке AC дана точка B, причем $AB=4$ см, $BC=28$ см. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности в одной полуплоскости относительно границы AC. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

1.401. В окружность радиуса R вписаны три равные окружности, касающиеся внешней окружности и попарно друг друга. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими тремя окружностями.

1.402. В окружность радиуса R вписаны четыре равные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими четырьмя окружностями.

1.403. В окружность радиуса R вписаны шесть равных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими шестью окружностями.

1.404. Большая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая равна b, непараллельные стороны равны c и d. Найти площадь трапеции.

1.405. Длины оснований AB и BC трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая, параллельная AB, пересекает стороны BC и AD в точках M и N. Вычислить MN, если трапеции $ABMN$ и $NMCD$ равновелики.

1.406. В трапецию, у которой меньшее основание равно a, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки m и n, считая от большего основания. Определить площадь трапеции.

1.407. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Доказать, что если площади двух из них, прилежащих к основаниям трапеции, равны p^2 и q^2, то площадь трапеции равна $(p+q)^2$.

1.408. Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c<d$.

1.409. Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 8 см, ее площадь равна 21 см^2. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

1.410. Около окружности радиуса $R=1$ см описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

1.411. Около окружности радиуса 5 см описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания ее боковых сторон равно 8 см. Найти площадь трапеции.

1.412. Через смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины, равна удвоенной стороне квадрата. Найти площадь этого квадрата, если радиус окружности равен R.

1.413. Окружность радиуса R с центром в точке O разделена точками A, B, C, D, E, F на шесть равных частей. Определить площадь фигуры COE, ограниченной дугой OC с центром в точке B, дугой OE с центром в точке F и дугой CE с центром в точке A.

1.414. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы этих кругов равны a. Определить площадь их общей части.

1.415. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

1.416. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки длиной a и b. Найти площадь квадрата, стороной которого является эта биссектриса.

1.417. В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Определить высоту треугольника и сторону квадрата.

1.418. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их внешних общих касательных A, B, C, D последовательно соединены. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найти ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r.

1.419. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части.

1.420. В окружность вписан четырехугольник, длины сторон которого равны a, b, c и d. Вычислить отношение длин диагоналей этого четырехугольника.

1.421. Из каждой вершины, принадлежащей основанию равностороннего треугольника со стороной a, проведены во внутреннюю область треугольника по два луча, образующих с основанием треугольника углы 15 и 30°. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения построенных лучей.

1.422. Правильный треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R, повернут вокруг центра окружности на 90° в положение $A_1B_1C_1$. Вычислить площадь шестиугольника $AA_1BB_1CC_1$.

1.423. Площадь треугольника равна S. Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m:n:m$. Определить площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления.

1.424. Сторону правильного десятиугольника выразить через радиус R описанной окружности.

1.425. Найти радиус круга, если площадь круга на Q кв. ед. больше площади вписанного в него правильного двенадцатиугольника.

ГЛАВА 2
ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1^0. Произвольная призма (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{сеч}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок}=P_{сеч}l; \tag{2.1}$$

$$V=SH; \tag{2.2}$$

$$V=S_{сеч}l. \tag{2.3}$$

2^0. Прямая призма:

$$S_{бок}=Pl. \tag{2.4}$$

3^0. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{бок}=PH; \tag{2.5}$$

$$V=abc; \tag{2.6}$$

$$d^2=a^2+b^2+c^2. \tag{2.7}$$

4^0. Куб (a — ребро):

$$V=a^3; \tag{2.8}$$

$$d=a\sqrt{3}. \tag{2.9}$$

5^0. Произвольная пирамида (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V=\frac{1}{3}SH. \tag{2.10}$$

6^0. Правильная пирамида (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок}=\frac{1}{2}Pl; \tag{2.11}$$

$$V=\frac{1}{3}SH. \tag{2.12}$$

7^0. **Произвольная усеченная пирамида** (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}). \qquad (2.13)$$

8^0. **Правильная усеченная пирамида** (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)l. \qquad (2.14)$$

9^0. **Цилиндр** (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок}=2\pi RH; \qquad (2.15)$$

$$V=\pi R^2H. \qquad (2.16)$$

10^0. **Конус** (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок}=\pi Rl; \qquad (2.17)$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H. \qquad (2.18)$$

11^0. **Шар, сфера** (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S=4\pi R^2; \qquad (2.19)$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (2.20)$$

12^0. **Шаровой сегмент** (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S=2\pi Rh; \qquad (2.21)$$

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right). \qquad (2.22)$$

13^0. **Шаровой сектор** (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2h. \qquad (2.23)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1^0. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружно-

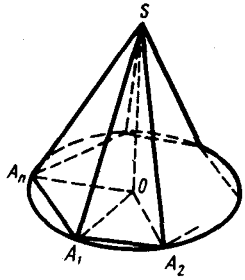


Рис. 2.1

сти, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

□ Пусть O — основание высоты n-угольной пирамиды $SA_1A_2...A_n$ (рис. 2.1); SA_1, SA_2, ..., SA_n — ее боковые ребра; OA_1, OA_2, ..., OA_n — их проекции на плоскость основания; SA_1O, SA_2O, ..., SA_nO — углы, образуемые ребрами пирамиды с плоскостью основания. Согласно условию а), эти углы равны; поэтому равны и прямоугольные треугольники SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n, имеющие общий катет SO. Отсюда следует, что $OA_1=OA_2=...=OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин A_1, A_2, ..., A_n основания и, значит, является центром описанной около него окружности.

Если условие а) заменить условием б), то равенство треугольников SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n вытекает из того, что, кроме общего катета, они имеют равные гипотенузы $SA_1=SA_2=...=SA_n$. Таким образом, $OA_1=OA_2=...OA_n$, т. е. O — центр окружности, описанной около основания пирамиды. ■

2°. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

□ Пусть O — основание высоты n-угольной пирамиды $SA_1A_2...A_n$ (рис. 2.2); SB_1, SB_2, ..., SB_n — апофемы (высоты боковых граней). Проекции апофем OB_1, OB_2, ..., OB_n на плоскость основания перпендикулярны сторонам основания (по теореме о трех перпендикулярах) и, следовательно, выражают расстояния от O до этих сторон, а углы SB_1O, SB_2O, ..., SB_nO являются линейными углами соответствующих двугранных углов. Согласно условию а), эти углы равны, поэтому равны и прямоугольные треугольники SOB_1, SOB_2, ..., SOB_n, имеющие общий катет SO. Отсюда следует, что $OB_1=OB_2=...=OB_n$, т. е. точка O равноудалена от сторон основания и, значит, является центром вписанной в него окружности.

Если условие а) заменить условием б), то равенство треугольников SOB_1, SOB_2, ..., SOB_n вытекает из того, что они, кроме общего катета SO, имеют и равные гипотенузы $SB_1=SB_2=...=SB_n$. Таким образом, $OB_1=OB_2=...=OB_n$, т. е. O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды. ■

3°. Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 (рис. 2.3), то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.

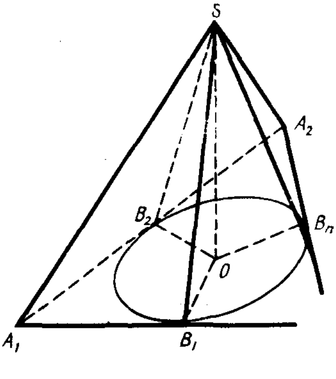


Рис. 2.2

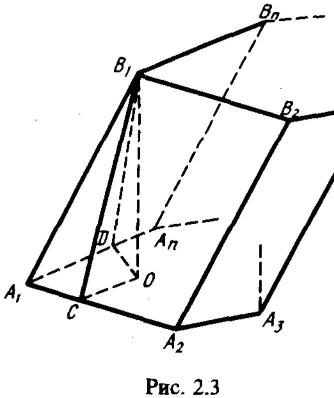


Рис. 2.3

□ Построим $OC \perp A_1A_2$, $OD \perp A_1A_n$ и отрезки B_1C, B_1D. Согласно теореме о трех перпендикулярах, имеем $B_1C \perp A_1A_2$ и $B_1D \perp A_1A_n$. Прямоугольные треугольники A_1CB_1 и A_1DB_1 равны, так как имеют общую гипотенузу A_1B_1 и равные углы ($\angle B_1A_1C = \angle B_1A_1D$ по условию). Следовательно, $B_1C = B_1D$ и $\triangle B_1OC = \triangle B_1OD$, откуда $OC = OD$. Итак, точка O равноудалена от сторон угла A_1 и, значит, лежит на биссектрисе A_1O угла A_1. ■

Это же утверждение можно сформулировать так: если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

4^0. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.

□ Пусть AD — высота треугольника ABC (рис. 2.4); тогда $BC \perp AD$ и, значит, $BC \perp AO$. Но AO является проекцией ребра AS на плоскость ABC и, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AS$.

Аналогично доказывается, что перпендикулярны и две другие пары противоположных ребер пирамиды, т. е. $AB \perp SC$ и $AC \perp SB$.

Докажем теперь обратное утверждение, т. е. что если $BC \perp AS$, то основанием O высоты пирамиды является точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 2.4). Так как $SO \perp$пл. ABC (по условию), то AO является проекцией SA на плоскость ABC. Но прямая BC, принадлежащая плоскости ABC, перпендикулярна ребру AS (по условию), поэтому $BC \perp AO$ (согласно теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, точка O лежит на высоте AD треугольника ABC. Аналогично доказывается, что O принадлежит и другой высоте треугольника ABC и, значит, является точкой пересечения высот основания пирамиды. ■

5^0. Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то пл. $SAO \perp BC$ (рис . 2.4).

□ Имеем $SA \perp BC$ (по условию) и $SO \perp BC$ (поскольку $SO \perp$пл. ABC). Так как прямая BC перпендикулярна каждой из двух прямых SA и SO, лежащих в плоскости SAO, то пл. $SAO \perp BC$ (согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости). ■

Пример 1. Через медиану BE основания ABC пирамиды $ABCD$ и середину F ребра DC проведена плоскость. Найти объем фигуры $ADBFE$, если объем пирамиды $ABCD$ равен 40 см^3.

□ Объем фигуры $ADBFE$ равен разности объемов пирамид $ABCD$ и $ECBF$ (рис. 2.5). Чтобы найти объем пирамиды $ECBF$, сравним его с объемом пирамиды $ABCD$. Для этого достаточно найти отношения площадей их оснований и соответствующих высот. Так как медиана треугольника делит его площадь на две равные части, то $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. Далее, так как F — середина ребра DC, то высота пирамиды $ECBF$ равна половине высоты пирамиды $ABCD$. Следовательно, $V_{ECBF} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 10$ (см^3). Искомый объем равен 30 см^3. ■

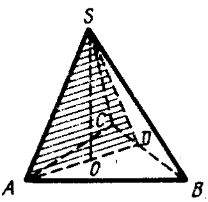


Рис. 2.4

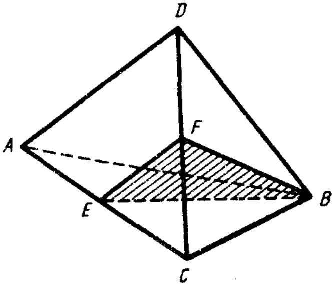


Рис. 2.5

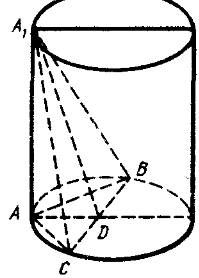


Рис. 2.6

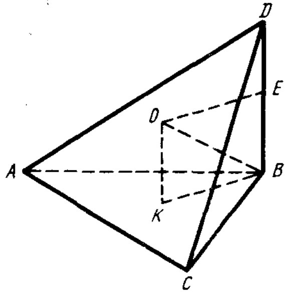


Рис. 2.7

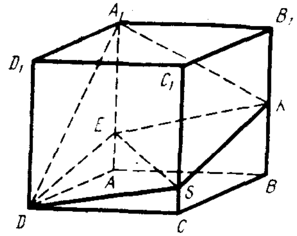


Рис. 2.8

Пример 2. Высота цилиндра равна H, радиус его основания равен R. В цилиндр помещена пирамида, высота которой совпадает с образующей AA_1 цилиндра, а основанием служит равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$), вписанный в основание цилиндра. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $\angle A=120°$.

□ Проведем $AD\perp BC$ и соединим точки A_1 и D отрезком A_1D (рис. 2.6). Согласно теореме о трех перпендикулярах, имеем $A_1D\perp BC$. Так как дуга CAB содержит 120°, а дуги AC и AB — по 60°, то $BC=R\sqrt{3}$, $AB=R$. Из $\triangle ABD$ находим $AD=R/2$. Применив теорему Пифагора к треугольнику AA_1D, получим $A_1D=\sqrt{H^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2+4H^2}$. Следовательно, $S_{\triangle A_1AB}=\frac{1}{2}AB\cdot AA_1=\frac{1}{2}RH$; $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1D=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{R^2+4H^2}=\frac{1}{4}\sqrt{3R^2+12H^2}$. Окончательно получим

$$S_{бок}=2S_{\triangle A_1AB}+S_{\triangle A_1BC}=RH+\frac{1}{4}R\sqrt{3R^2+12H^2}=\frac{R}{4}(4H+\sqrt{3R^2+12H^2}).\ ■$$

Пример 3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно b. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

□ Пусть O — центр шара, описанного около пирамиды $ABCD$ (рис. 2.7). Тогда $OA=OB=OC=OD$. Проведем $OK\perp$пл. ABC и $OE\perp DB$. Поскольку точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, точка K является центром треугольника и $BK=a/\sqrt{3}$. Далее, так как $OB=OD$, то $EB=ED=b/2$. По теореме Пифагора из $\triangle OKB$ находим

$$OB=\sqrt{OK^2+BK^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{12a^2+9b^2}}{6}.\ ■$$

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. На ребре AA_1 взята точка E так, что $AE=a/4$. Найти объем пирамиды, вершиной которой является точка A_1, а основанием — сечение куба, проходящее через точки D, E и произвольную внутреннюю точку ребра BB_1.

□ Построив сечение (рис. 2.8), получим на ребре CC_1 точку S, служащую общей вершиной двух треугольных пирамид SEA_1K и SEA_1D, сумма объемов которых равна объему четырехугольной пирамиды A_1EKSD.

Имеем $S_{\triangle A_1DE}=\frac{1}{2}A_1E\cdot DA=\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot a=\frac{3a^2}{8}$. Расстояние от точки S до плоскости A_1ED равно a, поэтому $V_{SEA_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2}{8}\cdot a=\frac{a^3}{8}$. Аналогично находим $V_{SEA_1K}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot a\right)a=\frac{a^3}{8}$. Итак, искомый объем есть $\frac{a^3}{8}+\frac{a^3}{8}=\frac{a^3}{4}$. ■

Группа А

2.001. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

2.002. Каждое из боковых ребер пирамиды равно b. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как $m:n$, а гипотенуза равна c. Вычислить объем пирамиды.

2.003. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 5 и 5 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить объем пирамиды.

2.004. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

2.005. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a, a и b. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

2.006. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота равна h. Определить объем пирамиды.

2.007. Определить объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника, служащего ее основанием, равна h, а апофема пирамиды равна m.

2.008. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а сторона основания равна 3 см.

2.009. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а плоские углы при вершине — прямые.

2.010. Найти объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.

2.011. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

2.012. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, ребро которого равно диагонали грани куба.

2.013. В правильном тетраэдре $SABC$ построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем $BK:KS=2:1$. Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно a.

2.014. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 269/32 см. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Найти объем пирамиды.

2.015. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна S.

2.016. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

2.017. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

2.018. Высота пирамиды равна 8 м. На расстоянии 3 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь полученного сечения равна 4 $м^2$. Найти объем пирамиды.

2.019. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 720°. Определить объем пирамиды, если ее боковое ребро, равное l, составляет с высотой пирамиды угол 30°.

2.020. Найти отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды при условии, что стороны оснований этих пирамид равны, а их апофемы в 2 раза больше сторон основания.

2.021. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислить его полную поверхность.

2.022. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна S.

2.023. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

2.024. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность составляет 3 $см^2$. Найти объем пирамиды.

2.025. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен 60°.

2.026. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Определить боковую поверхность полученной пирамиды, если ребро куба равно a.

2.027. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить полную поверхность полученной пирамиды.

2.028. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность полученной пирамиды.

2.029. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна a. Найти полную поверхность пирамиды и ее объем.

2.030. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна b, а боковое ребро равно l.

2.031. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

2.032. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$ см. Найти объем и площадь основания пирамиды.

2.033. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем и полную поверхность пирамиды.

2.034. Объем правильной треугольной пирамиды, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом 45°, равен 9 $см^3$. Найти полную поверхность пирамиды.

2.035. Центр куба, ребро которого равно a, соединен со всеми его вершинами. Определить объем и полную поверхность каждой из полученных пирамид.

2.036. Найти полную поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $60°$.

2.037. По стороне основания, равной a, определить боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

2.038. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом $45°$. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

2.039. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом $30°$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

2.040. Боковые ребра правильной треугольной усеченной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b $(a>b)$. Найти объем усеченной пирамиды.

2.041. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b $(a>b)$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Определить объем усеченной пирамиды.

2.042. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

2.043. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 дм, а высота 4 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от него на 1 дм.

2.044. Определить объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно a.

2.045. В кубе центры оснований соединены с центрами боковых граней. Вычислить поверхность полученного октаэдра, если ребро куба равно a.

2.046. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно d.

2.047. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Определить объем параллелепипеда.

2.048. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

2.049. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную b, под углом $30°$. Найти объем параллелепипеда.

2.050. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной Q. Определить объем параллелепипеда.

2.051. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d, а длины ребер относятся как $m:n:p$.

2.052. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна l и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой — 45°.

2.053. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 6 см. Найти длину ребра такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

2.054. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размерами $80 \times 20 \times 5$ см, прокатывается лист толщиной в 1 мм. Определить площадь этого листа.

2.055. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b, острый угол между ними содержит 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

2.056. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Определить объем параллелепипеда.

2.057. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 см и острым углом 60°. Бóльшая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

2.058. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Определить объем параллелепипеда.

2.059. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь, равную Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

2.060. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b. Сторона основания равна a. Определить полную поверхность параллелепипеда.

2.061. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

2.062. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой h, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2.063. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q. Определить объем призмы.

2.064. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противолежащей боковой грани, равна Q. Сторона основания призмы равна a. Найти полную поверхность призмы.

2.065. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

2.066. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны M, N и P. Боковое ребро ее равно l. Определить объем призмы.

2.067. Определить объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно d.

2.068. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол $30°$, а сторона основания равна a.

2.069. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V. Найти объем призмы.

2.070. Известны площадь основания P и объем V правильной четырехугольной призмы. Вычислить ее полную поверхность.

2.071. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом $45°$. Боковое ребро призмы равно 4 дм и наклонено к плоскости основания под углом $30°$. Найти объем призмы.

2.072. Основание призмы — квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней — также квадрат, другая — ромб с углом $60°$. Определить полную поверхность призмы.

2.073. Основанием прямой призмы служит ромб. Площади диагональных сечений этой призмы равны P и Q. Найти боковую поверхность призмы.

2.074. Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани — квадраты.

2.075. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром призмы угол $30°$. Найти объем призмы.

2.076. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2.

2.077. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Выразить объем V цилиндра через площадь S этого прямоугольника и длину C окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей.

2.078. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна M, а площадь осевого сечения равна N. Определить объем и поверхность цилиндра.

2.079. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен $90°$. Определить объем конуса.

2.080. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит $120°$, а площадь равна S. Найти объем конуса.

2.081. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем конуса.

2.082. Выразить объем конуса через его боковую поверхность S и расстояние r от центра основания до образующей.

2.083. Доказать, что объем конуса равен 1/3 произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

2.084. Доказать, что объем конуса равен объему цилиндра с тем же основанием и той же высотой минус произведение боковой поверхности этого цилиндра на 1/3 радиуса его основания.

2.085. Высота конуса разделена на три равных отрезка и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найти объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V.

2.086. Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к боковой поверхности.

2.087. Доказать, что если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет 1/4 объема каждого из них.

2.088. Треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вращается вокруг большей стороны. Вычислить объем и поверхность полученной фигуры вращения.

2.089. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси (цилиндра). Найти сумму полных поверхностей и сумму объемов конусов, если высота цилиндра равна $2a$.

2.090. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

2.091. В конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $32\pi/3$ см^3.

2.092. Определить поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен R, а высота равна h.

2.093. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

2.094. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

2.095. Металлический шар радиуса R переплавлен в конус, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

2.096. Даны шар, цилиндр с квадратным осевым сечением и конус. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания, а их высоты равны диаметру шара. Как относятся объемы цилиндра, шара и конуса?

2.097. Высота конуса и его образующая равны соответственно 4 и 5 см. Найти объем вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

2.098. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найти боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

2.099. Определить объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60°.

2.100. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного куба.

2.101. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Как относится его объем к объему призмы?

2.102. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром в точке O, а на отрезках OA и OB построены две полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей AB, что и первая. Найти поверхность и объем фигуры, которая образована вращением вокруг AB фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, если $AB = 20$ см.

2.103. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

2.104. Вычислить поверхность тела, полученного от вращения ромба площадью Q вокруг одной из его сторон.

2.105. Ромб вращается вокруг своей большей диагонали, а затем вокруг меньшей диагонали. Доказать, что отношение объемов полученных фигур вращения равно отношению площадей их поверхностей.

Группа Б

2.106. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

2.107. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 3 раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

2.108. Площадь того сечения правильного тетраэдра, которое имеет форму квадрата, равна m^2. Найти поверхность тетраэдра.

2.109. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определить полную поверхность пирамиды.

2.110. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

2.111. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания первоначальной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании содержит 45°.

2.112. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней (указать, какой именно).

2.113. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$, считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

2.114. Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна боковой грани.

2.115. Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и боковую грань. Длины этих перпендикуляров равны соответственно a и b. Найти объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

2.116. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

2.117. В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно a, один плоский угол при вершине — прямой, а каждый из остальных равен 60°. Вычислить объем пирамиды.

2.118. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны P и Q, а длина их общего ребра равна a. Определить объем пирамиды.

2.119. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны a^2, b^2 и c^2. Определить объем пирамиды.

2.120. В треугольной пирамиде все четыре грани — равные равнобедренные треугольники с основанием a и боковой стороной b. Вычислить объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

2.121. Найти отношение объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

2.122. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

2.123. Найти площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

2.124. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и плоскими углами при вершине, равными углам наклона боковых ребер к основанию.

2.125. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

2.126. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S, боковые ребра пирамиды равны и образуют с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

2.127. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30 и 60°. Найти объем пирамиды.

2.128. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями d_1 и d_2. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна Q. Вычислить объем пирамиды при условии, что $d_1 > d_2$.

2.129. Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого 9 и 10 см, а одна из диагоналей 11 см. Противоположные боковые ребра равны, а длина каждого из больших ребер составляет 10,5 см. Вычислить объем пирамиды.

2.130. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность пирамиды.

2.131. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18 см, а площадь равна 90 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определить боковую поверхность пирамиды.

2.132. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°, а при ребрах AB и CD равны 60°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

2.133. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен r.

2.134. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Вычислить объем пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше площади основания.

2.135. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить полную поверхность пирамиды.

2.136. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Все ее диагональные сечения равновелики. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

2.137. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания — 27, 29 и 52 м, а периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

2.138. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 3 и 2 м, а боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

2.139. В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся как $1:2$?

2.140. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если сторона большего основания равна a, сторона меньшего основания равна b, а острый угол боковой грани равен $60°$.

2.141. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем пирамиды.

2.142. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям пирамиды проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из них.

2.143. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3 см, объем ее 38 см^3, а площади оснований относятся как $4:9$. Определить боковую поверхность пирамиды.

2.144. Основаниями усеченной пирамиды служат два правильных восьмиугольника. Сторона нижнего основания равна 0,4 м, а верхнего 0,3 м; высота усеченной пирамиды равна 0,5 м. Усеченная пирамида достроена до полной. Определить объем полной пирамиды.

2.145. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$), а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

2.146. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся как $m:n$. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

2.147. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $60°$. Определить объем пирамиды.

2.148. На ребре двугранного угла $120°$ взят отрезок длиной c и из его концов проведены перпендикуляры к нему, лежащие в различных гранях данного двугранного угла и имеющие длины a и b. Найти длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

2.149. Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2.

2.150. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость, параллельная прямой BO_1, где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найти площадь полученного сечения.

2.151. Площадь сечения куба, представляющего собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную поверхность куба.

2.152. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны, каждое из них имеет длину a. Вычислить полную поверхность и объем куба.

2.153. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Во сколько раз поверхность октаэдра больше поверхности куба?

2.154. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный шестиугольник. Определить объем полученного многогранника.

2.155. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить объем куба.

2.156. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 60°. Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

2.157. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Определить его полную поверхность.

2.158. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30°. Площадь основания равна 4 дм^2. Площади боковых граней параллелепипеда равны 6 и 12 дм^2. Найти объем параллелепипеда.

2.159. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом 120° и сторонами 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

2.160. Длины ребер параллелепипеда равны a, b и c. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а ребро длиной c образует с каждым из них угол 60°. Определить объем параллелепипеда.

2.161. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

2.162. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a, и острым углом 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Определить объем параллелепипеда.

2.163. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти полную поверхность и объем параллелепипеда.

2.164. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность параллелепипеда.

2.165. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол 45°. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

2.166. В правильный тетраэдр помещена правильная треугольная призма так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить объем призмы, если все ее ребра равны.

2.167. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проецируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность призмы.

2.168. Сторона основания правильной треугольной призмы меньше бокового ребра и равна a. Через сторону верхнего основания проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 45° и делит призму на две части. Определить объем и полную поверхность верхней части призмы.

2.169. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при нем равен 45°. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

2.170. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

2.171. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$; $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см, $AD=21$ см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислить полную поверхность призмы.

2.172. Доказать, что объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.

2.173. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, площади боковых граней равны 9, 10 и 17 см^2. Определить объем призмы.

2.174. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b. Найти объем призмы.

2.175. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Длина бокового ребра равна b, а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами оснований углы 45°. Определить боковую поверхность призмы.

2.176. В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны a, b и c. Боковое ребро равно l, высота призмы h. Определить полную поверхность призмы.

2.177. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

2.178. В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.

2.179. Объем правильной восьмиугольной призмы равен 8 м^3, а ее высота равна 2,2 м. Найти боковую поверхность призмы.

2.180. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

2.181. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

2.182. Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью S вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

2.183. Треугольник со сторонами, равными a, b и c, вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом фигур.

2.184. Радиус основания конуса равен R, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

2.185. Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса в отношении $1:2$. Найти объем конуса.

2.186. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

2.187. Полная поверхность конуса равна πS кв. ед. Развернутая на плоскость боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом $60°$. Определить объем конуса.

2.188. Высота конуса равна h. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом $120°$. Вычислить объем конуса.

2.189. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен $90°$. Определить объем конуса.

2.190. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30 и $60°$. Найти объем описанного около пирамиды конуса, если высота пирамиды равна h.

2.191. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен $30°$. Боковая поверхность конуса равна $3\pi\sqrt{3}$ кв. ед. Определить объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус.

2.192. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной l, описанного около шара радиуса r.

2.193. Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как $m:n$. Найти отношение их объемов.

2.194. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R=4$ см, помещен шар радиуса $r=3$ см. В сосуд налита вода так, что ее свободная поверхность касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если вынуть шар из сосуда.

2.195. Параллелограмм, периметр которого равен $2p$, вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длиной d и проходящей через ее конец. Найти поверхность фигуры вращения.

Группа В

2.196. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, площадь ее сечения, имеющего форму квадрата, равна m^2. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

2.197. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Найти ее полную поверхность, если плоскость, проведенная через вершину основания пирамиды перпендикулярно апофеме противоположной боковой грани, составляет с плоскостью основания угол $30°$.

2.198. Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1 : 4, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру. Найти отношение объемов полученных частей тетраэдра.

2.199. Доказать, что если тетраэдр ортоцентрический, т. е. такой, что прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке, то:

а) каждые два его противоположных ребра взаимно перпендикулярны;

б) если один из плоских углов при какой-либо вершине тетраэдра — прямой, то и другие два плоских угла — прямые;

в) любая его вершина проецируется в ортоцентр противоположной грани (точку пересечения прямых, содержащих высоты грани);

г) суммы квадратов длин его противоположных ребер равны.

2.200. а) Длины ребер AB, AC, AD и BC ортоцентрического тетраэдра равны соответственно 5, 7, 8 и 6 см. Найти длины остальных двух ребер.

б) Является ли тетраэдр $ABCD$ ортоцентрическим, если $AB=8$ см, $BC=12$ см, $DC=6$ см?

2.201. В ортоцентрическом тетраэдре $ABCD$ угол ADC — прямой. Доказать, что $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, где h — длина высоты тетраэдра, проведенной из вершины D, $a=DA$, $b=DB$, $c=DC$.

2.202. В ортоцентрическом тетраэдре $ABCD$ угол ABC — прямой; S_1, S_2, S_3 — площади граней BAC, BAD, BCD соответственно. Доказать, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

2.203. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы которого $AB=4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

2.204. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 и 12 м, а каждое из остальных ребер равно 7 м.

2.205. Найти объем треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, b и c, если каждая из этих сторон равна боковому ребру, не пересекающемуся с ней.

2.206. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны a. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по 45°, а третий — 60°. Определить объем пирамиды.

2.207. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны a, b и c, плоские углы, образованные этими ребрами,— прямые. Найти длину высоты, проведенной к основанию пирамиды.

2.208. Через ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

2.209. Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой двойной пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислить объем этой призмы, если ребро тетраэдра равно a.

2.210. Доказать, что объемы двух треугольных пирамид, имеющих по равному трехгранному углу, относятся как произведения длин трех ребер равных трехгранных углов.

2.211. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC такой, что $AB=AC=10$ м и $BC=12$ м. Грань SBC перпендикулярна основанию и $SB=SC$. Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 м.

2.212. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены перпендикуляр длиной a к боковому ребру и перпендикуляр длиной b к боковой грани. Найти объем пирамиды.

2.213. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4 см^2. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена этой плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна 25 см^2.

2.214. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро составляет со стороной угол 30°. Через вершину основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Эта плоскость разбивает пирамиду на две части. Определить объем части пирамиды, прилегающей к вершине.

2.215. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определить поверхность шара, вписанного в пирамиду.

2.216. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник, а боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a.

2.217. Два равных куба с ребром a имеют общий отрезок AB, концами которого являются середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани. Один из кубов получен поворотом другого вокруг прямой AB на 90°. Найти объем общей части этих кубов.

2.218. Найти объем общей части двух кубов, если один из них получен поворотом на 90° другого куба вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Ребро куба равно a.

2.219. Два куба с ребром, равным a, имеют общий отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих кубов.

2.220. Диагонали двух одинаковых кубов с ребром, равным a, лежат на одной и той же прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.

2.221. Через концы трех ребер, выходящих из вершин B, D, A_1 и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, проведены плоскости. Доказать, что полученная фигура есть правильный тетраэдр, и вычислить его полную поверхность и объем.

2.222. Через каждые три вершины куба, расположенные на концах каждой тройки ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями, если ребро куба равно a.

2.223. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить полную поверхность куба.

2.224. Ребро наклонного параллелепипеда равно l. К нему примыкают две смежные грани, у которых площади равны m^2 и n^2, а их плоскости образуют угол 30°. Вычислить объем параллелепипеда.

2.225. Гранями параллелепипеда служат ромбы, диагонали которых равны 3 и 4 см. В параллелепипеде имеются трехгранные углы, составленные тремя острыми углами ромбов. Найти объем параллелепипеда.

2.226. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами

6, 8 и 10 см. Некоторое плоское сечение этой призмы отсекает от боковых ребер, проходящих через вершины большего и среднего углов основания, отрезки, равные 12 см каждый, а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания,— отрезок в 18 см. Найти объем и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

2.227. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена другая цилиндрическая поверхность, делящая окружность основания на две дуги, длины которых относятся как $2:1$. Эта цилиндрическая поверхность делит данный цилиндр на две части. Найти боковую поверхность и объем большей части цилиндра.

2.228. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

2.229. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

2.230. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса и его образующая равны h и l. Вычислить площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

2.231. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

2.232. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен 1/3 произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

2.233. Основание пирамиды $SABCD$ есть трапеция с параллельными сторонами AB и CD. Доказать, что объем пирамиды равен 4/3 произведения площади треугольника MSN, где MN — средняя линия трапеции, на расстояние ребра AB от плоскости MSN.

2.234. Многогранник имеет следующее строение: две его грани (основания) представляют собой многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях; остальные грани (боковые) — трапеции, параллелограммы или треугольники, у которых каждая вершина является одновременно вершиной одного из оснований. Доказать, что объем такого многогранника равен $\frac{1}{6}H(S_1+S_2+4S_3)$, где H — расстояние между плоскостями оснований, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения, равноотстоящего от обоих оснований.

2.235. Фигура ограничена сверху и снизу двумя прямоугольниками со сторонами, равными a, b и a_1, b_1, а сбоку — трапециями. Стороны прямоугольников параллельны, расстояние между параллельными плоскостями прямоугольных оснований равно h. Найти объем фигуры.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1°. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 3.1) можно вычислить по следующим формулам:

$$S=\frac{AC^2-BD^2}{4}\operatorname{tg}A; \qquad (а)$$

$$S=\frac{AB^2-AD^2}{2}\operatorname{tg}\angle AOD, \qquad (б)$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

□ Используя теорему косинусов (1.7), выразим AC^2 из треугольника ACB и BD^2 из треугольника ABD, а затем вычтем из первого равенства второе. Тогда получим $AC^2-BD^2=4AB\cdot AD\cos A$, откуда $AB\cdot AD=\frac{AC^2-BD^2}{4\cos A}$. Наконец, применяя формулу (1.22), находим

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD\sin A=\frac{AC^2-BD^2}{4}\operatorname{tg}A.$$

Проведя аналогичные рассуждения по отношению к треугольникам AOD и AOB, можно установить справедливость формулы (б). ■

2°. Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими (рис. 3.2). Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой

$$l_a=\frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}.$$

□ Имеем $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADC}+S_{\Delta ADB}$. Используя формулу (1.2), получаем

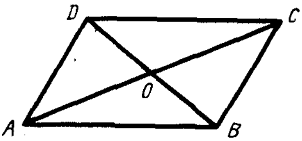


Рис. 3.1

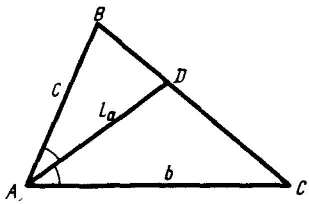


Рис. 3.2

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}l_a b\sin(A/2)+\frac{1}{2}l_a c\sin(A/2)$$

или

$$bc\sin(A/2)\cos(A/2)=\frac{1}{2}l_a(b+c)\sin(A/2).$$

Так как $\sin\frac{A}{2}\neq 0$, то $l_a=\frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}$. ■

3°. Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса:

$$l=2R\sin\alpha; \qquad (а)$$

$$l^2=2RH, \qquad (б)$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания.

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

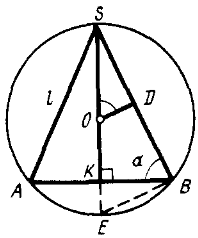


Рис. 3.3

□ а) Построив осевое сечение конуса, вписанного в шар (рис. 3.3), получим равнобедренный треугольник SAB, вписанный в окружность радиуса R. Центром окружности является точка O пересечения высоты SK и серединного перпендикуляра DO к стороне SB, причем $SK=H$, $\angle SOD=\angle SBK=\alpha$. Из $\triangle SDO$ находим $SD=SO\sin\alpha$, т. е. $l=2R\sin\alpha$.

б) Продолжим SK до пересечения с окружностью в точке E и построим отрезок BE. Тогда получим прямоугольный треугольник SBE, в котором катет $SB=l$ есть среднее геометрическое между гипотенузой $SE=2R$ и проекцией $SK=H$ катета SB на гипотенузу SE, т. е. $l^2=2RH$. ■

4°. Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания, $\angle B_1A_1O=\alpha$, $\angle OA_1A_2=\beta$, $\angle B_1A_1A_2=\gamma$ (рис. 3.4). Тогда справедливо равенство $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

□ Проведем высоту боковой грани — отрезок B_1C, тогда $OC\perp A_1A_2$ (по

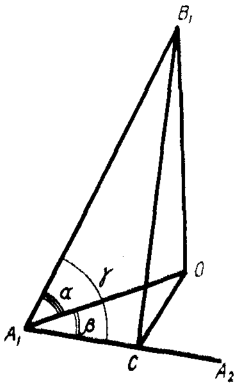


Рис. 3.4

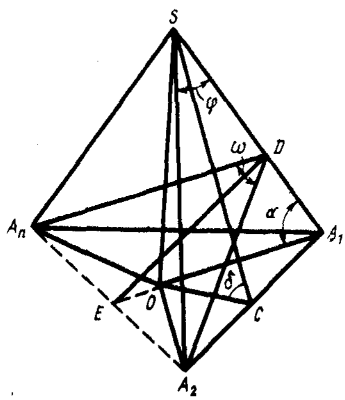


Рис. 3.5

теореме о трех перпендикулярах) и из $\triangle A_1CB_1$ получим $\cos\gamma=\dfrac{A_1C}{A_1B_1}$. Так как $A_1C=OA_1\cos\beta$ (из $\triangle OCA_1$), то $\cos\gamma=\dfrac{OA_1\cos\beta}{A_1B_1}$. Но $\dfrac{OA_1}{A_1B_1}=\cos\alpha$ (из $\triangle A_1OB_1$); значит, $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$. ■

5⁰. Пусть α — угол наклона бокового ребра правильной n-угольной пирамиды к плоскости основания, δ — угол наклона ее боковой грани к плоскости основания, φ — плоский угол при вершине пирамиды, ω — двугранный угол между смежными боковыми гранями (рис. 3.5). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\cos\alpha=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/n)};\tag{а}$$

$$\sin\frac{\omega}{2}=\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\varphi/2)};\tag{б}$$

$$\cos\delta=\frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)}=\cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}.\tag{в}$$

□ а) Пусть O — центр правильного n-угольника, служащего основанием пирамиды; A_1 — угол при вершине этого n-угольника. Тогда $\angle A_1=\dfrac{\pi(n-2)}{n}=$ $=\pi-\dfrac{2\pi}{n}$, $\angle OA_1C=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$. Далее имеем $OA_1=A_1C:\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)=A_1C:\sin\dfrac{\pi}{n}$ (из $\triangle OCA_1$); $SA_1=A_1C:\sin\dfrac{\varphi}{2}$ (из $\triangle SCA_1$). Теперь из $\triangle SOA_1$ находим

$$\cos\alpha=\frac{OA_1}{SA_1}=\frac{A_1C}{\sin(\pi/n)}:\frac{A_1C}{\sin(\varphi/2)}=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/n)}.$$

б) Пусть E — середина основания A_2A_n равнобедренного треугольника A_2DA_n. Она принадлежит также биссектрисе A_1O угла при вершине A_1 основания пирамиды и биссектрисе DE угла A_2DA_n. Из прямоугольных треугольников A_2ED и A_1EA_2 находим $A_2D=A_2E:\sin\dfrac{\omega}{2}$ и $A_1A_2=A_2E:\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)=A_2E:\cos\dfrac{\pi}{n}$. Разделив первое равенство на второе, получим $A_2D:A_1A_2=\cos(\pi/n):\sin(\omega/2)$. Так как $\triangle A_1A_2D\sim\triangle A_1SC$, то $A_2D:A_1A_2=SC:A_1S=\cos(\varphi/2)$, откуда

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\omega/2)}\ \text{или}\ \sin\frac{\omega}{2}=\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\varphi/2)}.$$

в) В $\triangle SOC$ имеем $\cos\delta=OC:SC$, где $OC=A_1C\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)=A_1C\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$ (из $\triangle OCA_1$), $SC=A_1C\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ (из $\triangle SCA_1$). Поэтому

$$\cos\delta=\frac{A_1C\operatorname{ctg}(\pi/n)}{A_1C\operatorname{ctg}(\varphi/2)}=\frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)},$$

откуда, перемножив соотношения (а) и (б), получим

$$\cos\delta=\frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)}=\cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}.\ ■$$

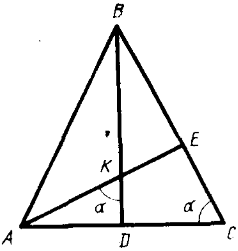


Рис. 3.6

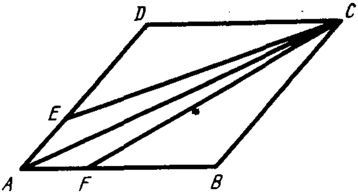


Рис. 3.7

Пример 1. Угол при основании остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равен α. В каком отношении, считая от вершины A, высота BD делит высоту AE?

☐ Согласно условию, $\triangle ABC$ — остроугольный; значит, точка K пересечения высот лежит внутри треугольника (рис. 3.6). Пусть $AD=a$. Из $\triangle AEC$ находим $AE=2a\sin\alpha$; из $\triangle AKD$ находим $AK=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ ($\angle AKD=\angle C$, так как оба угла дополняют угол KAD до 90°). Далее имеем $KE=AE-AK=2a\sin\alpha-\dfrac{a}{\sin\alpha}=$ $=\dfrac{a(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}=-\dfrac{a\cos2\alpha}{\sin\alpha}$. Окончательно получим

$$\frac{AK}{KE}=-\frac{a}{\sin\alpha}:\frac{a\cos2\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\cos2\alpha}.\ ■$$

Пример 2. Из вершины C ромба $ABCD$, сторона которого равна a, проведены два отрезка CE и CF (рис. 3.7), делящие ромб на три равновеликие фигуры. Известно, что $\cos C=1/4$. Найти сумму $CE+CF$.

☐ Высоты треугольников CED и CFB, проведенные из вершины C, имеют равные длины и $S_{\triangle CED}=S_{\triangle CFB}$ (по условию); поэтому $DE=FB$, а значит, $CE=CF$ и $AE=AF$. Проведем диагональ AC, которая делит $AECF$ на два равных треугольника. Следовательно, $S_{\triangle ACF}=\dfrac{1}{2}S_{AECF}$. Так как $S_{AECF}=S_{\triangle CFB}$ (по условию), то $S_{\triangle ACF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle CFB}$, причем треугольники AFC и FCB имеют общую высоту, проведенную из вершины C. Отсюда вытекает, что $AF=\dfrac{1}{2}FB$, т. е. $FB=\dfrac{2}{3}a$; кроме того, $\cos B=\cos(180°-C)=-\cos C=-\dfrac{1}{4}$. Из $\triangle FCB$ по теореме косинусов получим

$$CF=\sqrt{a^2+\frac{4a^2}{9}-2a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2a}{3}}=\frac{4a}{3}.$$

Итак, $CE+CF=\dfrac{8a}{3}$. ■

Пример 3. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а один из острых углов равен α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

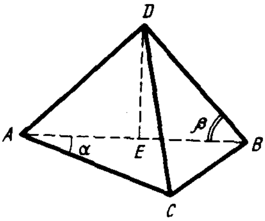


Рис. 3.8

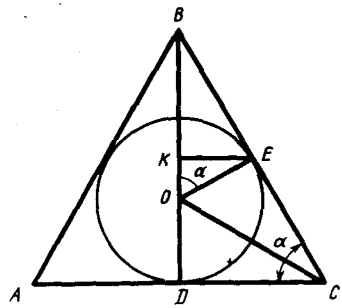


Рис. 3.9

□ Так как все боковые ребра пирамиды $ABCD$ (рис. 3.8) одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина D проецируется в центр окружности, описанной около треугольника ABC; для прямоугольного треугольника — в середину E гипотенузы AB. Высота DE треугольника ADB является высотой пирамиды. Далее имеем $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$, $DE=BE\operatorname{tg}\beta=$ $=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$. Окончательно получим

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha\cdot\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta=\frac{c^3}{24}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta. \ \blacksquare$$

Пример 4. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α, вписан шар. Радиус окружности касания сферической и конической поверхностей равен r. Найти длину образующей конуса.

□ В осевом сечении конуса (рис. 3.9) получим равнобедренный треугольник ABC, в который вписана окружность с центром O — точкой пересечения высоты BD треугольника и биссектрисы CO угла C. Из точки E касания окружности с образующей BC проведем $KE\perp BD$. Очевидно, что $KE=r$, $\angle KOE=\alpha$ (см. пример 1), $OE=OD=\frac{r}{\sin\alpha}$. Из ΔODC находим $DC=OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, а из ΔBDC находим $BC=\frac{DC}{\cos\alpha}=2r\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. ■

Пример 5. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, а величина плоского угла при вершине равна φ (рис. 3.10).

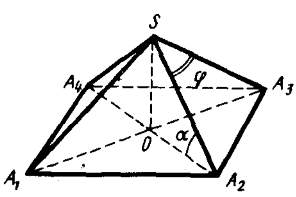


Рис. 3.10

□ Введем вспомогательный угол $\alpha=\angle SA_2O$. Тогда $SA_2=\frac{H}{\sin\alpha}$ и площадь боковой поверхности пирамиды выразится следующим образом:

$$S_{\text{бок}}=4S_{\Delta SA_2A_3}=4\cdot\frac{1}{2}\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\varphi=\frac{2H^2\sin\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

Используя связь между введенным углом α и известными углами φ и $\angle OA_2A_3=\pi/4$ (см.

формулу (а) п. 5^0), получим $\cos\alpha=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/4)}=\sqrt{2}\sin(\varphi/2)$. Следовательно, $\sin^2\alpha=1-2\sin^2(\varphi/2)=\cos\varphi$. Подставляя это выражение в формулу для $S_{бок}$, окончательно находим $S_{бок}=2H^2\operatorname{tg}\varphi$. ■

Группа А

3.001. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

3.002. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь, равная $0{,}4\ bc$. Найти третью сторону.

3.003. В треугольнике даны длины двух сторон a и b и угол α между ними. Найти длину высоты, проведенной к третьей стороне.

3.004. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол α при основании. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

3.005. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найти периметр трапеции.

3.006. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

3.007. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α. Найти высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

3.008. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиуса r. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

3.009. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь треугольника.

3.010. Около круга радиуса R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь трапеции.

3.011. Высота BD правильного треугольника ABC продолжена за вершину B и на продолжении взят отрезок BF, равный стороне треугольника. Точка F соединена отрезком прямой с вершиной C. С помощью этого построения показать, что $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$.

3.012. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

3.013. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

3.014. Площадь равнобедренного треугольника равна S, угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

3.015. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α. Найти высоту трапеции, если ее периметр равен P.

3.016. Через вершину A равнобедренного остроугольного треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найти длину AD, если $AB=BC=b$ и $\angle ABC=\alpha$.

3.017. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α. Найти основание.

3.018. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанного круга равен r. Через вершину угла при основании и центр вписанного круга проведена прямая. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника.

3.019. В квадрате $ABCD$ через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая противоположную сторону CD в точке N. В каком отношении прямая MN делит площадь квадрата, если острый угол AMN равен α? Указать возможные значения α.

3.020. Равносторонний треугольник пересечен прямой, проходящей через середину одной из его сторон и составляющей с этой стороной острый угол α. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

3.021. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найти отношение площади треугольника к площади описанного около него круга.

3.022. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол α. Найти отношение радиусов этих окружностей.

3.023. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

3.024. Найти отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании трапеции равны α и β.

3.025. В ромб $ABCD$ и в треугольник ABC, содержащий его бóльшую диагональ, вписаны окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей, если острый угол ромба равен α.

3.026. Диагональ прямоугольника равна d и делит угол прямоугольника в отношении $m:n$. Найти периметр прямоугольника.

3.027. В ромбе через вершину острого угла, равного α, проведена прямая, делящая этот угол в отношении $1:2$. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

3.028. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

3.029. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

3.030. В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α найти тангенсы углов, образуемых большей диагональю параллелограмма с его сторонами.

3.031. Найти угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны a и b, а биссектриса угла равна l.

3.032. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF; точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE=AF$. Тангенс угла AEF равен 3. Найти косинус угла FAD.

3.033. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

3.034. В прямоугольник $ABCD (AB \| CD)$ вписан треугольник AEF. Точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD. Найти тангенс угла EAF, если $AB:BC=BE:EC=CF:FD=k$.

3.035. В параллелограмм со сторонами a и b $(a<b)$ и острым углом α вписан ромб; две его вершины совпадают с серединами бóльших

сторон параллелограмма, две другие лежат на меньших сторонах (или на их продолжениях). Найти углы ромба.

3.036. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b.

3.037. Показать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник равнобедренный или прямоугольный.

3.038. Доказать, что во всяком треугольнике разность между суммой квадратов любых двух его сторон и произведением этих сторон, умноженным на косинус угла между ними, есть для данного треугольника величина постоянная.

3.039. Две высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, равны h_1 и h_2, а угол между ними равен α. Найти бо́льшую диагональ параллелограмма.

3.040. Высота равнобедренной трапеции равна h. Верхнее основание трапеции из середины нижнего основания видно под углом 2α, а нижнее основание из середины верхнего — под углом 2β. Найти площадь трапеции в этом общем случае и вычислить ее без таблиц, если $h=2$, $\alpha=15°$, $\beta=75°$.

3.041. Из точки, взятой на окружности радиуса R, проведены две равные хорды, составляющие вписанный угол, равный α радианам. Найти часть площади круга, заключенную внутри этого вписанного угла.

3.042. В сегмент, дуга которого содержит $\alpha°$, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, а две другие лежат на хорде. Площадь треугольника равна S. Найти радиус дуги сегмента.

3.043. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол A равен α радианам. Дуга окружности с центром в вершине прямого угла C касается гипотенузы в точке D и пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F. Найти отношение площадей криволинейных треугольников ADE и BDF.

3.044. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с боковым ребром угол α. Найти объем параллелепипеда, если периметр его основания равен P.

3.045. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Диагональ большей боковой грани равна d и образует с боковым ребром угол β. Найти объем призмы.

3.046. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

3.047. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.048. Найти полную поверхность прямого параллелепипеда, если в основании его лежит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d, а высота параллелепипеда в 2 раза меньше стороны основания.

3.049. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

3.050. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α. Найти объем призмы.

3.051. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна S.

3.052. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

3.053. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, двугранный угол при основании равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

3.054. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

3.055. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

3.056. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

3.057. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

3.058. Сторона основания треугольной пирамиды равна a, прилежащие к ней углы основания равны α и β. Все боковые ребра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол φ. Найти объем пирамиды.

3.059. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

3.060. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найти объем пирамиды, если ее высота равна h.

3.061. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а равные боковые ребра образуют между собой угол α. Найти высоту прямой треугольной призмы, равновеликой данной пирамиде и имеющей с ней общее основание.

3.062. Основанием пирамиды $ABCD$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Боковое ребро AD перпендикулярно основанию. Найти острые углы треугольника ABC, если $\angle DBA = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$ ($\alpha < \beta$).

3.063. Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a. Боковое ребро и диагональ пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные соответственно α и β. Найти площадь меньшего основания пирамиды.

3.064. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

3.065. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

3.066. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

3.067. Найти угол между апофемами двух смежных боковых граней правильной n-угольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α.

3.068. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α.

3.069. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найти этот угол, если гипотенуза треугольника равна c, а объем пирамиды равен V.

3.070. Плоскость квадрата составляет угол α с плоскостью, проведенной через одну из его сторон. Какой угол составляет с той же плоскостью диагональ квадрата?

3.071. В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

3.072. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

3.073. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как $1:2$, острый угол в основании равен α. Найти угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, если высота параллелепипеда равна большей диагонали основания.

3.074. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной четырехугольной призмы, если плоскость, в которой они лежат, составляет с плоскостью основания угол α.

3.075. Найти косинус угла между апофемой и диагональю основания правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

3.076. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти угол между высотой и боковым ребром пирамиды.

3.077. Отношение боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

3.078. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

3.079. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

3.080. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

3.081. Отношение одной из сторон основания треугольной пирамиды к каждому из остальных пяти ее ребер равно k. Найти двугранный угол между двумя равными боковыми гранями пирамиды и допустимые значения k.

3.082. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

3.083. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Отношение высоты призмы к стороне основания равно k. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

3.084. В правильной шестиугольной призме плоскость, проведенная через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания призмы равна a.

3.085. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет со стороной основания угол α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

3.086. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, у которой основания равны a и b ($a>b$), а острый угол равен α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол β. Найти объем призмы.

3.087. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \leqslant n$.

3.088. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину ее верхнего основания проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найти отношение высоты призмы к стороне основания.

3.089. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $2/3$. Найти косинус угла между двумя боковыми гранями.

3.090. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=BC=a$ и $\angle BAC=\alpha$. Через сторону AC проведена плоскость под углом $\varphi(\varphi<\pi/2)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

3.091. В правильной двенадцатиугольной пирамиде, ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и пятое ребра. Плоскость сечения образует с плоскостью основания пирамиды угол α, а площадь этого сечения равна S. Найти объем пирамиды.

3.092. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом, равным α, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найти высоту цилиндра.

3.093. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом α. Длина диагонали равна d. Найти боковую поверхность цилиндра.

3.094. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет с основанием угол α. Найти объем цилиндра.

3.095. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m:n$. Площадь сечения равна S. Найти боковую поверхность цилиндра.

3.096. Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения как $m:n$. Найти острый угол между диагоналями осевого сечения.

3.097. Плоскость, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего ту же образующую, острый угол α. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра этой плоскостью, равна l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

3.098. Разность между образующей и высотой конуса равна d, а угол между ними равен α. Найти объем конуса.

3.099. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найти полную поверхность конуса.

3.100. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если центральный угол в развертке его боковой поверхности равен α радианам.

3.101. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через одну из сторон этого квадрата и через вершину конуса, при пересечении с поверхностью конуса образует равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен α. Найти объем конуса.

3.102. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β.

3.103. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Найти объем конуса, если его высота равна h.

3.104. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого боковая поверхность есть среднее пропорциональное между площадью основания и полной поверхностью.

3.105. Найти объем конуса, если в его основании хорда, равная a, стягивает дугу в $\alpha°$, а высота конуса составляет с образующей угол β.

3.106. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна a. Найти объем конуса.

3.107. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении $2:1$. Угол между диагоналями, обращенный к основанию конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найти объем усеченного конуса.

3.108. Сторона ромба равна a, его острый угол равен α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

3.109. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $AB=a$, $AC=b$ и $\angle BAC=\alpha$.

3.110. Радиус круга, вписанного в прямоугольную трапецию, равен r, острый угол трапеции равен α. Эта трапеция вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найти боковую поверхность тела вращения.

3.111. Найти острый угол ромба, зная, что объемы тел, полученных от вращения ромба вокруг его большей диагонали и вокруг его стороны, относятся как $1:2\sqrt{5}$.

3.112. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписана прямая призма; три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие — на основании пирамиды. Диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту призмы.

3.113. В конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма с равными ребрами. Найти боковую поверхность призмы, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

3.114. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найти объем пирамиды.

3.115. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого смежные стороны попарно равны, а угол между одной парой смежных сторон равен α. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

3.116. В конус вписана треугольная пирамида, у которой боковые ребра попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

3.117. Найти боковую поверхность усеченного конуса, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, зная, что острый угол трапеции, служащей боковой гранью пирамиды, равен α и что в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

3.118. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найти объем меньшего конуса, если касательные, проведенные к окружности его основания из произвольной точки окружности основания большего конуса, образуют угол α.

3.119. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

3.120. В конус вписан полушар: большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α.

3.121. Образующая конуса равна a, расстояние от вершины конуса до центра вписанного шара равно b. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

3.122. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковым ребром равен $\alpha(\alpha<\pi/4)$. В каком отношении делит высоту пирамиды центр описанного шара?

3.123. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между высотой и образующей равен α. Найти объем шара.

3.124. В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шаровой и конической поверхностей к радиусу основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью основания.

3.125. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

3.126. В полушар вписан конус, вершина которого совпадает с центром окружности, являющейся основанием полушара; плоскости оснований конуса и полушара параллельны. Прямая, проходящая через центр основания конуса и произвольную точку окружности большого круга полушара, составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найти отношение объемов полушара и конуса.

3.127. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

3.128. Найти угол в осевом сечении конуса, если сфера с центром в вершине конуса, касающаяся его основания, делит объем конуса пополам.

3.129. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше площади другого основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3.130. Объем шара равен V. Найти объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

Группа Б

3.131. В остроугольном треугольнике ABC высота $AD=a$, высота $CE=b$, острый угол между AD и CE равен α. Найти AC.

3.132. Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен 3/4. Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

3.133. Площадь равнобедренной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

3.134. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен 3/5.

3.135. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$; точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 — на стороне AC и точка C_1 — на стороне AB. Угол $A_1B_1C_1$ равен α. Найти отношение AB к A_1B_1.

3.136. В треугольнике даны сторона a, противолежащий ей угол α и высота h, проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

3.137. В треугольнике известны площадь S, сторона a и противолежащий ей угол α. Найти сумму двух других сторон.

3.138. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и медиана BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

3.139. В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы — по 135°. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150°. Найти площадь трапеции.

3.140. Основания равнобедренной трапеции равны a и b ($a>b$), угол при большем основании равен α. Найти радиус окружности ,описанной около трапеции.

3.141. Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при этом основании равен α. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит ее высоту?

3.142. Боковые стороны трапеции равны p и q ($p<q$), большее основание равно a. Углы при большем основании относятся как 2 : 1. Найти меньшее основание.

3.143. Внутри данного угла α расположена точка на расстоянии a от вершины и на расстоянии b от одной из сторон. Найти расстояние этой точки от другой стороны.

3.144. В треугольнике ABC угол A равен α и сторона $BC=a$. Найти длину биссектрисы AD, если угол между биссектрисой AD и высотой AE равен β.

3.145. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат 45 и 15°. Из вершины, противоположной основанию, проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

3.146. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение является наибольшим?

3.147. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противоположную боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

3.148. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$), прилежащие к стороне AC. Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BE. Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC.

3.149. В треугольнике ABC проведена высота BM и на ней как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке L. Найти отношение площади треугольника KLM к площади треугольника ABC, если $\angle A=\alpha$ и $\angle C=\beta$.

3.150. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD острого угла A, равного α. Найти отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC.

3.151. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол при вершине A равен α. Через середину D гипотенузы AB проведена прямая, пересекающая катет AC в точке E. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если $\angle DEA=\beta$, $AE>0{,}5AC$?

3.152. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине пересечен прямой, проходящей через вершину угла при основании и составляющей с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

3.153. В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника ABC точка O, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом ($\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$), если угол при основании треугольника равен α ($\alpha>\pi/6$)?

3.154. В окружность радиуса R вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении $2:5:17$. Найти площадь треугольника.

3.155. Через вершины равностороннего треугольника ABC проведены параллельные прямые AD, BE и CF. Прямая BE лежит между прямыми AD и CF и делит расстояние между ними в отношении $m:n$, считая от прямой AD. Найти угол BCF.

3.156. Медиана BD треугольника ABC пересекается с биссектрисой CE в точке K. Найти $CK:KE$, если $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$.

3.157. Стороны параллелограмма относятся как $p:q$, а диагонали — как $m:n$. Найти углы параллелограмма.

3.158. Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно k. Найти углы ромба и допустимые значения k.

3.159. Высота треугольника делит угол треугольника в отношении $2:1$, а основание — на отрезки, отношение которых (большего к меньшему) равно k. Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения k.

3.160. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанного круга на отрезки, отношение которых равно k. Найти углы треугольника.

3.161. Найти косинус острого угла ромба, если прямая, проведенная через его вершину, делит угол в отношении $1:3$, а противолежащую сторону — в отношении $3:5$.

3.162. В остроугольном равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти углы треугольника.

3.163. Площадь равнобедренного тупоугольного треугольника равна 8, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна $\sqrt{37}$. Найти косинус угла при вершине.

3.164. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m:n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

3.165. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении $2:1$. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

3.166. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

3.167. Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что произведение тангенсов половин этих углов равно $1/6$.

3.168. Показать, что если в треугольнике отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла, то треугольник прямоугольный.

3.169. Сторона треугольника равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной в треугольник окружности равен 4.

3.170. Основание треугольника равно 4, а его медиана равна $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Один из углов при основании равен $15°$. Показать, что острый угол между основанием треугольника и его медианой равен $45°$.

3.171. Угол при вершине A трапеции $ABCD$ равен α. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.

3.172. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF; точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE=EF$. Тангенс угла AEF равен 2. Найти тангенс угла FEC.

3.173. Отношение площади прямоугольника $ABCD$ ($BC \parallel AD$) к квадрату его диагонали равно k. Найти угол EAF, где E и F — соответственно середины сторон BC и CD.

3.174. Отношение боковых сторон трапеции равно отношению ее периметра к длине вписанной окружности и равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

3.175. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

3.176. Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен k. Найти углы треугольника и допустимые значения k.

3.177. Найти синус угла ромба, если из середины его стороны противоположная сторона видна под углом α.

3.178. Сторона треугольника равна a, разность углов, прилежащих к данной стороне, равна $\pi/2$. Найти углы треугольника, если его площадь равна S.

3.179. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, имеет постоянную величину.

3.180. Даны две стороны a и b треугольника и биссектриса l угла между ними. Найти этот угол.

3.181. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен 120°.

3.182. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r. Найти периметр сектора.

3.183. Основание треугольника равно a, а углы при основании равны α и β радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

3.184. Найти отношение площади сектора с данным центральным углом α радианов к площади вписанного в него круга.

3.185. Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой AB, содержит $\alpha°$. Через середину C хорды AB проведена хорда DE так, что $DC:CE=1:3$. Найти острый угол ACD и допустимые значения α.

3.186. Периметр сектора равен l. Найти расстояние от вершины центрального угла сектора до центра окружности, вписанной в этот сектор, если радиус дуги сектора равен R.

3.187. Дуга AB сектора AOB содержит α радианов. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении она делит площадь сектора?

3.188. Радиус дуги сектора равен R, центральный угол AOB равен α. Через середину C радиуса OA проведена прямая, параллельная радиусу OB и пересекающая дугу AB в точке D. Найти площадь треугольника OCD.

3.189. Радиус дуги сектора AOB равен R, центральный угол AOB равен α. В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги AB, а две другие вершины лежат соответственно на радиусах OA и OB. Найти стороны треугольника.

3.190. В ромб вписана окружность. В образовавшийся криволинейный треугольник (с острым углом) снова вписана окружность. Найти ее радиус, если высота ромба равна h, а острый угол равен α.

3.191. Высота равнобедренного треугольника равна h и составляет с боковой стороной угол $\alpha (\alpha \leqslant \pi/6)$. Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

3.192. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Найти радиус описанного круга.

3.193. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найти радиус круга, описанного около трапеции.

3.194. В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга к площади трапеции.

3.195. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника.

3.196. В равнобедренном остроугольном треугольнике угол при основании равен α, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

3.197. Пусть a, b, c — длины сторон остроугольного треугольника; A, B, C — углы, противолежащие сторонам; P_a, P_b, P_c — расстояния от центра описанной окружности до соответствующих сторон. В предположении, что $A<B<C$, расположить P_a, P_b, P_c в возрастающем порядке.

3.198. Известно, что в треугольнике ABC $AB=a$, $\angle C=\alpha$. Найти радиус окружности, проведенной через вершины A, B и центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

3.199. Пусть OA — неподвижный радиус окружности с центром в точке O; B — середина радиуса OA; M — произвольная точка окружности. Найти наибольшее значение угла OMB.

3.200. Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, если его высота равна h, диагонали составляют с основанием углы α и β, а основанием служит ромб.

3.201. Найти объем правильной четырехугольной призмы, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α, а сторона основания равна a.

3.202. Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a, а прилежащие к ней углы равны α и β. Найти боковую поверхность призмы, если ее объем равен V.

3.203. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

3.204. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α между боковыми сторонами. Диагональ боковой грани, противолежащей данному углу, составляет со смежной боковой гранью угол φ. Найти объем призмы.

3.205. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с двумя смежными гранями углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

3.206. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы, каждый из которых равен α. Найти объем призмы и допустимые значения α.

3.207. В правильной треугольной призме сторона основания равна a, угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен α. Найти высоту призмы.

3.208. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла равны α и β, а площадь равна S. Прямая, проходящая через вершину верхнего основания и центр круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

3.209. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α между равными сторонами AB и AC. Отрезок прямой, соединяющий вершину A_1 верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.210. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) лежит равнобедренный треугольник, у которого $AB=BC=a$ и $\angle ABC=\alpha$. Высота призмы равна H. Найти расстояние от точки A до плоскости, проведенной через точки B, C и A_1.

3.211. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) служит равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$), у которого периметр равен $2p$, а угол при вершине A равен α. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.212. Основанием наклонной призмы служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона и меньшее основание равны a, а острый угол равен β. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

3.213. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) служит равнобедренный треугольник, у которого $AB=AC=a$ и $\angle CAB = \alpha$. Вершина B_1 верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а ребро B_1B составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.214. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти объем призмы, если боковое ребро равно c.

3.215. Основанием прямой призмы служит треугольник со стороной a и прилежащими к ней углами α и β. Через эту сторону основания под углом φ к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти объем полученной треугольной пирамиды.

3.216. Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна S. Плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

3.217. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол β. Найти полную поверхность пирамиды.

3.218. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

3.219. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно l и составляет с прилежащими сторонами основания углы α и β. Найти объем пирамиды.

3.220. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S и угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

3.221. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти боковую поверхность пирамиды.

3.222. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен r, а острый угол равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

3.223. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна c, а меньший из острых углов равен α. Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

3.224. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

3.225. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

3.226. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный d. Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

3.227. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а боковая поверхность равна S. Найти расстояние от центра основания до боковой грани.

3.228. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α, боковая поверхность пирамиды равна S. Найти расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани.

3.229. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

3.230. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

3.231. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, две другие составляют с ней углы α и β. Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна H.

3.232. Одно боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют между собой угол α, а с плоскостью основания — один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

3.233. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол β. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

3.234. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Отрезок прямой, соединяющий центр основания пирамиды с серединой бокового ребра, равен a. Найти полную поверхность пирамиды.

3.235. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого основание равно a, а противолежащий угол равен α. Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину данного угла, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания.

3.236. В прямоугольном треугольнике с острым углом α через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол β. Найти углы между этой плоскостью и катетами треугольника.

3.237. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Найти острый угол ромба.

3.238. В прямоугольном треугольнике через его гипотенузу проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол α, а с одним из катетов — угол β. Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

3.239. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Наибольшая по площади боковая грань призмы — квадрат. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

3.240. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

3.241. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, ее объем равен V. Найти косинус угла между диагоналями двух смежных боковых граней.

3.242. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого острый угол между равными сторонами равен α. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Через сторону основания, противолежащую данному углу α, и середину высоты пирамиды проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

3.243. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как $3:4:12$. Через большее ребро проведено диагональное сечение. Найти синус угла между плоскостью этого сечения и не лежащей в ней диагональю параллелепипеда.

3.244. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

3.245. Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен k. Найти тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.

3.246. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол между боковыми сторонами равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если объем пирамиды равен V.

3.247. Основанием призмы служит прямоугольник. Боковое ребро составляет равные углы со сторонами основания и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол между боковым ребром и стороной основания.

3.248. Диагонали AB_1 и CB_1 двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, равные соответственно α и β. Найти угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания.

3.249. В правильной треугольной пирамиде сумма углов, образованных апофемой пирамиды с плоскостью основания и боковым ребром с той же плоскостью, равна $\pi/4$. Найти эти углы.

3.250. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равен k. При каких значениях k задача имеет решение?

3.251. Косинус угла между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

3.252. Отношение полной поверхности правильной n-угольной пирамиды к площади основания равно l. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

3.253. Найти угол между апофемой правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, если разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

3.254. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а каждое из боковых ребер равно l. Найти плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/3$.

3.255. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти двугранные углы при основании, если высота пирамиды равна гипотенузе треугольника, лежащего в ее основании.

3.256. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найти угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как $11:4$.

3.257. Величина угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

3.258. Расстояние от стороны основания правильной треугольной пирамиды до непересекающего ее ребра в 2 раза меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

3.259. Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и не пересекающей ее стороной основания призмы.

3.260. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону BC основания и точку D на боковом ребре AS проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $AD:DS=k$.

3.261. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, ее боковая поверхность равна S. Найти угол между смежными боковыми гранями.

3.262. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями.

3.263. Линейный угол двугранного угла, составленного двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, в 2 раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

3.264. Основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$ ($AB\|CD$). Боковое ребро OA перпендикулярно основанию. Ребра OB и OC составляют с основанием углы, соответственно равные α и β. Найти угол между ребром OD и основанием.

3.265. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Сумма двух неравных между собой плоских углов при вершине равна $\pi/2$. Найти эти углы.

3.266. Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней и допустимые значения k.

3.267. В правильной треугольной пирамиде через боковое ребро и высоту проведена плоскость. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k. Найти двугранный угол при основании и допустимые значения k.

3.268. Косинус угла между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен k. Найти косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания и допустимые значения k.

3.269. Острый угол ромба, лежащего в основании четырехугольной пирамиды, равен α. Отношение полной поверхности пирамиды к квадрату стороны основания равно k. Найти синус угла между апофемой и высотой пирамиды, если все ее боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Каковы допустимые значения k?

3.270. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

3.271. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в 2 раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой пирамиды и не пересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

3.272. Через вершину квадрата, лежащего в основании правильной призмы, проведена плоскость параллельно противолежащей диагонали квадрата под углом α к плоскости основания. Найти углы многоугольника в сечении призмы этой плоскостью (предполагается, что высота призмы достаточно велика для того, чтобы этим сечением оказался четырехугольник).

3.273. Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен V. Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен α.

3.274. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти площадь сечения и объем пирамиды, если известны сторона a основания и угол α между сечением и основанием.

3.275. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Площадь полученного сечения равна S. Найти сторону ромба.

3.276. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Площадь сечения, проведенного через бóльшую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S. Найти объем пирамиды.

3.277. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину данного угла α, и высоту пирамиды.

3.278. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Площадь сечения равна боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Найти расстояние от секущей плоскости до основания пирамиды.

3.279. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, параллельное основанию. Прямая, проходящая через вершину основания и противолежащую (т. е. не принадлежащую той же грани) вершину сечения составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно диагонали основания и равно a.

3.280. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

3.281. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания a и середину ее высоты, наклонена к основанию под углом φ.

3.282. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Через вершину основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

3.283. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α ($\alpha>\pi/4$). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (т. е. ребру, не лежащему с этой вершиной в одной боковой грани).

3.284. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковым ребром угол α. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость, составляющая угол β со второй диагональю. Площадь полученного сечения равна S. Найти высоту пирамиды.

3.285. Высота правильной треугольной пирамиды равна H и составляет с боковым ребром угол α. Через сторону основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под углом β ($\beta<\pi/2-\alpha$). Найти объем той части пирамиды, которая заключена между этой плоскостью и плоскостью основания.

3.286. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрии двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна a.

3.287. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1$) стороны основания AB и BC равны соответственно a и b, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания острый угол β. Найти площадь сечения.

3.288. В правильной треугольной пирамиде с углом α между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра параллельно боковой грани. Зная площадь S этого сечения, найти объем пирамиды. Каковы возможные значения α?

3.289. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат. Каковы возможные значения α?

3.290. Две вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

3.291. Точка A лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка B — на окружности нижнего основания. Прямая AB составляет с плоскостью основания угол α, а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку B,— угол β. Найти объем цилиндра, если длина отрезка AB равна l.

3.292. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный α, между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в 2 раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

3.293. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого больший катет AC равен a, а противолежащий ему угол B равен α. Гипотенуза AB является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре A_1C_1. Найти высоту конуса, если $AA_1 = a/2$.

3.294. Угол между высотой и образующей конуса равен α. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая угол β с высотой ($\beta < \alpha$). В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

3.295. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Полная поверхность этого конуса делится пополам плоскостью, перпендикулярной его высоте. Найти расстояние от этой плоскости до основания конуса.

3.296. Два конуса имеют общую высоту; их вершины лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна l и составляет с высотой угол α. Образующая другого конуса составляет с высотой угол β. Найти объем общей части обоих конусов.

3.297. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания, если боковая поверхность конуса равна сумме площадей основания и осевого сечения.

3.298. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность усеченного конуса.

3.299. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса как $2:\pi$. Найти угол между образующей и высотой конуса.

3.300. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β ($\beta > \pi/2 - \alpha$) к плоскости основания. Найти площадь сечения, если высота конуса равна h.

3.301. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p:q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстояние a и составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

3.302. Отношение полной поверхности конуса к площади его осевого сечения равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

3.303. Катет прямоугольного треугольника равен a, противолежащий ему угол равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

3.304. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противолежащая ему сторона треугольника равна a.

3.305. Найти углы прямоугольного треугольника, если объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг меньшего катета, равен сумме объемов тел, полученных от вращения треугольника вокруг его гипотенузы и вокруг большего катета.

3.306. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, его острый угол равен α. Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

3.307. На отрезке AB, равном $2R$, построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда CD параллельно AB. Найти объем тела, образованного вращением треугольника ACD вокруг диаметра AB, если вписанный угол, опирающийся на дугу AC, равен α ($AC<AD$).

3.308. Большее основание равнобедренной трапеции равно a, острый угол равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большего основания. Найти объем тела вращения.

3.309. Сторона правильного треугольника равна a. Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол α. Найти объем тела вращения и выяснить, при каком значении α этот объем является наибольшим.

3.310. Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Длина каждого отрезка ломаной равна a. Эта линия вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов параллельно биссектрисе угла α. Найти площадь поверхности вращения.

3.311. В треугольнике ABC угол A равен α, угол C равен β и биссектриса BD равна l. Треугольник ABD вращается вокруг прямой BD. Найти объем тела вращения.

3.312. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противолежащую основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

3.313. Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается около оси конуса. Найти угол между его образующей и осью, если поверхность вращения делит объем конуса пополам.

3.314. Площадь сегмента равна S, а дуга сегмента равна α радианам. Этот сегмент вращается вокруг своей оси симметрии. Найти поверхность тела вращения.

3.315. При вращении кругового сектора около одного из крайних радиусов получилось тело, площадь сферической поверхности которого равна площади конической поверхности. Найти синус центрального угла кругового сектора.

3.316. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна H и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

3.317. Боковая грань правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Плоскость, проведенная через сторону нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Боковая поверхность пирамиды равна S. Найти стороны верхнего и нижнего оснований.

3.318. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно a. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен α. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

3.319. Сторона нижнего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a, сторона верхнего основания равна b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону нижнего основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, проведена плоскость, пересекающая противоположную боковую грань по некоторой прямой. Найти расстояние от этой прямой до нижнего основания.

3.320. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $m:n$ $(m>n)$. Высота пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

3.321. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, проходящая через середину одной стороны верхнего основания и середину параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Большее боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего оснований.

3.322. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды — равные прямоугольные трапеции с острым углом α и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен β. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

3.323. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

3.324. Сторона квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна a. В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма; вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

3.325. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, четыре — на основании пирамиды. Найти ребро куба.

3.326. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед; одно его основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания — на боковых ребрах пирамиды. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ составляет с плоскостью основания угол α.

3.327. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что его верхнее основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковых поверхностей пирамиды и параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол α.

3.328. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен V. Найти объем пирамиды.

3.329. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением (основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды). Найти объем цилиндра.

3.330. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы α и β. Найти отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.

3.331. Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с прилежащими к ней сторонами основания призмы углы α и β. Найти объем призмы, если высота цилиндра равна H.

3.332. В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно k. Найти угол между образующей и высотой конуса.

3.333. Угол между высотой и образующей конуса равен α. В конус вписана правильная треугольная призма; нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы — квадраты. Найти отношение боковых поверхностей призмы и конуса.

3.334. В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, проходящая через центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение объемов конуса и цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β.

3.335. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Полная поверхность цилиндра равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3.336. В конус помещена пирамида; основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом $\alpha(\alpha \geqslant \pi/3)$ при вершине. Найти отношение объемов конуса и пирамиды.

3.337. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

3.338. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти отношение объемов пирамиды и конуса.

3.339. Расстояние от середины высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно d. Найти полную поверхность вписанного в пирамиду конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол α.

3.340. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно l. Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен α. Найти полную поверхность конуса, вписанного в пирамиду.

3.341. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Боковая грань пирамиды, проходящая через сторону основания, противолежащую данному углу α, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем конуса, описанного около пирамиды, если все ее боковые ребра равны между собой.

3.342. Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно k. Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k.

3.343. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Бóльшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол α. Найти острый угол ромба.

3.344. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб с острым углом α. Найти угол между большей диагональю призмы и плоскостью основания.

3.345. Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса r, служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Найти объем призмы.

3.346. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении $m:n$, считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

3.347. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a; боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти радиус описанного шара.

3.348. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

3.349. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R.

3.350. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен апофеме пирамиды. Найти угол между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

3.351. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

3.352. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 4 раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

3.353. В пирамиде, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, через центр вписанного шара параллельно основанию проведена плоскость. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно k. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

3.354. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

3.355. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Найти объем пирамиды, если ее боковые грани образуют с основанием один и тот же двугранный угол β и радиус вписанного в нее шара равен r.

3.356. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен V.

3.357. Отношение стороны основания правильной n-угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно k. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания и допустимые значения k.

3.358. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

3.359. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Около этой пирамиды описан шар радиуса R. Найти объем пирамиды, если все ее боковые ребра образуют с основанием угол β.

3.360. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти объем пирамиды.

3.361. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды имеют одну и ту же длину a, а угол между равными сторонами основания равен α. Найти радиус описанного шара.

3.362. Две грани треугольной пирамиды — равные между собой прямоугольные треугольники с общим катетом, равным l. Угол между этими гранями равен α. Две другие грани пирамиды образуют двугранный угол β. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

3.363. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

3.364. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

3.365. Объем правильной пирамиды равен V. Через центр вписанного в пирамиду шара проведена плоскость, параллельная ее основанию. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды этой плоскостью, если двугранный угол при основании равен α.

3.366. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем усеченной пирамиды.

3.367. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему описанного шара, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен α.

3.368. В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.

3.369. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

3.370. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

3.371. В шар, радиус которого равен R, вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α.

3.372. В полушар вписано тело, состоящее из цилиндра и поставленного на него конуса. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости большого круга полушара; верхнее основание цилиндра совпадает с основанием конуса и касается поверхности шара. Вершина конуса лежит на поверхности шара. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол α. Найти отношение объема тела к объему полушара.

3.373. В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, проходящая через центр шара и произвольную точку окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

3.374. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения k.

3.375. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

3.376. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную $\alpha°$. Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

3.377. В конус вписан шар и к шару проведена касательная плоскость параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α?

3.378. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

3.379. В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении $1:4$. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

3.380. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. В этот конус вписан шар, а в шар вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны между собой. Найти объем призмы.

3.381. Радиус основания конуса равен R, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. Через точку P, лежащую на окружности касания шаровой и конической поверхностей, проведена касательная прямая к этой окружности, а через эту прямую проведена плоскость параллельно образующей конуса, проходящей через точку, диаметрально противоположную точке P. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

3.382. Вершина конуса находится в центре шара, а основание конуса касается поверхности шара. Полная поверхность конуса равна поверхности шара. Найти угол между образующей и высотой конуса.

3.383. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

3.384. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна a, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса.

3.385. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

3.386. В усеченный конус вписан шар, объем которого в 2 раза меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3.387. На шаровой поверхности радиуса R лежат все вершины равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а острый угол равен α. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

3.388. Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному α.

3.389. В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна S, а острый угол равен α. Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный β.

3.390. В шаровой сектор радиуса R вписан шар. Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен α.

Группа В

3.391. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, равно m. Найти углы треугольника и допустимые значения m.

3.392. Углы треугольника равны A, B и C. Высота треугольника, проходящая через вершину угла B, равна H. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Точки пересечения окружности со сторонами AB и BC треугольника соединены с концами высоты. Найти площадь построенного четырехугольника.

3.393. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A=\alpha$ радианов и $\angle B=\beta$ радианов, $AC=b$. Через ортоцентр (точку пересечения высот) и основания высот, опущенных на стороны AB и BC, проведена окружность. Найти площадь общей части треугольника и круга.

3.394. В остроугольном треугольнике ABC известны углы. Найти отношение, в котором ортоцентр делит высоту, проведенную из вершины угла A.

3.395. В треугольнике даны две стороны a и b $(a>b)$ и площадь S. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к третьей стороне.

3.396. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF; точка D лежит на стороне BC, точка E — на стороне AC и точка F — на стороне AB. Сторона AB относится к стороне DF как $8:5$. Найти синус угла DEC.

3.397. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ $(\alpha>\gamma)$ при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и биссектриса BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

3.398. Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно d. Угол между их общими внешними касательными равен α радианам. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком одной касательной и двумя соответствующими дугами окружностей.

3.399. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен 1/2. Найти синус угла при вершине.

3.400. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AL и CN. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, L и N, если $AC=a$ и $\angle ABC=\alpha$.

3.401. Стороны параллелограмма равны a и b ($a<b$). Меньшая диагональ составляет с меньшей стороной тупой угол, а с большей стороной — угол α. Найти бо́льшую диагональ параллелограмма.

3.402. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a>b$) и острый угол α между диагоналями. Найти углы параллелограмма.

3.403. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a>b$) и высота h, проведенная к большей стороне. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма.

3.404. Стороны параллелограмма равны a и b ($a<b$). Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найти площадь параллелограмма.

3.405. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении 1 : 2.

3.406. Длины четырех дуг, на которые разбита вся окружность радиуса R, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Точки деления служат вершинами четырехугольника, вписанного в эту окружность. Найти его площадь.

3.407. Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

3.408. Показать, что отношение площади любого треугольника к площади описанного около него круга меньше 2/3.

3.409. Для остроугольного треугольника образованы три числа, выражающие отношения длин его сторон к соответствующим расстояниям от них центра описанной окружности. Доказать, что сумма этих чисел в 4 раза меньше их произведения.

3.410. В сегмент с центральным углом α вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой хорды сегмента, а две другие лежат на дуге сегмента. Высота треугольника равна h. Найти радиус дуги сегмента.

3.411. Прямая, перпендикулярная хорде сегмента, делит хорду в отношении 1 : 4, а дугу — в отношении 1 : 2. Найти косинус центрального угла, опирающегося на эту дугу.

3.412. В сектор POQ радиуса R с центральным углом α вписан прямоугольник; две его вершины лежат на дуге сектора, две другие — на радиусах OP и OQ. Найти площадь прямоугольника, если острый угол между его диагоналями равен β.

3.413. В сегмент окружности радиуса R вписаны две равные окружности, касающиеся друг друга, дуги сегмента и его хорды. Найти радиусы этих окружностей, если центральный угол, опирающийся на дугу сегмента, равен $\alpha(\alpha<\pi)$.

3.414. Угол между плоскостями двух равных прямоугольных треугольников ABC и ADC с общей гипотенузой AC равен α. Угол между равными катетами AB и AD равен β. Найти угол между катетами BC и CD.

3.415. Один из плоских углов трехгранного угла равен α. Двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны β и γ. Найти два других плоских угла.

3.416. Даны три попарно взаимно перпендикулярных луча OM, ON и OP. На луче OM взята точка A на расстоянии OA, равном a; на лучах ON и OP взяты соответственно точки B и C так, что угол ABC равен α, а угол ACB равен β. Найти OB и OC.

3.417. Отношение двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а углы, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся как $2:3$. Найти эти углы и допустимые значения k.

3.418. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ ($AB\|CD$) и некоторой плоскостью P равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найти угол между стороной AD и плоскостью P.

3.419. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α. Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы β и γ ($\beta<\gamma$). Найти объем призмы, если ее высота равна H.

3.420. Основанием призмы служит параллелограмм с острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину данного угла α, равно b и составляет с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен β. Найти высоту призмы.

3.421. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом φ между диагоналями. Диагонали каждой из смежных боковых граней пересекаются под углами α и β ($\alpha>\beta$), обращенными к соответствующим сторонам основания. Найти объем призмы, если ее высота равна h.

3.422. Основанием наклонной призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, составляет с основанием острый угол β. Найти острый угол между третьей боковой гранью и основанием .

3.423. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, диагонали которой перпендикулярны соответствующим боковым сторонам. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен α. Отрезок прямой, соединяющий вершину верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.424. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы α и β. Найти объем призмы.

3.425. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с диагоналями a и b ($a>b$) и острым углом α между ними. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с большей диагональю основания острый угол β. Найти объем параллелепипеда.

3.426. Основание прямой призмы — ромб. Одна из диагоналей призмы равна a и составляет с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол β. Найти объем призмы.

3.427. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$) через середины двух смежных сторон основания DC и AD и вершину B_1 верхнего основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если периметр сечения в 3 раза больше диагонали основания.

3.428. Сторона BC треугольника ABC, лежащего в основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$), равна a, прилежащие к ней углы равны β и γ. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания, если объем призмы равен V и $AA_1 = A_1B = A_1C$.

3.429. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) проведена плоскость через середины ребер DD_1 и D_1C_1 и вершину A. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

3.430. В основании пирамиды лежит квадрат. Углы, которые образуют боковые грани с основанием, относятся как $1:2:4:2$. Найти эти углы.

3.431. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположной боковой грани и параллельно противоположной стороне основания. Эта плоскость составляет с плоскостью основания пирамиды угол α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

3.432. Расстояние от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно a и b. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

3.433. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние между боковым ребром и непересекающей его стороной основания.

3.434. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между высотой пирамиды и боковым ребром равен α $[\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)]$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через середину высоты перпендикулярно одному из ее боковых ребер.

3.435. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна H. Через вершину A основания ABC проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру SC. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем части пирамиды, заключенной между плоскостью основания и плоскостью сечения.

3.436. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписаны два шара; один касается всех ее граней, другой — всех ребер. Найти синус угла между боковым ребром и плоскостью основания.

3.437. Основанием пирамиды $FABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен α ($\alpha < \pi/2$). В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA_1E_1D_1$; точки A_1, E_1 и D_1 лежат соответственно на боковых ребрах AF, CF и BF пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найти отношение объема призмы к объему пирамиды.

3.438. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и высоту. В сечении образовался треугольник с углом $\pi/4$ при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

3.439. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Площадь сечения в 2 раза меньше площади основания пирамиды. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

3.440. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды в 5 раз больше стороны верхнего основания. Боковая поверхность пирамиды равна квадрату ее высоты. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

3.441. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Найти косинус угла между двумя другими боковыми гранями, если они составляют с плоскостью основания угол α.

3.442. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция с основаниями a и b ($a>2b$) и углом φ между неравными отрезками ее диагоналей. Вершина пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Углы, которые составляют с плоскостью основания боковые грани, проходящие через основания трапеции, относятся как $1:2$. Найти объем пирамиды.

3.443. В треугольной пирамиде все грани — правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении $1:3$, считая от основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

3.444. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих данной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

3.445. Основанием пирамиды $ABCDE$ служит ромб $ABCD$ ($AB \| CD$). Высота пирамиды проходит через середину стороны AB. Боковые ребра EC и ED составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти косинус острого угла ромба, если $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$ и $\cos\beta=1/\sqrt{5}$.

3.446. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с основанием угол α, а диагональ пирамиды с основанием — угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно не пересекающей ее диагонали основания.

3.447. Стороны нижнего и верхнего оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны соответственно a и b ($a>b$). Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию боковой грани и центр нижнего основания.

3.448. В конус, осевое сечение которого — прямоугольный треугольник, вписан цилиндр; его нижнее основание лежит в плоскости основания конуса. Отношение боковых поверхностей конуса и цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найти угол между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

3.449. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Отрезок AB, соединяющий точку A окружности верхнего основания с точкой B окружности нижнего основания, равен a и отстоит от оси цилиндра на расстояние b. Найти угол между прямой AB и плоскостью основания цилиндра.

3.450. Прямоугольник с площадью S и углом α между диагоналями вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найти поверхность тела вращения.

3.451. Пусть AB — диаметр нижнего основания цилиндра, A_1B_1 — хорда верхнего основания, параллельная AB. Плоскость, проведенная через прямые AB и A_1B_1, составляет с плоскостью нижнего основания цилиндра острый угол α, а прямая AB_1 составляет с той же плоскостью угол β. Найти высоту цилиндра, если радиус основания цилиндра равен R (точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой, проходящей через середины отрезков AB и A_1B_1).

3.452. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого одна сторона равна a, а каждая из остальных трех сторон равна b. Вершина пирамиды лежит на середине одной из образующих. Найти объем пирамиды, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

3.453. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, а ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и составляет с высотой угол β.

3.454. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

3.455. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. В пирамиду вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды и перпендикулярной ее боковому ребру.

3.456. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

3.457. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма; три ее вершины лежат на апофемах пирамиды, а три другие — в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если центр вписанного в пирамиду шара лежит в плоскости верхнего основания призмы.

3.458. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. К шару проведена параллельно основанию пирамиды касательная плоскость, которая делит объем пирамиды в отношении $m:n$, считая от вершины. Найти угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью.

3.459. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти расстояние от центра шара, вписанного в эту пирамиду, до бокового ребра.

3.460. Поверхность шара, вписанного в правильную усеченную треугольную пирамиду, относится к полной поверхности пирамиды как $\pi:6\sqrt{3}$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

3.461. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания как $3:4$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

3.462. Отношение объема правильной треугольной усеченной пирамиды к объему вписанного в нее шара равно k. Найти угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания и допустимые значения k.

3.463. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

3.464. В конус вложен шар так, что их поверхности касаются. Объем тела, заключенного между ними, в 8 раз меньше объема шара. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

3.465. В конус вписан шар. Плоскость, содержащая окружность касания шаровой и конической поверхностей, делит объем шара в отношении $5:27$. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

ГЛАВА 4
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Пример 1. Доказать, что в прямоугольном треугольнике величина угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна модулю разности величин острых углов треугольника (рис. 4.1).

□ Пусть $\angle C=\pi/2$, CD — высота, CE — медиана. Требуется доказать, что $\angle DCE=|\angle B-\angle A|$. Положим $\angle DCE=\angle x$; тогда $\angle DCA=\angle B$ (так как оба угла дополняют угол A до $\pi/2$). В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы; следовательно, $\triangle ACE$ — равнобедренный и $\angle ECA=\angle x+\angle B=\angle A$, откуда $\angle x=\angle A-\angle B$. Если вершины A и B треугольника поменять местами (см. рис. 4.1), то получим $\angle x=\angle B-\angle A$. Оба результата можно объединить в один: $\angle x=|\angle B-\angle A|$. ■

Пример 2. Доказать, что для любой точки M, принадлежащей произвольному треугольнику ABC со сторонами a, b и c и высотами h_a, h_b и h_c (рис. 4.2), справедливо равенство $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$, где x, y и z — соответственно расстояния от точки M до сторон BC, AC и AB. Сформулировать соответствующее свойство для произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику.

□ Соединив точку M с вершинами A, B и C, получим три треугольника BMC, AMC и AMB, высоты которых соответственно равны x, y и z. Пусть S — площадь треугольника ABC; тогда $S=\frac{1}{2}(ax+by+cz)$. С другой стороны, $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}bh_b$, $S=\frac{1}{2}ch_c$. Комбинируя эти равенства, находим

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1.$$

В равностороннем треугольнике $h_a=h_b=h_c=h$, а потому $x+y+z=h$, т. е.

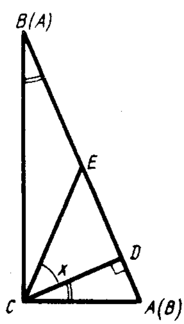


Рис. 4.1

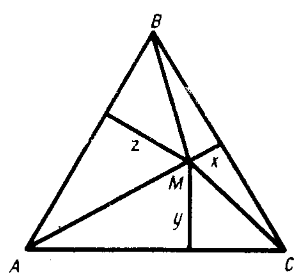


Рис. 4.2

сумма расстояний от произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику, до его сторон постоянна и равна высоте треугольника. ■

Пример 3. Длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника равна 40. Окружность с радиусом, равным 9, касается гипотенузы в ее середине. Найти длину отрезка, отсекаемого этой окружностью на одном из катетов.

□ Сначала выясним, имеет ли задача решение при заданных значениях длины гипотенузы и радиуса окружности. Из геометрических соображений (рис. 4.3) ясно, что для того чтобы окружность с центром O на высоте BK треугольника ABC пересекала катет BC в двух точках D и E, необходимо и достаточно, чтобы ее радиус OK был не больше половины высоты BK, но больше радиуса вписанной в треугольник окружности. Первое соотношение очевидно ($9<10$), второе также нетрудно проверить. Радиус r вписанной окружности найдем по формуле $r=S/p$, т. е. $r=\dfrac{20\sqrt{2}\cdot 20\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{40+40\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{20}{\sqrt{2}+1}=20\sqrt{2}-20$. Покажем, что $9>20\sqrt{2}-20$, т. е. что $29>20\sqrt{2}$. Возведя в квадрат обе части неравенства, получим верное неравенство $841>800$; следовательно, справедливо и исходное неравенство.

Для отыскания длины отрезка DE проведем $OF\perp DE$ и радиус OE заданной окружности. Вычислим последовательно длины отрезков BO, OF, FE и, наконец, DE. Имеем $BO=BK-OK=11$, $OF=BO\sin 45^\circ=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$, $FE=\sqrt{OE^2-OF^2}=\sqrt{81-\dfrac{121}{2}}=\sqrt{\dfrac{41}{2}}$, $DE=2FE=\sqrt{82}$. ■

Пример 4. В треугольнике ABC точка K, взятая на стороне BC, делит ее в отношении $1:3$, считая от вершины B, а точка L делит сторону AC в отношении $2:5$, считая от вершины A. В каком отношении точка O пересечения прямых AK и BL делит отрезки AK и BL, считая от соответствующих вершин?

□ I способ. Пусть $BK=x$, $AL=2y$ (рис. 4.4), тогда по условию $KC=3x$, $LC=5y$. Пусть, далее, $KF=m$, $OF=n$. Из подобия треугольников OKF и AKC имеем $\dfrac{n}{m}=\dfrac{7y}{3x}$, откуда

$$\frac{n}{y}=\frac{7m}{3x}. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников BOF и BLC находим $\dfrac{n}{5y}=\dfrac{x+m}{4x}$, откуда

$$\frac{n}{y}=\frac{5(x+m)}{4x}. \qquad (**)$$

Приравнивая правые части пропорций (*) и (**), после упрощений получаем

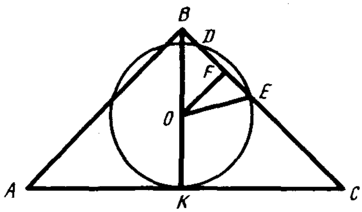


Рис. 4.3

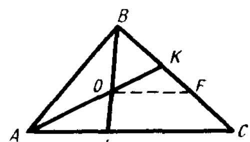


Рис. 4.4

$28m=15(x+m)$, откуда $m=\dfrac{15x}{13}$. Следовательно, $BF=BK+KF=\dfrac{28x}{13}$ и $CF=BC-$ $-BF=4x-\dfrac{28x}{13}=\dfrac{24x}{13}$. Согласно теореме Фалеса, имеем

$$\frac{BO}{OL}=\frac{BF}{FC}=\frac{28x/13}{24x/13}=\frac{7}{6},\ \frac{AO}{OK}=\frac{24x/13}{15x/13}=\frac{8}{5}.$$

II способ. Введем следующие обозначения: $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, $\overline{AO}=\bar{x}$, $\overline{LO}=\bar{y}$ (рис. 4.5). Тогда векторы $\overline{OK}$ и $\overline{OB}$, коллинеарные соответственно векторам $\overline{AO}$ и $\overline{LO}$, можно записать в виде $\overline{OK}=\alpha\overline{AO}$ и $\overline{OB}=\beta\overline{LO}$, где числа α и β подлежат определению.

Рассмотрим три замкнутых контура: $OBKO$ (I), $OLAO$ (II), $OKCLO$ (III). Из (I) имеем $\overline{OB}+\overline{BK}+\overline{KO}=\bar{0}$, т. е. $\beta\bar{y}+\frac{1}{4}\bar{a}-\alpha\bar{x}=\bar{0}$; из (II) $\overline{OL}+\overline{LA}+\overline{AO}=\bar{0}$, т. е. $-\bar{y}+\frac{2}{7}\bar{b}+\bar{x}=\bar{0}$; из (III) $\overline{OK}+\overline{KC}+\overline{CL}+\overline{LO}=\bar{0}$, т. е. $\alpha\bar{x}+\frac{3}{4}\bar{a}+\frac{5}{7}\bar{b}+\bar{y}=\bar{0}$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}+\frac{1}{4}\bar{a}=\bar{0}, \\ \bar{x}-\bar{y}+\frac{2}{7}\bar{b}=\bar{0}, \\ \alpha\bar{x}+\bar{y}+\frac{3}{4}\bar{a}+\frac{5}{7}\bar{b}=\bar{0}. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений выразим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и полученные выражения подставим в третье уравнение. После несложных преобразований получим

$$\left(4\alpha-\frac{5}{2}\right)\bar{x}+\left(\frac{7}{2}-3\beta\right)\bar{y}=\bar{0}.$$

Так как векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не коллинеарны, то это равенство возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\bar{x}$ и $\bar{y}$ равны нулю, т. е. $4\alpha-\frac{5}{2}=0$, $\frac{7}{2}-3\beta=0$.

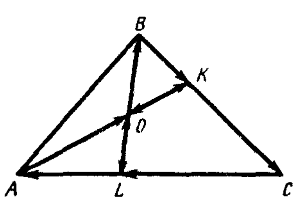


Рис. 4.5

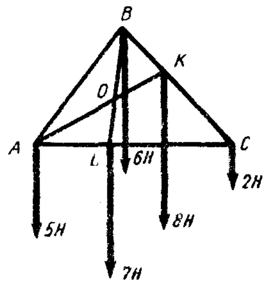


Рис. 4.6

Отсюда $\alpha=\frac{5}{8}$, $\beta=\frac{7}{6}$, т. е. $\overline{OK}=\frac{5}{8}\overline{AO}$, $\overline{OB}=\frac{7}{6}\overline{LO}$. Итак, $AO:OK=8:5$, $BO:OL=7:6$.

III способ. Пусть стороны треугольника ABC представляют собой невесомые стержни, а в вершинах треугольника приложены параллельные силы (рис. 4.6). Предположим, что в вершине C приложена сила, равная 2 Н; тогда в точке B согласно условиям равновесия (равенство моментов сил относительно точки K) должна быть приложена сила 6 Н, а в точке K согласно правилу сложения параллельных сил должна быть приложена сила 8 Н. Рассуждая аналогично относительно точек A и L, находим, что в точке A должна быть приложена сила 5 Н, а в точке L — сила 7 Н. Наконец, согласно условиям равновесия относительно точки O получаем $AO:OK=8:5$ и $BO:OL=7:6$. ■

Пример 5. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c. Найти объем пирамиды.

□ Будем считать основанием пирамиды прямоугольный треугольник ADB (рис. 4.7), а вершиной — точку C. Так как $CD\perp AD$ и $CD\perp BD$, то в силу теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости $CD\perp$пл. ADB и, следовательно, ребро CD — высота пирамиды. По формуле (2.10) находим объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{2}=\frac{abc}{6}.\ ■$$

Пример 6. Основанием пирамиды $ABCD$ служит остроугольный равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=BC=a$ и $AC=b$ (рис. 4.8). Каждое боковое ребро равно c. Через центр окружности, описанной около основания, проведена плоскость, параллельная прямым DB и AC. Найти площадь сечения.

□ Так как треугольник ABC — остроугольный, то центр O описанной около него окружности лежит внутри треугольника и заданная плоскость пересекает все грани пирамиды. Далее, из равенства всех боковых ребер пирамиды следует, что ее вершина D проецируется в точку O (см. гл. 2, «Дополнительные соотношения», п. 1°) и проекцией DB на плоскость основания служит отрезок BO, перпендикулярный стороне AC основания пирамиды. Согласно теореме о трех перпендикулярах, $BD\perp AC$.

Для построения заданной плоскости через точку O проведем прямую $MN\|AC$ (в плоскости ABC), а через точку N — прямую $NP\|DB$ (в плоскости BDC).

Плоскость MNP параллельна прямым AC и BD (в силу признака параллельности прямой и плоскости) и пересекает боковую грань ADC по прямой $PQ\|AC$, а боковую грань ABD — по прямой $MQ\|BD$. Сечение $MNPQ$ — прямоугольник, так как выше было показано, что $BD\perp AC$, а MN и NP параллельны соответственно AC и BD.

Найдем длины сторон прямоугольника $MNPQ$. Заметим, что BO — радиус описанной окружности, а BF — высота треугольника ABC. Пусть $BO=R$ и $BF=h$.

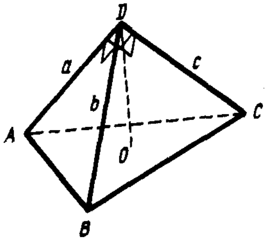


Рис. 4.7

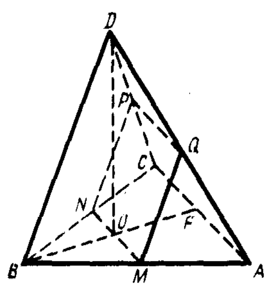


Рис. 4.8

Из подобия треугольников MBN и ABC находим $\frac{R}{h}=\frac{MN}{b}=\frac{BN}{a}$, откуда $MN=\frac{bR}{h}$ и $BN=\frac{aR}{h}$. Далее, $CN=BC-BN=\frac{a(h-R)}{h}$. Из подобия треугольников CNP и CBD находим $\frac{PN}{BD}=\frac{CN}{BC}$ или $\frac{PN}{c}=\frac{h-R}{h}$, откуда $PN=\frac{c(h-R)}{h}$. Следовательно, площадь сечения

$$S_{MNPQ}=MN\cdot PN=\frac{bcR(h-R)}{h^2}. \qquad (*)$$

Остается выразить h и R через известные величины. Из треугольника BFC находим $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$, а зависимость между R, h и a в равнобедренном треугольнике выражается формулой $R^2=\frac{a^2}{2h}$ (см. гл. 3, п. 3°). Подставив эти выражения в равенство (*), после упрощений получим

$$S_{MNPQ}=\frac{2a^2bc(2a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)^2}.$$

Покажем, что полученная для площади формула имеет смысл, т. е. что $2a^2-b^2>0$. Здесь снова существенно, что равнобедренный треугольник ABC — остроугольный. Из этого следует, что угол A при основании больше 45°. Поэтому $\cos A<\cos 45°$, т. е. $\frac{b/2}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $b<a\sqrt{2}$, $b^2<2a^2$ и $2a^2-b^2>0$. ■

Пример 7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. Найти объем конуса, вершина которого совпадает с вершиной B_1, а окружность основания проходит через середины трех ребер, выходящих из вершины D.

□ Пусть точки M, N и P (рис. 4.9) — соответственно середины ребер AD, CD и DD_1, т. е. $MD=ND=PD=a/2$. Из равенства равнобедренных прямоугольных треугольников DPN, DPM и DMN следует, что $MN=MP=NP=a\sqrt{2}/2$. Далее, из равенства прямоугольных треугольников B_1MA, B_1NC и B_1PD_1 (у которых один из катетов есть диагональ соответствующей грани куба, а другой — половина ребра куба) следует, что $B_1M=B_1N=B_1P=\sqrt{B_1D_1^2+D_1P^2}=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$. Значит, точки M, N и P равноудалены как от точки D, так и от точки B_1. Поэтому прямая B_1D перпендикулярна плоскости треугольника MNP и пересекает эту плоскость в точке O — центре окружности, описанной около треугольника MNP. Итак, ON — радиус основания конуса, B_1O — высота конуса.

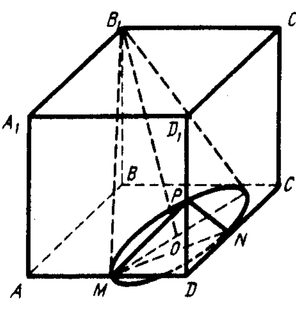


Рис. 4.9

Так как сторона a_3 правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой $a_3=R\sqrt{3}$, то $R=a_3/\sqrt{3}$. Следовательно,

$ON=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$. Затем из треугольника B_1NO находим $B_1O=\sqrt{B_1N^2-ON^2}=$ $=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{a^2}{6}}=\frac{5a}{2\sqrt{3}}$. Окончательно получим

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{6}\cdot\frac{5a}{2\sqrt{3}}=\frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{108}. \blacksquare$$

4.001. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длиной m и n $(m<n)$.

4.002. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 8 см. Может ли длина гипотенузы быть равной 5 см?

4.003. Доказать, что в любом треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин его трех высот равно диаметру описанной окружности.

4.004. Длины сторон остроугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью 5 см. Найти наибольшее число, обладающее следующим свойством: длина большей стороны любого треугольника указанного типа больше этого числа.

4.005. Медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что такой треугольник — равнобедренный.

4.006. Длины сторон треугольника относятся как $2:3:4$. В нем проведена биссектриса наименьшего угла. В каком отношении (считая от вершины) она делится центром окружности, вписанной в этот треугольник?

4.007. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 8 и 10 см. Найти длины сторон треугольника, если центр вписанной окружности делит эту биссектрису в отношении $3:2$, считая от вершины угла.

4.008. Сторона, биссектриса и высота треугольника, выходящие из одной и той же вершины, равны соответственно 5, 5 и $2\sqrt{6}$ см. Найти две другие стороны треугольника.

4.009. Две стороны треугольника и биссектриса угла между ними равны соответственно 60, 40 и 24 см. Найти площадь треугольника.

4.010. В прямоугольном треугольнике найти биссектрису прямого угла, если гипотенуза треугольника равна c, а один из острых углов равен α.

4.011. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

4.012. Доказать, что сумма квадратов медиан любого треугольника составляет 75% от суммы квадратов его сторон.

4.013. Тангенс тупого внешнего угла прямоугольного треугольника равен k. Найти тангенс острого угла треугольника, не смежного с данным внешним углом.

4.014. Треугольник разбит медианами на шесть частей, не имеющих попарно общих внутренних точек. Сравнить площади этих частей.

4.015. Доказать, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник.

4.016. Даны отрезок AB и прямая, не перпендикулярная отрезку и пересекающая его в точке, не являющейся серединой этого отрезка. Ученик построил точку B_1, симметричную точке B относительно данной прямой, и заметил, что теперь легко построить треугольник ABC, для которого биссектриса угла ACB лежит на данной прямой. Как это можно сделать?

4.017. Доказать, что длина медианы треугольника меньше полусуммы длин заключающих ее сторон.

4.018. Доказать, что если две стороны и медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны (рассмотреть два случая).

4.019. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

4.020. Доказать, что сумма длин высот треугольника меньше его периметра.

4.021. Три средние линии треугольника разбивают его на четыре части. Если площадь одной из них равна S, то чему равна площадь данного треугольника?

4.022. Дан треугольник с площадью 1 и длинами сторон a, b и c. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c$. Доказать, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

4.023. Какую фигуру образует множество всех вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

4.024. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна s. Найти границы возможных значений длины его гипотенузы c.

4.025. Доказать, что из трех медиан прямоугольного треугольника наименьшую длину имеет та, которая проведена к гипотенузе.

4.026. Через точку, принадлежащую меньшей стороне треугольника, провести прямую, отсекающую от него треугольник, подобный данному. Показать, что существуют четыре такие прямые.

4.027. Дан треугольник ABC. На основании BC построить треугольник с той же площадью, но с углом при вершине B, равным половине угла B данного треугольника.

4.028. Найти длины наименьших сторон всех тупоугольных треугольников, у которых длины сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 3 см.

4.029. Пусть BO — биссектриса угла B прямоугольного треугольника ABC, D — середина катета AC, $DO \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, AB — гипотенуза (рис. 4.10). Легко доказать, что $\triangle BOE = \triangle BOF$, откуда $BE = BF$. (*) Далее, так как $OA = OC$, то $\triangle OEA = \triangle OFC$, откуда $AE = FC$. (**). Складывая равенства (*) и (**), получаем, что $AB = BC$, т. е. что длина гипотенузы равна длине катета. Найти ошибку в проведенном доказательстве.

4.030. Определить вид треугольника по длинам трех сторон (если такой треугольник возможен): а) 2, 2 и 3; б) 6, 8 и 10; в) 3, 1 и 4; г) 3, 5 и 7.

4.031. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит боковую сто-

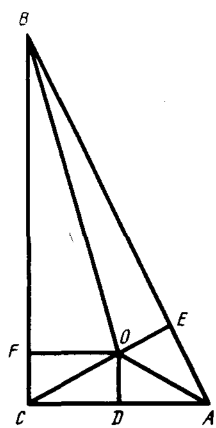


Рис. 4.10

рону на отрезки 4 и 1 см, считая от вершины. Найти длину биссектрисы.

4.032. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Доказать, что биссектриса также равна основанию треугольника.

4.033. Найти наибольшую площадь прямоугольного треугольника с данной гипотенузой c.

4.034. Доказать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны, то треугольник равнобедренный: $CA=CB$.

4.035. Длины сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию. Высота, проведенная к средней по величине стороне, равна h. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

4.036. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин медиан составляет 150% от квадрата длины его гипотенузы.

4.037. Углы треугольника относятся как $2:3:7$. Наименьшая сторона треугольника равна a. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

4.038. Показать, что если длины сторон некоторого треугольника составляют геометрическую прогрессию, то и длины высот треугольника также составляют геометрическую прогрессию.

4.039. Доказать, что угол C треугольника ABC является прямым в том и только том случае, если длины сторон этого треугольника связаны равенством $AB^2=AC^2+BC^2$ (прямая и обратная теоремы Пифагора).

4.040. Из каких точек плоскости данный отрезок виден под данным углом?

4.041. Какую фигуру образует множество ортоцентров (точек пересечения высот) всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?

4.042. Какую фигуру образует множество точек пересечения биссектрис всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?

4.043. Окружность каждого из двух равных кругов радиуса R проходит через центр другого. Найти площадь общей части этих кругов.

4.044. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB=7$, $BC=7$, $AD=10$. Определить DE.

4.045. Доказать, что если через точку касания двух окружностей провести две прямые, пересекающие обе окружности, и точки пересечения прямых с окружностями соединить хордами, то эти хорды параллельны.

4.046. Показать, что $3<\pi<4$, не пользуясь приближенными значениями числа π.

4.047. Радиус круга с центром в точке O равен 6 см, а его хорда $AB=3$ см. Найти радиус круга, вписанного в сектор AOB.

4.048. На отрезке AB произвольно взята точка M. На AM и MB по одну сторону от AB построены квадраты. Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке C. Показать, что луч MC есть биссектриса угла ACB.

4.049. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Найти сумму углов AOB и COD.

4.050. Центры описанной около треугольника и вписанной в него окружностей расположены симметрично относительно одной из сторон треугольника. Найти углы треугольника.

4.051. Две окружности имеют только одну общую точку. Через нее проведена произвольная секущая. Доказать, что касательные в точках пересечения этой секущей с каждой из окружностей параллельны.

4.052. Пары точек A и A_1, B и B_1 расположены симметрично относительно одной прямой. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности или же на одной прямой.

4.053. Доказать, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах.

4.054. В окружность радиуса $R=1$ см вписан квадрат, а в квадрат — второй квадрат, вершины которого делят пополам стороны первого квадрата (рис. 4.11). Не вычисляя длины стороны первого квадрата, доказать, что площадь второго квадрата равна 1 см^2.

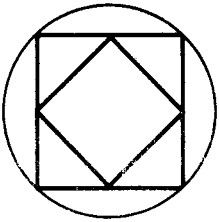


Рис. 4.11

4.055. В прямоугольный круговой сектор радиуса R вписан квадрат так, что две его вершины лежат на крайних радиусах, две — на дуге сектора. Найти сторону квадрата.

4.056. В круге радиуса 4 м найти длину хорды, которая видна из любой точки меньшей дуги окружности под углом 135°.

4.057. В круге радиуса a найти длину хорды, которая из любой точки большей дуги окружности видна под углом 30°.

4.058. Сторона AB треугольника видна из вершины C под углом α. Под каким углом она видна из центра окружности, описанной около треугольника? Рассмотреть три случая: C — вершина острого, прямого или тупого угла.

4.059. Две точки A и B расположены по разные стороны от прямой MN. На прямой MN найти точку C такую, что $\angle ACN = \angle BCN$.

4.060. В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон DC и BC. Найти $\angle MAN$.

4.061. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше a. Доказать, что его площадь меньше a^2.

4.062. Доказать, что в любой трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) треугольники AOB и COD равновелики (O — точка пересечения диагоналей).

4.063. В равнобедренной трапеции $ABCD$ дано: $AB \| DC$, $AB=3DC$, $\cos\angle ABC = 1/\sqrt{5}$. Доказать, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

4.064. Одна из сторон пятиугольника имеет длину 30 см. Длины остальных сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 см, причем длина меньшей из сторон не превышает 7 см. Найти длины сторон всех пятиугольников, для которых выполняются эти условия.

4.065. Из каких одноименных равных правильных многоугольников можно сложить паркет?

4.066. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, площадь которого равна $3R^2$. Найти n.

4.067. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

4.068. Две диагонали, исходящие из одной и той же вершины правильного пятиугольника, разбивают его на три треугольника. Найти отношение площади треугольника, ограниченного этими двумя диагоналями, к сумме площадей двух других треугольников.

4.069. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника, а d — число его диагоналей. Указать все значения n, для которых $n > d$.

4.070. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике?

4.071. Найти площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

4.072. В каком выпуклом многоугольнике число диагоналей равно числу сторон?

4.073. Непараллельные стороны трапеции продолжены до пересечения. Доказать, что прямая, проходящая через полученную точку и точку пересечения диагоналей, делит каждую из параллельных сторон трапеции на две равные части.

4.074. Каково наибольшее возможное число острых углов в произвольном выпуклом многоугольнике?

4.075. Меньшее основание трапеции равно 6 см. Найти ее большее основание, если расстояние между серединами диагоналей равно 5 см.

4.076. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его диагональ на отрезки длиной 3,2 и 8,8 см. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

4.077. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

4.078. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны 2, 3 и 4 см, вписана окружность радиуса 1,2 см. Найти площадь четырехугольника.

4.079. Через произвольно выбранную точку на одной стороне параллелограмма и концы противоположной стороны сделаны два разреза. Определить площадь данного параллелограмма, если площади отрезанных треугольников равны S_1 и S_2.

4.080. Доказать, что точка пересечения биссектрис углов, прилегающих к одной из непараллельных сторон произвольной трапеции, принадлежит средней линии трапеции.

4.081. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга, равен P. Найти длину средней линии трапеции.

4.082. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами некоторого параллелограмма.

4.083. Сформулировать какое-либо утверждение, верное вместе с ему обратным. Сформулировать какое-либо верное утверждение, но такое, для которого обратное утверждение является неверным.

4.084. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли провести две пересекающиеся прямые так, чтобы каждая из них пересекала обе данные прямые?

4.085. На сколько дальше центр верхнего основания куба с ребром 1 удален от вершины нижнего основания, чем от его стороны?

4.086. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

4.087. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) пересечен плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину E ребра DD_1. Показать, что объем пирамиды $ACDE$ равен 1/12 объема куба.

4.088. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AD, A_1B_1 и CC_1.

4.089. Найти наименьшее целое число градусов, которое может содержать плоский угол трехгранного угла, обладающего следующим свойством: каждый из плоских углов содержит целое число градусов, причем эти три числа составляют арифметическую прогрессию с разностью 50°.

4.090. Какую фигуру образует множество всех точек, отстоящих от данной плоскости на расстояние a и от фиксированной точки данной плоскости на расстояние b $(a<b)$?

4.091. Сколько боковых граней содержит призма, у которой 60 ребер?

4.092. Доказать, что если все диагонали параллелепипеда имеют равные длины, то он прямоугольный.

4.093. Доказать, что если наклонная образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

4.094. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти расстояние от прямой, проходящей через ребро AA_1, до прямой, проходящей через диагональ B_1D.

4.095. Существует ли в пространстве точка, равноудаленная от всех вершин параллелограмма? От всех прямых, содержащих его стороны? Каким свойством должен обладать параллелограмм, чтобы точка, равноудаленная от его вершин, была бы равноудалена и от прямых, содержащих его стороны?

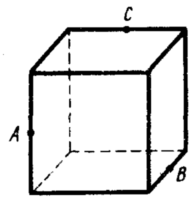


Рис. 4.12

4.096. Каким свойством должна обладать трапеция, чтобы в пространстве существовала точка, равноудаленная от ее вершин? Если данная трапеция таким свойством обладает, то какую фигуру представляет собой множество всех таких точек?

4.097. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки A, B и C (рис. 4.12).

4.098. Одно из боковых ребер наклонного параллелепипеда составляет равные острые углы с прилежащими к нему сторонами нижнего основания. Что представляет собой проекция прямой, содержащей это ребро, на плоскость нижнего основания? При каком условии эта проекция и диагональ основания лежат на одной прямой?

4.099. Через диагональ нижнего основания произвольного параллелепипеда и середину не пересекающего ее бокового ребра проведена плоскость. Как относятся объемы полученных при этом частей параллелепипеда?

4.100. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Под каким углом ребро AB видно из середины ребра SC?

4.101. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Построить график функции, выражающей зависимость площади сечения от расстояния между вершиной пирамиды и секущей плоскостью.

4.102. В правильном тетраэдре с ребром $\sqrt{2}$ см определить расстояние между двумя скрещивающимися ребрами.

4.103. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость параллельно плоскости основания пирамиды. В каком отношении находятся объемы полученных многогранников?

4.104. В основании пирамиды лежит треугольник, длины сторон которого 30, 40 и 50 см. Вершина большего острого угла основания принадлежит боковому ребру, имеющему длину 72 см и перпендикулярному плоскости основания. Найти полную поверхность пирамиды.

4.105. Двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, а высота пирамиды равна H. Найти радиус описанного шара.

4.106. Около правильной пирамиды с высотой 27 см описана сфера радиуса 18 см. Найти угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

4.107. Все ребра (в том числе и стороны основания) треугольной пирамиды равны. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к ее высоте.

4.108. Показать, что если пирамида имеет равные боковые ребра, то около нее можно описать сферу и что радиус этой сферы равен квадрату длины ребра, деленному на удвоенную длину высоты пирамиды.

4.109. В треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно равны. Доказать, что полная поверхность пирамиды равна учетверенной площади одной из ее граней.

4.110. Высоты всех боковых граней некоторой пирамиды равны. Под каким углом они наклонены к плоскости основания, если площадь полной поверхности пирамиды в 1,5 раза больше площади ее боковой поверхности?

4.111. В куб помещена четырехугольная пирамида так, что ее основание совпадает с одной из граней куба, а вершина — с серединой одного из ребер противоположной грани. Под какими углами боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания?

4.112. В правильном тетраэдре $SABC$ через ребро AC проведена плоскость, пересекающая ребро SB в точке K. Доказать, что проекция вершины B на плоскость сечения лежит на высоте сечения, проведенной к стороне AC. При каком условии эта проекция совпадает с точкой K?

4.113. Какому условию должен удовлетворять четырехугольник, чтобы на нем, как на основании, можно было построить пирамиду с равным наклоном всех боковых граней?

4.114. Пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 8 см, вписана в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

4.115. Через среднюю линию основания треугольной пирамиды и ее вершину проведена плоскость. В каком отношении находятся объемы полученных пирамид?

4.116. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — ее вершина) провести сечение через середину ребра SB и прямую MDN, расположенную в плоскости основания $ABCD$ и параллельную его диагонали AC.

4.117. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Найти объем пирамиды, если площади ее боковых граней равны S_1, S_2 и S_3.

4.118. Показать, что если в основании пирамиды, имеющей равные боковые ребра, лежит прямоугольный треугольник, то одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания.

4.119. Всякая ли пирамида обладает тем свойством, что около нее можно описать сферу? Если около пирамиды можно описать сферу, то где лежит центр этой сферы?

4.120. Показать, что если около основания пирамиды можно описать окружность, то все плоскости, перпендикулярные боковым ребрам пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

4.121. Найти площадь полной поверхности конуса, если его боковую поверхность можно развернуть в круговой сектор с радиусом 1 и с прямым центральным углом.

4.122. Два конуса имеют общую вершину, а их высоты пересекаются. Показать, что прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов, перпендикулярна плоскости, содержащей высоты конусов.

4.123. В конус, осевое сечение которого — правильный треугольник, вписан шар, затем вписан второй шар, касающийся первого шара и боковой поверхности конуса, и т. д. (n-й шар касается $(n-1)$-го шара и боковой поверхности конуса). Найти отношение предела суммы объемов шаров при $n \to \infty$ к объему конуса.

4.124. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью основания угол α. Внутри конуса расположены два шара, касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса, причем первый шар касается нижнего основания конуса, а второй — верхнего основания. Расстояние между центрами шаров равно l. Найти радиусы оснований конуса.

4.125. В усеченном конусе AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры нижнего основания, EF — диаметр верхнего основания, параллельный прямой CD. Найти косинус острого угла между прямыми AE и BF, если образующая конуса есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований и составляет с плоскостью основания угол α $(\alpha > \pi/3)$.

4.126. Отношение полной поверхности конуса к поверхности вписанного в него шара равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

4.127. Отношение боковой поверхности усеченного конуса, описанного около шара, к сумме площадей его оснований равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания и допустимые значения k.

4.128. Найти отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

4.129. Доказать, что проекция диагонали осевого сечения усеченного конуса на основание равна сумме радиусов окружностей оснований конуса.

4.130. Радиус полукруга, лежащего в основании полуцилиндра, равен 1. Через диаметр полукруга проведена плоскость под углом 45° к плоскости полукруга. Показать, что в развертке полуцилиндра линия пересечения проведенной плоскости с цилиндрической поверхностью полуцилиндра образует дугу синусоиды.

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

1°. Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (5.1)$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

2°. Координаты $(x;\ y)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (5.2)$$

3°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид

$$y=kx+q. \qquad (5.3)$$

Угловой коэффициент k представляет собой значение тангенса угла, образуемого прямой с положительным направлением оси Ox, а начальная ордината q — значение ординаты точки пересечения прямой с осью Oy.

4°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $A\ (x_0;\ y_0)$, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (5.4)$$

5°. Общее уравнение прямой имеет вид

$$ax+by+c=0. \qquad (5.5)$$

6°. Уравнения прямых, параллельных соответственно осям Oy и Ox, имеют вид

$$x=a, \qquad (5.6)$$

$$y=b. \qquad (5.7)$$

7°. Условия параллельности и перпендикулярности прямых $y_1=k_1x+q_1$ и $y_2=k_2x+q_2$ соответственно имеют вид

$$k_1=k_2, \qquad (5.8)$$

$$k_1k_2=-1. \qquad (5.9)$$

8^0. Уравнения окружностей с радиусом R и с центром соответственно в точках O (0; 0) и $C(x_0; y_0)$ имеют вид

$$x^2+y^2=R^2, \quad (5.10)$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \quad (5.11)$$

9^0. Уравнение

$$y=ax^2+bx+c \quad (5.12)$$

представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке, абсцисса которой $x_0=-b/(2a)$.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

1^0. Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (5.13)$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$.

2^0. Координаты $(x; y; z)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \quad (5.14)$$

3^0. Модуль вектора $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, заданного своими координатами, находится по формуле

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \quad (5.15)$$

4^0. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е. справедливы формулы

$$(a_1; a_2; a_3)+(b_1; b_2; b_3)=(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3), \quad (5.16)$$

$$\lambda(a_1; a_2; a_3)=(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3). \quad (5.17)$$

5^0. Единичный вектор $\bar{a}_0$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, находится по формуле

$$\bar{a}_0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}. \quad (5.18)$$

6^0. Скалярным произведением $\bar{a}\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos\varphi, \quad (5.19)$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

7^0. Скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ выражается формулой

$$\bar{a}\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \quad (5.20)$$

В частности, $\bar{a}^2=\bar{a}\bar{a}=|\bar{a}|^2$, откуда $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$.

8^0. Косинус угла между векторами $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\bar a\bar b}{|\bar a|\,|\bar b|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{5.21}$$

9°. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\bar a(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar b(b_1;\ b_2;\ b_3)$ имеет вид

$$\bar a\bar b=0 \text{ или } a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0, \tag{5.22}$$

а условие их коллинеарности (параллельности) — вид

$$\bar a=\lambda\bar b, \text{ где } |\lambda|=\frac{|\bar a|}{|\bar b|}, \tag{5.23}$$

или

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{5.24}$$

10°. Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar n(a;\ b;\ c)$, имеет вид

$$ax+by+cz+d=0. \tag{5.25}$$

11°. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar n(a;\ b;\ c)$ и проходящей через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \tag{5.26}$$

12°. Уравнение сферы с центром $O(0;\ 0;\ 0)$ записывается в виде

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{5.27}$$

Пример 1. В параллелограмме $OABC$ даны вершины O (0; 0;), A (3; 6) и B (8; 6). Найти отношение длин диагоналей OB и AC, а также составить уравнения сторон параллелограмма и диагонали AC.

□ Так как ординаты вершин A и B равны, то $AB\parallel Ox$ (рис. 5.1). Из трех отрезков OA, AB и OB сторонами параллелограмма могут быть только OA и AB, так как по условию OB — диагональ; поэтому $BC\parallel OA$ и C (5; 0). По формуле (5.1) находим $OB=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}$, $AC=\sqrt{(5-3)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}$; значит, $OB:AC=$ $=\sqrt{100}:\sqrt{40}=\sqrt{2{,}5}$ — искомое отношение диагоналей.

Согласно формуле (5.3), уравнение стороны OA имеет вид $y=kx+q$, где $k=6:3=2$ и $q=0$; следовательно, $y=2x$. Используя равенство (5.7), запишем уравнение стороны AB: $y=6$. Далее, так как $BC\parallel OA$, то угловой коэффициент прямой BC в силу формулы (5.8) есть $k=2$, а соответствующее значение q найдем

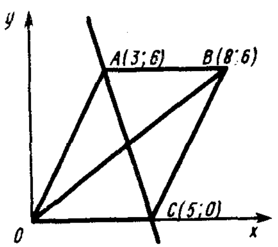


Рис. 5.1

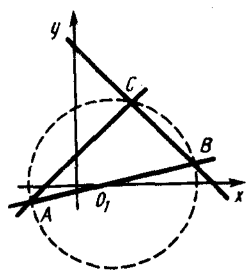


Рис. 5.2

из уравнения $y=2x+q$, подставив в него вместо x и y координаты точки C (5; 0); тогда получим $0=10+q$, т. е. $q=-10$; значит, уравнение BC имеет вид $y=2x-10$. Наконец, уравнение OC есть $y=0$.

Чтобы найти уравнение диагонали AC, воспользуемся тем, что точки A (3; 6) и C (5; 0) принадлежат прямой AC и, следовательно, их координаты удовлетворяют искомому уравнению. Подставив эти координаты в уравнение $y=kx+q$, получим $6=3k+q$, $0=5k+q$, откуда $k=-3$, $q=15$. Итак, $y=-3x+15$ есть уравнение диагонали AC. ■

Пример 2. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямыми $y=0{,}2x-0{,}4$, $y=x+2$, $y=8-x$.

□ Угловые коэффициенты прямых $y=x+2$ и $y=8-x$ равны соответственно $k_1=1$ и $k_2=-1$. Так как $k_1k_2=-1$, то выполняется условие (5.9) перпендикулярности прямых; значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный (рис. 5.2) и центром окружности является середина его гипотенузы AB. Найдем точки пересечения прямой $y=0{,}2x-0{,}4$ с прямыми $y=x+2$ и $y=8-x$; решив системы уравнений

$$\begin{cases} y=0{,}2x-0{,}4, \\ y=x+2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=0{,}2x-0{,}4, \\ y=8-x, \end{cases}$$

получим точки $A(-3;\ -1)$ и $B(7;\ 1)$ — концы гипотенузы. Используя формулы (5.2), найдем координаты центра окружности: $O_1(2;\ 0)$. В силу формулы (5.1) радиус окружности есть $R=O_1A=\sqrt{(-3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{26}$. Наконец, согласно формуле (5.11), получим искомое уравнение окружности: $(x-2)^2+y^2=26$. ■

Пример 3. Найти единичный вектор, коллинеарный вектору, направленному по биссектрисе угла BAC треугольника ABC, если заданы его вершины: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 3;\ 1)$.

□ Найдем координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; имеем $\overline{AB}(2;\ -1;\ 0)$, $\overline{AC}(-1;\ 2;\ 0)$, $|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}$, $|\overline{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$.

Так как $|\overline{AB}|=|\overline{AC}|$, то $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$ является диагональю ромба $ABDC$ (рис. 5.3), а следовательно — биссектрисой угла BAC. Имеем $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}=(2;\ -1;\ 0)+(-1;\ 2;\ 0)=(1;\ 1;\ 0)$ и $|\overline{AD}|=\sqrt{2}$. Пусть $\bar{e}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{AD}$, т. е. $\bar{e}=\dfrac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$. Тогда, используя формулу (5.18), окончательно получаем $\bar{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$. ■

Пример 4. Прямая, параллельная медиане CM треугольника ABC, пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что $\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}=\overline{CA}+\overline{CB}$.

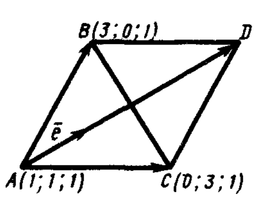


Рис. 5.3

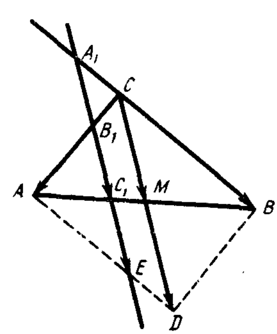


Рис. 5.4

□ Пусть $A_1E \| CM$ (рис . 5.4). Построим $\overline{CD}=2\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{CB}$. Очевидно, что A_1CDE — параллелограмм; следовательно, $\overline{A_1E}=\overline{CD}$, причем $\overline{A_1E}=\overline{A_1C_1}+\overline{C_1E}$.

Так как AM — медиана треугольника ACD и $B_1E \| CD$, то AC_1 — медиана треугольника AB_1E и $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1E}$. Теперь имеем $\overline{CA}+\overline{CB}=\overline{CD}=\overline{A_1E}=$ $=\overline{A_1C_1}+\overline{C_1E}=\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}$. ■

Пример 5. Даны два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таких, что $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$. Доказать, что $\bar{a}\perp\bar{b}$.

□ I способ. Если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах построить параллелограмм, то векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ совпадут с его диагоналями, длины которых составляют $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$. Так как по условию длины диагоналей равны, то полученный параллелограмм является прямоугольником, откуда $\bar{a}\perp\bar{b}$.

II способ. Пусть $\bar{x}=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{y}=\bar{a}-\bar{b}$; тогда $\bar{x}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$, $\bar{y}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$. Квадрат вектора равен квадрату его модуля; значит,

$$\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}+\bar{b}|^2 \text{ и } \bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}-\bar{b}|^2.$$

Правые части последних соотношений равны по условию; следовательно, $\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$, откуда $\bar{a}\bar{b}=0$; в силу формулы (5.22) это означает, что $\bar{a}\perp\bar{b}$. ■

Пример 6. Даны два отрезка AB и CD. Доказать, что если $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, то $AB\perp CD$. Верно ли обратное утверждение?

□ Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ и $\overline{BC}$. В зависимости от их взаимного расположения может получиться плоская или пространственная фигура (рис. 5.5). Учитывая, что $\overline{AB}^2=|\overline{AB}|^2=AB^2$, преобразуем данное равенство следующим образом:

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2;\ \underbrace{(\overline{BD}-\overline{BC})}_{\overline{CD}}(\overline{BD}+\overline{BC})=\underbrace{(\overline{AD}-\overline{AC})}_{\overline{CD}}(\overline{AD}+\overline{AC});$$

$$\overline{CD}(\underbrace{\overline{BD}-\overline{AD}}_{-\overline{AB}}+\underbrace{\overline{BC}-\overline{AC}}_{-\overline{AB}})=0;\ -2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0;\ \overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$$

а это и означает, что $\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

Выполняя преобразования «от конца к началу» ($\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$ или $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$ или $\overline{CD}(\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{BC}+\overline{CA})=0$ и т. д.), убеждаемся в том, что верно и обратное утверждение. ■

Пример 7. В пирамиде $SABC$ все грани — правильные треугольники; точка M — центр треугольника ABC, а точка P делит ребро SC пополам (рис. 5.6). Найти разложение вектора $\overline{MP}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AS}$.

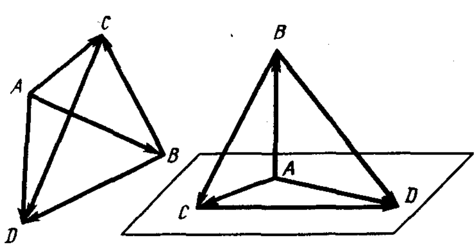


Рис. 5.5

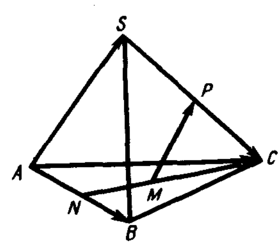


Рис. 5.6

□ Имеем $\overline{MP}=\overline{MC}-\overline{PC}$, где $\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{SC}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$; следовательно, $\overline{MP}=\overline{MC}-\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$. Теперь найдем $\overline{MC}$. В равностороннем треугольнике ABC имеем $MC=\frac{2}{3}CN$, где CN — высота треугольника; поэтому $\overline{MC}=\frac{2}{3}\overline{NC}$. Но $\overline{NC}=\overline{AC}-\overline{AN}=\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}$ и, значит, $\overline{MC}=\frac{2}{3}\left(\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}\right)=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}$.

Таким образом, окончательно получим

$$\overline{MP}=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AS}=\frac{1}{6}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AS}.\ \blacksquare$$

Пример 8. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3/2$.

□ На сторонах треугольника построим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ (рис. 5.7). Суммой этих векторов является некоторый вектор $\vec{a}$, т. е. $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\vec{a}$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\bar{e}_1^2+\bar{e}_2^2+\bar{e}_3^2+2\bar{e}_1\bar{e}_2+2\bar{e}_1\bar{e}_3+2\bar{e}_2\bar{e}_3=\vec{a}^2$$

или

$$1+1+1+2\cos(\pi-B)+2\cos(\pi-A)+2\cos(\pi-C)=|\vec{a}|^2.$$

Так как $|\vec{a}|^2\geqslant 0$, то $3-2\cos B-2\cos A-2\cos C\geqslant 0$, откуда $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3/2$. ■

Пример 9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. Найти радиус сферы, проведенной через точки A, B, E и F, где E и F — точки на ребре CC_1, причем $CE=EF=FC_1$.

□ Введем систему осей координат (рис. 5.8), началом которой является точка $B(0;\ 0;\ 0)$. В этой системе точки A, B_1, E и F имеют следующие координаты: $A(a;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ a)$, $E(0;\ a;\ a/3)$, $F(0;\ a;\ 2a/3)$. Пусть $O(x;\ y;\ z)$ — центр искомой сферы. Тогда $OA^2=OB^2=OE^2=OF^2=R^2$, где R — радиус сферы. Используя формулу (5.13), выражающую расстояние между двумя точками, получим систему уравнений

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R^2, \qquad (*)$$

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2, \qquad (**)$$

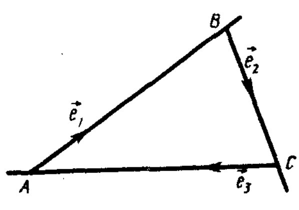


Рис. 5.7

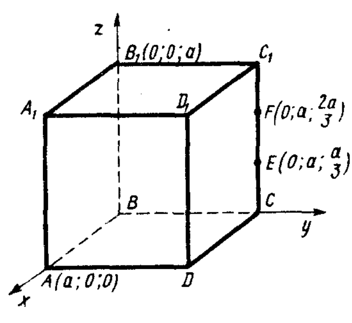


Рис. 5.8

$$x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2=R^2, \qquad (***)$$

$$x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=R^2. \qquad (****)$$

Вычитая уравнение (****) из (***), имеем $\left(z-\frac{a}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=0$, откуда $2z-a=0$, т. е. $z=a/2$. Подставим это значение z в уравнения (*) и (**) и вычтем (**) из (*); тогда получим $x=a/2$. Вычитая уравнение (***) из (**), находим $y=7a/18$. После подстановки значений x; y и z в уравнение (**) окончательно найдем $R=a\sqrt{211}/18$. ■

5.001. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Составить уравнение прямой l, параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках M и N, что $MN=1$.

5.002. Даны три точки $A(2;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(-4;\ 0)$, являющиеся вершинами равнобедренной трапеции $ABDC$. Найти координаты точки D, если $\overline{AB}=k\overline{CD}$.

5.003. Даны вершины треугольника: $A(-2;\ -3)$, $B(-1;\ 2)$, $C(4;\ 1)$. Доказать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный, и составить уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины A.

5.004. В прямоугольной системе координат изображена равнобедренная трапеция с основаниями 6 и 10 и углом $\varphi=60°$ при основании (рис. 5.9). Составить уравнения сторон трапеции.

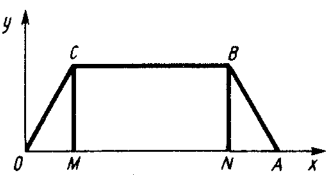


Рис. 5.9

5.005. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(2;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ и касающейся оси Oy.

5.006. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2;\ 3)$ и образующей с осью Ox угол 120°. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

5.007. На прямой $5x-2y+9=0$ найти точку A, равноудаленную от точек $B(-2;\ -3)$ и $C(4;\ 1)$, и вычислить площадь треугольника ABC.

5.008. Длины диагоналей ромба равны 15 и 8 см. Первая диагональ принята за ось Ox, вторая — за ось Oy. Составить уравнения сторон ромба и найти расстояние от начала координат до стороны ромба.

5.009. Пусть A — точка пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $x-3y+4=0$; O — начало координат. Найти расстояние OA и составить уравнение прямой OA.

5.010. Найти координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 0)$.

5.011. Вычислить длины диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, если $A(1;\ -3;\ 0)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(-3;\ 1;\ 1)$.

5.012. Даны две вершины равностороннего треугольника: $A(-2;\ 2)$, $B(-2;\ -4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и его площадь.

5.013. Известны координаты середин сторон треугольника: $M_1(-1;\ 2)$, $M_2(2;\ -3)$, $M_3(-3;\ -1)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

5.014. Даны координаты двух вершин треугольника: $A(2;\ -1)$, $B(-3;\ 5)$ и координаты точки пересечения медиан этого треугольника: $M(1;\ 1)$. Найти координаты вершины C.

5.015. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(2;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(7;\ 7)$, $D(7;\ 1)$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти длину ее средней линии.

5.016. Убедиться в том, что существует только одна точка с координатами $x,\ y,\ z$, сумма квадратов расстояний от которой до данных двух точек $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 3)$ постоянна и равна 16,5. Найти координаты этой точки.

5.017. В окружность $x^2+y^2=R^2$ вписан квадрат $ABCD$. Найти R и координаты вершин B, C и D, если $(5;\ -12)$ — координаты вершины A.

5.018. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и точку $A(1;\ 0)$ и касающейся данной окружности.

5.019. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(2;\ 1)$ и касающейся осей координат.

5.020. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$ и $3x+4y-12=0$.

5.021. Найти длину хорды, образующейся при пересечении прямой $x+y-5=0$ и окружности $(x+1)^2+(y+2)^2=40$.

5.022. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2+y^2=9$ из точки $M(5;\ 0)$.

5.023. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямой $3x-y+6=0$ и осями координат.

5.024. Составить уравнение сферы, проходящей через точку $A(1;\ -1;\ 4)$ и касающейся координатных плоскостей.

5.025. При повороте вокруг начала координат точка $A(6;\ 8)$ переходит в точку $A_1(8;\ 6)$. Найти косинус угла поворота.

5.026. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 6)$, $C(5;\ 4)$, $D(2;\ 1)$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти угол α между ее диагоналями.

5.027. Доказать, что треугольник с вершинами $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 0)$, $C(1;\ 5)$ тупоугольный, и найти косинус тупого угла.

5.028. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $(\bar{a}-\bar{b})^2+(2\bar{a}-\bar{b})^2=56$, $|\bar{a}|=2$ и $|\bar{b}|=3$.

5.029. Даны векторы $\bar{a}(2;\ -3;\ 5)$, $\bar{b}(-1;\ 1;\ -3)$ и $\bar{c}(3;\ 7;\ 1)$. Найти координаты вектора $\bar{p}(x;\ y;\ z)$, если $\bar{p}\bar{a}=12$, $\bar{p}\bar{b}=-6$ и $\bar{p}\perp\bar{c}$.

5.030. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}=\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c}$, $\overline{AD}=4\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — единичные попарно перпендикулярные векторы.

5.031. Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\bar{a}=6\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}$. Найти косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$.

5.032. Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями Ox, Oy и Oz углы, соответственно равные $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/4$; точка B имеет координаты $(-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$. Найти угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

5.033. Медианы боковых сторон равнобедренного треугольника пересекаются под углом 60°. Найти угол при вершине треугольника.

5.034. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC. Найти величину угла AOB, если $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$.

5.035. Дан треугольник ABC; BD — медиана, $\angle DBC=90°$, $BD=(\sqrt{3}/4)AB$. Найти $\angle ABD$.

5.036. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, $\overline{AB}(4; 2; 4)$, $AC=1$. Найти косинус угла между медианой AA_1 и стороной AB.

5.037. В трапеции $ABCD$ дано: вершина $A(3; 0)$, середина основания AB — точка $E(6; -1)$, середина основания CD — точка $F(7; 2)$. Боковая сторона BC параллельна оси Oy. Доказать, что трапеция равнобедренная, и найти угол при ее основании.

5.038. Доказать, что луч CM, где C — вершина прямого угла треугольника ABC, а M — центр квадрата, построенного на гипотенузе и лежащего вне его, есть биссектриса угла C.

5.039. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a. Точка $M\in SC$ и $SM:MC=2:1$. Найти угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$.

5.040. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AA_1=10$, $AD=6$, $AB=8$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$.

5.041. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DA_1}$ и $\overline{DM}$, где M — середина ребра CC_1.

5.042. Известны длины ребер тетраэдра $ABCD$. Найти косинус угла между противолежащими ребрами AB и CD.

5.043. Даны векторы $\overline{a}(6; -8; 5\sqrt{2})$ и $\overline{b}(2; -4; \sqrt{2})$. Найти угол, образуемый вектором $\overline{a}-\overline{b}$ с осью Oz.

5.044. Даны вершины треугольника: $A(-2; 1; -3)$, $B(4; -7; 1)$ и $C(1; 2; -1)$. Найти угол между стороной CA и медианой, проведенной из вершины C.

5.045. При каких значениях x векторы $(x^3-1)\overline{a}$ и $2x\overline{a}$ сонаправлены, если $\overline{a}\neq\overline{0}$?

5.046. При каких значениях m векторы $(m^2+m-2)\overline{b}$ и $m^3\overline{b}$ противоположно направлены, если $\overline{b}\neq\overline{0}$?

5.047. При каких значениях x векторы $(5x-x^2)\overline{a}$ и $\overline{a}$ сонаправлены и $|(x-5)\overline{a}|\leqslant|3\overline{a}|$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$?

5.048. При каких значениях y векторы $(3y^2-11y+6)\overline{p}$ и $(y^2+1)\overline{p}$ противоположно направлены, если $\overline{p}\neq\overline{0}$?

5.049. При каких значениях x и y векторы $(x; -2; 5)$ и $(1; y; -4)$ коллинеарны?

5.050. При каких x верно неравенство $|(x-2)\overline{a}|>3|\overline{a}|$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$?

5.051. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(-1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(-1; 7; 3)$, $D(-1; 6; 5)$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

5.052. Найти вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}(2\sqrt{2}; -1; 4)$, если $|\overline{b}|=10$.

5.053. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overline{AO}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

5.054. Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются соответственно в точках M и N. Доказать, что $\overline{MN}\parallel\overline{BC}$, и найти отношение $|\overline{MN}|:|\overline{BC}|$.

5.055. Пусть K и M — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ и $\overline{AK}=\overline{a}$, $\overline{AM}=\overline{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

5.056. В параллелограмме $ABCD$ дано: $M\in BC$ и $BM:MC=1:2$; $N\in DC$, $DN:NC=1:2$; $\overline{AM}=\overline{a}$; $\overline{AN}=\overline{b}$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ и $\overline{BD}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

5.057. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$, $|\overline{a}|=|\overline{b}|=2$, $\angle BAC=60°$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенной из вершины A.

5.058. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом углы $2\pi/3$. Разложить вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=1$.

5.059. Дан прямоугольный треугольник ABC; $\angle C=90°$, D — основание высоты, проведенной из вершины прямого угла. Выразить вектор $\overline{CD}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

5.060. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Разложить вектор $\overline{A_1A_3}$ по векторам $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_5}$.

5.061. К окружности с центром O проведены из точки M две касательные; A и B — точки касания. Разложить вектор $\overline{MO}$ по векторам $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$, если $\angle AMB=\alpha$.

5.062. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $AK:KB=7$. Сторона AB в 3 раза длиннее стороны BC. Разложить $\overline{DK}$ по $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ и найти отношение $DK:AB$, если $\angle BAD=60°$.

5.063. В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD. Найти $\angle MAN$, если $\angle BAD=60°$.

5.064. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, обращенный к гипотенузе.

5.065. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Разложить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

5.066. Найти длину биссектрисы AM треугольника ABC, если $AB=c$, $AC=b$ и $\angle A=\alpha$.

5.067. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Доказать, что $MN\leqslant\frac{1}{2}(AC+BD)$, $MN\leqslant\frac{1}{2}(BC+AD)$.

5.068. Дан треугольник ABC; M — точка пересечения его медиан. Доказать, что $OM<\frac{1}{3}(OA+OB+OC)$, где O — произвольная точка пространства.

5.069. В тетраэдре $ABCD$ медиана DD_1 грани ADB делится точкой M в отношении $DM:MD_1=3:7$. Разложить вектор $\overline{CM}$ по векторам $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

5.070. Дано: прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$; $\overline{BB_1}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$ и $\overline{BA}=\overline{c}$; O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Разложить $\overline{A_1O}$ по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

5.071. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти угол между векторами $\overline{MN}$ и $\overline{DC}$, если $M\in AA_1$ и $AM:MA_1=1:2$; $N\in CC_1$ и $CN:NC_1=2:1$.

5.072. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AD=a$, $DC=b$, $DD_1=c$. Найти острый угол между прямыми BD_1 и A_1D.

5.073. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M в плоскости его грани ABC. Доказать, что для разложения $\overline{DM}=\alpha\overline{DA}+\beta\overline{DB}+\gamma\overline{DC}$ выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=1$.

5.074. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла при вершине O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Разложить вектор $\overline{OH}$ по векторам $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$.

5.075. При каких значениях α и β вектор $\overline{a}(3;\,-1;\,\alpha)$ перпендикулярен вектору $\overline{b}(2;\,\beta;\,1)$, если $|\overline{b}|=3$?

5.076. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Доказать, что вектор $(\bar{b}\bar{c})\bar{a}-(\bar{a}\bar{c})\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$.

5.077. Доказать, что треугольник с вершинами $A(6;\ -4;\ 2)$, $B(3;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ -5;\ -1)$ прямоугольный.

5.078. Даны единичные векторы $\bar{m}$, $\bar{n}$ и $\bar{p}$ такие, что $\bar{m}\perp\bar{n}$, $\bar{n}\perp\bar{p}$ и угол между $\bar{m}$ и $\bar{p}$ равен $60°$. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=3\bar{m}-2\bar{n}+\bar{p}$ и $\bar{b}=-2\bar{m}+\bar{n}-\bar{p}$.

5.079. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB}=4\bar{i}+2\bar{j}$, $\overline{AC}=3\bar{i}+4\bar{j}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный, и вычислить его площадь.

5.080. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

5.081. На сторонах BC, CA и AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) даны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны, если точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях.

5.082. В треугольнике ABC дано: $AB=BC$; D — середина стороны AC; DK перпендикулярна BC; точка M — середина отрезка DK. Доказать, что прямые AK и BM перпендикулярны.

5.083. Даны вершины треугольника: $M(1;\ 1;\ 4)$, $N(1;\ 4;\ 4)$ и $K(3;\ 3;\ 2)$. Доказать, что $\overline{ON}\perp\overline{MK}$, где O — середина стороны MK. Определить вид треугольника.

5.084. Даны два вектора $\overline{OA}(-1;\ 2)$ и $\overline{OB}(-4;\ -2)$, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB, площадь треугольника OAB и длину медианы OM.

5.085. Дан вектор $\bar{a}(1;\ -2;\ 5)$. Найти координаты вектора $\bar{b}$, лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного вектору $\bar{a}$, если $|\bar{b}|=2\sqrt{5}$.

5.086. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

5.087. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

5.088. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки); K — середина ребра AA_1; H — середина ребра AD; M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямая KM перпендикулярна прямой B_1H.

5.089. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}|=5$, $|\overline{OB}|=2$, $|\overline{OC}|=6$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=8$.

5.090. Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+3\alpha\bar{k}$, $\bar{b}=\alpha^2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$. При каких значениях α векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

5.091. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB и $AN=3NB$; медиана AM пересекается с CN в точке O. Найти AB, если $AM=CN=7$ см и $\angle NOM=60°$.

5.092. В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а величина угла BAD равна $\pi/3$. На стороне BC взята точка E такая, что $EC=2$. Найти расстояние от E до центра симметрии ромба.

5.093. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти AD, если $AK=6$ см, $AM=3$ см и $\angle KAM=60°$.

5.094. Найти длину медианы AM треугольника ABC, если $AB=10$ см, $AC=6$ см и $\angle BAC=60°$.

5.095. Даны два вектора: $\bar{a}(x;\ 1;\ -1)$ и $\bar{b}(1;\ 0;\ 1)$. При каком значении x справедливо равенство $(\bar{a}+3\bar{b})^2=(\bar{a}-2\bar{b})^2$?

5.096. Дан треугольник ABC; $AB=4$ см, $AC=8$ см, $\angle BAC=60°$. Найти длину вектора $\overline{AN}$, где $N \in BC$ и $BN:NC=3:1$.

5.097. В куб вписана сфера. Доказать, что сумма квадратов расстояний каждой точки сферы до вершин куба не зависит от выбора этой точки. Найти эту сумму.

5.098. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этой точки. Найти эту сумму.

5.099. Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этих точек. Найти эту сумму.

5.100. Дан прямоугольник $ABCD$. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A и C равна сумме квадратов ее расстояний до вершин B и D.

5.101. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A, B_1, C и D_1 равна сумме квадратов ее расстояний до вершин A_1, B, C_1 и D.

5.102. В окружность вписан треугольник ABC. Прямая, содержащая медиану CC_1 треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что $CA^2+CB^2=2CC_1 \cdot CD$.

5.103. Даны векторы $\bar{a}(2;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}(1;\ -3;\ 2)$, $\bar{c}(3;\ 2;\ -4)$. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{x}\bar{a}=-5$, $\bar{x}\bar{b}=-11$, $\bar{x}\bar{c}=20$.

5.104. Даны векторы $\bar{a}=(3;\ 2;\ 2)$ и $\bar{b}=(18;\ -22;\ -5)$. Найти вектор $\bar{x}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, образует с осью Oy тупой угол, а его длина равна 14.

5.105. Найти скалярное произведение векторов $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$, если AK и BL — медианы равнобедренного треугольника ABC, площадь которого равна S, а $\angle A=120°$.

5.106. В равнобедренном треугольнике ABC с площадью S проведены высоты AM и BN. Найти скалярное произведение $\overline{AM} \cdot \overline{BN}$ при условии, что точки M и N лежат на боковых сторонах треугольника, а длина его основания равна c.

5.107. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты $\frac{2m}{1+m^2}$ и $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, а вектор $\bar{b}$ — координаты $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ и $\frac{2k}{1+k^2}$. Доказать, что оба вектора единичные: $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$. Используя свойство скалярного произведения $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, доказать справедливость неравенства $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

5.108. Найти модуль проекции вектора $\bar{a}(7;\ -4)$ на ось, параллельную вектору $\bar{b}(-8;\ 6)$.

5.109. Доказать, что для любых четырех данных точек A, B, C, D имеет место равенство $\overline{AB} \cdot \overline{CD}+\overline{AC} \cdot \overline{DB}+\overline{AD} \cdot \overline{BC}=0$.

5.110. Доказать, что если суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны, то эти ребра попарно перпендикулярны.

5.111. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно перпендикулярны, то $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

5.112. Дан пятиугольник $ABCDE$; точки M, N, P и Q — середины его сторон AB, BC, CD и DE. Доказать, что если U и V — середины MP и NQ, то вектор $\overline{UV}$ коллинеарен вектору $\overline{AE}$. Найти отношение $AE:UV$.

5.113. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого, пересекающиеся в точке P, взаимно перпендикулярны. Доказать, что середины сторон AB и CD, центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.

5.114. Доказать, что сумма квадратов длин всех ребер параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его диагоналей.

5.115. Даны точки $A_1(0;1;2)$, $A_2(1;2;4)$, $B_1(-1;-1;3)$, $B_2(1;0;0)$; M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Найти вектор $\overline{M_1M_2}$ и его модуль.

5.116. Даны вершины треугольника: $A(-1;1)$; $B(-5;4)$ и $C(7;2)$. Найти скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и площадь треугольника.

5.117. Даны три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $(\bar{a}+\bar{b})\parallel\bar{c}$ и $(\bar{b}+\bar{c})\parallel\bar{a}$.

5.118. Дан параллелограмм $ABCD$; $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$, K — середина BC, P — середина DC. Выразить сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ через векторы $\overline{AK}=\bar{a}$ и $\overline{AP}=\bar{b}$.

5.119. Единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\bar{e}_2+\bar{e}_2\bar{e}_3+\bar{e}_3\bar{e}_1$.

5.120. Дана неплоская замкнутая линия $ABCD$. Доказать, что если $\angle ABC=\angle DAB=90°$ и $DA=CB$, то $\angle ADC=\angle BCD$.

5.121. Найти отношения, на которые точка P пересечения биссектрис треугольника ABC делит каждую биссектрису, если $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

5.122. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\sqrt{15}$. Определить длину вектора $\overline{OC}$, если $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=1$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=0$, $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=2$.

5.123. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\sqrt{3}/3$. Определить $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$, если $|\overline{OB}|=2$, $|\overline{OA}|=1$, $|\overline{OC}|=3$, $\overline{OB}\cdot\overline{OA}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=0$.

5.124. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=5$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=20$.

5.125. На плоскости заданы точки $A(-6;-1)$, $B(-4;-4)$, $C(-1;-6)$, $D(-3;-3)$. Доказать, что $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь.

5.126. Дан треугольник ABC; $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=8$, $|\overline{AB}|=10$, $|\overline{BC}|=6$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B. Является ли угол ABC острым или тупым?

5.127. Даны вершины тэтраэдра: $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$, $D(0;0;0)$. Медианы граней ADB и BDC пересекаются в точках M_1 и M_2. Найти отношение $AC:M_1M_2$.

5.128. Даны координаты вершин пирамиды: $S(0;0;2)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$. Найти координаты точки M, лежащей на оси Oz, и координаты точки N, лежащей в плоскости SBC, если известно, что $\overline{MN}(1/3;1/3;0)$.

5.129. Доказать, что для всякого треугольника ABC выполняется неравенство $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -3/2$.

5.130. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что векторы $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}+\overline{B_1C_1}$, $\overline{CA}+\overline{C_1A_1}$ коллинеарны.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Требуемые вычисления следует производить, не пользуясь техническими средствами: калькулятором, счетной линейкой, таблицами и т. п.

Вариант I

1. Упростить выражение

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x+1}}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}+2\sqrt{x}$$

и найти его значение при $x=7$.

2. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

3. Решить уравнение $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

4. Найти $f'(\pi/4)$, если $f(x)=2\sqrt{2}\sin^3 x$.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24. Найти длину боковой стороны.

6. Найти сумму корней уравнения $f(x)+4f'(x)=0$, если $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

7. Найти произведение корней уравнения $\cos^2\frac{\pi x}{2}=1$, принадлежащих отрезку $[\pi, 3\pi]$.

8. Найти целое число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{1/2}(2x-3)>-3,\\ x^2-4x>0.\end{cases}$$

9. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние $5\sqrt{2}$, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой угол 60°. Найти расстояние между основаниями наклонных.

10. Вектор $\bar{a}(x;\ -1;\ 2)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(1;\ 2;0)$. Найти модуль вектора $\bar{a}$.

Вариант II

1. Вычислить $(4^{-0{,}25}-2^{0{,}5})(4^{-0{,}25}+(2\sqrt{2})^{1/3})$.

2. Вычислить значение выражения $x-y+2z$, если $x+y=4$, $y+z=8$, $x+z=6$.

3. Решить уравнение $\frac{1}{2x}\lg 2=\lg(2^{1/x}-2)$.

4. Сколько корней уравнения $\sin x+\cos 2x=0$ находится на отрезке $[-\pi, 3\pi]$?

5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=3/4$; $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Вычислить значение выражения $25\sin^2\alpha\cos\alpha$.

6. Найти длину отрезка, на котором выполняется неравенство $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leqslant 6$.

7. Сколько раз пересекает ось абсцисс график функции $f(x)=x^3+3x^2+5x$?

8. Сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма пятого и десятого членов равна 1. Найти сумму 20 первых членов.

9. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-\sqrt{x}$.

10. Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза длиннее меньшего основания. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

Вариант III

1. Решить уравнение $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$.

2. В треугольнике с основанием 15 см проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 75% площади треугольника. Найти длину этого отрезка.

3. Упростить выражение

$$\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{4\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)},$$

а затем найти его значение, если $\sin\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)=0{,}8,\ 0^\circ<\alpha<90^\circ$.

4. Решить уравнение $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg x=9$.

5. Найти наименьшее из отрицательных решений неравенства

$$\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}}>-\sqrt{3}.$$

6. Сколько корней, не превосходящих по абсолютной величине π, имеет уравнение $1+\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x$?

7. Решить уравнение $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7}-\left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3}=0$.

8. Отношение среднего арифметического двух положительных чисел к среднему геометрическому этих чисел равно 13/12. Найти отношение большего из заданных чисел к меньшему.

9. Дано: $\cos 3\alpha=2/3$. Вычислить значение выражения $81\cos^2\left(6\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

10. Доказать, что функция $f(x)=\sin^2 2x+0{,}5\cos 4x+2\sin^2 x+\cos 2x$ принимает одно и то же постоянное значение при любом значении x, и найти это значение.

Вариант IV

1. Вычислить значение $A=2^B-10^C$, где $B=1/\log_6 2$, $C=2/\log_2 10$.

2. Найти значение x, удовлетворяющее уравнению

$$10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\cdot 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}.$$

3. Решить уравнение $2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}$.

4. Найти наибольшее значение x, при котором верно неравенство $2x-5\sqrt{x}+2\leqslant 0$.

5. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 16, а диагональ равна 20.

6. Найти x в градусах, если $0°<x<270°$ и $\sin(90°+2x)+\sin x=0$.

7. Вычислить значение выражения $49:\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.

8. На двух станках требовалось обработать по 150 деталей, причем на первом из них обрабатывали в час на 5 деталей больше, чем на втором. На первом станке работа была начата на 1 ч позже, чем на втором, и, кроме того, она была прервана на 30 мин. Однако на обоих станках работу выполнили к одному и тому же сроку. Сколько деталей в час обрабатывали на каждом станке?

9. Решить уравнение

$$x^2\cdot 5^{\sqrt{3x-2}}+5^{2+x}=5^{\sqrt{3x-2}+2}+x^2\cdot 5^x.$$

10. Решить уравнение $\dfrac{6-x}{1-x^2}-\dfrac{x+3}{x(1-x)}=\dfrac{x+5}{x(1+x)}$.

Вариант V

1. В уравнении $x^2+bx-12=0$ один из корней равен 3. Найти значение коэффициента b.

2. Упростить выражение $(2x^{1/2}-y^{-1/4})(2x^{1/2}+y^{-1/4})$ и вычислить его значение при $x=1{,}2$ и $y=4$.

3. Найти сумму корней уравнения $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$.

4. Решить уравнение $\sqrt{2{,}1x+1}=x-1$.

5. Найти сумму целых значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2-3x<4$.

6. Используя формулы тождественных преобразований, вычислить $\cos 50°\cos 40°-2\sin 50°\sin 20°\cos 20°$.

7. Найти наименьший корень уравнения $2\cos^2 x-3\sin x=0$, лежащий в интервале $(0°, 90°)$. Ответ записать в градусах.

8. Площадь равнобедренной трапеции 180 см^2. Длина средней линии равна 45 см; длина боковой стороны 5 см. Найти длину меньшего основания трапеции.

9. Высота конуса равна 3; угол между высотой и образующей равен 45°. В этот конус вписан другой конус так, что его вершина совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие конусов перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса (положить $\pi=3{,}14$ и округлить ответ до сотых).

10. Вычислить $f'(\pi/2)$, если $f(x)=0{,}5\sin x\operatorname{tg}2x+2{,}5\cos x$.

Вариант VI

1. Вычислить $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2. Решить уравнение $2x+\sqrt{3x-2}=3$.

3. Найти число целых решений неравенства $5+\dfrac{17}{x-2}<\dfrac{2}{x+3}$.

4. Решить уравнение $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$.

5. В равнобедренной трапеции основания равны 24 и 10, а радиус описанной около нее окружности равен 13. Найти высоту трапеции при условии, что центр описанной окружности лежит вне трапеции.

6. Найти сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)=x^3-3x+3x+2$ на отрезке $[-1, 2]$.

7. Найти число решений уравнения $\sin 3x-\cos 3x=0$ на отрезке $[0, \pi]$.

8. Сумма четвертого и пятого членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма третьего и четвертого членов равна 5. Найти шестой член этой прогрессии.

9. Металлический шар радиуса $R=\sqrt[3]{2}$ переплавлен в конус, площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

10. Решить уравнение $2(\arcsin x)^2+\pi^2=3\pi\arcsin x$.

Вариант VII

1. Вычислить $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

2. Найти все целые значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{4-x}{x-5}\geqslant 1-\frac{4}{x}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

4. Найти корни уравнения $2^{1+\log_2 x}+4^{1+\log_2 x}=110$.

5. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и углом $60°$ вращается вокруг меньшего основания. Найти объем тела вращения и записать ответ, округлив его до ближайшего целого числа.

6. Сколько корней уравнения $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$ находится в промежутке $[-\pi/8, \pi/2]$?

7. Найти координату середины отрезка, на котором справедливо неравенство $\log_{0,1}(x^2-x+8)\geqslant -1$.

8. Найти два числа, если их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из них.

9. Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45°-\alpha)}{2\sin(60°+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^6$.

10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ в области ее определения.

Вариант VIII

1. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$.

2. Упростить

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2};\ a>b>0.$$

3. Найти больший корень уравнения

$$\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}.$$

4. Найти наименьшее положительное целое x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}>0{,}64$.

5. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$.

6. Найти корень уравнения $\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x$, лежащий в интервале $0°<x<180°$. Ответ записать в градусах.

7. В равнобедренном треугольнике высота относится к основанию как $3:4$, а боковая сторона равна $2\sqrt{39}$ см. Найти площадь треугольника.

8. Металлический цилиндр с диаметром основания $d=4$ см и высотой $h=4$ см переплавлен в шар. Вычислить радиус этого шара (считать $\sqrt[3]{12}\approx 2{,}3$).

9. Число 26 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

10. Решить уравнение $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Вариант IX

1. Вычислить $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$.

2. Вычислить $3x+y+z$, если $x+y+2z=14$, $2x+y+z=10$, $x+2y+z=12$.

3. Решить уравнение $\log_2(17-2^x)=4-x$.

4. Вычислить значение 10^x при $x=\lg 12+(\log_4 10)^{-1}$.

5. Дано: $\operatorname{ctg} 2\alpha=3/4$, $0<\alpha<\pi/2$. Найти $\cos^2\alpha$.

6. Сколько корней уравнения $\sin x+\cos x=1{,}4$ находится на отрезке $[-\pi, 3\pi]$?

7. Найти координату середины отрезка, на котором выполняется неравенство $3\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geqslant 2$.

8. Восьмой член арифметической прогрессии равен 2, одиннадцатый член равен 11. Сколько членов прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была равна 30?

9. Найти квадрат наибольшего значения функции $f(x)=\sin x+\cos x$.

10. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол, косинус которого равен 1/3, и отсекающая на окружности основания дугу в $90°$. Расстояние от центра основания до этой плоскости равно $2/\sqrt[3]{\pi}$. Найти объем конуса.

Вариант X

1. Решить уравнение $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}$.

2. Найти x в градусах, если $180°<x<360°$ и $\cos^2(180°+x)+3\cos^2(90°+x)=2$.

3. Найти наибольшее значение x, при котором справедливо неравенство $x^2+4(\sqrt{4-x})^2-21\leqslant 0$.

4. Решить уравнение $2\sqrt[4]{3x+0{,}1}=3\sqrt{3x+0{,}1}-1$.

5. Разность длин оснований трапеции равна 14 см; длины боковых сторон равны 13 и 15 см. Вычислить площадь трапеции при условии, что в эту трапецию можно вписать окружность.

6. Моторная лодка прошла 60 км против течения реки и 60 км по течению, затратив на путь против течения на 50 мин больше, чем на путь по течению. Найти скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 21 км/ч.

7. Найти число x, если

$$\frac{\sqrt[3]{9^2}\cdot(1/3)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}\cdot 27^{-2/3}}=\frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

8. Вычислить значение выражения $27\cos^4 2\alpha$, если $\cos(3\pi-4\alpha)=2/3$.

9. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$x^2\cdot 6^{-x}+6^{\sqrt{x+2}}=x^2\cdot 6^{\sqrt{x}}+6^{2-x}.$$

10. Вычислить значение A, если $A=4^B$, где $B=\log_2 5+\log_{1/4} 10$.

Вариант XI

1. Найти число x, если

$$\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot(1/3)^3}=\frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}.$$

2. Решить уравнение $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$.

3. Решить уравнение $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

4. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 32 см^2. Найти длину боковой стороны, если угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

5. Найти синус большего острого угла прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной около треугольника, в 2,5 раза больше радиуса вписанной окружности.

6. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2(\pi-\alpha).$$

7. Вычислить $(0{,}001^{\lg 3-1}+0{,}01^{\lg 0{,}3+0{,}5})\cdot 2{,}7$.

8. На ребре двугранного угла в 120° взят отрезок $AB=3$ см; из его концов в различных гранях к нему восставлены перпендикуляры $AC=1$ см и $BD=2$ см. Вычислить расстояние между точками C и D.

9. Дано: $F(x)=\dfrac{x}{2-x}+2$. Найти сумму корней уравнения $F(x)=F'(x)$.

10. Найти площадь треугольника, образованного отрезками осей Ox и Oy и прямой, проходящей через точки (0; 4) и (4; 2).

Вариант XII

1. Найти число $2x$, если

$$\frac{x+5{,}5}{14}(4+\sqrt{2})=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{8^{2/3}-2^{1/2}}.$$

2. Найти значение выражения x^2+y^2, если $2x+y=2$, $x+3y=3$.

3. Решить уравнение $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1$.

4. Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $x^2+8x<20$?

5. Решить уравнение $2^x+3\cdot 2^{x+2}=6{,}5$.

6. Найти значение выражения $\operatorname{tg}^2 15°+4\operatorname{tg}60°$.

7. Сколько корней уравнения $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=0$ находится в промежутке $[0, \pi]$?

8. Шестой член арифметической прогрессии в 4 раза меньше девятого члена, а их сумма равна 20. Найти сумму девяти первых членов прогрессии.

9. Найти точки экстремума функции $f(x)=x\ln x$.

10. Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найти отношение площади параллелограмма, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

Вариант XIII

1. Найти число $3x$, если

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{9^{1/2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{3/2}(3-\sqrt{5})}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

2. Найти значение выражения x^2-y, если $2x-5y=0$, $x+10y=2$.

3. Вычислить значение 5^x при $x = \log_4 16 + 1{,}5 \log_{1/3} 3 - \lg\sqrt{5} - \lg\sqrt{2}$.

4. Вычислить длину отрезка, на котором выполняется неравенство $x^2 - x \leqslant 6$.

5. Решить уравнение $4 \cdot 5^x - 5^{-x} + \lg 100 = 5$.

6. Упростив выражение, вычислить $\cos 20° - \sin 20° \operatorname{ctg} 10°$.

7. Сколько корней имеет уравнение $\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi]$?

8. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Сколько раз ее график пересекает ось Ox?

9. Сумма шестого и девятого членов арифметической прогрессии равна 20, а их произведение равно 64. Найти десятый член этой прогрессии, если ее первый член отрицателен.

10. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.

Вариант XIV

1. Упростить выражение

$$\frac{x^{-6} - 64}{16 + 4x^{-2} - x^{-4}} \cdot \frac{1}{4 - 4x^{-1} + x^{-2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1 - 2x}.$$

2. Упростить выражение

$$\left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right)\left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right).$$

3. Решить уравнение $1{,}5 \cdot 4^{x+0{,}5} = 6^x + 2 \cdot 9^{x-0{,}5}$.

4. Сумма первого, третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна — 12, а их произведение равно 80. Найти первый член a_1 и разность d прогрессии, выбрав наименьшее значение a_1.

5. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{1/2} \dfrac{x-1}{7-x} > -1$.

6. Найти число решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$, где $f(x) = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x - 10x$.

7. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна $4\sqrt{10}$, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $3\sqrt{10}$. Найти длину основания треугольника.

8. При каком значении параметра a уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет ровно три решения?

9. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и BCD — правильные треугольники с заданной высотой. Угол между этими гранями равен φ. При каком значении $1/\cos\varphi$ площадь полной поверхности пирамиды является наибольшей?

10. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2 - 3x + 4$ из начала координат, при условии, что абсцисса точки касания — число положительное.

Вариант XV

1. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = 0.$$

2. Вычислить $A = 5^B$, где $B = 2\log_{25} 8 + \log_{1/5} 5$.

3. Найти наименьшее x, при котором справедливо неравенство

$$\frac{x-3}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x-5})^2}{x-6}.$$

4. В бассейн проведены три трубы. Первая наполняет его на 4 ч дольше, чем вторая, а вторая — за 1/3 времени, необходимого для наполнения бассейна третьей трубой. Если все трубы будут действовать одновременно, то бассейн наполнится за 4 ч. За сколько часов первая и третья трубы, действуя раздельно, могут наполнить бассейн?

5. Решить уравнение

$$(x^2-3x)9^{\sqrt{2-x}}+4\cdot 9^x=(x^2-3x)9^x+4\cdot 9^{\sqrt{2-x}}.$$

6. Найти число x, если $\dfrac{(\sqrt[6]{4})^5\cdot 16^{1/2}}{\sqrt[3]{64}\cdot x}=(16)^{1/6}\cdot 4^{-1/2}$.

7. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найти длину боковой стороны.

8. Вычислить значение выражения $4\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Решить уравнение $x\sqrt[3]{x}+16=8\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

10. Найти x в градусах, если $0°<x<360°$ и $2\sin^2(x+270°)-7\sin(x+90°)=4$.

Вариант XVI

1. Решить уравнение

$$x^2\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+4^{2-x}=16\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{-2x}.$$

2. Найти число x, если

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-1/2}}{(\sqrt[6]{25})^2\cdot\sqrt{5}\cdot x}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2.$$

3. Найти значение A, если $A=2^B+6^C$, где $B=2/\log_{\sqrt{3}}2$ и $C=1/\log_2 6$.

4. Решить уравнение $\sqrt{42-x}=2+\sqrt{6-x}$.

5. Решить уравнение $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}-1$.

6. Вычислить значение выражения $16\sin^4\left(\dfrac{11\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-4\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

7. Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса 6,5 в точках A и B соответственно. Найти площадь треугольника ABC, если $AB=5$.

8. Найти наибольшее значение x, при котором верно неравенство

$$\frac{x^2+x-45}{x-6}\geqslant\frac{3x+1}{2}.$$

9. Найти x в градусах, если $90°<x<270°$ и $3\cos^2(x+270°)+\sin^2(x+180°)=1$.

10. В первую поездку автомобиль израсходовал 10% бензина, имеющегося в баке, затем во вторую поездку — 25% остатка. После этого в баке осталось бензина на 13 л меньше, чем было первоначально. Сколько литров бензина находилось в баке первоначально?

Вариант XVII

1. Решить уравнение $\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}=6$.

2. В квадрате $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а точка F — середина стороны CD. Найти тангенс угла EAF.

3. Найти сумму всех значений параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2\sqrt{6}x+a-1=0$ имеет ровно один корень.

4. Высота и диагональ равнобедренной трапеции равны соответственно 5 и 13. Найти площадь трапеции.

5. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$.

6. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{1/3}(2x-1)>-2$.

7. Найти длину отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной, проведенной к линии $y=8/x^2$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

8. Точка $M(2;\ 5)$ принадлежит параболе $y=-x^2+ax+5$. Найти ординату вершины параболы.

9. Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Площадь боковой поверхности призмы равна 144. Найти объем многогранника, вершинами которого служат центры всех граней призмы.

10. Найти значение числа k, при котором равенство

$$2\sin 4x(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\sin kx$$

верно при любом значении x.

Вариант XVIII

1. Найти сумму квадратов корней уравнения $x(x-\sqrt{3})=1$.

2. Решить уравнение $\log_{1/2}(\log_2 x-1)=-1$.

3. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найти третий член прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого члена.

4. Найти наименьшее значение функции $f(x)=|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|$.

5. В параллелограмме $ABCD$ ($AB\|CD$) биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найти периметр параллелограмма, если длина AB равна 12 и $AF:FD=4:3$.

6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}\geqslant 1,\\ 2\cdot 4^{2x}\geqslant 32^x.\end{cases}$$

7. Высота конуса равна 6. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60°. В конус помещена пирамида, основанием которой служит равнобедренный прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса, а вершиной — середина одной из образующих конуса. Найти объем пирамиды.

8. Параметр k квадратного уравнения $x^2-2kx+3(2k-3)=0$ принимает следующие значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Каждому из указанных значений k соответствует то или иное число корней заданного уравнения. Найти число всех корней.

9. Решить уравнение $4\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{x+3}=\pi$.

10. Найти целый корень уравнения $\dfrac{f(x)}{2f'(x)}=\dfrac{1}{3}$, если $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}$.

Вариант XIX

1. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}$ на отрезке $[1,\ 6]$.

2. Решить неравенство $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)}\geqslant 0$.

3. Найти $|x|$, если $|x-4|+5x=-8$.

4. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD, перпендикулярной стороне AB, равна 6; длина диагонали AC равна $2\sqrt{22}$. Найти длину стороны AD.

5. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1}=2$.

6. Найти число корней уравнения $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}(x/3)}=0$ на отрезке $[0,\ 9\pi]$.

7. Куб с ребром, длина которого $4\sqrt[4]{3}$, пересечен плоскостью, проходящей через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найти площадь сечения.

8. Найти $\sqrt{5\cos(\operatorname{arctg} 0{,}75)}$.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

10. Вычислить $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n}+\ldots}$.

Вариант XX

1. Найти значение числа a, при котором система

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+3y}{5}=2, \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{x-5y}{3}=3, \\ \dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x-10y}{2}=a \end{cases}$$

имеет решение.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=4-x$, $y=4+x$, $y=|x|$.

3. Найти $\left(\dfrac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

4. Решить уравнение $\log_2^2(2x)=\log_2 x^4$.

5. В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно 0,5. Найти тангенс острого угла между медианами, проведенными к катетам.

6. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти второй член прогрессии.

7. В результате измерений некоторой величины получены следующие пять значений: 51; 51,2; 51,4; 52,1; 52,3. Найти такое число x, для которого сумма квадратов разностей между полученными значениями и числом x была бы наименьшей.

8. Решить уравнение $\dfrac{\log_2\left(9-x^{\log_x 2^{x-3}}\right)}{x}=1$.

9. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна 4. Найти сумму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

10. Найти наименьший положительный угол (в градусах), удовлетворяющий уравнению $2\cos^2(270^\circ+\alpha)+7\sin(270^\circ-\alpha)=5$.

Вариант XXI

1. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$.

2. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12. Радиус вписанного в треугольник круга равен 3. Найти площадь треугольника.

3. Найти сумму всех целых положительных решений неравенства $4^{x-1}-2^x<1{,}25$.

4. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=3$.

5. Решить уравнение $\log_2\log_{1/2}\log_9 x=0$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases}\cos\pi x=-1,\\ x^3-5x^2-14x=0.\end{cases}$

7. Найти максимум функции $f(x)=20x/(x^2+1)$.

8. Основанием пирамиды $ABCF$ служит правильный треугольник ABC со стороной, длина которой равна 20. Ребро FB перпендикулярно плоскости основания и имеет длину, равную 5. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной скрещивающимся ребрам AC и FB так, что в сечении получился квадрат. Найти длину стороны квадрата.

9. Найти расстояние между точками пересечения параболы $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x-3$ и прямой $4x+3y+9=0$.

10. Решить уравнение $|x-4|=x$.

Вариант XXII

1. Выражение $(2\log_2 25+\lg 2)\log_2 10$ преобразовать к виду $(A\log_2 5+B)^2$.

2. Известно, что точка пересечения прямых $2x+y=9$ и $kx+5y=18$ принадлежит биссектрисе первого координатного угла. Найти число k.

3. Величина угла между боковыми сторонами равнобедренного треугольника меньше $60°$. К боковой стороне проведены медиана и высота, длины которых соответственно равны $3\sqrt{5}$ и 6. Найти длину боковой стороны.

4. Касательная, проведенная к параболе $y=x^2-5x+10$, образует с осью абсцисс угол $45°$. Найти расстояние от точки касания до начала координат.

5. Решить уравнение $\dfrac{25}{2x+1}+\dfrac{10}{\sqrt{2x+1}}=3$.

6. Найти $\cos^2 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=1/\sqrt{5}$.

7. Пятый член арифметической прогрессии равен 4. Какова должна быть разность прогрессии, чтобы сумма квадратов второго и шестого членов была наименьшей?

8. В пирамиде $ABCF$ через медиану BK основания ABC и середину L бокового ребра AF проведена плоскость. Найти отношение объема многогранника $BCKLF$ к объему пирамиды $ABKL$.

9. Найти сумму всех целых решений неравенства $2^x+9\cdot 2^{-x}<10$.

10. Решить уравнение $\dfrac{\pi}{24}(6x+1)=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}1+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\operatorname{arcin}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант XXIII

1. Сумма модулей корней квадратного уравнения $4x^2+kx-3=0$ равна 2, причем модуль отрицательного корня больше положительного корня. Найти число k.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения $\log_3\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{15}+\dfrac{1}{2}=0$.

3. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата

равна $2\sqrt{3}(\pi-2)$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

4. Решить уравнение $2x+\sqrt{x+11}=14$.

5. Решить уравнение $2x/9=(\sin 15°+\operatorname{tg} 30° \cos 15°)^2$.

6. Все четыре грани пирамиды — правильные треугольники. Найти расстояние между центрами ее двух граней, если площадь полной поверхности пирамиды равна $81\sqrt{3}$.

7. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x^2-x-12}\,(2^{x-1,5}-\sqrt{2})}{x+3}=0$.

8. Найти длину отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $y=\sqrt{x^2+2x+4}$ в точке с абсциссой, равной -2.

9. Найти целое решение неравенства $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-12x+35}<0$.

10. Найти число корней уравнения $\sin x+\cos 2x=0$, принадлежащих отрезку $[0,\ 3\pi]$.

Вариант XXIV

1. Найти сумму всех корней уравнения $(x^2-7x+2)^2-13(x^2-7x)-26=0$.

2. Найти $\sin^2 3\alpha$, если $\alpha=2\operatorname{arctg} 1-\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AC и BC соответственно равны 12 и 8; точка K — середина медианы BD. Найти длину отрезка CK.

4. Решить уравнение $\log_{|x|}(x^4+x^3-6x^2-7x)=4$.

5. Найти наименьшее значение функции $f(x)=2^x+2^{2-x}$ на отрезке $[0,\ 2]$.

6. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) служит квадрат $ABCD$, площадь которого равна 50. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точки F и K — соответственно середины ребер CC_1 и A_1B_1. Вектор $\overline{OF}$ перпендикулярен вектору $\overline{DK}$. Найти объем параллелепипеда.

7. Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же к сумме квадратов цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится искомое число. Найти это число.

8. Найти $\sin^2 x$, если $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{tg} x=2$ и $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

9. Точка пересечения прямых $2x-y=10$ и $3x+2y=1$ принадлежит окружности с центром в начале координат. Найти радиус этой окружности.

10. Найти произведение всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-5x-6<0, \\ x^2-3x>0. \end{cases}$$

Вариант XXV

1. Найти положительные корни уравнения $x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=8$.

2. Решить уравнение $\log_{0,5}(x-12)=-\log_2\sqrt{x}$.

3. В треугольнике ABC величина угла C равна 60°, длина стороны AB равна $\sqrt{31}$. На стороне AC отложен отрезок AD, длина которого равна 3. Найти длину стороны BC, если длина отрезка BD равна $2\sqrt{7}$.

4. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC составляет с основанием AC угол, тангенс которого равен 0,5. Найти косинус угла ABC.

5. На координатной плоскости xOy даны прямая $x+5y=4$ и два вектора $\bar{a}(2; -3)$ и $\bar{b}(-1; 5)$. На данной прямой найти такую точку M, чтобы вектор $\overline{OM}$ был перпендикулярен вектору $2\bar{a}+3\bar{b}$.

6. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Какую длину должна иметь высота пирамиды, чтобы радиус шара, описанного около пирамиды, был наименьшим, если объем пирамиды равен 72?

7. Найти наибольшее значение функции $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ на отрезке $[\pi/4, 3\pi/4]$.

8. Найти $f'(2)$, если $f(x)=x\ln(x^2+2x-7)$.

9. Найти сумму всех рациональных (в том числе и сократимых) дробей со знаменателем 2, являющимися решениями неравенства $2^x+3\cdot 2^{2-x}<13$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $x+|y|=2$ и осью ординат.

Вариант XXVI

1. Решить уравнение $x=2-\sqrt{-10x-x^2}$.

2. Пассажир проехал на поезде 120 км и, пробыв на станции 40 мин, вернулся с обратным поездом, проходящим в час на 6 км больше, чем первый. Общая продолжительность поездки составила 8 ч. Сколько километров в минуту проезжает каждый поезд?

3. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство $4x^2+4x+2(\sqrt{2x+1})^2\leqslant 34$.

4. Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса 5 в точках A и B соответственно. Определить площадь треугольника ABC, если $AB=6$.

5. Найти x, если

$$\frac{4^{-1/3}\cdot 16^{2/3}}{\sqrt[3]{64x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{32}}.$$

6. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$2x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}+x\cdot 2^{x+1}=2x^2\cdot 2^x+x\cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}.$$

7. Вычислить $A=9\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)\right)^{-1}$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Решить уравнение $\frac{2x+1}{x}+\frac{3x}{2(2x+1)}=\frac{5}{2}$.

9. Найти x в градусах, если $0°<x<360°$ и $2\cos^2(x+270°)=3\sin(x+270°)$.

10. Вычислить A, если $A=4^B+5^C$, где $B=\frac{1}{2\log_5 2}$, $C=\frac{1}{\log_7 5}$.

Вариант XXVII

1. Найти x в градусах, если $90°<x<270°$ и $\sin^2(180°+x)+3\cos^2(180°+x)=2$.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, тангенс двугранного угла при основании равен 4/3. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

3. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел A, B и C, где $A=62$, $B=102$ и $C=42$.

4. В арифметической прогрессии содержится 10 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 50, а членов, стоящих на нечетных местах, равна 35. Определить первый член и разность прогрессии.

5. Найти корень уравнения $\log_4(x^2+3x-4)=\log_4\dfrac{x-1}{x+4}$.

6. Вычислить A, если $A=10^B+3^C$, где $B=2/\log_3 10$ и $C=1/\log_6 3$.

7. Найти значение производной функции $f(x)=\dfrac{\sin x+2x}{\cos x-3}$ в точке $x=0$.

8. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство $x^2+7<6x+y^2$, где $y=(7-2x)^{1/2}$.

9. Найти квадрат расстояния между точками, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=0, \\ x^{-2}+y^{-2}=8. \end{cases}$

10. Найти x из уравнения $8^{2/3}\cdot 2^3\cdot(0{,}5)^{-2}\cdot x^{-1}=2^7\cdot 2^{-2}$.

Вариант XXVIII

1. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое требуется некоторое количество машин. Так как на каждую машину грузили на 0,5 т меньше, то дополнительно потребовалось 4 машины. Сколько машин было затребовано первоначально?

2. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство $\log_{0,25}\dfrac{1-2x}{x+1}<0{,}5$.

3. Решить уравнение $x=(16-x^2-6x)^{1/2}-2$.

4. Решить уравнение $(2x+1):x+2{,}5x:(2x+1)=3{,}5$.

5. На отрезке $[0°, 360°]$ найти число различных корней уравнения

$$7+4\sin x:\frac{1}{\cos x}+\frac{3}{\cos(90°-2x)}=0.$$

6. Найти сумму и произведение чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 5x-2y-z=2, \\ 3x+4y-5z=4, \\ x+3y-2z=-1. \end{cases}$$

7. Вычислить $A=\sin(90°-2x)$, если $\sin(180°-x):\cos(180°-x)=-2$.

8. Найти коэффициенты k и q уравнения прямой $y=kx+q$, которая пересекает гиперболу $y=2{,}4/x$ в точках с абсциссами $x=2$ и $x=-3$.

9. Дано уравнение относительно x:

$$x\cdot 3^y-x\cdot 3^x=3^{y+1}-3^{x+1},\ \text{где } y=(x+2)^{1/2}.$$

Найти сумму и произведение корней этого уравнения.

10. При каком значении параметра k система уравнений $\begin{cases} 3x^2+2y=k, \\ x^2+y^2=117 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант XXIX

1. Найти число, 3,2% которого равно $A=\dfrac{3\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

2. Упростить выражение

$$\frac{2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-(b-a)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}-\frac{(\sqrt{ab}-a)\lg 64}{(b-a)\lg 4}.$$

3. Упростить выражение $\sin^4\frac{3\alpha}{2}-6\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}+\cos^4\frac{3\alpha}{2}-\cos 6\alpha+4$.

4. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}=0$. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ и $|\bar{c}|=5$, вычислить $\bar{b}\bar{c}-\bar{a}\bar{b}-\bar{c}\bar{a}$.

5. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=5n^2-4n$. Найти три первых члена прогрессии.

6. Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{3x-26}=\sqrt{x-6}$.

7. Найти корни уравнения $\log_2(9^{x+2}+7)=2+\log_2(3^{x+2}+1)$.

8. Около круга радиуса $\sqrt{3}$ см описана равнобедренная трапеция с острым углом 60°. Найти длину средней линии трапеции.

9. Найти x в градусах, если $-90°<x<90°$ и $\sin(180°-x)\cos(90°-7x)=$ $=\cos(270°+3x)\sin(360°+5x)$.

10. Образующая конуса равна 2 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найти объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с тупым углом 150°.

Вариант XXX

1. Найти два первых члена бесконечной геометрической прогрессии ($0<q<1$), сумма которой равна 9, а сумма ее трех первых членов равна 26/3.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=1-t,\\ 2\sqrt{xy+x+2y+2}=5+t^2+2t.\end{cases}$

3. Решить уравнение $\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}=\frac{\lg 64}{\lg 16}$.

4. Найти x в градусах, если $-80°<x<80°$ и $4(\sin 2x\cos^5 2x+$ $+\cos 2x\sin^5 2x)+\sin^3 4x=1$.

5. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{2}{x-12}\right|>\frac{8}{9}$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде длины ее бокового ребра и диагонали основания равны $\sqrt{3}$ см. Найти объем пирамиды.

7. Расстояние между городами A и B равно 195 км. Из A в B и из B в A одновременно выезжают два поезда и встречаются через 3 ч. Затем они продолжают свой путь. Поезд из A прибыл в B на 13/14 ч раньше, чем другой прибыл в A. Определить скорости поездов.

8. Найти значение производной функции $y=3\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$ при $x=1$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания AC и DB пересекаются в точке M и $\angle ABD=60°$. Определить скалярное произведение $\overline{AC}\cdot\overline{AD}$, если $|\overline{B_1M}|=3$ и $\angle BMB_1=30°$.

10. Какое число больше: $(\log_3 28)^2$ или $\log_3 20412$?

ВАРИАНТЫ БИЛЕТОВ ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ*

Вариант I

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left((\sqrt{17}+\sqrt{x})^2-\frac{\sqrt{17^3}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{17}-\sqrt{x}}\right)^2\cdot 4^{\log_2 x-0,5\log_2 17}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4^x+1}{4^x+2}-4^x=\dfrac{y}{2^{x+1}+4},\\ 4\cdot 2^{3x}+y^2=4.\end{cases}$$

3. Число 10 представить в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного квадрата первого слагаемого и утроенного квадрата второго слагаемого была наименьшей.

4. Найти все корни уравнения $0,5(1+\cos 2x)\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)-\sin^3 x=4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi(x+1)\geqslant 1$.

5. Около круга площади S описан ромб с острым углом α. Найти длины диагоналей ромба.

Вариант II

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{x+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{a}}-\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{a}}+\frac{\sqrt[3]{xa^2}-\sqrt[3]{x^4\sqrt{a}}}{x-\sqrt{a}}\right)^3.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt[4]{0,5\lg x^5+8\left(\lg\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2-3}.$$

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-18x^2+28x$ на отрезке $[0; 1,5]$ и построить ее график на указанном отрезке.

4. Найти все корни уравнения $(\sin x+\cos x)^2+\cos 2x+\operatorname{tg}^2 2x=0$, лежащие на отрезке $[-\pi/2, \pi]$.

5. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, радиус окру-

* Варианты I—XX предлагались на экзаменах в Московском энергетическом институте, а варианты XXI—XXXV — в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики.

жности, вписанной в треугольник AOB, равен 2, $\angle BOA = \alpha$. Найти произведение $\overline{BA} \cdot \overline{BD}$.

Вариант III

1. Упростить выражение

$$\frac{2a+(a^2-1)^{1/2}}{((a-1)^{1/2}+(a+1)^{1/2})((a-1)^{3/2}-(a+1)^{3/2})}.$$

2. Решить неравенство $\dfrac{2^{x+1}+x-1}{2^x+1} \leqslant 2$.

3. Одна бригада может убрать все поле за 8 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. Первая бригада проработала один день, после чего к ней присоединилась другая бригада, и обе вместе закончили работу. Сколько дней бригады работали вместе?

4. Найти корни уравнения $\left|\cos\left(x+\dfrac{15\pi}{2}\right)\right| = 2\sin\left(x+\dfrac{9\pi}{2}\right) - \sin(x+17\pi)$,

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

5. Радиус вписанной в трапецию окружности равен R. Найти площадь трапеции, если ее углы равны 90 и 20°.

Вариант IV

1. Упростить выражение

$$\left(\left(\frac{8x^3}{1-\sqrt{1+4x^2}}+\frac{8x^3}{1+\sqrt{1+4x^2}}\right)\left(\frac{1}{8x^3-2x}-\frac{1}{8x^3+2x}\right)\right)^{-1}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\log_2\left(\frac{7^{x^2}+16\lg x+9\sqrt{\lg x^2}-49}{\sqrt{2\lg x+1{,}125}}-8\sqrt{\lg x^2}\right).$$

3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=3x-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^3}{27}$ и построить ее график.

4. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\sin x\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\sin^2 2x = 2\cos^2\dfrac{\pi}{4}$, лежащие в интервале $(-\pi/12, \pi)$.

5. Найти площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, длина диагонали основания которой равна a, а боковое ребро образует со стороной основания угол α.

Вариант V

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{1-2\sqrt{2x}+2x}-\frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)(1-\sqrt{2x})}\right)\frac{\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+\sqrt[4]{2x^3}\right)^2-4x}{1+\sqrt{\frac{x}{2}}}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt[4]{\lg\left(3^{\sqrt[4]{6x+1}}+19\right)^{2,5}-5}.$$

3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=3x-\frac{1}{49}x^3$ и построить ее график.

4. Найти все корни уравнения $0,5(\sin 3x-\sin x)=\sin 2x\cos x-4\sin^3 x$, лежащие на отрезке $[-\pi/3, 3\pi/2]$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ биссектрисы основания ABC пересекаются в точке M. Найти скалярное произведение $\overline{MA_1}\cdot\overline{MA}$, если длина стороны основания призмы равна a.

Вариант VI

1. Упростить выражение $\left(\frac{9-x^6}{3-x^3}-\frac{27-x^9}{9-x^6}+\frac{x^6}{3+x^3}\right)^3$.

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}-7}-(1,5)^{\frac{7}{3x}-3}}.$$

3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=6x-8x^3$ и построить ее график.

4. Найти все корни уравнения $7\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}+\cos 2x$, лежащие на отрезке $[-7\pi/6, 5\pi/6]$.

5. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α. Найти отношение площади треугольника к площади круга, описанного около треугольника.

Вариант VII

1. Упростить выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}\right)^{-1}\cdot(0,1)^{\lg(x^{-2}-0,5x^{-1})}$.

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\left(\sqrt{4\sqrt{x+1}+7}-\sqrt{x+1}-(0,5)^{\log_2 0,5}\right)^{-1/2}.$$

3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=0,3x^2-0,02x^3$ и построить ее график.

4. Найти все корни уравнения $4\sin^2\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+5\cos 2x+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}=-5$, лежащие в интервале $(-3\pi, \pi/2)$.

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и образует с основанием пирамиды угол α. Определить объем пирамиды.

Вариант VIII

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{2-x}\right)(\sqrt{x}-5^{\log_{25}2}).$$

2. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{\log_3(4\cdot 3^{2x+3}-1)-2x-3}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=1+5x+x^2-x^3$ на отрезке $[-2, 0]$ и построить ее график на указанном отрезке.

4. Найти все корни уравнения $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}2x}+\dfrac{2\cos^2 x-1}{\cos 2x+\sin 2x}=\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}3x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$, лежащие в интервале $(-2\pi/3, 7\pi/18)$.

5. Периметр основания правильной четырехугольной призмы равен P, диагональ призмы образует с высотой призмы угол α. Найти объем призмы.

Вариант IX

1. Упростить выражение $\left((x^6+2x^2)\left(\dfrac{1}{4x^4}-\dfrac{1}{2}\right)^{1/2}-\left(\dfrac{4}{x^8-2x^{12}}\right)^{-1/2}\right)^2$.

2. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{1+\log_2 x}-1}{2\sqrt{1+\log_2 x}+3}-\dfrac{1}{7}}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=0{,}5x^3+5{,}25x^2+$ $+0{,}25$ на отрезке $[-1, 1]$ и построить ее график на указанном отрезке.

4. Найти все корни уравнения $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{3}+x\right)}{\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x}$, лежащие в интервале $(-\pi, 2\pi)$.

5. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания цилиндра. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если образующая конуса равна l и угол между образующей и высотой конуса равен α.

Вариант X

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{(2+\sqrt[4]{4a})^2-2\sqrt{a}}{8\sqrt{a}-4}+\frac{1}{2\sqrt{a}-\sqrt[4]{4a}}\right)\frac{4a-2\sqrt{a}}{(1+\sqrt[4]{4a})^2}.$$

2. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y+x^2\leqslant 4,\\ y-x\leqslant 2,\\ y-2x\geqslant 2.\end{cases}$

3. Найти три положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если сумма первого и третьего членов прогрессии равна наименьшему значению функции $f(x)=4x^2-4x+53$ на отрезке $[0, 1]$, а квадрат второго равен $0{,}5f'(25{,}5)$.

4. Найти все корни уравнения $\cos^2 2x=1+\sin 2x\sin 4x$, лежащие на отрезке $[-3\pi/2, \pi/2]$.

5. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда образует со стороной основания угол α, а с диагональю параллелепипеда угол β. Определить объем параллелепипеда, если длина его диагонали равна l.

Вариант XI

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+b+1}-\frac{\sqrt{b}\,(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b})^2}{(a^2+1)^2-b^2}\right)^{-1}-10^{\log_{100}(a^2+1)}.$$

2. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y-4x^2\leqslant 1,\\ y+2x\leqslant 2,\\ y-2x\geqslant -1,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$

3. Разность между двумя положительными числами равна 4, а разность между произведением этих чисел и удвоенным кубом меньшего числа принимает наибольшее значение. Найти данные числа.

4. Найти все корни уравнения $\cos 2x+(\sin x+\cos x)^2\ \operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} x+1)$, лежащие на отрезке $[-7\pi/4,\ \pi/4]$.

5. Высота правильной треугольной пирамиды образует с боковым ребром пирамиды угол α. Найти объем пирамиды, если площадь ее основания равна S.

Вариант XII

1. Упростить выражение

$$\frac{(a+\sqrt{4a}+1)^{1/2}\,(\sqrt{a^3}+\sqrt{8b^3})}{((\sqrt[4]{2b}-\sqrt[4]{a})^2+(\sqrt[4]{2b}+\sqrt[4]{a})^2)\,(a-\sqrt{2ab}+2b)}-0{,}5\cdot 10^{\log_{100} a}.$$

2. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y\geqslant 4x^2-4,\\ -y+2x\geqslant 0,\\ y-x\geqslant 0.\end{cases}$

3. Среди всех равнобедренных треугольников, у которых сумма двух равных сторон и высоты, опущенной на одну из этих сторон, равна 4 см, найти треугольник наибольшей площади.

4. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-4\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2=\frac{3}{2}(1+\cos 2x)$, лежащие в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

5. В конус вписан шар. Найти объем шара, если высота конуса равна h и угол между высотой и образующей конуса равен α.

Вариант XIII

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{x^2+1+\sqrt[3]{9}+2(\sqrt{x^3}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}-\sqrt[6]{3})^{-1}+2\sqrt{\sqrt[3]{3}x}\,(\sqrt{\sqrt[3]{3}x}-1)}{(x^2+2x-\sqrt[3]{9}+1)\,(x+\sqrt[3]{3}+1)}\right).$$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{2x}+5^{2y}=5,\\ 2^{x-1}\cdot 5^y=1.\end{cases}$

3. Производительность труда на заводе трижды увеличивалась на одно и то же число процентов. В результате число производимых за сутки станков увеличилось с 64 до 125 штук. На сколько процентов каждый раз увеличивалась производительность труда?

4. Найти корни уравнения $\sin 2x+\sin x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=\cos\frac{7\pi}{4}$, удовлетворяющие неравенству $2^{\sqrt{\pi^2-x^2}}-1\geqslant 0$.

5. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 64 см^2, высота пирамиды равна $4\sqrt{2}$ см. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

Вариант XIV

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{0{,}2x}\,(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{x})-2\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{0{,}2x}+1)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}+(\sqrt[3]{0{,}2x+1})^{-1}+1\right)^{-1}\cdot 7^{\log_{343}5}.$$

2. Решить уравнение $2\sqrt{x}-\lg(25^{\sqrt{x}}+25\sqrt{x}-125)=\sqrt{x}\lg 4$.

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=\frac{x^4}{16}-16x+5$ на отрезке [2, 6], первый член прогрессии равен -6. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все корни уравнения

$$\sin x\left(1+2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\sin^2\frac{4\pi}{3}=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x+2\pi>\frac{2}{3}x$.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник с большей стороной, равной a, и тупым углом между диагоналями, равным α. Длина высоты пирамиды равна длине окружности, описанной около ее основания. Найти объем пирамиды.

Вариант XV

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(2\left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2}+\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-1}\right)^{1/2}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)^{-1}\cdot 7^{\log_{49}3}.$$

2. Решить уравнение $(10-3^{\sqrt[3]{x+1}})(1+3^{-\sqrt[3]{x+1}})-10\cdot 3^{-\sqrt[3]{x+1}}=0$.

3. Число 18 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы первое слагаемое было равно третьему, а сумма квадратов всех трех слагаемых была наименьшей.

4. Найти все корни уравнения

$$\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)^2=0{,}5\,(1+2\sin^2 x),$$

удовлетворяющие неравенству $x^2-2\pi x\leqslant 0$.

5. Тупой угол ромба равен α, расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба равно m. Найти объем параллелепипеда, высота которого равна h и основанием является данный ромб.

Вариант XVI

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}-\frac{\sqrt[4]{16x}+\sqrt[4]{x^5}}{2+x}\right)^{-2}\cdot 25^{2\log_{0,04}2+\log_{0,04}\sqrt{x}}.$$

2. Решить уравнение $\dfrac{\lg(41+x^2+2x)}{\lg(9-x)}-\log_{x+1}(x^2+2x+1)=0$.

3. Найти число, которое в сумме со своим удвоенным квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

4. Найти все корни уравнения $\dfrac{1}{\cos^2 x}-4\operatorname{tg} x=-2$, удовлетворяющие неравенству $4^{2x}-2^x\geqslant 0$.

5. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна a и $\widehat{BAC}=\alpha$. Найти скалярное произведение $\overline{C_1A}\cdot\overline{C_1C}$, если $\widehat{CAC_1}=\beta$.

Вариант XVII

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^{-1}}}{1-\sqrt[4]{2x^{-1}}}+\frac{\sqrt{x^{-1}}}{1+\sqrt[4]{2x^{-1}}}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt[4]{16x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}-2^{0,5\log_4 2+\log_4\sqrt{x}}.$$

2. Решить уравнение $\lg(9^x+27)-x\lg 3=2\lg 2+\lg 3$.

3. Число 9 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение квадрата первого слагаемого на второе слагаемое было наибольшим.

4. Найти все корни уравнения $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)+\sin^2 x+\cos^2\dfrac{\pi}{4}\cos 2x=0$, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x+\pi}>2\sqrt{\pi}$.

5. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно основанию, а каждое из двух других ребер образует с основанием угол α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант XVIII

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{2x^2}+x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[6]{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{x}}-1\right)^{-1}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{2}}-2^{-2\log_{0,5}x}.$$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}2\log_5 y+\log_5(x^2-4)=1-2\log_5 2,\\ 2^{(2y)^{-2}}-4^{-0,1-0,2x}=0.\end{cases}$

3. Основанием четырехугольной пирамиды является прямоугольник с периметром 24 см; высота пирамиды равна 9 см. Найти длины сторон основания пирамиды, при которых ее объем является наибольшим.

4. Найти все корни уравнения $\sin\dfrac{\pi}{3}(\cos 2x-2\sin^2 x+1)=1-(\sin 2x-\cos 2x)^2$, удовлетворяющие неравенству $\pi x-x^2\geqslant 0$.

5. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между образующей и высотой конуса равен α. Определить площадь боковой поверхности конуса.

Вариант XIX

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{2-x}}\cdot\sqrt[3]{(2-2\sqrt{2}x+x^2)(2-x^2)(\sqrt{2}+x)}\cdot(0{,}25)^{\log_2\sqrt[3]{\sqrt{2+x}}}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lg(4x^2+y^2)=\lg 15+1,\\ \lg(2x+y)+\lg(2x-y)=\lg 0{,}5+2.\end{cases}$$

3. Первый член геометрической прогрессии равен наибольшему значению функции $f(x)=8\sqrt{3}\,x-x^2$, третий член прогрессии равен $f'(4\sqrt{3}-6)$. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все корни уравнения $\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x-2\sin^2\dfrac{\pi}{4}}-\operatorname{tg}5x=0$, удовлетворяющие неравенству $(x^2+1)(3x-8)>0$.

5. Радиус круга, вписанного в ромб, равен r, угол между высотой ромба и его большей диагональю равен α. Найти объем параллелепипеда, высота которого равна h, а основанием служит данный ромб.

Вариант XX

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\left(\frac{x^{-2/3}-x^{-1/3}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}\right)^{-1}-\frac{x^{-8/3}+2x^{-5/3}+1}{x^{-2/3}}\right)\cdot 5^{\frac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{5}}}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{2x}-2^{3-y}=(\sqrt{3})^{\log_3 5}-\sqrt{5},\\ \lg x+\lg 3=\lg(7+y).\end{cases}$$

3. Отношение двух положительных чисел равно 3, а разность между большим из них и удвоенным квадратом меньшего числа принимает наибольшее значение. Найти эти числа.

4. Найти все корни уравнения $\cos 4x\cos x-3\cos 3x=\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}-\sin x\sin 4x$, удовлетворяющие неравенству $\lg(9x-3\pi+1)>0$.

5. В ромб с острым углом α вписан круг. Найти отношение площадей ромба и круга.

Вариант XXI

1. Решить неравенство $x^2-(1-x^2)^2>1$.

2. Решить уравнение $7\sqrt{x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}-15=0$.

3. Решить неравенство $1+\log_{(3x+1)^2}25\cdot\log_5(11-3x)\geqslant\frac{5}{\log_2(3x+1)}$.

4. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}2x=\frac{1}{1+\cos 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-0{,}5\leqslant x\leqslant 1$.

5. В треугольнике ABC сторона $BC=30$ см, медиана $AK=15$ см, а отрезок, соединяющий точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис, параллелен AC. Найти две другие стороны треугольника ABC.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$7^{(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax}=42x^2+84a^2+84ax-168a-84x+91$$

имеет единственное решение? Найти все такие значения a и соответствующие им решения.

Вариант XXII

1. Решить неравенство $\frac{6}{(x+2)(x-3)}-\frac{1}{x+2}>2$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y+2}=2,\\ x^2+y^2=4.\end{cases}$

3. Решить неравенство $27(81x^2)^{2\log_9(x^3/9)}\leqslant x^7$.

4. Решить уравнение $\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}-\cos x}=\sin x+\cos x$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла A на гипотенузу BC опущен перпендикуляр AD. Пусть O_1 и O_2 — центры кругов, вписанных соответственно в треугольники ADB и ADC. Известно, что $O_1O_2=2\sqrt{2}$ см, а периметр треугольника ABC равен 24 см. Найти катеты треугольника ABC.

6. Решить неравенство

$$(x^2+x)(1+\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x^2+1})>2+3\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x^2+1}.$$

Вариант XXIII

1. Решить неравенство $\frac{3-x}{1+x}\leqslant 1$.

2. Решить уравнение $\frac{90+2x-2x^2}{\sqrt{46+x-x^2}}=\sqrt{93+2x-2x^2}$.

3. Решить уравнение $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\operatorname{tg}6x$.

4. Решить неравенство $\log_{x+1}(3-2x-x^2)\geqslant\log_{x+1}(1-3x)$.

5. В треугольник ABC вписан ромб, один из углов которого совпадает с углом A, а противоположная вершина лежит на стороне BC. Известно,

что сторона ромба равна 15 см, его высота $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см, а площадь треугольника ABC равна $240\sqrt{3}$ см². Найти стороны треугольника, если известно, что угол A — тупой.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая соотношению

$$x^2+(1+a)y^2+(2+2a)xy+(4+6a)x+(4+4a)y+3a+4=0?$$

Вариант XXIV

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5. \end{cases}$

2. Решить неравенство $\frac{x+70}{x-2}+\frac{x+10}{x+5}\leqslant\frac{2x+13}{x+3}$.

3. Решить уравнение $\sin^2 x+\sqrt{6}\cos x=3\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x$.

4. Решить неравенство

$$256^{\frac{x-\sqrt{x-1}}{3}}-18\cdot 16^{\frac{x-\sqrt{x-1}}{3}}+32<0.$$

5. В круге проведены две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD, которые пересекаются в точке P. Через точку P и середину BC проведена прямая, пересекающая AD в точке N. Доказать, что PN и AD перпендикулярны.

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y|-y=2\,||x|-1|, \\ 2y-x=2a \end{cases}$$

имеет нечетное число решений?

Вариант XXV

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3-2\sqrt{\frac{x}{y+5x}}=\sqrt{\frac{y}{x}+5}, \\ x^2+3xy-y^2+3=0. \end{cases}$$

2. Решить неравенство $(1+\sin x)(\sin x-\sqrt{3}\cos x+1)\geqslant 0$.

3. Решить уравнение

$$\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}\frac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=\frac{3}{2}.$$

4. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K, а на стороне BC — точка M. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCK$, если площади треугольников AOK, AOB и OBM равны соответственно 1, 2 и 3 см².

5. При каких положительных значениях параметров a и b системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ 1+4\sin(x+y)=\cos(2x+2y) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a^2x^2-y^2=0, \\ |x|+b|y-4|=b \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений?

6. Решить уравнение $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+5x+6}=0.$

Вариант XXVI

1. Решить уравнение $x^2+2(1+\sin a)x+4-\cos^2 a=0$ (a — действительный параметр).

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x-\sqrt{xy}=28, \\ y-\sqrt{xy}=-12. \end{cases}$

3. Решить уравнение

$$4(\sin^2 x \sin 2x-\sqrt{3}\sin^3 x)+\frac{3}{2}\cos 2x \sin 4x=3\sqrt{3}\sin x \cos^2 2x.$$

4. Решить неравенство $\log_{0,5}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{23}{4}\right)\log_{8x^2-10x+3}4+2\geqslant\dfrac{4}{\log_2(8x^2-10x+3)}.$

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) O — точка пересечения высот. Найти величину угла ABC, если $OB=AC$.

6. Найти все значения параметра a на отрезке [1, 11], для которых больший из корней уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

Вариант XXVII

1. Решить уравнение $(x-2)(x+2)(x^2+3)+5x^2=0.$

2. Решить неравенство $x-5\sqrt{-x+24}>0.$

3. Решить уравнение

$$4\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{30}\right)=$$
$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{30}\right)+\cos\left(8x+\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(10x+\frac{\pi}{3}\right)\cos 2x.$$

4. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-4}{2x+1}}\geqslant 1.$

5. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CE. На CE как на диаметре построена окружность, пересекающая катеты BC и AC соответственно в точках K и D. Найти площадь треугольника EKB, если длина отрезка CK равна 9 см, а длина отрезка AD равна 27/4 см.

6. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} 3x^2+2a^2+4xy+2ay+5ax=4y^2, \\ (x+a)^2+(x-a)^2+8ax+6a^2=8y^2. \end{cases}$$

При каких значениях a система имеет бесконечное множество решений?

Вариант XXVIII

1. Решить уравнение $\dfrac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-13}=1$.

2. Решить неравенство $1-x^2<2|x-1|$.

3. Решить уравнение $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^{2y^2+x^2}=y^{3xy}, \\ \log_{y-2x}(y+2x)=\log_{2y-2x-1}(4x^2+xy+y). \end{cases}$$

5. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO=\sqrt{3}\,MO$, $NO=(\sqrt{3}-1)\,BO$. Найти углы треугольника ABC.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^4+2x^3y+(4a+1)x^2y^2+4xy^3+4ay^4+16a^2-24a+5=0$$

имеет единственное решение?

Вариант XXIX

1. Решить уравнение $\left(\dfrac{2x+x^2}{1+2x}\right)^2=1$.

2. Решить неравенство $|x-1|\cdot\sqrt{x^2-2x+1}>4$.

3. Решить уравнение $\dfrac{\cos 4x+1}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}=\dfrac{1}{2}\cos^4 2x-8\sin^4 x\cos^4 x$.

4. Решить неравенство $(1{,}25)^{1-\log^2_{1/x} 7}>(0{,}64)^{-3+\log_{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{7}}$.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC, равная $\sqrt{3}$ см, является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке O. Площади треугольников ABO и AOD относятся как $1:3$. Найти длины всех сторон трапеции $ABCD$, если угол BAD равен $60°$.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin x\right)+\sqrt{2\sqrt{3}\,|a|+2-3a^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2$$

разрешимо. Решить это уравнение при найденных a.

Вариант XXX

1. Решить уравнение $3+\dfrac{4}{|x+1|}=|x+1|$.

2. Решить неравенство $(x-2)^2\sin x>0$. Выписать целые решения, принадлежащие отрезку $[-1, 10]$.

3. Решить уравнение $\left(\sin x+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)\sin 2x=\frac{1}{2}\cos x.$

4. Решить неравенство $x^{2\log_3 x}+27<28\cdot 3^{\log^2_{1/3} x}$.

5. В прямоугольной трапеции $ABCD$ основание AB в 1,5 раза больше диагонали AC. Углы BAD и ADC — прямые, боковая сторона AD равна 4 см. Найти площадь трапеции $ABCD$, если диагональ AC является биссектрисой угла DCB.

6. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$(|x^2-4x+a|+x^2-4x+a)\sqrt{5x-x^2-6}=0.$$

Вариант XXXI

1. Решить неравенство $\frac{4}{(x-2)(x+1)}-\frac{1}{x+1}<2.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{xy+1}=2,\\ y-x=2.\end{cases}$

3. Решить неравенство $16\left(\frac{2}{x^2}\right)^{2\log_4(x/4)}\leqslant x^8.$

4. Решить уравнение $\sqrt{2+\sin 3x+\sin x}=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла A на гипотенузу BC опущен перпендикуляр AD. Пусть O_1 и O_2 — центры кругов, вписанных соответственно в треугольники ABD и ADC. Известно, что $O_1O_2=2\sqrt{2}$, а биссектриса прямого угла равна $\frac{60\sqrt{2}}{17}$ см. Найти катеты треугольника ABC.

6. Решить неравенство

$$(x^2+2x)(1+\sqrt{x^2-x+4}+\sqrt{2x^2+x+1})<3+4\sqrt{x^2-x+4}+2\sqrt{2x^2+x+1}.$$

Вариант XXXII

1. Решить неравенство $x^2+(x^2-4)^2<4.$

2. Решить уравнение $2\sqrt{2x-1}-\frac{13}{\sqrt{2x-1}}+11=0.$

3. Решить неравенство $1+\frac{\log_7(9-x)}{\log_{49}(4+x)^2}\geqslant\frac{2-\log_{\sqrt{5}}2}{\log_5(4+x)}.$

4. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-2\sqrt{2}=\frac{(1-\sqrt{2})\cos 3x}{\cos x-\sin x\cdot\sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенствам $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2.$

5. В треугольнике ABC высота $AD=3\sqrt{7}$ см, а радиус окружности, касающейся BC и продолжений сторон AB и AC, также равен $3\sqrt{7}$ см. Найти стороны треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен $16/\sqrt{7}$ см.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$6^{(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax}=30x^2+60a^2+60ax-120a-60x+66$$

имеет единственное решение? Найти все такие значения a и соответствующие им решения.

Вариант XXXIII

1. Решить уравнение $\log_{4-x^2}(\sin x+\cos x)=\log_{4-x^2}\sin x$.

2. Решить уравнение $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{3x^2+9x+9}$.

3. Решить уравнение $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=9-\operatorname{ctg} 2x+\dfrac{5}{\sin 2x}+\operatorname{tg}^2 x$.

4. Решить неравенство $\log_2|\log_{|x|-1}4|<0{,}5+\log_4(3\log_{|x|-1}2-1)$.

5. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся ее сторон в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Известно, что площадь $A_1B_1C_1D_1$ равна 1/8 площади $ABCD$. Доказать, что угол при большем основании трапеции равен 30°.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}=\log_2 a+a+\frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

имеет единственное решение?

Вариант XXXIV

1. Решить неравенство $\dfrac{x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\geqslant 0$.

2. Решить уравнение $\dfrac{x+3}{|x^2-9|}=\dfrac{1}{|3-|x||}$.

3. Решить уравнение $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x$.

4. Решить неравенство $\log_{0,5}\left(3+\log_{\sqrt{5}}\dfrac{x}{x+2}-\log_5^2\dfrac{x+2}{x}\right)>-2$.

5. В треугольник ABC с углом $A=120°$ вписана окружность, которая касается стороны BC в точке P. На BC как на диаметре построена окружность и проведен перпендикуляр к BC в точке P до пересечения с этой окружностью в точке K, причем $PK=15$ см. Найти площадь треугольника ABC.

6. При каких значениях параметра k уравнение

$$|x^2-2x-8|x-1|+13|=k$$

имеет шесть решений?

Вариант XXXV

1. Решить уравнение $x=\sqrt{x+2}$.

2. Решить неравенство $\frac{1}{x+3}+\frac{5}{x^2-3x+9}\leqslant\frac{27}{x^3+27}$.

3. Решить уравнение $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

4. Решить неравенство $\left(4^{x+1}\right)^{x+3}+\left(9^{x+3}\right)^{x+1}\geqslant 13\cdot 6^{(x+2)^2-2}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и в него в свою очередь вписана другая окружность, касающаяся сторон AB, BC, CD и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_5\left(\sqrt{ax^2+3x-1}+2\right)+\log_{11}\left(ax^2+3x+1\right)=2$$

имеет решение. При каких значениях параметра a решение единственно?

ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

1.001. □ По условию, $\angle C=90°$, $AD=30$ см, $DB=40$ см (рис. Р.1.1). Положим $AC=x$, $BC=y$. Так как точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе, то $\frac{x}{y}=\frac{30}{40}$, т. е. $y=\frac{4x}{3}$. Но $x^2+y^2=AB^2$ или $x^2+\frac{16x^2}{9}=70^2$, откуда $x^2=1764$. Итак, $x=42$ (см), $y=56$ (см). ■

1.002. m, $m\sqrt{3}$, $2m$.

1.003. □ Пусть c — длина гипотенузы. Тогда длины катетов равны $c-1$ и $c-2$. Имеем $(c-1)^2+(c-2)^2=c^2$ или $c^2-6c+5=0$, откуда $c=5$ (см) (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). ■

1.004. 60 и 30°. **1.005.** 1 см. **1.006.** $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см.

1.007. □ Пусть $BC=x$ (рис. Р.1.2). Тогда $AB=\sqrt{81+x^2}$ и $\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{81+x^2}}{5}$ (поскольку BD — биссектриса). Отсюда имеем $25x^2=16(81+x^2)$, т. е. $x=12$ (см). Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54$ (см^2). ■

1.008. 8,64 и 15,36 м^2. **1.009.** $\sqrt{3}$ см. **1.010.** $\sqrt{10}$ см.

1.011. □ Так как ΔABC — равнобедренный, то высота BD является медианой (рис. Р.1.3); далее, точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2:1$, откуда $AO=\frac{10}{3}$ (см). Из ΔAOD находим $OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{28}}{3}$ (см), т. е. $BD=\sqrt{28}$ (см). Наконец, из ΔBDC получим $BC=\sqrt{(\sqrt{28})^2+(2\sqrt{2})^2}=6$ (см). ■

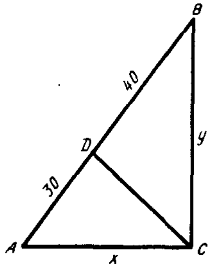


Рис. Р.1.1

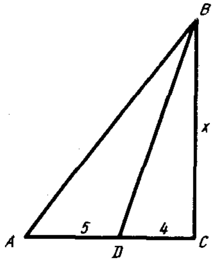


Рис. Р.1.2

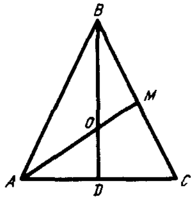


Рис. Р.1.3

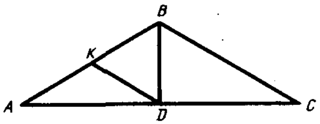


Рис. Р.1.4

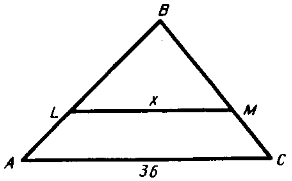


Рис. Р.1.5

1.012. $2mn/\sqrt{4m^2-n^2}$, $2m^2/\sqrt{4m^2-n^2}$. **1.013.** 6 см. **1.014.** 75 см^2.

1.015. □ По условию, DK — средняя линия $\triangle ABC$ (рис. Р.1.4). Так как $BD=DK=\frac{1}{2}BC$, то $\angle C=30°$ и $BC=2BD$. В $\triangle BCD$ имеем $CD^2=BC^2-BD^2$ или $\frac{a^2}{4}=4BD^2-BD^2$, откуда $BD=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=CD\cdot BD=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. ■

1.016. $H^2\sqrt{3}$. **1.017.** $\sqrt{41}$ и 5 см. **1.018.** 4 см.

1.019. □ Обозначим искомую длину через x. Тогда из подобия треугольников ABC и LBM (рис. Р.1.5) имеем $AC^2:x^2=S:(S/2)$, где S — площадь $\triangle ABC$. Отсюда $AC^2=2x^2$ и $x=18\sqrt{2}$ (см).

1.020. В 64 раза. **1.021.** $(\sqrt{6}+2):1$ или $(\sqrt{3}+1):2$.

1.022. □ По условию, $AB=c=30$ см, $AC=b=26$ см, $BC=a=28$ см (рис Р.1.6). Тогда $p=0{,}5\,(a+b+c)=42$, $p-a=14$, $p-b=16$, $p-c=12$ и по формуле Герона находим $S_{\triangle ABC}=\sqrt{42\cdot 14\cdot 16\cdot 12}=336$ (см^2). Так как $\triangle MNC\sim\triangle ABC$, то $S_{\triangle MNC}:S_{\triangle ABC}=CK^2:CD^2=4/25=0{,}16$. Отсюда определяем площадь трапеции:

$S_{AMNB}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle MNC}=336-0{,}16\cdot 336=282{,}24$ (см^2). ■

1.023. 13 см. **1.024.** 6 см.

1.025. □ Проведем радиус в точку A; так как $OA\perp AM$, то $OA\perp BC$ и $BD=6$ см. (рис. Р.1.7). Пусть $OA=r$, $OD=x$. Тогда $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=8$, т. е. $r+x=8$ (1). Но $OD^2=OB^2-BD^2$ или $r^2-x^2=36$; так как $r^2-x^2=(r+x)(r-x)$, то

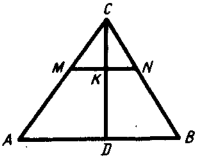


Рис. Р.1.6

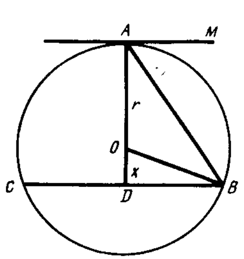


Рис. Р.1.7

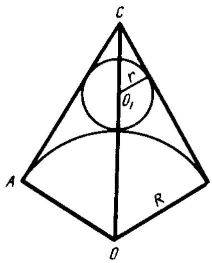


Рис. Р.1.8

$r-x=36/8=9/2$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2), найдем $r=6{,}25$ (см). ■

1.026. 0 и 1,5 см. **1.027.** 9 см. **1.028.** $3r$.

1.029. □ Пусть R — радиус дуги, r — радиус окружности (рис. P.1.8). Так как $\angle C=\frac{\pi}{3}$, то $R=\frac{1}{2}OC$, $r=\frac{1}{2}O_1C$. Тогда $OC=2R$; с другой стороны, $OC=OO_1+O_1C=R+r+2r=R+3r$, откуда $R=3r$. Следовательно,

$$l_{\cup AB}=2\pi R\cdot\frac{1}{3}=2\pi\cdot\frac{3r}{3}=2\pi r. \blacksquare$$

1.030. $a^2/\sqrt{4a^2-b^2}$. **1.031.** 2 и $\sqrt{2}$. **1.032.** $R(\sqrt{2}-1)$.

1.033. □ Проведем диаметр CD через точку P (рис. P.1.9), которая разделит его на отрезки PD и CP длиной $11-7=4$ и $11+7=18$ (см). Пусть $AP=x$; тогда $PB=18-x$. Так как $AP\cdot PB=CP\cdot PD=4\cdot 18$, то $x(18-x)=72$ или $x^2-18x+72=0$, откуда $x_1=12$, $x_2=6$, т. е. хорда AB делится точкой P на отрезки длиной 12 и 6 см. ■

1.034. $r/8$. **1.035.** 12 и 20 см.

1.036. □ Обозначим радиусы внутренних окружностей через R_1 и R_2. Пусть S — площадь самого малого круга; тогда $\pi R_1^2=S$, $\pi R_2^2=2S$, $\pi R^2=3S$. Следовательно, $\pi R_1^2=\frac{\pi R^2}{3}$ и $\pi R_2^2=\frac{2\pi R^2}{3}$, откуда $R_1=\frac{R}{\sqrt{3}}$ и $R_2=R\sqrt{\frac{2}{3}}$. ■

1.037. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **1.038.** $\frac{C_1^2-C_2^2}{4\pi}$. **1.039.** πab.

1.040. □ Проведем $OC\perp AB$ (рис. P.1.10). Тогда $CB=\frac{1}{2}AB=9$ см. Из $\triangle OBC$ находим $OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=12$ (см), а из $\triangle OMC$ получим $MC=\sqrt{OM^2-OC^2}=5$ (см). Следовательно, $AM=9+5=14$ (см), $MB=9-5=4$ (см). ■

1.041. $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **1.042.** 2 : 3. **1.043.** $\pi R^2(3+2\sqrt{2})$.

1.044. □ Пусть r — радиус меньшей окружности. Тогда $O_1O_2=r+4$, $O_1O_3=r+6$ (рис. P.1.11). Так как $O_2O_3^2=O_1O_2^2+O_1O_3^2$, то $10^2=(r+4)^2+(r+6)^2$ или $r^2+10r-24=0$, откуда $r=2$ (см) (корень $r=-12$ не удовлетворяет условию). ■

1.045. $\frac{r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$. **1.046.** 3 : 1.

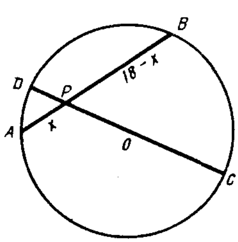


Рис. P.1.9

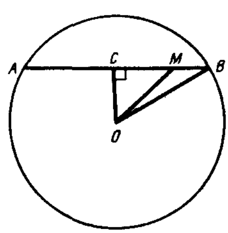


Рис. P.1.10

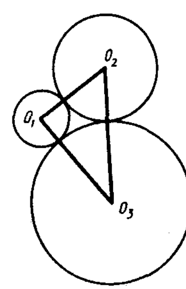


Рис. P.1.11

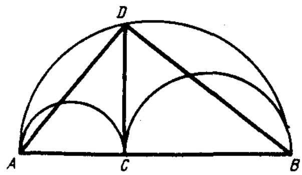


Рис. Р.1.12

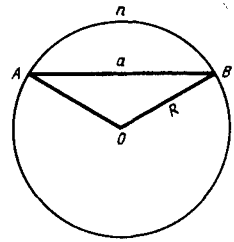


Рис. Р.1.13

1.047. □ Пусть R — радиус данного полукруга, а r — радиус одного из построенных полукругов (рис. Р.1.12). Тогда площадь заданной фигуры равна $0{,}5(\pi R^2-\pi r^2-\pi(R-r)^2)=\pi r(R-r)$. Так как $\angle ADB=90°$, то $CD^2=$ $=AC\cdot CB=2r\cdot 2(R-r)=4r(R-r)$, откуда $\dfrac{\pi CD^2}{4}=\pi r(R-r)$, что и требовалось доказать. ■

1.048. $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$.

1.049. □ Площадь сегмента AnB равна разности площадей сектора AOB и треугольника AOB (рис. Р.1.13). Находим $S_{\text{сект.}AOB}=\dfrac{\pi R^2}{3}$, $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{R}{2}=\dfrac{aR}{4}$, откуда $S=\dfrac{\pi R^2}{3}-\dfrac{aR}{4}$. Так как $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, то окончательно получим $S=\dfrac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. ■

1.050. $a^2(\pi-2)/8$.

1.051. □ Пусть r — радиус круга, а S_1 и S_2 — площади сегментов. Тогда $S_1=\dfrac{\pi r^2}{3}-\dfrac{1}{2}r\cdot\dfrac{r\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{12}r^2(4\pi-3\sqrt{3})$, $S_2=\pi r^2-S_1=\pi r^2-\dfrac{1}{12}r^2(4\pi-3\sqrt{3})=$ $=\dfrac{1}{12}r^2(8\pi+3\sqrt{3})$. Значит, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. ■

1.052. $R^2(\pi-2)/4$. **1.053.** $(\pi+\sqrt{3})R^2/2$. **1.054.** 84 см^2.

1.055. □ Треугольник ABC — правильный (рис. Р.1.14); поэтому его площадь

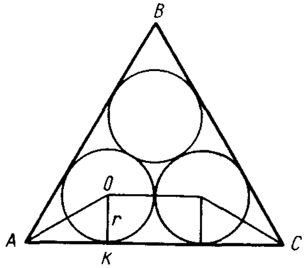


Рис. Р.1.14

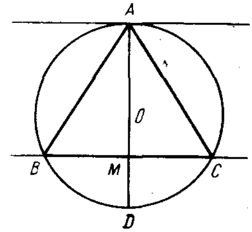


Рис. Р.1.15

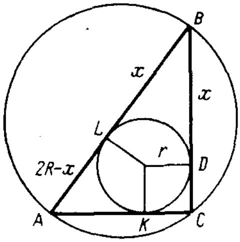


Рис. P.1.16

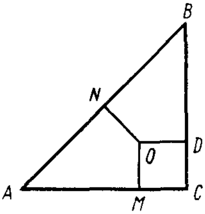


Рис. P.1.17

равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Проведем $OK \perp AC$. Так как $\angle OAK = 30°$, то $AO = 2r$, $AK = r\sqrt{3}$, откуда $a = 2r\sqrt{3} + 2r = 2r(\sqrt{3}+1)$. Следовательно,

$$S = \frac{4r^2(3+2\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{4} = 2r^2(2\sqrt{3}+3). \blacksquare$$

1.056. $R^2\sqrt{3}/2$. **1.057.** $r(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$, $r(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$. **1.058.** $a(3+\sqrt{3})/6$, $a(3-\sqrt{3})/6$.

1.059. □ Пусть расстояние между параллельными прямыми равно x (рис. P.1.15); тогда площадь S треугольника ABC равна $0{,}5\ BC \cdot x$. Так как $OA \perp BC$, то $BM = MC$ и $BM \cdot MC = AM \cdot MD = x(2R-x)$. Значит, $BC^2/4 = x(2R-x)$, откуда $S = 0{,}5x \cdot 2\sqrt{2Rx-x^2} = x\sqrt{2Rx-x^2}$. ■

1.060. 8 и 15 см. **1.061.** 6 и 8 см. **1.062.** 18, 24 и 30 см. **1.063.** 60 см^2.

1.064. □ Пусть R и r — радиусы вписанной и описанной окружностей, $BC = a$ (рис. 1.16). Положим $BD = x$; тогда $BL = x$ (как касательные, проведенные из одной точки), $LA = AK = 2R - x$ (так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = 2R$). Имеем $AC^2 + BC^2 = AB^2$ или $(r+2R-x)^2 + a^2 = 4R^2$. Но $R = 5r/2$, $x = a - r$ и последнее уравнение примет вид $(7r-a)^2 + a^2 = 25r^2$ или $12r^2 - 7ar + a^2 = 0$, откуда $r_1 = a/3$, $r_2 = a/4$. Этим корням соответствуют значения $(AC)_1 = 4a/3$, $(AC)_2 = 3a/4$. В результате получаем два решения: $S_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{4a}{3} = \frac{2a^2}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}$. ■

1.065. 294 см^2; 12π см. **1.066.** 20π см. **1.067.** 65/18.

1.068. □ Проведем радиусы OD, OM и ON в точки касания (рис. P.1.17). Имеем $OD = OM = CM = CD$ и, следовательно, $BD = 10 - 3 = 7$ (см). Но $BD = BN$ и $AN = AM$ (касательные, проведенные из одной точки). Положим $AN = x$; тогда $(x+7)^2 = (x+3)^2 + 10^2$, откуда $8x = 60$, т. е. $x = 7{,}5$ (см). Следовательно, $AB = 14{,}5$ (см) и получаем ответ: $R = 0{,}5AB = 7{,}25$ (см). ■

1.069. 5 см. **1.070.** $\pi(p-c)^2$. **1.071.** 25π м^2.

1.072. □ Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный и $CD \perp AB$ (рис. P.1.18), то $AC^2 = AB \cdot AD = 40 \cdot 25{,}6$ и $BC^2 = AB \cdot BD = 40 \cdot 14{,}4$, откуда $AC = 32$ (см), $BC = 24$ (см) и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 24 = 384$ (см^2). С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = pr = 48r$. Следовательно, $r = 8$ и $S_{\text{круга}} = \pi r^2 = 64\pi$ (см^2). ■

1.073. 25π см^2. **1.074.** $\sqrt{5}$ см. **1.075.** $a(2-\sqrt{2})$.

1.076. □ Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный и прямоугольный, то высота CD является биссектрисой, т. е. $\angle DCA = \angle A = 45°$ (рис. P.1.19); поэтому $AD = DC$ и $AC = \sqrt{2}DC$. Но $AC = AK + KC = DC + r$ ($AK = AD$ как касатель-

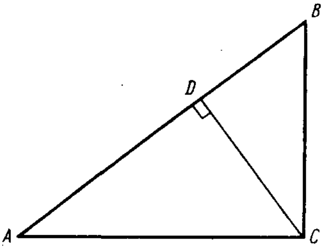


Рис. Р.1.18

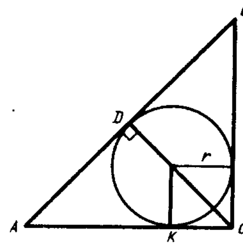


Рис. Р.1.19

ные, проведенные из одной точки), откуда $r=\sqrt{2}DC-DC$, т. е. $r/DC=\sqrt{2}-1$. ■

1.077. 3, 4 и 5 см. **1.078.** 80/3 см. **1.079.** $a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})/2$.

1.080. □ Проведем $BD\perp AC$ (рис. Р.1.20); так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то BD является и медианой. Имеем $BD^2=AB^2-AD^2$, откуда $BD=\sqrt{39^2-15^2}=36$ (см) и, значит, $S=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 36=540$ (см^2). Но $S=pr=54r$, откуда $r=10$ см. ■

1.081. $2(7+4\sqrt{3})$ см^2. **1.082.** 8/3, 25/3 и 5 см. **1.083.** $285{,}61\pi$ см^2.

1.084. □ Найдем длину боковой стороны BC (рис. Р.1.21): $BC=\sqrt{BM^2+MC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (см). Учитывая, что AO — биссектриса $\triangle ABM$, имеем $MO/OB=AM/AB$ или $r/(8-r)=6/10$, откуда $r=3$ (см). Так как $DE\parallel AC$, то $\triangle DBE\sim\triangle ABC$, т. е. $DE/AC=BN/BM$ или $DE/12=(8-2r)/8$, откуда $DE=3$ см. ■

1.085. 20/3 см. **1.086.** $3R^2\sqrt{3}/4$.

1.088. □ По условию, $R=0{,}5\sqrt{12}$. Сторона AB правильного вписанного треугольника (рис. Р.1.22) равна $R\sqrt{3}$, т. е. $0{,}5\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=3$. Найдем сторону CD нового треугольника: $a=\sqrt{3^2-1{,}5^2}=1{,}5\sqrt{3}$. Так как радиус r вписанной в него окружности равен $a\sqrt{3}/6$, то окончательно получим $r=1{,}5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/6=3/4$. ■

1.089. $\pi a^2/4$. **1.090.** $12\sqrt{3}$ и 36 см.

1.092. □ Пусть a — сторона треугольника, R — радиус вписанной в него окру-

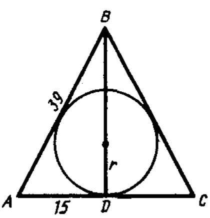


Рис. Р.1.20

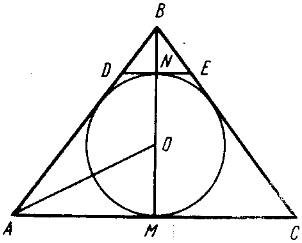


Рис. Р.1.21

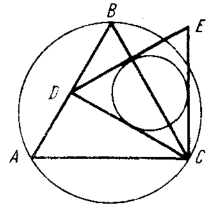


Рис. Р.1.22

жности; тогда $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Проведем радиусы OM и O_1K в точки касания (рис. Р.1.23). Из подобия треугольников AOM и AO_1K имеем $\dfrac{R}{r}=\dfrac{AO}{AO-R-r}$. Отсюда, учитывая, что $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, получаем $\dfrac{a\sqrt{3}}{6r}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}-r\right)}$ или

$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}-r=2r$, т. е. $a=6r\sqrt{3}$. ■

1.093. $R^2(3\sqrt{3}-\pi)/6$. **1.094.** $(3\sqrt{3}-\pi)/(3\sqrt{3}+\pi)$. **1.095.** $R^2\sqrt{3}/4$.

1.096. □ Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда $r=\dfrac{S}{p}$, $R=\dfrac{abc}{4S}$. Найдем $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ (см^2). Следовательно, $r=4$ см, $R=65/8$ см, откуда получим искомое отношение площадей: $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2}=\left(\dfrac{65}{32}\right)^2$. ■

1.097. $3\pi\sqrt{15}/50$. **1.098.** 8 и 10 см. **1.099.** 1700 см^2.

1.100. □ Так как площадь треугольника $S=pr=0{,}5ah_a$, то $2p/a=h_a/r$, что и было нужно установить. ■

1.101. $4ab/(a+b)$. **1.102.** $m(2\sqrt{3}+3)/3$. **1.103.** $3a^2(7-4\sqrt{3})$.

1.104. □ Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда $a=R\sqrt{3}$, откуда $R=a/\sqrt{3}$. Так как сторона вписанного квадрата равна $R\sqrt{2}$, то его площадь $S=2R^2=2a^2/3$. ■

1.105. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$. **1.106.** $3a^2/8$. **1.107.** 9/4 кв. ед.

1.108. □ По условию, $BC^2=3\cdot\dfrac{1}{2}\,BC\cdot AH$ (рис. Р.1.24) или $AH=\dfrac{2}{3}\,BC$. Но $AH^2=AB^2-\left(\dfrac{1}{2}\,BC\right)^2$ и, значит, $\dfrac{4}{9}\,BC^2=AB^2-\dfrac{1}{4}\,BC^2$ или $AB^2=\dfrac{25}{36}\,BC^2$, т. е. $AB=\dfrac{5}{6}\,BC$. Тогда получим $AB=\dfrac{5}{6}\,(AB+1)$, откуда $AB=5$ (см). Следовательно, $BC=6$ см, $AH=4$ см. ■

1.109. $a^2(2\sqrt{3}-3)$. **1.110.** $c^2/2$. **1.111.** $3a^2/8$.

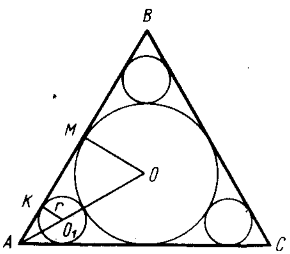


Рис. Р.1.23

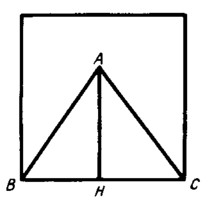


Рис. Р.1.24

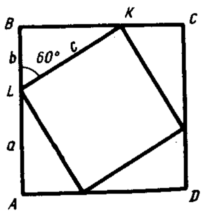


Рис. Р.1.25

1.112. □ Пусть $AL=a$, $LB=b$ и $LK=c$ (рис. Р.1.25). Тогда площадь данного квадрата $S_1=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$. Так как $\angle BLK=60°$, то $\angle BKL=30°$, откуда $c=2b$, $a=b\sqrt{3}$ и, значит, $S_1=4b^2+2b^2\sqrt{3}$. Площадь вписанного квадрата $S_2=c^2=4b^2$. Итак,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4b^2}{4b^2+2b^2\sqrt{3}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}. \blacksquare$$

1.113. $1{,}6R\sqrt{2}$. **1.114.** $a^2/25$. **1.115.** 1.

1.116. □ Пусть R — радиус круга. Тогда площадь сектора равна $\frac{\pi R^2}{4}$, а площадь треугольника равна $\frac{R^2}{2}$ и, следовательно, площадь сегмента составляет $\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2(\pi-2)}{4}$. Имеем $\frac{R^2(\pi-2)}{4}=2\pi-4$, откуда $R=2\sqrt{2}$ (см). Итак, площадь квадрата равна $2R^2=16$ (см^2). ■

1.117. $3\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{27}$ см. **1.118.** $R(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi})/2$. **1.119.** 2,2 и 4 м^2.

1.120. □ В $\triangle FBD$ (рис. Р.1.26) катет $FD=6$ см и лежит против угла в 30°, откуда $FB=12$ см и, значит, $AB=18$ см. Далее в $\triangle ABC$ имеем $AC=AB/2=9$ см. Наконец, $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$ (см). ■

1.121. $5\sqrt{m^2+n^2}/6$, $5\sqrt{m^2+n^2}/4$. **1.122.** $\sqrt{m^2-4S}/2$. **1.123.** $8Q/\pi$.

1.124. □ Искомую площадь найдем по формуле $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AO\cdot OB$ (рис. Р.1.27). В $\triangle AOB$ имеем $AB^2=AO^2+OB^2$, где $OB=\frac{3}{4}AO$, $AB=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (м). Тогда получим уравнение $\frac{1}{4}=AO^2+\frac{9}{16}AO^2$, откуда $AO^2=\frac{16}{100}$, т. е. $AO=0{,}4$ (м). Итак, $S=2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}24$ (м^2). ■

1.125. $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$. **1.126.** $\frac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **1.127.** 150 см^2.

1.128. □ Длина стороны ромба равна $m+n$. Из $\triangle ABK$ (рис. Р.1.28) находим $BK^2=(m+n)^2-m^2$. В $\triangle BKD$ имеем $BD^2=BK^2+n^2=(m+n)^2-m^2+n^2=2n(m+n)$, т. е. $BD=\sqrt{2n(m+n)}$. Для отыскания AC воспользуемся тем, что $AC^2+BD^2=4AD^2=4(m+n)^2$, откуда $AC^2=4(m+n)^2-2mn-2n^2=4m^2+6mn+2n^2$, т. е. $AC=\sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$. ■

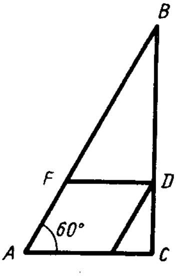


Рис. Р.1.26

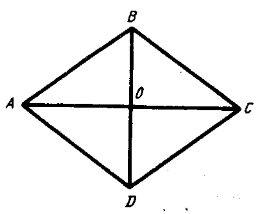


Рис. Р.1.27

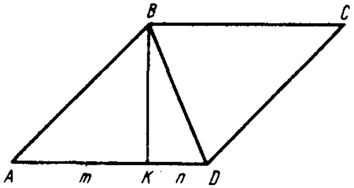


Рис. Р.1.28

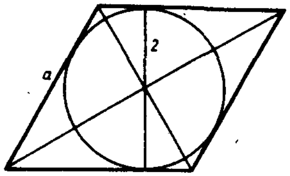


Рис. Р.1.29

1.129. $R\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}$. **1.130.** 4. **1.131.** 7,5 см.

1.132. □ Пусть a — сторона ромба, а d_1 и d_2 — его диагонали (рис. Р.1.29). Так как высота ромба равна диаметру окружности, то его площадь $S=4a$. С другой стороны, $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, откуда, учитывая, что $d_1=a$, находим $d_2=8$. Но $a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ или $a^2=\frac{a^2}{4}+16$, т. е. $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ■

1.134. $(\pi(a^2+b^2)-4ab)/8$. **1.135.** 15 и 30 см.

1.136. □ Проведем $BN\perp AD$ (рис. Р.1.30); так как $BN=2OM$, то $BN=\sqrt{75}$ см. Учитывая, что в $\triangle ANB$ $\angle ABN=30°$, имеем $AB=2AN$ и, значит, $4AN^2=75+AN^2$, откуда $AN=5$ см и $AB=10$ см. Далее из $\triangle BND$ получим $ND^2=BD^2-BN^2=124-75=49$; следовательно, $ND=7$ см и $AD=12$ см. Наконец, из равенства $AC^2+BD^2=2AB^2+2AD^2$ находим $AC^2=200+288-124=364$, т. е. $AC=2\sqrt{91}$ см. ■

1.137. 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$ см. **1.138.** 12 и 4 см. **1.139.** 2 : 1.

1.140. □ Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, h_1 — высота треугольника ARE (рис. Р.1.31). Тогда $S_{ABCD}=AD\cdot h$, $S_{\triangle ARE}=\frac{1}{2}AE\cdot h_1$. Но $\frac{h}{h_1}=\frac{AB}{AR}=\frac{3}{2}$. Следовательно,

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle ARE}}=\frac{AD\cdot h}{\frac{1}{2}AE\cdot h_1}=\frac{AD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AD\cdot\frac{2}{3}h}=9. \blacksquare$$

1.143. $5R^2\sqrt{3}/4$.

1.144. □ Так как $O_1A\perp AB$ и $O_2B\perp AB$, то $O_1A\parallel O_2B$ и, значит, фигура O_1ABO_2 — трапеция (рис. Р.1.32). Касательные в точке C взаимно перпендикулярны, а потому каждая из них проходит через центр другой окружности, т. е. $O_1C=4$ см, $O_2C=8$ см, откуда $O_1O_2=\sqrt{O_1C^2+O_2C^2}=4\sqrt{5}$ (см).

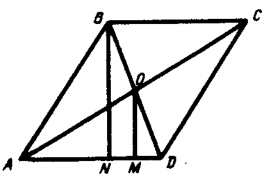


Рис. Р.1.30

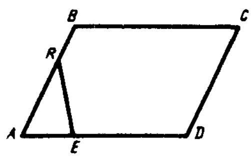


Рис. Р.1.31

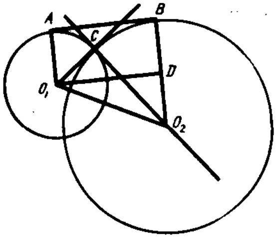


Рис. Р.1.32

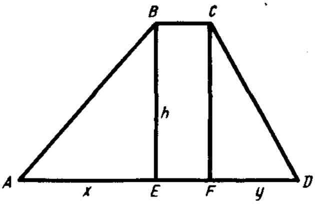


Рис. Р.1.33

Проведем $O_1D \parallel AB$ и из $\triangle O_1DO_2$ найдем $O_1D=\sqrt{O_1O_2^2-O_2D^2}=$ $=\sqrt{80-16}=8$ (см). Следовательно, $S_{O_1ABO_2}=0{,}5(8+4)\cdot 8=48$ см^2. ■

1.145. 16 см. **1.146.** 2 см. **1.147.** 450 см^2.

1.148. □ По условию, $BC=4$ см, $AD=25$ см, $AB=20$ см, $CD=13$ см (рис. Р.1.33). Проведем $BE\perp AD$ и $CF\perp AD$. Пусть $BE=CF=h$, $AE=x$, $FD=y$. Тогда из $\triangle ABE$ и $\triangle CFD$ находим $h^2=20^2-x^2=13^2-y^2$. Учитывая, что $y=25-4-x=21-x$, имеем $20^2-x^2=13^2-(21-x)^2$ или $42x=672$, откуда $x=16$ (см). Итак, $h=\sqrt{20^2-16^2}=12$ (см). ■

1.149. $(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)/4$. **1.150.** 32 см^2. **1.151.** 168 см^2.

1.152. □ Так как $S=\frac{1}{2}(a+b)\,h$, то $\frac{1}{2}(a+b)\cdot 22=594$, откуда $a+b=54$. Из системы уравнений $\begin{cases}a+b=54,\\ a-b=6\end{cases}$ находим $a=30$ (м), $b=24$ (м). ■

1.154. 1. **1.155.** $3\sqrt{3}$ см.

1.156. □ Высота трапеции равна $\frac{b\sqrt{3}}{2}$, а большее основание равно $a+\frac{b}{2}$. Следовательно, ее площадь

$$S=\frac{1}{2}\left(a+a+\frac{b}{2}\right)\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}.\ ■$$

1.157. 4, 8 и $2\sqrt{2}$ см. **1.158.** 5 см.

1.159. □ По условию, $\angle BCA=\angle ACD$ (рис. Р.1.34). Но $\angle BCA=\angle CAD$, а значит, $\triangle ACD$ — равнобедренный и $AD=CD$. Имеем $3AD+BC=42$; так как $BC=3$ см, то $AD=13$ см. Проведем $BK\perp AD$; тогда $AK=\frac{1}{2}(13-3)=5$ (см) и из $\triangle AKB$ находим $BK=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см). Итак, $S=\frac{1}{2}(3+13)\cdot 12=96$ (см^2). ■

1.160. 1024 см^2. **1.161.** 25. **1.162.** 1 : 3, 2 : 3.

1.164. □ Так как AD — диаметр окружности (рис. Р.1.35), то $OD=OC=10$ см. Проведем $CL\perp AD$; тогда $OL=6$ см и из $\triangle CLO$ находим $CL=\sqrt{OC^2-OL^2}=8$ (см). Теперь из $\triangle ALC$ и $\triangle CLD$ получаем $AC=\sqrt{CL^2+AL^2}=\sqrt{64+256}=8\sqrt{5}$ (см) и $CD=\sqrt{CL^2+LD^2}=$ $=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ (см). ■

1.165. 10,625 см. **1.166.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **1.167.** 13 см.

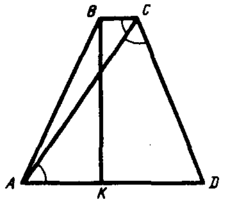


Рис. Р.1.34

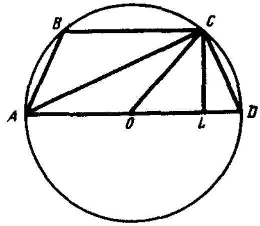


Рис. Р.1.35

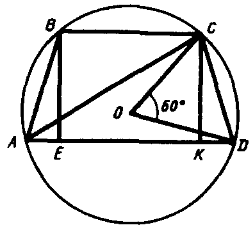


Рис. Р.1.36

1.168. □ Так как центральный угол COD равен 60° (рис. Р.1.36), то вписанный угол CAD равен 30°. Следовательно, $h=\frac{1}{2}AC$ и из $\triangle AKC$ получим $AK=\sqrt{AC^2-CK^2}=h\sqrt{3}$. Находим площадь трапеции: $S=\frac{1}{2}(BC+AD)h=$ $=(AE+EK)h=AK\cdot h=h\sqrt{3}\cdot h=h^2\sqrt{3}$. ■

1.169. 9 и 25 см. **1.170.** $\sqrt{2S}/4$. **1.171.** 8 см. **1.172.** $4+2\sqrt{3}$, $4-2\sqrt{3}$ и 4 см.

1.173. □ Пусть x — длина боковой стороны; тогда высота трапеции равна $\frac{1}{2}x$. Так как трапеция описана около круга, то сумма ее оснований равна сумме боковых сторон. Следовательно, площадь трапеции $S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}x$, откуда $x=\sqrt{2S}$. ■

1.174. $\sqrt{2S}/4$. **1.175.** $5R^2$ **1.176.** $\pi a^2/12$.

1.177. □ Пусть $AK=m$, $KB=n$ (рис. Р.1.37). Тогда $KB=BM=MC=n$, $AK=AN=$ $=ND=m$. Найдем высоту трапеции: $h=BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=$ $=\sqrt{(m+n)^2-(m-n)^2}=2\sqrt{mn}$. Итак, $S=\frac{1}{2}(BC+AD)h=(m+n)h=$ $=2\sqrt{mn}(m+n)$. ■

1.179. 120 см². **1.180.** $4\sqrt{5}$ и $8\sqrt{5}$ см.

1.181. □ Пусть R — радиус окружности. Тогда сторона правильного вписанного треугольника $a_3=R\sqrt{3}$ и $S_3=\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Далее, сторона квадрата

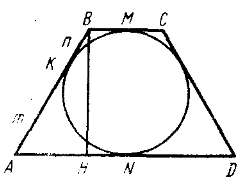


Рис. Р.1.37

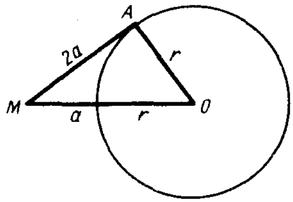


Рис. Р.1.38

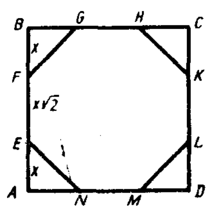


Рис. Р.1.39

$a_4=R\sqrt{2}$ и $S_4=a_4^2=2R^2$ и, наконец, сторона правильного вписанного шестиугольника $a_6=R$ и $S_6=\frac{6R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $S_4:S_3:S_6=8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$. ■

1.182. $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **1.183.** $a^2\sqrt{3}/8$. **1.184.** $a^2\sqrt{3}$.

1.185. □ Проведем радиус OA в точку касания (рис. Р.1.38) и обозначим радиус окружности через r. Тогда в ΔOAM имеем $(2a)^2+r^2=(a+r)^2$ или $4a^2+r^2=a^2+2ar+r^2$, откуда $r=\frac{3a}{2}$. Таким образом, $S=\frac{6r^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27a^2\sqrt{3}}{8}$. ■

1.186. $2:1$. **1.187.** $a^2(3+\sqrt{3})$. **1.188.** $\pi a^2/4$.

1.189. □ Пусть $AE=x$ (рис. Р.1.39). Тогда $AB=2AE+EF$ или $2x+x\sqrt{2}=a$, откуда $x=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Следовательно, искомая площадь

$$S=S_{ABCD}-4S_{\Delta AEN}=a^2-\frac{4x^2}{2}=a^2-\frac{4a^2(4-4\sqrt{2}+2)}{8}=2a^2(\sqrt{2}-1).\ ■$$

1.190. □ Соединим произвольную внутреннюю точку P со всеми вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Пусть длины этих перпендикуляров равны $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Нужно доказать, что сумма $d_1+d_2+\ldots+d_n$ не зависит от P. Площадь многоугольника $S=0{,}5a(d_1+d_2+\ldots+d_n)$, где a — сторона многоугольника. Значит, $d_1+d_2+\ldots+d_n=2S/a$, т. е. эта сумма не зависит от выбора точки P. ■

1.191. □ По условию, $\angle C=90°$, $MP=4$ см, $MQ=8$ см, $S_{\Delta ABC}=100$ см^2 (рис. Р.1.40); требуется найти BC и AC. Пусть $BC=x$, $AC=y$; тогда $0{,}5xy=100$, т. е. $xy=200$. Так как $\Delta BPM\sim\Delta MQA$, то $\frac{MP}{AQ}=\frac{BP}{MQ}$ или $\frac{4}{y-4}=\frac{x-8}{8}$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{4}{y-4}=\frac{x-8}{8},\\ xy=200\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x+2y=50,\\ xy=200,\end{cases}$$

которая сводится к квадратному уравнению $y^2-25y+100=0$, откуда находим $y_1=5$ см, $y_2=20$ см. В результате получаем два решения: $x_1=40$ см, $y_1=5$ см; $x_2=10$ см, $y_2=20$ см. ■

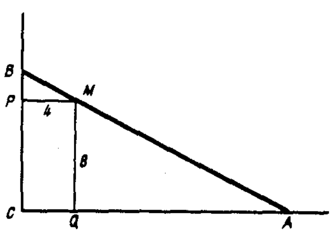


Рис. Р.1.40

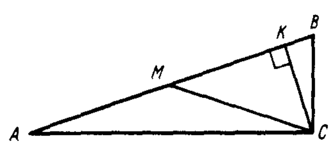


Рис. Р.1.41

1.192. $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{Q}{q}}}$ и $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{q}{Q}}}$.

1.193. □ По условию, $\angle C=90°$, $AB+BC+AC=72$ см, CM — медиана, CK — высота, $CM-CK=7$ см (рис. Р.1.41); требуется найти AB. Так как M — центр описанной окружности, то $AM=MB=MC=\frac{1}{2}AB$. Воспользуемся равенством $AB^2=BC^2+AC^2$. Заметим, что $BC^2+AC^2=(BC+AC)^2-2\,BC\cdot AC$, откуда $AB^2=(72-AB)^2-2\,AB\cdot CK$, поскольку $BC\cdot AC=AB\cdot CK=2S$, где S — площадь треугольника. Таким образом, приходим к уравнению $AB^2=(72-AB)^2-2AB\left(\frac{1}{2}AB-7\right)$ или $AB^2+130\,AB-5184=0$, откуда $AB=-65+\sqrt{9409}=32$ см (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). ■

1.194. 10.

1.195. □ Пусть a и b — катеты, а c — гипотенуза треугольника. Так как $a+b+c=60$, то $a+b=60-c$, откуда $(a+b)^2=(60-c)^2$ или $a^2+2ab+b^2=3600-120c+c^2$ (1). Но $a^2+b^2=c^2$, а $6c=0{,}5ab$ (площадь треугольника). Подставляя эти выражения в равенство (1), получим $c^2+24c=3600-120c+c^2$ или $144c=3600$, т. е. $c=25$ см. Для определения a и b имеем систему уравнений $\begin{cases} a+b=35, \\ ab=300, \end{cases}$ т. е. a и b — корни уравнения $x^2-35x+300=0$. Значит, $a_1=20$, $a_2=15$; $b_1=15$, $b_2=20$. Итак, стороны треугольника равны 15, 20 и 25 см. ■

1.196. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. 1.197. $\frac{200}{3}$ см^2.

1.198. □ Пусть x — больший отрезок гипотенузы. Тогда по условию $\frac{c-x}{x}=\frac{x}{c}$ или $x^2+cx-c^2=0$, откуда $x=\frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$ (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). Далее находим $x^2=\frac{c^2(3-\sqrt{5})}{2}$. Обозначив через h высоту, проведенную к гипотенузе, имеем $\frac{c-x}{h}=\frac{h}{x}$, и, значит, $h^2=cx-x^2=c^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=c^2(\sqrt{5}-2)$, т. е. $h=c\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}ch=\frac{c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}$. ■

1.199. $\frac{p^2-m^2}{p}$, $\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. 1.200. 2,16, 3 и 0,84 см^2.

1.201. □ Пусть площадь треугольника равна S. Тогда его стороны таковы: $a=\frac{2S}{15}$, $b=\frac{2S}{20}$, $c=\frac{2S}{12}$. Найдем $a^2+b^2=4S^2\left(\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}\right)=4S^2\left(\frac{1}{225}+\frac{1}{400}\right)=\frac{4S^2}{25}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=\frac{4S^2}{144}$, откуда $a^2+b^2=c^2$, т. е. треугольник прямоугольный. ■

1.204. □ Обозначим стороны треугольника через a, b, c. Тогда $4m_1^2=2(b^2+c^2)-a^2$, $4m_2^2=2(a^2+c^2)-b^2$ (см. дополнительные соотношения

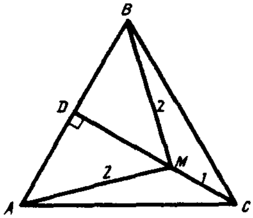


Рис. Р.1.42

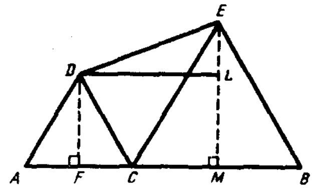


Рис. Р.1.43

2^0 в начале главы). Сложив эти равенства, получим $4(m_1^2+m_2^2)=4c^2+a^2+b^2$. По условию, $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$. Но $4m_3^2=2(a^2+b^2)-c^2$ и, значит, $\frac{4c^2+a^2+b^2}{4}=\frac{5(2(a^2+b^2)-c^2)}{4}$, откуда $4c^2+a^2+b^2=10(a^2+b^2)-$ $-5c^2$ или $c^2=a^2+b^2$, т. е. треугольник прямоугольный. ■

1.205. $\sqrt{3}$. **1.206.** $b+c+d$.

1.207. □ Обозначим сторону треугольника через a и проведем $MD\perp AB$ (рис. Р.1.42). Поскольку $AM=BM$, точки C, M и D лежат на одной прямой — высоте CD. В $\triangle ACD$ и $\triangle AMD$ имеем $(1+MD)^2=a^2-\frac{a^2}{4}$, $MD^2=4-\frac{a^2}{4}$. Тогда $a^2=4(4-MD^2)$ и получаем квадратное уравнение $(1+MD)^2=3(4-MD^2)$ или $4MD^2+2MD-11=0$, откуда $MD=\frac{3\sqrt{5}-1}{4}$ (второй корень не удовлетворяет условию). Далее находим $a^2=4(4-MD^2)=16-\frac{46-6\sqrt{5}}{4}=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$ и, следовательно,

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(9+3\sqrt{5})\sqrt{3}}{8}=\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{8}\approx 3{,}4\ (\text{см}^2).$$ ■

1.209. $2a\sqrt{7}$.

1.210. □ Пусть $AC=x$; тогда $CB=l-x$ (рис. Р.1.43). Проведем $DL\parallel AB$ и опустим перпендикуляры на AB из точек D и E. Так как треугольники ADC и CEB — правильные, то $DL=FM=FC+CM=\frac{x}{2}+\frac{l-x}{2}=\frac{l}{2}$, $EL=\frac{(l-x)\sqrt{3}}{2}-\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{(l-2x)\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $DE^2=\frac{l^2}{4}+\frac{3(l-2x)^2}{4}$. Расстояние DE является наименьшим при $l-2x=0$, откуда $x=l/2$, т. е. точку C следует взять в середине отрезка AB. ■

1.211. $m(\sqrt{5}+1)/2$ и m. **1.212.** $2\sqrt{5}$ и $5+\sqrt{5}$.

1.213. □ Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $CE=AD$ и $DE\parallel AC$ (рис. Р.1.44). Из подобия треугольников ABC и DBE следует, что $\frac{m}{AC}=\frac{BD}{b}$. Учитывая, что CD — биссектриса, имеем $\frac{BD}{DA}=\frac{BC}{AC}$. Положим $AC=x$, $BD=y$ и полу-

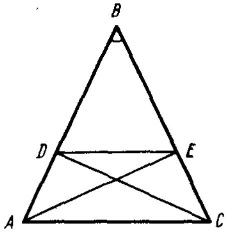


Рис. Р.1.44

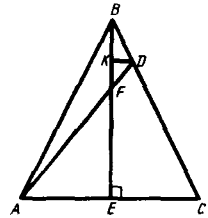


Рис. Р.1.45

чим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{m}{x}=\dfrac{y}{b}, \\ \dfrac{y}{b-y}=\dfrac{b}{x}, \end{cases}$ откуда $y=\dfrac{bm}{x}$ и далее $\dfrac{bm}{x\left(b-\dfrac{bm}{x}\right)}=\dfrac{b}{x}$, т. е. $x=\dfrac{bm}{b-m}$. ■

1.214. 28/3 см. **1.215.** 4,8.

1.216. □ Пусть AD пересекает BE в точке F (рис. Р.1.45). Проведем $DK \| AC$. Так как $\triangle BCE \sim \triangle BDK$, то $\dfrac{BK}{BE}=\dfrac{KD}{EC}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{5}$, откуда $BK=\dfrac{1}{5}BE$, $KD=\dfrac{1}{5}EC$. Далее, так как $\triangle KFD \sim \triangle AFE$, то $\dfrac{KD}{AE}=\dfrac{KF}{FE}=\dfrac{1}{5}$. Пусть $KF=x$; тогда $FE=5x$ и $BK+x+5x=BE$, откуда $BK+6x=5BK$ или $6x=4BK$, т. е. $BK=\dfrac{3x}{2}$. Выразим BF через x: $BF=BK+x=\dfrac{3x}{2}+x=\dfrac{5x}{2}$. Но $FE=5x$ и, значит, $BF:FE=1:2$. ■

1.217. $4\sqrt{3}/3$, $4\sqrt{3}/3$ и $(9-5\sqrt{3})/3$. **1.218.** 30, 30 и 120°.

1.219. □ По условию, $BC=a$, $AC=b$, AE и BF — медианы, $\angle AMF=90°$ (рис. Р.1.46). Положим $AE=m_a$, $BF=m_b$. Тогда в $\triangle BME$ и $\triangle AMF$ соответственно имеем $\dfrac{m_a^2}{9}+\dfrac{4m_b^2}{9}=\dfrac{a^2}{4}$, $\dfrac{4m_a^2}{9}+\dfrac{m_b^2}{9}=\dfrac{b^2}{4}$. Складывая эти равенства, полу-

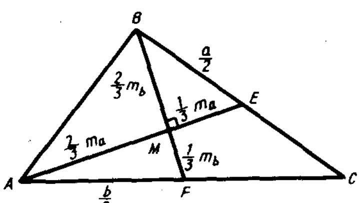


Рис. Р.1.46

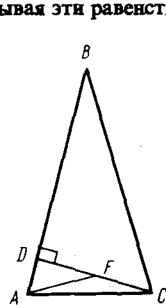


Рис. Р.1.47

чаем $\frac{5(m_a^2+m_b^2)}{9}=\frac{a^2+b^2}{4}$ или $m_a^2+m_b^2=\frac{9(a^2+b^2)}{20}$. Наконец, из $\triangle AMB$ находим $AB^2=\frac{4(m_a^2+m_b^2)}{9}=\frac{a^2+b^2}{5}$, откуда $AB=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. ■

1.220. $2\sqrt{5}$ см. **1.221.** 26 и 30 см.

1.222. □ Обозначим высоту CD через h, а отрезок AD — через x (рис. Р.1.47). Имеем $\angle ACD=90°-75°=15°$. Проведем AF так, чтобы $\angle CAF=\angle ACD=15°$. Тогда $\angle AFD=30°$ и из $\triangle ADF$ получим $AF=FC=2x$, $DF=x\sqrt{3}$. Но $DF=h-FC=h-2x$ и, значит, $x=\frac{h}{2+\sqrt{3}}=h(2-\sqrt{3})$. По условию, $AB=2h$; следовательно, $BD=AB-AD=2h-x=h\sqrt{3}$. Наконец, из $\triangle BDC$ находим $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=2h$, т. е. $\angle B=30°$ и $\angle C=180°-75°-30°=75°$. ■

1.223. $14\sqrt{3}/3$ см. **1.224.** 3 см.

1.225. □ Пусть искомое расстояние равно x (рис. Р.1.48). Тогда $S_{\triangle AMB}=0{,}5\cdot 10x=5x$. Но $S_{\triangle AMB}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMC}-S_{\triangle BMC}$. Найдем эти площади: $S_{\triangle ABC}=\sqrt{24\cdot 14\cdot 3\cdot 7}=84$ см^2, $S_{\triangle AMC}=0{,}5\cdot 21\cdot 2=21$ см^2, $S_{\triangle BMC}=0{,}5\cdot 17\cdot 4=34$ см^2. Следовательно, $S_{\triangle AMB}=84-55=29$ (см)^2, откуда $x=5{,}8$ см. ■

1.226. 3 : 4. **1.227.** 150 см^2.

1.228. □ Так как $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DE\cdot HK=2$ (рис. Р.1.49), то $HK=\frac{4}{DE}$; аналогично, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH=8$, откуда $BH=\frac{16}{AC}$. Учитывая, что $\triangle ABC\sim\triangle DBE$, находим $\frac{DE}{AC}=\frac{BK}{BH}$. Но $BK=BH-HK$ и, значит, $\frac{BK}{BH}=\frac{BH-HK}{BH}=1-\frac{HK}{BH}=1-\frac{4}{DE}:\frac{16}{AC}=1-\frac{AC}{4DE}$. Положим $\frac{DE}{AC}=x$. Тогда $x=1-\frac{1}{4x}$ или $4x^2-4x+1=0$, т. е. $x=\frac{1}{2}$. Итак, $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$. ■

1.229. $(m+n)^2/(mn)$.

1.231. □ По условию, $\angle A=2\angle B$, $BC-AC=2$ см, $AB=5$ см (рис. Р.1.50); требуется найти $S_{\triangle ABC}$. Проведем биссектрису AD; тогда $\triangle ABC\sim\triangle ADC$ ($\angle C$ — общий, $\angle B=\angle DAC$) и потому $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}$, т. е. $AC^2=BC\cdot CD$ (1).

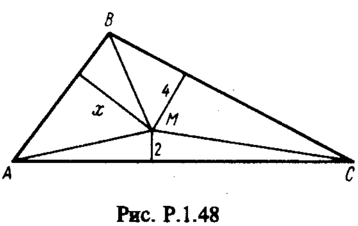


Рис. Р.1.48

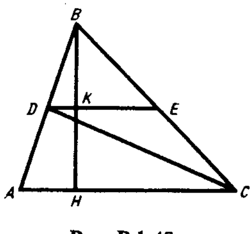


Рис. Р.1.49

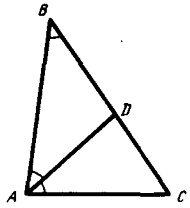


Рис. Р.1.50

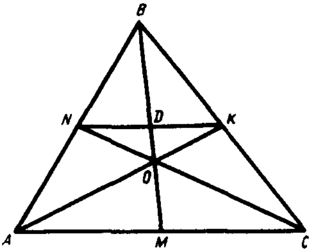


Рис. Р.1.51

Далее, так как AD — биссектриса, то $\frac{AC}{CD}=\frac{5}{BD}$ или $\frac{AC}{CD}=\frac{5}{BC-CD}$ или $AC\cdot BC-AC\cdot CD=5CD$, откуда $CD=\frac{AC\cdot BC}{AC+5}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $AC^2=\frac{AC\cdot BC^2}{AC+5}$ или $AC^2+5AC=BC^2$. Учитывая, что $BC=AC+2$, имеем $AC^2+5AC=AC^2+4AC+4$, откуда $AC=4$ см, $BC=6$ см. Итак,

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{7{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5\cdot 3{,}5}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\ (\text{см}^2).\ \blacksquare$$

1.232. 9 см^2.

1.233. □ Сначала докажем, что все указанные в условии треугольники равновелики. Имеем $S_{\Delta AOM}=S_{\Delta COM}$ (рис. Р.1.51), поскольку эти треугольники имеют одинаковые высоты и одинаковые основания, равные $AC/2$. Аналогично, $S_{\Delta AON}=S_{\Delta BON}$ и $S_{\Delta BOK}=S_{\Delta COK}$. Но $S_{\Delta BOK}=S_{\Delta BON}$, так как $S_{\Delta BOK}=S_{\Delta DOK}+S_{\Delta BKD}$, $S_{\Delta BON}=S_{\Delta DON}+S_{\Delta BND}$, а $S_{\Delta DOK}=S_{\Delta DON}$ и $S_{\Delta BKD}=S_{\Delta BND}$ (у этих треугольников равны основания KD и ND, а также опущенные из них высоты). Итак, площадь каждого треугольника равна $S_{\Delta ABC}/6$. Теперь по формуле Герона находим $S_{\Delta ABC}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ см^2, откуда $S_{\Delta AOM}=14$ см^2. $\blacksquare$

1.234. □ Каждую медиану исходного треугольника ABC продолжим на 1/3 ее длины (рис. Р.1.52). Площадь образовавшейся фигуры $AMBNCP$ составит $2S_{\Delta ABC}$ ($\Delta BOC=\Delta BNC$, $\Delta AOB=\Delta AMB$, $\Delta AOC=\Delta APC$). Длины сто-

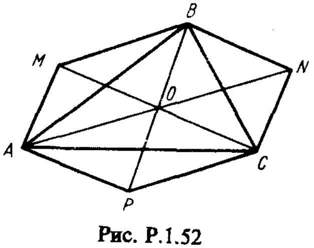


Рис. Р.1.52

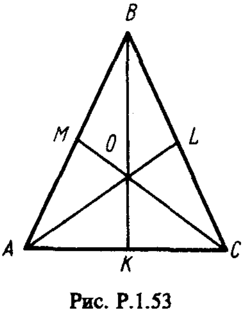


Рис. Р.1.53

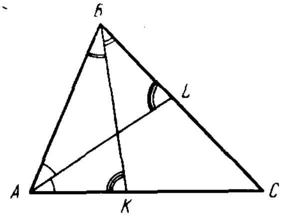


Рис. Р.1.54

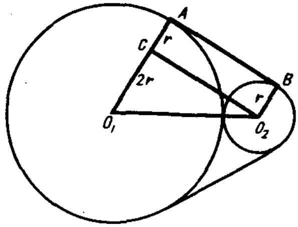


Рис. Р.1.55

рон каждого из треугольников AOM, BOM, BON, CON, COP, AOP равны $2m_1/3$, $2m_2/3$, $2m_3/3$; поэтому $S_{AMBNCP}=6S_{\Delta AOM}$. Пусть S_m — площадь треугольника, построенного на медианах ΔABC. Тогда $S_{\Delta AOM}=4S_m/9$ и $S_{AMBNCP}=2S_{\Delta ABC}=6\cdot 4S_m/9=8S_m/3$, откуда $S_{\Delta ABC}:S_m=4:3$. ■

1.235. 8 см^2. **1.236.** 288 см^2.

1.237. □ Площадь ΔABC в 3 раза больше площади ΔAOC (O — точка пересечения медиан; рис. Р.1.53). Имеем $S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AC\cdot OK=KC\cdot OK$. Но $OK=\frac{1}{3}BK=2$ (м), $KC=\sqrt{OC^2-OK^2}$, где $OC=\frac{2}{3}MC=\frac{10}{3}$ (м); отсюда $KC=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-2^2}=\frac{8}{3}$ (м). Итак, $S_{\Delta AOC}=\frac{16}{3}$ м^2, т. е. $S_{\Delta ABC}=16$ м^2. ■

1.238. $\sqrt{15}/2$ см^2. **1.239.** 235,2 см^2.

1.240. □ Рассмотрим два случая (рис. Р.1.54): 1) $\angle AKB=\angle ALB$; 2) $\angle AKB=\angle ALC$.

1) $\angle AKB+\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\angle ALB+\angle B+\frac{1}{2}\angle A$ (суммы углов треугольника), т. е. $\angle A=\angle B$.

2) Так как $\angle ALC$ — внешний угол ΔABL, то $\angle ALC=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$. Далее, $\angle AKB+\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\pi$. Но $\angle AKB=\angle ALC$ и, значит, $\angle B+\frac{1}{2}\angle A=$ $=\pi-\angle A-\frac{1}{2}\angle B$, откуда $\angle A+\angle B=\frac{2\pi}{3}$. ■

1.241. $2S/5$. **1.242.** В 2,56 раза.

1.243. □ Пусть $O_2B=r$; тогда $O_1A=R=3r$ (рис. Р.1.55). Проведем $O_2C\parallel AB$; имеем $AC=r$, $O_1C=2r$, $O_1O_2=4r$, т. е. $O_1O_2=2O_1C$ и, значит, $\angle CO_2O_1=30°$. Так как $O_2C=AB=6\sqrt{3}$, то из ΔO_1CO_2 находим $O_1O_2=O_2C:\cos 30°=6\sqrt{3}:(\sqrt{3}/2)=12$, откуда $r=3$, $R=9$. Дуги, входящие в указанную фигуру, содержат соответственно 120 и 240°, поэтому их длины равны $\frac{2\pi r}{3}$ и $\frac{4\pi R}{3}$. Искомый периметр составляет

$$P=2\cdot 6\sqrt{3}+\frac{2\pi r}{3}+\frac{4\pi R}{3}=12\sqrt{3}+14\pi. ■$$

1.244. 8. **1.245.** $\pi/2$.

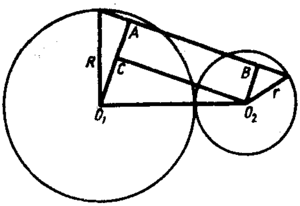


Рис. Р.1.56

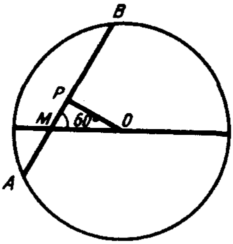


Рис. Р.1.57

1.246. □ Обозначим искомую длину через $2x$. Тогда $AB=4x$, $AO_1=\sqrt{R^2-x^2}$, $BO_2=\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. Р.1.56). Проведем $O_2C \parallel AB$. В ΔO_1O_2C имеем $O_1C=\sqrt{O_1O_2{}^2-O_2C^2}$ или

$$\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}. \qquad (1)$$

Умножив обе части уравнения (1) на $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}$, получим $R^2-r^2=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}\,(\sqrt{(R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2})$, откуда

$$\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}=\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), находим

$$2\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}+\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}. \qquad (3)$$

Преобразуем правую часть равенства (3):

$$\frac{(R+r)^2-16x^2+R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R^2+Rr-8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R(R+r)-8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}.$$

Тогда оно примет вид $\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{(R+r)^2-16x^2}=R(R+r)-8x^2$ или $(R^2-x^2)((R+r)^2-16x^2)=(R(R+r)-8x^2)^2$ или

$$R^2(R+r)^2-16R^2x^2-x^2(R+r)^2+16x^4=R^2(R+r)^2-16R(R+r)x^2+64x^4.$$

Учитывая, что $x\neq 0$, приходим к уравнению $48x^2=14Rr-R^2-r^2$, откуда $x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$ (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). Итак, искомая длина составляет $2x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. ■

1.247. $r^2(24\sqrt{3}-11\pi)/6$. **1.248.** $\pi R^2r^2/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4$.

1.249. □ Проведем $OP\perp AB$ (рис. Р.1.57). Тогда $AP=BP=7$ см и $MP=3$ см. Так как $\angle PMO=60°$, то $\angle MOP=30°$ и $OM=2MP=6$ см. ■

1.250. 85/8 см. **1.251.** 6,25 см.

1.252. □ Проведем диаметр CF (рис. Р.1.58). Докажем, что $AF=BD$ как хорды, стягивающие равные дуги. Действительно, $\cup AC+\cup BD=180°$ (так как $AB\perp CD$), $\cup AC+\cup AF=180°$ (поскольку CF — диаметр). Следовательно, $\cup AF=\cup BD$ и $AF=BD$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $AC^2+AF^2=4R^2$, откуда и $AC^2+BD^2=4R^2$. ■

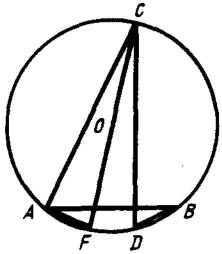


Рис. Р.1.58

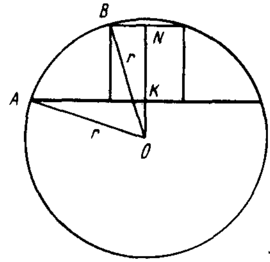


Рис. Р.1.59

1.253. 8 см. **1.254.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

1.255. □ Площадь сегмента с дугой 60° равна $S_1=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, а площадь сегмента с дугой 120° равна $S_2=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Искомая площадь

$S=\pi R^2-S_1-S_2=\frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$. ■

1.256. 14 см.

1.257. □ Пусть r — искомый радиус. В $\triangle AOK$ (рис. Р.1.59) имеем $OK=\sqrt{r^2-9}$, а в $\triangle OBN$ имеем $ON^2+BN^2=OB^2$ или $(OK+2)^2+1=r^2$. Следовательно, $r^2-9+4\sqrt{r^2-9}+4+1=r^2$, откуда $r^2-9=1$, т. е. $r=\sqrt{10}$ см. ■

1.258. □ Обозначим радиус круга через R. Так как дуга сегмента содержит 120°, то ее длина равна $\frac{2\pi R}{3}$, а хорда, стягивающая эту дугу (сторона правильного вписанного треугольника), равна $R\sqrt{3}$. Тогда периметр сегмента составляет $p=\frac{2\pi R}{3}+R\sqrt{3}$, откуда $R=\frac{3p}{2\pi+3\sqrt{3}}$. Находим площадь сегмента:

$$S=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2(4\pi-3\sqrt{3})}{12}=\frac{3p^2(4\pi-3\sqrt{3})}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}.$$

1.260. $\frac{ar}{a-r}$ и $\frac{a^2r}{(a-r)^2}$.

1.261. □ Пусть A — вершина угла, O_i и r_i — соответственно центр и радиус i-й окружности ($i=1, ..., 5$). Так как $\frac{1}{2}\angle A=30°$, то $AO_i=2r_i$, $AO_{i-1}=2r_{i-1}$, откуда $AO_i=AO_{i-1}+r_{i-1}+r_i$ или $2r_i=2r_{i-1}+r_{i-1}+r_i$, т. е. $r_i=3r_{i-1}$. Следовательно, радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3, а сумма площадей пяти кругов составит

$$S=\pi r_1^2(1+9+9^2+9^3+9^4)=\frac{\pi r_1^2(9^5-1)}{9-1}=7381\pi r_1^2.$$

Итак, $S:\pi r_1^2=7381$. ■

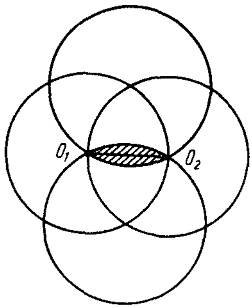


Рис. P.1.60

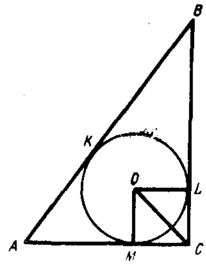


Рис. P.1.61

1.262. 3 см. **1.263.** $5\pi r^2/36$.

1.264. □ Пусть длина отрезка AB равна $2l$. Обозначим радиус одной из окружностей через x; тогда радиус второй окружности равен $l-x$. Сумма длин полуокружностей составляет $L=\pi x+\pi(l-x)=\pi l$, т. е. не зависит от x. ■

1.265. $R^2(2\sqrt{3}-\pi)/2$. **1.266.** В 9 раз.

1.267. □ Каждая из двух последних окружностей проходит через центры первых двух (рис. P.1.60), поэтому длина их общей хорды $O_1O_2=R$. Искомая площадь равна удвоенной площади сегмента с центральным углом 60°, т. е.

$$S=2\left(\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{6}. \ ■$$

1.268. $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/3$. **1.269.** $2r^2/(h-2r)$.

1.270. □ Обозначим радиус окружности через r, а длину гипотенузы через $5x$. Тогда (рис. P.1.61) $BC=3x+r$, $AC=2x+r$, поскольку $BK=BL$, $AK=AM$. Так как $\angle OCM=45°$, то $r=OC:\sqrt{2}=\sqrt{8}:\sqrt{2}=2$ (см). Для площади треугольника ABC имеем выражение $S=0{,}5\,AC\cdot BC$; с другой стороны, $S=pr$, где $p=0{,}5\,(AB+BC+AC)$. Следовательно, $0{,}5(2x+2)(3x+2)=2(5x+2)$ или $3x^2-5x-2=0$, откуда $x=2$ см (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). Итак, $AB=10$ см, $AC=6$ см, $BC=8$ см. ■

1.271. □ Пусть a и b — катеты треугольника. Тогда имеем систему $\begin{cases} ab=48, \\ a^2+b^2=100, \end{cases}$ откуда $a^2+2ab+b^2=196$, $a^2-2ab+b^2=4$, т. е. $a+b=14$, $a-b=2$ и, следовательно, $a=8$ (см), $b=6$ (см). Так как $S=pr$, то $24=12r$, т. е. $r=2$ (см). ■

1.272. r^2+2Rr.

1.273. □ Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Пусть u, v — длины катетов, а w — длина гипотенузы; тогда $S=\dfrac{\pi w^2}{4}$. Так как u и v — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $uv=\dfrac{c}{a}$, $u+v=-\dfrac{b}{a}$. Учитывая, что $w^2=u^2+v^2$, имеем $w^2=(u+v)^2-2uv=\dfrac{b^2}{a^2}-2\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ и окончательно находим $S=\dfrac{\pi(b^2-2ac)}{4a^2}$. ■

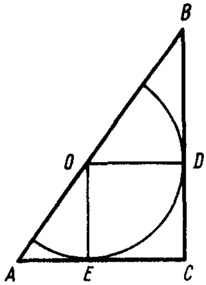


Рис. Р.1.62

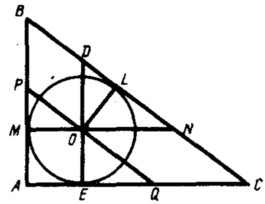


Рис. Р.1.63

1.274. $-(b+\sqrt{b^2-2ac})/(2a)$. **1.275.** 5 см.

1.276. □ Проведем радиусы OD и OE в точки касания (рис. Р.1.62). Имеем $OD=OE=CE=CD$, т. е. $ECDO$ — квадрат. Пусть R — радиус окружности; тогда длина дуги ED равна $\frac{\pi R}{2}$. Так как $\triangle AEO \sim \triangle ODB$, то $\frac{AE}{OD}=\frac{AO}{OB}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$. Но $AE^2=AO^2-OE^2=30^2-R^2$, откуда $\frac{\sqrt{30^2-R^2}}{R}=\frac{3}{4}$ или $16(30^2-R^2)=9R^2$ и, значит, $R=24$. Итак, длина дуги ED равна 12π. ■

1.277. $5\sqrt{2}$ см. **1.278.** $100\pi/9$ см^2.

1.279. □ Сначала найдем радиус вписанной окружности. Имеем $r=\frac{S}{p}=\frac{0{,}5\cdot 6\cdot 8}{0{,}5(6+8+10)}=\frac{24}{12}=2$ (см). Далее, так как $\triangle ABC \sim \triangle MPO$ (рис. Р.1.63), то $\frac{AB}{MP}=\frac{AC}{MO}$, откуда $MP=\frac{AB\cdot MO}{AC}=\frac{6\cdot 2}{8}=\frac{3}{2}$ (см). Аналогично, $\triangle EOQ \sim \triangle MPO$: $\frac{EQ}{MO}=\frac{OE}{PM}$, откуда $EQ=\frac{OE\cdot MO}{PM}=\frac{2\cdot 2}{3/2}=\frac{8}{3}$ (см). Для вычисления длины DN проведем $OL\perp BC$; тогда $DN=DL+LN$. Но $\triangle EOQ=\triangle LON$ (по катету и острому углу); значит, $LN=EQ=\frac{8}{3}$ см. Точно так же из равенства треугольников MPO и DLO находим $DL=MP=\frac{3}{2}$ см и, следовательно, $DN=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{25}{6}$ (см). ■

1.280. □ Пусть a, b, c, p — соответственно катеты, гипотенуза и полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности. Тогда $p+r=\frac{a+b+c}{2}+r=\frac{a+b}{2}+\frac{c}{2}+r$. Рассмотрим сумму $\frac{c}{2}+r$. Так как площадь треугольника $S=\frac{ab}{2}=pr$, то $r=\frac{ab}{2p}$, откуда

$$\frac{c}{2}+r=\frac{c}{2}+\frac{ab}{2p}=\frac{pc+ab}{2p}=\frac{ac+bc+c^2+2ab}{4p}=\frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{4p}=$$

$$=\frac{c(a+b)+(a+b)^2}{4p}=\frac{(a+b)(a+b+c)}{4p}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2p}=\frac{a+b}{2}.$$

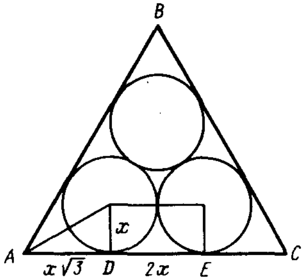


Рис. P.1.64

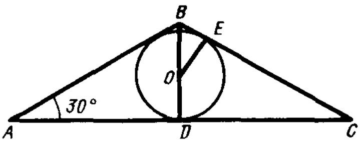


Рис. P.1.65

Итак, $p+r=\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}=a+b$. ■

1.282. □ Искомая площадь $S=S_1-S_2+3S_3$, где $S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь треугольника, $S_2=\frac{\pi a^2}{9}$ — площадь круга, S_3 — площадь сегмента, отсекаемого треугольником от круга. Хорда этого сегмента равна $\frac{a}{3}$; поэтому $S_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi a^2}{9}-\frac{a^2\sqrt{3}}{9\cdot 4}=\frac{\pi a^2}{54}-\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$. Итак,

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{9}+\frac{\pi a^2}{18}-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}=\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}.$$ ■

1.283. $R^2(\pi-\sqrt{3})$. **1.284.** $(5\pi-6\sqrt{3})/18$ см^2.

1.285. □ Пусть x — радиус каждой из окружностей. Тогда $AD=x\sqrt{3}$, $DE=2x$, $EC=x\sqrt{3}$ (рис. P.1.64). Таким образом, $2x\sqrt{3}+2x=a$, откуда $x=\frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}$. Площадь каждого из кругов равна $\pi x^2=\frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8}$; следовательно, искомая площадь

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{3\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8}=\frac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}.$$ ■

1.286. $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2. **1.287.** $R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)/3$.

1.288. □ Проведем радиус $OE\perp BC$ (рис. P.1.65). Так как $\angle OBE=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$, то $\angle BOE=30°$, т. е. $BE=\frac{1}{2}BO$. Тогда из $\triangle BEO$ находим $BO^2=\frac{1}{4}BO^2+9$, откуда $BO=2\sqrt{3}$. В $\triangle ADB$ имеем $AB=2BD$. Но $BD=BO+OD=2\sqrt{3}+3$ и, следовательно, $AB=BC=4\sqrt{3}+6$. Наконец, $AC=2DC=2(BC-BE)=$ $=2(4\sqrt{3}+6-\sqrt{3})=6\sqrt{3}+12$. ■

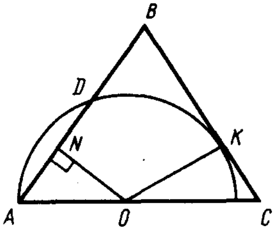


Рис. Р.1.66

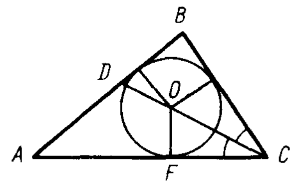


Рис. Р.1.67

1.289. $2R^2/\sqrt{Rr}$. **1.290.** 5, 5 и 6 см.

1.291. □ Согласно теореме о касательной и секущей, имеем (рис. Р.1.66) $BK^2=AB\cdot DB=9\cdot 4=36$, откуда $BK=6$ см, $KC=3$ см. Проведем радиус OK в точку касания и $ON\perp AB$. Тогда $AN=ND=\frac{5}{2}$ см. Так как $\triangle ANO\sim\triangle OKC$ (прямоугольные треугольники, у которых $\angle A=\angle C$), то $\frac{KC}{AN}=\frac{OC}{AO}=\frac{3}{5/2}=\frac{6}{5}$. Пусть искомый радиус равен r. Тогда $AO=r$, $OC=\sqrt{9+r^2}$ и, значит, $6r=5\sqrt{9+r^2}$ или $36r^2=225+25r^2$, откуда $r=\frac{15}{\sqrt{11}}$ см. ■

1.293. 7, 24 и 25 см.

1.294. □ Так как CD — биссектриса (рис. Р.1.67), то $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$, откуда $AD=9$ см, $DB=6$ см. Далее, длина биссектрисы $CD=\sqrt{12\cdot 18-9\cdot 6}=9\sqrt{2}$ см (см. дополнительное соотношение 5^0 в начале главы). Проведем радиусы в точки касания и положим $CF=x$. Тогда, используя равенство касательных, проведенных из одной точки, получим $18-x+12-x=15$, откуда $x=\frac{15}{2}$ (см). По формуле Герона находим $S=\sqrt{\frac{45}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{135\sqrt{7}}{4}$ (см^2). Но $S=pr$, откуда $r=\frac{135\sqrt{7}}{4}:\frac{45}{2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$ (см). Значит, $OC=\sqrt{x^2+r^2}=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{63}{4}}=6\sqrt{2}$ (см). Поскольку $CD=9\sqrt{2}$ см, точка O делит биссектрису в отношении 2 : 1. ■

1.295. 3 : 2, 3 : 1, 2 : 1. **1.296.** 5 см.

1.297. □ Обозначим стороны треугольника через a, b, c. Тогда площади частей треугольника равны $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, т. е. $ar=8$, $br=26$, $cr=30$, откуда $a=\frac{8}{r}$, $b=\frac{26}{r}$, $c=\frac{30}{r}$. По формуле Герона находим $S=\sqrt{\frac{32}{r}\cdot\frac{24}{r}\cdot\frac{6}{r}\cdot\frac{2}{r}}=\frac{96}{r^2}$. Но $S=4+13+15=32$ (см^2); следовательно, $\frac{96}{r^2}=32$, т. е. $r=\sqrt{3}$ см. Итак, $a=\frac{8}{\sqrt{3}}$ см, $b=\frac{26}{\sqrt{3}}$ см, $c=\frac{30}{\sqrt{3}}$ см. ■

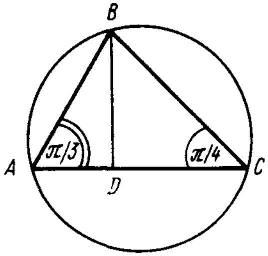


Рис. Р.1.68

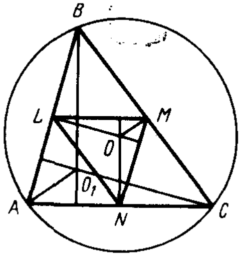


Рис. Р.1.69

1.298. Прямоугольный; 24 см^2. **1.299.** 130 см^2.

1.300. □ Так как $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$ (рис. Р.1.68), то $AB=2\sqrt{2}$ см (сторона вписанного квадрата). Проведем $BD\perp AC$. Тогда, учитывая, что $\angle ABD=\frac{\pi}{6}$, находим $AD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$ (см); далее, поскольку $\triangle BDC$ — равнобедренный, $DC=BD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$ (см). Значит, $AC=AD+DC=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (см). Итак, $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{6}=(1+\sqrt{3})\sqrt{3}=\sqrt{3}+3$ (см^2). ■

1.301. 16,9 см.

1.303. □ Пусть O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, и O_1 — его ортоцентр (рис. Р.1.69). Построим $\triangle LMN$, сторонами которого служат средние линии заданного треугольника. Высоты $\triangle LMN$ пересекаются в точке O, поскольку эти высоты перпендикулярны сторонам $\triangle ABC$ и проходят через их середины. Но $\triangle LMN\sim\triangle ABC$ и потому $\frac{MO}{AO_1}=\frac{LN}{BC}=\frac{1}{2}$, т. е. $AO_1=2MO$. ■

1.304. □ Так как CN — медиана, то $CK=\frac{2}{3}CN$ (рис. Р.1.70). Соединив точки L и M, получим среднюю линию LM; поэтому $\frac{LM}{AB}=\frac{CF}{CN}=\frac{1}{2}$, т. е. $CF=\frac{1}{2}CN$,

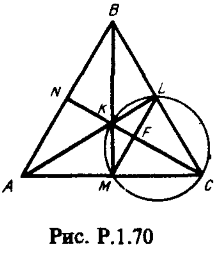


Рис. Р.1.70

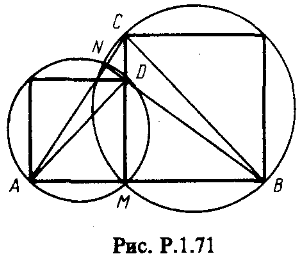


Рис. Р.1.71

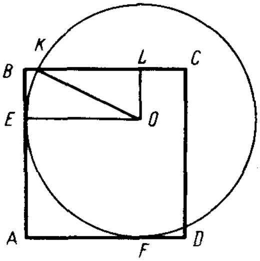


Рис. Р.1.72

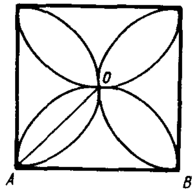


Рис. Р.1.73

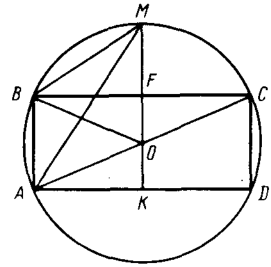


Рис. Р.1.74

$LM=\frac{a}{2}$, $LF=FM=\frac{1}{2}AN=\frac{a}{4}$, $FK=\frac{1}{6}CN$. Имеем $LF\cdot FM=FK\cdot CF$ (произведение отрезков хорд, проходящих через точку F). Следовательно, $\frac{a^2}{16}=\frac{1}{6}CN\cdot\frac{1}{2}CN$, откуда $CN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. ■

1.305. 120/17.

1.306. □ Соединим вершины квадратов A и C, B и D (рис. Р.1.71). Продолжим BD до пересечения с AC. Обозначим точку пересечения через N и покажем, что она совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около квадратов. Действительно, так как $\triangle ACM=\triangle BDM$, то $\angle ACM=\angle DBM$ и потому $BN\perp AC$. Но прямые углы BNC и AND опираются на соответствующие диаметры, а значит, точка N принадлежит обеим описанным окружностям, откуда и следует доказываемое утверждение. ■

1.307. $a\sqrt{3}$, $5a\sqrt{3}/6$ и $5a\sqrt{3}/6$. **1.308.** 17 см.

1.309. □ Проведем радиус OK (рис. Р.1.72); тогда $KL=\sqrt{KO^2-LO^2}$. Но $LO=BE=18-13=5$ (см), откуда $KL=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см), $BK=13-12=1$ (см). Итак, сторона квадрата разделена на отрезки 1 и 17 см. ■

1.310. 10 : 1. **1.311.** $65\pi a^2/4$.

1.312. □ Хорда OA стягивает дугу 90° (рис. Р.1.73); поэтому площадь половины лепестка равна $\frac{\pi a^2}{16}-\frac{a^2}{8}=\frac{a^2(\pi-2)}{16}$. Следовательно, искомая площадь $S=8\times\frac{a^2(\pi-2)}{16}=\frac{a^2(\pi-2)}{2}$. ■

1.313. □ Пусть x — сторона прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R. Тогда его площадь равна $x\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь вписанного квадрата равна $2R^2$. Покажем, что $2R^2\geqslant x\sqrt{4R^2-x^2}$. В самом деле, из очевидного неравенства $(2R^2-x^2)^2\geqslant 0$ получаем $4R^4\geqslant x^2(4R^2-x^2)$, откуда и следует, что $2R^2\geqslant x\sqrt{4R^2-x^2}$ (знак неравенства сохранится, поскольку $2R^2>0$ и $x\sqrt{4R^2-x^2}>0$). ■

1.314. 84/13 и 72/13 см.

1.315. □ Так как AC — диаметр окружности (рис. Р.1.74), то $R=0{,}5\sqrt{24^2+7^2}=12{,}5$ (см). В $\triangle BOF$ имеем $OF=\sqrt{OB^2-BF^2}=\sqrt{12{,}5^2-12^2}=3{,}5$ (см); значит, $MF=12{,}5-3{,}5=9$ (см), $MK=12{,}5+3{,}5=16$ (см). Из $\triangle MBF$ и $\triangle MAK$ находим искомые расстояния: $MB=\sqrt{MF^2+BF^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$ (см), $MA=\sqrt{MK^2+KA^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$ (см). ■

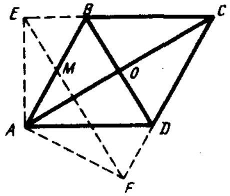


Рис. Р.1.75

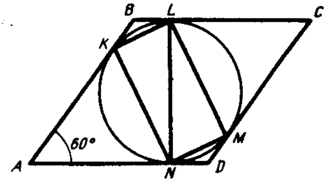


Рис. Р.1.76

1.316. $(b-a)^2/2$. **1.317.** $m(p+q)/q$, $m(p+q)/p$, $p+q$.

1.318. □ Так как $\triangle AEF$ — равнобедренный (рис. Р.1.75), то биссектриса AM перпендикулярна EF и лежит на диагонали ромба. Находим $AM^2=AF^2-MF^2=9-\frac{27}{4}=\frac{9}{4}$, т. е. $AM=\frac{3}{2}$ (см). В $\triangle ACF$ имеем $\angle F=90°$ и $FM\perp AC$; следовательно, $AF^2=AC\cdot AM$ или $9=AC\cdot\frac{3}{2}$, откуда $AC=6$ (см). Далее, $\triangle ACD\sim\triangle AEF$ (углы при основании равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и, значит, $\frac{AM}{OD}=\frac{EF}{AC}$ или $\frac{3/2}{OD}=\frac{3\sqrt{3}}{6}$, откуда $OD=\sqrt{3}$ см. Итак, $BD=2\sqrt{3}$ см, $AC=6$ см. ■

1.319. 20 см^2.

1.320. □ Радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности (рис. Р.1.76) $R=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, поскольку $\angle A=60°$. Четырехугольник $KLMN$ является прямоугольником, так как его углы опираются на диаметр окружности. Его площадь $S=MN\cdot LM$, где $MN=R$ (катет, лежащий против угла 30°), $LM=R\sqrt{3}$. Итак, $S=R^2\sqrt{3}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$. ■

1.321. □ Площадь ромба $S=0{,}5\cdot 3\cdot 4=6=AD\cdot BE$ (рис. Р.1.77). Из $\triangle AOD$ находим $AD=\sqrt{2^2+1{,}5^2}=2{,}5$ (см) и, следовательно, $BE=6:2{,}5=2{,}4$ (см). Далее из $\triangle BDE$ получим $DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{3^2-2{,}4^2}=1{,}8$ (см). Итак, $S_{BEDF}=2S_{\triangle BED}=1{,}8\cdot 2{,}4=4{,}32$ (см^2). ■

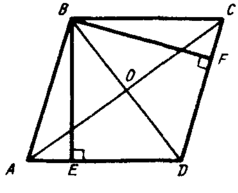


Рис. Р.1.77

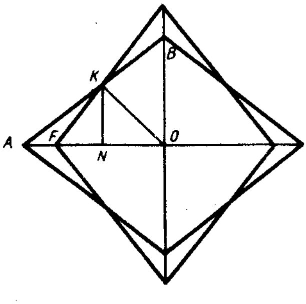


Рис. Р.1.78

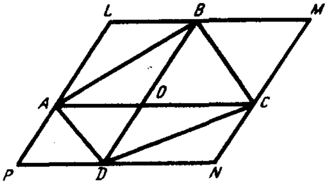


Рис. Р.1.79

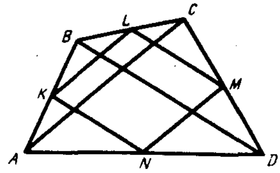


Рис. Р.1.80

1.322. $25/(6\pi)$. **1.323.** $8R^2\sqrt{3}/3$.

1.324. □ Искомая площадь S равна $4(S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AFK})$ (рис. Р.1.78). Находим $S_{\triangle AOB}=0{,}5\cdot 3\cdot 2=3$ (см^2). Сторона ромба равна $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (см). В $\triangle AOB$ отрезок OK — биссектриса; тогда, используя формулу $l_c=\dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$ (см. дополнительное соотношение 6^0 в начале главы), получим $OK=\dfrac{\sqrt{6(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}}{5}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$ (см). Теперь найдем $S_{\triangle AFK}=\dfrac{1}{2}AF\cdot KH$, где $KH=\dfrac{OK}{\sqrt{2}}=\dfrac{6}{5}$ (см), $AF=3-2=1$ (см); значит, $S_{\triangle AFK}=0{,}6$ см^2. Итак, $S=4(3-0{,}6)=9{,}6$ см^2. ■

1.325. 9, 9 и $6\sqrt{2}$ см. **1.326.** $4\sqrt{2}$ и 18 см.

1.327. □ Покажем, что искомая площадь $S_{LMNP}=2S$ (рис. Р.1.79). Действительно, так как $AL\parallel BO$ и $LB\parallel AO$, то $ALBO$ — параллелограмм и, значит, $S_{\triangle ALB}=S_{\triangle AOB}$. Аналогично получаем $S_{\triangle BMC}=S_{\triangle BOC}$, $S_{\triangle DCN}=S_{\triangle DOC}$, $S_{\triangle APD}=S_{\triangle AOD}$, откуда и следует, что $S_{LMNP}=2S$. ■

1.328. 96 и 156 см. **1.329.** 45 и 135°.

1.330. □ Так как KL, LM, NM, KN — средние линии соответствующих треугольников (рис. Р.1.80), то $KL=NM=\dfrac{1}{2}AC$, $KN=LM=\dfrac{1}{2}BD$. По условию, $AC=BD$ и, следовательно, $KLMN$ — ромб, площадь которого равна $\dfrac{1}{2}pq$. Пусть искомая площадь равна S. Тогда $S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$. Но $S_{\triangle AKN}=$ $=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABD}$; аналогично, $S_{\triangle CML}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle BCD}$ и, значит, $S_{\triangle AKN}+S_{\triangle CML}=\dfrac{1}{4}S$. Точно так же получим, что $S_{\triangle KBL}+S_{\triangle MDN}=\dfrac{1}{4}S$. Итак, площадь вне ромба равна $\dfrac{1}{2}S$. Поэтому и площадь ромба равна $\dfrac{1}{2}S$, откуда $S=pq$. ■

1.331. 3 см. **1.332.** 120 см^2.

1.333. □ Пусть малая дуга содержит x градусов. Тогда $4x+8x=2\pi$, откуда $x=\dfrac{\pi}{6}$. Значит, восьмиугольник содержит четыре треугольника с центральным

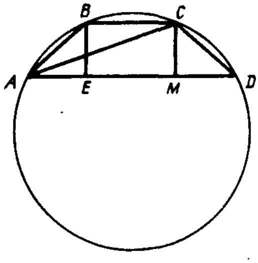


Рис. Р.1.81

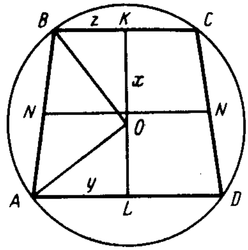


Рис. Р.1.82

углом $\frac{\pi}{3}$ (их суммарная площадь $4 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$) и четыре треугольника с центральным углом $\frac{\pi}{6}$ (их суммарная площадь $4 \cdot \frac{R^2}{4}$). Искомая площадь составляет $S=R^2(\sqrt{3}+1)$. ■

1.334. *a*. **1.335.** 8 или 6 см.

1.336. □ Заметим, что окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана и около $\triangle ACD$ (рис. Р.1.81), причем такая окружность единственна. Ее радиус будем искать по формуле $R=\frac{abc}{4S}$. Имеем $S=\frac{1}{2}AD \cdot BE$, где $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$; отсюда $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot 14 \cdot 8=56$. Из $\triangle ACM$ находим $AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$. Итак,

$$R=\frac{14 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 56}=5\sqrt{2}. \ ■$$

1.337. 6 см. **1.338.** $h\sqrt{3}/3$.

1.339. □ Пусть $OK=x$, $AL=y$, $BK=z$ (рис. Р.1.82). Тогда $MN=z+y=x+\frac{3x}{4}=\frac{7x}{4}$. В $\triangle OKB$ и $\triangle OLA$ имеем $OB^2=OK^2+BK^2$, $OA^2=OL^2+AL^2$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \frac{9x^2}{16}+y^2=100, \\ \frac{7x}{4}-z=y \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \frac{9x^2}{16}+\left(\frac{7x}{4}-z\right)^2=100 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2+z^2=100, \\ \frac{29x^2}{8}-\frac{7xz}{2}+z^2=100. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем $\frac{21x^2}{8}-\frac{7xz}{2}=0$, откуда (так как $x\neq 0$) $x=\frac{4z}{3}$. Значит, $z^2+\frac{16z^2}{9}=100$, т. е. $z=6$. Отсюда находим $x=8$, $y=8$. Итак, $AD=2y=16$, $BC=2z=12$. ■

1.340. Трапеция равнобедренная, боковая сторона равна средней линии. **1.341.** 4 и $5\sqrt{41}/4$ см.

1.342. □ Обозначим высоту BH трапеции через h (рис. Р.1.83). Тогда $AB=2h$ (так как $\angle A=30°$), $BC+AD=4h$ (поскольку $BC+AD=AB+CD=2AB$). Пло-

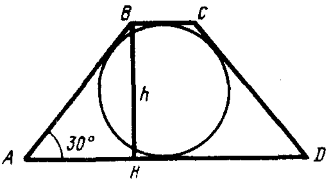


Рис. Р.1.83

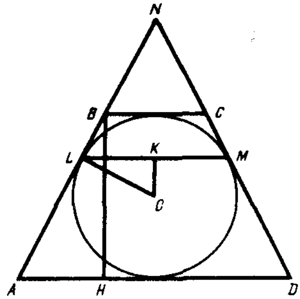


Рис. Р.1.84

щадь трапеции $S=\dfrac{(BC+AD)h}{2}=2h^2=32$ (см²), откуда $h=4$ см. Следовательно, $AB=CD=8$ см, $BC+AD=16$ см. Но $BC+AD=2BC+2AH=2BC+{}$ $+8\sqrt{3}$. Итак, $AB=CD=8$ см, $BC=8-4\sqrt{3}$ см, $AD=8+4\sqrt{3}$ см. ■

1.343. 100π см². **1.344.** 20, 12,5, 5 и 12,5 см.

1.345. □ Пусть L и M — точки касания (рис. Р.1.84); тогда $SL=SM$, откуда $AB=CD$, поскольку $AD\parallel BC\parallel LM$. Проведем $OK\perp LM$ и $BH\perp AD$. Искомая площадь $S=\dfrac{1}{2}(AD+BC)BH$. Для описанной трапеции имеем $AD+BC=$ $=AB+CD=2AB$; поэтому $S=AB\cdot BH$. Далее, $\triangle ABH\sim\triangle OLK$ ($\angle LOK=$ $=\angle BAH$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), откуда $\dfrac{LK}{LO}=\dfrac{BH}{AB}$ или $\dfrac{a/2}{R}=\dfrac{2R}{AB}$ и, значит, $AB=\dfrac{4R^2}{a}$. Итак, $S=\dfrac{4R^2}{a}\cdot 2R=\dfrac{8R^3}{a}$. ■

1.346. $8Rr\sqrt{Rr}/(R+r)$. **1.347.** $36/\sqrt{10}$, $12/\sqrt{10}$, $18/\sqrt{10}$ и $30/\sqrt{10}$ см.

1.348. □ Сначала найдем сторону $AB=2r$ (рис. Р.1.85). Пусть $ED=x$. Тогда, используя равенство $AB+CD=BC+AD$, получим $2r+CD=\dfrac{4r}{3}+\dfrac{4r}{3}+x$, от-

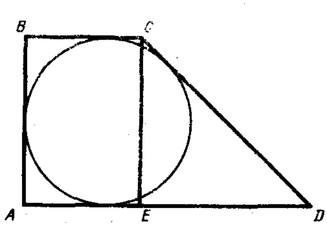


Рис. Р.1.85

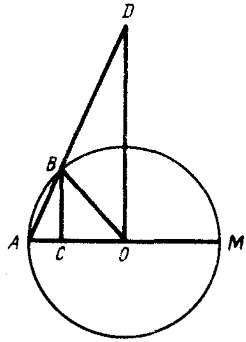


Рис. Р.1.86

куда $CD=\frac{2r}{3}+x$. В $\triangle CED$ имеем $CD^2=CE^2+ED^2$ или $\left(\frac{2r}{3}+x\right)^2=4r^2+x^2$, откуда $x=\frac{8r}{3}$. Итак, $CD=\frac{10r}{3}$, $AD=\frac{12r}{3}=4r$. ■

1.349. $18\sqrt{5}/5$ см. **1.350.** 3,6 см^2.

1.351. □ В силу условия, $\angle BOC=45°$ и, значит, $BC=OC=\frac{R}{\sqrt{2}}$, $AC=R-\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ (рис. Р.1.86). Так как $\triangle ABC\sim\triangle ADO$, то $\frac{DO}{BC}=\frac{AO}{AC}$, откуда $DO=\frac{AO\cdot BC}{AC}=\frac{R}{\sqrt{2}-1}=R(\sqrt{2}+1)$. Находим площадь трапеции:

$$S=\frac{1}{2}(DO+BC)OC=\frac{1}{2}\left(R(\sqrt{2}+1)+\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}.\ ■$$

1.352. 14, 12,5, 29,4 и 16,9 см. **1.353.** 6 см.

1.354. □ Пусть $AD=a$, $BC=b$ (рис. Р.1.87). Так как $\triangle MBO\sim\triangle ABD$, то $\frac{MO}{a}=\frac{BO}{BD}$, т. е. $MO=a\cdot\frac{BO}{BD}$. Аналогично, $\triangle OND\sim\triangle BCD$, откуда $\frac{ON}{b}=\frac{OD}{BD}$, т. е. $ON=b\cdot\frac{OD}{BD}$. Тогда $MN=MO+ON=\frac{a\cdot BO+b\cdot OD}{BD}=\frac{2a\cdot BO}{BD}$, поскольку $\triangle AOD\sim\triangle BOC$ и, значит, $\frac{a}{b}=\frac{OD}{BO}$, т. е. $a\cdot BO=b\cdot OD$. Учитывая, что $BD=BO+OD$, окончательно находим

$$MN=\frac{2a\cdot BO}{BO+OD}=\frac{2a}{1+\frac{OD}{BO}}=\frac{2a}{1+\frac{a}{b}}=\frac{2ab}{a+b}.\ ■$$

1.355. $12\sqrt{5}$ см^2. **1.356.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$.

1.357. □ Проведем $BH\perp AD$ и $CF\perp AD$ (рис. Р.1.88). Пусть $AH=x$; тогда $AF=8+x$, $DH=24-x$. Учитывая, что $BH=CF$, в $\triangle AFC$ и $\triangle BHD$ имеем $AC^2-AF^2=BD^2-DH^2$ или $13^2-(8+x)^2=(5\sqrt{17})^2-(24-x)^2$, откуда $64x=256$, т. е. $x=4$ (см). Тогда $CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$ (см). Следовательно, $S=\frac{1}{2}(24+8)\cdot 5=80$ (см^2). ■

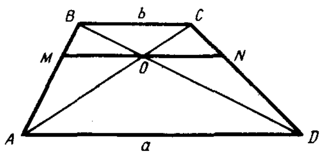


Рис. Р.1.87

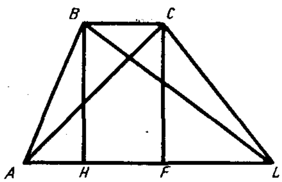


Рис. Р.1.88

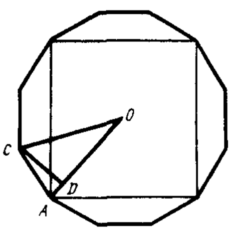


Рис. P.1.89

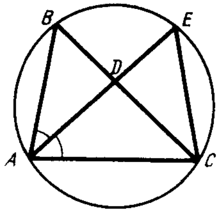


Рис. P.1.90

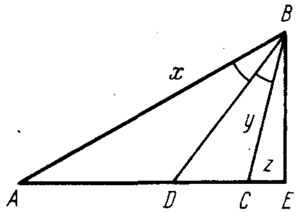


Рис. P.1.91

1.358. $a\cdot\dfrac{3a-b}{a+b}$ при $b<3a$; $\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a-3b}{a+b}$ при $a>3b$. **1.359.** 2,4 см.

1.360. □ Искомая площадь $S=12S_{\Delta AOC}$, где OA и OC — радиусы (рис. P.1.89).

Так как сторона квадрата равна a, то $OA=OC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Имеем $S_{\Delta AOC}=\dfrac{1}{2}\,OA\cdot CD$, где $CD\perp OA$. Но $CD=\dfrac{1}{2}\,OC$, поскольку $\angle AOC=\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$.

Таким образом, $S_{\Delta AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a^2}{8}$, т. е. $S=\dfrac{3a^2}{2}$. ■

1.361. 10 см.

1.362. □ Около ΔABC опишем окружность и продолжим биссектрису AD до пересечения с этой окружностью в точке E (рис. P.1.90). Так как $BD:DC=c:b=4:5$, то $BD=8$ см и $DC=10$ см. Но $BD\cdot DC=AD\cdot DE$, откуда $AD\cdot DE=80$. Поскольку $\Delta ABD\sim\Delta AEC$, имеем $AC:AE=AD:AB$, откуда $AD\cdot AE=180$. Учитывая, что $AE=AD+DE$ и $DE=80:AD$, находим $AD=10$ см. ■

1.363. $\angle A+\angle B=90°$ или $|\angle A-\angle B|=90°$.

1.364. □ Положим $AB=x$, $BC=y$, $CE=z$ (рис. P.1.91). Так как $x:y=AD:DC$ (BD — биссектриса угла ABC), то $x=2y$ (1). Кроме того, из ΔABE и ΔCBE имеем: $x^2=(6+z)^2+15$ (2), $y^2=z^2+15$ (3). Система уравнений (1) — (3) приводит к квадратному уравнению $z^2-4z+3=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=3$. При $z=1$ получаем ответ: $AB=x=8$ см, $BC=y=4$ см, $AC=6$ см (при $z=3$ длины сторон не являются целыми числами). ■

1.365. □ Пусть прямые AE и CD пересекаются в точке L (рис. P.1.92). Проведем прямую BL до пересечения со стороной AC в точке M. Так как $\Delta ALM\sim\Delta LKE$, а $\Delta CML\sim\Delta DKL$, то $AM:KE=ML:KL$, а $CM:DK=ML:KL$, откуда $AM:CM=KE:DK$. Далее, из подобия ΔABM

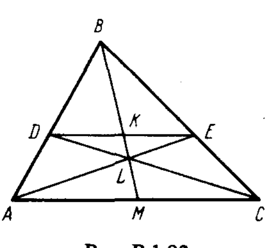


Рис. P.1.92

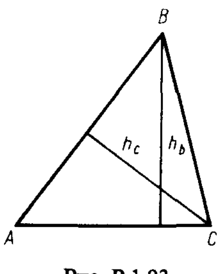


Рис. P.1.93

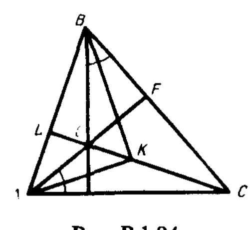


Рис. P.1.94

и $\triangle DBK$, а также $\triangle MBC$ и $\triangle KBE$ заключаем, что $AM : CM = DK : KE$, т. е. $KE : DK = DK : KE = 1$. Итак, BL — медиана и, следовательно, L — общая точка для указанных в условии трех прямых. ■

1.366. 11/3 см^2.

1.367. □ Пусть $h_c \geqslant h_b \geqslant AC$ (рис. Р.1.93). Но AC — наклонная и, значит, $AC = h_c$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный, откуда следует, что $h_b = AB$. Так как $h_b = AB \geqslant AC$ и $h_c = AC \geqslant AB$, то $AB = AC$. Итак, гипотенуза $BC = a$, катеты $AB = AC = a\sqrt{2}/2$. ■

1.368. 45, 45 и 90°. **1.369.** 33/4 см. **1.371.** $\dfrac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}$.

1.372. □ Рассмотрим случай, когда точка O лежит внутри треугольника (рис. Р.1.94; в случае, когда она лежит вне треугольника, решение аналогично). По условию, $\angle AKB = 90°$ и $KL \perp AB$, значит, $KL^2 = AL \cdot LB$. Так как $\triangle ALO \sim \triangle CLB$, то $AL : LO = CL : LB$, откуда $AL \cdot LB = LO \cdot CL$, т. е. $KL^2 = LO \cdot CL$. Итак,

$$S_{\triangle AKB} = 0{,}5\,AB \cdot KL = 0{,}5\,AB\sqrt{LO \cdot CL} =$$

$$= \sqrt{0{,}5\,AB \cdot LO \cdot 0{,}5\,AB \cdot CL} = \sqrt{S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle ACB}}. \ ■$$

1.373. 3 : 7. **1.374.** $\sqrt{43}$ и $\sqrt{33}$.

1.375. □ Очевидно, что около четырехугольников $AEDC$ и $ABDF$ можно описать окружности (рис. Р.1.95), поскольку соответствующие прямые углы можно рассматривать как опирающиеся на диаметры. В четырехугольнике $AEDC$ имеем $\angle A = \angle BDE$ (каждый из них дополняет $\angle EDC$ до π). Аналогично, в четырехугольнике $ABDF$ имеем $\angle A = \angle CDF$ (как дополнения $\angle BDF$ до π), откуда $\angle BDE = \angle CDF$. Так как $\angle BDE + \angle EDA = \angle CDF + \angle ADF = \pi/2$, то $\angle EDA = \angle ADF$. Значит, высота DA является биссектрисой $\triangle EDF$. Точно так же проводится доказательство для остальных высот. ■

1.376. $(\sqrt{3} - 1)S$.

1.377. □ По условию, $AB = BC$, AD — биссектриса, $BD = AC$ (рис. Р.1.96); требуется доказать, что $AD = AC$. Отложим на стороне AB отрезок $AK = AC$. Тогда $\triangle AKD = \triangle ADC$ (сторона AD — общая, $AK = AC$, $\angle DAK = \angle DAC$), откуда $DK = DC$. Так как $AK + KB = BD + DC$, то $KB = DC$ и, значит, $\triangle BKD$ — равнобедренный. Поэтому $\angle KBD = \angle DBK$, откуда следует, что $\angle ADC = \angle C$ $(\angle B + \angle ADK + \angle ADC = \angle B + \angle A + \angle C = \pi$, но $\angle ADK = \angle ADC$ и $\angle A = \angle C)$. Итак, $AC = AD$. ■

1.378. r, $4r/3$ и $5r/3$.

1.379. □ Пусть F, D, E — точки касания вписанной окружности со сторонами $\triangle ABC$ (рис. Р.1.97). Положим $BD = x$; тогда $DA = m - x$. Так как $AD = AE$

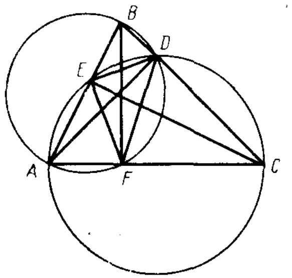


Рис: Р.1.95

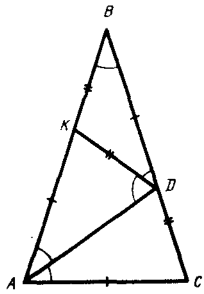


Рис. Р.1.96

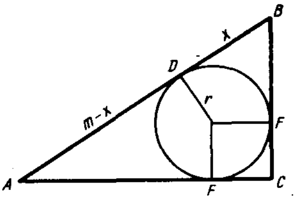


Рис. Р.1.97

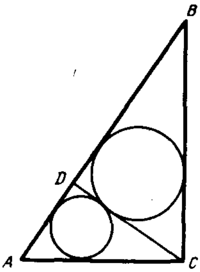


Рис. Р.1.98

и $BF=BD$ (касательные, проведенные к окружности из одной точки), то $AE=m-x$, $BF=x$. Учитывая, что $AB^2=BC^2+AC^2$, получаем уравнение $m^2=(x+r)^2+(m-x+r)^2$ или $x^2-mx+(mr+r^2)=0$, откуда $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$, $BC=x+r=\dfrac{2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$, $AC=m+r-x=\dfrac{2r+m\mp\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$. Задача имеет решение, если $m^2-4r(r+m)\geqslant 0$, т. е. если $r\leqslant\dfrac{m(\sqrt{2}-1)}{2}$. ■

1.380. 30 и 60°. **1.381.** 3 и 4.

1.382. □ Так как $\triangle DCA\sim\triangle DCB$ (рис. Р.1.98), то $AC:BC=r:R=3:4$ (r и R — данные радиусы вписанных окружностей). Отсюда $AC=\dfrac{3}{4}BC$ и, следовательно, $AB^2=AC^2+BC^2=\dfrac{25}{16}BC^2$. Пусть x — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда, учитывая, что $\triangle DBC\sim\triangle ABC$, имеем $BC:AB=R:x=4:5$, откуда $x=\dfrac{5}{4}\cdot 0{,}8=1$ (см). ■

1.383. 5. **1.384.** 18 см.

1.385. □ Поскольку $\triangle ABC\sim\triangle DBE$ (рис. Р.1.99), имеем $\dfrac{AC}{DE}=\dfrac{AB}{DB}$. Полагая $DE=x$ и учитывая, что $DB=m-\dfrac{x}{2}$, получим $\dfrac{2n}{x}=\dfrac{m+n}{m-\dfrac{x}{2}}$ и, следовательно,

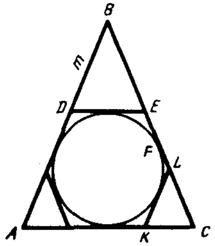


Рис. Р.1.99

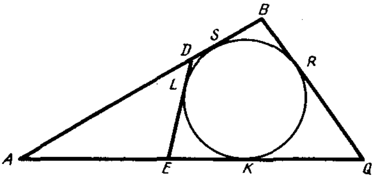


Рис. Р.1.100

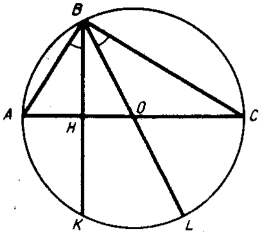


Рис. Р.1.101

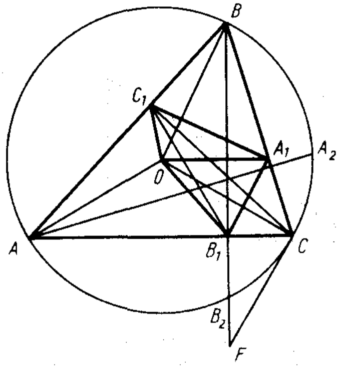


Рис. Р.1.102

$x=\dfrac{2mn}{m+2n}$. Далее, $\triangle ABC \sim \triangle KLC$, откуда $\dfrac{AB}{KL}=\dfrac{AC}{KC}$. Пусть $KL=y$ и $FL=z$ (F — точка касания). Тогда $\dfrac{m+n}{y}=\dfrac{2n}{n-y+z}$; так как $y+z=n$, то $\dfrac{m+n}{y}=\dfrac{n}{n-y}$ и, значит, $y=\dfrac{n(m+n)}{m+2n}$. ■

1.386. 175/48 см. **1.387.** $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/18$. **1.388.** $a\sqrt{3}(a-2b)/12$.

1.389. □ Пусть P — периметр $\triangle ADE$ (рис. Р.1.100); тогда $P=AD+DE+AE$, где $DE=DL+LE=DS+KE$. Значит, $P=AS+AK=AB+AC-BS-CK$. Поскольку $BS=BR$, $CK=CR$, окончательно получим $P=AB+AC-BC=16$ (см). ■

1.390. 6 или 4 см. **1.391.** n.

1.392. □ Так как $\angle BHC=90°$ (рис. Р.1.101), то $\cup AK+\cup BC=180°$; в силу условия, $\cup AK=\cup LC$, т. е. $\cup LC+\cup BC=180°$, и, значит, BL — диаметр окружности. Поскольку диаметр BL не перпендикулярен хорде, но делит ее пополам, заключаем, что AC — также диаметр. Итак, радиус окружности равен m. ■

1.394. ● Провести отрезок LM и рассмотреть вписанные углы LMK, LCK, MLK, MCK.

1.395. □ I способ. Соединим центр O описанной окружности с точками A_1, B_1, C_1 (рис. Р.1.102). Имеем $S_{\triangle ABC}=S_1+S_2+S_3$, где $S_1=S_{\triangle AB_1C_1}-S_{\triangle B_1OC_1}$, $S_2=S_{\triangle A_1BC_1}+S_{\triangle A_1OC_1}$, $S_3=S_{\triangle A_1B_1C}+S_{\triangle A_1OB_1}$. Проведем радиусы OA, OB, OC и установим, что они перпендикулярны соответствующим сторонам $\triangle A_1B_1C_1$. Для этого проведем касательную через точку C; тогда $OC\perp CF$. Покажем, что $\angle BFC=\angle BAA_2$. Действительно, $\cup B_2C=\cup A_2C$ (так как $\cup A_2C+\cup AB=\cup B_2C+\cup AB=180°$), откуда $\cup BC-\cup B_2C=\cup A_2B$. Но $\angle BAA_2=\angle BB_1A_1$ (см. решение задачи 1.375), а, следовательно, $\angle BFC=\angle BB_1A_1$, т. е. $A_1B_1\parallel CF$ и $OC\perp A_1B_1$. Аналогично доказываем, что $OA\perp B_1C_1$ и $OB\perp A_1C_1$. Теперь находим

$$S=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot R+\frac{1}{2}A_1C_1\cdot R+\frac{1}{2}A_1B_1\cdot R=pR.$$

II способ. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$B_1C_1{}^2=AC_1^2+AB_1^2-2AC_1\cdot AB_1\cos A=(AC\cos A)^2+(AB\cos A)^2-$$
$$-2(AC\cos A)(AB\cos A)\cos A=(BC\cos A)^2,$$

т. е. $B_1C_1=BC\cos A$. Аналогично получим $A_1C_1=AC\cos B$, $A_1B_1=AB\cos C$. Далее имеем

$2p = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = AB\cos C + BC\cos A + AC\cos B =$
$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$,

так как $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Преобразуем выражение в скобках:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C =$$
$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C = 2\sin C(\cos(A-B) + \cos C) =$$
$$= 2\sin C(\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 4\sin A\sin B\sin C,$$

откуда $2p = 4R\sin A\sin B\sin C$, т. е. $\frac{p}{2R} = \sin A\sin B\sin C$. Итак,

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R} = 2R^2\cdot\frac{p}{2R} = Rp. \blacksquare$$

1.396. $3136\pi/81$ см^2.

1.397. □ Искомая площадь выражается следующим образом (рис. P.103):

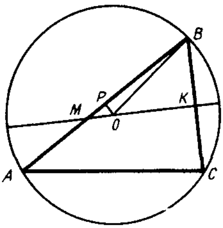


Рис. P.1.103

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot h$, где $h = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Но $BC = 2BK = 2\cdot\frac{1}{2}MB = MB = \frac{3}{5}AB$. Отсюда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{20}AB^2$. Таким образом, задача сводится к нахождению AB^2. Опустим на AB перпендикуляр OP и проведем радиус OB; тогда в ΔPOB имеем $PB^2 + PO^2 = 16$. Но $AP = PB = \frac{1}{2}AB$; учитывая, что $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, получаем $MP = \frac{1}{10}AB$. Далее из ΔMPO находим $PO = MP\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}MP = \frac{\sqrt{3}}{30}AB$. Наконец, из уравнения $\frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{300} = 16$ получим $AB^2 = \frac{1200}{19}$. Итак, искомая площадь равна $\frac{180\sqrt{3}}{19}$ см^2. $\blacksquare$

1.398. □ Пусть $R = O_1B$ и $r = O_2C$ — искомые радиусы (рис. P.1.104). Проведем касательную AM. Тогда $AM^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, откуда $AM = BM = MC = 5$ см, $MN = 3$ см. В ΔO_1BM и ΔO_1BN имеем $O_1M^2 = R^2 + 25$, $R^2 = 16 + (O_1M - 3)^2$; из этих равенств находим $O_1M = \frac{25}{3}$ см и, значит,

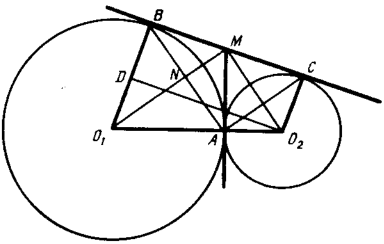


Рис. P.1.104

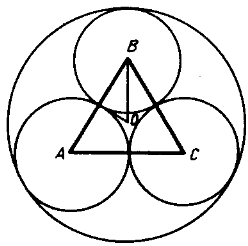


Рис. P.1.105

$R=\dfrac{20}{3}$ см. Наконец, проведем $O_2D \| BC$; в $\triangle O_1DO_2$ имеем $(R+r)^2=$ $=(R-r)^2+10^2$, откуда $r=\dfrac{15}{4}$ см. ■

1.400. 6 см.

1.401. □ Искомая площадь $S=S_{\triangle ABC}-3S_1$ где S_1 — площадь сектора, ограниченного дугой окружности и половинами сторон треугольника (рис. Р.1.105). Пусть x — радиус малой окружности. Тогда $S=\dfrac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}-$ $-3\cdot\dfrac{\pi x^2}{6}=x^2\sqrt{3}-\dfrac{\pi x^2}{2}=\dfrac{x^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$. Учитывая, что $AB=2x=OB\sqrt{3}$ и $OB=R-x$, получаем $x=\dfrac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=R(2\sqrt{3}-3)$. Итак,

$$S=\frac{R^2(2\sqrt{3}-3)^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}=\frac{3R^2(7-4\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{2}. \ ■$$

1.402. $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$. **1.403.** $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/9$.

1.404. □ Искомая площадь $S=\dfrac{(a+b)h}{2}$, где h — высота трапеции (рис. Р.1.106). Очевидно, что

$$a-b=\sqrt{d^2-h^2}+\sqrt{c^2-h^2}, \text{ откуда } (a-b)(\sqrt{d^2-h^2}-\sqrt{c^2-h^2})=d^2-c^2.$$

Перепишем эти уравнения так:

$$\begin{cases}\sqrt{d^2-h^2}+\sqrt{c^2-h^2}=a-b,\\ \sqrt{d^2-h^2}-\sqrt{c^2-h^2}=\dfrac{d^2-c^2}{a-b}.\end{cases}$$

Следовательно, $\sqrt{d^2-h^2}=\dfrac{1}{2}\left(a-b+\dfrac{d^2-c^2}{a-b}\right)$, т. е.

$$h^2=\frac{4d^2(a-b)^2-((a-b)^2+d^2-c^2)^2}{4(a-b)^2}.$$

Преобразуем числитель полученной дроби:

$$4d^2(a-b)^2-((a-b)^2+d^2-c^2)^2=$$
$$=(2d(a-b)+(a-b)^2+d^2-c^2)(2d(a-b)-(a-b)^2-d^2+c^2)=$$
$$=(2ad-2bd+a^2-2ab+b^2+d^2-c^2)(2ad-2bd-a^2+2ab-b^2-d^2+c^2)=$$

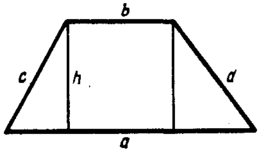


Рис. Р.1.106

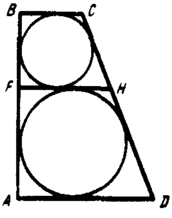


Рис. Р.1.107

$=((a-b+d)^2-c^2)(c^2-(a-b-d)^2)=$
$=(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(c-a+b+d).$

Итак, $S=\dfrac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(c-a+b+d)}$. ■

1.405. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. **1.406.** $a\sqrt{mn}\,\dfrac{m+a-n}{a-n}$.

1.408. □ Так как $AD\|FH\|BC$ (рис. Р.1.107), то $\dfrac{AF}{HD}=\dfrac{BF}{CH}=\dfrac{c}{d}$. Используя свойство описанных четырехугольников, имеем $BC+FH=BF+CH=\left(\dfrac{c}{d}+1\right)CH$, $AD+FH=AF+HD=\left(\dfrac{c}{d}+1\right)HD$, откуда $AD-BC=\dfrac{c+d}{d}(HD-CH)$. Заменив в последнем равенстве HD на $d-CH$ и $AD-BC$ на $\sqrt{d^2-c^2}$, получим $\sqrt{d^2-c^2}=c+d-2\cdot\dfrac{c+d}{d}\cdot CH$. Следовательно,

$$CH=\frac{c+d-\sqrt{d^2-c^2}}{2(c+d)}\cdot d,\quad BF=\frac{c+d-\sqrt{d^2-c^2}}{2(c+d)}\cdot c,$$

$$FH=BC+\frac{c+d-\sqrt{d^2-c^2}}{2(c+d)}\cdot\sqrt{d^2-c^2}=BC+\frac{\sqrt{c+d}-\sqrt{d-c}}{2}\sqrt{d-c}.$$

Находим основания; так как $BC=CH+BF-FH$, то $2BC=\dfrac{c+d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}(c+d-\sqrt{d^2-c^2})$, откуда $BC=\dfrac{(\sqrt{c+d}-\sqrt{d-c})^2}{4}$, $AD=\dfrac{(\sqrt{c+d}+\sqrt{d-c})^2}{4}$. ■

1.409. Боковую сторону. **1.410.** 1,6 см^2.

1.411. □ Проведем $OK\|AD$ (рис. Р.1.108). Тогда искомая площадь $S=2OK\cdot 10=20\,OK$. Так как $\triangle OLF\sim\triangle OFK$, то $\dfrac{OK}{OF}=\dfrac{OF}{OL}$, откуда $OK=\dfrac{OF^2}{OL}=\dfrac{25}{4}$ (см). Итак, $S=125$ см^2. ■

1.412. $2R^2/5$.

1.413. □ Искомая площадь $S=S_1-2S_2+2S_3+2S_4-2S_5$, где S_1 — площадь сектора ACE, S_2 — площадь сектора $BCOA$, S_3 — площадь $\triangle ABC$, S_4 — площадь сектора BOA, S_5 — площадь $\triangle BOA$ (рис. Р.1.109). Но $S_3=S_5$ и, следовательно,

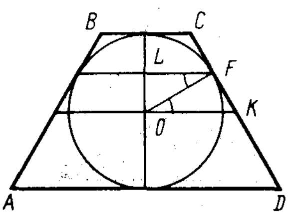


Рис. Р.1.108

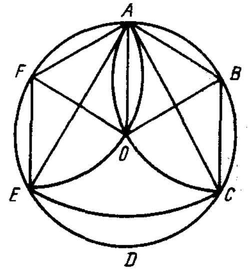


Рис. Р.1.109

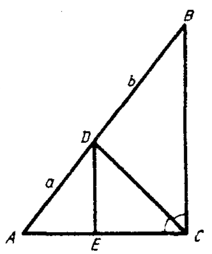


Рис. Р.1.110

$$S=S_1-2S_2+2S_4=\frac{1}{2}\cdot 3R^2\cdot\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{2\pi}{3}+2\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi R^2}{6}. \blacksquare$$

1.414. $a^2(3-3\sqrt{3}+\pi)/3$. **1.415.** $R^2(8\sqrt{3}-9)/4$.

1.416. □ Так как CD — биссектриса (рис. Р.1.110), то $\frac{AC}{a}=\frac{BC}{b}$. Но $AC^2+BC^2=(a+b)^2$ или $\frac{a^2}{b^2}BC^2+BC^2=(a+b)^2$, откуда $BC=\frac{(a+b)b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Проведем $DE\perp AC$; тогда $\frac{DE}{BC}=\frac{a}{a+b}$, откуда $DE=\frac{a}{a+b}BC=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Далее, $CD=DE\sqrt{2}$ и окончательно находим $S=CD^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. ■

1.417. $\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{6}}{6}$ и $5a+2a\sqrt{6}$ или $\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{6}}{6}$ и $5a-2a\sqrt{6}$. **1.418.** $\frac{2Rr}{R+r}$.

1.419. □ Очевидно, что площади треугольников AOB и AOD равны (рис. Р.1.111); то же верно и для треугольников BOC и COD. Следовательно, $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=0{,}5\,S_{ABCD}$, т. е. $S_{ABCO}=0{,}5\,S_{ABCD}$. Так как $S_{ABCO}=S_{\triangle ABC}+$ $+S_{\triangle AOC}$ и $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ACE}$, то $S_{ABCO}=S_{ABCE}=0{,}5\,S_{ABCD}$. ■

1.420. $(ad+bc):(ab+cd)$.

1.421. □ I способ. Очевидно, что искомая площадь $S=\frac{1}{2}ME\cdot KL$ (рис. Р.1.112). Найдем ME и $\frac{1}{2}KL$. Так как BD — медиана, то $MD=\frac{1}{3}BD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Заметим, что ED — радиус вписанной в $\triangle AMC$ окружности, поскольку AL и MD — биссектрисы углов этого треугольника. Следовательно,

$$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}(AM+MC+AC)\,ED=(AM+AD)\,ED=$$
$$=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}+\frac{a}{2}\right)ED=\frac{a(2\sqrt{3}+3)}{6}ED.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}AM\cdot MC\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Отсюда находим $ED=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}:\frac{a(2\sqrt{3}+3)}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{2(2\sqrt{3}+3)}=\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$ и, значит,

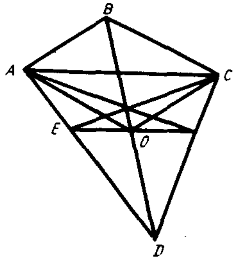


Рис. Р.1.111

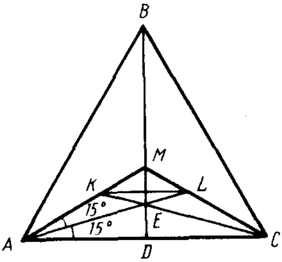


Рис. Р.1.112

$ME = MD - ED = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3}$. Далее, учитывая, что AL — биссектриса, имеем $\frac{ML}{LC} = \frac{AM}{AC}$ или $\frac{ML}{MC-ML} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{ML}{\frac{a\sqrt{3}}{3} - ML} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $ML = \frac{a}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}$. Наконец, так как $\angle MLK = 30°$, то $\frac{1}{2}KL = \frac{\sqrt{3}}{2}ML = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}$. Итак,

$$S_{KMLE} = ME \cdot \frac{1}{2}KL = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3} \cdot \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12}. \blacksquare$$

II способ. Искомая площадь выражается так: $S = S_{\Delta KMC} - S_{\Delta ELC}$. Заметим, что $S_{\Delta AKC} : S_{\Delta KMC} = AK : KM$, поскольку эти треугольники имеют равные высоты, проведенные из точки C. Учитывая, что CK — биссектриса, имеем $AK : KM = AC : CM = \sqrt{3}$, т. е. $S_{\Delta AKC} = \sqrt{3}\,S_{\Delta KMC}$. Но $S_{\Delta AKC} + S_{\Delta KMC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$, откуда $S_{\Delta KMC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12(\sqrt{3}+1)} = \frac{a^2(3-\sqrt{3})}{24}$.

Далее, $\Delta AKC \sim \Delta ELC$ ($\angle AKC = \angle ELC$, $\angle ACK = \angle ECL$) и, следовательно, $\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta ELC}} = \left(\frac{AC}{EC}\right)^2$. Отсюда находим

$$S_{\Delta ELC} = \left(\frac{EC}{AC}\right)^2 S_{\Delta AKC} = \left(\frac{EC}{2DC}\right)^2 S_{\Delta AKC} = \frac{S_{\Delta AKC}}{4\cos^2 15°} = \frac{S_{\Delta AKC}}{2(1+\cos 30°)} =$$

$$= \frac{S_{\Delta AKC}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})\,S_{\Delta AKC} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})\,S_{\Delta KMC} = (2\sqrt{3}-3)\,S_{\Delta KMC}.$$

Итак, окончательно получим

$$S = S_{\Delta KMC} - S_{\Delta ELC} = S_{\Delta KMC} - (2\sqrt{3}-3)\,S_{\Delta KMC} =$$

$$= (1 - 2\sqrt{3} + 3)\,S_{\Delta KMC} = \frac{a^2(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{12} = \frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12}. \blacksquare$$

1.422. $9R^2/4$.

1.423. □ Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольников, отсекаемых сторонами шестиугольника от ΔABC (рис. Р.1.113). Покажем, что $S_1 = S_2 = S_3$. Так как каждый из отсеченных треугольников подобен ΔABC (пропорциональны две стороны, содержащие общий угол), то $\frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} = \frac{S_3}{S} = \frac{m^2}{(2m+n)^2}$. Следовательно, площадь шестиугольника равна

$$S - \frac{3m^2}{(2m+n)^2} \cdot S = S\left(1 - \frac{3m^2}{(2m+n)^2}\right). \blacksquare$$

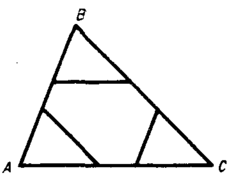


Рис. Р.1.113

1.424. $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. **1.425.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi-3}}$.

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

2.001. □ По условию, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=30°$ (рис. Р.2.1); следовательно, $BC=\frac{c}{2}$, $AC=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, откуда $S_{осн}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. Проведем SO так, чтобы $AO=OB$. Тогда O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, SO — высота пирамиды (см. «Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды», п. 1°). В $\triangle ASO$ имеем $\angle SAO=45°$ и, значит, $SO=AO=\frac{c}{2}$. Итак, $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$. ■

2.002. $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. **2.003.** 6 см^3. **2.004.** 108 см^3.

2.005. □ Согласно условию, $AB=BC=a$ (рис. Р. 2.2); поэтому $BH=a^2-\frac{b^2}{4}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$. Отсюда $S_{осн}=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2-b^2}$. Проведем высоту SO. Поскольку все ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, точка O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Пусть радиус этой окружности равен R. Тогда $OB=R=\frac{a^2b}{4S_{осн}}=\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. В $\triangle SOB$ имеем $OB=\frac{SB}{2}$; значит, $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{4OB^2-OB^2}=OB\sqrt{3}=$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2-b^2}}=\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}. \blacksquare$$

2.006. $\frac{(l^2-h^2)h\sqrt{3}}{4}$. **2.007.** $\frac{\sqrt{3}\,h^2\sqrt{9m^2-h^2}}{27}$. **2.008.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ см^3.

2.009. □ Проведем $BD\perp AC$ (рис. Р. 2.3). Обозначим сторону основания через a.

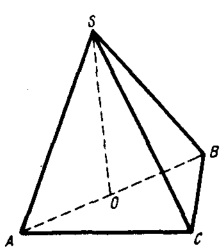


Рис. Р.2.1

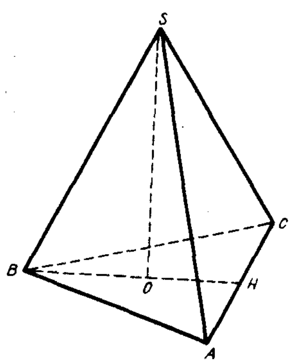


Рис. Р.2.2

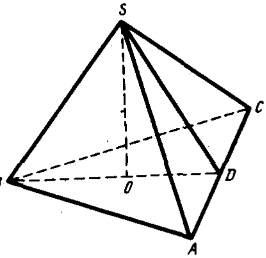


Рис. Р.2.3

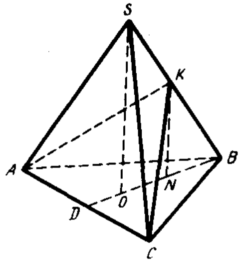


Рис. Р.2.4

Так как пирамида правильная, то $OD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AD=DC=\frac{a}{2}$, $S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Выразим a через h. В ΔSAC имеем $SA=SC$, $\angle CSA=90°$, откуда $\angle ASD=45°$ и $SD=AD=\frac{a}{2}$. Тогда $h=SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{36}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$ и, следовательно, $a=h\sqrt{6}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{6h^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{h^3\sqrt{3}}{2}.\ \blacksquare$$

2.010. $a^3\sqrt{2}/12$. **2.011.** $R^3\sqrt{6}/4$. **2.012.** 3.

2.013. □ Искомый объем найдем по формуле $V_{KABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot KN$ (рис. Р. 2.4), где $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $SO\parallel KN$, то $BN:NO=BK:KS=2:1$, откуда $BN=\frac{2}{3}BO$. Но $BO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е. $BN=\frac{2a\sqrt{3}}{9}$ и, значит, $KN=\sqrt{BK^2-BN^2}=$
$=\sqrt{\frac{4a^2}{9}-\frac{4a^2}{27}}=\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. Итак, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2a\sqrt{6}}{9}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. ■

2.014. 60,375 см^3. **2.015.** $2S\sqrt{S}/3$. **2.016.** $l^3\sqrt{3}/12$.

2.017. □ По условию, $BD=b$, $\angle AOB=60°$ (рис. Р. 2.5); отсюда легко найти, что $AB=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Значит, $S_{\text{осн}}=AB\cdot AD=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $\angle SAO=\angle SBO=\angle SCO=\angle SDO=45°$, то SO — высота пирамиды и $SO=\frac{b}{2}$. Итак, $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot SO=\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$. ■

2.018. $4(8/3)^3$ м^3. **2.019.** $3l^3/16$. **2.020.** $6\sqrt{1833}/47$. **2.021.** $3h^2\sqrt{3}/2$.

2.022. □ Пусть a — сторона основания; тогда $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $a=\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Искомая боковая поверхность выражается так: $S_{\text{бок}}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot SD$ (рис. Р.2.6). Но $SD=DC=\frac{a}{2}$ и, следовательно, $S_{\text{бок}}=\frac{3a^2}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4S}{\sqrt{3}}=S\sqrt{3}$. ■

2.023. $\sqrt{3}$. **2.024.** $\sqrt{47}/24$ см^3. **2.025.** $3a^2\sqrt{3}/4$. **2.026.** $3a^2/2$.

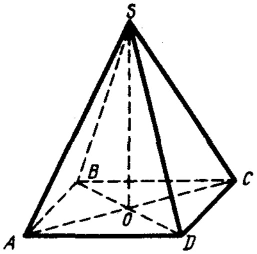


Рис. Р.2.5

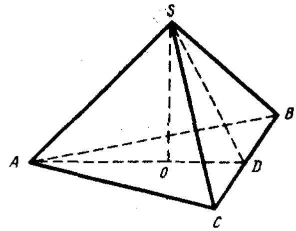


Рис. Р.2.6

2.027. □ Так как ребро куба равно a, то сторона основания пирамиды $SABCD$ равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. Р. 2.7). Учитывая, что $OK=\frac{1}{2}AD=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, найдем апофему пирамиды: $SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Значит,

$$S_{бок}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a^2}{2},\ S_{полн}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+S_{бок}=2a^2.$$ ■

2.028. $a^2(\sqrt{5}+1)$. **2.029.** $\frac{a^2(1+\sqrt{7})}{2}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **2.030.** $\frac{3}{2}\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$.

2.031. □ Так как $\angle SKO=60°$ (рис. Р. 2.8), то $OK=\frac{1}{2}SK=\frac{h}{2}$. Основание пирамиды — правильный шестиугольник, поэтому $\angle KOD=30°$ и $KD=\frac{1}{2}OD$. Тогда $OK^2=OD^2-KD^2=4KD^2-KD^2=3KD^2$, т. е. $KD=\frac{h\sqrt{3}}{6}$, $DE=2KD=\frac{h\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, $S_{осн}=\frac{6DE^2\sqrt{3}}{4}=\frac{h^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{бок}=3DE\cdot h=h^2\sqrt{3}$. Итак, $S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}=\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. ■

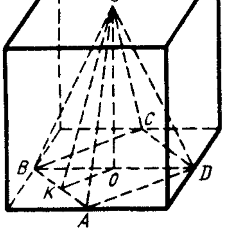


Рис. Р.2.7

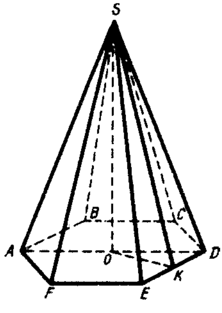


Рис. Р.2.8

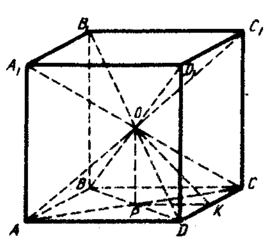


Рис. Р.2.9

2.032. $21\sqrt{55}$ см^3, 84 см^2. **2.033.** $\frac{a^3}{24}, \frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. **2.034.** $9\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см^2.

2.035. □ Так как при указанном построении образовалось 6 одинаковых пирамид (рис. Р.2.9), то каждая из них имеет объем $V=\frac{a^3}{6}$ и полную поверхность $S_{\text{полн}}=a^2+4\cdot\frac{1}{2}a\cdot OK$. Но $OK=\sqrt{OP^2+PK^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, откуда

$S_{\text{полн}}=a^2+a^2\sqrt{2}=a^2(1+\sqrt{2})$. ■

2.036. $3a^2$, $a^3\sqrt{3}/6$. **2.037.** $3a^2$, $a^3\sqrt{2}/3$.

2.038. □ По условию, $SC=l$, $\angle SBC=90°$, $\angle SCB=45°$ (рис. Р. 2.10), откуда $SB=BC=\frac{l}{\sqrt{2}}$. Находим $V=\frac{1}{3}BC^2\cdot SB=\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Полная поверхность выразится так: $S_{\text{полн}}=S_{\text{осн}}+2S_{\Delta SAB}+2S_{\Delta SAD}$, поскольку $S_{\Delta SAB}=S_{\Delta SBC}$, $S_{\Delta SAD}=S_{\Delta SCD}$. Но $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB\cdot SB=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{l^2}{4}$, $S_{\Delta SAD}=\frac{1}{2}AD\cdot SA=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\sqrt{2}}\cdot l=\frac{l^2\sqrt{2}}{4}$. Итак, $S_{\text{полн}}=\frac{l^2}{2}+\frac{l^2}{2}+\frac{l^2\sqrt{2}}{2}=\frac{l^2(2+\sqrt{2})}{2}$. ■

2.039. $\frac{8r^3\sqrt{3}}{3}$, $24r^2$. **2.040.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$. **2.041.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$.

2.042. □ Искомый объем выражается формулой $V=\frac{h}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, где $S_1=196$ см^2, $S_2=100$ см^2. Найдем $h=B_1K$ (рис. Р. 2.11). Имеем $B_1K=\sqrt{B_1D^2-KD^2}$. Так как BB_1D_1D — равнобедренная трапеция, то $BK=\frac{1}{2}(BD-B_1D_1)=\frac{1}{2}(14\sqrt{2}-10\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ (см) и $KD=BD-BK=12\sqrt{2}$ (см), т. е. $h=\sqrt{18^2-(12\sqrt{2})^2}=6$ (см). Итак, $V=\frac{6}{3}(196+100+140)=872$ (см^3). ■

2.043. 26,25 дм^2. **2.044.** $a^3\sqrt{2}/3$. **2.045.** $a^2\sqrt{3}$.

2.046. □ Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1D равно расстоянию от этого ребра до плоскости BB_1D_1D, т. е. длине отрезка A_1E (рис. Р. 2.12). Пусть ребро куба равно a; тогда из ΔA_1ED_1 находим $2d^2=a^2$, откуда $a=d\sqrt{2}$. Итак, $V=a^3=2d^3\sqrt{2}$. ■

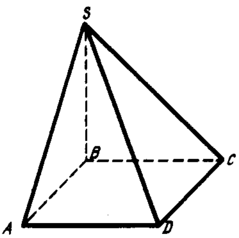


Рис. Р.2.10

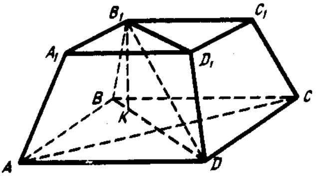


Рис. Р.2.11

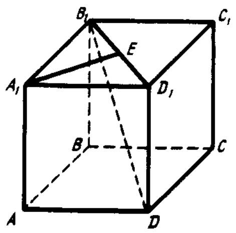


Рис. Р.2.12

2.047. 144 см³. **2.048.** $2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)}$. **2.049.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$.

2.050. □ Искомый объем $V=S_{осн}h$, где $S_{осн}=AB\cdot AD$ (рис. Р. 2.13), h — высота параллелепипеда. По условию, BB_1D_1D — квадрат и, значит, $h=\sqrt{Q}$. Найдем AB и AD. Так как $AB:AD=m:n$, то $AD=\frac{n}{m}AB$. В $\triangle ABD$ имеем $AB^2+AD^2=BD^2$, т. е. $AB^2+\frac{n^2}{m^2}AB^2=Q$; следовательно, $AB=\frac{m\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $AD=\frac{n\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Итак, $V=AB\cdot AD\cdot h=\frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. ■

2.051. $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. **2.052.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **2.053.** 3 см.

2.054. □ Искомую площадь найдем по формуле $S=V/h$, где V — объем листа, h — его толщина (при этом форма листа значения не имеет). Так как объемы обоих тел равны, то $V=80\cdot 20\cdot 5=8000$ (см³). Итак, $S=8000/0{,}1=80000$ см² $=8$ м². ■

2.055. $\frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$. **2.056.** $\frac{abS}{4(a+b)}$. **2.057.** $4\sqrt{3}$ см³.

2.058. □ Имеем $V=S_{осн}h$, где $S_{осн}=Q$ (по условию); таким образом, следует найти h. Так как $ABCD$ — ромб, то $S_{осн}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ (рис. Р. 2.14); учитывая, что $AC\cdot h=S_1$, $BD\cdot h=S_2$, находим $AC=\frac{S_1}{h}$, $BD=\frac{S_2}{h}$. Отсюда получаем $2Q=\frac{S_1}{h}\cdot\frac{S_2}{h}$, т. е. $h=\sqrt{\frac{S_1S_2}{2Q}}$. Итак, $V=\sqrt{\frac{S_1S_2Q}{2}}$. ■

2.059. $2Q\sqrt{2}$. **2.060.** $2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$. **2.061.** $a^3/8$.

2.062. □ Обозначим сторону основания через a. Тогда $S_{бок}=3ah$. Проведем высоту O_1O (рис. Р. 2.15). В $\triangle DOO_1$ имеем $\angle OO_1D=30°$, поэтому $O_1D=2OD$ и $4OD^2-OD^2=h^2$, откуда $OD=h\sqrt{3}/3$. С другой стороны, $OD=a\sqrt{3}/6$ и, следовательно, $a=2h$. Итак, $S_{бок}=3\cdot 2h\cdot h=6h^2$. ■.

2.063. $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. **2.064.** $\sqrt{3}\left(2Q+\frac{a^2}{2}\right)$.

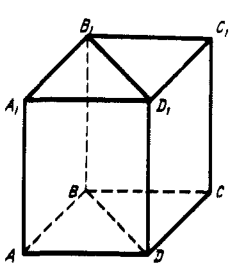


Рис. Р.2.13

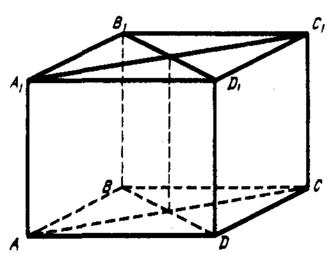


Рис. Р.2.14

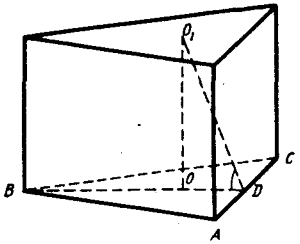


Рис. Р.2.15

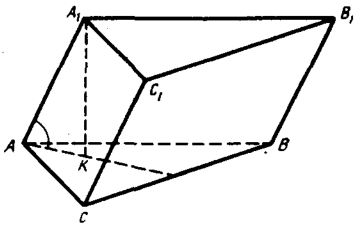


Рис. Р.2.16

2.065. □ Проведем A_1K перпендикулярно плоскости ABC (рис. Р. 2.16); тогда $V=S_{\Delta ABC}\cdot A_1K$, где $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая, что $\angle A_1AK=60°$, находим $A_1K=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^3}{8}$. ■

2.066. $\frac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)(N+P-M)}$. **2.067.** $\frac{Sd}{2}$. **2.068.** $a^3\sqrt{2}$.

2.069. □ Пусть сторона основания призмы равна a (рис. Р. 2.17). Тогда сторона основания пирамиды равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а площадь этого основания равна $\frac{a^2}{2}$. Обозначим объем призмы через V_1; имеем $V_1=a^2h$, где h — высота призмы. Так как по условию объем пирамиды равен V, то $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot h$. Но $a^2h=V_1$, откуда $V_1=6V$. ■

2.070. $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$. **2.071.** $18\sqrt{2}$ дм³. **2.072.** $a^2(4+\sqrt{3})$.

2.073. □ Пусть высота призмы равна h. Так как $ABCD$ — ромб, то $S_{\text{бок}}=4AB\cdot h$ (рис. Р. 2.18). Далее, $AC\perp BD$ (как диагонали ромба) и, следовательно, $AB=\sqrt{\frac{BD^2}{4}+\frac{AC^2}{4}}=\frac{\sqrt{BD^2+AC^2}}{2}$. Тогда $S_{\text{бок}}=2\sqrt{BD^2+AC^2}\cdot h=$ $=2\sqrt{BD^2\cdot h^2+AC^2\cdot h^2}$. Но $BD\cdot h=P$, $AC\cdot h=Q$ (по условию). Итак, $S_{\text{бок}}=2\sqrt{P^2+Q^2}$. ■

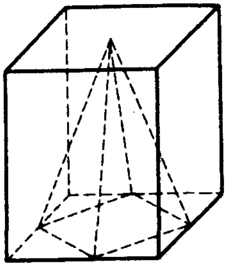


Рис. Р.2.17

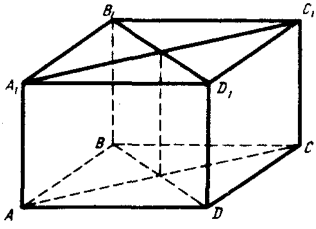


Рис. Р.2.18

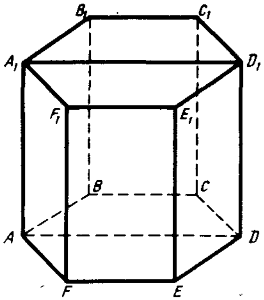


Рис. Р.2.19

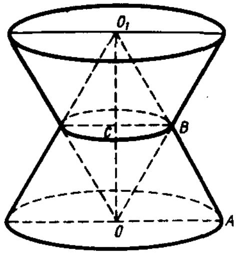


Рис. Р.2.20

2.074. $\dfrac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$. **2.075.** $\dfrac{9d^3}{64}$.

2.076. □ Пусть $AB=a$ (рис. Р. 2.19); тогда искомый объем $V=6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$, где $h=3$ см — высота призмы. Остается найти a. По условию, боковая поверхность призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 30 см^2. Но $S_{\text{бок}}=(3AB+AD)\,h$; здесь $AD=2a$ (как диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника). Следовательно, $5a\cdot 3=30$, откуда $a=2$ (см). Итак, $V=6\cdot\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3=18\sqrt{3}$ (см^3). ■

2.077. $V=CS$. **2.078.** $N\sqrt{\pi M}/2$, $\pi N+2M$. **2.079.** $\pi R^3\sqrt{15}/3$.

2.080. □ Пусть радиус основания конуса равен r, а его образующая равна l. Тогда площадь развертки $S=\dfrac{1}{2}\,l^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi l^2}{3}$, откуда $l=\sqrt{\dfrac{3S}{\pi}}$. Но $S=\pi rl=\pi r\sqrt{\dfrac{3S}{\pi}}$ и, следовательно, $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$. Объем конуса найдем по формуле $V=\dfrac{1}{3}\,\pi r^2h$, где $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{\dfrac{3S}{\pi}-\dfrac{S}{3\pi}}=2\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi S}{3\pi}\cdot 2\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}=\frac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}.$$ ■

2.081. $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **2.082.** $\dfrac{Sr}{3}$.

2.084. □ Пусть $V_{\text{цил}}$ — объем цилиндра, $V_{\text{кон}}$ — объем конуса, r — радиус основания, h — высота; тогда $V_{\text{цил}}=\pi r^2h$, $V_{\text{кон}}=\dfrac{1}{3}\,\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\,V_{\text{цил}}$. Но $S_{\text{бок. цил}}=2\pi rh$, откуда $\dfrac{1}{3}\,S_{\text{бок. цил}}\,r=\dfrac{2}{3}\,\pi r^2h=\dfrac{2}{3}\,V_{\text{цил}}$. Таким образом, $V_{\text{цил}}-\dfrac{1}{3}\,S_{\text{бок. цил}}\,r=\dfrac{1}{3}\,V_{\text{цил}}=V_{\text{кон}}$. ■

2.085. $7V/27$. **2.086.** $\sqrt{5}/5$.

2.087. □ Пусть радиус основания каждого из данных конусов равен R, а высота равна H (рис. Р. 2.20). Тогда объем каждого конуса $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Общая часть состоит из двух конусов; ее объем $V_2=\frac{2}{3}\pi r^2h$, где r — радиус основания, h — высота. Рассмотрим осевое сечение фигуры. Так как $\Delta O_1OA \sim \Delta O_1CB$, то $AO:BC=O_1O:O_1C$ или $R:r=H:h$. Но $h=\frac{H}{2}$, откуда следует, что $r=\frac{R}{2}$. Итак, $V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{R^2}{4}\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{12}\pi R^2H=\frac{1}{4}V_1$. ■

2.088. 216π см^2, 448π см^3. **2.089.** $2\pi(\sqrt{2}+1)a^2$, $2\pi a^3/3$.

2.090. □ Пусть общая высота конуса и пирамиды равна H (рис. Р. 2.21). Обозначим объемы конуса и пирамиды через V_1 и V_2, а их боковые поверхности — через S_1 и S_2; тогда $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H$, $S_1=\pi Rl$, где l — образующая конуса. Найдем V_2 и S_2. Так как периметр основания пирамиды равен $2p$, а основание конуса — вписанная в основание пирамиды окружность, то площадь основания пирамиды равна pR, откуда $V_2=\frac{1}{3}pRH$, $S_2=pl$ (высота любой грани равна l). Итак, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}\pi R^2H:\frac{1}{3}pRH=\frac{\pi R}{p}$, $\frac{S_1}{S_2}=\pi Rl:pl=\frac{\pi R}{p}$. ■

2.091. 24π см^3. **2.092.** $\frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$.

2.093. □ Изобразим осевое сечение конуса, которое пройдет через центр шара. Так как диаметр основания конуса равен образующей, то в сечении получим правильный треугольник, вписанный в окружность (рис. Р. 2.22). Пусть радиус шара равен R; тогда $AB=R\sqrt{3}$, $AD=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Обозначим полную поверхность конуса через S_1, а поверхность шара — через S_2. Имеем $S_1=\pi\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\sqrt{3}+\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\pi R^2$, $S_2=4\pi R^2$, откуда $S_1:S_2=9:16$. ■

2.094. $S_1:S_2=V_1:V_2=4:9$.

2.095. □ Так как радиус шара равен R, то объемы обоих тел равны $\frac{4}{3}\pi R^3$. Пусть r — радиус основания конуса; тогда, по условию, $S_{бок}=3\pi r^2$. С другой стороны, $S_{бок}=\pi rl$, где l — образующая конуса. Поэтому $l=3r$, откуда

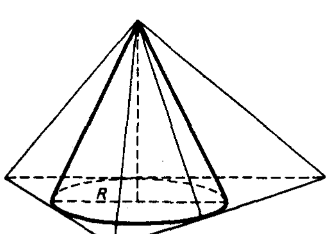


Рис. Р.2.21

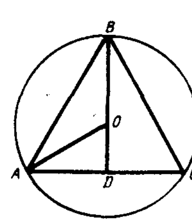


Рис. Р.2.22

$h=\sqrt{l^2-r^2}=2r\sqrt{2}$, т. е. $r=\frac{\sqrt{2}}{4}h$. Находим $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2}{16}h^2\cdot h=$ $=\frac{1}{24}\pi h^3$. Наконец, из равенства $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{24}\pi h^3$ получим $h=2R\sqrt[3]{4}$. ■

2.096. 3 : 2 : 1. **2.097.** $1152\pi/125$ см^3.

2.098. □ Так как объемы конуса и полушара равны, то $V=\frac{2}{3}\pi R^3$; с другой стороны, $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — высота конуса, т. е. $h=2R$. Имеем $S_{бок}=\pi Rl$, где $l=\sqrt{R^2+h^2}=R\sqrt{5}$. Итак, $S_{бок}=\pi R^2\sqrt{5}$. ■

2.099. $4\pi h^3/81$.

2.100. □ Пусть радиус шара равен R, ребро куба равно a; тогда $R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$, откуда $a=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Обозначим объемы и поверхности шара и куба соответственно через V_1, V_2 и S_1, S_2. Имеем $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2=a^3=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$, $S_1=4\pi R^2$, $S_2=6a^2=8R^2$, откуда $V_1 : V_2=\pi\sqrt{3} : 2$, $S_1 : S_2=\pi : 2$. ■

2.101. $64\pi : 27$. **2.102.** 600π см^2, 1000π см^3.

2.103. □ Искомый объем $V=V_{цил}-2V_{кон}$, а поверхность $S=S_{цил}+2S_{кон}$, где $V_{цил}$, $V_{кон}$ и $S_{цил}$, $S_{кон}$ — объемы и боковые поверхности цилиндра и конуса соответственно (рис. Р. 2.23). Имеем $V_{цил}=\pi r^2 h$, где $r=CK$, $h=AD=3$ см. Так как $DK=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}$ (см), а $CD=2DK=1$ (см), то $CK=$ $=\sqrt{CD^2-DK^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Следовательно, $V_{цил}=\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot 3=\frac{9\pi}{4}$ (см^3), $V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}$ (см^3), откуда $V=\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi$ (см^3). Наконец, находим $S_{цил}=2\pi rh=2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3=3\pi\sqrt{3}$ (см^2), $S_{кон}=\pi rl=\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (см^2), откуда $S=3\pi\sqrt{3}+\pi\sqrt{3}=4\pi\sqrt{3}$ (см^2). ■

2.104. $4\pi Q$.

2.105. □ Пусть сторона ромба равна a, а его диагонали равны $2d_1$ и $2d_2$ (рис.

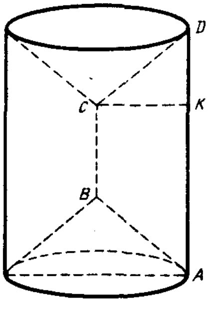


Рис. Р.2.23

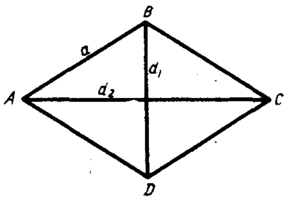


Рис. Р.2.24

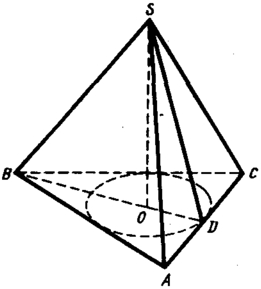


Рис. Р.2.25

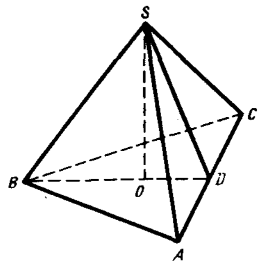


Рис. Р.2.26

Р. 2.24). При вращении получается тело, состоящее из двух конусов. Обозначим объем и поверхность тела вращения вокруг диагонали AC через V_{AC} и S_{AC}, а вокруг диагонали BD — через V_{BD} и S_{BD}. Тогда $V_{AC}=\frac{2}{3}\pi d_1^2 d_2$, $S_{AC}=2\pi a d_1$, $V_{BD}=\frac{2}{3}\pi d_2^2 d_1$, $S_{BD}=2\pi a d_2$. Итак, $\frac{V_{AC}}{V_{BD}}=\frac{(2/3)\pi d_1^2 d_2}{(2/3)\pi d_2^2 d_1}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{S_{AC}}{S_{BD}}$, что и требовалось установить. ■

2.106. $\frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2-b^2}}$.

2.107. □ Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot SO$ (рис. Р. 2.25). Пусть сторона основания равна a; тогда $S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $OD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По условию, $\pi OD^2=OD$ или $OD=\frac{1}{\pi}$, откуда $\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\pi}$, т. е. $a=\frac{6}{\pi\sqrt{3}}$ и $S_{\text{осн}}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}$. Учитывая, что $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}}=3$, получим $S_{\text{бок}}=3S_{\text{осн}}=\frac{9\sqrt{3}}{\pi^2}$. С другой стороны, $S_{\text{бок}}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot SD=\frac{9SD}{\pi\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\frac{9\sqrt{3}}{\pi^2}=\frac{9SD}{\pi\sqrt{3}}$, т. е. $SD=\frac{3}{\pi}$. Из ΔSOD находим $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{\frac{9}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Итак, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$. ■

2.108. $4m^2\sqrt{3}$. **2.109.** $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})$.

2.110. □ По условию, $BS\perp SA$ и $BS\perp SC$ (рис. Р. 2.26), т. е. BS — перпендикуляр к грани SAC и $SD=d$. Следовательно, искомый объем $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ACS}\cdot BS$. В ΔSAD имеем $\angle SDA=90°$, $\angle ASD=45°$, откуда $AD=SD=d$ и $S_{\Delta ACS}=d^2$. Наконец, в ΔBSD имеем $\angle BSD=90°$, $BD=2d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=d\sqrt{3}$, откуда $BS=\sqrt{BD^2-SD^2}=\sqrt{3d^2-d^2}=d\sqrt{2}$. Итак, $V=\frac{1}{3}d^2\cdot d\sqrt{2}=\frac{1}{3}d^3\sqrt{2}$. ■

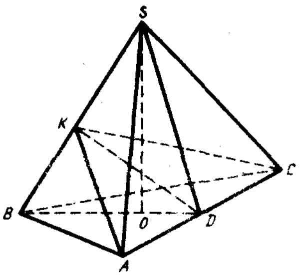


Рис. Р.2.27

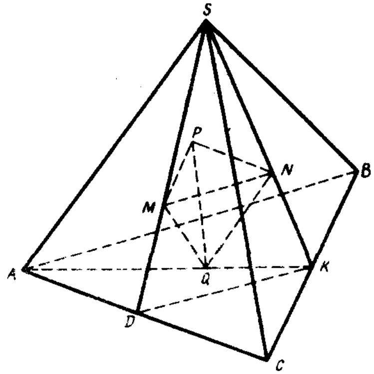


Рис. Р.2.28

2.111. $a^3/128$. **2.112.** $\sqrt{6}$.

2.113. □ Полную поверхность пирамиды найдем по формуле $S_{\text{полн}}=$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot SD$ (рис. Р. 2.27). Так как $\triangle BOS\sim\triangle BKD$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий угол), то $\frac{BD}{BS}=\frac{BK}{BO}$ или $\frac{a\sqrt{3}}{2}:BS=BK:\frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е. $a^2=2BK\cdot BS$. По условию, $\frac{BK}{KS}=\frac{m}{n}$, откуда $KS=\frac{n}{m}BK$, $BS=BK+KS=$ $=\frac{m+n}{m}BK$, $BK=\frac{m}{m+n}BS$. Значит, $a^2=\frac{2m}{m+n}BS^2$, т. е. $BS^2=\frac{(m+n)a^2}{2m}$. В $\triangle SOD$ имеем $SD^2=SO^2+OD^2$; отсюда, учитывая, что $SO^2=BS^2-BO^2$, находим $SD^2=\frac{(m+n)a^2}{2m}-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{12}=\frac{3ma^2+6na^2}{12m}=\frac{(m+2n)a^2}{4m}$. Итак,

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{m+2n}{m}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right).\ ■$$

2.114. $\sqrt{6}$. **2.115.** $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$.

2.116. □ Обозначим объемы и поверхности данного и нового тетраэдров соответственно V_1, S_1 и V_2, S_2. Пусть $AB=a$ (рис. Р. 2.28); тогда $DK=a/2$. Так как $\triangle DSK\sim\triangle MSN$, то $DK:MN=SD:SM=3/2$, откуда $MN=a/3$. Итак, $V_1:V_2=a^3:(a/3)^3=27:1$, $S_1:S_2=a^2:(a/3)^2=9:1$. ■

2.117. $a^3\sqrt{2}/12$. **2.118.** $2PQ/(3a)$.

2.119. □ Пусть $SA=x$, $SB=y$, $SC=z$ (рис. Р. 2.29). Из взаимной перпендикулярности боковых граней следует взаимная перпендикулярность этих ребер, откуда искомый объем $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ASB}\cdot SC=\frac{1}{6}xyz$. По условию, $\frac{1}{2}xy=a^2$, $\frac{1}{2}xz=b^2$, $\frac{1}{2}yz=c^2$. Перемножив эти равенства, получим $\frac{1}{8}x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$. Итак, $V=\frac{1}{6}abc\sqrt{8}=\frac{1}{3}abc\sqrt{2}$. ■

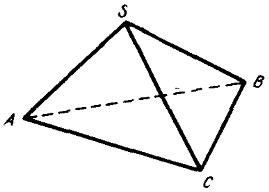


Рис. Р.2.29

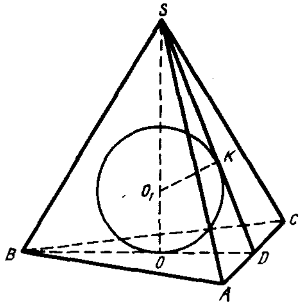


Рис. Р.2.30

2.120. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{4b^2-2a^2}$, $0<a<b\sqrt{2}$. **2.121.** $1:\sqrt{2}$.

2.122. □ Для отыскания радиуса шара проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему (рис. Р. 2.30). Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны a, то $SD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из ΔSOD находим $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Обозначим радиус шара через r; тогда $SO_1=SO-r$. В ΔSKO_1 имеем $O_1K^2=SO_1^2-SK^2$ или $r^2=(SO-r)^2-\frac{a^2}{3}$, откуда $r^2=\frac{2a^2}{3}-\frac{2ar\sqrt{6}}{3}+r^2-\frac{a^2}{3}$, т. е. $r=\frac{a}{2\sqrt{6}}$. Итак, $S_{\text{шара}}=4\pi r^2=\frac{\pi a^2}{6}$. ■

2.123. $64\pi/9$ см^2. **2.124.** $a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}/6$.

2.125. □ Искомая боковая поверхность выражается так: $S_{\text{бок}}=2AB\cdot SM$ (рис. Р. 2.31). Пусть $AB=a$, $SO=h$; найдем соотношение между a и h. Проведем $AK\perp SB$, $CK\perp SB$; так как, по условию, $\angle AKC=120°$, то $\angle AKO=60°$ и из ΔAKO получим $OK=AO\ \mathrm{ctg}\,60°=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$. Далее, в прямоугольном треугольнике SOB имеем $OK\perp SB$, поэтому $SB:SO=SO:SK$, т. е. $h^2=$

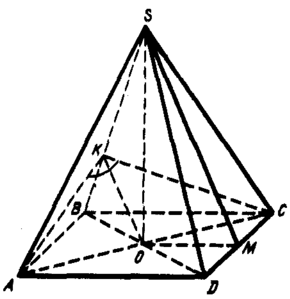


Рис. Р.2.31

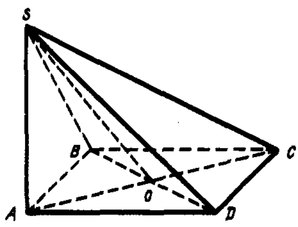


Рис. Р.2.32

$=SB\cdot SK$. Из $\triangle SKO$ следует что $SK^2=SO^2-OK^2=h^2-\frac{a^2}{6}$, откуда $SB^2=\frac{6h^4}{6h^2-a^2}$. С другой стороны, из $\triangle SOB$ находим $SB^2=h^2+\frac{a^2}{2}$. Таким образом, $h^2+\frac{a^2}{2}=\frac{6h^4}{6h^2-a^2}$ или $12h^4-2a^2h^2+6a^2h^2-a^4=12h^4$, откуда $h=\frac{a}{2}$ и $SM=\frac{a}{\sqrt{2}}$. По условию, $\frac{1}{2}AC\cdot SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot h=S$, т. е. $S=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Учитывая, что $S_{бок}=2AB\cdot SM=2a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=a^2\sqrt{2}$, окончательно получим $S_{бок}=4S$. ■

2.126. $\frac{1}{9}S\sqrt{S}\sqrt[4]{27}$. **2.127.** $\frac{1}{3}S\sqrt{S}$.

2.128. □ Искомый объем $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SA$, где $S_{осн}=\frac{1}{2}d_1d_2$ (рис. Р. 2.32). В $\triangle SAO$ имеем $SA=\sqrt{SO^2-AO^2}$, причем $AO=\frac{d_1}{2}$, а $SO=\frac{2Q}{d_2}$, так как по условию $\frac{1}{2}d_2\cdot SO=Q$. Следовательно, $SA=\sqrt{\frac{4Q^2}{d_2^2}-\frac{d_1^2}{4}}=\frac{\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}}{2d_2}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\frac{\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}}{2d_2}=\frac{d_1}{12}\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}.$$ ■

2.129. 200 см^3.

2.130. □ По условию, $AB=8$ м, $AD=10$ м, $BD=6$ м (рис. Р. 2.33). Из равенства $6^2+8^2=10^2$ следует, что $\triangle ABD$ — прямоугольный и $S_{осн}=8\cdot 6=48$ (м^2). Так как $BO\perp AB$, то и $SB\perp AB$, а значит, $S_{\triangle ASB}=\frac{1}{2}AB\cdot BS=\frac{1}{2}AB\sqrt{SO^2+OB^2}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{4^2+3^2}=20$ (м^2). Проведем $SK\perp AD$; тогда $S_{\triangle ASD}=\frac{1}{2}AD\cdot SK=\frac{1}{2}AD\sqrt{SO^2+OK^2}$. Для нахождения OK

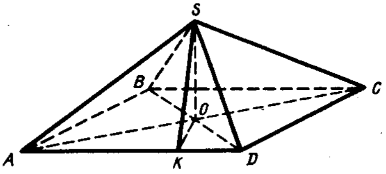


Рис. Р.2.33

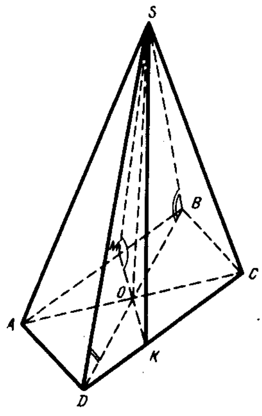


Рис. Р.2.34

воспользуемся тем, что $\triangle OKD \sim \triangle ABD$; имеем $OK : AB = OD : AD$, откуда $OK = \frac{8 \cdot 3}{10} = \frac{12}{5}$ (м). Следовательно, $SK = \sqrt{16 + \frac{144}{25}} = \frac{4\sqrt{34}}{5}$ (м) и $S_{\triangle ASD} = \frac{1}{2} \times$ $\times\ 10 \cdot \frac{4\sqrt{34}}{5} = 4\sqrt{34}$ (м^2). Итак, $S_{\text{полн}} = 48 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 4\sqrt{34} = 8(11 + \sqrt{34})$ (м^2). ■

2.131. 192 см^2.

2.132. □ Обозначим AD через x, а BD — через y (рис. Р. 2.34). Тогда $S_{\text{осн}} = xy = m^2$. Так как $BD \perp AD$, то и $SD \perp AD$, т. е. $\angle SDB$ — плоский угол двугранного угла и, по условию, $\angle SDB = 45°$. Через точку O проведем $MK \perp AB$; имеем $\angle SMK = \angle SKM = 60°$. Из $\triangle SOD$ следует, что $SO = OD = \frac{y}{2}$, а из $\triangle SOM$ — что $OM = \frac{SO}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}}$; поэтому $S_{\text{осн}} = MK \cdot AB = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}} =$ $= m^2$. Но $y = \frac{m^2}{x}$ и, значит, $\sqrt{x^2 + \frac{m^4}{x^2}} \cdot \frac{m^2}{x\sqrt{3}} = m^2$ или $x^4 + m^4 = 3x^4$, откуда $x = \frac{m}{\sqrt[4]{2}}$, $y = m\sqrt[4]{2}$. Теперь находим

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} m^2 \cdot \frac{1}{2} m \sqrt[4]{2} = \frac{1}{6} m^3 \sqrt[4]{2}.$$

Остается найти $S_{\text{бок}} = AD \cdot SD + AB \cdot SM$, где $AD = x$, $SD = OD\sqrt{2} = \frac{y\sqrt{2}}{2}$, $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$, $SM = 2OM = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Итак,

$$S_{\text{бок}} = \frac{xy\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{x^2y^2 + y^4}{3}} = \frac{m^2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{m^4}{3} + \frac{2m^4}{3}} = \frac{1}{2} m^2(2 + \sqrt{2}).$$ ■

2.133. $\frac{2}{3} r^2(R + \sqrt{R^2 - r^2})$ или $\frac{2}{3} r^2(R - \sqrt{R^2 - r^2})$. **2.134.** $\frac{9}{4} a^3\sqrt{11}$.

2.135. □ Имеем $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2S_{\triangle ASF} + 2S_{\triangle FSE} + 2S_{\triangle ESD}$ (рис. Р. 2.35), где $S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\triangle ASF} = \frac{a^2}{2}$, поскольку $SA \perp AF$ и $SA = a$. Далее, так как $AE \perp ED$, то и $SE \perp ED$, а значит, $S_{\triangle ESD} = \frac{1}{2} ED \cdot SE$. Но

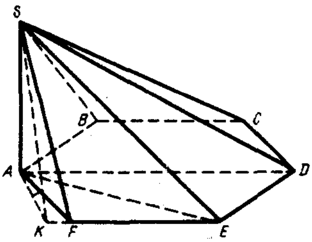


Рис. Р.2.35

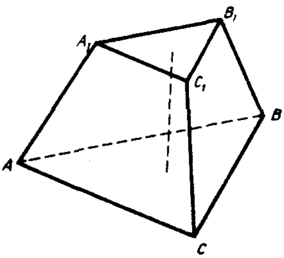


Рис. Р.2.36

$SE=\sqrt{SA^2+AE^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$, откуда $S_{\Delta ESD}=\frac{1}{2}a\cdot 2a=a^2$. Для вычисления $S_{\Delta FSE}$ проведем $SK\perp FE$; тогда и $AK\perp FE$. Учитывая, что $AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\angle KAF=30°$), $SK=\sqrt{SA^2+AK^2}=\sqrt{a^2+\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{4}$, находим $S_{\Delta FSE}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. Итак,

$$S_{\text{полн}}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+a^2+\frac{a^2\sqrt{7}}{2}+2a^2=\frac{a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2}. \blacksquare$$

2.136. $3a^3/4$, $3a^2\sqrt{6}/2$.

2.137. □ Искомый объем $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, где S_1 найдем по формуле Герона. Имеем $2p_1=27+29+52=108$ (м), откуда $S_1=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=270$ (м^2). Так как $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ (рис. Р. 2.36), то $\frac{S_1}{S_2}=\frac{(2p_1)^2}{(2p_2)^2}=\frac{108^2}{72^2}=\frac{9}{4}$, т. е. $S_2=\frac{4S_1}{9}=\frac{4\cdot 270}{9}=120$ (м^2). Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot 10\,(270+120+\sqrt{270\cdot 120})=1900\ (\text{м}^3). \blacksquare$$

2.138. 1,9 м^3.

2.139. □ Так как стороны оснований относятся как 1 : 2, то площади оснований относятся как 1 : 4 (рис. Р. 2.37). Тогда объем усеченной пирамиды $V=\frac{1}{3}h\,(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{1}{3}h\,(4S_2+S_2+2S_2)=\frac{7}{3}S_2h$, где S_2 — площадь верхнего основания, h — высота. Но объем призмы $ADEA_1B_1C_1$ составляет $V_1=S_2h$ и, значит, объем оставшейся части пирамиды есть $V_2=V-V_1=\frac{7}{3}S_2h-S_2h=\frac{4}{3}S_2h$. Итак, $V_1:V_2=3:4$. ■

2.140. $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$. **2.141.** $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$.

2.142. □ Пусть $O_1O_2=x$ (рис. Р. 2.38); тогда $OO_2=3-x$. Так как $\Delta B_1O_2D_1\sim\Delta BO_2D$, то $B_1D_1:BD=O_1O_2:OO_2$ или $1:2=x:(3-x)$, откуда $x=1$ (см). Далее, $\Delta B_1D_1B\sim\Delta LO_2B$ и, следовательно, $B_1D_1:LO_2=OO_1:OO_2=3:2$, т. е. $LO_2=\frac{2}{3}B_1D_1$, $LN=\frac{4}{3}B_1D_1$. Тогда $S_{KLMN}=\frac{16}{9}S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{16}{9}$ (см^2). Итак,

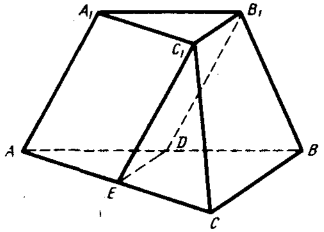


Рис. Р.2.37

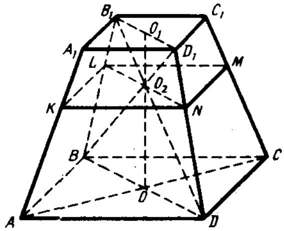


Рис. Р.2.38

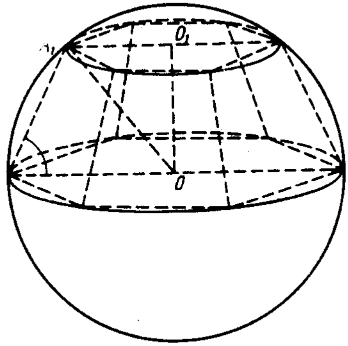


Рис. Р.2.39

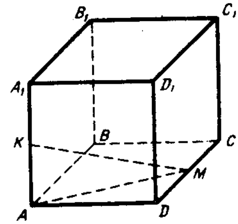


Рис. Р.2.40

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot 2\left(4+\frac{16}{9}+\frac{8}{3}\right)=\frac{152}{27}\ (\text{см}^3),\ V_2=\frac{1}{3}\cdot 1\left(\frac{16}{9}+1+\frac{4}{3}\right)=\frac{37}{27}\ (\text{см}^3).\ \blacksquare$$

2.143. $10\sqrt{19}$ см^2. **2.144.** ≈ 515 дм^3.

2.145. □ Пусть H — высота полной пирамиды, h — высота усеченной пирамиды и $x=H-h$. Имеем $\frac{S_1}{S_2}=\frac{x^2}{H^2}$ или $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{x}{x+h}$, откуда $x\sqrt{S_1}+h\sqrt{S_1}=x\sqrt{S_2}$, т. е. $x=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$. Так как $H=x+h=\frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$, то объем полной пирамиды $V_{\text{полн. пир}}=\frac{1}{3}S_2H=\frac{1}{3}\frac{hS_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$. По условию, $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$ и, значит, $h=\frac{3V}{S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}}$. Итак,

$$V_{\text{полн. пир}}=\frac{1}{3}\frac{S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}\cdot\frac{3V}{S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}}=\frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1}}.\ \blacksquare$$

2.146. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$.

2.147. □ По условию, $\angle OAA_1=60°$ (рис. Р. 2.39); значит, $\angle O_1OA_1=30°$ и $A_1O_1=\frac{1}{2}A_1O=\frac{R}{2}$, $OO_1=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Находим $S_{\text{нижн. осн}}=6\,\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\text{верхн. осн}}=\frac{1}{4}S_{\text{нижн. осн}}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}+\sqrt{\frac{9R^4\cdot 3}{16}}\right)=\frac{21R^3}{16}.\ \blacksquare$$

2.148. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$.

2.149. □ Так как полная поверхность куба $S_{\text{полн}}=36$ см^2, то площадь одн грани $S=6$ см^2 и ребро куба $AD=a=\sqrt{6}$ см (рис. Р. 2.40). Иском

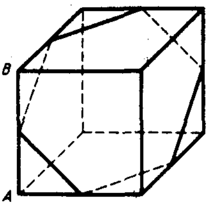


Рис. Р.2 41

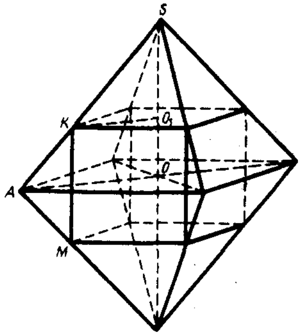


Рис. Р.2.42

расстояние $KM=\sqrt{AK^2+AM^2}$, где $AK=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (см), $AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=$
$=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{2}$ (см). Итак, $KM=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{30}{4}}=3$ (см). ■

2.150. $a^2\sqrt{3}/2$.

2.151. □ Пусть сторона шестиугольника равна a; тогда ребро куба $AB=a\sqrt{2}$ (рис. Р. 2.41) и $S_{\text{полн}}=6AB^2=12a^2$. По условию, $6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=Q$, откуда $a^2=\frac{2Q}{3\sqrt{3}}$. Итак, $S_{\text{полн}}=\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$. ■

2.152. $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$.

2.153. □ Пусть $SA=a$, $KM=x$ (рис. Р. 2.42): тогда $S_{\text{окт}}=8\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$, $S_{\text{куба}}=6x^2$. Имеем $AO=SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $KO_1=SO_1=\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Но $SO=SO_1+O_1O=\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{x}{2}$, т. е. $a\sqrt{2}=x\sqrt{2}+x$, откуда $x=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. Итак,
$$\frac{S_{\text{окт}}}{S_{\text{куба}}}=\frac{2a^2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)^2}{6\cdot 2a^2}=\frac{\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})}{6}. \ ■$$

2.154. $\frac{7(\sqrt{2}-1)a^3}{3}$. **2.155.** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,R^3$.

2.156. □ Так как $CD=3$ см, $AD=4$ см (рис. Р. 2.43), то из $\triangle ADC$ находим $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (см). Проведем $DK\perp AC$; тогда $D_1K\perp AC$ и $\angle DKD_1=60°$ (по условию). Но $\triangle ADC\sim\triangle CDK$, откуда $\frac{AC}{CD}=\frac{AD}{DK}$, т. е. $DK=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$ (см). Значит, $DD_1=DK\sqrt{3}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$ (см) и $V=CD\cdot AD\cdot DD_1=3\cdot 4\cdot\frac{12\sqrt{3}}{5}=$
$=\frac{144\sqrt{3}}{5}$ (см^3). ■

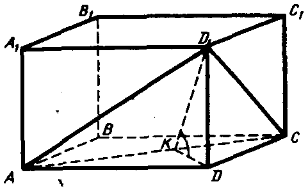


Рис. Р.2.43

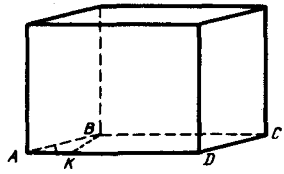


Рис. Р.2.44

2.157. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$.

2.158. □ Объем параллелепипеда $V=S_{\text{осн}}h$, где h — высота параллелепипеда. Так как параллелепипед прямой, то высоты боковых граней также равны h (рис. Р. 2.44). По условию, $\angle BAD=30°$, $AB\cdot h=6$ дм^2, $AD\cdot h=12$ дм^2, т. е. $AD=2AB$. Пусть $BK\perp AD$; тогда $BK=\frac{1}{2}AB$. Учитывая, что $AD\cdot BK=4$ дм^2, имеем $2AB\cdot\frac{1}{2}AB=4$, т. е. $AB=2$ (дм); следовательно, $h=3$ дм. Итак, $V=4\cdot 3=12$ дм^3.

2.159. $36\sqrt{2}$ см^3. **2.160.** $abc\sqrt{2}/2$.

2.161. □ По условию, $A_1K=12$ дм, $AK=5$ дм, $A_1K\perp AK$ (рис. Р. 2.45); следовательно, $AA_1=\sqrt{A_1K^2+AK^2}=13$ (дм). Так как $S_{A_1LMN}=24$ дм^2 и AA_1 — перпендикуляр к сечению, то искомый объем $V=S_{A_1LMN}\cdot AA_1=24\cdot 13=312$ (дм^3). Далее, учитывая, что A_1LMN — ромб, имеем $S_{\text{бок}}=4AA_1\cdot A_1N$. Для нахождения стороны ромба воспользуемся равенством $S_{A_1LMN}=\frac{1}{2}A_1M\cdot LN$ или $24=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot LN$, откуда $LN=6$ (дм); тогда $A_1N=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (дм). Итак, $S_{\text{бок}}=4\cdot 13\cdot 5=260$ дм^2. ■

2.162. $a^3/2$. **2.163.** $a^2(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13})$, $a^3\sqrt{3}/2$.

2.164. □ Пусть радиус шара равен R. В сечении шара плоскостью, проходящей через его центр и параллельной основанию параллелепипеда, получим параллелограмм, описанный около окружности радиуса R. Поскольку суммы противоположных сторон такого описанного параллелограмма равны, он представляет собой ромб. Пусть сторона ромба равна m; тогда искомая полная поверхность $S=2S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}=2m\cdot 2R+4m\cdot 2R=6m\cdot 2R=$ $=6S_{\text{осн}}$. Но $S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}ab$ и окончательно получим $S=3ab$. ■

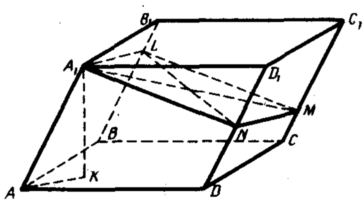


Рис. Р.2.45

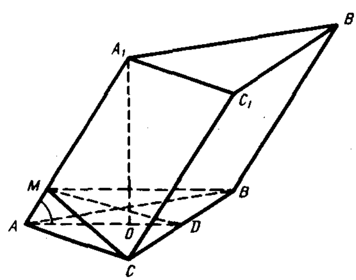


Рис. Р.2.46

...5. $\frac{\sqrt{6}}{2} S\sqrt{S}$. **2.166.** $\frac{a^3(27\sqrt{2}-22\sqrt{...})}{2}$

2.167. □ Проведем через BC сечение, перпендикулярное AA_1 (рис. Р. 2.46); тогда $S_{бок}=(BC+MC+MB)AA_1=(BC+2MC)AA_1$. Так как $\angle A_1AO=60°$ (по условию), то $AA_1=2AO=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Далее в ΔAMD имеем $\angle ADM=30°$ и, следовательно, $AM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Тогда из ΔAMC находим $MC=\sqrt{AC^2-AM^2}=$ $=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{13}}{4}$. Итак, $S_{бок}=\left(a+\frac{a\sqrt{13}}{2}\right)\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}$. ■

2.168. $\frac{a^3}{8}$, $\frac{a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{4}$. **2.169.** $\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{8}$.

2.170. □ Искомый объем $V=\frac{1}{3} S_{осн}\cdot CC_1$ (рис. Р. 2.47). Учитывая, что $\angle ABC=30°$, находим $AC=\frac{c}{2}$, $BC=\frac{c\sqrt{3}}{2}$ и, значит, $S_{осн}=\frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. С другой стороны, $S_{осн}=\frac{1}{2} AB\cdot CD$, где $CD\perp AB$ и $CD=\frac{1}{2} BC=\frac{c\sqrt{3}}{4}$. Так как $CD\perp AB$, то и $C_1D\perp AB$, т. е. $\angle C_1DC=45°$ (по условию); поэтому в ΔC_1DC имеем $CC_1=CD=\frac{c\sqrt{3}}{4}$. Итак, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{c^2\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{4}=\frac{c^3}{32}$. ■

2.171. 906 см^2. **2.173.** 12 см^3. **2.174.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **2.175.** $ab(\sqrt{2}+1)$.

2.176. □ Полная поверхность призмы $S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}$. Так как a, b, c — расстояния между боковыми ребрами призмы, то $a+b+c$ — периметр сечения, перпендикулярного ребру. Следовательно, $S_{бок}=(a+b+c)l=2pl$, где $p=(a+b+c)/2$. По формуле Герона находим $S_{сеч}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Далее, учитывая, что $V=S_{сеч}l=S_{осн}h$, имеем $S_{осн}=S_{сеч}l/h$. Итак,

$$S_{полн}=\frac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+2pl.$$ ■

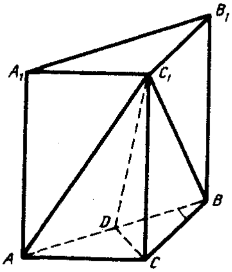


Рис. Р.2.47

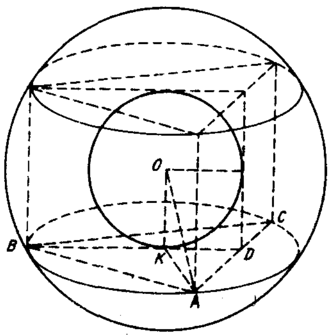


Рис. Р.2.48

2.177. $3al+a^2$. **2.178.** $0{,}5(S_1+S_2)h$.

2.179. □ По условию, даны объем V и высота h правильной восьмиугольной призмы. Так как $V=S_{\text{осн}}h$, то $S_{\text{осн}}=V/h$; с другой стороны, $S_{\text{осн}}=2a^2(1+\sqrt{2})$, где a — длина стороны правильного восьмиугольника. Отсюда находим $a=\sqrt{\dfrac{S_{\text{осн}}}{2(1+\sqrt{2})}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}-1)\,S_{\text{осн}}}$. Итак,

$S_{\text{бок}}=8ah=4\sqrt{2(\sqrt{2}-1)Vh}=4\sqrt{16(\sqrt{2}-1)2{,}2}=16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ (м²). ■

2.180. □ Пусть r и R — радиусы вписанного и описанного шаров (рис. Р. 2.48); тогда $BD=3r$, $AD^2+BD^2=AB^2=4AD^2$ или $BD^2=3AD^2$, т. е. $AD^2=3r^2$. Из $\triangle AKD$ находим, что $KA^2=KD^2+AD^2=r^2+3r^2=4r^2$, а из $\triangle OKA$ — что $OA^2=OK^2+KA^2=r^2+4r^2=5r^2=R^2$. Обозначив поверхности вписанного и описанного шаров через s и S, имеем $s=4\pi r^2$, $S=4\pi R^2$. Итак, $S:s=R^2:r^2=5:1$. ■

2.181. $12R^2\sqrt{3}$.

2.182. □ Искомый объем $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. Пусть конус образован вращением $\triangle ABC$ вокруг катета BC (рис. Р. 2.49); тогда $AC=r$, $BC=h$. По условию, $\dfrac{1}{2}rh=S$; тогда $V=\dfrac{2}{3}\pi rS$. Кроме того, по условию, $2\pi\cdot DN=L$, где D — точка пересечения медиан, $DN\perp BC$. Но $DN:AC=DM:AM=1:3$, откуда $DN=\dfrac{r}{3}$; значит, $\dfrac{2}{3}\pi r=L$, т. е. $r=\dfrac{3L}{2\pi}$. Итак, $V=\dfrac{2}{3}\pi S\cdot\dfrac{3L}{2\pi}=SL$. ■

2.183. □ Пусть объемы тел вращения вокруг сторон a, b, c равны V_a, V_b, V_c; тогда $V_a=\dfrac{1}{3}\pi h_a^2a$, $V_b=\dfrac{2}{3}\pi h_b^2b$, $V_c=\dfrac{1}{3}\pi h_c^2c$, где h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты. Учитывая, что $ah_a=bh_b=ch_c=2S$, имеем $V_a=\dfrac{2}{3}\pi Sh_a$, $V_b=\dfrac{2}{3}\pi Sh_b$, $V_c=\dfrac{2}{3}\pi Sh_c$ или $V_a=\dfrac{4}{3}\pi S^2\cdot\dfrac{1}{a}$, $V_b=\dfrac{4}{3}\pi S^2\cdot\dfrac{1}{b}$, $V_c=\dfrac{4}{3}\pi S^2\cdot\dfrac{1}{c}$. Итак, $V_a:V_b:V_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$. ■

2.184. $\dfrac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$. **2.185.** $\dfrac{1}{6}\pi R^3\sqrt{2}$.

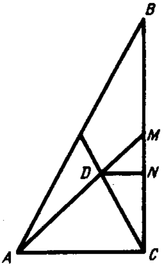


Рис. Р.2.49

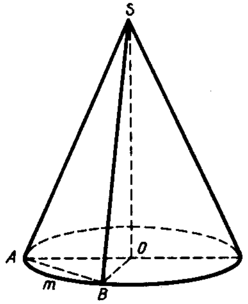


Рис. Р.2.50

2.186. □ Пусть $AO=r$, $SO=h$ (рис. Р. 2.50), V — объем конуса, V_1 и V_2 — объемы его частей. Найдем V_1 как разность между объемами части конуса, основанием которой является сектор AOB, и пирамиды, в основании которой лежит $\triangle AOB$. Согласно условию, $AB=r$, т. е. AB — сторона правильного вписанного шестиугольника и, значит, $V_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2h-\frac{1}{3}\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}h=\frac{1}{3}S_1h$, где S_1 — площадь сегмента AmB. Тогда $V_2=V-V_1=\frac{1}{3}S_2h$, где $S_2=\pi r^2-S_1$. Таким образом, $V_1:V_2=S_1:S_2$. Далее находим

$$S_1=\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=\frac{r^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12},\ S_2=\pi r^2-\frac{r^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}=\frac{r^2(10\pi+3\sqrt{3})}{12}.$$

Итак, $V_1:V_2=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. ■

2.187. $\frac{1}{21}\pi S\sqrt{5S}$. **2.188.** $\frac{1}{24}\pi h^3$.

2.189. □ Пусть l — образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то $2\pi R=\frac{2\pi l}{4}$ (по условию, развертка представляет собой четверть круга), откуда $l=4R$. Найдем высоту конуса: $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{16R^2-R^2}=R\sqrt{15}$. Итак, $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R\sqrt{15}=\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$. ■

2.190. $10\pi h^3/9$. **2.191.** $27\sqrt{2}/8$ куб. ед.

2.192. □ Для нахождения боковой поверхности усеченного конуса воспользуемся формулой $S_{бок}=\pi(r_1+r_2)l$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований усеченного конуса. Проведем плоскость через высоту конуса. В сечении получим равнобедренную трапецию, описанную около круга радиуса r, причем $AD=2r_2$, $BC=2r_1$ (рис. Р. 2.51). Для описанного четырехугольника имеем $BC+AD=AB+CD$, т. е. $2r_1+2r_2=2l$, откуда $S_{бок}=\pi l^2$. Объем усеченного конуса $V=\frac{1}{3}\pi H((r_1+r_2)^2-r_1r_2)$, где $H=2r$, $r_1+r_2=l$, $r_1r_2=r^2$. Последнее соотношение получается из прямоугольного треугольника OCD, в котором $OK^2=CK\cdot KD$ ($\angle COD=90°$, поскольку OC и OD — биссектрисы углов трапеции и, значит, $\angle OCD+\angle CDO=90°$). Итак, $V=\frac{2}{3}\pi r(l^2-r^2)$. ■

2.193. $\frac{6m-3n}{4n}$. **2.194.** 3,75 см.

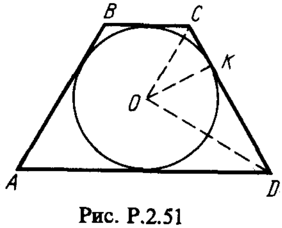


Рис. Р.2.51

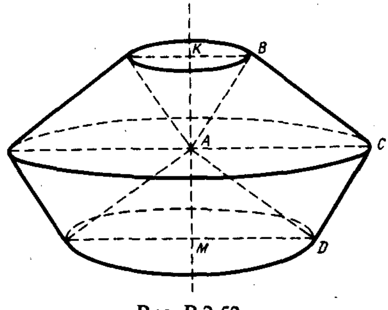


Рис. Р.2.52

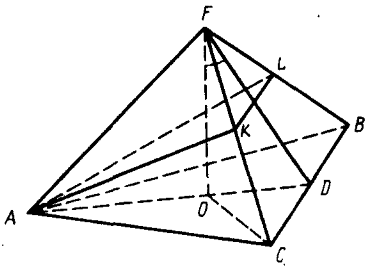


Рис. Р.2.53

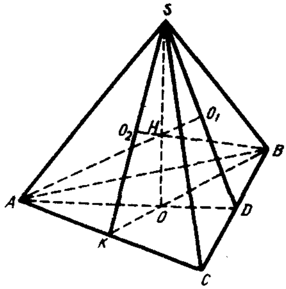


Рис. Р.2.54

2.195. □ Поверхность S тела вращения состоит из боковых поверхностей двух усеченных конусов, полученных при вращении отрезков BC и CD (рис. Р. 2.52), и двух конусов, полученных при вращении отрезков AB и AD. Таким образом, $S=\pi(KB+AC)BC+\pi(MD+AC)CD+\pi KB\cdot AB+\pi MD\cdot AD$. Преобразуем это выражение, учитывая, что $AD=BC$, $CD=AB$ и $KB+MD=AC$. Имеем

$$\pi(KB\cdot BC+AC\cdot BC+MD\cdot AB+AC\cdot AB+KB\cdot AB+MD\cdot BC)=$$
$$=\pi((KB+MD)BC+(KB+MD)AB+AC\cdot BC+AC\cdot AB)=\pi(2BC+2AB)AC.$$

Так как, по условию, $AC=d$, $2BC+2AB=2p$, то окончательно получим $S=2\pi dp$. ■

2.196. $\dfrac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}$.

2.197. □ По условию, плоскость AKL перпендикулярна FD и угол между нею и плоскостью ABC равен 30° (рис. Р. 2.53). Проведем высоту FO; тогда $\angle OFD=30°$ и $\triangle OFD=\triangle ODC$, откуда $CD=FO=H$, $BC=2H$. Следовательно, $S_{осн}=\dfrac{4H^2\sqrt{3}}{4}=H^2\sqrt{3}$. Далее, в $\triangle OFD$ имеем $OD=\dfrac{FD}{2}$, $FD^2=H^2+\dfrac{FD^2}{4}$, т. е. $FD=\dfrac{2H}{\sqrt{3}}$. Итак, $S_{полн}=H^2\sqrt{3}+3\cdot 2H\cdot\dfrac{H}{\sqrt{3}}=3H^2\sqrt{3}$. ■

2.198. 4 : 121.

2.199. □ а) I способ. Проведем плоскость через пересекающиеся высоты SO и AO_1 (рис. Р. 2.54). Докажем, что BC — перпендикуляр к этой плоскости (тогда $BC\perp AS$). Действительно, SO — перпендикуляр к плоскости ABC и, значит, $SO\perp BC$; AO_1 — перпендикуляр к плоскости BCS и, следовательно, $AO_1\perp BC$. Итак, BC — перпендикуляр к построенной плоскости и прямая BC перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в том числе и AS. Аналогично получим, что $BS\perp AC$, $CS\perp AB$.

II способ. Рассмотрим векторы $\overline{AS}$, $\overline{AH}$, $\overline{HS}$, $\overline{BC}$. По условию, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{HS}\perp\overline{BC}$, т. е. $(\overline{AH},\overline{BC})=(\overline{HS},\overline{BC})=0$. Учитывая, что $\overline{AS}=\overline{AH}+\overline{HS}$, находим $(\overline{AS},\overline{BC})=((\overline{AH}+\overline{HS}),\overline{BC})=(\overline{AH},\overline{BC})+(\overline{HS},\overline{BC})=0$, откуда $\overline{AS}\perp\overline{BC}$.

б) Пусть $\angle BSC=90°$; так как $BS\perp AC$ (это доказано в п. а)), то BS — перпендикуляр к плоскости ASC, т. е. $\angle BSA=90°$. Далее, $AS\perp BC$, $AS\perp BS$ и, значит, AS — перпендикуляр к плоскости BCS, т. е. $\angle ASC=90°$.

в) Пусть O — проекция вершины S на плоскость ABC. Плоскость ASO_1 проходит через SO (точки S и H этой прямой принадлежат плоскости ASO_1); так как $AS\perp BC$, то и $AD\perp BC$, т. е. высота AD проходит через точку O. Теперь проведем плоскость BSO; она пройдет через O_2, поскольку точки B и H высоты BO_2 принадлежат этой ... и. Но $BS\perp AC$, а значит

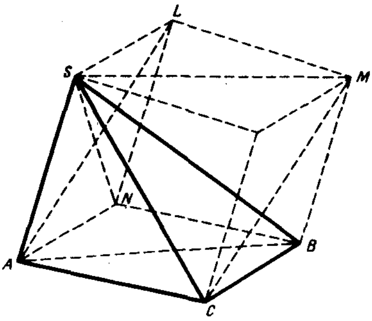


Рис. Р.2.55

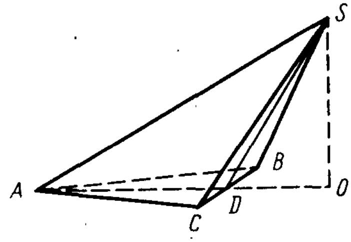


Рис. Р.2.56

и $BK \perp AC$. Итак, BK также проходит через точку O, т. е. O — ортоцентр ΔABC. Аналогично докажем, что и другие вершины проецируются в соответствующие ортоцентры.

г) Для доказательства достроим тетраэдр до параллелепипеда (рис. Р. 2.55). Согласно доказанному в п. а), $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$. Имеем $SA^2+BC^2=SA^2+AN^2=SN^2$, $SB^2+AC^2=SB^2+BN^2=SN^2$, $SC^2+AB^2=$ $=SC^2+SM^2=CM^2$. Но $CM=AL$, а $AL=SN$ (как диагонали прямоугольника). Итак, $SA^2+BC^2=SB^2+AC^2=SC^2+AB^2$. ■

2.200. а) $5\sqrt{3}$ и $\sqrt{51}$; б) нет. **2.203.** $\pi/3$, $2\sqrt{3}/3$.

2.204. □ По условию, $SA=12$ м, $BC=4$ м, $SB=SC=AB=AC=7$ м, т. е. ΔBSC и ΔABC — равнобедренные и равные (рис. Р. 2.56). Пусть $SD \perp BC$; тогда $BD=CD$ и $SD=AD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{49-4}=3\sqrt{5}$ (см). Используя формулу Герона, найдем $S_{\Delta ASD}=\sqrt{(3\sqrt{5}+6)(3\sqrt{5}-6)\cdot 6\cdot 6}=\sqrt{(45-36)\cdot 6\cdot 6}=18$ (м²). Плоскость ASD проходит через высоту SO, поэтому $SO=\dfrac{2S_{\Delta ASD}}{AD}=\dfrac{36}{3\sqrt{5}}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}$ (м). Далее находим $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ (м²).

Итак, $V=\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{5}\cdot\dfrac{12}{\sqrt{5}}=24$ (м³). ■

2.205. $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **2.206.** $\dfrac{a^3}{12}$.

2.207. $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

2.208. □ По условию, ребра правильного тетраэдра $SABC$ являются диагоналями граней параллелепипеда $DSMCAKBN$ (рис. Р. 2.57). При этом параллелепипед состоит из следующих частей: 1) тетраэдра $SABC$; 2) пирамиды $DACS$; 3) пирамиды $KABS$; 4) пирамиды $MBCS$; 5) пирамиды $NABC$. Объемы пирамид 2) — 5) равны. Пусть V — объем параллелепипеда, а $V_{\text{пир}}$ — объем пирамиды; тогда $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{6}V$. Имеем $V=V_{\text{тетр}}+\dfrac{2}{3}V$, т. е.

$V_{\text{тетр}}=\dfrac{1}{3}V$. Итак, $V:V_{\text{тетр}}=3$. ■

2.209. $a^3\sqrt{2}/54$.

2.210. □ Пусть $DABC$ и $D_1AB_1C_1$ — заданные пирамиды (рис. Р. 2.58); тогда

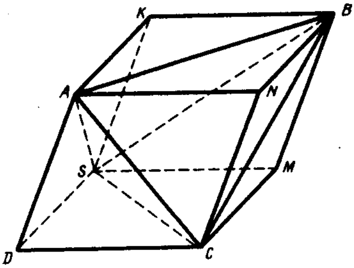


Рис. Р.2.57

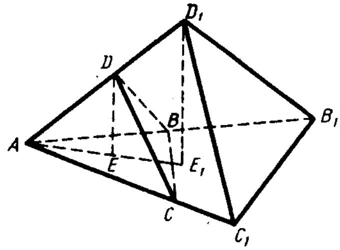


Рис. Р.2.58

$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DE$, $V_1=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}\cdot D_1E_1$, где $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\varphi$, $S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\sin\varphi$ ($\varphi=\angle BAC$). Далее, $\triangle ADE\sim\triangle AD_1E_1$, откуда $DE:D_1E_1=AD:AD_1$, т. е. $D_1E_1=\frac{AD_1\cdot DE}{AD}$. Итак,

$$\frac{V_1}{V}=\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1\cdot DE}{AB\cdot AC\cdot DE\cdot AD}=\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1}{AB\cdot AC\cdot AD},$$

что и требовалось доказать. ■

2.211. $\frac{12}{19}$ м. **2.212.** $\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$, $b<a<b\sqrt{2}$.

2.213. □ Искомую боковую поверхность найдем по формуле $S=S_{\triangle AFD}+2S_{\triangle AFK}+S_{\triangle KFM}$ (рис. Р. 2.59). По условию, $S_{\triangle AFD}=\frac{25}{4}$ см^2, $S_{\triangle KFM}=4$ см^2. Остается найти $2S_{\triangle AFK}$. Имеем $2S_{\triangle AFK}=AF\cdot FK\sin\varphi$, где $\varphi=\angle AFK$. Но $AF\cdot FK\sin\varphi=\sqrt{AF^2\cdot FK^2\sin^2\varphi}=\sqrt{AF^2\sin\varphi\cdot FK^2\sin\varphi}=$ $=\sqrt{2S_{\triangle AFD}\cdot 2S_{\triangle KFM}}=10$ (см^2). Итак, $S=\frac{25}{4}+10+4=\frac{81}{4}$ (см^2). ■

2.214. $a^3\sqrt{6}/18$.

2.215. □ Обозначим через r радиус круга, описанного около основания пирами-

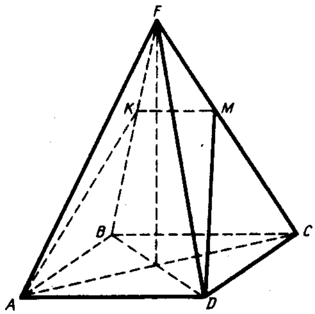


Рис. Р.2.59

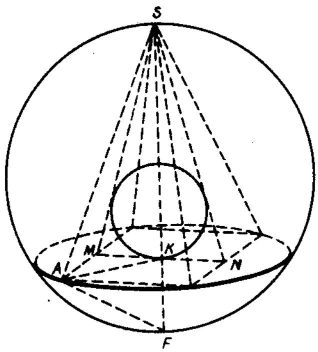


Рис. Р.2.60

$\angle SAF = 90$ … $= r : KF$; так как,

…ню, $KF = \frac{…}{2}$, то $r^2 = \frac{3R}{2} \cdot \frac{R}{2}$, т. е. $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Проведем апофему SM;

…да $KM = \frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и $SM = \sqrt{KM^2 + SK^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{8} + \frac{9R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{21}}{2\sqrt{2}}$. Пусть $r_{\text{шара}}$ — радиус вписанного шара; тогда для площади ΔSMN получим следующие два выражения: $S_{\Delta SMN} = r_{\text{шара}}(SM + KM) = \frac{1}{2} MN \cdot SK$. Отсюда имеем

$$r_{\text{шара}}\left(\frac{R\sqrt{21}}{2\sqrt{2}} + \frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{R\sqrt{3} \cdot 3R}{4\sqrt{2}} \text{ или } 2r_{\text{шара}}(\sqrt{7}+1) = 3R,$$

т. е. $r_{\text{шара}} = \frac{3R}{2(\sqrt{7}+1)} = \frac{R(\sqrt{7}-1)}{4}$. Итак, искомая поверхность

$$S = 4\pi r_{\text{шара}}^2 = 4\pi \frac{R^2}{16}(\sqrt{7}-1)^2 = \frac{\pi R^2}{4}(8 - 2\sqrt{7}) = \frac{\pi R^2}{2}(4 - \sqrt{7}). \blacksquare$$

2.216. $\frac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$.

2.217. □ Пусть один из кубов стоит на горизонтальной плоскости, а общий отрезок соединяет середины его противоположных вертикальных ребер. Рассмотрим вид сверху (рис. Р. 2.61). Общую часть двух кубов составляет фигура $ACDBEF$, при этом $CDEF$ — грань параллелепипеда, а BED — проекция грани пирамиды (рис. Р. 2.62). Основание пирамиды — вертикальная грань параллелепипеда, площадь которой равна $DE \cdot a$. Так как $DE = a$, $BK = \frac{a}{2}$, то суммарный объем двух пирамид $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{3}$. Объем параллелепипеда $V_2 = a^2 \cdot CD$, где $CD = AB - a = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)$, т. е. $V_2 = a^3(\sqrt{2}-1)$. Итак, объем общей части $V_1 + V_2 = a^3\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2} - 1\right) = \frac{(3\sqrt{2}-2)a^3}{3}$. ■

2.218. $a^3/4$. **2.219.** $2(\sqrt{2}-1)a^3$.

2.220. □ Пусть первоначально угол поворота равен 0°. Если провести сечение через центр общей части двух кубов перпендикулярно диагонали, то полу-

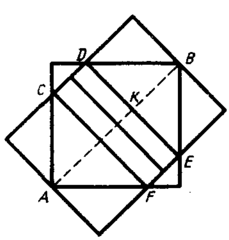


Рис. Р.2.61

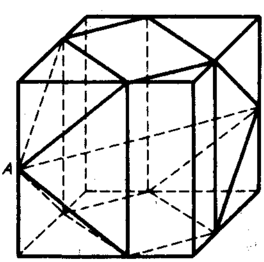


Рис. Р.2.62

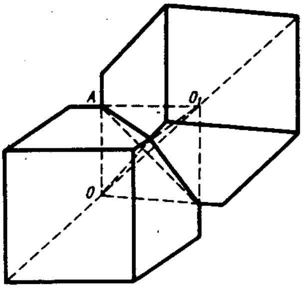


Рис. Р.2.63

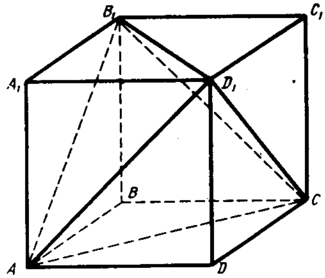


Рис. Р.2.64

чится правильный шестиугольник. После поворота на 60° этот шестиугольник совместится сам с собой, т. е. ребра кубов пересекаются (рис. Р. 2.63). Искомая общая часть состоит из двух одинаковых правильных треугольных пирамид с вершинами в точках O и O_1. Так как все углы при вершине — прямые, то объем каждой пирамиды $V_1=\frac{b^3}{6}$, где $b=OA$. Высота каждой из пирамид $h=\frac{OO_1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. С другой стороны, $V_1=\frac{1}{3}S_{осн}h$, где $S_{осн}=\frac{(b\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$. Имеем $\frac{b^3}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{2}h$, откуда $h=\frac{b\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\frac{b\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, т. е. $b=\frac{3a}{4}$. Итак, искомый объем $V=2V_1=\frac{b^3}{3}=\frac{9a^3}{64}$. ■

2.221. □ По условию, $AB=a$ (рис. Р. 2.64); тогда $AB_1=a\sqrt{2}$, как и все остальные ребра построенной пирамиды D_1AB_1C. Значит, все ее ребра — правильные треугольники, т. е. D_1AB_1C — правильный тетраэдр, а его полная поверхность $S=4\cdot\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$. Грани тетраэдра отсекают от куба равные пирамиды, объем каждой из которых $V_1=\frac{a^3}{6}$. Итак, объем тетраэдра $V=a^3-4V_1=a^3-\frac{2a^3}{3}=\frac{a^3}{3}$. ■

2.222. $a^3/6$. **2.223.** $18d^2$.

2.224. □ Проведем плоскость, перпендикулярную ребру (рис. Р. 2.65), и найдем

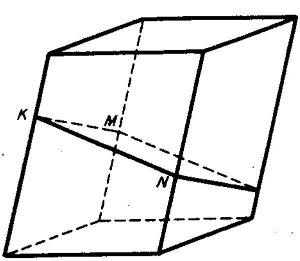


Рис. Р.2.65

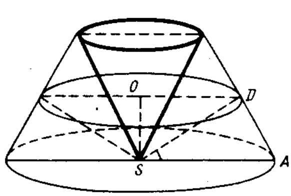


Рис. Р.2.66

стороны параллелограмма, полученного в сечении. Имеем $KM=\frac{m^2}{l}$, $KN=\frac{n^2}{l}$, откуда $S_{сеч}=\frac{m^2}{l}\cdot\frac{n^2}{l}\sin 30°=\frac{m^2n^2}{2l^2}$. Итак, $V=S_{сеч}l=\frac{m^2n^2}{2l}$. ■

2.225. $9\sqrt{39}/4$ см^3. **2.226.** 336 см^3, 396 см^2.

2.227. $2\pi a^2$, $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})a^3}{6}$. ● Доказать, что первый цилиндр проходит через ось второго.

2.229. $\frac{q^2(2-q)}{4}$; задача не имеет решения при $q\geqslant 2$.

2.230. □ Высота данного конуса также описывает конус (рис. Р. 2.66), образующая которого равна h. Так как $\triangle SOD\sim\triangle SDA$, то $\frac{OD}{SD}=\frac{SD}{SA}$ или $\frac{OD}{h}=\frac{h}{l}$, откуда $OD=\frac{h^2}{l}$. Итак, искомая поверхность $S=\pi\frac{h^2}{l}h=\frac{\pi h^3}{l}$. ■

2.231. $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

2.233. □ Проведем отрезки AN и DN (рис. Р. 2.67) и рассмотрим объемы пирамид $SABN$, $SAMN$, $SMND$ и $SDNC$. Пусть $V_{SAMN}=V$; тогда $V_{SMND}=V$ ($\triangle ANM$ и $\triangle MND$ равновелики). Имеем $V_{SABN}:V_{SAMN}=AB:MN$, а $V_{SDNC}:V_{SMND}=CD:MN$, откуда $V_{SABN}=\frac{AB}{MN}V$, $V_{SDNC}=\frac{CD}{MN}V$ и $V_{SABN}+V_{SDNC}=\frac{AB+CD}{MN}V=2V$. Таким образом,

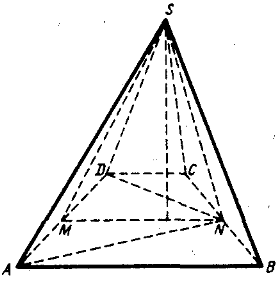


Рис. Р.2.67

$V_{SABCD}=4V=4V_{SAMN}$. Но $V_{SAMN}=V_{AMSN}=\frac{1}{3}S_{\triangle SMN}h$, где h — указанное в условии расстояние. Итак, $V_{SABCD}=\frac{4}{3}S_{\triangle SMN}h$. ■

2.234. □ По условию, площади оснований равны S_1 и S_2. Разобьем многогранник на пирамиды с вершиной S, взятой произвольно внутри многогранника в плоскости сечения, равноотстоящего от обоих данных оснований. Основаниями пирамид служат боковые грани и основания данного многогранника. Тогда искомый объем

$$V=\frac{1}{3}S_1\frac{H}{2}+\frac{1}{3}S_2\frac{H}{2}+\sum\frac{4}{3}S_{\triangle S_iM_iN_i}\frac{H}{2},$$

где $S_{\triangle S_iM_iN_i}$ — площади треугольников, аналогичных рассмотренному выше $\triangle SMN$ (см. решение задачи 2.233). Но $\sum S_{\triangle S_iM_iN_i}=S_3$, где S_3 — площадь сечения. Итак, $V=\frac{H}{6}(S_1+S_2+4S_3)$, что и требовалось доказать.

2.235. $\frac{h}{6}(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)$.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

3.001. □ По условию, $AB=AC$, $AA_1\perp BC$, $BB_1\perp AC$, $\angle BAC=\alpha$, $AA_1+BB_1=l$ (рис. Р. 3.1). Пусть $BC=a$. Из $\triangle AA_1C$ находим $AA_1=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $AC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, а из $\triangle BB_1C$ получим $BB_1=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=a\cos\frac{\alpha}{2}$. Используя условие, имеем $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+a\cos\frac{\alpha}{2}=l$ или $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)=l$, т. е. $a=\frac{2l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$AC=\frac{l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}=\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha}=\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}.\ \blacksquare$$

3.002. $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. **3.003.** $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$.

3.004. По условию, $AB=AC$, $BC=a$, $\angle ABC=\alpha$, $AB_1=B_1C$ (рис. Р. 3.2). В $\triangle ABC$ по теореме синусов имеем $\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$, откуда $AC=\frac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{a}{2\cos\alpha}$. Проведем $A_1B_1\parallel BC$. Из $\triangle BA_1B_1$ находим $A_1B_1=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$, $BA_1=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{4\cos\alpha}$, $\angle B_1A_1B=180^\circ-\alpha$ и по теореме косинусов получим

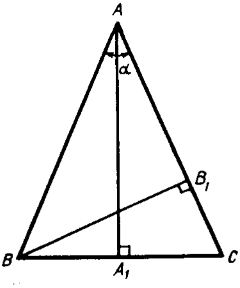


Рис. Р.3.1

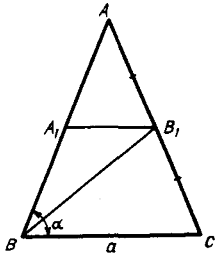


Рис. Р.3.2

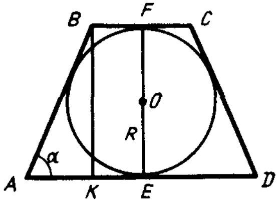


Рис. Р.3.3

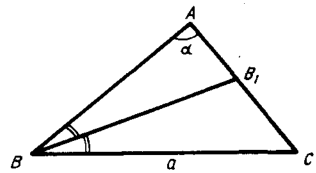


Рис. Р.3.4

$$BB_1^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16\cos^2\alpha}-2\,\frac{a^2}{8\cos\alpha}\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16\cos^2\alpha}+\frac{a^2}{4}=$$
$$=\frac{a^2\,(8\cos^2\alpha+1)}{16\cos^2\alpha};$$
$$BB_1=\frac{a}{4}\sqrt{8+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{a}{4}\sqrt{9+\operatorname{tg}^2\alpha}.\ \blacksquare$$

3.005. □ По условию, $ABCD$ — трапеция, $AB=CD$, O — центр вписанного в трапецию круга, $OE\perp AD$, $OE=R$, $\angle BAD=\alpha$, $\alpha<\pi/2$ (рис. Р. 3.3); требуется найти $P_{ABCD}=AD+2AB+BC$. Согласно свойству описанного четырехугольника, имеем $AD+BC=2AB$; значит, $P_{ABCD}=4AB$. Проведем $BK\parallel OE$; тогда $BK=2OE=2R$. Наконец, из $\triangle BKA$ находим $AB=\frac{2R}{\sin\alpha}$ и $P_{ABCD}=\frac{8R}{\sin\alpha}$. ■

3.006. □ По условию, $AB=AC$, $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABB_1=\angle B_1BC$ (рис. Р. 3.4). Имеем $\angle ABC=\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, $\angle B_1BC=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}$, $\angle BB_1C=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}$. Из $\triangle BB_1C$ по теореме синусов находим

$$\frac{BB_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)},\text{ т. е. } BB_1=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)}.\ \blacksquare$$

3.007. $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. **3.008.** $\frac{r\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\sin 2\alpha}$. **3.009.** $r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

3.010. $\dfrac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$.

3.012. □ По условию, в прямоугольном треугольнике ACB имеем: $\angle ACB=90^\circ$, $\angle CAB=\alpha$, $S_{\triangle ABC}=S$, $AB_1=B_1C$ и $AC_1=C_1B$, $BB_1\cap CC_1=O$ (рис. Р. 3.5); требуется найти расстояние от O до AB. Проведем $CD\perp AB$ и положим

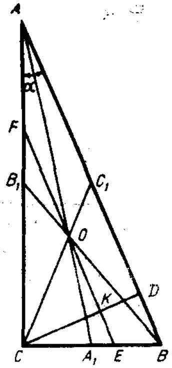


Рис. Р.3.5

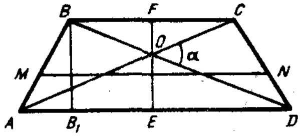


Рис. Р.3.6

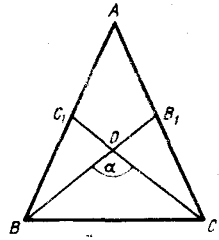


Рис. Р.3.7

$CD=h$. Из $\triangle ADC$ и $\triangle CDB$ находим $AC=\dfrac{h}{\sin\alpha}$, $CB=\dfrac{h}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{h}{\cos\alpha}$. Так как $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{h^2}{\sin 2\alpha}$, то $h=\sqrt{S\sin 2\alpha}$. Проведем $OF\parallel AB$, $OF\bigcap AC=F$, $OF\bigcap CB=E$ и $OF\bigcap CD=K$. Так как $\triangle CKO\sim\triangle CDC_1$, то $\dfrac{CK}{CD}=\dfrac{OC}{CC_1}=\dfrac{2}{3}$, откуда $CK=\dfrac{2}{3}CD$, а $KD=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{\sqrt{S\sin 2\alpha}}{3}$ — это и есть расстояние от O до AB, поскольку $O\in FE\parallel AB$. ■

3.013. □ По условию, в равнобедренной трапеции $ABCD$ имееем: $AB=CD$, $BB_1\perp AD$, $BB_1=h$, $AC\bigcap BD=O$, $\angle COD=\alpha$ (рис. Р. 3.6). Так как $\angle COD$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOD, то $\angle OAD=\angle ODA=\dfrac{\alpha}{2}$. Далее находим $B_1D=ED+B_1E=\dfrac{1}{2}AD+\dfrac{1}{2}BC=$ $=\dfrac{1}{2}(AD+BC)=MN$, где MN — средняя линия трапеции. Из $\triangle BB_1D$ получим $B_1D=BB_1\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. ■

3.014. $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **3.015.** $\dfrac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **3.016.** $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$.

3.017. □ По условию, $AB=AC$, $S_{\triangle ABC}=S$, $AB_1=B_1C$, $AC_1=C_1B$, $BB_1\bigcap CC_1=O$, $\angle BOC=\alpha$ (рис. Р. 3.7). Имеем $S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}S$, так как высота $\triangle BOC$, проведенная из O, равна $\dfrac{1}{3}$ высоты $\triangle ABC$, проведенной из A. Для нахождения площади $\triangle BOC$ воспользуемся формулой (1.6):

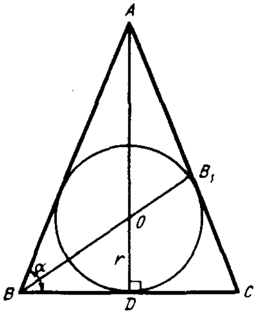


Рис. Р.3.8

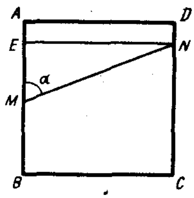


Рис. Р.3.9

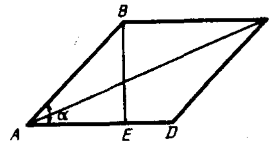


Рис. Р.3.10

$$S_{\Delta BOC}=\frac{BC^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha}=\frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{BC^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}.$$

Таким образом, $\dfrac{BC^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}=\dfrac{1}{3}S$, откуда $BC^2=\dfrac{4S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3}$; окончательно получим $BC=\dfrac{2\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{3}$. ■

3.018. □ По условию, $AB=AC$, O — центр окружности, вписанной в ΔABC, $\angle ABC=\alpha$, $OD\perp BC$, $OD=r$, $BO\bigcap AC=B_1$ (рис. Р. 3.8). Так как BB_1 — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle B_1BC=\frac{\alpha}{2}$, а $\angle BB_1C=\pi-\frac{3\alpha}{2}$. Из ΔODB найдем $BD=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Поскольку D — точка касания основания BC равнобедренного треугольника ABC с окружностью, получим $BC=2BD=2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Наконец, в ΔBB_1C по теореме синусов имеем

$$\frac{BB_1}{\sin\alpha}=\frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\pi-\frac{3\alpha}{2}\right)},\text{ т. е. } BB_1=\frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}=\frac{4r\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.\ ■$$

3.019. □ По условию, $ABCD$ — квадрат, $M\in AB$, $MA=MB$, $\angle AMN=\alpha$, $N\in CD$ (рис. Р. 3.9); требуется найти $S_{AMND}:S_{BMNC}$. Пусть $AB=a$; тогда $S_{AMND}=\dfrac{MA+ND}{2}\cdot a=\dfrac{a+2ND}{4}\cdot a$, $S_{BMNC}=\dfrac{MB+NC}{2}\cdot a=$ $=\dfrac{\frac{a}{2}+a-ND}{2}\cdot a=\dfrac{3a-2ND}{4}\cdot a$; $\dfrac{S_{AMND}}{S_{BMNC}}=\dfrac{a+2ND}{3a-2ND}$. Проведем $NE\parallel AD$ и из

ΔMEN найдем $ME = a\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $ND = MA - ME = \frac{a}{2} - a\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a - 2a\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. Подставив вместо ND найденное значение, получим

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}} = \frac{a + a - 2a\operatorname{ctg}\alpha}{3a - a + 2a\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right). \blacksquare$$

3.020. $\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha}$. **3.021.** $\frac{2}{\pi}\sin 2\alpha\sin^2\alpha$. **3.022.** $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **3.023.** $\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3.024. $\dfrac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$.

3.025. □ По условию, $ABCD$ — ромб (рис. Р. 3.10), $\angle BAC = \alpha$ ($\alpha < 90°$), r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб, r_2 — радиус окружности, вписанной в ΔABC. Пусть $AB = a$. Проведем $BE \perp AD$. В ΔBEA имеем $BE = 2r_1 = a\sin\alpha$, откуда $r_1 = \frac{a\sin\alpha}{2}$. Из ΔABC по теореме косинусов находим $AC = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(180° - \alpha)} = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $P_{\Delta ABC} = 2a + 2a\cos\frac{\alpha}{2} = 4a\cos^2\frac{\alpha}{4}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, откуда $r_2 = \frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{a^2\sin\alpha}{4a\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}$. Итак, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a\sin\alpha\cdot 4\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2a\sin\alpha} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}$. ■

3.026. □ По условию, $ABCD$ — прямоугольник, $AC = d$, $\frac{\angle ACB}{\angle ACD} = \frac{m}{n}$ (рис. Р. 3.11). Так как $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$, то $mx + nx = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2(m+n)}$; значит, $\angle ACB = \frac{m\pi}{2(m+n)}$, $\angle ACD = \frac{n\pi}{2(m+n)}$. Из ΔABC и ΔADC находим $BC = d\cos\frac{m\pi}{2(m+n)}$, $DC = d\cos\frac{n\pi}{2(m+n)}$. Следовательно,

$$P_{ABCD} = 2\left(d\cos\frac{m\pi}{2(m+n)} + d\cos\frac{n\pi}{2(m+n)}\right) =$$

$$= 4d\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)} = 2\sqrt{2}\,d\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}. \blacksquare$$

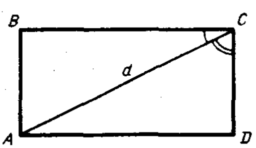


Рис. Р.3.11

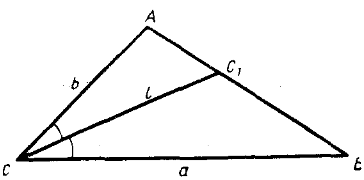


Рис. Р.3.12

3.027. $\cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{6}$. **3.028.** $\arccos\frac{k-1}{k}$ и $\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$, $k>1$. **3.029.** $\frac{1}{2k}$.

3.030. $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$, $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$.

3.031. □ По условию, в ΔABC имеем: $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACC_1=\angle BCC_1$, $CC_1=l$; требуется найти $\angle ACB$ (рис. Р. 3.12). Пусть $AB=c$; согласно свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{b}{a}$ или $\frac{AC_1+C_1B}{C_1B}=\frac{a+b}{a}$ или $\frac{c}{C_1B}=\frac{a+b}{a}$, откуда $C_1B=\frac{ac}{a+b}$ и $AC_1=c-\frac{ac}{a+b}=\frac{bc}{a+b}$. Обозначим $\angle ACB$ через α. В ΔACC_1 и $\angle BCC_1$ имеем $AC_1^2=b^2+l^2-2bl\cos\frac{\alpha}{2}$; $BC_1^2=a^2+l^2-2al\cos\frac{\alpha}{2}$. Подставив в эти равенства значения AC_1 и BC_1, получим $\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}=b^2+l^2-2bl\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}=a^2+l^2-2al\cos\frac{\alpha}{2}$; вычитая из второго равенства первое, находим $\frac{c^2(a^2-b^2)}{(a+b)^2}=a^2-b^2-2l\,(a-b)\cos\frac{\alpha}{2}$ или $c^2=(a+b)^2-2l\,(a+b)\cos\frac{\alpha}{2}$. Но $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, откуда $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=$ $=a^2+2ab+b^2-2l\,(a+b)\cos\frac{\alpha}{2}$ или $2l\,(a+b)\cos\frac{\alpha}{2}=2ab\,(1+\cos\alpha)=$ $=4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Так как $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, то $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{l(a+b)}{2ab}$, откуда $\frac{\alpha}{2}=\arccos\frac{l(a+b)}{2ab}$, т. е. $\alpha=2\arccos\frac{l(a+b)}{2ab}$. ■

3.032. □ По условию, имеем: $ABCD$ — квадрат, AEF — равнобедренный треугольник, $AE=AF$, $E\in BC$, $F\in CD$, $\operatorname{tg}\angle AEF=3$ (рис. Р. 3.13); требуется найти $\cos\angle FAD$. Для удобства положим $\angle AEF=\alpha$, $\angle FAD=\beta$; тогда $\angle EAF=180°-2\alpha$. Так как $\Delta ABE=\Delta ADF$ (по катету и гипотенузе), то $\beta=\frac{1}{2}\,(90°-180°+2\alpha)=\alpha-45°$. Следовательно, $\cos\beta=\cos\,(\alpha-45°)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\cos\alpha+\sin\alpha)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha=3$, находим $1+9=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Итак, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ■

3.033. $30°$. **3.034.** $\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. **3.035.** $2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$, $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$. **3.036.** $\arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}$.

3.037. □ По условию, в ΔABC имеем $\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$; требуется доказать, что треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. Из данного равенства получим $\sin A\sin^2 B\cos B-\cos A\sin B\sin^2 A=0$ или $\sin A\sin B\times$ $\times(\sin B\cos B-\cos A\sin A)=0$. Но $\sin A\neq 0$, $\sin B\neq 0$, так как A и B — углы треугольника; следовательно, $\sin 2B-\sin 2A=0$ или $2\cos\,(A+B)\sin\,(B-A)=0$, откуда $\left[\begin{array}{l}\cos\,(A+B)=0,\\ \sin\,(B-A)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A+B=\pi/2,\\ B-A=0.\end{array}\right.$ Итак, ли-

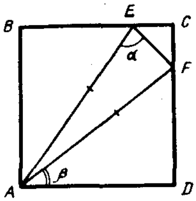


Рис. Р.3.13

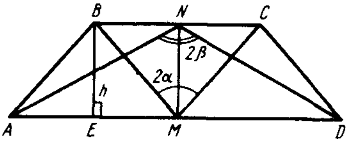


Рис. Р.3.14

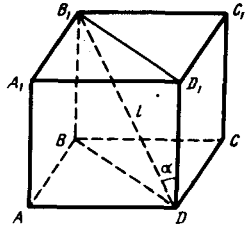


Рис. Р.3.15

бо $C=\pi/2$, т. е. треугольник прямоугольный, либо $A=B$, т. е. треугольник равнобедренный. ■

3.039. $\dfrac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

3.040. □ По условию, в трапеции $ABCD$ имеем: $AB=CD$, $BC\parallel AD$, $M\in AD$, $AM=MD$, $N\in BC$, $BN=NC$, $BE\perp AD$, $BE=h$, $\angle BMC=2\alpha$, $\angle AND=2\beta$ (рис. Р. 3.14). Так как $\triangle ABM=\triangle CMD$ и $\triangle ABN=\triangle NCD$ (по двум сторонам и углу между ними), то $BM=MC$ и $AN=ND$. Из $\triangle AMN$ и $\triangle BMN$ находим $AM=h\operatorname{tg}\beta$. $BN=h\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=(AM+BN)h=h^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

При $h=2$, $\alpha=15^\circ$ и $\beta=75^\circ$ получим

$$S_{ABCD}=\frac{4\sin 90^\circ}{\cos 15^\circ\cos 75^\circ}=\frac{4}{\cos 15^\circ\sin 15^\circ}=\frac{8}{\sin 30^\circ}=16.$$ ■

3.041. $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. **3.042.** $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2(\alpha/4)}$. **3.043.** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\alpha-\dfrac{\pi}{2}}$.

3.044. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $B_1D=l$, $\angle B_1DD_1=\alpha$, $P_{ABCD}=P$ (рис. Р. 3.15). Из $\triangle B_1D_1D$ находим $DD_1=l\cos\alpha$, а $D_1B_1=DB=l\sin\alpha$. Положим $AB=x$, $AD=y$; тогда

$$\begin{cases}2x+2y=P,\\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=P/2,\\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2xy+y^2=P^2/4,\\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $xy=\dfrac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}$. Итак,

$$V_{\text{пар}}=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}\cdot l\cos\alpha=\frac{l(P^2-4l^2\sin^2\alpha)\cos\alpha}{8}.$$ ■

3.045. $\dfrac{1}{3}\pi d^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.046.** $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$.

3.047. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AC=CB$, $\angle ACB=\alpha$, $A_1B=l$, $\angle A_1BA=\beta$ (рис. Р. 3.16), требуется найти $V_{\text{пр}}=S_{\triangle ABC}\cdot A_1A$. Из $\triangle A_1AB$ находим $AA_1=l\sin\beta$, $AB=l\cos\beta$, а из $\triangle ADC$ получим $DC=AD\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}l\cos\beta\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно,

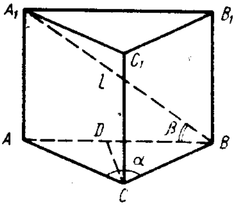


Рис. Р.3.16

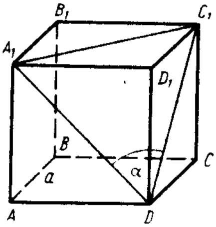


Рис. Р.3.17

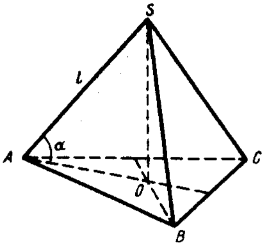


Рис. Р.3.18

$$V_{\text{пр}}=\frac{1}{2}\,l\cos\beta\cdot\frac{1}{2}\,l\cos\beta\,\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot l\sin\beta=\frac{1}{4}\,l^3\cos^2\beta\,\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta=$$

$$=\frac{1}{8}\,l^3\sin 2\beta\cos\beta\,\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

3.048. $\dfrac{d^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **3.049.** $\dfrac{a^3\sin 2\alpha\,\operatorname{tg}\beta}{2}$.

3.050. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, $AB=a$, $\angle A_1DC_1=\alpha$ (рис. Р. 3.17). Имеем $A_1C_1=a\sqrt{2}$. Пусть $A_1D=x$; тогда $DC_1=x$. Из ΔA_1DC_1 по теореме косинусов находим $2a^2=2x^2-2x^2\cos\alpha=4x^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, откуда $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Из ΔDD_1A_1 получим

$$DD_1=\sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}-a^2}=\frac{a\sqrt{2\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Итак, $V_{\text{пр}}=\dfrac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. ■

3.051. $\dfrac{aS}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

3.052. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $SA=l$, $SO\perp(ABC)$, $\angle SAO=\alpha$ (рис. Р. 3.18). Из ΔSAO находим $SO=l\sin\alpha$, $AO=l\cos\alpha$, откуда $AB=AO\sqrt{3}=l\sqrt{3}\cos\alpha$. Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha}{4}$. Итак,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\,S_{\Delta ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha}{4}\cdot l\sin\alpha=\frac{l^3\sqrt{3}\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}.\ \blacksquare$$

3.053. $\dfrac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2(\alpha/2)}$. **3.054.** $\dfrac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$. **3.055.** $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{6}$. **3.056.** $\dfrac{H^3\operatorname{ctg}^2\beta\sin 2\alpha}{3}$.

3.057. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD=\alpha$ $(\alpha<90^\circ)$, $AB=a$, $\left(\widehat{(SAB);(ABC)}\right)=\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)=\left(\widehat{(SCD);(ABC)}\right)=\left(\widehat{(SDA);(ABC)}\right)=\beta$, $SO\perp(ABC)$ (рис. Р. 3.19). Проведем апофемы пирамиды SE, SF, SK, SL; тогда $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OK\perp CD$, $OL\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах) и, значит, $\angle SEO=\angle SFO=\angle SKO=\angle SLO=\beta$. Далее имеем

$$S_{\text{бок}}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\beta}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}.$$ Наконец,

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}+a^2\sin\alpha=\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\cos\beta}=\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}. \blacksquare$$

3.058. $\dfrac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

3.059. □ По условию, $SABC$ — треугольная пирамида, $AB=BC=a$, $\angle ABC=\alpha$, $SO\perp(ABC)$, $\angle SAO=\angle SBO=\angle SCO=\beta$ (рис. Р. 3.20). Так как $\Delta SOA=\Delta SOB=\Delta SOC$ (по катету и прилежащему углу), то $OA=OB=OC$, т. е. O — центр окружности, описанной около ΔABC. Пусть $OA=R$; тогда $AB=2R\sin\angle ACB$ или $a=2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=2R\cos\frac{\alpha}{2}$,

а $R=\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔSOA находим $SO=\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, откуда

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO=\frac{1}{6}a^2\sin\alpha\,\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta. \blacksquare$$

3.060. $\dfrac{2}{3}h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta$.

3.061. □ По условию, $DABC$ — пирамида, ABC — правильный треугольник,

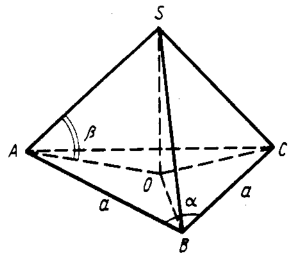


Рис. Р.3.20

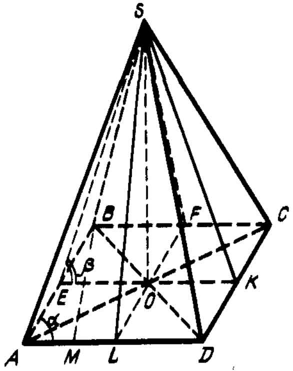


Рис. Р.3.19

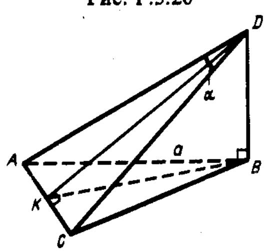


Рис. Р.3.21

$(ABD)\perp(ABC)$, $(BCD)\perp(ABC)$, $\angle ADC=\alpha$, $AB=a$ (рис. Р. 3.21). Требуется найти высоту призмы с основанием, равным $\triangle ABC$, причем $V_{\text{пр}}=V_{\text{пир}}$. Высота пирамиды совпадает с ребром DB, так как перпендикуляр, опущенный из D на (ABC), должен принадлежать и (ABC), и (CBD). Проведем $DK\perp AC$; так как $\triangle ADC$ — равнобедренный, то $KA=KC$. Из $\triangle DKC$ находим $DK=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из $\triangle DBK$ получим

$$DB=\sqrt{DK^2-BK^2}=\sqrt{\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}=\frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3\right)}.$$

Поскольку $V_{\text{пир}}=V_{\text{пр}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$, имеем $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=\frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3\right)}$, откуда

$$H=\frac{a}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}}=\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}.\ \blacksquare$$

3.062. □ По условию, $DABC$ — пирамида, $\angle ACB=90^\circ$, $AD\perp(ABC)$, $\angle DBA=\alpha$, $\angle DBC=\beta$ $(\alpha<\beta)$ (рис. Р. 3.22). Пусть $AD=h$; тогда из $\triangle ADB$ находим $AB=h\operatorname{ctg}\alpha$, $DB=\frac{h}{\sin\alpha}$. Так как $BC\perp AC$, то $DC\perp BC$ и из $\triangle DCB$ получим $BC=DB\cos\beta=\frac{h\cos\beta}{\sin\alpha}$. Итак, в $\triangle ABC$ имеем $\sin\angle A=\frac{BC}{AB}=$ $=\frac{h\cos\beta}{\sin\alpha\cdot h\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, откуда $\angle A=\arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\angle B=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. ■

3.063. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, $AB=a$, $OO_1\perp(ABC)$, $B_1E\parallel D_1F\parallel OO_1$, $\angle D_1DE=\alpha$, $\angle B_1DE=\beta$ (рис. Р. 3.23). Пусть $A_1B_1=x$; тогда $B_1D_1=x\sqrt{2}$, $BD=a\sqrt{2}$. Имеем $FD=OD-OF=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{x\sqrt{2}}{2}=\frac{(a-x)\sqrt{2}}{2}$, $ED=OD+OE=\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{x\sqrt{2}}{2}=$

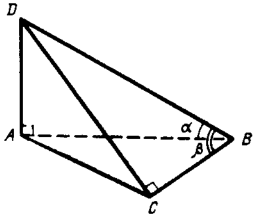


Рис. Р.3.22

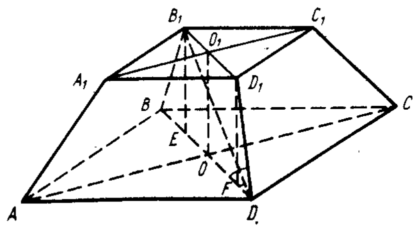


Рис. Р.3.23

$=\frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}$. Из $\triangle D_1FD$ находим $D_1F=FD\operatorname{tg}\alpha=\frac{(a-x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, а из $\triangle B_1ED$ получим $B_1E=ED\operatorname{tg}\beta=\frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta$. Так как $D_1F=B_1E=OO_1$, то $(a-x)\operatorname{tg}\alpha=(a+x)\operatorname{tg}\beta$ или $x(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=a(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)$, т. е. $x=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Итак, $S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. ■

3.064. $\frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(\pi/n)}{4\cos\alpha}$.

3.065. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $S_{\text{бок}}=5S_{\triangle ABC}$ (рис. Р.3.24); требуется найти $\angle ASB$. Пусть $SA=l$ и $\angle ASB=\alpha$; тогда $S_{\text{бок}}=\frac{3}{2}l^2\sin\alpha$. Из $\triangle ASB$ по теореме косинусов находим

$AB^2=2l^2-2l^2\cos\alpha=4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; тогда $S_{\triangle ABC}=\frac{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{4}=l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Используя условие, имеем: $\frac{3}{2}l^2\sin\alpha=5l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $3\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=5\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{5}$; $\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$, т. е. $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. ■

3.066. $\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$.

3.067. □ По условию, $S_{ABC\ldots K}$ — правильная n-угольная пирамида, $\angle ASB=\alpha$, SM и SN — апофемы смежных боковых граней; требуется найти $\angle MSN$ (рис. Р.3.25). Проведем $SO\perp(ABC)$ и соединим O с точками A, B, M и N. Имеем $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$, $\angle ABC=\frac{\pi(n-2)}{n}$. Пусть $AB=a$. Из $\triangle MSB$ найдем $SM=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Далее из $\triangle MNB$ по теореме косинусов находим

$$MN^2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos\frac{\pi(n-2)}{n}=\frac{a^2}{2}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)=a^2\cos^2\frac{\pi}{n},$$

а из $\triangle MSN$ получим

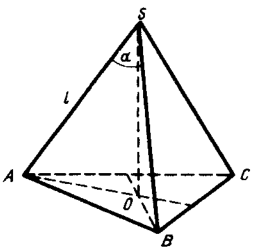


Рис. Р.3.24

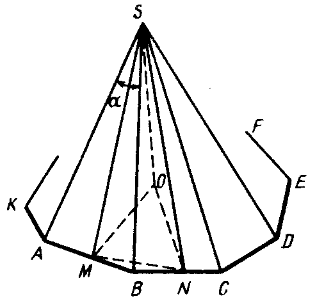


Рис. Р.3.25

$MN^2=2SM^2-2SM^2\cos\angle MSN=2\dfrac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}(1-\cos\angle MSN)=$

$=a^2\sin^2\dfrac{\angle MSN}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

Следовательно, $a^2\cos^2\dfrac{\pi}{n}=a^2\sin^2\dfrac{\angle MSN}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; $\sin\dfrac{\angle MSN}{2}=\cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Итак, $\angle MSN=2\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$. ■

3.068. $\arcsin\dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **3.069.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. **3.070.** $\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.071. □ По условию, $\gamma_1\cap\gamma_2=l$, двугранный угол l равен α, $AB\in\gamma_1$, $(\widehat{l;\ AB})=\beta$; требуется найти $(\widehat{\gamma_2;\ AB})$ (рис. P.3.26). Проведем $AO\perp\gamma_2$, $AC\perp l$; тогда $\angle ACO=\alpha$ (как линейный угол двугранного угла $ABCO$), $\angle ABC=\beta$. Так как OB — проекция AB на γ_2, то $\angle ABO$ — искомый угол. Пусть $AO=a$; тогда $AC=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ (из ΔAOC), а в ΔACB имеем $AB=\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$. Наконец, из ΔAOB находим $\sin\angle ABO=\dfrac{AO}{AB}=\sin\alpha\sin\beta$. Итак, $\angle ABO=\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. ■

3.072. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **3.073.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. **3.074.** $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. **3.075.** $\sqrt{6}/6$. **3.076.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$.

3.077. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $S_{бок}:S_{\Delta ABC}=k$, $SO\perp(ABC)$; требуется найти $\angle ASO$ (рис. P.3.27). Пусть $SO=h$ и $\angle ASO=\alpha$; тогда в ΔSOA имеем $AO=h\operatorname{tg}\alpha$, откуда $AB=AO\sqrt{3}=h\operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{3}$, $OD=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}h\operatorname{tg}\alpha$. Проведем $SD\perp AC$ и из ΔSOD найдем $SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{1}{4}h^2\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{h}{2}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Следовательно,

$S_{бок}=\dfrac{3}{2}AB\cdot SD=\dfrac{3}{2}h\operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{h}{2}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{3}{4}h^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3(4+\operatorname{tg}^2\alpha)}$,

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{3h^2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sqrt{3}}{4}$.

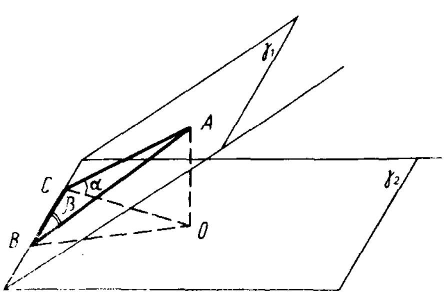


Рис. P.3.26

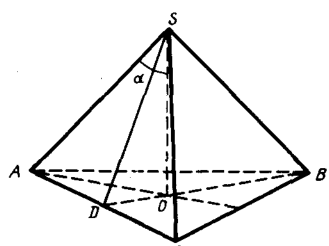


Рис. P.3.27

Итак, получаем уравнение

$$\frac{3h^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3(4+\operatorname{tg}^2\alpha)}\,4}{4\cdot 3h^2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sqrt{3}}=k;\quad \frac{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}=k;\quad \sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=k;\quad 4\operatorname{ctg}^2\alpha=k^2-1;$$

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{2}$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{2}$. ■

3.078. $-1/3$. **3.079.** $\arccos(\sqrt{2}/4)$.

3.080. □ По условию, $OABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, $OO_1\perp(ABC)$, $\angle FOE=\angle OFO_1$ (рис. Р.3.28). Положим $OF=l$ и $\angle FOE=\alpha$; тогда $FE=\sqrt{2l^2-2l^2\cos\alpha}=2l\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Учитывая, что $O_1F=FE$, в ΔOO_1F имеем $\cos\alpha=\dfrac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{l}$; $-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+1=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}-1=0$;

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\alpha}{2}=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\alpha=2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. ■

3.081. □ По условию, $SABC$ — треугольная пирамида, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AC}{SA}=\dfrac{AC}{SB}=\dfrac{AC}{SC}=k$ (рис. Р.3.29). Так как $AB=BC=SA=SB=SC=\dfrac{AC}{k}$, то $\Delta ASB=\Delta BSC$ (по трем сторонам). Проведем $AD\perp SB$ и соединим точки D и C. Тогда $\Delta ASD=\Delta SDC$ (поскольку $SA=SC$, сторона SD — общая и $\angle ASD=\angle DSC$), откуда следует, что $\angle SDC=\angle SDA=90°$. Поэтому $\angle ADC$ — линейный угол двугранного угла $ASDC$, т. е. искомый угол. Из ΔADC по теореме косинусов находим $AC^2=2AD^2-2AD^2\cos\angle ADC$, где $AD=\dfrac{SA\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AC\sqrt{3}}{2k}$, так как ΔASB — равносторонний. Значит, $AC^2=2\cdot\dfrac{3AC^2}{4k^2}(1-\cos\angle ADC)$;

$1-\cos\angle ADC=\dfrac{2k^2}{3}$; $2\sin^2\dfrac{\angle ADC}{2}=\dfrac{2k^2}{3}$; $\sin\dfrac{\angle ADC}{2}=\sqrt{\dfrac{k^2}{3}}=\dfrac{k\sqrt{3}}{3}$;

$\angle ADC=2\arcsin\dfrac{k\sqrt{3}}{3}$, где $0<\dfrac{k\sqrt{3}}{3}<1$, т. е. $0<k<\sqrt{3}$. ■

3.082. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AA_1=H$,

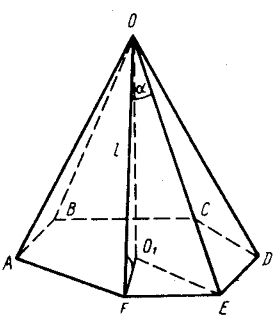


Рис. Р.3.28

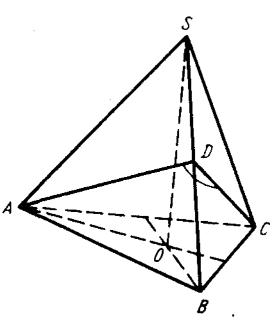


Рис. Р.3.29

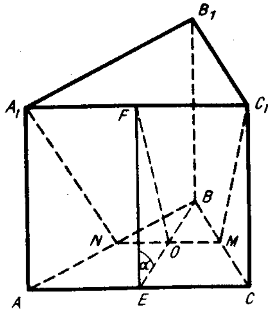


Рис. Р.3.30

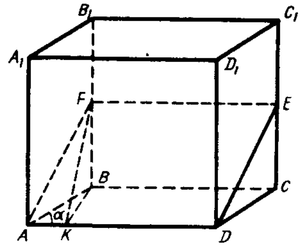


Рис. Р.3.31

$AN=NB$, $BM=MC$, $(\widehat{(A_1C_1M); (ABC)})=\alpha$ (рис. Р.3.30). Проведем $BE\perp AC$ и $EF\| AA_1$; $\angle FEB=\alpha$ как линейный угол двугранного угла. Пусть $BE\bigcap MN=O$; тогда $FO\perp MN$ (по теореме о трех перпендикулярах). Сечение A_1NMC_1 — трапеция, так как $MN\| AC$. Из ΔFEO находим $FO=\dfrac{FE}{\sin\alpha}=\dfrac{H}{\sin\alpha}$, $EO=H\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $BE=2H\operatorname{ctg}\alpha$. Из ΔBEC получим $EC=MN=BE\operatorname{ctg}60^\circ=2H\operatorname{ctg}\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{3}$; значит, $AC=A_1C_1=$ $=\dfrac{4H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{3}$. Итак,

$$S_{A_1NMC_1}=\frac{AC+MN}{2}\cdot FO=H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}.\ ■$$

3.083. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD=\alpha$ ($\alpha<90^\circ$), $AA_1 : AB=k$, $C_1E=EC$, $ADEF$ — сечение призмы (рис. Р.3.31); требуется найти $(\widehat{(ABC); (FAD)})$. Пусть $AB=a$; тогда $AA_1=ka$. Проведем $BK\perp AD$; тогда $FK\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $\angle FKB$ — линейный угол между сечением и основанием $ABCD$. Из ΔAKB найдем $BK=a\sin\alpha$; так как $EF\| AD$, то $FB=\dfrac{1}{2}BB_1=\dfrac{1}{2}ka$. Наконец, из ΔFBK получим $\operatorname{tg}\angle FKB=\dfrac{FB}{BK}=\dfrac{ka}{2a\sin\alpha}=\dfrac{k}{2\sin\alpha}$, откуда $\angle FKB=\operatorname{arctg}\dfrac{k}{2\sin\alpha}$. ■

3.084. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. **3.085.** $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.086.** $\dfrac{1}{8}(a^2-b^2)(a-b)\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

3.087. $\operatorname{arctg}\dfrac{2m}{m+n}$. **3.088.** $\dfrac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$. **3.089.** $\dfrac{1}{7}$. **3.090.** $\dfrac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$.

3.091. □ По условию, $SA_1A_2A_3...A_{12}$ — правильная двенадцатиугольная пирамида, SA_1A_5 — сечение пирамиды плоскостью, $(\widehat{(SA_1A_5); (A_1A_2A_3)})=\alpha$, $S_{\Delta SA_1A_5}=S$ (рис. Р. 3.32). Проведем $SO\perp(A_1A_2A_3)$. Пусть $OA_1=R$; так как $\angle A_1OA_2=\dfrac{360^\circ}{12}=30^\circ$, $\angle A_1OA_5=30^\circ\cdot 4=120^\circ$, то A_1A_5 — сторона правильного вписанного в окружность треугольника и $A_1A_5=R\sqrt{3}$. Проведем

$OK \perp A_1A_5$; тогда $\angle A_1OK = 60°$, $OK = \frac{1}{2}R$. Из ΔSOK находим $SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{R}{2\cos\alpha}$, $SO = \frac{1}{2}R\,\mathrm{tg}\,\alpha$, поскольку $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла между сечением и основанием. Имеем $S_{\Delta SA_1A_5} = \frac{1}{2}A_1A_5 \cdot SK$, т. е. $S = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$, откуда $R = \frac{2\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}}$. Далее находим

$$S_{\text{осн}} = 12S_{\Delta OA_1A_2} = 12 \cdot \frac{1}{2}R^2\sin 30° = 3R^2 = \frac{12S\cos\alpha}{\sqrt{3}} = 4S\sqrt{3}\cos\alpha.$$

Итак,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{4S\sqrt{3}\cos\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4S\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{27}} =$$

$$= \frac{4S\sqrt[4]{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{3}. \blacksquare$$

3.092. □ Пусть AA_1B_1B — осевое сечение цилиндра, $\angle AOB = \alpha$ (рис. Р.3.33). Положим $AA_1 = H$; тогда, учитывая, что $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, из ΔA_1AB находим $AB = H\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = H\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$V = \pi\left(\frac{H\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi H^3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{4}, \text{ откуда } H = \sqrt[3]{\frac{4V\,\mathrm{ctg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\pi}}. \blacksquare$$

3.093. □ По условию, AA_1B_1B — развертка боковой поверхности цилиндра, AA_1

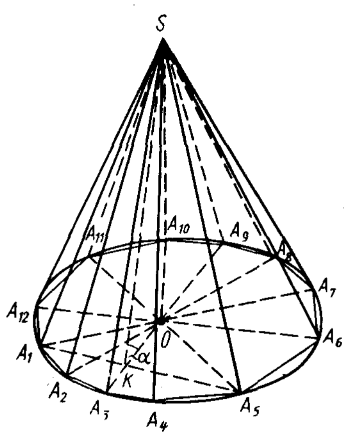


Рис. Р.3.32

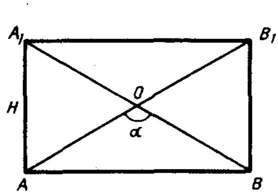


Рис. Р.3.33

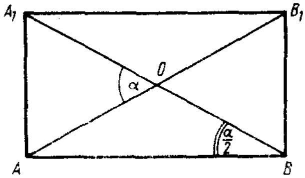


Рис. P.3.34

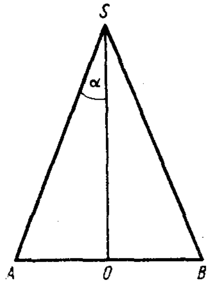


Рис. P.3.35

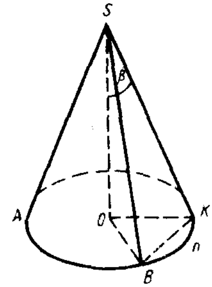


Рис. P.3.36

и B_1B — его образующие, AB и A_1B_1 — длины окружностей его оснований, $AB_1=d$, $\angle AOA_1=\alpha$ (рис. P.3.34). Так как $\angle AOA_1$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, то $\angle OBA=\frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle A_1AB$ находим $A_1A=d\sin\frac{\alpha}{2}$, $AB=d\cos\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$S_{\text{бок}}=2\pi RH=AB\cdot AA_1=d^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha. \blacksquare$$

3.094. $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **3.095.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$. **3.096.** $2\operatorname{arctg}\frac{4m}{\pi n}$ при $\frac{m}{n}<\frac{\pi}{4}$; $2\operatorname{arctg}\frac{\pi n}{4m}$ при $\frac{m}{n}>\frac{\pi}{4}$. **3.097.** $\frac{\pi l^3\sin 2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$.

3.098. ☐ Изобразим осевое сечение конуса; SO — высота конуса, SA и SB — его образующие (рис. P.3.35). По условию, $SA-SO=d$, $\angle ASO=\alpha$. Пусть $OA=R$. Из $\triangle SOA$ находим $SO=R\operatorname{ctg}\alpha$, $SA=\frac{R}{\sin\alpha}$. Используя условие, имеем $\frac{R}{\sin\alpha}-R\operatorname{ctg}\alpha=\frac{R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=d$, откуда $R=d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot SO=\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}\pi d^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha. \blacksquare$$

3.099. $\frac{\pi d^2}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$. **3.100.** $2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$. **3.101.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin(\alpha/2)}$. **3.102.** $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2(\beta/2)}$. **3.103.** $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **3.104.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.105. ☐ По условию, SAK — конус, SO — его высота, BK — хорда, $BK=a$, $\smile BnK=\alpha$, $\angle OSK=\beta$ (рис. P.3.36). Так как $\smile BnK=\alpha^\circ$, то $\angle BOK=\alpha^\circ$. Пусть R — радиус основания конуса; тогда в $\triangle OBK$ имеем $a^2=2R^2-2R^2\cos\alpha=4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, т. е. $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $R=\frac{a}{2\sin(\alpha/2)}$. Из $\triangle SOK$ находим $SO=OK\operatorname{ctg}\beta=\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin(\alpha/2)}$. Итак,

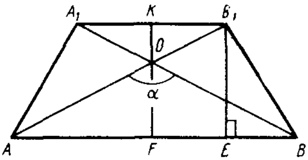


Рис. Р.3.37

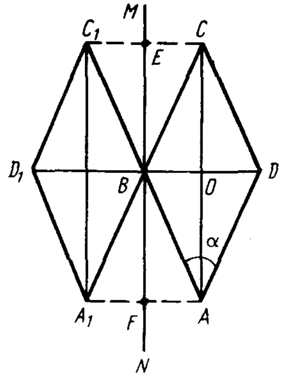


Рис. Р.3.38

$$V=\frac{1}{3}\,\pi R^2\cdot SO=\frac{1}{3}\,\pi\,\frac{a^2}{4\sin^2(\alpha/2)}\cdot\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin(\alpha/2)}=\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3(\alpha/2)}.\ ■$$

3.107. □ Пусть AA_1B_1B — осевое сечение усеченного конуса, где AA_1 и BB_1 — его образующие, AB и A_1B_1 — диаметры его оснований, F и K — центры этих оснований, $AB_1\bigcap A_1B=O$ (рис. Р.3.37). Согласно условию, $AO:OB_1=2:1$, $\angle AOB=\alpha$, $AB_1=l$. Имеем $AO=\frac{2}{3}\,l$, $OB_1=\frac{1}{3}\,l$, $\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Проведем $B_1E\perp AB$ и из ΔAB_1E находим $B_1E=l\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=l\cos\frac{\alpha}{2}$. Затем из ΔOFA найдем $AF=AO\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}\,l\sin\frac{\alpha}{2}$, и, наконец, из ΔOKB_1 получим $KB_1=OB_1\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}\,l\sin\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{\text{ус. кон}}=\frac{\pi}{3}\,l\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{4}{9}\,l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{9}\,l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{9}\,l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\frac{7\pi}{27}\,l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{7\pi l^3}{54}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.\ ■$$

3.108. □ По условию, $ABCD$ — ромб, $AB=a$, $\angle BAD=\alpha$ ($\alpha<90°$), MN — ось вращения, $MN\|AC$, $B\in MN$ (рис. Р.3.38); требуется найти $V_{\text{т. вр}}=2(V_{BECD}-V_{BEC})$. Трапеция $BECD$ при вращении образует усеченный конус, а треугольник BEC — конус. Имеем

$$V_{\text{т. вр}}=2\left(\frac{1}{3}\,\pi\cdot BE(BD^2+BD\cdot EC+EC^2-EC^2)\right)=\frac{2}{3}\,\pi\,BE\cdot BD\,(BD+EC).$$

Но $BD=2BO=2EC$; поэтому $V_{\text{т. вр}}=4\pi\,BE\cdot EC^2$. Учитывая, что $\angle CBE=\frac{\alpha}{2}$, из ΔBEC находим $EC=a\sin\frac{\alpha}{2}$, $BE=a\cos\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{\text{т. вр}}=4\pi a\cos\frac{\alpha}{2}\cdot a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.\ ■$$

3.109. $\frac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. **3.110.** $\dfrac{8\pi r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$. **3.111.** $\arccos(1/9)$. **3.112.** $\dfrac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **3.113.** $\dfrac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. **3.114.** $\dfrac{V\cos^2(\alpha/2)\sin\alpha}{\pi}$.

3.115. □ По условию, SAE — конус, $SABCD$ — вписанная в конус пирамида, $AB=BC$, $CD=AD$, $\angle ABC=\alpha$ (рис. Р.3.39). Проведем $SO\perp(ABC)$ и обозначим $OA=R$, $SO=H$. Отрезок SO является высотой конуса и пирамиды; тогда $V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Так как $\angle ABC=\alpha$, то $\angle BAC=\angle BCA=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, $\angle ADC=180^\circ-\alpha$ (согласно свойству четырехугольника, вписанного в окружность) и $\angle CAD=\angle ACD=\frac{180^\circ-(180^\circ-\alpha)}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90^\circ$, т. е. ΔBAD — прямоугольный и $BD=2R$. Аналогично, ΔBCD — прямоугольный и, значит,

$$S_{ABCD}=2S_{\Delta BAD}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD=2R\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2R^2\sin\alpha.$$

Тогда $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\cdot 2R^2\sin\alpha\cdot H=\frac{2R^2H\sin\alpha}{3}$. Окончательно получим

$$\frac{V_{\text{пир}}}{V_{\text{кон}}}=\frac{2R^2H\sin\alpha}{3}:\frac{\pi R^2H}{3}=\frac{2\sin\alpha}{\pi}.\ \blacksquare$$

3.116. □ По условию, DAB — конус, $DABC$ — вписанная в этот конус пирамида, $AD\perp BD$, $AD\perp CD$, $DB\perp DC$, $DO\perp(ABC)$ (рис. Р.3.40). Так как $DB=DC=DA$, то $\Delta ADB=\Delta ADC=\Delta DBC$ как прямоугольные треугольники, имеющие по два равных катета; следовательно, ΔABC — правильный. Положим $AB=a$; тогда $DA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из ΔAOD находим $\sin\angle ADO=\frac{OA}{DA}=\frac{a\sqrt{3}}{3}:\frac{a\sqrt{2}}{3}=$ $=\frac{\sqrt{6}}{3}$, т. е. $\angle ADO=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\blacksquare$

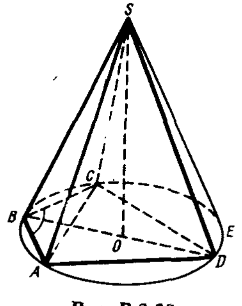


Рис. Р.3.39

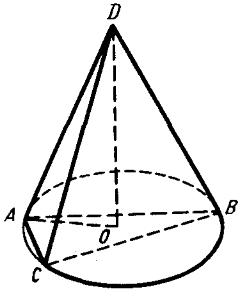


Рис. Р.3.40

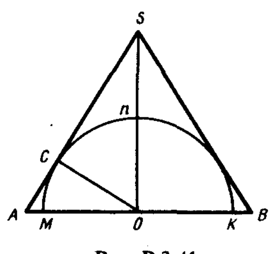


Рис. Р.3.41

3.117. $\dfrac{8\sqrt{3}\,\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. **3.118.** $V\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$. **3.119.** $\dfrac{\pi H^3}{12}\,\mathrm{sitn}^2\alpha\sin^2 2\alpha$.

3.120. □ Осевое сечение фигуры изображается треугольником SAB, в который вписан полукруг MnK; SA и SB — образующие конуса, $SO\perp AB$ — высота конуса; AB — диаметр основания конуса и MK — диаметр полукруга; O — центр основания конуса и полукруга (рис. P.3.41). По условию, $SA=l$, $\angle SAO=\alpha$. Из ΔSOA находим $OA=l\cos\alpha$. Пусть C — точка касания полушара с боковой поверхностью конуса; тогда $OC\perp SA$. Из ΔOCA получим $OC=OA\sin\alpha=l\cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\,l\sin 2\alpha$. Следовательно,

$$V=\frac{2}{3}\,\pi OC^3=\frac{2}{3}\,\pi\cdot\frac{1}{8}\,l^3\sin^3 2\alpha=\frac{1}{12}\,\pi l^3\sin^3 2\alpha.\ \blacksquare$$

3.121. $2\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. **3.122.** $\cos 2\alpha$, считая от основания. **3.123.** $\dfrac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. **3.124.** $1-k$.

3.125. 7/25. **3.126.** $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$.

3.127. □ Изобразим осевое сечение фигуры. В сечении получим ΔSDE, где SD и SE — образующие конуса, ED — диаметр его основания, SB — высота конуса, O — центр большого круга вписанного в конус шара, C — точка касания круга с SD, A — центр окружности, по которой шар касается боковой поверхности конуса (рис. P.3.42). По условию, $AC=r$, $\angle BSD=\alpha$. Соединим точки O и C; тогда $OC\perp SD$, $AC\perp SB$; следовательно, $\angle OCA=\angle BSD=\alpha$. Из ΔOAC имеем $OC=\dfrac{r}{\cos\alpha}$, а из ΔOCS находим

$$SO=\frac{OC}{\sin\alpha}=\frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}.\ \text{Но}$$

$$SB=SO+OB=SO+OC=\frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{r}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}\,(1+\sin\alpha)=\frac{2r(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Далее из ΔSBD получим $BD=SB\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2r(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{r(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$. Итак,

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\,\pi BD^2\cdot SB=\frac{1}{3}\,\pi\,\frac{r^2(1+\sin\alpha)^2}{\cos^4\alpha}\cdot\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

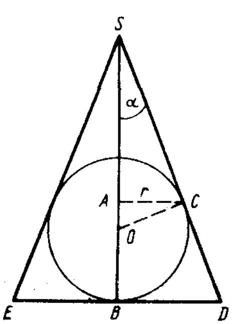


Рис. P.3.42

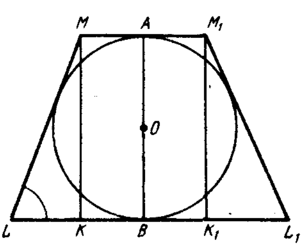


Рис. P.3.43

$$=\frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^5\alpha}=\frac{\pi r^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)^3=\frac{\pi r^3\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}.\ \blacksquare$$

3.128. $2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

3.129. □ Осевое сечение фигуры представляет собой равнобедренную трапецию LMM_1L_1, в которую вписана окружность с центром O (рис. Р.3.43). По условию, LL_1 и MM_1 — диаметры нижнего и верхнего оснований конуса, A и B — центры этих оснований. Обозначим радиусы оснований усеченного конуса через R и r; тогда $\pi R^2:\pi r^2=4$ или $R=2r$. Проведем $MK\|AB$; имеем $ML=R+r=3r$ (в силу свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности), $KL=BL-BK=BL-AM=2r-r=r$. Из $\triangle MKL$ находим $\cos\angle MLB=\frac{KL}{ML}=\frac{r}{3r}=\frac{1}{3}$, т. е. $\angle MLB=\arccos\frac{1}{3}$. ■

3.130. $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

3.131. □ По условию, ABC — остроугольный треугольник, $AD\perp BC$, $CE\perp AB$, $AD=a$, $CE=b$, $\angle AOE=\alpha$ (рис. Р.3.44). Заметим, что $\angle ABD=\angle AOE=\alpha$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами ($OE\perp AB$, $OD\perp BC$). Из $\triangle ABD$ и $\triangle BEC$ находим $AB=\frac{a}{\sin\alpha}$, $BC=\frac{b}{\sin\alpha}$. В $\triangle ABC$ имеем $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\alpha=\frac{a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\sin^2\alpha}-\frac{2ab}{\sin^2\alpha}\cos\alpha$. Итак, $AC=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. ■

3.132. □ По условию, $\angle DCE=\angle DEC$, $\operatorname{tg}\angle DCE=3/4$, $AD=AE$ и $\angle DCL=\angle LCE$; требуется найти $\angle LCA$ (рис. Р.3.45). Так как $\operatorname{tg}\angle DCE=3/4<1$, то $\angle DCE<45°$ и $\angle CDE>90°$, т. е. $\triangle CDE$ — тупоугольный. Проведем $DF\perp CE$, $AB\|DF$. Пусть $CE=a$; тогда $CF=\frac{a}{2}$, $FB=\frac{a}{4}$, $CB=\frac{3a}{4}$, $AB=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\angle DCE=\frac{3a}{16}$. Значит, $\operatorname{tg}\angle ACB=\frac{AB}{CB}=\frac{3a}{16}:\frac{3a}{4}=\frac{1}{4}$ и далее $\angle LCA=\angle LCF-\angle ACB=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Теперь находим

$$\operatorname{tg}\angle LCA=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)}.$$

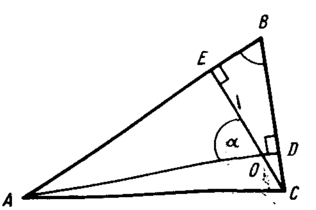


Рис. Р.3.44

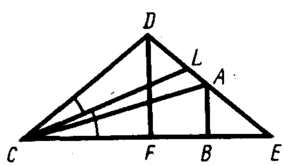


Рис. Р.3.45

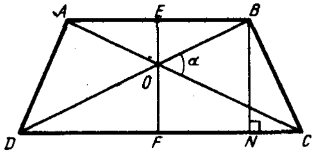


Рис. Р.3.46

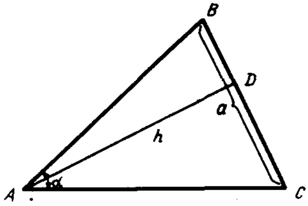


Рис. Р.3.47

Пусть $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\alpha$; тогда $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{9}{16}}=\frac{16}{25}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1}{3}.\text{ Итак, } \operatorname{tg}\angle LCA=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{12}}=\frac{1}{13}.\ \blacksquare$$

3.133. □ По условию, $AB\parallel DC$; $AD=BC$; $\angle BOC=\alpha$; $S_{ABCD}=S$ (рис. Р.3.46). Так как $\angle BOC$ — внешний угол $\triangle DOC$, то $\angle BOC=2\angle ODC$, т. е. $\angle ODC=\alpha/2$. Проведем $BN\perp CD$, $EF\parallel BN$; из $\triangle OFD$ и $\triangle OEB$ находим $OF=DF\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $OE=BE\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Пусть $BN=h$; тогда $h=OF+OE=(DF+BE)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Но $S_{ABCD}=(DF+BE)h$, т. е. $S=h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, откуда $h=\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. ■

3.134. 72/97. **3.135.** $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

3.136. □ По условию, $BC=a$, $AD\perp BC$, $AD=h$, $\angle BAC=\alpha$ (рис. Р.3.47); требуется найти $AB+AC$. Пусть R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$; тогда $a=2R\sin A=2R\sin\alpha$,

$$AB+AC=2R(\sin B+\sin C)=4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$
$$=4R\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Но $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ и, значит,

$$AB+AC=\frac{4a}{2\sin\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{B-C}{2}. \qquad (1)$$

Далее имеем $a=BD+DC=h\operatorname{ctg}B+h\operatorname{ctg}C=\frac{h\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{h\sin\alpha}{\sin B\sin C}$; так как $\sin B\sin C=\frac{1}{2}(\cos(B-C)-\cos(B+C))=\frac{1}{2}(\cos(B-C)+\cos\alpha)$, то $a=\frac{2h\sin\alpha}{\cos(B-C)+\cos\alpha}$. Следовательно,

$$\cos(B-C)=\frac{2h\sin\alpha}{a}-\cos\alpha=\frac{2h\sin\alpha-a\cos\alpha}{a}.$$

Учитывая, что $\cos(B-C)=2\cos^2\frac{B-C}{2}-1$, получим $\frac{2h\sin\alpha-a\cos\alpha}{a}=2\cos^2\frac{B-C}{2}-1$, откуда $\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{\frac{2h\sin\alpha-a\cos\alpha+a}{2a}}$.

Подставив последнее выражение в равенство (1), окончательно находим

$$AB+AC=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2h\sin\alpha+a(1-\cos\alpha)}{2a}}=$$

$$=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{4h\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2a}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2a^2h\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{a\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{2ah\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+a^2}. \blacksquare$$

3.137. $\sqrt{a^2+4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **3.138.** $\frac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$.

3.139. □ По условию, $AD\parallel BC$, $BC=2$, $\angle ABC=\angle BCD=135^\circ$, $\angle AOD=150^\circ$ (рис. Р.3.48). Так как углы при основании равны, то трапеция равнобедренная, т. е. $AB=CD$. Находим $\angle ADC=180^\circ-135^\circ=45^\circ$; $\angle ODA=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$; $\angle BDC=45^\circ-15^\circ=30^\circ$. Из ΔBDC по теореме синусов имеем $\frac{BC}{\sin 30^\circ}=\frac{BD}{\sin 135^\circ}$, откуда $BD=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{2}$. Итак, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD^2\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=2$ (поскольку площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями). $\blacksquare$

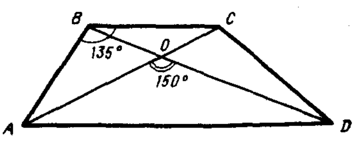


Рис. Р.3.48

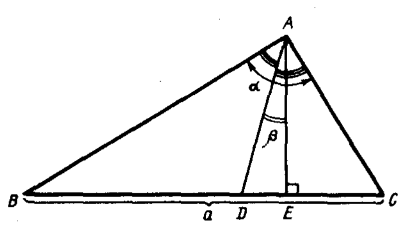


Рис. Р.3.49

3.140. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin 2\alpha}$. **3.141.** $-\cos 2\alpha$. **3.142.** $\dfrac{p^2+ap-q^2}{p}$.

3.143. $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b\cos\alpha$.

3.144. □ По условию, $\angle BAC=\alpha$, $BC=a$, $\angle DAB=\angle DAC$, $AE\perp BC$, $\angle DAE=\beta$ (рис. Р.3.49). Имеем $\angle BAD=\frac{\alpha}{2}$, $\angle ADE=90°-\beta$; тогда $\angle ABD=90°-\beta-\frac{\alpha}{2}$ (согласно свойству внешнего угла треугольника), $\angle ACD=180°-\frac{\alpha}{2}-(90°-\beta)=90°+\beta-\frac{\alpha}{2}$. Пусть $AD=l$; тогда по теореме синусов из $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$ получим:

$$\frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\sin\left(90°-\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{l}{\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)};\ BD=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\sin\left(90°-\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{l}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)};\ DC=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$a=BD+DC=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{l\sin\alpha\cos\beta}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда $l=\dfrac{a\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$. ■

3.145. □ По условию, $\angle ACB=45°$, $\angle ABC=15°$, $BC=a$, $AM\perp BC$, AM — радиус окружности, E и F — точки пересечения окружности со сторонами AB и AC; требуется найти S_{AFME} (рис. Р.3.50). Из $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ находим $MC=AM\operatorname{ctg}45°=AM$, $MB=AM\operatorname{ctg}15°$. Тогда $a=CM+MB=$ $=AM(1+\operatorname{ctg}15°)$, т. е. $AM=\dfrac{a}{1+\operatorname{ctg}15°}$. Заметим, что $\angle FAB=180°-$

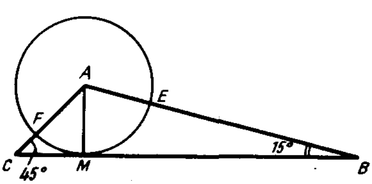


Рис. Р.3.50

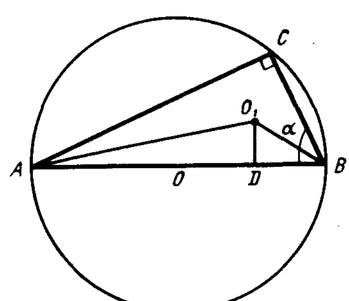


Рис. Р.3.51

$-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$. Следовательно,

$$S_{AFME}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{(1+\operatorname{ctg}15^\circ)^2}=\frac{\pi a^2}{3(\operatorname{ctg}45^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ)^2}=$$

$$=\frac{\pi a^2\sin^2 45^\circ\sin^2 15^\circ}{3\sin^2 60^\circ}=\frac{\pi a^2(1-\cos 30^\circ)}{9}=\frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{18}.\ ■$$

3.146. □ По условию, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle CBA=\alpha$ (рис. Р.3.51). Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей; тогда $AC=2R\sin\alpha$; $BC=2R\cos\alpha$. Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\sin\alpha\cos\alpha=$ $=2R^2\sin\alpha\cos\alpha$. По формуле (2.4) находим $r=\frac{S}{p}=\frac{2R^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2}{2R(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}=$ $=\frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$, откуда

$$\frac{r}{R}=\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha-1=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1.$$

Это отношение является наибольшим при условии $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=1$, откуда $\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{4}$. ■

3.147. □ По условию, $AB=BC$, $\angle ACB=\alpha$, $\angle CAM=\beta$ (рис. Р.3.52). Пусть $AB=a$; тогда

$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}}=\frac{0{,}5AB\cdot AM\sin(\alpha-\beta)}{0{,}5AC\cdot AM\sin\beta}=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2a\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta},$$

так как $AC=2a\cos\alpha$. ■

3.148. □ По условию, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$ $(\alpha>\gamma)$, $AD=DC$, BE — биссектриса (рис. Р.3.53); требуется найти $S_{\Delta BDE}:S_{\Delta ABC}$. Проведем $BF\perp AC$; тогда $AB=\frac{BF}{\sin\alpha}$, $BC=\frac{BF}{\sin\gamma}$. Имеем $S_{\Delta BDE}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}-\frac{1}{2}AE\cdot BF$;

$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}-\frac{(1/2)AE\cdot BF}{(1/2)AC\cdot BF}=\frac{1}{2}-\frac{AE}{AC}$. Но $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BF}{\sin\alpha}:\frac{BF}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; составим

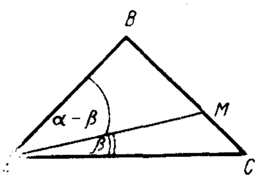


Рис. Р.3.52

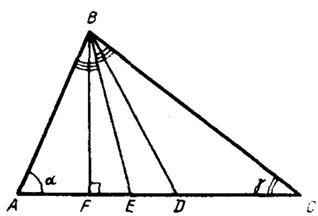


Рис. Р.3.53

теперь производную пропорцию $\frac{AE}{AE+EC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma}$ или $\frac{AE}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma}$.

Итак, окончательно находим

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}-\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{2(\sin\alpha+\sin\gamma)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}. \ ■$$

3.149. □ По условию, $BM\perp AC$, BM — диаметр окружности, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\beta$, K и L — точки пересечения окружности со сторонами AB и BC (рис. P.3.54); требуется найти $S_{\Delta KLM}:S_{\Delta ABC}$. Пусть $BM=h$; тогда $AM=h\operatorname{ctg}\alpha$, $MC=h\operatorname{ctg}\beta$. Имеем $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AMB}+S_{\Delta BMC}=$ $=\frac{1}{2}AM\cdot BM+\frac{1}{2}MC\cdot BM=\frac{1}{2}BM\ (AM+MC)=\frac{1}{2}h\ (h\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}\beta)=$ $=\frac{1}{2}h^2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=\frac{1}{2}h^2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Далее, $\angle ABM=90^\circ-\alpha$, $\angle MBC=90^\circ-\beta$ и так как $\angle BKM=\angle BLM=90^\circ$ (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр BM), то $\angle BMK=\alpha$, $\angle BML=\beta$. Тогда из ΔBKM и ΔBLM находим $KM=h\cos\alpha$, $ML=h\cos\beta$. Значит, $S_{\Delta KML}=\frac{1}{2}KM\cdot ML\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$. Окончательно получим

$$\frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(1/2)\ h^2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta}{(1/2)\ h^2\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta. \ ■$$

3.150. $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{2\sin\frac{\pi+2\alpha}{4}}$.

3.151. □ По условию, $\angle C=90^\circ$, $\angle CAB=\alpha$, $AD=DB$, $\angle DEA=\beta$, $AE>\frac{1}{2}AC$ (рис. P.3.55); требуется найти $S_{BDEC}:S_{\Delta ADE}$. Проведем $DK\perp AC$ и положим $DK=h$; тогда $EK=h\operatorname{ctg}\beta$, $AK=h\operatorname{ctg}\alpha$, $BC=2h$ (так как $BD=AD$), $AC=2h\operatorname{ctg}\alpha$, $AE=h(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$. Далее находим $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}h^2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$,

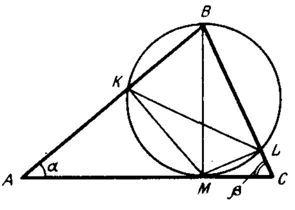


Рис. P.3.54

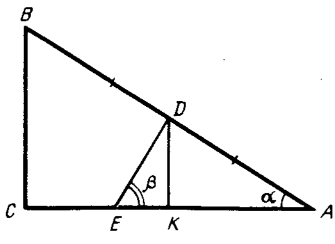


Рис. P.3.55

$S_{\triangle ABC}=2h^2\operatorname{ctg}\alpha$; $\quad S_{BDEC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}=2h^2\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{2}h^2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=$
$=\frac{1}{2}h^2(4\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)=\frac{h^2}{2}(3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)$. Итак,

$$\frac{S_{BDEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}. \blacksquare$$

3.152. $\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$. **3.153.** $\dfrac{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$, считая от вершины. **3.154.** $\dfrac{R^2}{4}$.

3.155. $\operatorname{arctg}\dfrac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. **3.156.** $\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$. **3.157.** $\arccos\dfrac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ и $\pi-\arccos\dfrac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. **3.158.** $\arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2}$ и $\pi-\arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leqslant k\leqslant 2$.

3.159. □ По условию, $BD\perp AC$, $DC:AD=k$, $DC>AD$, $\angle DBC>\angle DBA$, $\angle DBC:\angle DBA=2:1$ (рис. Р.3.56). Пусть $\angle DBA=\alpha$; тогда $\angle DBC=2\alpha$ и $\angle C=90^\circ-2\alpha<\angle A=90^\circ-\alpha$. Имеем $\sin C=\sin(90^\circ-2\alpha)=\cos 2\alpha$. Из $\triangle BDC$ и $\triangle BDA$ находим $DC=DB\operatorname{tg}2\alpha$, $AD=DB\operatorname{tg}\alpha$. Значит, $k=\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{2}{k}$; $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{k-2}{k}$, откуда следует, что $k>2$. Итак,

$$\sin C=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{k-2}{k}}{1+\frac{k-2}{k}}=\frac{1}{k-1}. \blacksquare$$

3.160. $\dfrac{\pi}{4}\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}$. **3.161.** $\dfrac{7}{18}$. **3.162.** $2\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ и $\arccos\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

3.163. $-\dfrac{3}{5}$.

3.164. □ По условию, в равностороннем треугольнике ABC имеем $AL:LC=n:m$ (рис. Р.3.57); требуется найти тупой угол ALB. Пусть $AC=b$, $AL=nx$, $LC=mx$; тогда $nx+mx=b$, откуда $x=\dfrac{b}{m+n}$, $AL=\dfrac{nb}{m+n}$,

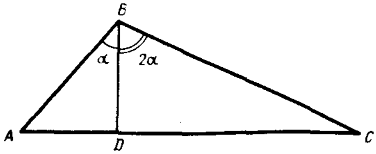


Рис. Р.3.56

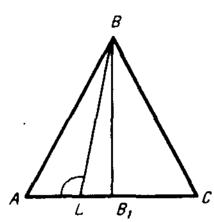


Рис. Р.3.57

$LC=\frac{mb}{m+n}$. Проведем $BB_1\perp AC$; отсюда $BB_1=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $B_1C=\frac{b}{2}$, $LB_1=\frac{mb}{m+n}-\frac{b}{2}=\frac{mb-nb}{2(m+n)}$. Из $\triangle BB_1L$ находим $\operatorname{tg}\angle BLB_1=\frac{BB_1}{LB_1}=$ $=\frac{2b\sqrt{3}(m+n)}{2(m-n)b}=\frac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$; значит, $\angle BLB_1=\operatorname{arctg}\frac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$, т. е. $\angle ALB=\pi-\operatorname{arctg}\frac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$. ■

3.165. $\arcsin(\sqrt{21}/7)$ и $\arcsin(\sqrt{21}/14)$.

3.166. □ По условию, $AB=AC$, $AA_1\perp BC$, $BB_1\perp AC$; $AA_1\cap BB_1=O$, $OA=OA_1$ (рис. Р.3.58). Пусть $AA_1=H$ и $\angle A=2\alpha$. Тогда из $\triangle AA_1C$ находим $A_1C=H\operatorname{tg}\alpha$; с другой стороны, из $\triangle A_1OC$ получим $A_1C=OA_1\operatorname{tg}\angle A_1OC=\frac{H}{2}\operatorname{tg}\angle AOC_1=\frac{H}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{H}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Значит, $H\operatorname{tg}\alpha=\frac{H}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ или $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}$; отсюда $\cos A=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{3}$; $\cos B=\cos C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

3.167. 3/5 и 4/5.

3.168. □ По условию, $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\sin C$; требуется доказать, что $\triangle ABC$ — прямоугольный. Имеем

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Так как $\sin C=\sin(A+B)$, то

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=0 \text{ или } \sin\frac{A+B}{2}\cdot\frac{1-2\cos^2\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=0;$$

но $\sin\frac{A+B}{2}\neq 0$ и, значит, $\cos(A+B)=\cos C=0$, т. е. $C=\pi/2$. ■

3.169. $\frac{5}{13}$. **3.171.** $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. **3.172.** $3-\sqrt{5}$.

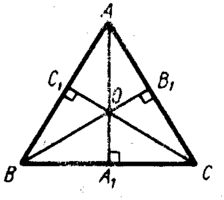


Рис. Р.3.58

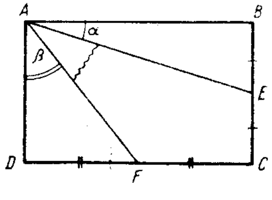


Рис. Р.3.59

3.173. □ По условию, в прямоугольнике $ABCD$ имеем: $BE=EC$, $DF=FC$, $S_{ABCD}:AC^2=k$ (рис. Р.3.59); требуется найти $\angle EAF$. Пусть $\angle BAE=\alpha$, $\angle DAF=\beta$; тогда

$$k=\frac{AB\cdot AD}{AB^2+AD^2}=\frac{1}{\frac{AB}{AD}+\frac{AD}{AB}}=\frac{1}{\frac{2BE}{AB}+\frac{2DF}{AD}}=\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\beta},$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2k}$. Далее имеем $\operatorname{tg}\angle EAF=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$

$=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$; так как

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{BE}{AB}\cdot\frac{DF}{AD}=\frac{\frac{1}{2}AD}{AB}\cdot\frac{\frac{1}{2}AB}{AD}=\frac{1}{4},$$

то $\operatorname{tg}\angle EAF=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2k}}=\frac{3k}{2}$, т. е. $\angle EAF=\operatorname{arctg}\frac{3k}{2}$. ■

3.174. $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$; $k\geqslant\frac{2}{\pi-2}$.

3.175. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

3.176. □ По условию, $\angle ACB=90°$, $AB_1=B_1C$; $CA_1=A_1B$, $\operatorname{tg}\angle AOB_1=k$ (рис. Р.3.60); требуется найти $\angle A$ и $\angle B$. Пусть $\angle CAA_1=\psi$, $\angle CB_1B=\varphi$, $\angle AOB_1=\alpha$; тогда $\alpha=\varphi-\psi$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2a}{b}$, $\operatorname{tg}\psi=\frac{a}{2b}$, где $BC=a$, $AC=b$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=\frac{\frac{2a}{b}-\frac{a}{2b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{3ab}{2(b^2+a^2)}=\frac{3}{2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)}=$$

$$=\frac{3}{2(\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}A)}=\frac{3\operatorname{tg}A}{2(1+\operatorname{tg}^2A)}=\frac{3}{4}\sin 2A.$$

Отсюда $k=\frac{3}{4}\sin 2A$; $\sin 2A=\frac{4k}{3}$; $\angle A=\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$; $\frac{4k}{3}\leqslant 1$; $0<k\leqslant\frac{3}{4}$;

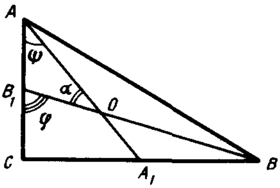


Рис. Р.3.60

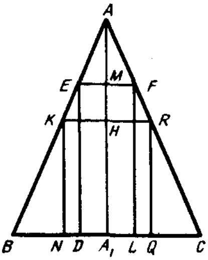


Рис. Р.3.61

$\angle B = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$. ■

3.177. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **3.178.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}, \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$.

3.179. □ По условию, $AB=AC$, $DEFL$ — вписанный в $\triangle ABC$ прямоугольник, периметр которого не зависит от выбора точки E на AB (рис. Р.3.61); требуется найти $\sin A$. Проведем $AA_1 \perp BC$ и положим $AA_1=h$, $BC=a$. Построим еще один прямоугольник, вписанный таким же образом, одна из сторон которого проходит через точку H, где $AH=HA_1$; при этом $P_{KNQR}=P_{DEFL}$ (согласно условию). Так как $\triangle AKR \sim \triangle ABC$, то $\frac{KR}{BC}=\frac{AH}{AA_1}$, т. е. $KR=\frac{ah}{2h}=\frac{a}{2}$. Далее, $P_{KNQR}=2(NK+KR)=2\left(\frac{h}{2}+\frac{a}{2}\right)=a+h$. Пусть $DE=x$; учитывая, что $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, получим $\frac{EF}{BC}=\frac{AM}{AA_1}$, т. е. $EF=\frac{a(h-x)}{h}$. Тогда $P_{DEFL}=2(DE+EF)=2\left(x+\frac{ah-ax}{h}\right)=\frac{2(xh+ah-ax)}{h}$. Поскольку $P_{KNQR}=P_{DEFL}$, имеем $\frac{2(xh+ah-ax)}{h}=a+h$ или $2xh+ah-2ax-h^2=0$, откуда $(2x-h)(a-h)=0$. Это равенство должно быть справедливым при любом значении x; значит, $a-h=0$, т. е. $h=a$. Наконец, из $\triangle AA_1C$ находим $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{A_1C}{AA_1}=\frac{a}{2h}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, откуда

$$\sin A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}. \ ■$$

3.180. $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

3.182. □ По условию, OA_1AB_1 — сектор, O_1 — центр вписанной в него окружности, $OA=R$, $O_1A=r$ (рис. Р.3.62); требуется найти $P_{OA_1AB_1}=2OA_1+l_{\cup A_1B_1}$. В $\triangle O_1BO$ имеем $O_1B=r$, $OO_1=R-r$, откуда $\sin\angle OO_1B=\frac{O_1B}{OO_1}=\frac{r}{R-r}$; $\angle O_1OB=\arcsin\frac{r}{R-r}$ (радианов), $\angle A_1OB_1=2\arcsin\frac{r}{R-r}$. Следовательно,

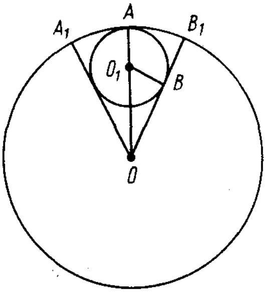


Рис. Р.3.62

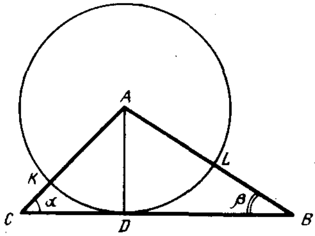


Рис. Р.3.63

$$l_{\cup A_1B_1}=2R\arcsin\frac{r}{R-r};\ P_{OA_1AB_1}=2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right).\ \blacksquare$$

3.183. ☐ По условию, в ΔABC имеем: $BC=a$, $\angle C=\alpha$ радианов, $\angle B=\beta$ радианов, $AD\perp BC$, AD — радиус окружности, пересекающей AC и AB в точках K и L (рис. Р.3.63); требуется найти $l_{\cup KL}$. Из ΔADC и ΔADB находим $CD=AD\operatorname{ctg}\alpha$, $BD=AD\operatorname{ctg}\beta$. Тогда $a=CD+DB=AD\,(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$, т. е. $AD=\dfrac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Значит, $\angle KAL=\pi-(\alpha+\beta)$, откуда $l_{\cup KL}=$ $=AD\,(\pi-\alpha-\beta)=\dfrac{a\,(\pi-\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. ■

3.184. ☐ По условию, $OAnB$ — сектор, $\angle AOB=\alpha$ радианов, O_1 — центр окружности, вписанной в сектор $OAnB$ (рис. Р.3.64). Пусть R — радиус сектора, r — радиус вписанной окружности; тогда $S_{OAnB}=\frac{1}{2}R^2\alpha$, $S_{O_1}=\pi r^2$.

В ΔO_1A_1O $(O_1A_1\perp OA)$ имеем $r=O_1A_1=OO_1\sin\frac{\alpha}{2}=(R-r)\sin\frac{\alpha}{2}$ или

$r+r\sin\frac{\alpha}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $r=\dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$\frac{S_{OAnB}}{S_{O_1}}=\frac{R^2\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\ \blacksquare$$

3.185. ☐ По условию, AB — хорда, $\cup ANB=\alpha^\circ$; $AC=BC$, DE — хорда, $DC:CE=1:3$ (рис. Р.3.65). Пусть $CD=x$; тогда $EC=3x$, $ED=4x$. Проведем $OF\perp ED$ и соединим точки O и C, O и A. Так как $OC\perp AB$ (диаметр MN перпендикулярен AB), то $\angle FOC=\angle ACD$ (острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Заметим, что $FD=\frac{1}{2}ED=2x$, $FC=x$. Далее имеем $BC\cdot AC=DC\cdot EC$ или $AC^2=x\cdot 3x$, т. е. $AC=x\sqrt{3}$. Из ΔOCA получим $OC=AC\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=x\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из ΔFOC находим $\sin\angle FOC=\dfrac{FC}{OC}=$

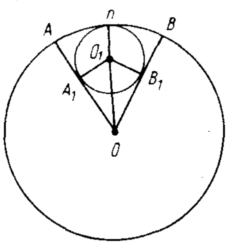


Рис. Р.3.64

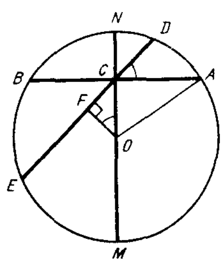


Рис. Р.3.65

$=\dfrac{x}{x\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$. Значит, $\angle ACD=\angle FOC=\arcsin\dfrac{\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$; так как $\sin\angle ACD\leqslant 1$, то $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\sqrt{3}$, откуда $\dfrac{\alpha}{2}\leqslant 60°$, т. е. $\alpha\leqslant 120°$. ■

3.186. $\dfrac{R}{2\cos^2\dfrac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. **3.187.** $\dfrac{\sin\alpha}{2\alpha-\sin\alpha}$. **3.188.** $\dfrac{R^2\sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right)$. **3.189.** $\dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **3.190.** $\dfrac{h}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

3.191. □ По условию, $AB=BC$, $BB_1\perp AC$, $BB_1=h$, $\angle ABB_1=\alpha$ $(\alpha\leqslant\pi/6)$, O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, O_1 — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис. Р.3.66). Из $\triangle AB_1B$ находим $AB_1=h\,\mathrm{tg}\,\alpha$; тогда $AC=2h\,\mathrm{tg}\,\alpha=2R\sin 2\alpha$, где R — радиус описанной окружности, откуда $R=\dfrac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{h}{2\cos^2\alpha}$. Из $\triangle AB_1O_1$ получим $O_1B_1=r=$

$=AB_1\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Следовательно,

$$OO_1=h-OB-O_1B_1=h-\frac{h}{2\cos^2\alpha}-h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=h\left(1-\frac{1}{2\cos^2\alpha}-\frac{\sin\alpha\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{\cos\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right)=h\left(1-\frac{1}{2\cos^2\alpha}-\frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=h\left(\frac{2\cos^2\alpha-1-2\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)=h\,\frac{1-2\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}=$$

$$=h\,\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2h\sin\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\alpha}.\ ■$$

3.192. □ По условию, $AB=BC$, $\angle BAC=\alpha$, $BF\perp AC$, $BF=r+m$, где r — радиус

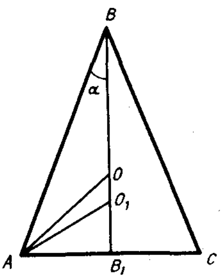


Рис. Р.3.66

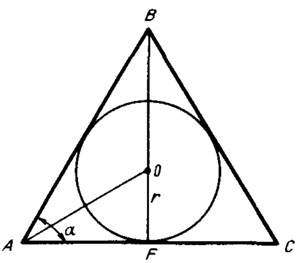


Рис. Р.3.67

вписанной окружности (рис. Р.3.67). Пусть R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности; тогда $AC=2R\sin(180^\circ-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$, $BF=AF\operatorname{tg}\alpha=R\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$, $r=OF=AF\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=R\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, получаем уравнение $R\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha=m+R\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ или $R\sin 2\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=m$, откуда

$$R=\frac{m\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{m\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\ \blacksquare$$

3.193. $\dfrac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. **3.194.** $\dfrac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. **3.195.** $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **3.196.** $-\dfrac{1}{2}S\operatorname{ctg}\alpha\sin 4\alpha$. **3.197.** $P_a>P_b>P_c$. **3.198.** $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

3.199. □ По условию, O — центр окружности, OA — неподвижный радиус, $OB=BA$, M — произвольная точка окружности (рис. Р.3.68); требуется найти наибольшее значение $\angle OMB$. Пусть $\angle OMB=\alpha$, $OA=R$; тогда $OB=\frac{R}{2}$. По теореме косинусов имеем $OB^2=OM^2+MB^2-2OM\cdot MB\cos\alpha$. Полагая $MB=x$, получим $\frac{R^2}{4}=R^2+x^2-2Rx\cos\alpha$ или $4x^2-8Rx\cos\alpha+3R^2=0$. Это квадратное уравнение имеет корни, если $D/4=16R^2\cos^2\alpha-12R^2=4R^2(4\cos^2\alpha-3)\geqslant 0$, откуда $4\cos^2\alpha-3\geqslant 0$; $2\cos 2\alpha\geqslant 1$; $\cos 2\alpha\geqslant 1/2$. Наименьшее значение $\cos 2\alpha$, равное $1/2$, соответствует наибольшему значению 2α, равному $\pi/3$. Значит, $\alpha_{\text{наиб}}=\pi/6$. ■

3.200. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AA_1=h$, $\angle ACA_1=\alpha$, $\angle DBD_1=\beta$ (рис. Р.3.69). Из $\triangle A_1AC$ и $\triangle D_1DB$ находим $AC=h\operatorname{ctg}\alpha$, $BD=h\operatorname{ctg}\beta$; тогда $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ и, значит, $V=\frac{1}{2}h^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. Наконец, из $\triangle ABC$ получим $AB=\sqrt{\frac{1}{4}h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}=\frac{1}{2}h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$; поэтому $S_{\text{бок}}=2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$. ■

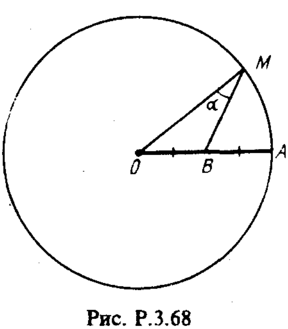
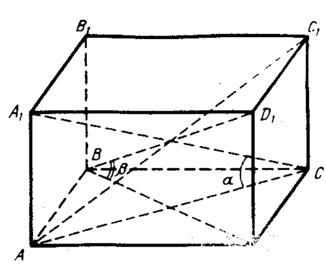


Рис. Р.3.68



Р[illegible]

3.201. $\dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

3.202. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $V_{\text{пр}}=V$ (рис. Р.3.70). Так как $V=S_{\Delta ABC}\,H$, а $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}=\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$, то $H=\dfrac{2V\sin(\alpha+\beta)}{a^2\sin\alpha\sin\beta}$. Согласно теореме синусов имеем $\dfrac{BC}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$, откуда $BC=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $AC=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поэтому

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a(\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Итак,

$$S_{\text{бок}}=P_{\Delta ABC}\,H=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{2V\sin(\alpha+\beta)}{a^2\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.\ ■$$

3.203. $\dfrac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.204.** $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\varphi}$.

3.205. $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

3.206. $\dfrac{a^2b}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}$; $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$.

3.207. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AB=a$, $(\widehat{(A_1B);(CB_1)})=\alpha$ (рис. Р.3.71). Проведем $BK\parallel CB_1$; тогда $B_1K\parallel BC$, $B_1K=BC$ и $\angle A_1BK=\alpha$. Так как $\angle A_1B_1K=120^\circ$, то из ΔA_1B_1K находим $A_1K^2=2a^2-2a^2\cos 120^\circ=3a^2$; $A_1K=a\sqrt{3}$. Пусть $A_1B=x$; тогда в ΔA_1BK

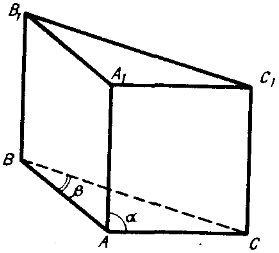


Рис. Р.3.70

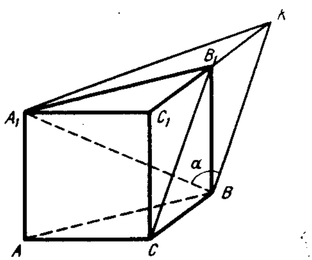


Рис. Р.3.71

имеем $A_1C^2=2x^2-2x^2\cos\alpha$ или $2x^2(1-\cos\alpha)=3a^2$; $x^2=\dfrac{3a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Наконец,

из ΔA_1B_1B получим

$$BB_1^2=A_1B^2-A_1B_1^2=\frac{3a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-a^2=\frac{a^2\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a^2(3-2+2\cos\alpha)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^2(1+2\cos\alpha)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

т. е. $BB_1=\dfrac{a\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. ■

3.208. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $S_{\Delta ABC}=S$, O — центр окружности, описанной около ΔABC, $\angle A_1OA=\varphi$ (рис. Р.3.72). Имеем $AC=2OA\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=2OA\sin(\alpha+\beta)$. Тогда $S=\dfrac{AC^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$, откуда $AC^2=\dfrac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Из ΔA_1AO находим $AA_1=OA\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{AC\operatorname{tg}\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)}$. Окончательно получим

$$V=S\cdot AA_1=S\,\frac{AC\operatorname{tg}\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)}=\frac{S\sqrt{2S\sin(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$=S\operatorname{tg}\varphi\sqrt{\frac{S}{2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta}}.\ ■$$

3.209. $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

3.210. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=BC=a$, $\angle ABC=\alpha$, $AA_1=H$, A_1BC — сечение (рис. Р.3.73); требуется найти расстояние от A до (A_1BC). Проведем $AE\perp BC$ и соединим A_1 и E; тогда $A_1E\perp BC$ (по теореме

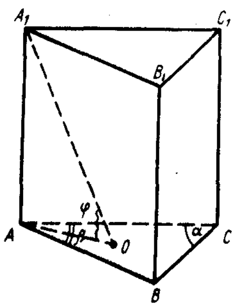


Рис. Р.3.72

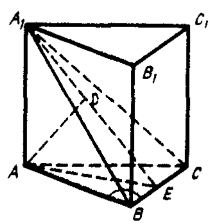


Рис. Р.3.73

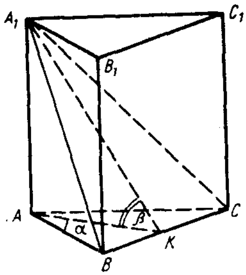


Рис. Р.3.74

о трех перпендикулярах). Имеем $BC\perp(A_1AE)$ и, следовательно, $(A_1AE)\perp(A_1BC)$. Проведем $AD\perp A_1E$; значит, $AD\perp(A_1BC)$, т. е. AD — искомое расстояние. Из ΔAEB найдем $AE=a\sin\alpha$, откуда $S_{\Delta A_1AE}=\frac{1}{2}Ha\sin\alpha$, а из ΔA_1AE получим $AE=\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}$, откуда $S_{\Delta A_1AE}=\frac{1}{2}AD\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}$. Решив уравнение $\frac{1}{2}Ha\sin\alpha=\frac{1}{2}AD\cdot\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}$, окончательно находим $AD=\frac{aH\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$. ■

3.211. □ I способ. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=AC$, $AB+AC+BC=2p$, $\angle BAC=\alpha$, A_1BC — сечение призмы, $\angle A_1BCA=\beta$ (рис. Р.3.74). Проведем $A_1K\perp BC$ и положим $AB=x$; тогда $BK=x\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC=2x\sin\frac{\alpha}{2}$, $2p=2x+2x\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $x=\frac{p}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$; далее имеем

$AK=x\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{p\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. Поскольку $\angle A_1KA=\beta$ как линейный угол между плоскостями (ABC) и (A_1BC), из ΔAKA_1 находим $AA_1=\frac{p\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. Следовательно,

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}AB^2\sin\alpha\cdot AA_1=\frac{p^2\sin\alpha}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot\frac{p\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{p^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}=\frac{p^3\sin\alpha\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{p^3\sin^3\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\left(1+\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\right)^3\cos^2\frac{\alpha}{2}}=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

II способ. Пусть $AA_1=h$; тогда из ΔA_1AK находим $AK=h\operatorname{ctg}\beta$, а из ΔAKB получим $AB=\frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{h\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $BK=h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Значит, $BC=2h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда $2p=\frac{2h\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}+2h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ или

$$p\cos\frac{\alpha}{2}=h\operatorname{ctg}\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right), \text{ т. е.}$$

$$h=\frac{p\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{p\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\beta}{1+\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}=p\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\beta.$$

Итак,

$$V=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}BC\cdot AK\cdot AA_1=\frac{1}{2}2h^3\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}^3\beta\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \blacksquare$$

3.212. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная призма, $ABCD$ — трапеция, $AD\|BC$ $(AD<BC)$, $AD=AB=CD=a$, $\angle BAD=\beta$, $B_1A=B_1B=B_1C=B_1D$, BB_1 образует с (ABC) угол α (рис. Р.3.75). Проведем $B_1O\perp(ABC)$; так как $B_1A=B_1B=B_1C=B_1D$, то $OA=OB=OC=OD$, т. е. O — центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Из $\triangle BAD$ по теореме косинусов находим $BD^2=2a^2-2a^2\cos(180°-\beta)=4a^2\cos^2\frac{\beta}{2}$, т. е. $BD=2a\cos\frac{\beta}{2}$. Поскольку $\triangle BCD$ вписан в окружность с центром O, имеем $BD=2OB\sin\beta$, откуда $OB=\dfrac{2a\cos\frac{\beta}{2}}{2\operatorname{sitn}\beta}=\dfrac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Из $\triangle B_1OB$ получим $OB_1=OB\operatorname{tg}\angle B_1BO=\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Чтобы определить площадь основания, проведем $DE\perp BC$ и из $\triangle CED$ найдем $DE=a\sin\beta$, $EC=a\cos\beta$; тогда $BC=AD+2EC=a+2a\cos\beta$. Следовательно, $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot DE=$ $=a(1+\cos\beta)\cdot a\sin\beta=a^2\sin\beta(1+\cos\beta)$. Итак,

$$V=a^2\sin\beta(1+\cos\beta)\cdot\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}=2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha. \blacksquare$$

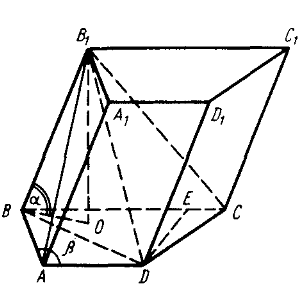


Рис. Р.3.75

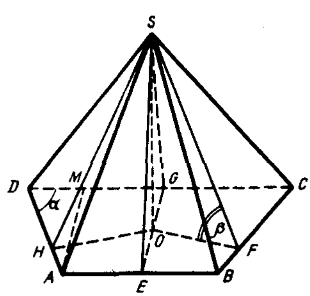


Рис. Р.3.76

3.213. $\dfrac{a^3 \sin\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta}{2\cos\dfrac{\pi-\alpha}{4}}$. **3.214.** $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. **3.215.** $\dfrac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$.

3.216. $\dfrac{S}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\cdot\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

3.217. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $AB\parallel DC$, $AD=BC$, $AD=a$, $\angle ADC=\alpha$, $\angle SABC=\angle SBCD=\angle SDCA=\angle SADB=\beta$ (рис. P.3.76). Построим линейные углы двугранных углов при основании. Проведем $SO\perp(ABC)$ и OE, OF, OG, OH — перпендикуляры к сторонам основания. Так как $\triangle SOE=\triangle SOF=\triangle SOG=\triangle SOH$, то $OE=OF=OG=OH$, т. е. O — центр окружности, вписанной в основание $ABCD$; тогда $AB+DC=2AD=2a$. Проведем $AM\perp DC$ и из $\triangle AMD$ найдем $AM=a\sin\alpha$. Далее имеем $S_{ABCD}=\dfrac{AB+DC}{2}\cdot AM=a^2\sin\alpha$; $S_{\text{бок}}=\dfrac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$;

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}+a^2\sin\alpha=\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\cos\beta}=\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}.\ \blacksquare$$

3.218. $\dfrac{S\operatorname{tg}\beta}{6}\sqrt{S\sin\alpha}$. **3.219.** $\dfrac{4l^3}{3}\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

3.220. $\dfrac{S\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{6\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **3.221.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

3.222. □ По условию, $DABC$ — пирамида, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle BAC=\alpha$, r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $DO\perp(ABC)$, $\angle DAO=\angle DBO=\angle DCO=\beta$ (рис. P.3.77). Так как $\triangle DOA=\triangle DOB=\triangle DOC$ (по катету DO и равным противолежащим ему углам), то $OA=OB=OC$, т. е. O — середина AB. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Проведем $O_1E\perp AC$; тогда $O_1E=r$, $AC=AE+EC=AC+r$. Но O_1A — биссектриса $\angle BAC$; поэтому $AE=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, откуда

$$AC=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)=\frac{r\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{r\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}};$$

$$BC=AC\operatorname{tg}\alpha=\frac{r\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2r\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\frac{r\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)};$$

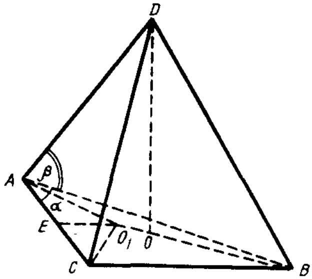


Рис. Р.3.77

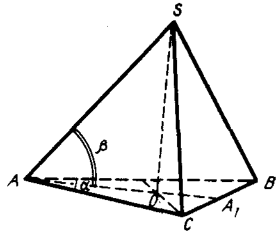


Рис. Р.3.78

$$AB=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}=\frac{r\sqrt{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь из $\triangle AOD$ находим $OD=AO\operatorname{tg}\beta=\dfrac{r\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$ и, значит,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot OD=\frac{1}{6}\frac{r\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot r\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{r^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{12\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.\ ■$$

3.223. □ По условию, $SABC$ — пирамида, $BC<AC$, $AB=c$, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$, $SO\perp(ABC)$, O — точка пересечения медиан, AA_1 — наибольшая медиана, $\angle SAO=\beta$ (рис. Р.3.78). Так как $AC=c\cos\alpha$, $BC=c\sin\alpha$, то из $\triangle ACA_1$ находим

$$AA_1=\sqrt{c^2\cos^2\alpha+\frac{1}{4}c^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}c\sqrt{4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}c\sqrt{3\cos^2\alpha+1};$$

тогда $AO=\frac{2}{3}AA_1=\frac{1}{3}c\sqrt{3\cos^2\alpha+1}$. Далее из $\triangle SOA$ получим $SO=\frac{1}{3}c\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\cdot\operatorname{tg}\beta$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}c\sin\alpha\cdot c\cos\alpha\cdot\frac{1}{3}c\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{36}c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta\sqrt{3\cos^2\alpha+1}.\ ■$$

3.224. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, O — центр основания, $OK\perp SB$, $OK=p$, $\angle ASBC=\alpha$ (рис. Р.3.79). Построим линейный угол двугранного угла $ASBC$. Имеем $AC\perp SB$, поскольку SB — наклонная к (ABC), OB — ее проекция на эту плоскость, $AC\perp OB$. Проведем через AC

плоскость $APC \perp SB$; тогда $\angle APC=\alpha$. Так как MP и OK принадлежат (SMB) и $MP \perp SB$, $OK \perp SB$, то $MP \parallel OK$ и, значит, $\frac{MP}{OK}=\frac{MB}{OB}$, т. е. $MP=\frac{3p}{2}$. Из ΔMPC находим $MC=MP\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3p}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AC=3p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда

$S_{\Delta ABC}=\frac{9p^2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}$. Далее, $\Delta SOK \sim \Delta SOB$ (прямоугольные треугольники с общим углом OSB); поэтому $\frac{OK}{OS}=\frac{OB}{SB}$. Отсюда, учитывая, что

$OB=p\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, получим $SB=\frac{OB\cdot OS}{OK}=\frac{p\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot OS}{p}=OS\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. В ΔSOB

имеем $SB^2=OS^2+OB^2$; $3OS^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-OS^2=3p^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; $OS=\frac{p\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

Итак,

$$V=\frac{1}{3}\,\frac{9p^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}=\frac{9p^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}. \ \blacksquare$$

3.225. $\frac{\sqrt{3}\,p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$. **3.226.** $\frac{\sqrt{3}\,a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.227. $\frac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. **3.228.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$.

3.229. $\frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$. **3.230.** $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$ и $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi}$.

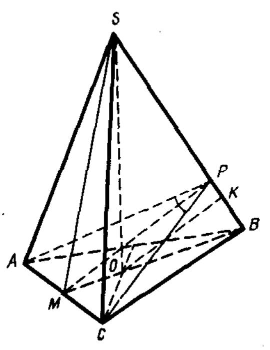


Рис. Р.3.79

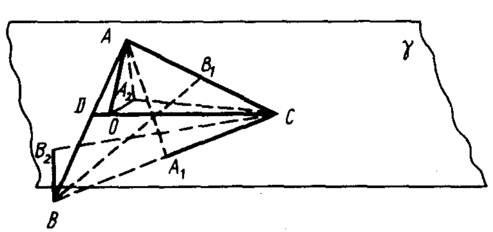


Рис. Р.3.80

3.231. $\dfrac{2H^2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **3.232.** $\dfrac{l^3\sin\dfrac{\alpha}{2}}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)}$.

3.233. $\dfrac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **3.234.** $\dfrac{4na^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **3.235.** $\dfrac{a^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

3.236. □ По условию, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$, CD, BB_1, AA_1 — медианы треугольника (рис. Р.3.80); через меньшую из них проведена плоскость γ, $(\gamma;\widehat{(ABC)})=\beta$; требуется найти $(\widehat{(AC)};\gamma)$ и $(\widehat{(BC)};\gamma)$. Докажем, что $CD<AA_1$ и $CD<BB_1$; действительно, $CD=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2+BC^2}$;

$AA_1=\sqrt{AC^2+\dfrac{BC^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4AC^2+BC^2}$; $BB_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2+4BC^2}$. Следовательно, $CD\in\gamma$. Проведем $AA_2\perp\gamma$ и $AO\perp CD$; тогда $\angle AOA_2=\beta$ как линейный угол между γ и (ABC), $\angle ACA_2$ — угол между катетом AC и γ. Пусть $AA_2=a$; тогда $AO=\dfrac{a}{\sin\beta}$. Далее, $AD=DC$ как радиусы окружности, описанной около ΔABC; поэтому $\angle DCA=\angle BAC=\alpha$. Из ΔADC находим $AC=\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$, а из ΔAA_2C получим $\sin\angle ACA_2=\dfrac{AA_2}{AC}=\sin\alpha\sin\beta$, т. е. $\angle ACA_2=\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. Аналогично найдем угол между катетом BC и γ. Проведем $BB_2\perp\gamma$; тогда $\angle BCB_2$ — искомый угол. Имеем $BB_2=AA_2=a$ (поскольку $\Delta AA_2D=\Delta BB_2D$) и из ΔBB_2C находим $\sin\angle BCB_2=\dfrac{BB_2}{BC}=\dfrac{a}{AC\operatorname{tg}\alpha}=\cos\alpha\sin\beta$, т. е. $\angle BCB_2=\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$. ■

3.237. □ По условию, $ABCD$ — ромб, $AD\in\beta$, $\angle A$ — острый; диагонали ромба образуют с β углы α и 2α (рис. Р.3.81). Пусть O — точка пересечения диагоналей. Проведем $OO_1\perp\beta$; значит, $\sin\angle OAO_1=\dfrac{OO_1}{OA}$ и $\sin\angle ODO_1=\dfrac{OO_1}{OD}$. Так как $\angle A$ — острый, то $AC>BD$,

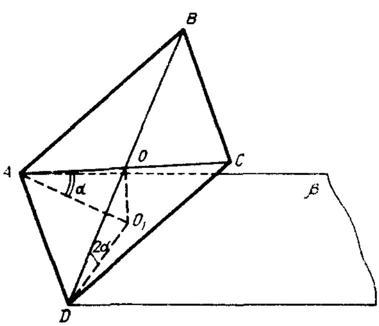


Рис. Р.3.81

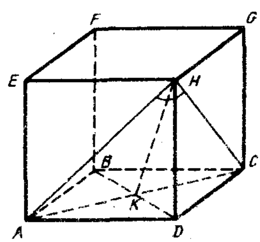


Рис. Р.3.82

$\sin\angle OAO_1 < \sin\angle ODO_1$, т. е. $\angle OAO_1 = \alpha$, а $\angle ODO_1 = 2\alpha$. Пусть $OO_1 = a$; тогда $OA = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, а $OD = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}$. В ΔAOD имеем $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$, откуда $\dfrac{A}{2} = \operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$, т. е. $A = 2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$. ■

3.238. $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **3.239.** $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$. **3.240.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.241. □ По условию, $ABCDEFGH$ — правильная призма, $AB = a$, $V_{\text{пр}} = V$ (рис. Р.3.82); требуется найти угол между AH и HC. Так как $V = a^2 \cdot DH$, то $DH = V/a^2$. В ΔAHC имеем $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC\cos\angle AHC$, т. е.

$$\cos\angle AHC = \frac{2AH^2 - AC^2}{2AH^2} = \frac{2\left(a^2 + \dfrac{V^2}{a^4}\right) - 2a^2}{2\left(a^2 + \dfrac{V^2}{a^4}\right)} = \frac{V^2}{V^2 + a^6}. \ ■$$

3.242. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$.

3.243. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB : BC : CC_1 = 3 : 4 : 12$, AA_1C_1C — диагональное сечение параллелепипеда (рис. Р.3.83); требуется найти синус угла между BD_1 и (AA_1C_1). Проведем $BK \perp AC$; тогда $BK \perp (AA_1C_1)$, поскольку $BK \perp CC_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда; так как OK — проекция OB на (AA_1C_1), то $\angle KOB$ — искомый угол. Положим $AB = 3x$; тогда $BC = 4x$, $CC_1 = 12x$, $AC = 5x$, $BD_1 = \sqrt{9x^2 + 16x^2 + 144x^2} = 13x$. Далее имеем $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}AC \cdot BK$, откуда $BK = \dfrac{3x \cdot 4x}{5x} = \dfrac{12x}{5}$. Наконец, из ΔOKB находим $\sin\angle KOB = \dfrac{BK}{OB} = \dfrac{12x \cdot 2}{5 \cdot 13x} = \dfrac{24}{65}$. ■

3.244. □ По условию, $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $S_{\Delta PBD} : S_{ABCD} = k$ (рис. Р.3.84); требуется найти $\cos\angle DPC$. Пусть $DC = a$ и $OP = h$; тогда $\dfrac{0{,}5\, a\sqrt{2}\, h}{a^2} = k$ или $h = ak\sqrt{2}$. Из ΔPOD находим $DP = \sqrt{2a^2k^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2(4k^2+1)}$, а в ΔDPC по теореме косинусов имеем $a^2 = a^2(4k^2+1) - a^2(4k^2+1)\cdot\cos\angle DPC$, откуда $\cos\angle DPC = \dfrac{4k^2}{4k^2+1}$. ■

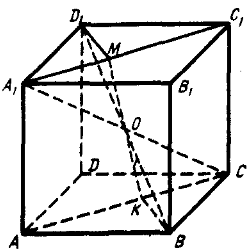


Рис. Р.3.83

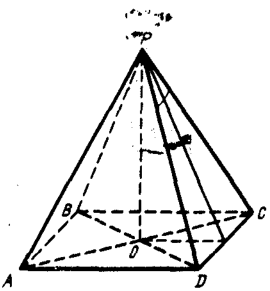


Рис. Р.3.84

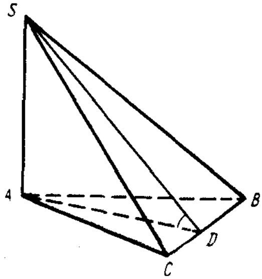


Рис. Р.3.85

3.245. $\frac{3k}{k^2-2}$. **3.246.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{3V\cos\frac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. **3.247.** $\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$.

3.248. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **3.249.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ и $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

3.250. □ Согласно условию, в пирамиде $SABC$... двугранные углы AC, CB, BD,... равны между собой, $S_{\text{полн}} : S_{\text{бок}}=k$; требуется найти двугранные углы при основании. Воспользуемся формулой $S_{\text{бок}}=S_{\text{осн}} : \cos\alpha$, где α — угол между основанием пирамиды и ее боковыми гранями. Тогда получим

$$k=\frac{S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}}}=\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}}+1=\frac{1}{\cos\alpha}+1;\ \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=k,\ \cos\alpha\neq 0;\ \cos\alpha=\frac{1}{k-1},$$

т. е. $\alpha=\arccos\frac{1}{k-1}$. Решив неравенство $0<\frac{1}{k-1}<1$, найдем $k>2$. ■

3.251. $\frac{1+k}{2}$. **3.252.** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-2t}\cos\frac{\pi}{n}\right)$. **3.253.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$.

3.254. $\arcsin\frac{S}{l^2}\pm\frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{S}{l^2}$. **3.255.** $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{arctg}\frac{2}{\cos\alpha}$.

3.256. □ По условию, $SABC$ — пирамида, $SA\perp(ABC)$, $AB=BC=CA$, $S_{\text{бок}} : S_{\triangle ABC}=11:4$ (рис. Р.3.85); требуется найти $\angle SABC$. Пусть $BC=a$, $SA=h$; тогда $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\text{бок}}=2S_{\triangle SAC}+S_{\triangle SBC}$. Проведем $AD\perp BC$; имеем $SD\perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), т. е. $\angle SDA=\beta$ — искомый угол. Следовательно,

$$S_{\text{бок}}=ah+\frac{1}{2}a\cdot SD=ah+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos\beta}=\frac{a(4h\cos\beta+a\sqrt{3})}{4\cos\beta}.$$

Согласно условию, имеем $\frac{a(4h\cos\beta+a\sqrt{3})\cdot 4}{4\cos\beta\cdot a^2\sqrt{3}}=\frac{11}{4}$ или $\frac{4h}{a\sqrt{3}}+\frac{1}{\cos\beta}=\frac{11}{4}$. Так как $\frac{2h}{a\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\beta$ (из $\triangle ASD$), то $2\operatorname{tg}\beta+\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+1}=\frac{11}{4}$ или $\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+1}=\frac{11}{4}-2\operatorname{tg}\beta$, откуда следует, что $\operatorname{tg}\beta<\frac{11}{8}$. Решив уравнение, получим $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$, т. е. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. ■

3.257. □ По условию, $PABCD$ — правильная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $\angle PDO=\angle DPC$ (рис. Р.3.86); требуется найти $\angle PDCO$. Положим $\angle PDO=\angle DPC=\alpha$, $PD=a$; из $\triangle POD$ найдем $PO=a\sin\alpha$, $OD=a\cos\alpha$. Пусть M — середина CD; тогда $OM\perp CD$ и $PM\perp CD$, т. е. $\angle PMO=\varphi$ является линейным углом двугранного угла $PDCO$. Находим $DM=OM=\frac{OD\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. Далее, в $\triangle PDC$ имеем $DC=\sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos\alpha}=a\sqrt{2-2\cos\alpha}$; с другой стороны, $DC=2DM=a\sqrt{2}\cos\alpha$. Значит, $a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=a\sqrt{2}\cos\alpha$; $1-\cos\alpha=\cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Теперь из $\triangle POM$ получим

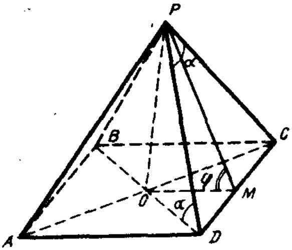


Рис. Р.3.86

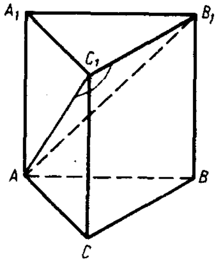


Рис. Р.3.87

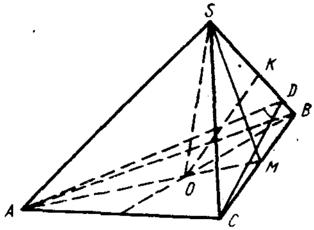


Рис. Р.3.88

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{OP}{OM}=\frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{2}\,a\cos\alpha}=\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha;\qquad \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{4}{6-2\sqrt{5}}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\sqrt{\sqrt{5}+1};\ \varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}.\ ■$$

3.258. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

3.259. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, боковые грани — квадраты (рис. Р.3.87); требуется найти угол между AC_1 и BC. Эти прямые — скрещивающиеся. Проведем через C_1 прямую, параллельную CB; этой прямой является C_1B_1, т. е. $\angle AC_1B_1$ — искомый угол. Пусть $AB=a$; тогда из ΔAC_1B_1 находим $2a^2=2a^2+a^2-2a^2\sqrt{2}\cos\angle AC_1B_1$, откуда $\cos\angle AC_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Итак, $\angle AC_1B_1=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. ■

3.260. $\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **3.261.** $\arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right)$.

3.262. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $SK=KB$, $OK=BC$ (рис. Р.3.88); требуется найти косинус двугранного угла $ASBC$. Пусть $AB=a$. Проведем $OB\perp AC$; значит, $SB\perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Затем проведем $(ADC)\perp SB$; тогда $\angle ADC$ — искомый. Так как в прямоугольном треугольнике SOB имеем $OK=BC=a$ — медиана, то гипотенуза $SB=2a$. Из ΔSMB найдем $SM=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$. Далее, используя равенства $S_{\Delta BSC}=\frac{1}{2}SB\cdot CD=\frac{1}{2}BC\cdot SM$, получим $CD=\frac{BC\cdot SM}{SB}=\frac{a\cdot a\sqrt{15}}{2\cdot 2a}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$. Наконец, из ΔADC по теореме косинусов находим $a^2=\frac{15a^2}{16}+\frac{15a^2}{16}-2\,\frac{15a^2}{16}\cos\angle ADC$, откуда $\cos\angle ADC=\frac{7}{15}$. Итак, $\angle ADC=\arccos\frac{7}{15}$. ■

3.263. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **3.264.** $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

3.265. □ По условию, $SABC$ — пирамида, $AB=AC=BC$, $(SAB)\perp(ABC)$, $(SAC)\perp(ABC)$, $\angle ASB+\angle BSC=\pi/2$ (рис. Р.3.89). Докажем, что SA — высота пирамиды. Действительно, перпендикуляр, проведенный из точки

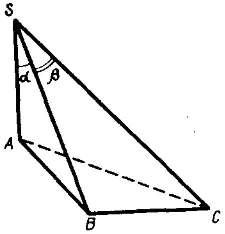


Рис. Р.3.89

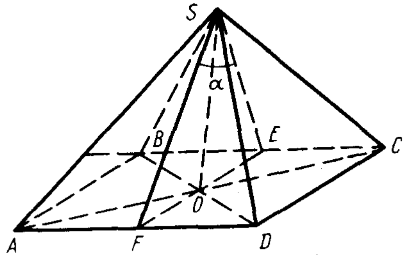


Рис. Р.3.90

S к (ABC), должен принадлежать и (SAB), и (SAC), т. е. должен принадлежать их линии пересечения и, значит, он совпадает с SA. Тогда $\triangle SAB = \triangle SAC$ (по двум катетам); следовательно, $\angle ASB = \angle ASC$, а углы ASB и BSC не равны. Пусть $\angle ASB = \alpha$, $\angle BSC = \beta$ и $SB = l$. Из условия следует, что α и β — острые углы. Из $\triangle SAB$ находим $AB = l\sin\alpha$, а из $\triangle SBC$ по теореме косинусов имеем $BC = \sqrt{2l^2 - 2l^2\cos\beta} = l\sqrt{2(1-\cos\beta)}$. Так как $AB = BC$, то $\sin\alpha = \sqrt{2(1-\cos\beta)}$ или $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sqrt{2(1-\cos\beta)}$; тогда $\cos^2\beta = 2 - 2\cos\beta$; $\cos^2\beta + 2\cos\beta - 2 = 0$. Учитывая, что β — острый угол, получим $\cos\beta = \sqrt{3} - 1$. Итак, $\beta = \arccos(\sqrt{3} - 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3} - 1)$. ■

3.266. □ По условию, $SABCD$ — правильная пирамида, $SO \perp (ABC)$, $S_{\triangle SAC} : S_{\text{бок}} = k$, SF и SE — апофемы пирамиды (рис. Р.3.90). Пусть $AB = a$, $\angle ESF = \alpha$; имеем $SF = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (из $\triangle SOF$), $SO = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4},\quad S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда получим уравнение $k = \dfrac{a^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{4a^2}$ или $k = \dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4}$ или $\cos\frac{\alpha}{2} = 2k\sqrt{2}$. Итак, $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 16k^2 - 1$. При этом $16k^2 - 1 < 1$; $k^2 < \frac{1}{8}$, $0 < k < \frac{\sqrt{2}}{4}$. ■

3.267. □ По условию, $SABC$ — правильная пирамида, SBK — сечение, проходящее через высоту SO и боковое ребро SB, $S_{\triangle SBK} : S_{\text{полн}} = k$ (рис. Р.3.91); требуется найти величину $\angle SACB$. Так как OB — проекция SB на (ABC) и $OB \perp AC$, то $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла $SACB$. Пусть $AC = a$, $\angle SKO = \varphi$; тогда из $\triangle SOK$ имеем $SK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{6}$.

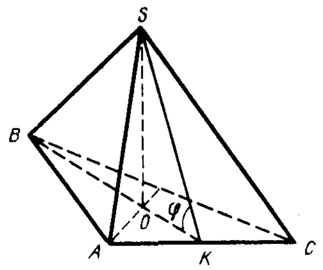


Рис. Р.3.91

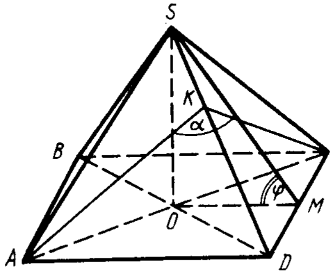


Рис. Р.3.92

Значит,

$$S_{\triangle SBK}=\frac{1}{2}\,BK\cdot SO=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}\,\operatorname{tg}\varphi}{6}=\frac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{8};$$

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}=\frac{a^2\sqrt{3}\,(\cos\varphi+1)}{4\cos\varphi}=\frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}.$$

Далее находим

$$k=\frac{S_{\triangle SBK}}{S_{\text{полн}}}=\frac{a^2\operatorname{tg}\varphi\cdot 2\cos\varphi}{8a^2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\varphi}{4\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{2\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=2k\sqrt{3};\ \varphi=2\operatorname{arctg}(2k\sqrt{3}),\ \cos\varphi=\frac{1-12k^2}{1+12k^2}.$$

При этом $1-12k^2>0$; $k^2<\frac{1}{12}$; $0<k<\frac{\sqrt{3}}{6}$. ■

3.268. □ По условию $SABCD$ — правильная пирамида, $\cos\angle(SAD;\ SDC)=k$ (рис. Р.3.92); требуется найти $\cos\angle(SDC;\ ADC)$. Учитывая, что $AC\perp SD$, проведем $(AKC)\perp SD$; значит, $\angle AKC$ — линейный угол двугранного угла SD. Затем через SO проведем $(SOM)\perp CD$; тогда $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла DC. Пусть $AD=a$, $\angle AKC=\alpha$ и $\angle SMO=\varphi$. Имеем $AC=a\sqrt{2}$ и по теореме косинусов из $\triangle AKC$ получим $2a^2=2KC^2-2KC^2\cos\alpha$, откуда $KC=\dfrac{a}{\sqrt{1-k}}$. Далее из $\triangle CKD$ находим $KD=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{1-k}}=a\sqrt{\dfrac{-k}{1-k}}$. Но $\dfrac{SM}{DM}=\dfrac{CK}{KD}=\operatorname{tg}\angle KDM$ и, следовательно, $SM=\dfrac{DM\cdot CK}{KD}=\dfrac{a\cdot a\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}\cdot a\sqrt{-k}}=\dfrac{a}{2\sqrt{-k}}$. Итак, $\cos\varphi=\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{a\cdot 2\sqrt{-k}}{2a}=$ $=\sqrt{-k}$, где $0<-k<1$, т. е. $-1<k<0$. ■

3.269. $\dfrac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$.

3.270. □ I способ. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AA_1=AB$, AB_1 и BC_1 — непересекающиеся диагонали (рис. Р.3.93); требу-

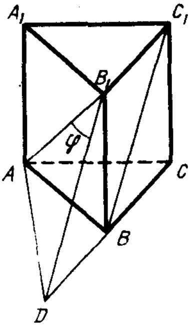


Рис. Р.3.93

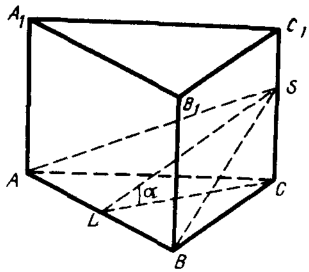


Рис. Р.3.94

ется найти $(\widehat{(AB_1); (BC_1)})$. Пусть $AB = AA_1 = a$. Проведем $B_1D \| BC_1$, $D \in (BC)$; тогда $\angle AB_1D = \varphi$ — искомый угол. Из $\triangle ABD$ находим $AD^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120° = 3a^2$. В $\triangle AB_1D$ имеем $AD^2 = 2AB_1^2 - 2AB_1^2 \cos\varphi$; так как $AB_1^2 = 2a^2$, то $3a^2 = 4a^2 - 4a^2 \cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = 1/4$.

II способ. Пусть $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{BC} = \overline{n}$, $\overline{AA_1} = \overline{p}$; тогда $\overline{AB_1} = \overline{p} + \overline{m}$, $\overline{BC_1} = \overline{n} + \overline{p}$. Используя формулу для нахождения косинуса угла между векторами, получим

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1}}{|\overline{AB_1}| \cdot |\overline{BC_1}|} = \frac{(\overline{p}+\overline{m})(\overline{n}+\overline{p})}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\overline{p}\overline{n} + \overline{p}^2 + \overline{m}\overline{n} + \overline{m}\overline{p}}{2a^2} =$$

$$= \frac{0 + a^2 + a^2 \cos 120° + 0}{2a^2} = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

3.271. $\arccos(\sqrt{5/30})$. **3.272.** $2\,\mathrm{arctg}(\cos\alpha)$, $\pi - 2\,\mathrm{arctg}(\cos\alpha)$.

3.273. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $SABC$ — пирамида, $V_{SABC} = V$, $(\widehat{(SAB); (ABC)}) = \alpha$ (рис. Р.3.94). Пусть $AB = a$, $SC = h$; тогда $V = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h$, $S_{\triangle SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$ и $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \mathrm{tg}\,\alpha$. Значит, $V = \frac{a^3 \mathrm{tg}\,\alpha}{8}$, откуда $a = \frac{2\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\alpha}}$. Итак, $S_{\triangle SAB} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{V^2}}{\cos\alpha\,\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\alpha}} = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}\,V^2}}{\sqrt{\sin\alpha\cos^2\alpha}}$. ■

3.274. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$ и $\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{48}$.

3.275. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$; двугранные углы AB, BC, CD, DA равны, $AM = MB$, $AK = KD$, MK — сечение, $(\widehat{(SMK); (ABC)}) = \beta$, $S_{\triangle SMK} = S$ (рис. Р. 3.95). Проведем $SN \perp MK$ и соединим точки O и N; согласно теореме о трех перпендикулярах, $ON \perp MK$. Так как $SN \in (SMK)$ и $ON \in (ABC)$, то $\angle SNO$ — линейный угол двугранного угла между (SMK) и (ABC), т. е. $\angle SNO = \beta$. Пусть $AD = a$; тогда $OD = a \sin\frac{\alpha}{2}$, $OC = a\cos\frac{\alpha}{2}$, $NK = \frac{1}{2} a \sin\frac{\alpha}{2}$, $ON = \frac{1}{2} a\cos\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $S_{\triangle SMK} = NK \cdot SN$, откуда $SN = \frac{2S}{a\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из $\triangle SON$ находим $\cos\beta = \frac{ON}{SN} =$

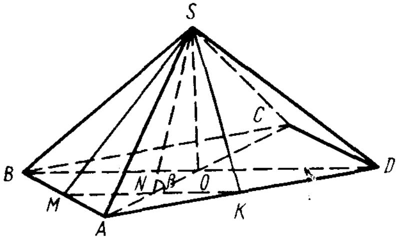


Рис. Р.3.95

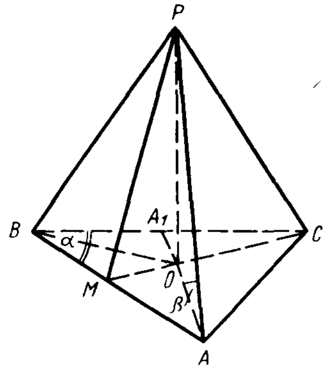


Рис. Р.3.96

$$=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cdot 2S}=\frac{a^2\sin\alpha}{8S}\text{ или } a^2=\frac{8S\cos\beta}{\sin\alpha},\text{ т. е. } a=2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}.\ \blacksquare$$

3.276. $\dfrac{2S}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}}.$

3.277. □ По условию, $PABC$ — пирамида, $AB=AC=b$, $\angle ABC=\alpha$, α, $\angle A$ — острые углы, $PO\perp(ABC)$, $\angle PAO=\angle PBO=\angle PCO=\beta$, $PO\in(PCM)$ (рис. Р.3.96); требуется найти $S_{\Delta PMC}$. Так как $\Delta POA=\Delta POB=\Delta POC$ (по общему катету и противолежащему острому углу), то $OA=OB=OC$, т. е. O — центр окружности, описанной около ΔABC. Значит, $AB=2R\sin\alpha$, где R — радиус этой окружности, откуда $R=\dfrac{b}{2\sin\alpha}$. Из ΔPOA находим $PO=AO\operatorname{tg}\beta=\dfrac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$. Далее имеем $\angle BAO=\angle OBA=90^\circ-\alpha$; $\angle OBC=\angle OCB=\alpha-(90^\circ-\alpha)=2\alpha-90^\circ$; $\angle BMC=180^\circ-\alpha-(2\alpha-90^\circ)=270^\circ-3\alpha$. Проведем $AA_1\perp BC$ и из ΔAA_1B найдем $A_1B=b\cos\alpha$; тогда $BC=2b\cos\alpha$. В ΔMBC имеем $\dfrac{MC}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin(270^\circ-3\alpha)}$. Отсюда

$$MC=-\frac{BC\sin\alpha}{\cos 3\alpha}=-\frac{2b\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 3\alpha}=-\frac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Окончательно получим

$$S_{\Delta PMC}=\frac{1}{2}PO\cdot MC=\frac{1}{2}\cdot\frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}\left(-\frac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}\right)=-\frac{b^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}.\ \blacksquare$$

3.278. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$. **3.279.** $\dfrac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}.$

3.280. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $SO=H$, $\angle SACB=\alpha$, $SM=MB$, AMC — сечение (рис. Р.3.97). Проведем $SK\perp AC$; тогда $OK\perp AC$ и $\angle SKO=\alpha$ как линейный угол двугранного угла

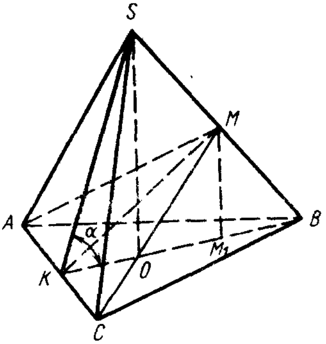


Рис. Р.3.97

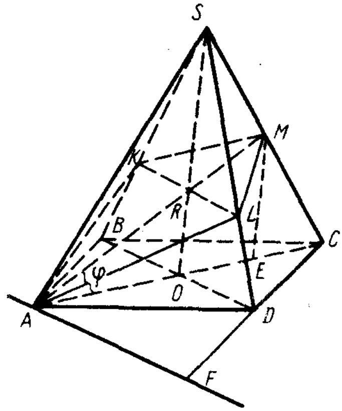


Рис. Р.3.98

AC. Из $\triangle SOK$ находим $OK=H\operatorname{ctg}\alpha$, $AC=2\sqrt{3}\ OK=2H\sqrt{3}\ \operatorname{ctg}\alpha$. Проведем $MM_1 \| SO$; тогда $MM_1=\frac{H}{2}$, $KM_1=2H\operatorname{ctg}\alpha$. Из $\triangle MKM_1$ находим $MK=\sqrt{\frac{H^2}{4}+4H^2\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{H}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. Итак, $S_{\triangle MAC}=\frac{1}{2}AC\cdot MK=$ $=H\sqrt{3}\ \operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{H}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{H^2\sqrt{3}\ \operatorname{ctg}\alpha}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. ■

3.281. $\frac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{12}$ и $\frac{a^2\sqrt{3}\,(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}{4}$.

3.282. □ По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, SO — ее высота, $\angle SAO=\alpha$, $SM=MC$, $(AML)\|BD$ (рис. Р.3.98); требуется найти $\widehat{((AML);(ABC))}$. Так как $(AML)\|BD$, то $(AML)\bigcap(SBD)=KL$, $KL\|BD$ и $(AML)\bigcap(ABC)=AF$, $AF\|BD$. Но $OA\perp BD$; поэтому $RA\perp BD$, откуда следует, что $RA\perp AF$ и $MA\perp AF$. Учитывая, что $AC\perp BD$ и $AF\|BD$, имеем $AC\perp AF$, т. е. $\angle MAC=\varphi$ — искомый угол. Проведем $ME\perp AC$. Пусть $AO=a$; тогда $SO=a\operatorname{tg}\alpha$, $ME=\frac{SO}{2}=\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\alpha$, $AE=\frac{3a}{2}$; из $\triangle MEA$ находим $\operatorname{tg}\varphi=\frac{ME}{AE}=\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2}:\frac{3a}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. Итак, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. ■

3.283. $\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.

3.284. □ По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $\angle ASO=\alpha$, $SE\|BD$, (SEK) образует с AC угол β, $(SEK)\bigcap(ABC)=KL$, $S_{\triangle SKL}=S$ (рис. Р.3.99). Так как $(SKL)\|BO$, то $KL\|BD$; следовательно, $OK=OL$ и $SK=SL$. Проведем $OF\perp(SKL)$, $F\in SM$, где M — середина KL; значит, $\angle SMO=\beta$. Пусть $SO=h$; тогда $SM=\frac{h}{\sin\beta}$, $OM=h\operatorname{ctg}\beta$ (из $\triangle SMO$). Из $\triangle SOA$ находим $OA=h\operatorname{tg}\alpha$; поэтому

$$AM=OA-OM=h\operatorname{tg}\alpha-h\operatorname{ctg}\beta=\frac{h(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=-\frac{h\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

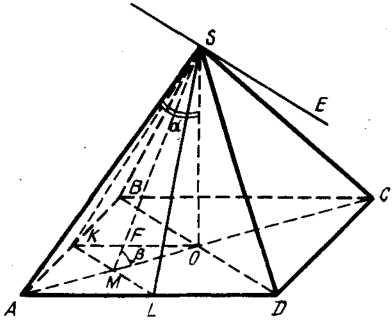


Рис. Р.3.99

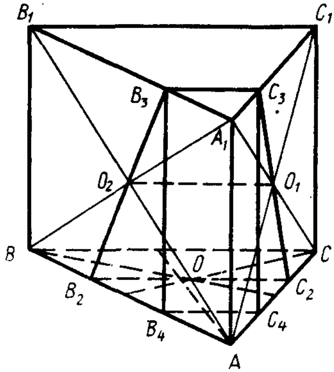


Рис. Р.3.100

Так как ΔAML — прямоугольный и равнобедренный, то $ML = AM$. Теперь найдем

$$S_{\Delta SKL} = ML \cdot SM = -\frac{h\cos(\alpha+\beta)\cdot h}{\cos\alpha \sin^2\beta} = -\frac{h^2\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin^2\beta};\ h = \sin\beta\sqrt{\frac{-S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}.\ ■$$

3.285. $\frac{3\sqrt{3}\,H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha}{8\sin\beta}$.

3.286. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, O — центр нижнего основания, O_1 и O_2 — центры симметрии боковых граней, $AB = a$, $B_2B_3C_3C_2$ — сечение, проходящее через точки O, O_1, O_2, $(\widehat{(ABC); (B_2C_2C_3)}) = \alpha$ (рис. Р.3.100). Так как O_1 и O_2 равноудалены от (ABC), то сечение пересекает основания по параллельным прямым, т. е. $B_2C_2 \| B_3C_3$, и, следовательно, оно является трапецией. В ΔAB_1C_1 отрезок O_2O_1 — средняя линия, т. е. $O_2O_1 \| B_1C_1$; значит, $B_1C_1 \| B_2C_2 \| BC$. Проекция сечения $B_2B_3C_3C_2$ на (ABC) есть трапеция $B_2B_4C_4C_2$, площадь которой

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\ \text{Итак, } S_{\text{сеч}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}.\ ■$$

3.287. $\frac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

3.288. □ По условию, $PABC$ — правильная треугольная пирамида, $\angle PBC = \alpha$, $PM = MC$, $(KMN) \| (APB)$, $S_{\Delta KMN} = S$ (рис. Р.3.101). Так как $PC = 2MC$, то

$S_{\Delta APB} = 4S_{\Delta KMN} = 4S$. Имеем $S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}AP^2\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}AP^2\sin 2\alpha$,

т. е. $AP^2 = \frac{8S}{\sin 2\alpha}$. Из ΔAPF находим $AF = AP\cos\alpha$, откуда $AB = 2AP\cos\alpha$

и $OC = \frac{2AP\cos\alpha}{\sqrt{3}}$. Теперь из ΔPOC получим

$$PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{8S}{\sin 2\alpha} - \frac{16S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3}} = \sqrt{\frac{8S(3-4\cos^2\alpha)}{3\sin 2\alpha}} =$$

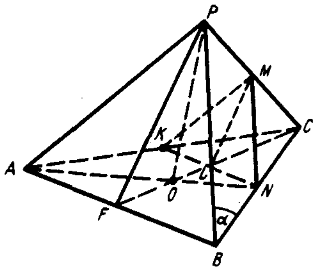


Рис. Р.3.101

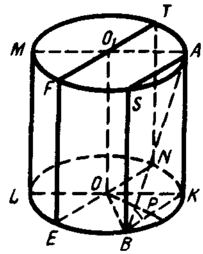


Рис. Р.3.102

$$=\frac{2\sqrt{2S(1-2\cos 2\alpha)}}{\sqrt{3\sin 2\alpha}}=\frac{4\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha}}{\sqrt{3\sin 2\alpha}}=\frac{4\sqrt{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3\sin 2\alpha}}.$$

Окончательно находим

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{16S\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3\sin 2\alpha}}=$$

$$=\frac{16S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}}{3\sqrt{\sin 2\alpha}},\text{ где }\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}.\ ■$$

3.289. □ По условию, $AKLM$ — цилиндр, OO_1 — его ось, A принадлежит окружности верхнего основания, B — окружности нижнего основания, $AB=l$, $\angle ABK=\alpha$, осевое сечение $AMLK$ — квадрат (рис. Р.3.102); требуется найти расстояние от OO_1 до AB. Проведем $BS\parallel AK$ и получим сечение $BSAK$ цилиндра, содержащее AB; через OO_1 проведем $(EFT)\parallel(SBK)$. Расстояние между OO_1 и AB равно расстоянию между (EFT) и (SBK). Проведем $OP\perp BK$; тогда $OP\perp(SBK)$, так как $OP\perp SB$, а $SB\cap BK$, т. е. OP — искомое расстояние. Из $\triangle AKB$ найдем $BK=l\cos\alpha$, $AK=l\sin\alpha$; отсюда $PB=\frac{1}{2}l\cos\alpha$, $OB=\frac{1}{2}EN=\frac{1}{2}TN=\frac{1}{2}AK=\frac{1}{2}l\sin\alpha$. Наконец, из $\triangle OPB$ получим $OP=\sqrt{\frac{1}{4}l^2\sin^2\alpha-\frac{1}{4}l^2\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}l\sqrt{-\cos 2\alpha}$, где $\cos 2\alpha<0$, откуда $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$. ■

3.290. □ По условию, $CDEF$ — цилиндр, $AC=AB=BC=a$, AB принадлежит верхнему основанию цилиндра, C — окружности нижнего основания цилиндра, (ABC) составляет с CD угол α (рис. Р.3.103). Проведем $CQ\perp AB$; тогда $DC\perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах), $(ABC)\perp(CDQ)$, так как $AB\perp(CDQ)$. Проведем $DK\perp(ABC)$; $DK\in(CDQ)$ и $K\in(CQ)$, т. е. $\angle DCK=\alpha$. В $\triangle CDQ$ имеем $DC=CQ\cos\alpha$, $QD=CQ\sin\alpha$, откуда

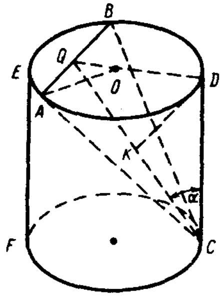


Рис. Р.3.103

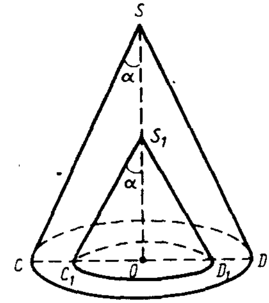


Рис. Р.3.104

$DC=\dfrac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{2}$; $QD=\dfrac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$. Обозначим радиус основания цилиндра через R, т. е. $OD=OA=OB=R$. Из $\triangle AOQ$ находим $OQ=\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{4}}$ или $R+\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{4}}=QD=\dfrac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$. Решив это уравнение, найдем $R=\dfrac{a(3\sin^2\alpha+1)}{4\sqrt{3}\sin\alpha}$. Окончательно получим

$$S_{\text{бок}}=2\pi\,\frac{a(3\sin^2\alpha+1)}{4\sqrt{3}\sin\alpha}\cdot\frac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{2}=\frac{1}{4}\,\pi a^2(3\sin^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\alpha. \ ■$$

3.291. $\dfrac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

3.292. □ По условию, SCD и $S_1C_1D_1$ — конусы, основания которых имеют общий центр O, $\angle CSO=\angle C_1S_1O=\alpha$, $OC=R$, $S_{\text{бок.}\,S_1C_1D_1}=\frac{1}{2}\,S_{\text{полн.}\,SCD}$ (рис. Р.3.104); требуется найти $V_{S_1C_1D_1}$. Из $\triangle SOC$ находим $SC=\dfrac{R}{\sin\alpha}$, $SO=$ $=R\operatorname{ctg}\alpha$. Пусть $OC_1=r$; тогда $S_1C_1=\dfrac{r}{\sin\alpha}$, $S_1O=r\operatorname{ctg}\alpha$. Далее имеем

$$S_{\text{полн.}\,SCD}=\pi R^2+\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}=\frac{\pi R^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha};\quad S_{\text{бок.}\,S_1C_1D_1}=\frac{\pi r^2}{\sin\alpha}.$$

Решив уравнение $\dfrac{2\pi r^2}{\sin\alpha}=\dfrac{\pi R^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, получим $r^2=\dfrac{R^2(1+\sin\alpha)}{2}=$ $=R^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, т. е. $r=R\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Итак,

$$V_{S_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\,\pi r^3\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}\,\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha. \ ■$$

3.293. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB=90°$, $AC=a$, $\angle ABC=\alpha$, $AC>BC$, AB — диаметр основания конуса SAB, $S\in A_1C_1$,

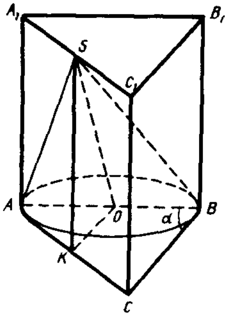


Рис. Р.3.105

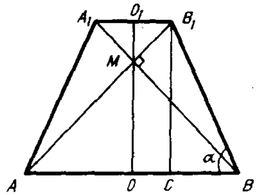


Рис. Р.3.106

$AA_1=a/2$ (рис. Р.3.105). Заметим, что окружность основания конуса не является окружностью, описанной около $\triangle ABC$; в противном случае конус не был бы прямым и его высотой было бы боковое ребро, равное $a/2$. Проведем SO перпендикулярно основанию конуса и $SK\|AA_1$ и соединим точки K и O. Так как $SK\perp(ABC)$, $SO\perp AB$, SO — наклонная к (ABC), OK — ее проекция на эту плоскость, то $OK\perp AC$. Из $\triangle ABC$ находим $AB=\dfrac{a}{\sin\alpha}$, т. е. $OB=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Далее в $\triangle AOK$ имеем $\dfrac{OK}{OA}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $OK=OA\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\alpha}$. Наконец, из $\triangle SKO$ находим

$$SO=\sqrt{SK^2+OK^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{4\sin^2\alpha}}=\frac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}. \quad ■$$

3.294. $\dfrac{\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}{\pi-\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}$. **3.295.** $2H\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$. **3.296.** $\dfrac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

3.297. $2\operatorname{arcctg}\pi\approx 39{,}2^\circ$.

3.298. □ Изобразим осевое сечение усеченного конуса. По условию, $AB_1\perp A_1B$, OO_1 — ось усеченного конуса, BB_1 — образующая усеченного конуса, $AB_1=a$, $\angle B_1BO=\alpha$ (рис. Р.3.106). Пусть $OB=R_1$, $O_1B_1=R_2$; тогда $MO=OB=R_1$, $MO_1=O_1B_1=R_2$, $OO_1=R_1+R_2$. Проведем $B_1C\|O_1O$; при этом $B_1C=O_1O=R_1+R_2$. В $\triangle B_1CA$ имеем $\angle B_1AC=45^\circ$; поэтому $B_1C=AC=R_1+R_2=\dfrac{a\sqrt2}{2}$. Далее из $\triangle B_1CB$ находим $B_1B=\dfrac{B_1C}{\sin\alpha}=\dfrac{a\sqrt2}{2\sin\alpha}$, $BC=R_1-R_2=B_1C\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a\sqrt2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Значит, $S_{\text{бок}}=\pi(R_1+R_2)\cdot B_1B=\dfrac{\pi a^2}{2\sin\alpha}$.

Решив систему уравнений $R_1+R_2=\dfrac{a\sqrt2}{2}$, $R_1-R_2=\dfrac{a\sqrt2}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, найдем $R_1=$

$$=\frac{a\sqrt2}{4}(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{a\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\alpha},\ R_2=\frac{a\sqrt2}{4}(1-\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{a\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\alpha}.$$ Итак,

$$S_{\text{полн}}=\frac{\pi a^2}{2\sin\alpha}+\frac{\pi a^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{4\sin^2\alpha}+\frac{\pi a^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{4\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(2\sin\alpha+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}(2\sin\alpha+1)=\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right). \blacksquare$$

3.299. □ По условию, SAB — конус, SAC — сечение его плоскостью, $\angle ASC=\alpha$, SO — высота конуса, $S_{\Delta ASC} : S_{\text{полн}}=2:\pi$ (рис. Р.3.107); требуется найти $\angle ASO$. Пусть $SA=l$, $OA=R$; тогда $S_{\text{полн}}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(R+l)$, $S_{\Delta ASC}=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$. Имеем $\frac{l^2\sin\alpha}{2\pi R(R+l)}=\frac{2}{\pi}$; $\frac{l^2\sin\alpha}{R^2+Rl}=4$; $\frac{\sin\alpha}{\left(\frac{R}{l}\right)^2+\frac{R}{l}}=4$. Учитывая, что $\frac{R}{l}=\sin\varphi$, где $\varphi=\angle ASO$, получим $4\sin^2\varphi+4\sin\varphi-\sin\alpha=0$, откуда $\sin\varphi=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\sin\alpha}}{4}$. Так как φ — острый угол, то

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Итак, $\varphi=\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)$. ■

3.300. □ По условию, SAB — конус, SO — его высота, $SO=h$, $\angle ASO=\alpha$, SKM — сечение конуса плоскостью, $\angle SKMB=\beta$ (рис. Р.3.108). Проведем $SN\perp KM$; тогда $ON\perp KM$ и, значит, $\angle SNO=\beta$. В ΔSON имеем $SN=\frac{h}{\sin\beta}$, $ON=h\operatorname{ctg}\beta$. Далее из ΔSOM находим $OM=h\operatorname{tg}\alpha$ и, наконец, из ΔONM получим

$$MN=\sqrt{h^2\operatorname{tg}^2\alpha-h^2\operatorname{ctg}^2\beta}=h\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}=\frac{h\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

Итак, $S_{\Delta SKM}=\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin^2\beta\cos\alpha}$. ■

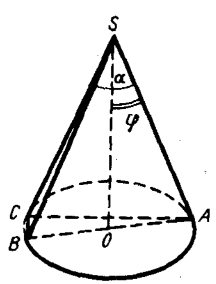


Рис. Р.3.107

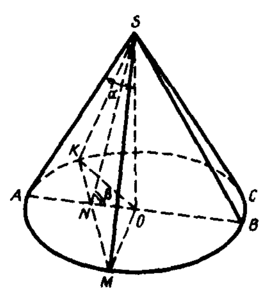


Рис. Р.3.108

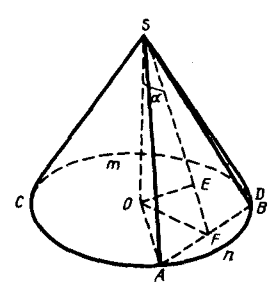


Рис. Р.3.109

3.301. □ По условию, SCD — конус, SO — его высота, SAB — сечение конуса плоскостью, $\cup AnB : \cup AmB = p : q$, $OE \perp (SAB)$, $OE = a$, $\angle ESO = \alpha$ (рис. Р.3.109). Из $\triangle SEO$ найдем $SO = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Так как $SO \perp AB$, то $SE \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах) и из $\triangle FEO$ следует, что $OF = \dfrac{OE}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. Далее имеем $\cup AnB = \dfrac{2\pi p}{p+q}$, откуда $\angle AOF = \dfrac{\pi p}{p+q}$. Тогда из $\triangle AFO$ получим $AO = \dfrac{OF}{\cos\dfrac{\pi p}{p+q}} = \dfrac{a}{\cos\alpha\cos\dfrac{\pi p}{p+q}}$. Итак,

$$V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{\cos^2\alpha\cos^2\dfrac{\pi p}{p+q}} \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin 2\alpha\cos^2\dfrac{\pi p}{p+q}}. \ ■$$

3.302. $\dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{k}$, $k > \pi$.

3.303. □ По условию, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, AK — биссектриса угла BAC, $MN \perp AK$ (рис. Р.3.110). Проведем $BB_1 \perp MN$ и $CC_1 \perp MN$ и отложим $B_1D = BD$, $C_1E = CE$. Искомый объем будем искать по формуле

$$V_{\text{т.вр}} = V_{DECB} - V_{DAB} - V_{AEC} = \frac{1}{3}\pi DE(DB^2 + DB \cdot EC + EC^2) - \frac{1}{3}\pi AD \cdot DB^2 - \frac{1}{3}\pi AE \cdot EC^2.$$

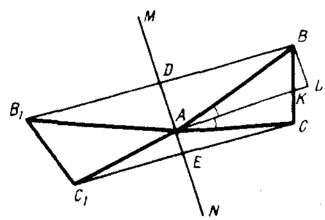


Рис. Р.3.110

В $\triangle ABC$ имеем $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $AC = a\operatorname{ctg}\alpha$. Очевидно, что $\angle DBA = \angle BAK = \alpha/2$, $\angle ACE = \angle KAC = \alpha/2$. Из $\triangle ADB$ найдем $AD = AB\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, $DB = AB\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Далее из $\triangle AEC$ находим

$AE = AC\sin\dfrac{\alpha}{2} = a\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\cos\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, $\quad EC = AC\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\cos\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Значит,

$DE = DA + AE = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{a\cos\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Окончательно получим

$$V_{\text{т. вр.}} = \frac{1}{3}\pi a\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{a^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right) -$$

$$-\frac{1}{3}\pi\frac{a^3}{8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{1}{3}\pi\frac{a^3\cos^3\alpha}{8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$=\frac{\pi a^3}{24\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha)-1-\cos^3\alpha\right)=$$

$$=\frac{\pi a^3}{12\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}((1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha)-1-\cos^3\alpha)=$$

$$=\frac{\pi a^3}{12\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}(2\cos\alpha+2\cos^2\alpha)=\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3}. \blacksquare$$

3.304. □ По условию, $\angle BAC=\alpha$ — тупой угол, $AB=AC$, $BM\perp AC$, $CN\perp AB$, $AD\perp BC$, O — ортоцентр (т. е. точка пересечения высот) $\triangle ABC$, $O_1O_2\parallel BC$, $O\in O_1O_2$, $BC=a$ (рис. Р.3.111). Объем тела вращения $\triangle ABC$ вокруг прямой O_1O_2 найдем по формуле $V_{\text{т. вр}}=V_{O_1O_2CB}-2V_{O_1OAB}$, где $V_{O_1O_2CB}=V_{\text{цил}}=\pi\ O_1B^2\cdot BC$. Имеем $\angle OAM=\angle CAD=\frac{\alpha}{2}$, $\angle MOA=90°-\frac{\alpha}{2}$, а $\angle OBD=\frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle ODB$ и $\triangle ADB$ находим $OD=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AD=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; тогда $O_1B=OD=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $OA=OD-AD=\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Окончательно получим

$$V_{\text{т. вр}}=\pi\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot a-\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)=\frac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi a^3}{12}\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right). \blacksquare$$

3.305. $\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$.

3.307. □ По условию, $AB=2R$, $CD\parallel AB$, O — центр полуокружности, $\angle ADC=\alpha$, $AC<AD$ (рис. Р.3.112). Объем тела вращения $\triangle ACD$ вокруг AB будем искать по формуле

$$V_{\text{т. вр}}=V_{AO_2C}+V_{O_2CDO_1}-V_{AO_1D}=\frac{1}{3}\pi\ O_2C^2\cdot AO_2+\pi\ O_2C^2\cdot O_1O_2-$$

$$-\frac{1}{3}\pi\ O_1D^2\cdot AO_1=\frac{1}{3}\pi\ O_2C^2(AO_2+3O_1O_2-AO_1)=\frac{2}{3}\pi\ O_2C^2\cdot O_1O_2,$$

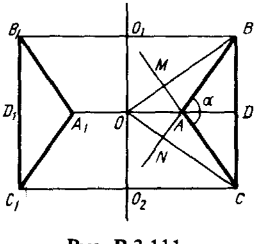


Рис. Р.3.111

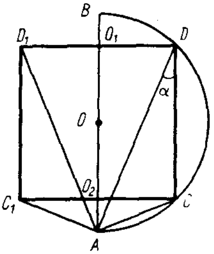


Рис. Р.3.112

так как $O_1D=O_2C$ и $AO_1-AO_2=O_1O_2$. Учитывая, что $\angle ABC=\angle ADC=\alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на $\cup AC$, из $\triangle ACB$, где $\angle ACB=90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр AB), находим $BC=2R\cos\alpha$, $AC==2R\sin\alpha$. В $\triangle AO_2C$ имеем $\angle O_2AC=90°-\alpha$, $\angle O_2CA=\alpha$, $O_2C=AC\cos\alpha=2R\sin\alpha\cos\alpha=R\sin 2\alpha$, $O_2A=AC\sin\alpha=2R\sin^2\alpha$; тогда $O_1O_2=2R-2AO_2=2R(1-2\sin^2\alpha)=2R\cos 2\alpha$. Итак,

$$V_{т.\,вр}=\frac{2}{3}\pi R^2\sin^2 2\alpha\cdot 2R\cos 2\alpha=\frac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha. \blacksquare$$

3.308. □ По условию, $AB\parallel DC$, $AD=BC$, $AB=a$, $\angle DAB=\alpha$, $BD\perp AD$ (рис. Р.3.113). Объем тела вращения трапеции $ABCD$ вокруг AB будем искать по формуле $V_{т.\,вр}=2V_{AED}+V_{DEFC}$, где $DE\perp AB$, $CF\perp AB$. Имеем

$$V_{т.\,вр}=\frac{2}{3}\pi DE^2\cdot AE+\pi DE^2\cdot EF=\frac{1}{3}\pi DE^2(2AE+3EF)=\frac{1}{3}\pi DE^2(a+2EF)=$$
$$=\frac{1}{3}\pi DE^2\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}(a-2AE)\right)=\pi DE^2\left(a-\frac{4}{3}AE\right).$$

Из $\triangle ADB$ находим $AD=a\cos\alpha$, а из $\triangle ADE$ получим $DE=AD\sin\alpha=a\cos\alpha\sin\alpha=\frac{a}{2}\sin 2\alpha$, $AE=AD\cos\alpha=a\cos^2\alpha$. Следовательно,

$$V_{т.\,вр}=\pi\frac{a^2}{4}\sin^2 2\alpha\left(a-\frac{4}{3}a\cos^2\alpha\right)=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\left(\frac{3}{4}-\cos^2\alpha\right)=$$
$$=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\,\frac{1-2\cos 2\alpha}{4}=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right). \blacksquare$$

3.309. $\frac{1}{2}\pi a^3\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; при $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **3.310.** $\pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.311. $\dfrac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. **3.312.** $8\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.313. $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **3.314.** $\dfrac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. **3.315.** $\frac{4}{5}$.

3.316. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида, $OO_1=H$, $OO_1=\sqrt{BC\cdot B_1C_1}$, $\angle A_1AO=\alpha$ (рис. Р.3.114). Пусть $BC=a$,

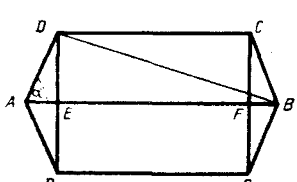


Рис. Р.3.113

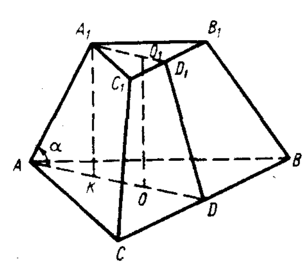


Рис. Р.3.114

$B_1C_1=b$; тогда $OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $O_1A_1=\frac{b\sqrt{3}}{3}$. Проведем $A_1K \| OO_1$; из $\triangle A_1KA$ находим $AK=H\operatorname{ctg}\alpha$ и так как $AK=AO-KO=AO-A_1O_1=$ $=\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{b\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)$, то $\frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)=H\operatorname{ctg}\alpha$. Кроме того, из условия следует, что $ab=H^2$. В результате получим

$$V_{\text{ус. пир}}=\frac{1}{3}H\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{H\sqrt{3}}{12}(a^2+ab+b^2)=$$

$$=\frac{H\sqrt{3}}{12}((a-b)^2+3ab)=\frac{H\sqrt{3}}{12}(3H^2\operatorname{ctg}^2\alpha+3H^2)=$$

$$=\frac{H^3\sqrt{3}}{4}(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)=\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}. \blacksquare$$

3.317. $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}$. **3.318.** $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$.

3.319. $\frac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$. **3.320.** $\frac{2(m+n)H^2}{m-n}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3.321. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида, ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные треугольники, $DB=DA$, $D_1B_1=D_1A_1$ и $D_1D\perp(ABC)$, большее ребро пирамиды равно l и образует с (ABC) угол α, O и O_1 — центры оснований (рис. Р.3.115). Пусть $AC=a$, $A_1C_1=b$; тогда $DC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $D_1C_1=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Проведем $C_1E\|D_1D$, $A_1K\|D_1D$ и положим $DD_1=h$. Из $\triangle C_1EC$ находим, что $C_1C=\sqrt{C_1E^2+EC^2}=$ $=\sqrt{h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{3(a-b)^2}{4}}$, а из $\triangle A_1KA$ — что $A_1A=\sqrt{A_1K^2+AK^2}=\sqrt{h^2+\frac{(a-b)^2}{4}}$. Значит, $C_1C>A_1A$, т. е. $C_1C=l$ и $\angle C_1CE=\alpha$; в $\triangle C_1EC$ имеем $C_1E=l\sin\alpha$, $CE=l\cos\alpha$. Проведем $O_1F\|D_1D$; тогда

$$OF=OD-DF=OD-O_1D_1=\frac{a\sqrt{3}}{6}-\frac{b\sqrt{3}}{6}=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}. \quad (1)$$

Так как $CE=l\cos\alpha$ и $CE=DC-DE=DC-D_1C_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$, то

$$\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}=l\cos\alpha \text{ или } a-b=\frac{2l\cos\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $OF=\frac{l\cos\alpha}{3}$. Наконец, из $\triangle O_1FO$ получим

$$OO_1=\sqrt{O_1F^2+OF^2}=\sqrt{C_1E^2+OF^2}=\sqrt{l^2\sin^2\alpha+\frac{l^2\cos^2\alpha}{9}}=$$

$$=\frac{l}{3}\sqrt{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{l}{3}\sqrt{\frac{9(1-\cos 2\alpha)}{2}+\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{l}{3}\sqrt{5-4\cos 2\alpha}. \blacksquare$$

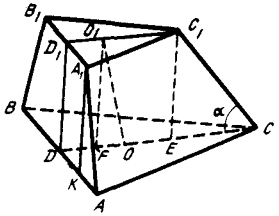


Рис. Р.3.115

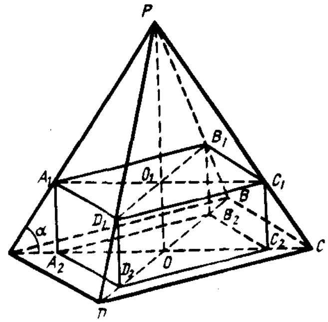


Рис. Р.3.116

3.322. $\operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos(\beta/2)}$.

3.323. □ По условию, $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — вписанный в нее куб, точки A_1, B_1, C_1, D_1 принадлежат боковым ребрам, а A_2, B_2, C_2, D_2 — основанию пирамиды, $PO\perp(ABC)$, $\angle PAO=\alpha$ (рис. Р.3.116); требуется найти $V_{\text{куба}} : V_{\text{пир}}$. Положим $D_1D_2=x$; тогда $V_{\text{куба}}=x^3$, $OD_2=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Из ΔD_1D_2D находим $DD_2=x\operatorname{ctg}\alpha$; далее имеем $OD=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}+x\operatorname{ctg}\alpha$, $PO=OD\operatorname{tg}\alpha=$ $=\dfrac{x(\sqrt{2}+2\operatorname{ctg}\alpha)}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Значит,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}DB^2\cdot PO=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2(\sqrt{2}+2\operatorname{ctg}\alpha)^2\cdot x(\sqrt{2}+2\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{4\cdot 2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,x^3(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}{6\operatorname{ctg}\alpha},\text{ т. е. }\frac{V_{\text{куба}}}{V_{\text{пир}}}=\frac{x^3\cdot 6\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}\,x^3(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}=\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}.\ \blacksquare$$

3.324. □ По условию, $SABCD$ — правильная пирамида, SO — ее высота, $\angle SAO=\alpha$, $MQPNM_1Q_1P_1N_1$ — правильная вписанная в нее призма, точки M_1, Q_1, P_1, N_1 лежат на боковых ребрах пирамиды, $AD=a$, $\angle P_1MP=\varphi$ (рис. Р.3.117). Пусть $PP_1=m$; тогда из ΔMPP_1 имеем $MP=m\operatorname{ctg}\varphi$ и, следовательно, $V_{\text{пр}}=\dfrac{1}{2}m^2\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot m=\dfrac{1}{2}m^3\operatorname{ctg}^2\varphi$. Так как $\Delta M_1MA\sim\Delta SOA$, то $\dfrac{MM_1}{SO}=\dfrac{AM}{AO}$. Из ΔSOA находим $SO=AO\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, откуда $AM=\dfrac{MM_1\cdot AO}{SO}=\dfrac{ma\sqrt{2}\cdot 2}{2a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}=m\operatorname{ctg}\alpha$. Но $AM=AO-MO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}MP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}-\dfrac{m\operatorname{ctg}\varphi}{2}$. Решив уравнение $m\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}-\dfrac{m\operatorname{ctg}\varphi}{2}$, получим $m=\dfrac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\varphi}$. Итак,

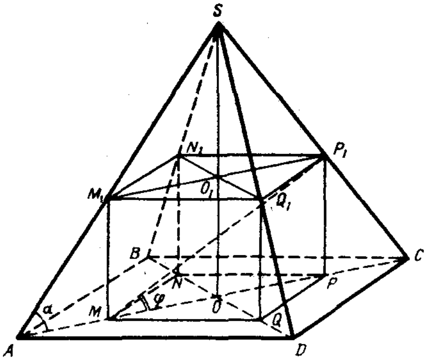


Рис. Р.3.117

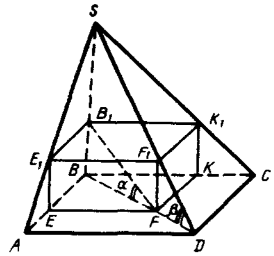


Рис. Р.3.118

$$V_{\text{пр}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\varphi}\right)^3\operatorname{ctg}^2\varphi=\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\varphi)^3}.\ \blacksquare$$

3.325. $\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

3.326. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат, $(SBA)\perp(ABC)$, $(SBC)\perp(ABC)$, $AB=a$, большее боковое ребро образует с (ACB) угол β; в пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед $BEFKB_1E_1F_1K_1$, где $B, E, F, K\in(ABC)$, точки B_1, E_1, F_1, K_1 принадлежат боковым ребрам пирамиды. B_1F образует с (ABC) угол α (рис. Р.3.118). Так как боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны (ABC), то $E\in AB$, $K\in BC$, $F\in BD$. Поскольку $ABCD$ — квадрат, $BEFK$ — также квадрат как фигура, гомотетичная $ABCD$ относительно точки B. Пусть $BE=x$; тогда $BF=x\sqrt{2}$. Из ΔB_1BF, в котором $\angle B_1FB=\alpha$, находим $B_1B=BF\operatorname{tg}\alpha=x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. Так как $BA=BC<BD$, то SD — наибольшее боковое ребро пирамиды, т. е. $\angle SDB=\beta$. Далее имеем $FD=BD-BF=(a-x)\sqrt{2}$. Из ΔF_1FD находим $F_1F=FD\operatorname{tg}\beta=(a-x)\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$; поэтому $(a-x)\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta=x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, откуда $x=\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Окончательно получим

$$V_{\text{пар}}=x^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\cos^3\alpha\sin\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)\cos\alpha}=\frac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}.\ \blacksquare$$

3.327. $\dfrac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$.

3.328. □ По условию, $SABC$ — пирамида, $CA=CB$, $\angle ACB=\alpha$, ΔABC вписан в основание цилиндра, $S\in KM$, KM — образующая цилиндра, $KS=SM$, $V_{\text{цил}}=V$ (рис. Р.3.119). Обозначим радиус основания цилиндра через R, а его высоту — через H; тогда $V=\pi R^2H$, откуда $R^2H=\dfrac{V}{\pi}$. Имеем

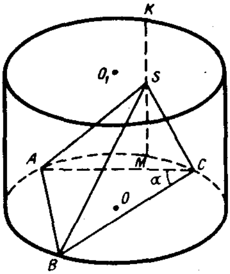


Рис. Р.3.119

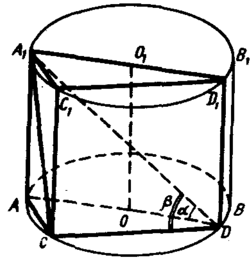


Рис. Р.3.120

$AB=2R\sin\alpha$ и, значит,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4R^2\sin^2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha}=2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Итак,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\cdot 2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{3}R^2H\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

3.329. $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. **3.330.** $\dfrac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$.

3.331. □ По условию, AA_1B_1B — цилиндр, OO_1 — его ось, $ACDA_1C_1D_1$ — призма, вписанная в цилиндр, $OO_1\in(AA_1D_1)$, $\angle A_1DA=\alpha$, $\angle A_1DC=\beta$, $OO_1=H$ (рис. Р.3.120). Из $\triangle A_1AD$ найдем $AD=H\operatorname{ctg}\alpha$, $A_1D=\dfrac{H}{\sin\alpha}$. Соединим A_1 и C; так как $\angle ACD$ — вписанный и опирается на диаметр AD, то $CD\perp AC$ и, значит, $A_1C\perp CD$. Из $\triangle A_1CD$ находим $CD=A_1D\cos\beta=\dfrac{H\cos\beta}{\sin\alpha}$, а из $\triangle ACD$ получим

$$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{H^2\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{H^2\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}}=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{H\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha}.$$

Итак,

$$V_{\text{пр}}=S_{\triangle ABC}\cdot OO_1=\frac{1}{2}CD\cdot AC\cdot H=\frac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{2\sin^2\alpha}.\ \blacksquare$$

3.332. □ По условию, $SABC$ — конус, SO — его высота, $CDEFC_1D_1E_1F_1$ — вписанный в конус куб, C_1, D_1, E_1, F_1 — точки, лежащие на боковой поверхности конуса, $SO:CC_1=k$ (рис. Р.3.121). В $\triangle SO_1C_1$ имеем $\operatorname{ctg}\angle ASO=\dfrac{SO_1}{O_1C}=\dfrac{2(SO-x)}{x\sqrt{2}}$, где $x=CC_1$. Отсюда находим $\operatorname{ctg}\angle ASO=$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{SO}{x}-1\right)=\sqrt{2}(k-1),\ \text{т. е.}\ \angle ASO=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}(k-1)).\ \blacksquare$$

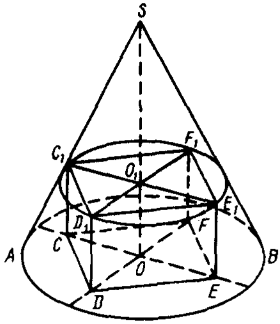


Рис. Р.3.121

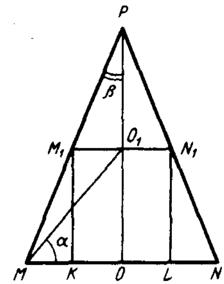


Рис. Р.3.122

3.333. $\dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)}$.

3.334. □ Пусть PMN — осевое сечение конуса, KLN_1M_1 — осевое сечение вписанного цилиндра, $\angle O_1MK=\alpha$, PO — высота конуса, $\angle MPO=\beta$ (рис. Р.3.122); требуется найти $V_{\text{кон}}:V_{\text{цил}}$. Обозначим радиус основания конуса через R; тогда $OP=R\operatorname{ctg}\beta$ (из $\triangle POM$) и $V_{\text{кон}}=\dfrac{1}{3}\pi R^3\operatorname{ctg}\beta$. Из $\triangle O_1OM$ находим $OO_1=R\operatorname{tg}\alpha$. Так как $M_1K=OO_1$, то из $\triangle M_1MK$, в котором $\angle MM_1K=\angle MPO=\beta$, получим $MK=R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Значит, $OK=OM-MK=R-R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, откуда

$$V_{\text{цил}}=\pi OK^2\cdot OO_1=\frac{\pi R^3\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{цил}}}=\frac{\pi R^3\operatorname{ctg}\beta\cos^2\beta\cos^2\alpha}{3\pi R^3\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}.$$ ■

3.335. $\operatorname{arctg}\dfrac{2(4+\sqrt{6})}{5}$. **3.336.** $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}}{4\sin\alpha\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}$. **3.337.** $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$. **3.338.** $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. **3.339.** $\dfrac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **3.340.** $\dfrac{2\pi l^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$. **3.341.** $\dfrac{\pi a^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}$.

3.342. □ Изобразим осевое сечение фигуры плоскостью, проходящей через центр вписанного шара и параллельной основанию. В сечении получим параллелограмм $ABCD$, равный основанию прямого параллелепипеда, и вписанный в него большой круг вписанного шара с центром в точке O (рис. Р.3.123). Из этого следует, что основанием параллелепипеда служит ромб. Требуется найти углы основания параллелепипеда, если $V_{\text{пар}}:V_{\text{шара}}=k$.

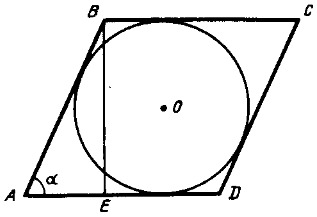


Рис. P.3.123

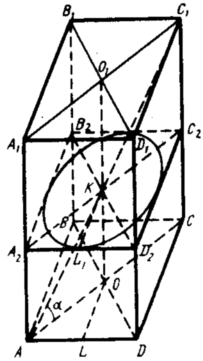


Рис. P.3.124

Обозначим радиус шара через r, тогда высота ромба равна $2r$. Проведем $BE \perp AD$ и положим $\angle BAD = \alpha$. Из $\triangle BEA$ находим $AB = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$. Тогда $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V_{\text{пар}} = S_{ABCD} \cdot 2r = \dfrac{8r^3}{\sin\alpha}$. По условию, $\dfrac{8r^3}{\sin\alpha} : \dfrac{4\pi r^3}{3} = k$ или $\sin\alpha = \dfrac{6}{\pi k}$. Итак, $\alpha = \arcsin\dfrac{6}{\pi k}$, $\angle ADC = \pi - \arcsin\dfrac{6}{\pi k}$; так как $0 < \sin\alpha \leqslant 1$, то $\dfrac{6}{\pi k} \leqslant 1$, откуда $k \geqslant \dfrac{6}{\pi}$. При $k = \dfrac{6}{\pi}$ основанием параллелепипеда служит квадрат, т. е. параллелепипед является правильной призмой. ■

3.343. □ По условию, K — центр шара, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, описанная около шара, $ABCD$ — ромб, AC — бóльшая диагональ ромба, $\angle C_1AC = \alpha$ (рис. P.3.124). Пусть $KO = r$; тогда $CC_1 = 2r$, $AC = 2r\operatorname{ctg}\alpha$. Через точку K проведем $(A_2B_2C_2) \| (ABC)$; эта плоскость пересечет шар по большому кругу, вписанному в сечение $A_2B_2C_2D_2$, равное основанию $ABCD$; следовательно, высота ромба $A_2B_2C_2D_2$ равна $2r$. Проведем $OL \perp AD$. В $\triangle ALO$ имеем $OL = r$, $\angle OAL = \dfrac{1}{2}\angle BAD$, $\sin\angle OAL = \dfrac{OL}{OA} = \dfrac{r}{r\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $\angle AOL = \arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$; $\angle BAD = 2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$. ■

3.344. $\operatorname{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **3.345.** $2r^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3.346. □ По условию, O_1 — центр шара, вписанного в правильную пирамиду $PABCD$, PO — высота пирамиды, $PO_1 : O_1O = m : n$ (рис. P.3.125); требуется найти угол между (PDC) и (BPC). Очевидно, что $BD \perp PC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Проведем через BD плоскость $(BLD) \perp PC$; тогда $BL \perp PC$ и $DL \perp PC$, т. е. $\angle BLD$ — линейный угол двугранного угла $BPCD$. Пусть $DC = a$, K — точка касания шара с боковой поверхностью пирамиды и $PF \perp DC$. Так как $\triangle O_1KP \sim \triangle POF$, то $\dfrac{O_1K}{O_1P} = \dfrac{OF}{PF}$ или $\dfrac{n}{m} = \dfrac{a}{2PF}$; тогда $PF = \dfrac{am}{2n}$. Из $\triangle PFC$ находим $PC = \sqrt{\dfrac{a^2m^2}{4n^2} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{m^2+n^2}}{2n}$. Теперь восполь-

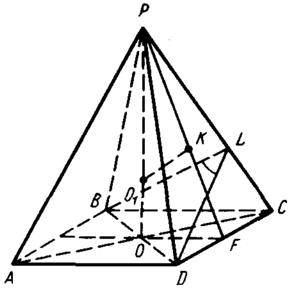


Рис. Р.3.125

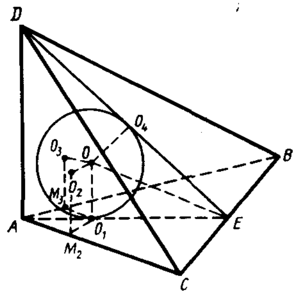


Рис. Р.3.126

зуемся тем, что $S_{\Delta PDC}=\frac{1}{2}\,DC\cdot FP=\frac{1}{2}\,PC\cdot DL$, откуда

$$DL=\frac{DC\cdot FP}{PC}=\frac{a\cdot am\cdot 2n}{2n\cdot a\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{am}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Наконец, в ΔBLD имеем $BD^2=2DL^2-2DL^2\cos\angle BLD$, т. е.

$$\cos\angle BLD=\frac{2DL^2-BD^2}{2DL^2}=\frac{\frac{2a^2m^2}{m^2+n^2}-2a^2}{\frac{2a^2m^2}{m^2+n^2}}=-\frac{2a^2n^2}{2a^2m^2}=-\frac{n^2}{m^2};$$

$$\angle BLD=\pi-\arccos\frac{n^2}{m^2}. \blacksquare$$

3.347. $\frac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. **3.348.** $8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **3.349.** $4R^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **3.350.** $\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{3}$. **3.351.** $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **3.352.** $\frac{23}{26}$. **3.353.** $2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$.

3.354. □ I способ. По условию, $DABC$ — пирамида, $AB=AC=b$, $(DAB)\perp(ABC)$, $(DAC)\perp(ABC)$, $\angle BDAC=\alpha$, $\angle DBCA=\alpha$, O — центр вписанного шара (рис. Р.3.126). Высота пирамиды совпадает с боковым ребром AD, поскольку перпендикуляр, опущенный из точки D на (ABC), должен принадлежать и (DAB), и (DAC), т. е. он совпадает с линией их пересечения. Так как $AB\perp AD$ и $AC\perp AD$, то $\angle BAC=\alpha$. Проведем $DE\perp BC$ и соединим точки A и E; тогда $\angle AED=\alpha$ как линейный угол двугранного угла $DBCA$. Докажем, что $O\in(ADE)$. Соединим O с точками касания O_1, O_2, O_3, O_4 и проведем $O_2M_2\perp(ABC)$, $O_3M_3\perp(ABC)$; так как $(ADB)\perp(ABC)$ и $(ADC)\perp(ABC)$, то $M_2\in(AC)$, $M_3\in(AB)$; при этом $\angle O_2OO_1=\angle O_3OO_1=90°$ как углы между перпендикулярами к перпендикулярным плоскостям. Но $OO_2=OO_3=OO_1=r$, где r — радиус вписанного шара, и, значит, $O_1M_2=O_1M_3=r$, т. е. $O_1\in(AE)$, и так как $OO_1\perp(ABC)$, то $O\in(ADE)$.

Из ΔO_1M_2A находим $AO_1=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а из ΔAEC получим $AE=b\cos\frac{\alpha}{2}$; тогда

$O_1E=b\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; наконец, в $\triangle OO_1E$ имеем $O_1E=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Составим уравнение $b\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{1}{2}b\sin\alpha=r\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, откуда

$$r=\frac{b\sin\alpha}{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

II способ. Если воспользоваться формулой $V_{\text{пир}}=\frac{1}{2}S_{\text{полн}}\,r$, то можно обойтись без выяснения, где расположен центр вписанного шара. Из $\triangle DAE$ находим $AD=AE\operatorname{tg}\alpha=b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Тогда

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\cdot b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{6}b^3\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}+2S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha+\frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\alpha}+2\cdot\frac{1}{2}b\cdot AD=$$

$$=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha+\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha+b^2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha\left(\cos\alpha+1+2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Окончательно получим

$$r=\frac{3\cdot\frac{1}{6}b^3\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha\left(\cos\alpha+1+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{b\sin\alpha}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}.\ ■$$

3.355. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $SO\perp(ABC)$, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB=\alpha$ ($\alpha<\pi/2$), $\angle SABC=\angle SBCD=\angle SCDA=\angle SDAB=\beta$, L — центр вписанного в пирамиду шара, r — радиус этого шара (рис. Р.3.127). Проведем $SE\perp AB$, $SF\perp BC$, $SK\perp CD$, $SN\perp AD$ и соединим O с E, F, K и N. Имеем $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OK\perp CD$, $ON\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах); тогда $\angle SEO=\angle SFO=\angle SKO=\angle SNO=\beta$ как линейные углы равных двугранных углов и $\triangle SOE=\triangle SOF=\triangle SOK=\triangle SON$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий катет SO и равные противолежащие углы β). Из равенства треугольников заключаем, что $OE=OF=OK=ON$, т. е. O — точка пересечения диагоналей ромба. Отсюда следует, что в данную пирамиду можно вписать конус с осью SO. Шар, вписанный в этот конус, вписан и в пирамиду; следовательно, $L\in SO$ и $LO=r$. Из $\triangle LOF$ находим $OF=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, отрезки OF и ON лежат на одной прямой NF, так как $OF\perp BC$ и $ON\perp AD$, а $AD\parallel BC$; поэтому $NF=2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Проведем $BQ\parallel FN$. Из $\triangle AQB$ находим $AB=\frac{BQ}{\sin\alpha}=\frac{NF}{\sin\alpha}=\frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$, а из $\triangle SOF$ получим $SO=OF\operatorname{tg}\beta=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta$. Итак,

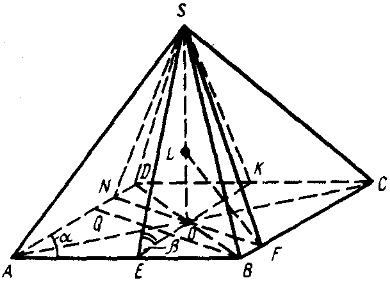


Рис. Р.3.127

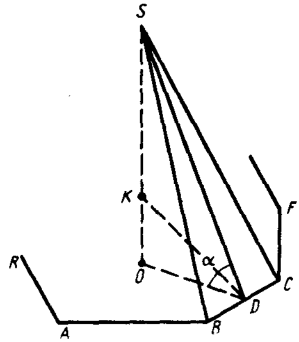


Рис. Р.3.128

$$V_{\text{шр}}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO=\frac{1}{3}AB^2\sin\alpha\cdot r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta=$$

$$=\frac{4r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}{3\sin^2\alpha}=\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}.\ \blacksquare$$

3.356. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **3.357.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, $0<k\leqslant 2\sin\frac{\pi}{n}$.

3.358. □ По условию, K — центр шара, $SABC...$ — описанная около него правильная n-угольная пирамида, SO — высота пирамиды, $\angle SBCO=\alpha$, $KO=R$ (рис. Р.3.128). Из $\triangle KOD$, где $OD\perp BC$ и $\angle ODK=\frac{\alpha}{2}$, найдем $OD=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $\angle BOC=\frac{360^\circ}{n}$, то $\angle BOD=\frac{180^\circ}{n}$, $BD=OD\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, $BC=2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Теперь находим

$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}n\cdot 2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\cdot R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=nR^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

откуда $S_{\text{бок}}=\frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}=\frac{nR^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}{\cos\alpha}$. ■

3.359. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $SE\perp(ABC)$, $\angle SAE=\angle SBE=\angle SCE=\angle SDE=\beta$, $\angle AEB=\alpha$, O — центр шара, описанного около пирамиды, R — радиус этого шара (рис. Р.3.129). Около данной пирамиды можно описать конус, причем высота пирамиды совпадает с высотой конуса; центр шара, описанного около пирамиды, совпадает с центром шара, описанного около конуса; поэтому O принадлежит SE. Поскольку $\angle ESD=90^\circ-\beta$, имеем $\angle EOD=2\angle ESD=180^\circ-2\beta$ (как центральный угол). Из $\triangle OED$, где $OD=R$, находим $ED=R\sin(180^\circ-2\beta)=R\sin 2\beta$, откуда $BD=2R\sin 2\beta$. Из $\triangle SED$ получим

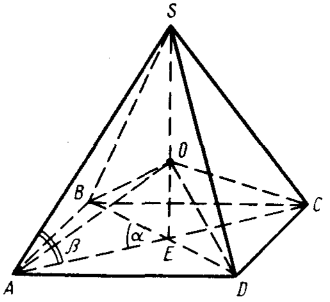


Рис. Р.3.129

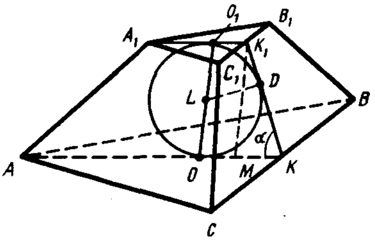


Рис. Р.3.130

$SE = ED\,\mathrm{tg}\,\beta = R\sin 2\beta\ \mathrm{tg}\,\beta = 2R\sin^2\beta$. Итак,

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SE = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BD^2\sin\alpha\cdot 2R\sin^2\beta =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 8R^3\sin^2 2\beta\,\sin^2\beta\,\sin\alpha = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\,\sin^2\beta\,\sin\alpha.\ \blacksquare$$

3.360. $\frac{2R^3}{3}\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$. **3.361.** $\dfrac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

3.362. $\dfrac{l}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

3.363. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида, $\angle B_1BCA = \alpha$, L — центр вписанного шара (рис. Р.3.130); требуется найти $S_{\text{полн.ус.пир}} : S_{\text{шара}}$. Пусть AK и A_1K_1 — высоты оснований; тогда K_1K — высота боковой грани, $\angle AKK_1 = \alpha$ как линейный угол двугранного угла B_1BCA. Далее, пусть O и O_1 — центры оснований усеченной пирамиды; тогда OO_1 — диаметр вписанного шара. Положим $LO = R$ и проведем $K_1M \parallel O_1O$; имеем $K_1M = 2r$, $K_1K = \frac{2R}{\sin\alpha}$ (из ΔK_1MK). Обозначив $AB = a$, $A_1B_1 = b$, найдем $OK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $O_1K_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $MK = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6} = 2R\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Согласно свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, $K_1K = K_1O_1 + KO = \frac{2R}{\sin\alpha}$. Теперь решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6} = 2R\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \\ \dfrac{(a+b)\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2R}{\sin\alpha}, \end{cases}$$

найдем $a = 2\sqrt{3}\,R\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$, $b = 2\sqrt{3}\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$S_{\text{полн.ус.пир}} = \frac{3(a+b)}{2}\cdot\frac{2R}{\sin\alpha} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{12R}{\sqrt{3}\sin\alpha}\cdot\frac{2R}{\sin\alpha}+3R^2\sqrt{3}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{12R^2\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}+3R^2\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=\frac{3R^2\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}(2+2\cos^2\alpha+4)=$$

$$=6R^2\sqrt{3}\left(\frac{3}{\sin^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)=6R^2\sqrt{3}\,(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha);\ S_{\text{шара}}=4\pi R^2.$$

Итак, $\dfrac{S_{\text{полн. ус. пир}}}{S_{\text{шара}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha)$. ■

3.364. □ По условию, $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $PO\perp(ABC)$, $AB=a$, $\angle PDCO=\alpha$, O_1 — центр вписанного шара, A_2, B_2, C_2, D_2 — точки касания шара с боковой поверхностью пирамиды, $M\in(ABC)$ (рис. Р.3.131); требуется найти $V_{MA_2B_2C_2D_2}$. В $\triangle O_1OC_1$ имеем $O_1O=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $\angle OPC_1=90^\circ-\alpha$, то $\angle PO_1C_2=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$. Из $\triangle O_1O_2C_2$ находим $O_2C_2=O_1C_2\sin\alpha=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=a\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $O_1O_2=O_1C_2\cos\alpha=$ $=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. Тогда $OO_2=OO_1+O_1O_2=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha=$ $=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)=a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2}\sin\alpha$, $A_2C_2=2O_2C_2=2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $S_{A_2B_2C_2D_2}=\frac{1}{2}\cdot 4a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}=2a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}$ и окончательно получим

$$V_{MA_2B_2C_2D_2}=\frac{1}{3}\cdot 2a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha=\frac{1}{3}a^3\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.\ ■$$

3.365. $\dfrac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

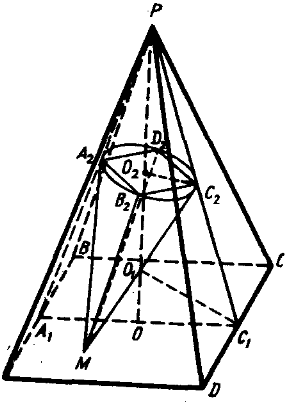


Рис. Р.3.131

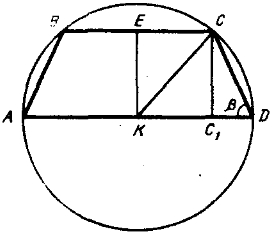


Рис. Р.3.132

3.366. □ Осевое сечение фигуры представляет собой круг с центром K, в который вписана трапеция $ABCD$, $K\in AD$, $KD=R$, $\angle CDK=\beta$, CD — боковое ребро усеченной пирамиды (рис. Р.3.132). Из $\triangle CKD$ по теореме косинусов находим $CD=\sqrt{2R^2-2R^2\cos(180^\circ-2\beta)}=2R\cos\beta$. Проведем $CC_1\perp AD$ и из $\triangle CC_1D$ получим $CC_1=CD\sin\beta=2R\sin\beta\cos\beta=R\sin 2\beta$, $C_1D=CD\cos\beta=$ $=2R\cos^2\beta$. Тогда $KC_1=EC=KD-C_1D=R-2R\cos^2\beta=-R\cos 2\beta$. Искомый объем выражается формулой $V=\frac{1}{3}CC_1(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где $CC_1=R\sin 2\beta$, $S_1=2R^2$, $S_2=2R^2\cos^2 2\beta$, $\sqrt{S_1S_2}=-2R^2\cos 2\beta$. Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}R\sin 2\beta\,(2R^2-2R^2\cos 2\beta+2R^2\cos^2 2\beta)=$$

$$=\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\,(1-\cos 2\beta+\cos^2 2\beta).\ ■$$

3.367. $\dfrac{n\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi}$. 3.368. $\dfrac{4\pi R^3\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}$. 3.369. $\dfrac{4-k}{4+k}$, $0<k<4$.

3.370. □ Изобразим осевое сечение фигуры; SA, SB — образующие конуса, SO — высота конуса, O_1 и O_2 — соответственно центры описанного и вписанного шаров (рис. Р.3.133), отношение их объемов равно k; требуется найти $\angle SAO$. Пусть R и r — радиусы шаров, $\angle SAO=\alpha$, $AO=x$; тогда $\angle OO_1B=\angle ASB=180^\circ-2\alpha$, $\angle O_2AO=\frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle O_1OB$ и $\triangle O_2OA$ находим $R=\dfrac{x}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\dfrac{x}{\sin 2\alpha}$, $r=x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Значит,

$$\frac{r}{R}=\frac{x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha}{x}=\frac{(1-\cos\alpha)\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2(\cos\alpha-\cos^2\alpha);$$

так как $\dfrac{(4/3)\,\pi r^3}{(4/3)\,\pi R^3}=k$, то $\dfrac{r}{R}=\sqrt[3]{k}$. Решив уравнение $2\cos\alpha-2\cos^2\alpha=\sqrt[3]{k}$, получим $\cos\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$, где $1-2\sqrt[3]{k}\geqslant 0$, откуда $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{8}$. Итак, $\angle SAO=\alpha=\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$, $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{8}$. ■

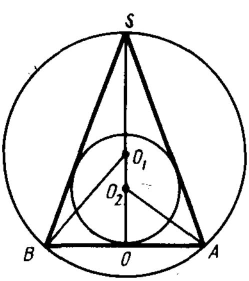


Рис. Р.3.133

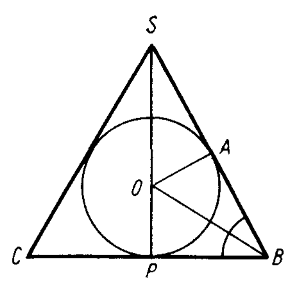


Рис. Р.3.134

3.371. $\dfrac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$. **3.372.** $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.373.** $-\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$.

3.374. □ Изобразим осевое сечение фигуры: $SB=SC$ — образующие конуса, SP — его высота, O — центр вписанного шара (рис. Р.3.134), $V_{\text{кон}}:V_{\text{шара}}=k$; требуется найти $\angle SBP$. Обозначим через A точку касания шара с боковой поверхностью конуса. Пусть $OA=r$, $PB=R$, $SP=H$; тогда $\dfrac{(1/3)\,\pi R^2H}{(4/3)\,\pi r^3}=3$ или $\dfrac{R^2H}{4r^3}=k$. Полагая $\angle SBP=\alpha$, из $\triangle SPB$ и $\triangle OPB$ имеем $\dfrac{H}{R}=\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{R}{r}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Но $\dfrac{R^2H}{4r^3}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}\cdot\dfrac{H}{R}=k$ и, значит,

$$\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=k \text{ или } \frac{1}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=k \text{ или } \frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=k.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=x$; тогда $2x-2x^2-\dfrac{1}{k}=0$; $2kx^2-2kx+1=0$. Отсюда

$$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k};\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}};$$

так как $k^2-2k\geqslant 0$ и $k>0$, то $k\geqslant 2$. Итак, $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$, $k\geqslant 2$. ■

3.375. $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. **3.376.** $\dfrac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$. **3.377.** $\dfrac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **3.378.** $\dfrac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}\times$ $\times\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}$. **3.379.** $\arccos\dfrac{3}{5}$. **3.380.** $\dfrac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **3.381.** $\pi R^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$. **3.382.** $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

3.383. □ По условию, $ABCD$ — усеченный конус, S — центр вписанного шара (рис. Р.3.135), $S_{\text{полн. ус. кон}}:S_{\text{шара}}=2$; требуется найти $\angle ABO$. Рассмотрим осевое сечение $ABEF$ усеченного конуса, OO_1 — ось усеченного конуса. Введем обозначения: $SO=r$, $OB=R_1$, $O_1A=R_2$. Проведем $AM\parallel OO_1$; тогда $AM=OO_1$. Согласно свойству сторон описанного четырехугольника, $2AB=BE+AF$, имеем $AB=R_1+R_2$, $BM=R_1-R_2$. Из $\triangle AMB$ находим $R_1+R_2=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$, $R_1-R_2=2r\operatorname{ctg}\alpha$, где $\alpha=\angle ABO$. Решив систему уравнений $R_1+R_2=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$, $R_1-R_2=2r\operatorname{ctg}\alpha$, получим $R_1=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, $R_2=r\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\frac{S_{\text{полн. ус. кон}}}{S_{\text{шара}}}=\frac{\pi(R_1^2+R_2^2+(R_1+R_2)AB)}{4\pi r^2}=\frac{\pi\left(r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}\right)}{4\pi r^2}=$$

$$=\frac{4\pi r^2\left(1+\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)}{4\pi r^2\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}=$$

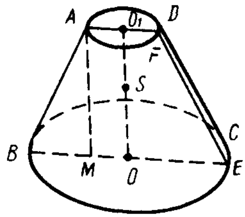


Рис. Р.3.135

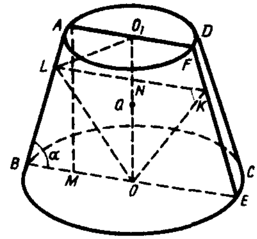


Рис. Р.3.136

$$=\frac{1+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{4-\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=2;$$

$$5\sin^2\alpha=4;\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}.\ \blacksquare$$

3.384. □ По условию, $ABCD$ — усеченный конус, $AC=a$, Q — центр вписанного шара, $\angle ABO=\alpha$, O и O_1 — центры оснований усеченного конуса. N — центр окружности касания шара и боковой поверхности усеченного конуса (рис. Р.3.136); требуется найти объем конуса OLK. Проведем $AM\| OO_1$; из $\triangle AMB$ находим $OO_1=AM=a\sin\alpha$. Рассмотрим $\triangle LBO$; так как $BL=BO$ (отрезки касательных, проведенных из точки B к шару), то $\angle BOL=\angle BLO=90°-\frac{\alpha}{2}$; тогда $\angle LOO_1=\frac{\alpha}{2}$. Далее, $\angle OLO_1=90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр OO_1; поэтому $OL=OO_1\cos\frac{\alpha}{2}=a\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle ONL$ получим $ON=OL\cos\frac{\alpha}{2}=$ $=a\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $LN=OL\sin\frac{\alpha}{2}=a\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{OLK}=\frac{1}{3}\pi LN^2\cdot ON=\frac{1}{3}\pi a^3\sin^3\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{12}\pi a^3\sin^5\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

3.385. □ Изобразим осевое сечение усеченного конуса и вписанного в него шара (рис. Р.3.137). По условию, $BC+AD=5OE$. Проведем $BM\perp AD$; тогда $\sin\alpha=\sin\angle BAM=\frac{BM}{AB}$. Но $BM=2OE$, $AB=\frac{BC+AD}{2}$ (согласно свойству сторон описанного около окружности четырехугольника). Значит, $\sin\alpha=2OE:\frac{5OE}{2}=\frac{4}{5}$, т. е. $\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$. ■

3.386. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

3.387. □ По условию, O — центр шара, A, B, C, D — точки, лежащие на шаровой поверхности, $OA=R$, $AD\| BC$, $BC=AB=CD$, $AD=R$, $\angle BAD=\alpha$, $OO_1\perp(ABC)$ (рис. Р.3.138). Положим $AB=a$ и из $\triangle ABC$ найдем $AC^2=2a^2-2a^2\cos(180°-\alpha)=2a^2(1+\cos\alpha)=4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, т. е. $AC=2a\cos\frac{\alpha}{2}$. Точка O_1 является центром окружности, описанной около $\triangle ACD$; поэтому $AC=2O_1D\sin\alpha$ и получаем равенство $2O_1D\sin\alpha=2a\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда

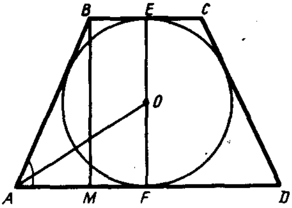


Рис. Р.3.137

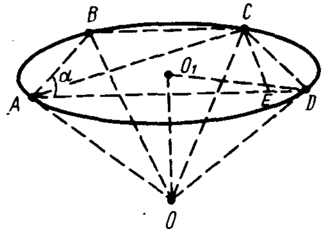


Рис. Р.3.138

$O_1D=\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Проведем $CE\perp AD$; тогда $DE=\dfrac{R-a}{2}$; в ΔCED имеем

$\cos\alpha=\dfrac{R-a}{2a}$, откуда $a=\dfrac{R}{1+2\cos\alpha}$. Таким образом,

$$O_1D=\frac{R}{2\sin\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)}=\frac{R}{2\sin\frac{\alpha}{2}+2\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Наконец, из ΔOO_1D получим

$$OO_1=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4\sin^2\frac{3\alpha}{2}}}=\frac{R\sqrt{4\sin^2\frac{3\alpha}{2}-1}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}=\frac{R\sqrt{2-2\cos 3\alpha-1}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{R\sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}.\ \blacksquare$$

3.388. □ По условию, AnB — шаровой сегмент, O — центр шара, $\cup AnB=\angle AOB=\alpha$ (рис. Р.3.139). Пусть R — радиус шара, OC — перпендикуляр к основанию сегмента, O_1 — центр основания сегмента, $O_1C=H$; тогда $H=R-OO_1$. Из ΔOO_1A находим $OO_1=R\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда

$H=R-R\cos\frac{\alpha}{2}=2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$. Значит,

$$V_{\text{шар. сегм}}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)=\pi\cdot 4R^2\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(R-\frac{2R}{3}\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}}{3}\left(3-2\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right),\ V_{\text{шара}}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Итак, $\dfrac{V_{\text{шар.сегм}}}{V_{\text{шара}}}=\sin^4\dfrac{\alpha}{4}\left(2+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$. ■

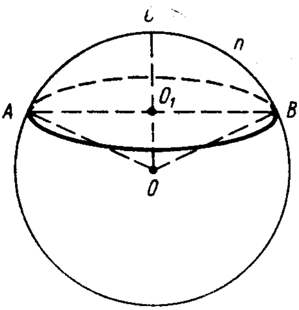


Рис. Р.3.139

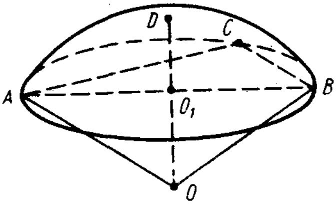


Рис. Р.3.140

3.389. □ По условию, O — центр шара, O_1 — центр основания шарового сегмента ADB, $\cup ADB$ в осевом сечении равна β, ACB — прямоугольный треугольник, вписанный в основание шарового сегмента, $\angle BAC=\alpha$, $OD\perp(ABC)$; $S_{\triangle ABC}=S$ (рис. Р.3.140). Имеем $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=$

$$=\frac{1}{2}AB\sin\alpha\cdot AB\cos\alpha=\frac{1}{4}AB^2\sin 2\alpha \text{ или } AB^2=\frac{4S}{\sin 2\alpha}, \text{ откуда } AB=\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}.$$

Из $\triangle OO_1B$ находим $OB=\dfrac{O_1B}{\sin\frac{\beta}{2}}=\dfrac{AB}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{\sin 2\alpha}\sin\frac{\beta}{2}}$,

$O_1O=O_1B\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{S}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$. Следовательно,

$$DO_1=OD-OO_1=OB-OO_1=\frac{\sqrt{S}}{\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin 2\alpha}}-\frac{\sqrt{S}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin 2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sqrt{S}\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin 2\alpha}}=\frac{\sqrt{S}\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}.$$ ■

3.390. $\dfrac{R\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$. **3.391.** $2\arcsin\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ и $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$, $0<m\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3.392. □ По условию, в $\triangle ABC$ известны $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $BB_1=H$, O — центр окружности, $OB=OB_1=H/2$, D и E — точки пересечения окружности со сторонами AB и BC (рис. Р.3.141); требуется найти S_{BDB_1E}. Имеем

$$S_{BDB_1E}=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle DB_1E}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin B+\frac{1}{2}B_1D\cdot B_1E\sin(180^\circ-B)=$$

$=\frac{1}{2}\sin B(BD\cdot BE+B_1D\cdot B_1E)$. Учитывая, что $\angle ABB_1=90^\circ-\angle A$,

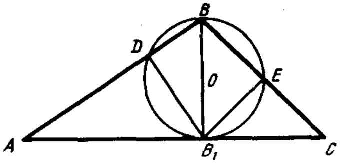


Рис. Р.3.141

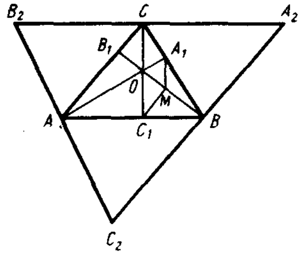


Рис. Р.3.142

$\angle B_1BC=90°-\angle C$, из $\triangle BDB_1$ находим $BD=H\cos(90°-A)=H\sin A$, $B_1D=H\cos A$, а из $\triangle B_1BE$ получим $BE=H\sin C$, $B_1E=H\cos C$. Итак,

$$S_{BDB_1E}=\frac{1}{2}\sin B(H^2\sin A\sin C+H^2\cos A\cos C)=\frac{H^2}{2}\sin B\cos(A-C). \blacksquare$$

3.393. □ По условию, $\triangle ABC$ — остроугольный, $\angle A=\alpha$ радианов, $\angle B=\beta$ радианов, $AC=b$, $AA_1\perp BC$, $CC_1\perp AB$, O — ортоцентр, через точки O, A_1, C_1 проведена окружность (рис. Р.3.142); требуется найти площадь общей части $\triangle ABC$ и построенного круга. Так как $\angle OA_1B=\angle OC_1B=\frac{\pi}{2}$, то $\angle A_1OC_1+\angle A_1BC_1=\pi$, т. е. построенная окружность проходит через B, а OB — ее диаметр. Пусть M — ее центр; тогда, обозначив площадь общей части $\triangle ABC$ и окружности через S, получим

$$S=S_{\triangle A_1MB}+S_{\triangle C_1MB}+S_{\text{сект.}MA_1OC_1}=\frac{1}{2}MB^2\sin\angle A_1MB+\frac{1}{2}MB^2\sin\angle BMC_1+$$

$$+\frac{1}{2}MB^2\cdot\angle A_1MC_1=\frac{1}{2}MB^2(\sin\angle A_1MB+\sin\angle BMC_1+\angle A_1MC_1).$$

В $\triangle AB_1B$ имеем $\angle B_1BA=\frac{\pi}{2}-\alpha$; значит, $\angle MBC_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BMC_1=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\alpha$. Далее, в $\triangle B_1BC$ имеем $\angle B_1BC=\frac{\pi}{2}-\angle C=\frac{\pi}{2}-(\pi-(\alpha+\beta))=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$; поэтому $\angle MBA_1=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$, а $\angle A_1MB=\pi-2\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=2(\pi-\alpha-\beta)$. Но $\angle A_1MC_1=2\angle MBA_1+$ $+2\angle MBC_1$, так как $\angle A_1MC_1=\angle A_1MO+\angle OMC_1$, а последние углы являются внешними в треугольниках A_1MB и C_1MB; следовательно, $\angle A_1MC_1=2\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\beta$. Тогда искомая площадь выразится следующим образом:

$$S=\frac{1}{2}MB^2(2\beta+\sin(2\pi-2\alpha-2\beta)+\sin 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}MB^2(2\beta-\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha)=\frac{1}{2}MB^2(2\beta+2\cos(2\alpha+\beta)(-\sin\beta))=$$

$$=MB^2(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta)).$$

Проведем через вершины $\triangle ABC$ прямые, параллельные противоположным сторонам, и получим $\triangle A_2B_2C_2$, стороны которого в 2 раза больше сторон $\triangle ABC$ (например, из рассмотрения параллелограммов AB_2CB и ABA_2C следует, что $B_2C=AB=CA_2$, т. е. $A_2B_2=2AB$. Поэтому точка O пересечения высот является точкой пересечения серединных перпендикуляров BB_1 и CC_1 в $\triangle A_2B_2C_2$, т. е. центром окружности, описанной около $\triangle A_2B_2C_2$. Пусть R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$; тогда $OA_2=OB_2=OC_2=2R$. В $\triangle ABC$ имеем $b=2R\sin B=2R\sin\beta$, откуда $R=\dfrac{b}{2\sin\beta}$. Так как $\angle A_2OC_2=2\angle B_2=2\beta$, то $\angle A_2OB=\beta$ и, значит, $OB=OA_2\cos\beta=2R\cos\beta=b\operatorname{ctg}\beta$. Отсюда $MB=\dfrac{1}{2}OB=\dfrac{1}{2}b\operatorname{ctg}\beta$ и окончательно получим

$$S=\frac{1}{4}b^2\operatorname{ctg}^2\beta\,(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta)).\ \blacksquare$$

3.394. $\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}$. ● Воспользоваться тем, что в $\triangle ABC$ ортоцентр является центром окружности, описанной около $\triangle A_2B_2C_2$, стороны которого проходят через точки A, B, C и параллельны противолежащим сторонам $\triangle ABC$ (см. задачу 3.393).

3.395. □ По условию, $BC=a$, $AC=b$ $(a>b)$, $CD\perp AB$, $AE=BE$, $S_{ABC}=S$ (рис. Р.3.143); требуется найти $\angle DCE$. Так как $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$, то $\sin C=\dfrac{2S}{ab}$, т. е. $\cos C=\sqrt{1-\dfrac{4S^2}{a^2b^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2b^2-4S^2}}{ab}$. Согласно теореме косинусов,

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\,\frac{\sqrt{a^2b^2-4S^2}}{ab}=a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}.$$

Продолжив медиану CE на расстояние $EF=CE$ и соединив F с точками A и B, получим параллелограмм $CAFB$, в котором $4CE^2+AB^2=2(a^2+b^2)$ или $4CE^2=a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-4S^2}$, откуда $CE^2=\dfrac{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}{4}$. Далее, учитывая, что $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD$, имеем $CD=\dfrac{2S}{AB}$. Тогда из $\triangle CDE$ находим

$$DE=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}{4}-\frac{4S^2}{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}=$$

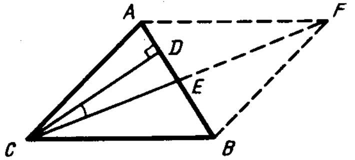


Рис. Р.3.143

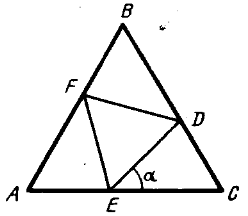


Рис. Р.3.144

$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}=\frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{tg}\angle DCE=\frac{DE}{CD}=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}{2\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}\cdot 2S}=\frac{a^2-b^2}{4S},$$

т. е. $\angle DCE=\operatorname{arctg}\dfrac{a^2-b^2}{4S}$. ■

3.396. □ По условию, $AB=BC=CA$, $F\in AB$, $D\in BC$, $E\in AC$, $DE=EF=FD$, $AB:DF=8:5$ (рис. Р.3.144); требуется найти $\sin\angle DEC$. Пусть $\angle DEC=\alpha$. Докажем равенство треугольников DEC и AEF. Имеем $DF=EF$ (по условию), $\angle EDC=180°-(\alpha+60°)=120°-\alpha$, $\angle AEF=180°-(\alpha+60°)=120°-\alpha$, $\angle AFE=180°-(60°+120°-\alpha)=\alpha$, т. е. эти треугольники равны по стороне и прилежащим к ней углам; следовательно, $AE=DC$. Пусть $AC=8x$; тогда $DE=5x$; пусть, далее, $DC=y$; тогда $EC=8x-AE=8x-y$. Из $\triangle DEC$ по теореме косинусов имеем $DE^2=DC^2+EC^2-2EC\cdot DC\cos 60°$ или $25x^2=y^2+(8x-y)^2-y(8x-y)$; $25x^2=3y^2-24xy+64x^2$; $y^2-8xy+13x=0$. Решив это уравнение относительно y, найдем $y_1=4x+x\sqrt{3}$; $y_2=4x-x\sqrt{3}$. Полагая $DC=4x+x\sqrt{3}$, из $\triangle ECD$ по теореме синусов имеем $\dfrac{DC}{\sin\alpha}=\dfrac{DE}{\sin 60°}$, т. е. $\sin\alpha=\dfrac{DC\sqrt{3}}{2DE}=\dfrac{x(4+\sqrt{3})\sqrt{3}}{10x}=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$; полагая $DC=4x-x\sqrt{3}$, получим $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$. ■

3.397. $\dfrac{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **3.398.** $\dfrac{d^2}{8}\left(4\cos\dfrac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)+2\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **3.399.** $\dfrac{3}{5}$ или 1. **3.400.** $\dfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}\alpha$.

3.401. □ По условию, $ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$, $BC=b$ $(a<b)$, $\angle ADB=\alpha$, $\angle ABD$ — тупой (рис. Р.3.145). Пусть $\angle A=\varphi$; тогда из $\triangle ABD$ по теореме синусов имеем $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin(180°-\alpha-\varphi)}$ или $a\sin(\alpha+\varphi)=b\sin\alpha$, откуда $\alpha+\varphi=\arcsin\dfrac{b\sin\alpha}{a}$ и $\varphi=\arcsin\dfrac{b\sin\alpha}{a}-\alpha$. Значит, $\angle ADC=180°-\arcsin\dfrac{b\sin\alpha}{a}+\alpha$. Теперь из $\triangle ADC$ по теореме косинусов находим

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(180°-\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}+\alpha\right)=$$

$$=a^2+b^2+2ab\cos\left(\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}-\alpha\right)=$$

$$=a^2+b^2+2ab\left(\cos\left(\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}\right)\cos\alpha+\sin\left(\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}\right)\sin\alpha\right)=$$

$$=a^2+b^2+2ab\left(\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2\alpha}{a^2}}\cos\alpha+\frac{b\sin^2\alpha}{a}\right)=$$

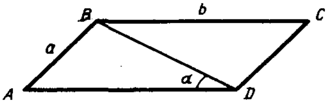


Рис. Р.3.145

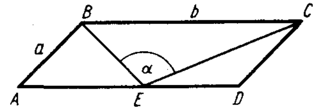


Рис. Р.3.146

$=a^2+b^2+2b\,(\cos\alpha\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}+b\sin^2\alpha).$

Итак, $AC=\sqrt{a^2+b^2+2b\,(\cos\alpha\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}+b\sin^2\alpha)}$, где $a\geqslant b\sin\alpha$. ■

3.402. $\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **3.403.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2ah}{a^2-b^2}$.

3.404. □ По условию, $ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$, $AD=b$ $(a<b)$, $AE=ED$, $\angle BEC=\alpha$ (рис. Р.3.146). Используя теорему косинусов, в $\triangle ABE$ и $\triangle EDC$ имеем $BE^2=a^2+\frac{1}{4}b^2-ab\cos A$, $CE^2=\frac{1}{4}b^2+a^2-ab\cos(180°-A)=a^2+\frac{1}{4}b^2+ab\cos A$. Сложив эти равенства, получим $BE^2+CE^2=2a^2+\frac{1}{2}b^2$. Теперь применим теорему косинусов к $\triangle BEC$:

$$b^2=BE^2+EC^2-2BE\cdot EC\cos\alpha \text{ или } BE\cdot EC=\frac{2a^2-\frac{1}{2}b^2}{2\cos\alpha}=\frac{4a^2-b^2}{4\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD}=2S_{\triangle BEC}=2BE\cdot EC\sin\alpha=2\cdot\frac{4a^2-b^2}{4\cos\alpha}\sin\alpha=\frac{4a^2-b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha. ■$$

3.405. $3\arccos\dfrac{2+k}{2k}$ и $\pi-3\arccos\dfrac{2+k}{2k}$. **3.406.** $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}$. **3.407.** $\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k>\sqrt{2}$.

3.410. □ По условию, AFB — сегмент, $AK=KB$, $\angle AOB=\alpha$, $KF=FE=KE$, $KL\perp EF$, $KL=h$ (рис. Р.3.147). Пусть $OB=R$. Тогда из $\triangle KOB$ находим $OK=R\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $OL=OK+KL=R\cos\frac{\alpha}{2}+h$. Далее, в $\triangle OLE$ имеем $OL^2+LE^2=R^2$ или $\left(R\cos\frac{\alpha}{2}+h\right)^2+\left(\frac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$ или $R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2Rh\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{4h^2}{3}=0$. Решив это уравнение, получим

$$R=\frac{h\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{h^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{4h^2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{h}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

3.411. □ По условию, ABD — сегмент, $BF\perp AD$, $AF:FD=1:4$, $\cup AB:\cup BD=1:2$, O — центр окружности сегмента (рис. Р.3.148); требуется найти $\cos\angle AOD$. Проведем $BC\parallel AD$ и $CE\parallel BF$. Пусть $AF=x$; тогда $DF=4x$, $DE=AF=x$, $BC=EF=3x$. Пусть, далее, $\angle AOB=\alpha$; тогда

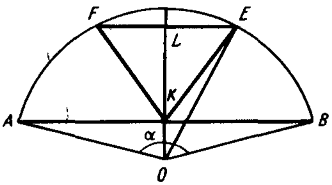


Рис. Р.3.147

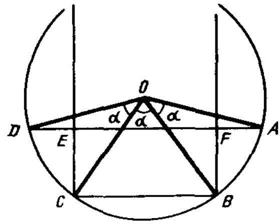


Рис. Р.3.148

$\angle DOC = \angle BOC = \alpha$ (так как $\cup AB = \cup DC = \cup CB$). Обозначив радиус сегмента через R, по теореме косинусов в $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ имеем $9x^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1-\cos\alpha)$, $25x^2 = 2R^2(1-\cos 3\alpha)$. Разделим первое равенство на второе и получим $\frac{9}{25} = \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos 3\alpha}$ или $9 - 9\cos 3\alpha = 25 - 25\cos\alpha$. Далее, используя формулу $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, придем к уравнению

$36\cos^3\alpha + 27\cos\alpha - 16 + 25\cos\alpha = 0$ или $9\cos^3\alpha - 13\cos\alpha + 4 = 0$, откуда $9\cos\alpha(\cos^2\alpha - 1) - 4(\cos\alpha - 1) = 0$, $(\cos\alpha - 1)(9\cos^2\alpha + 9\cos\alpha - 4) = 0$, $\cos\alpha \neq 1$, так как $\alpha \neq 0$.

Решив уравнение $9\cos^2\alpha + 9\cos\alpha - 4 = 0$, получим $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; тогда $\cos\angle AOD = \cos 3\alpha = 4\cdot\frac{1}{27} - 3\cdot\frac{1}{3} = -\frac{23}{27}$. ■

3.412. □ По условию, POQ — сектор, $OP = OQ = R$, $ABCD$ — вписанный в сектор прямоугольник, $A \in OP$, $B \in \cup PQ$, $C \in \cup PQ$, $D \in OQ$, $\angle POQ = \alpha$, $\angle CMD = \beta$ (рис. Р.3.149). Проведем $OM \cap BC = E$; $OM \cap AD = N$. Пусть $ME = x$; тогда в $\triangle MBE$ имеем $\angle MBE = \frac{\beta}{2}$, $BE = x\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Из $\triangle ANO$ находим $ON = AN\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = x\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Далее, в $\triangle OEC$ имеем $OE^2 + EC^2 = R^2$ или

$\left(2x + x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2 + x^2\operatorname{ctg}^2\beta = R^2$, откуда

$$x^2 = \frac{R^2}{\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} + \left(2 + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{R^2\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1 + \left(2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Теперь можно найти искомую площадь:

$$S_{ABCD} = BC\cdot CD = 2x\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot 2x = 4x^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{4R^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \left(2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$ ■

3.413. $4R\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$.

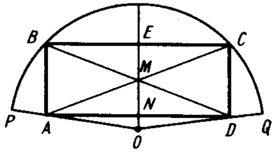


Рис. Р.3.149

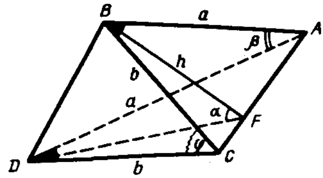


Рис. Р.3.150

3.414. □ По условию, $\triangle ABC=\triangle ADC$, $\angle B=\angle D=90°$, $((AB\widehat{C);(A}DC))=\alpha$, $\angle BAD=\beta$ (рис. Р.3.150). Проведем $BF\perp AC$; тогда $DF\perp AC$, $DF=BF$ (высоты в равных прямоугольных треугольниках, проведенные к гипотенузе), т. е. $\angle BFD=\alpha$. Пусть $AB=AD=a$, $BC=CD=b$, $BF=h$. Из $\triangle ABD$ и $\triangle DBF$ находим $DB^2=2a^2-2a^2\cos\beta=4a^2\sin^2\frac{\beta}{2}$, откуда $DB=2a\sin\frac{\beta}{2}$; $DB^2=2h^2-2h^2\cos\alpha=4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $DB=2h\sin\frac{\alpha}{2}$. Далее, полагая $\angle BCD=\varphi$, из $\triangle BCD$ получим $DB^2=2b^2-2b^2\cos\varphi=4b^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, т. е. $DB=2b\sin\frac{\varphi}{2}$. Теперь из равенств $2a\sin\frac{\beta}{2}=2h\sin\frac{\alpha}{2}$ и $2b\sin\frac{\varphi}{2}=2h\sin\frac{\alpha}{2}$ находим $\frac{h}{a}=\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}$, $\frac{h}{b}=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}$. Но $\frac{h}{a}=\sin\angle BAC$, $\frac{h}{b}=\sin\angle BCA=\sin(90°-\angle BAC)=\cos\angle BAC$. Имеем

$$\sin\angle BAC=\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)},\text{ т. е. }\angle BAC=\arcsin\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)};$$

$$\cos\angle BAC=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}\text{ или }\cos\left(\arcsin\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

После преобразований получим

$$\sqrt{1-\frac{\sin^2(\beta/2)}{\sin^2(\alpha/2)}}=\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)};\ \sin(\varphi/2)=\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(\beta/2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha-1+\cos\beta}{2}}=\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Итак, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. ■

3.415. □ По условию, O — трехгранный угол, $\angle MON=\alpha$, двугранный угол $OM=\beta$, а двугранный угол $ON=\gamma$ (рис. Р.3.151); требуется найти $\angle POM$ и $\angle PON$. Возьмем на OP произвольную точку A и проведем $AA_1\perp(MON)$, $AC\perp OM$ и $AB\perp ON$; тогда $\angle ACA_1=\beta$, а $\angle ABA_1=\gamma$. Пусть $AA_1=a$; тогда в $\triangle ACA_1$ и $\triangle ABA_1$ имеем $A_1C=a\operatorname{ctg}\beta$, $AC=\frac{a}{\sin\beta}$, $A_1B=a\operatorname{ctg}\gamma$, $AB=\frac{a}{\sin\gamma}$.

Обозначим $\angle A_1OC$ через φ; отсюда $\angle A_1OB=\alpha-\varphi$. В ΔA_1OC и ΔA_1OB имеем $\sin\varphi=\frac{A_1C}{A_1O}$, $\sin(\alpha-\varphi)=\frac{A_1B}{A_1O}$, откуда $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{a\,\mathrm{ctg}\,\beta}$ и далее $\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varphi-\cos\alpha=\frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin\gamma\cos\beta}$;

$$\mathrm{ctg}\,\varphi=\frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\gamma\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}.$$

Из ΔOCA_1 найдем

$$OC=A_1C\,\mathrm{ctg}\,\varphi=a\,\mathrm{ctg}\,\beta\,\frac{\cos\gamma\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}=$$
$$=\frac{a(\cos\gamma\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Наконец, из ΔACO получим

$$\mathrm{ctg}\,\angle AOM=\mathrm{ctg}\,\angle AOC=\frac{OC}{AC}=\frac{a(\cos\gamma\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot a}=$$
$$=\mathrm{ctg}\,\gamma\sin\beta\sin^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\beta=\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha(\mathrm{ctg}\,\gamma\cos^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta).$$

Итак, $\angle AOM=\angle POM=\mathrm{arcctg}(\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha(\mathrm{ctg}\,\gamma\cos^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta))$.

Аналогично находим

$\angle PON=\mathrm{arctg}(\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha(\mathrm{ctg}\,\beta\cos^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\,\gamma))$. ■

3.416. □ По условию, $OM\perp ON$, $OM\perp OP$, $ON\perp OP$, $A\in OM$, $OA=a$, $B\in ON$, $C\in OP$, $\angle ABC=\alpha$, $\angle ACB=\beta$ (рис. Р.3.152). Проведем $AD\perp BC$. Пусть $AD=H$; тогда из ΔADB и ΔADC находим $AB=\frac{H}{\sin\alpha}$, $BD=H\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $AC=\frac{H}{\sin\beta}$, $DC=H\,\mathrm{ctg}\,\beta$. Так как $OD\perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), то $OD^2=BD\cdot DC$ или $OD=H\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}$. Далее, в ΔAOD имеем $H^2-H^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta=a^2$, откуда $H=\frac{a}{\sqrt{1-\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}}$; тогда

$AB=\frac{a}{\sin\alpha\sqrt{1-\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}}$. Наконец, из ΔAOB получим

$$OB^2=\frac{a^2}{\sin^2\alpha(1-\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta)}-a^2=\frac{a^2(1-\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)}=$$

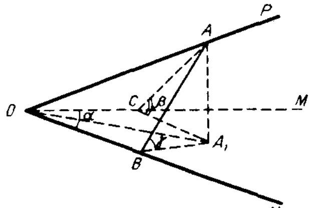


Рис. Р.3.151

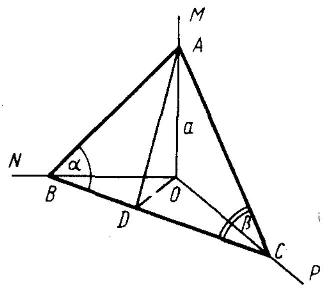


Рис. Р.3.152

$$=\frac{a^2\cos\alpha(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)}{-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}=-a^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

т. е. $OB=a\sqrt{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. Аналогично из $\triangle AOC$ находим $OC=a\sqrt{-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. ■

3.417. □ По условию, $\alpha\parallel\beta$, $A\in\alpha$, $C\in\alpha$, $B\in\beta$, $D\in\beta$, $AB:CD=k$, $AA_1\perp\beta$, $CC_1\perp\beta$, $\angle ABA_1:\angle CDC_1=2:3$ (рис. Р.3.153). Пусть $AA_1=CC_1=a$ и $\angle ABA_1=2\varphi$; тогда $\angle CDC_1=3\varphi$. Так как $\sin 2\varphi=\frac{a}{AB}$, $\sin 3\varphi=\frac{a}{CD}$, то $\frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}=\frac{AB}{CD}=k$.

Далее имеем $\frac{3\sin\varphi-4\sin^3\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}=k$; $3-4\sin^2\varphi=2k\cos\varphi$;

$4\cos^2\varphi-2k\cos\varphi-1=0$; $\cos\varphi=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$, поскольку $\cos\varphi>0$. Значит,

$\varphi=\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$. Но $\angle CDC_1$ — острый или прямой угол (по определению угла между прямой и плоскостью); поэтому $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$, откуда

$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos\varphi<1$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}<1$, т. е. $2\sqrt{3}\leqslant k+\sqrt{k^2+4}<4$. Решив

систему неравенств $\begin{cases}k+\sqrt{k^2+4}\geqslant 2\sqrt{3},\\ k+\sqrt{k^2+4}<4\end{cases}$, получим $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant k<\frac{3}{2}$. Итак,

$\angle ABA_1=2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$, $\angle CDC_1=3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant k<\frac{3}{2}$. ■

3.418. □ По условию, $ABCD$ — квадрат, P — плоскость, $(\widehat{(ABC);\ P})=\alpha$, $(\widehat{P;\ (AB)})=\beta$ (рис. Р.3.154); требуется найти $(\widehat{P;\ (AD)})$. Проведем через A плоскость $P_1\parallel P$, а затем $BB_1\perp P_1$, $CC_1\perp P_1$, $DD_1\perp P_1$; тогда $(ABC)\bigcap P_1=AE$, $BC\bigcap P_1=F$, $CD\bigcap P_1=E$, $\angle BAB_1=\beta$. Теперь проведем $DK\perp AE$; очевидно, что $D_1K\perp AE$; тогда $\angle DKD_1=\alpha$,

$\angle D_1AD=(\widehat{P;\ (AD)})=x$. Пусть $DD_1=a$, откуда $AD=\frac{a}{\sin x}$. Так как $CD\parallel AB$,

то $\angle DED_1=\angle BAB_1=\beta$ и $DE=\frac{a}{\sin\beta}$, а $DK=\frac{a}{\sin\alpha}$. Учитывая, что

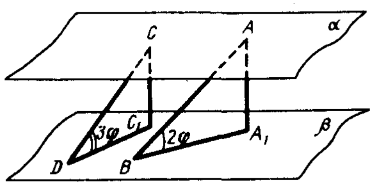


Рис. Р.3.153

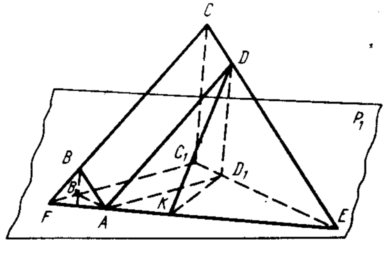


Рис. Р.3.154

$\angle ADE=90°$ (поскольку $AD\perp DE$ как смежные стороны квадрата), имеем $AE^2=AD^2+DE^2=\frac{a^2}{\sin^2 x}+\frac{a^2}{\sin^2\beta}=\frac{a^2(\sin^2\beta+\sin^2 x)}{\sin^2 x\sin^2\beta}$ и, следовательно, $AE=\frac{a\sqrt{\sin^2\beta+\sin^2 x}}{\sin x\sin\beta}$. Далее воспользуемся тем, что $S_{\triangle ADE}=$ $=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{1}{2}AE\cdot DK$ или $\frac{a}{\sin x}\cdot\frac{a}{\sin\beta}=\frac{a\sqrt{\sin^2\beta+\sin^2 x}}{\sin x\sin\beta}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}$. Значит, $\sin\alpha=\sqrt{\sin^2\beta+\sin^2 x}$ или $\sin^2 x=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1-\cos 2\alpha-1+\cos 2\beta}{2}=$ $=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, откуда находим $\sin x=\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. Итак, $x=\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. ■

3.419. $\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$.

3.420. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD=\alpha$, $AA_1=b$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\beta$ (рис. Р.3.155). Проведем $A_1O\perp(ABC)$, $A_1K\perp AB$ и $A_1F\perp AD$; тогда A_1O — высота призмы, $OK\perp AB$ и $OF\perp AD$. Так как $\triangle A_1KA=\triangle A_1FA$ (по общей гипотенузе и острому углу), то $A_1K=A_1F$. Значит, $OK=OF$ как проекции равных наклонных, откуда следует, что AO — биссектриса $\angle BAD$. Из $\triangle A_1FA$ имеем $A_1F=b\sin\beta$, $AF=b\cos\beta$, а из $\triangle AFO$ находим $OF=AF\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=b\cos\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Наконец, из $\triangle A_1OF$ получим

$$A_1O=\sqrt{b^2\sin^2\beta-b^2\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}.\ ■$$

3.421. $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\varphi}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

3.422. □ По условию, $ACBA_1C_1B_1$ — наклонная треугольная призма, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$, $(AA_1B)\perp(ABC)$, $\angle A_1ACB=\beta$ (рис. Р.3.156); требуется найти острый угол между (ABC) и (C_1CB). Проведем $A_1O\perp(ABC)$;

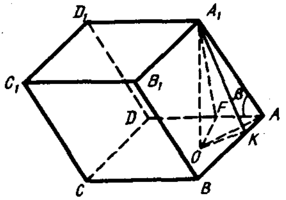


Рис. Р.3.155

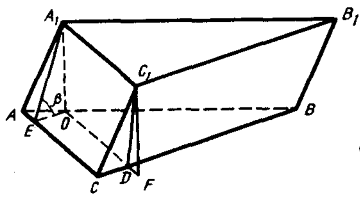


Рис. Р.3.156

$O\in(AA_1B_1)$. Проведем $A_1E\perp AC$ и соединим O с E; тогда $OE\perp AC$ и $\angle A_1EO=\beta$. Пусть $AB=c$, $A_1O=a$; тогда $AC=c\cos\alpha$ (из ΔABC), $OE=a\operatorname{ctg}\beta$ (из ΔA_1EO), $AE=OE\operatorname{ctg}\alpha=a\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha$ (из ΔAEO), $EC=AC-AE=c\cos\alpha-a\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha$. Проведем $OD\parallel AC$, тогда $OD\perp BC$. Через A_1O и OD проведем плоскость A_1OD; $(A_1OD)\cap(CC_1B)=C_1D$ и $BC\perp(A_1OD)$, поскольку BC перпендикулярна прямым OD и A_1O, лежащим в этой плоскости. Следовательно, $\angle ODC_1$ является тупым углом между (ABC) и (C_1CB), так как OD меньше A_1C_1 на величину AE. Теперь проведем $C_1F\parallel A_1O$; тогда $\angle C_1DF$ — острый угол между (ABC) и (C_1CB). В ΔC_1FD имеем $\operatorname{tg}\angle C_1DF=\dfrac{C_1F}{DF}$; учитывая, что $C_1F=a$, $DF=$ $=OF-OD=AC-OD=AC-EC=c\cos\alpha-(c\cos\alpha-a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)=a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$, находим $\operatorname{tg}\angle C_1DF=\dfrac{a}{a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Итак, $\angle C_1DF=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. ■

3.423. $l^3\sin2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. **3.424.** $\dfrac{a^2b}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$.

3.425. $\dfrac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. **3.426.** $\dfrac{a^3\sin2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. **3.427.** $\arccos\dfrac{3}{4}$.

3.428. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма, $BC=a$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$, $AA_1=A_1B=A_1C$ и $V_{\text{пр}}=V$ (рис. Р.3.157). Проведем $A_1O\perp(ABC)$. Так как $AA_1=A_1B=A_1C$, то $OA=OB=OC$, т. е. O — центр окружности, описанной около ΔABC. Пусть R — радиус этой окружности; тогда $a=2R\sin(\beta+\gamma)$, откуда $R=\dfrac{a}{2\sin(\beta+\gamma)}$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sin\gamma\sin\beta}{2\sin(\beta+\gamma)}$. Обозначим угол наклона бокового ребра к плоскости основания через φ; отсюда $\angle A_1AO=\varphi$ и $A_1O=R\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{a\operatorname{tg}\varphi}{2\sin(\beta+\gamma)}$. Следовательно, $V=\dfrac{a^3\sin\beta\sin\gamma\operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2(\beta+\gamma)}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$. Итак, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$. ■

3.429. □ По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $DF=FD_1$, $D_1K=KC_1$, через точки A, F и K проведено сечение (AFK) (рис. Р.3.158); требуется найти $\widehat{((ABC);(AFK))}$. Обозначим (AFK) через α; $\alpha\cap(DD_1C_1)=FK$, где $FK\parallel DC_1$ как средняя линия ΔDD_1C_1; $\alpha\cap(AA_1B_1)$ по прямой, параллельной DC_1, т. е. по

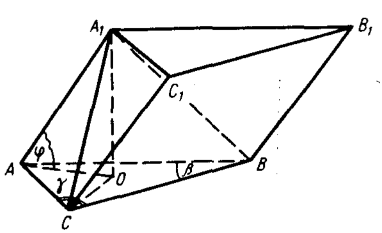


Рис. Р.3.157

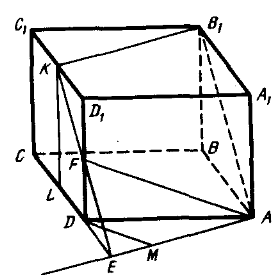


Рис. Р.3.158

AB_1; $\alpha\bigcap(A_1B_1C_1)=B_1K$; $\alpha\bigcap(DD_1A_1)=AF$. Таким образом, сечением является четырехугольник AB_1KF. Далее, $\alpha\bigcap(ABC)=AE\|B_1K$. Проведем $FM\perp AE$; значит, $DM\perp AE$ и $\angle FMD=\varphi$ — искомый угол. Пусть $AD=a$; тогда $DF=\frac{a}{2}$. Проведем $KL\|DD_1$; имеем DF — средняя линия $\triangle ELK$ и $DE=DL=\frac{a}{2}$. Из $\triangle EDA$ находим $AE=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Учитывая, что $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{1}{2}AE\cdot DM$, получим $\frac{a}{2}\cdot a=\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot DM$, откуда $DM=\frac{a\sqrt{5}}{5}$. Наконец, из $\triangle FDM$ найдем $\operatorname{tg}\varphi=\frac{FD}{DM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, т. е. $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. ■

3.430. □ По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат, $SO\perp(ABC)$, $SK\perp AD$, $SE\perp BC$, $SL\perp DC$, $SF\perp AB$, $\angle SEO:\angle SFO:\angle SKO:\angle SLO=1:2:4:2$ (рис. Р.3.159). Пусть $\angle SEO=\alpha$; тогда $\angle SFO=\angle SLO=2\alpha$, $\angle SKO=4\alpha$. Обозначив SO через H, найдем $OE=H\operatorname{ctg}\alpha$, $OK=H\operatorname{ctg}4\alpha$, $OF=OL=H\operatorname{ctg}2\alpha$. Так как $OE+OK=OF+OL$ (длины сторон квадрата), то

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}4\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha;\ \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha;\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\sin2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{\sin2\alpha\sin4\alpha};$$
$$\sin4\alpha-\sin2\alpha=0;\ 2\cos3\alpha\sin\alpha=0.$$

Но $\sin\alpha\neq0$; тогда $\cos3\alpha=0$ и так как α — острый угол, то $3\alpha=\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

Итак, $\angle SEO=\frac{\pi}{6}$, $\angle SFO=\angle SLO=\frac{\pi}{3}$, $\angle SKO=\frac{2\pi}{3}$. ■

3.431. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $(BMN)\perp(SAC)$, $(BMN)\|AC$, $(\widehat{(BMN);(ABC)})=\alpha$ (рис. Р.3.160); требуется найти $\angle ASC$. Проведем $SF\perp(ABC)$; тогда $BF\perp AC$, $BF\bigcap AC=D$, $SD\perp AC$. Так как $MN\|AC$, то $SD\perp MN$. Далее, $(BMN)\bigcap(ABC)=BE\|MN\|AC$; $\triangle SMB=\triangle SMB$ (SB — общая сторона, $SN=SM$, поскольку $MN\|AC$, $\angle BSM=\angle BSN$); следовательно, $BM=BN$ и $BO\perp MN$, а так как $BE\|MN$, то $BO\perp BE$ и $\angle OBD=\alpha$. Пусть $FD=a$; тогда $AD=a\sqrt{3}$. Учитывая, что $\angle OBD=\alpha$, имеем $\angle FDO=90°-\alpha$, а $\angle FSD=\alpha$. Из $\triangle SFD$ получим

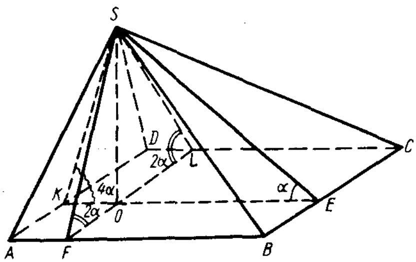


Рис. Р.3.159

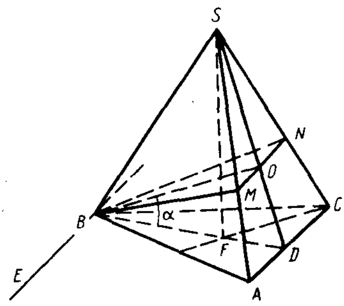


Рис. Р.3.160

$SD=\dfrac{a}{\sin\alpha}$, а из $\triangle SDA$ найдем $\operatorname{tg}\angle ASD=\dfrac{AD}{SD}=\dfrac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{a}=\sqrt{3}\sin\alpha$, откуда $\angle ASD=\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. Итак, $\angle ASC=2\angle ASD=2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. ■

3.432. □ По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $OK\perp(SAB)$, $OL\perp SA$, $OK=a$, $OL=b$ (рис. Р.3.161); требуется найти $\angle SABO$. Проведем $SE\perp AB$; тогда $(SOE)\perp(SAB)$, так как $AB\perp(SOE)$ и $AB\in(SAB)$; следовательно, $\angle SEO$ — линейный угол двугранного угла $SABO$, $OK\in(SOE)$ и $K\in SE$. Пусть $\angle SEO=\alpha$. Так как $\triangle SKO\sim\triangle OKE$ ($\angle SKO=\angle OKE=90^\circ$, $\angle SOK=\angle KEO$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), то $\dfrac{OK}{SO}=\dfrac{KE}{OE}$. Введем обозначения $AB=x$, $SO=h$; тогда $\dfrac{a}{h}=\dfrac{2KE}{x}$, т. е. $KE=\dfrac{ax}{2h}$. В $\triangle OKE$ имеем $KE=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-a^2}$ и получаем уравнение

$$\frac{a^2x^2}{4h^2}=\frac{x^2}{4}-a^2;\ x^2(h^2-a^2)=4a^2h^2;\ x^2=\frac{4a^2h^2}{h^2-a^2}.$$

Аналогично, $\triangle SLO\sim\triangle OLA$ и $\dfrac{OL}{SO}=\dfrac{AL}{AO}$ или $\dfrac{b}{h}=\dfrac{2AL}{x\sqrt{2}}$, т. е. $AL=\dfrac{bx\sqrt{2}}{2h}$.

Далее, в $\triangle OLA$ имеем $AL=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-b^2}$ и получаем уравнение

$$\frac{b^2x^2}{2h^2}=\frac{x^2}{2}-b^2;\ x^2(h^2-b^2)=2b^2h^2;\ x^2=\frac{2b^2h^2}{h^2-b^2}.$$

Сравнивая значения для x^2, приходим к равенству $\dfrac{4a^2h^2}{h^2-a^2}=\dfrac{2b^2h^2}{h^2-b^2}$; тогда

$2a^2h^2-2a^2b^2=b^2h^2-a^2b^2$ или $h^2=\dfrac{a^2b^2}{2a^2-b^2}$, откуда $h=\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. Значит,

$$x^2=\frac{4a^2\cdot\dfrac{a^2b^2}{2a^2-b^2}}{\dfrac{a^2b^2}{2a^2-b^2}-a^2}=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2},\ \text{т. е. } x=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

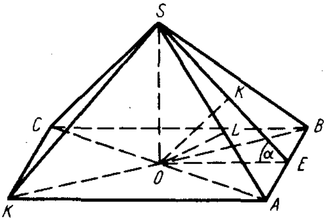


Рис. Р.3.161

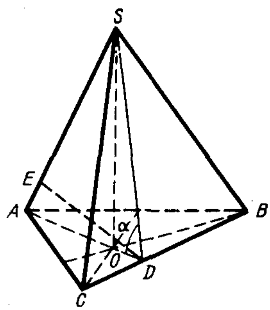


Рис. Р.3.162

Теперь из $\triangle SOE$ находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{SO}{OE}=\frac{2ab\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{2a^2-b^2}\,ab\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2(b^2-a^2)}}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. Воспользовавшись формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, получим $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$, т. е. $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$. ■

3.433. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB=a$, $\angle SCBA=\alpha$. (рис. Р.3.162); требуется найти расстояние между AS и BC. Пусть $SO\perp(ABC)$ и $SD\perp BC$. Через SO и SD проведем плоскость ASD, а из точки D проведем $DE\perp SA$. Так как $BC\perp(ASD)$, то $DE\perp BC$, т. е. DE — искомое расстояние. Учитывая, что $\angle SDO=\alpha$ как линейный угол двугранного угла $SCBA$, из $\triangle SOD$ находим $SO=OD\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Так как $AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $S_{\triangle SAD}=\frac{1}{2}AD\cdot SO=\frac{3a^2\operatorname{tg}\alpha}{24}=\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{8}$. С другой стороны, $S_{\triangle SAD}=\frac{1}{2}SA\cdot DE$, где SA найдем из $\triangle SOA$:

$$SA=\sqrt{\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha}{12}+\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{3a^2(\operatorname{tg}^2\alpha+4)}}{6}=\frac{a\sqrt{3(\operatorname{tg}^2\alpha+4)}}{6}.$$

В результате получаем уравнение $\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{8}=\frac{a\sqrt{3(\operatorname{tg}^2\alpha+4)}}{12}\cdot DE$, откуда $DE=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}}$. ■

3.434. □ По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB=a$, $SQ\perp(ABC)$, $\angle ASQ=\alpha$ $\left(\alpha\leqslant\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(EKN)\perp SA$, $SO=OQ$, $O\in(EKN)$ (рис. Р.3.163). Имеем $\triangle SEL=\triangle SEK$ (SE — общий катет, $\angle ESL=\angle ESK$ как плоские углы в правильной пирамиде); следовательно, $SL=SK$, т. е. $LK\parallel BD$, причем $LK=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Так как $SE\perp(EKN)$, то SO — наклонная к этой плоскости, EO — ее проекция на эту плоскость; вследствие того, что $SO\perp BD$, а $BD\parallel LK$, получаем $SO\perp LK$ и $EO\perp LK$; значит, $S_{EKNL}=\frac{1}{2}LK\cdot EN$. Теперь найдем $SQ=QA\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $SO=\frac{1}{2}SQ=\frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha$. Далее из $\triangle OES$ находим $SE=SO\cos\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$ и, наконец, из $\triangle SEN$ получим $EN=SE\operatorname{tg}2\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. Итак,

$$S_{EKNL}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}2\alpha=\frac{a^2}{8}\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}2\alpha.$$

Заметим, что ограничение $\alpha\leqslant\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ существенно, так как в противном

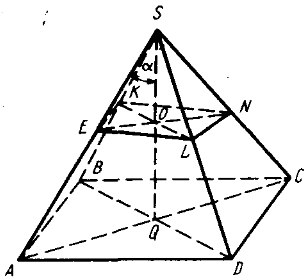


Рис. Р.3.163

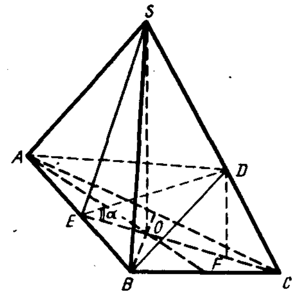


Рис. Р.3.164

случае нельзя провести сечение $EKNL$, удовлетворяющее условиям задачи. В этом случае точка N окажется за пределами ребра SC, что можно показать, сравнив длины SN и SC. ■.

3.435. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $SO=H$, P — сечение, проходящее через A, $P\perp SC$, $(\widehat{P;(ABC)})=\alpha$ (рис. Р.3.164); требуется найти объем пирамиды, заключенной между P и (ABC). Сечение $P\bigcap(ASC)=AD$, где $AD\perp SD$; так как $BD\perp SC$, то $(ADB)\subset P$, т. е. ADB — искомое сечение. Пусть SE — апофема. Имеем $\triangle ASD=\triangle BSD$ ($SA=SB$, SD — общая сторона, $\angle ASD=\angle BSD$); следовательно, $AD=BD$, $ED\perp AB$ и $CE\perp AB$; тогда $\angle CED=\alpha$, $\angle ECD=90°-\alpha$. Из $\triangle SOC$ находим

$$OC=H\operatorname{tg}\alpha;\ \text{значит,}\ EC=\frac{3}{2}OC=\frac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha,\ AB=\frac{2\cdot\frac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\,H\operatorname{tg}\alpha.$$

Далее из $\triangle EDC$ найдем $DC=EC\sin\alpha=\frac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. Проведем $DF\perp(ABC)$;

в $\triangle FDC$ имеем $\angle FDC=\alpha$ и $DF=DC\cos\alpha=\frac{3}{2}H\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}H\sin^2\alpha$.

Итак,

$$V_{DABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3H^2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{2}H\sin^2\alpha=\frac{3\sqrt{3}\,H^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{8}.\ ■$$

3.436. □ По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида, K — центр вписанного в нее шара, M — центр шара, касающегося всех ребер пирамиды, O и O_1 — центры оснований пирамиды (рис. Р.3.165); требуется найти $\angle B_1BO$. Прежде всего отметим, что $K\in OO_1$ и $KO=KO_1$, $M\in OO_1$, так как точка M равноудалена от всех ребер. Основания пирамиды пересекают шар с центром M по окружностям с центрами O и O_1, вписанным в основания. Положим $OE=r$, $O_1E_1=r_1$, где E и E_1 — середины сторон BC и B_1C_1. Боковая грань BB_1C_1C пересекает шар с центром M по окружности, вписанной в трапецию BB_1C_1C. Согласно свойству сторон описанного около окружности четырехугольника, $BB_1=\frac{BC+B_1C_1}{2}$. Пусть $BC=a$, $B_1C_1=b$; тогда $BB_1=\frac{a+b}{2}$. Отрезок EE_1 — апофема усеченной пирамиды; в силу свойства касательных, проведенных из одной точки к шару, имеем $EE_1=r+r_1=\frac{a\sqrt{3}}{6}+\frac{b\sqrt{3}}{6}=\frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}$. Проведем $E_1N\|OO_1$, $B_1F\|OO_1$ и положим $OO_1=H$; тогда из ΔE_1NE находим $H^2=EE_1^2-EN^2=\frac{(a+b)^2}{12}-\frac{(a-b)^2}{12}=\frac{ab}{3}$. Далее проведем $B_1L\|EE_1$ и в ΔB_1LB имеем $BB_1^2=B_1L^2+BL^2$. Так как $BB_1=\frac{a+b}{2}$, $B_1L=EE_1=\frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}$, $BL=\frac{a-b}{2}$, то, подставив эти выражения в предыдущее равенство, получим

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2+2ab+b^2}{12}+\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

или $10ab=a^2+b^2$ или $12ab=(a+b)^2$, т. е. $ab=\frac{(a+b)^2}{12}$.

Значит, $H^2=\frac{ab}{3}=\frac{(a+b)^2}{36}$, откуда $H=\frac{a+b}{6}$. Теперь из ΔB_1FB находим $\sin\angle B_1BO=\sin\angle B_1BF=\frac{2H}{a+b}=\frac{a+b}{3(a+b)}=\frac{1}{3}$. Итак, $\sin\angle B_1BO=\frac{1}{3}$. ■

3.437. □ По условию, $FABC$ — треугольная пирамида, $AB=AC$, $\angle BAC=\alpha$ $(\alpha<\pi/2)$, $AEDA_1E_1D_1$ — призма, вписанная в пирамиду, $A_1\in FA$, $E_1\in FC$, $D_1\in FB$, O — центр окружности, описанной около ΔABC, $O\in ED$ (рис. Р.3.166); требуется найти $V_{\text{пр}}:V_{\text{пир}}$. Проведем $FL\perp(ABC)$ и положим $FL=H$; $FL\bigcap(A_1D_1E_1)=L_1$; пусть $LL_1=h$. Так как $(A_1D_1E_1)\|(ABC)$ (плоскости, в которых лежат основания призмы), то $E_1D_1\|BC$ (две параллельные плоскости, пересеченные плоскостью FBC); значит, $DE\|BC$. Пусть $BC=a$; тогда $a=2OA\sin\alpha$, откуда $OA=\frac{a}{2\sin\alpha}$. Из ΔAOD находим

$$OD=OA\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{a}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$ т. е. $DE=\frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Далее, $\Delta ADE\sim\Delta ABC$;

поэтому

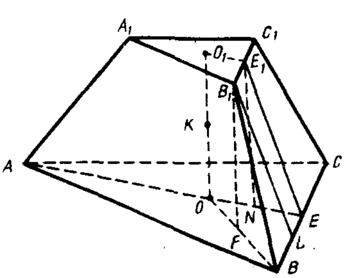


Рис. Р.3.165

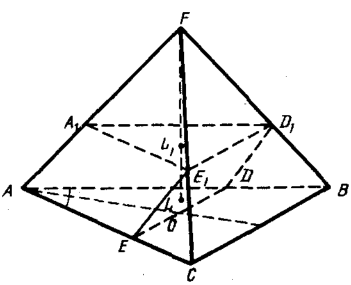


Рис. Р.3.166

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE^2}{BC^2}=\frac{a^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}\cdot a^2}=\frac{1}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

Полагая $S_{\triangle ABC}=S$, находим $S_{\triangle ADE}=\dfrac{S}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. Согласно свойству параллельных сечений пирамиды, имеем

$$\frac{S_{\triangle A_1D_1E_1}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{FL_1^2}{FL^2};\ \frac{S}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}\cdot S}=\frac{(H-h)^2}{H^2};\ \frac{H-h}{H}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$2H\cos^2\frac{\alpha}{2}-H=2h\cos^2\frac{\alpha}{2};\ h=\frac{H\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{H\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно, $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}SH$, $V_{\text{пр}}=\dfrac{S}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{H\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{SH\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$, откуда

$$\frac{V_{\text{пр}}}{V_{\text{пир}}}=\frac{SH\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}:\frac{SH}{3}=\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}.\ \blacksquare$$

3.438. $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **3.439.** $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$. **3.440.** $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$. **3.441.** $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$. **3.442.** $\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. **3.443.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. **3.444.** $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. **3.445.** $\frac{5}{12}$. **3.446.** $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin 2\beta\sin\beta}$. **3.447.** $\frac{7a+3b}{144\cos\alpha}\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)}$.

3.448. □ Изобразим осевое сечение фигуры: пусть SDC — осевое сечение конуса, SD и SC — образующие конуса, $\angle DSC=90°$, SO_2 — высота конуса, O_2 и O_1 — центры оснований вписанного в конус цилиндра, $S_{\text{бок. кон}}:S_{\text{бок. цил}}=4\sqrt{2}$ (рис. Р.3.167); требуется найти угол между DO_1 и основанием конуса. Положим $O_2D=R$; тогда $SD=R\sqrt{2}$, $SO_2=R$, $S_{\text{бок. кон}}=\pi R^2\sqrt{2}$. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а высоту O_1O_2 — через h; тогда $S_{\text{бок. цил}}=2\pi rh$. По условию, $\frac{\pi R^2\sqrt{2}}{2\pi rh}=4\sqrt{2}$, откуда $\frac{R^2}{rh}=8$. Но $SO_2=h+r=R$, т. е. $r=R-h$. Подставим это выражение в последнее равенство: $\frac{R^2}{(R-h)h}=8$ или $R^2=8Rh-8h^2$. Теперь разделим обе части

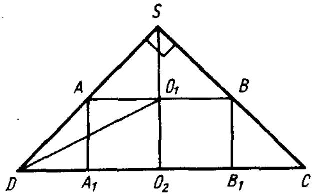


Рис. Р.3.167

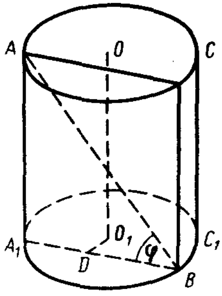


Рис. Р.3.168

уравнения на h^2 и получим $\left(\frac{R}{h}\right)^2-8\frac{R}{h}+8=0$. Учитывая, что $\frac{R}{h}=\operatorname{ctg}\angle O_1DO_2=\operatorname{ctg}\alpha$ (где α — искомый угол), имеем $\operatorname{ctg}^2\alpha-8\operatorname{ctg}\alpha+8=0$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha=4\pm2\sqrt{2}$. Итак, $\alpha=\operatorname{arcctg}(4\pm2\sqrt{2})$. ■

3.449. □ По условию, AA_1C_1C — равносторонний цилиндр, A — точка окружности верхнего основания цилиндра, B — точка окружности его нижнего основания, $AB=a$, AB отстоит от OO_1 на расстояние b (рис. Р.3.168); требуется найти угол между AB и плоскостью основания цилиндра. Проведем через AA_1 и AB плоскость AA_1B; при этом $(AA_1B)\parallel OO_1$, так как $OO_1\parallel AA_1$. Проведем $O_1D\perp A_1B$; тогда $O_1D\perp(AA_1B)$ и, значит, $O_1D=b$. Пусть $AA_1=x$; тогда $A_1C_1=x$. В ΔAA_1B имеем $A_1B^2=a^2-x^2$, т. е. $A_1B=\sqrt{a^2-x^2}$, $A_1D=\frac{1}{2}A_1B=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}$. Теперь из ΔO_1DA_1 находим $O_1A_1^2=A_1D^2+O_1D^2$ или $\frac{x^2}{4}=\frac{a^2-x^2}{4}+b^2$; отсюда $2x^2=a^2+4b^2$, $x^2=\frac{a^2+4b^2}{2}$. Следовательно,

$$A_1B^2=a^2-\frac{a^2+4b^2}{2}=\frac{a^2-4b^2}{2},\text{ т. е. } A_1B=\frac{\sqrt{2(a^2-4b^2)}}{2}.$$

В результате получим $\cos\angle ABA_1=\cos\varphi=\frac{A_1B}{AB}=\frac{\sqrt{2(a^2-4b^2)}}{2a}$, откуда $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2(a^2-4b^2)}}{2a}$. ■

3.450. $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.451.** $\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$.

3.452. □ По условию, SAB — конус, SO — его высота, SB — образующая, $\angle OSB=\alpha$, $MBCDE$ — пирамида, вписанная в конус, $MS=MB$, $BCDE$ — четырехугольник, вписанный в основание конуса, $BE=BC=CD=b$, $DE=a$ (рис. Р.3.169). Обозначим радиус основания конуса через R и проведем $MK\parallel SO$. Из ΔSOB находим $SO=R\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $MK=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}R\operatorname{ctg}\alpha$. Так как равные хорды одной окружности стягивают равные дуги, то $\cup BE=\cup BC=\cup CD$. Обозначив величину этих дуг через β, имеем $\cup BE=\cup BC=\cup CD=\beta$, а $\cup DAE=360°-3\beta$. Но вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается;

поэтому $\angle DBE=\frac{1}{2}(360°-3\beta)=180°-\frac{3\beta}{2}$,

$\angle BDE=\frac{1}{2}\beta$, $\angle DEB=\beta$, а $\angle DCB=180°-\beta$. Тогда

$S_{BCDE}=S_{\Delta BCD}+S_{\Delta BED}=\frac{1}{2}b^2\sin(180°-\beta)+$
$+\frac{1}{2}ab\sin\beta=\frac{1}{2}b(a+b)\sin\beta$,

$V_{\text{шр}}=\frac{1}{3}S_{BCDE}\cdot MK=\frac{1}{6}b(a+b)\sin\beta\cdot\frac{1}{2}R\operatorname{ctg}\alpha=$
$=\frac{1}{12}b(a+b)R\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta$.

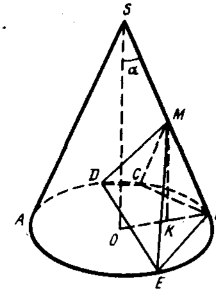


Рис. P.3.169

Так как ΔDBE вписан в основание конуса, то $DE=2R\sin\angle DBE=2R\sin\left(180°-\frac{3\beta}{2}\right)=2R\sin\frac{3\beta}{2}$ или $a=2R\sin\frac{3\beta}{2}$; значит, $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{3\beta}{2}}$; аналогично, $BE=2R\sin\angle BDE=2R\sin\frac{\beta}{2}$ или $b=2R\sin\frac{\beta}{2}$, откуда $R=\dfrac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Таким образом, получаем равенство

$$\frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{3\beta}{2}} \text{ или } \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{a}{b};$$

далее имеем

$$\frac{3\sin\frac{\beta}{2}-4\sin^3\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{a}{b};\ 3-4\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{a}{b};\ 4\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)=\frac{a}{b}+1=\frac{a+b}{b};$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{a+b}{4b},\ \cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{b}}.$$

Окончательно находим

$$V_{\text{шр}}=\frac{1}{12}b(a+b)\frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}b(a+b)\cdot\frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}\operatorname{ctg}\alpha\cdot2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=$$
$$=\frac{1}{12}b^2(a+b)\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{12}b^2(a+b)\frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{b}}\operatorname{ctg}\alpha=$$
$$=\frac{1}{24}b^{3/2}(a+b)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{24}(ab+b^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha.\ \blacksquare$$

3.453. □ По условию, SMN — конус, SO — высота конуса, $\angle OSN=\beta$, $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — равнобедренная трапеция, описанная около основания конуса, $\angle ADC=\alpha$, $SN=l$ — образующая конуса, $P\in SN$, $PK\perp(ABC)$, $K=AC\cap BD$ (рис. P.3.170). Из ΔSON находим $ON=l\sin\beta$,

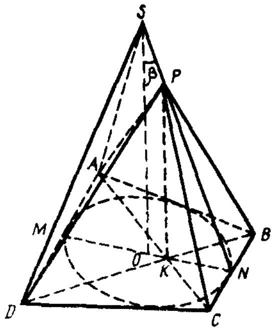


Рис. Р.3.170

$SO = l\cos\beta$. Так как M и N — точки касания оснований трапеции с окружностью основания конуса, то $MN = 2ON = 2l\sin\beta$. Проведем $CE \| MN$; тогда $CE = MN = 2l\sin\beta$. Из $\triangle CED$ находим $CD = \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{2l\sin\beta}{\sin\alpha}$ и, значит, $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot MN = CD \cdot MN = \frac{4l^2\sin^2\beta}{\sin\alpha}$.

Далее, $\triangle BKC \sim \triangle AKD$, откуда $\frac{KN}{KM} = \frac{BC}{AD}$. Для нахождения AD и BC составим систему уравнений

$$\begin{cases} AD + BC = 2CD = \frac{4l\sin\beta}{\sin\alpha}, \\ AD - BC = 2DE = 2EC\operatorname{ctg}\alpha = 4l\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha, \end{cases}$$

решив которую получим $AD = \frac{2l\sin\beta}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha) = 2l\sin\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $BC = 2l\sin\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Значит,

$$\frac{KN}{KM} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{KN}{KN+KM} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{KN}{2ON} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ или } \frac{KN}{ON} = \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Наконец, $\triangle PKN \sim \triangle SON$, откуда $\frac{PK}{SO} = \frac{KN}{ON}$ или $\frac{PK}{l\cos\beta} = \sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, т. е. $PK = l\cos\beta\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Окончательно находим

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PK = \frac{1}{3} \cdot \frac{4l^2\sin^2\beta}{\sin\alpha} \cdot l\cos\beta\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l^3\sin\beta\sin 2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \blacksquare$$

3.454. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, SO — ее высота, $AB = a$, двугранный угол BC равен α, K — центр шара, касающегося основания и боковых ребер (рис. Р.3.171). Так как точка K равноудалена от боковых ребер, то $K \in SO$. Проведем $SD \perp BC$; тогда $OD \perp BC$ и $\angle SDO = \alpha$. Из $\triangle SOD$ находим $SO = OD\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$, а из $\triangle SOA$ получим $SA = \sqrt{OA^2+SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{12}\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a}{6}\sqrt{3(\operatorname{tg}^2\alpha+4)}$. Пусть E — точка касания шара с ребром SA; тогда $KE = KO$. Положим $KO = R$. Так как $\triangle SEK \sim \triangle SOA$, то $\frac{EK}{OA} = \frac{SK}{SA}$ или $\frac{3R}{a\sqrt{3}} = \frac{(SO-R)\cdot 6}{a\sqrt{3(\operatorname{tg}^2\alpha+4)}}$ или

$$3R = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha - R\right)\cdot 6}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}}.$$ Выполним дальнейшие преобразования:

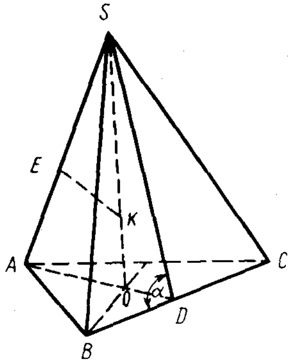


Рис. Р.3.171

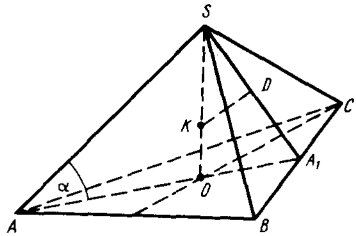


Рис. Р.3.172

$$3R\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}=a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-6R;\quad 3R\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}+2\right)=a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{3\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}+2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}+2\operatorname{ctg}\alpha\right)}=$$

$$=\frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}-2\operatorname{ctg}\alpha\right)}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}-2\operatorname{ctg}\alpha\right).\ ■$$

3.455. $\dfrac{\pi a^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{9\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

3.456. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $SO=H$, $\angle SAO=\alpha$ (рис. Р.3.172); требуется найти радиус вписанного шара. Пусть K — центр вписанного шара; соединив K и точку D касания шара с боковой гранью, получим $\Delta SKD\sim\Delta SOA_1$ (так как $\angle SDK=\angle SOA_1=90°$, $\angle DSO$ — общий угол), откуда $\dfrac{KD}{OA_1}=\dfrac{SK}{SA_1}$. Пусть $KD=r$; тогда $SK=H-r$. Из ΔSOA находим $AO=H\operatorname{ctg}\alpha$, а из ΔSOA_1 получим $SA_1=\sqrt{H^2+\dfrac{1}{4}H^2\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{H}{2}\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. Следовательно,

$$\frac{2r}{H\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{2(H-r)}{H\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \frac{r}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{H-r}{\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \frac{r}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{H}{\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Итак,

$$r=\frac{H\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{H\operatorname{ctg}\alpha\left(\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)}{4}=$$

$$=\frac{H\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1\right)}{4}.\ ■$$

3.457. □ По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB=a$, $\angle AB=\alpha$, $MNKM_1N_1K_1$ — прямая призма, вписанная в пирамиду, M_1, N_1,

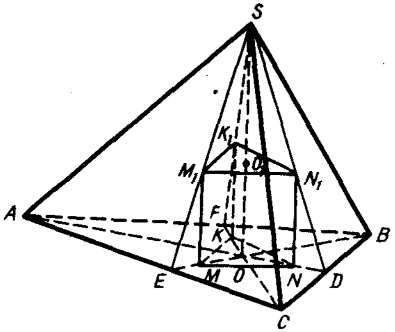


Рис. Р.3.173

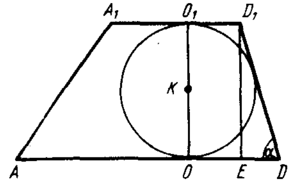


Рис. Р.3.174

K_1 лежат на апофемах, M, N, K лежат в (ABC), O — центр вписанного в пирамиду шара и $O_1 \in (M_1N_1K_1)$ (рис. Р.3.173). Проведем $SO \perp (ABC)$; тогда $\Delta SOD \sim \Delta N_1ND$, поскольку $NN_1 \parallel SO$, $\angle SDO = \angle SFO = \angle SEO = \alpha$. Из подобия треугольников следует $\frac{NN_1}{SO} = \frac{ND}{OD}$. Но $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO = OD \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha$, $NN_1 = OO_1 = OD \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{6}$; $ND = OD - ON = \frac{a\sqrt{3}}{6} - x$, где $x = ON$. Подставив эти значения в пропорцию, получим

$$\frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot 6}{6a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6} - x\right) \cdot 6}{a\sqrt{3}}; \quad a\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 6x \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}\left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)}{6 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{6 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Далее имеем $\Delta OMN \sim \Delta OED$ (равнобедренные треугольники с равными углами при вершине); значит, $\frac{MN}{ED} = \frac{ON}{OD}$, откуда

$$MN = \frac{ED \cdot ON}{OD} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{a}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно находим

$$V_{\text{пр}} = S_{\Delta MNK} \cdot NN_1 = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{64 \cos^4 \frac{\alpha}{2} \cdot 6} = \frac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{128 \cos^5 \frac{\alpha}{2}}. \blacksquare$$

3.458. $2\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{m+n}{m}}-\frac{\pi}{2}$. **3.459.** $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

3.460. □ Изобразим сечение фигуры плоскостью, проходящей через центр K вписанного шара и апофему DD_1 усеченной пирамиды. В сечении получим трапецию ADD_1A_1, в которую вписан круг с центром K, касающийся апофемы DD_1 и оснований трапеции в точках O и O_1 — центрах окружностей, вписанных в основания усеченной пирамиды (рис. Р.3.174). По условию, $S_{\text{шара}} : S_{\text{ус. пир}} = \pi : 6\sqrt{3}$; требуется найти угол между боковой гранью и плоскостью основания. Введем следующие обозначения: $\angle D_1DA=\alpha$, $KO=r$, $OD=R_1$, $O_1D_1=R_2$; тогда $S_{\text{шара}}=4\pi r^2$, $S_{\text{ус. пир}}=$ $=\frac{1}{2}(P_1+P_2)DD_1+S_1+S_2$, где $P_1=6R_1\sqrt{3}$, $P_2=6R_2\sqrt{3}$, $S_1=3R_1^2\sqrt{3}$, $S_2=3R_2^2\sqrt{3}$, $DD_1=R_1+R_2$ Таким образом,

$$S_{\text{ус. пир}}=3\sqrt{3}\,(R_1+R_2)(R_1+R_2)+3R_1^2\sqrt{3}+3R_2^2\sqrt{3}=$$

$$=3\sqrt{3}\,(2R_1^2+2R_1R_2+2R_2^2)=6\sqrt{3}\,(R_1^2+R_1R_2+R_2^2).$$

Проведем $D_1E\parallel OO_1$ и из $\triangle D_1ED$ найдем $DD_1=\frac{2r}{\sin\alpha}$, $ED=2r\operatorname{ctg}\alpha$. Решив систему уравнений $\begin{cases} R_1+R_2=\frac{2r}{\sin\alpha}, \\ R_1-R_2=2r\operatorname{ctg}\alpha, \end{cases}$ получим $R_1=\frac{r}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)$, $R_2=\frac{r}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)$. Тогда

$$S_{\text{ус. пир}}=\frac{6\sqrt{3}\,r^2}{\sin^2\alpha}\left((1+\cos\alpha)^2+(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos\alpha)^2\right)=\frac{6\sqrt{3}\,r^2}{\sin^2\alpha}(3+\cos^2\alpha).$$

Так как $\frac{S_{\text{шара}}}{S_{\text{ус. пир}}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, то $\frac{4\pi r^2\sin^2\alpha}{6\sqrt{3}\,r^2(3+\cos^2\alpha)}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, откуда $3+\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$; $3\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$; $\operatorname{tg}^2\alpha=4$; $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\alpha=\operatorname{arctg}2$. ■

3.461. $\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{arctg}2$. **3.462.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\,k\pi-27}}{6}$; $k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$. **3.463.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$; $k>\frac{3}{2}$.

3.464. $\frac{\pi}{3}$. **3.465.** $\frac{\pi}{3}$.

ГЛАВА 4

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

4.001. □ Пусть P, N и K — точки касания вписанной окружности со сторонами $\triangle ABC$ (рис. Р.4.1). По условию, $KB=n$, $CK=m$, где $n>m$. Положим $AB=x$; тогда $AN=AB-NB=x-n$. Согласно теореме Пифагора, имеем $x^2=(x-n+m)^2+(m+n)^2 \Rightarrow x^2=x^2+n^2+m^2-2xn+2xm-2mn+m^2+2mn+$ $+n^2 \Rightarrow 2(n-m)=2(m^2+n^2)$. Итак, $AB=x=\dfrac{m^2+n^2}{n-m}$. ■

4.002. □ Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Согласно условию, $a+b=8$, т. е. $b=8-a$. Предположим, что $c=5$; тогда получим уравнение $a^2+(8-a)^2=5^2$ или $a^2+64-16a+a^2-25=0$ или $2a^2-16a+39=0$. Но $D/4=64-2\cdot 39<0$ и, значит, это уравнение не имеет корней. Итак, длина гипотенузы не может быть равной 5 см. ■

4.003. □ Докажем, что $\dfrac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c}=2R$ (рис. Р.4.2). Воспользуемся теоремой синусов: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, откуда

$$\frac{ac}{c\sin A}=\frac{ab}{a\sin B}=\frac{bc}{b\sin C}=2R. \qquad (1)$$

Но $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ah_a$, откуда $h_a=b\sin C$ (это также непосредственно видно из рис. Р.4.2); аналогично, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$. Тогда из соотношений (1) находим $ab=2Rh_c$, $bc=2Rh_a$, $ac=2Rh_b$. Сложив эти равенства, получим

$$ab+bc+ac=2R\,(h_a+h_b+h_c) \text{ или } \frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c}=2R. \ ■$$

4.004. □ Пусть в $\triangle ABC$ (рис. Р.4.3) $AB=x$, $BC=x+5$ и $AC=x+10$, где $x>5$. Согласно теореме косинусов, имеем $(x+10)^2=x^2+(x+5)^2-2x(x+5)\cos B$, откуда $\cos B=\dfrac{x^2-10x+75}{2x(x+5)}=\dfrac{(x+5)(x-15)}{2x(x+5)}=\dfrac{x-15}{2x}$. Так как $0<\cos B<1$, то

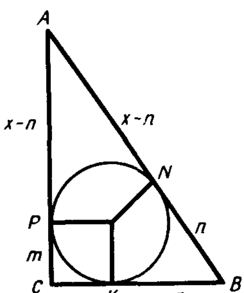


Рис. Р.4.1

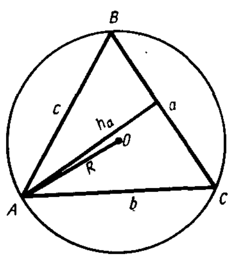


Рис. Р.4.2

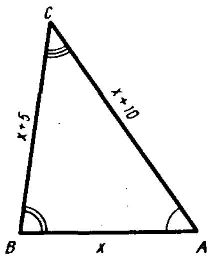


Рис. Р.4.3

$0<\dfrac{x-15}{2x}<1$. Наименьшим значением x, при котором выполняется это неравенство, является $x=15$. Поэтому наибольшее число, обладающее указанным в условии свойством, есть $x+10=25$. ■

4.005. □ По условию, $BD=DC=a$, $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$ (рис. Р.4.4); требуется доказать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный. В $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ по теореме косинусов имеем $a^2=c^2+m^2-2mc\cos\alpha$, $a^2=b^2+m^2-2mb\cos\alpha$. Вычитая одно выражение из другого, получим $(c^2-b^2)-2m(c-b)\cos\alpha=0$ или $(c-b)(c+b-2m\cos\alpha)=0$. Так как $c+b-2m\cos\alpha\neq 0$, то $c=b$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный. ■

4.006. □ Согласно условию, в $\triangle ABC$ (рис. Р.4.5) $AB=2a$, $BC=3a$, $AC=4a$. Используя свойство биссектрисы треугольника, находим $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4a}{3a}=\dfrac{4}{3}$. Так как $AD+DB=2a$, то $AD=\dfrac{4}{7}\cdot 2a=\dfrac{8a}{7}$, $BD=\dfrac{3}{7}\cdot 2a=\dfrac{6a}{7}$. Но BO — биссектриса в $\triangle DBC$ и, значит, $\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{3a}{6a/7}=\dfrac{7}{2}$. ■

4.007 12, 15 и 18 см.

4.008. □ Находим (рис. Р.4.6) $AH=HD=\sqrt{25-24}=1$ (см), т. е. $AD=2$ см. Далее имеем $\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{5}{2}$. Известно, что квадрат длины биссектрисы выражается формулой $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$ (см. «Дополнительные соотношения между элементами фигур», гл. 1, п. 5^0). Таким образом, $25=5\cdot 5x-2\cdot 2x$ или $25=21x$, откуда $x=\dfrac{25}{21}$. Итак, $AC=2+\dfrac{50}{21}=4\dfrac{8}{21}$ (см), $BC=\dfrac{5\cdot 25}{21}=5\dfrac{20}{21}$ (см). ■

4.009 $600\sqrt{3}$ см^2.

4.010. □ В $\triangle ABC$ (рис. Р.4.7) имеем $AC=c\sin\alpha$, $BC=c\cos\alpha$, $BD=x$, $AD=c-x$, l — биссектриса угла C. Так как $\dfrac{x}{c-x}=\dfrac{c\cos\alpha}{c\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$, то $x=c\operatorname{ctg}\alpha-x\operatorname{ctg}\alpha$,

откуда $x=\dfrac{c\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{c\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, $c-x=\dfrac{c\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. Теперь воспользуемся формулой $l=\sqrt{AC\cdot BC-AD\cdot DB}$ и получим

$$l=\sqrt{c^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}=c\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}=$$

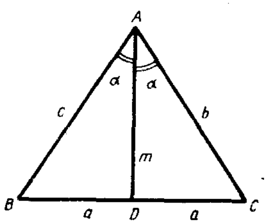


Рис. Р.4.4

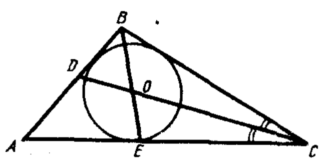


Рис. Р.4.5

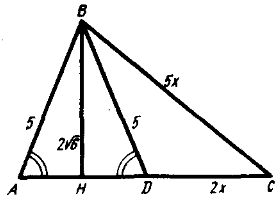


Рис. Р.4.6

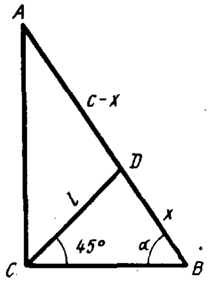


Рис. Р.4.7

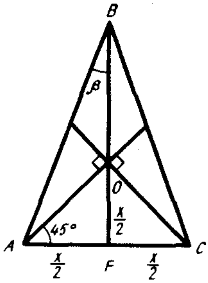


Рис. Р.4.8

$$=c\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}}=\frac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2(1+\cos(90^\circ-2\alpha))}}=\frac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2\cdot 2\cos^2(45^\circ-\alpha)}}=$$

$$=\frac{c\sin 2\alpha}{2\cos(45^\circ-\alpha)}.\ \blacksquare$$

4.011. □ Пусть $AC=x$ (рис. Р.4.8); поскольку $\angle OAF=\angle AOF=45^\circ$, имеем $OF=AF=\frac{x}{2}$. Но $BO=2OF=x$, откуда $BF=\frac{3x}{2}$. Полагая $\angle ABF=\beta$, находим

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{AF}{BF}=\frac{x/2}{3x/2}=\frac{1}{3}.$$

4.012. ● Воспользоваться формулами $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ (см. «Дополнительные соотношения между элементами фигур», гл. 1, п. 2°).

4.013. $-1/k$. **4.014.** Части равновелики. **4.021.** $4S$. **4.023.** Прямую, перпендикулярную основанию и проходящую через его середину. **4.024.** $[s/\sqrt{2}, s]$. **4.028.** 4, 5, 6, 7 и 8 см. **4.029.** Точка пересечения биссектрисы угла B и перпендикуляра DO должна лежать вне $\triangle ABC$. **4.030.** а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) невозможен; г) тупоугольный. **4.031.** 1,5 см. **4.033.** $c^2/4$. **4.035.** $h/3$. **4.037.** a. **4.040.** Из точек дуги окружности, опирающейся на этот отрезок, для которой данный угол является вписанным.

4.041. □ Предположим сначала, что α — острый угол, противолежащий общей стороне всех треугольников (рис. Р.4.9). Рассмотрим один из таких треугольников и проведем его высоты из концов этой стороны. Тогда, если ортоцентр лежит внутри треугольника, то угол между высотами равен $180^\circ-\alpha$. Отсюда следует, что множество ортоцентров представляет собой дугу окружности, хордой которой является общая сторона всех треугольников. Так как угол между высотами опирается на дугу, равную $360^\circ-2\alpha$, то множество ортоцентров — это дуга, равная 2α. Если же ортоцентр находится вне треугольника, то угол между высотами равен α. Этот угол опирается на дугу 2α, т. е. множество ортоцентров лежит на продолжении той же дуги окружности. Итак, искомое множество точек — это дуга окружности, равная $360^\circ-2\alpha$.

В случае прямого или тупого угла треугольника рассуждения аналогичны. ■

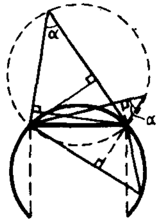


Рис. Р.4.9

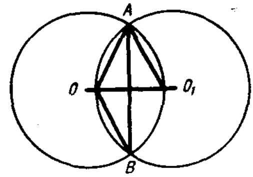


Рис. Р.4.10

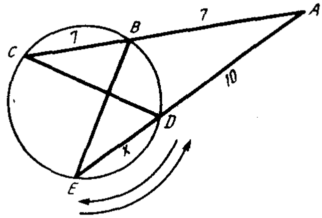


Рис. Р.4.11

4.042. ● Воспользоваться тем, что если α — данный угол, то угол между биссектрисами, проведенными к боковым сторонам, равен $90° + \frac{\alpha}{2}$.

4.043. □ Так как в $\triangle OAO_1$ все стороны равны R, то $\angle AOB = 120°$ (рис. Р.4.10). Находим $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 120° = \frac{1}{2} R^2 \sin 60° = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\text{сект}\, AOB} = \frac{1}{3}\pi R^2$, откуда $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Итак, площадь общей части двух кругов составляет $\frac{2}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$. ■

4.044. □ Поскольку $\triangle ADC \sim \triangle ABE$ (рис. Р.4.11), имеем $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD}$, где $AB = BC = 7$, $AD = 10$. Пусть $DE = x$; тогда $\frac{10+x}{7} = \frac{14}{10}$, откуда $100 + 10x = 98$, т. е. $x = -0{,}2$. Такое значение x свидетельствует о том, что точка E расположена между A и D, т. е. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$ и, значит, $\frac{10}{7} = \frac{14}{10-x}$. Отсюда находим $x = 0{,}2$. ■

4.046. □ Построим окружность радиуса 1, опишем около нее квадрат и впишем в нее правильный шестиугольник (рис. Р.4.12). Имеем $P_4 = 4(1+1) = 8$, $P_6 = 1 \cdot 6 = 6$, $C = 2\pi$. Так как $P_6 < C < P_4$, то $6 < 2\pi < 8$, откуда $3 < \pi < 4$. ■

4.047. □ Пусть C_1 — середина дуги AB (рис. Р.4.13). Проведем через точку C_1 касательную A_1B_1 к окружности и рассмотрим подобные треугольники

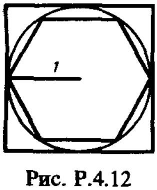


Рис. Р.4.12

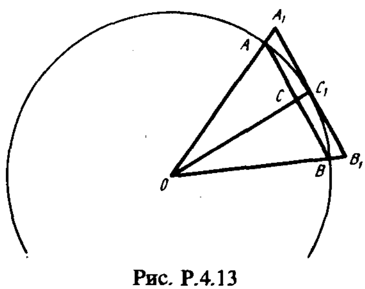


Рис. Р.4.13

AOC и A_1OC_1. Имеем $\frac{OC}{OC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, где $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{6^2-1,5^2}=$ $=\sqrt{4,5\cdot 7,5}=1,5\sqrt{15}$ (см), $OC_1=6$ см, $AC=1,5$ см. Следовательно, $A_1C_1=\frac{6\cdot 1,5}{1,5\sqrt{15}}=\frac{6}{\sqrt{15}}=0,4\sqrt{15}$ (см), $A_1B_1=0,8\sqrt{15}$ (см). Теперь найдем $OA_1=\sqrt{OC_1^2+A_1C_1^2}=\sqrt{36+\frac{36}{15}}=\frac{6\cdot 4}{\sqrt{15}}=1,6\sqrt{15}$ (см). Таким образом, полупериметр треугольника A_1OB_1 составляет $p=\frac{1}{2}(3,2\sqrt{15}+0,8\sqrt{15})=2\sqrt{15}$ (см), а его площадь $S=\frac{1}{2}\,OC_1\cdot A_1B_1=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 0,8\sqrt{15}=2,4\sqrt{15}$ (см^2). Наконец, используя формулу $r=\frac{S}{p}$, получим $r=\frac{2,4\sqrt{15}}{2\sqrt{15}}=1,2$ (см). ■

4.049. □ Проведем радиусы OM, ON, OP и OQ в точки касания окружности со сторонами четырехугольника (рис. Р.4.14). Из равенства треугольников AOM и AON, BON и BOP, COP и COQ, DOQ и DOM заключаем, что AO, BO, CO и DO являются биссектрисами углов A, B, C и D. Значит, $\angle AOB=$ $=180°-\alpha-\beta$, $\angle COD=180°-\gamma-\delta$, $\angle AOD=180°-\alpha-\delta$, $\angle BOC=180°-\beta-$ $-\gamma$, откуда $\angle AOB+\angle COD=360°-\alpha-\beta-\gamma-\delta$. Но $\alpha+\beta+\gamma+\delta=$ $=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=180°$. Итак, $\angle AOB+\angle COD=180°$. ■

4.050. Пусть $\angle BDC=x$; тогда $\angle BOC=2x$ (рис. Р.4.15). Следовательно, $\angle OBC=90°-x$, т. е. $\angle O_1BC=90°-x$ (в силу симметрии точек O и O_1 относительно стороны BC). Найдем сумму углов $\triangle ABC$: $180°-x+180°-2x+180°-2x=540°-5x$; тогда $540°-5x=180°$, откуда $x=72°$. Окончательно получим $\angle BAC=180°-72°=108°$, $\angle CBA=\angle BCA=$ $=\frac{1}{2}(180°-108°)=36°$. ■

4.055. $0,2R\sqrt{10}$. **4.056.** $4\sqrt{2}$ м. **4.057.** a. **4.058.** 2α; π; $2\pi-2\alpha$.

4.060. □ Введем систему координат с началом в точке $A(0;\,0)$ и осями координат, направленными вдоль сторон AD и AB квадрата (рис. Р.4.16). В этой системе вектор $\overline{AM}$ имеет координаты $(0,5;\,1)$, а вектор $\overline{AN}$ — координаты $(1;\,0,5)$. Воспользуемся формулой $\cos\alpha=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{|\overline{AM}|\,|\overline{AN}|}$, где $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=$

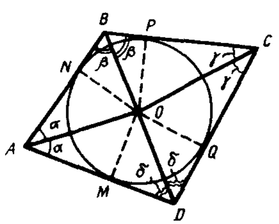


Рис. Р.4.14

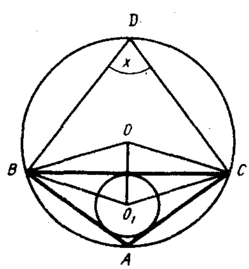


Рис. Р.4.15

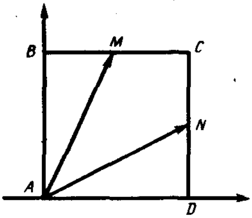


Рис. Р.4.16

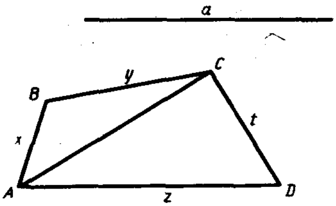


Рис. Р.4.17

$=0{,}5\cdot 1+1\cdot 0{,}5=1,\quad |\overline{AM}|=\sqrt{0{,}5^2+1^2}=0{,}5\sqrt{5},\quad \overline{AN}=\sqrt{1^2+0{,}5^2}=0{,}5\sqrt{5}.$

Итак, $\cos\alpha=\dfrac{1}{0{,}5\sqrt{5}\cdot 0{,}5\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$. ■

4.061. □ Пусть $x<a$, $y<a$, $z<a$, $t<a$ — стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. Р.4.17). Диагональ AC делит четырехугольник на два треугольника ABC и ACD, имеющих площади $S_{\Delta ABC}=\dfrac{xy}{2}\sin B$ и $S_{\Delta ADC}=\dfrac{zt}{2}\sin D$. Следовательно,

$S_{ABCD}=\dfrac{xy}{2}\sin B+\dfrac{zt}{2}\sin D<\dfrac{xy}{2}+\dfrac{zt}{2}$ или $S_{ABCD}<\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}$, т. е. $S_{ABCD}<a^2$. ■

4.062. □ Найдем площади ΔABC и ΔBCD (рис. Р.4.18): $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h$, $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h$, где $h=BK$, т. е. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCD}$. Но $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BOC}$, $S_{\Delta COD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BOC}$ и, следовательно, $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$. ■

4.063. □ Проведем $CK\perp AB$ и $DL\perp AB$ (рис. Р.4.19). Пусть $DC=a$, $KB=x$; тогда $AB=2x+DC$ или $3a=2x+a$, откуда $x=a$. Теперь воспользуемся условием $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, откуда следует, что $CB=a\sqrt{5}$, $CK=\sqrt{CB^2-KB^2}=2a$. Далее из ΔAKC находим $AC=\sqrt{AK^2+CK^2}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2a\sqrt{2}$. Так как $\Delta AOB\sim\Delta DOC$, то $\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{3}{1}$ и, значит, $OC=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Наконец, в ΔDOC имеем $DO^2+OC^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}=a^2=DC^2$, т. е. $DO\perp OC$. ■

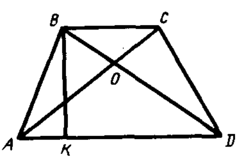


Рис. Р.4.18

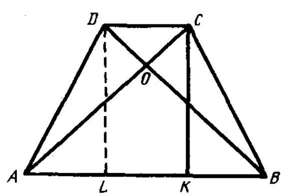


Рис. Р.4.19

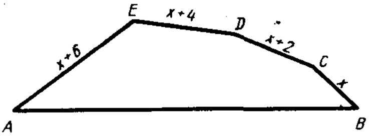


Рис. Р.4.20

4.064. □ Пусть сторона AB пятиугольника $ABCDE$ равна 30 см (рис. Р.4.20). Далее, пусть $BC=x$; тогда $CD=x+2$, $DE=x+4$, $EA=x+6$, где $x \in \mathbb{Z}$, $x \leqslant 7$. Для того чтобы получился пятиугольник, необходимо выполнение неравенства $x+x+2+x+4+x+6>30$ или $4x>18$, откуда $x>4{,}5$. Таким образом, из условия $4{,}5<x<7$ находим целочисленные значения сторон: 5, 7, 9, 11, 30; 6, 8, 10, 12, 30; 7, 9, 11, 13, 30. ■

4.065. □ Для того чтобы сложить паркет из правильных равных многоугольников, нужно, чтобы их углы примыкали друг к другу и в точках соприкосновения составляли бы в сумме 360° (рис. Р.4.21, *а–в*). Угол правильного n-угольника определяется по формуле $\alpha=\dfrac{(n-2)\,180^\circ}{n}$. Так как к каждой точке соприкосновения должны прилегать k многоугольников, то $\alpha=\dfrac{360^\circ}{k}$. Следовательно, $\dfrac{(n-2)\,180^\circ}{n}=\dfrac{360^\circ}{k}$ или $nk-2k=2n$, т. е. $k=\dfrac{2n}{n-2}$.

1) Если $n=3$, то $k=6$; в этом случае $\alpha=60^\circ$, т. е. паркет составлен из правильных треугольников.

2) Если $n=4$, то $k=4$; тогда $\alpha=90^\circ$, т. е. паркет составлен из квадратов.

3) Если $n=5$, то соответствующее значение k не является целым; значит, из правильных пятиугольников паркет составить нельзя.

4) Если $n=6$, то $k=3$; тогда $\alpha=120^\circ$, т. е. паркет составлен из правильных шестиугольников.

Очевидно, что значениями $n=3$, $n=4$ и $n=6$ исчерпываются все подходящие случаи. ■

4.066. □ Имеем $\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{n}$ и, значит, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$ (рис. Р.4.22). Таким образом, получаем равенство $\dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}=\dfrac{3R^2}{n}$, которое выполняется при $n=12$. ■

4.067. □ Возьмем произвольную точку M внутри правильного многоугольника (рис. Р.4.23). Соединим ее с вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры из M на стороны многоугольника. Тогда для площади многоугольника получим выражение

$$S=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2+\ldots+\frac{1}{2}ah_n=\frac{a}{2}(h_1+h_2+\ldots+h_n).$$

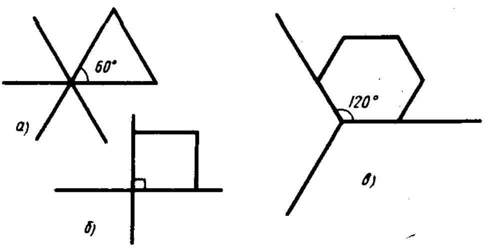


Рис. Р.4.21

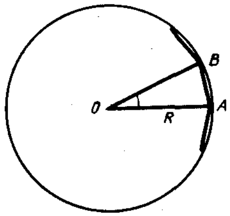


Рис. Р.4.22

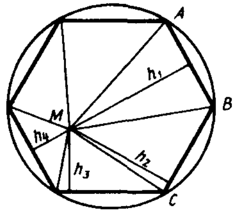


Рис. Р.4.23

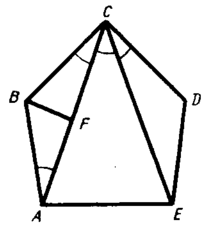


Рис. Р.4.24

С другой стороны, площадь многоугольника равна произведению его полупериметра на апофему: $S=ph$. Следовательно,

$ph=\frac{a}{2}(h_1+h_2+...+h_n)$ или $\frac{na}{2}h=\frac{a}{2}(h_1+h_2+...+h_n)$.

Итак, $h_1+h_2+...+h_n=na$. ■

4.068. □ Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник (рис. Р.4.24). В нем углы при вершине составляют $\frac{(5-2)180°}{5}=108°$. В $\triangle ABC$ проведем $BF\perp AC$; так как $\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}(180°-108°)=36°$, то $\angle ACE=108°-2\cdot 36°=36°$, $CF=a\cos 36°$ и $AC=2a\cos 36°$. Далее находим $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin 108°=$ $=\frac{1}{2}a^2\sin 72°$, $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC^2\sin\angle ACE=\frac{1}{2}(2a\cos 36°)^2\sin 36°=a^2\cos 36°\sin 72°$.

Итак, $\frac{S_{\triangle ACE}}{2S_{\triangle ABC}}=\frac{a^2\cos 36°\sin 72°}{a^2\sin 72°}=\cos 36°\approx 0{,}81$. ■

4.069. □ Число диагоналей n-угольника определяется по формуле $d=\frac{(n-3)n}{2}$. Нам нужно выбрать только те значения d, которые удовлетворяют условию $d<n$. Тогда $n>\frac{(n-3)n}{2}\Rightarrow 2n>n^2-3n\Rightarrow n^2-5n\leqslant 0$, т. е. число n принадлежит промежутку (0, 5). Так как n — это число сторон многоугольника, то $n\geqslant 3$ и окончательно получаем, что требованию задачи удовлетворяют только значения $n=3$ и $n=4$. ■

4.070. 20. **4.071.** $3R^2$. **4.072.** В пятиугольнике. **4.074.** 3. **4.075.** 16 см. **4.076.** 4 и 11 см.
4.077. 12 см. **4.078.** 7,2 см^2. **4.079.** $2(S_1+S_2)$. **4.081.** $P/4$.

4.084. □ Возьмем на прямой p какую-либо точку A и соединим эту точку с любыми двумя точками B_1 и B_2 на прямой q. Таким образом, AB_1 и AB_2 — две пересекающиеся прямые, которые пересекают обе данные скрещивающиеся прямые. ■

4.085. □ Имеем $O_1A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $O_1E=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (рис. Р.4.25), откуда $O_1A-O_1E=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}$. ■

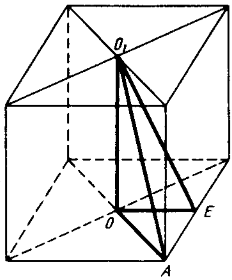


Рис. Р.4.25

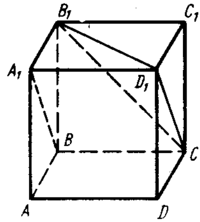


Рис. Р.4.26

4.086. □ Пусть ребро куба равно a; требуется найти угол между диагоналями A_1B и B_1C (рис. Р.4.26). Этот угол равен углу между прямыми D_1C и B_1C, поскольку $D_1C \| A_1B$. В $\triangle B_1D_1C$ имеем $B_1D_1 = D_1C = B_1C = a\sqrt{2}$ и, следовательно, $\angle B_1CD_1 = 60°$. ■

4.087. □ Имеем (рис. Р.4.27) $DE = \frac{1}{2}a$ (a — ребро куба), $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}a^2$, $V_{ACDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{12}a^3$, $V_{\text{куба}} = a^3$. Значит, $\frac{V_{ACDE}}{V_{\text{куба}}} = \frac{1}{12}$. ■

4.089. □ Для построения данного трехгранного угла с плоскими углами α, β, γ (рис. Р.4.28) необходимо, чтобы были выполнены следующие условия: $\beta - \alpha = \gamma - \beta = 50°$, $\alpha + \beta + \gamma < 360°$, $\alpha + \beta > \gamma$. Так как числа α, β и γ составляют геометрическую прогрессию, то $\alpha + \alpha + 50° + \alpha + 100° < 360°$ или $3\alpha < 210°$, т. е. $\alpha < 70°$. Но $\alpha + \alpha + 50° > \alpha + 100°$, откуда $\alpha > 50°$. Учитывая, что α — целое число, получаем ответ: 51°. ■

4.090. Окружность, являющуюся основанием конуса с высотой a и образующей b; высота конуса перпендикулярна данной плоскости, а вершина находится в фиксированной точке этой плоскости. **4.091.** 20. **4.094.** $a\sqrt{2}/2$. **4.095.** Да, если параллелограмм является прямоугольником; да, если параллелограмм является ромбом. В том случае, когда точка равноудалена и от вершин, и от сторон параллелограмма, он должен представлять собой квадрат. **4.096.** Около нее можно описать окружность, т. е. трапеция является равнобедренной. Для такой трапеции искомое множество представляет собой перпендикуляр к плоскости ее основания, проходящий через центр описанной около трапеции окружности. **4.098.** Проекцией ребра является биссектриса соответствующего угла основания. Эта проекция совпадает с диагональю основания, если основание представляет собой ромб.

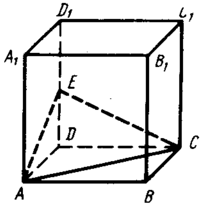


Рис. Р.4.27

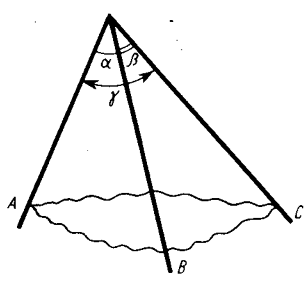


Рис. Р.4.28

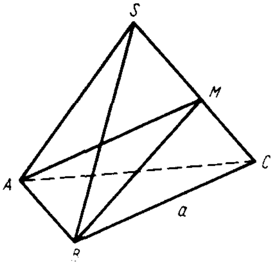


Рис. Р.4.29

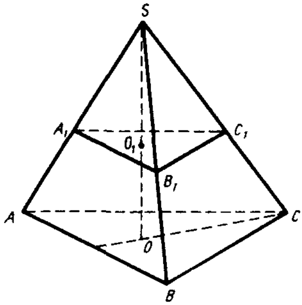


Рис. Р.4.30

4.099. 1 : 11.

4.100. □ По условию, $SM=MC$ (рис. Р.4.29); требуется найти $\angle AMB$. Пусть a — ребро правильного тетраэдра; тогда в $\triangle AMB$ имеем $AM=MB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда по теореме косинусов получим $AB^2=AM^2+MB^2-$ $-2\,AM\cdot MB\cos\angle AMB$ или $a^2=\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}-2\cdot\dfrac{3a^2}{4}\cos\angle AMB$. Следовательно, $\cos\angle AMB=\left(\dfrac{3a^2}{2}-a^2\right):\dfrac{3a^2}{2}=\dfrac{1}{3}$, т. е. $\angle AMB=\arccos\dfrac{1}{3}$. ■

4.101. □ По условию, высота $SO_1=h$ (рис. Р.4.30) является переменной. Известно, что $\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{h}{H}\right)^2$, т. е. $S_{\triangle A_1B_1C_1}=h^2\,\dfrac{S_{\triangle ABC}}{H^2}$, где $S_{\triangle ABC}$ и H — величины постоянные в данной задаче. Таким образом, зависимость между площадью сечения и расстоянием от вершины до секущей плоскости выражается квадратичной функцией вида $f(x)=kx^2$, где $k=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{H}>0$ — параметр, а $x=h$ — переменная, причем $0<x<\infty$. ■

4.102. 1. **4.103.** 1 : 7. **4.104.** 5040 см^2.

4.105. □ По условию, в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. Р.4.31) $SO=H$, $\angle DFB=\alpha$. Пусть $OB=x$; в $\triangle DFB$ имеем $\angle DFO=\dfrac{\alpha}{2}$ и $OF=x\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Так как $\triangle OFC\sim\triangle SOC$, то $\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{SO}{SC}$, откуда $SC=\dfrac{OC\cdot SO}{OF}=\dfrac{xH}{x\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}=H\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Искомый радиус найдем как радиус окружности, описанной около $\triangle SAC$. Используя формулу $R=\dfrac{abc}{4S}$, получим

$$R=\frac{SC^2\cdot AC}{4\cdot 0{,}5\,SO\cdot AC}=\frac{SC^2}{2\,SO}=\frac{H^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2H}=\frac{1}{2}\,H\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.\ ■$$

4.106. 60°.

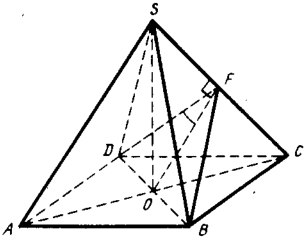


Рис. Р.4.31

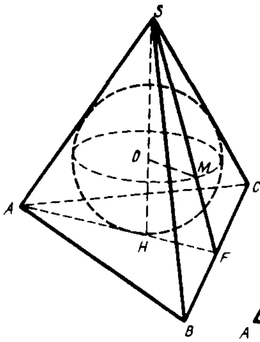


Рис. Р.4.32

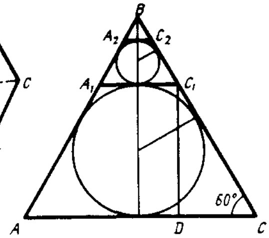


Рис. Р.4.33

4.107. □ Пусть a — ребро пирамиды $SABC$, $OM=r$ — радиус вписанного шара, $SH=h$ — высота пирамиды (рис. Р.4.32). В $\triangle SAF$ имеем $SF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HF=\frac{1}{3}AF=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; следовательно, $h=SH=\sqrt{SF^2-HF^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{36}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Так как $FM=FH$, то $SM=AH=\frac{2}{3}AF=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда из $\triangle SMO$ находим $SM^2+OM^2=SO^2$ или $\frac{a^2}{3}+r^2=\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}-r\right)^2$ или $\frac{a^2}{3}+r^2=\frac{2a^2}{3}-\frac{2ar\sqrt{6}}{3}+r^2$, откуда $r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$. Итак, $\frac{r}{h}=\frac{a\sqrt{6}}{12}:\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{4}$. ■

4.110. 60°. **4.111.** $\pi/4$; $\pi/2$; arctg 2; arctg 2. **4.113.** В данный четырехугольник можно вписать окружность. **4.114.** $6\sqrt{435}$ см². **4.115.** 1 : 3. **4.117.** $\sqrt{2S_1S_2S_3}/3$. **4.119.** Нет; на перпендикуляре к плоскости основания пирамиды, проходящем через центр описанной около этого основания окружности.

4.121. □ Сектор развертки конуса имеет угол 90° и радиус $R=1$; следовательно, его площадь $S_1=\pi R\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$. Площадь боковой поверхности конуса $S_2=\pi rl=\pi r$ (так как $l=R=1$). Но $S_1=S_2$ и, значит, $\frac{\pi}{4}=\pi r$, откуда $r=\frac{1}{4}$. Теперь находим площадь полной поверхности конуса: $S=S_2+S_{осн}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}=\frac{5\pi}{16}$. ■

4.123. □ Пусть a_1 — сторона правильного треугольника ABC, представляющего собой осевое сечение конуса (рис. Р.4.33); тогда $r_1=\frac{a_1\sqrt{3}}{6}$ — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Проведем касательную $A_1C_1 \parallel AC$ и получим другой правильный треугольник A_1BC_1. Так как $CC_1=\frac{C_1D}{\sin 60°}=2r_1:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a_1\sqrt{3}}{3}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a_1}{3}$, то $a_2=BC_1=a_1-\frac{2a_1}{3}=\frac{a_1}{3}$. Это значит, что сторона каждого следующего правильного треугольника в 3 раза меньше стороны предыдущего и поэтому радиусы вписанных в них окружностей находятся в том же отношении: $r_2=\frac{1}{3}r_1$, $r_3=\frac{1}{3}r_2$, ..., $r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}$, ... Соответственно объемы вписанных в конус шаров составляют $V_1=\frac{4}{3}\pi r_1^3$, $V_2=\frac{4}{3}\pi r_2^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}V_1$, ..., $V_n=\frac{1}{27}V_{n-1}$, ... Итак, объемы вписанных шаров образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, сумма которой равна $\frac{V_1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{27V_1}{26}$, т. е.

$$\sum=V_1+V_2+\ldots+V_n+\ldots=\frac{27V_1}{26}=\frac{27}{26}\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3=\frac{27}{26}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}\,a_1^3}{6^3}=\frac{\pi a_1^3\sqrt{3}}{52}.$$

Поскольку $V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\frac{a_1\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a_1^3\sqrt{3}}{24}$, окончательно находим

$$\frac{\sum}{V_{\text{кон}}}=\frac{\pi a_1^3\sqrt{3}}{52}:\frac{\pi a_1^3\sqrt{3}}{24}=\frac{6}{13}.\ \blacksquare$$

4.124. □ Пусть $OA=R$ и $O_1B=r$ — радиусы оснований усеченного конуса, а $MO=x$ и $NO_1=y$ $(y<x)$ — радиусы вписанных шаров (рис. Р.4.34). По условию, $x+y=l$, $\angle A=\alpha$. В $\triangle AOM$ и $\triangle BO_1N$ имеем $R=x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $r=y\operatorname{ctg}\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)=y\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (1). Далее, в трапеции $FHNM$ проведем $NK\parallel HF$; так как $NM=l$, $KM=x-y$, $\angle NMK=\angle BAO=\alpha$, то из $\triangle NKM$ получим $x-y=l\cos\alpha$. Таким образом, приходим к системе $\begin{cases}x+y=l,\\x-y=l\cos\alpha,\end{cases}$ откуда $x=\frac{l+l\cos\alpha}{2}$, $y=\frac{l-l\cos\alpha}{2}$. Подставив найденные значения в равенства (1), окончательно находим

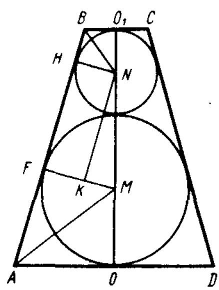


Рис. Р.4.34

$$R=x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{l(1+\cos\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2}=l\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$r=y\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{l(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}=l\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

4.125. $-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **4.126.** $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$, $k\geqslant 2$. **4.127.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1}}$, $0<k<2$. **4.128.** $\pi\sqrt{3}:2$.

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

5.001. $y \pm 0{,}5\sqrt{15}=0$.

5.002. □ По условию, $\overline{AB}=k\,\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}\parallel\overline{CD}$ (1). Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. Р.5.1): $\overline{AB}$ $(1;\ -2)$, $\overline{CD}$ $(x+4;\ y)$, где x и y — координаты точки D. Из (1) следует, что $\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{-2}{y}$ или $y=-2x-8$ (2). Так как трапеция $ABDC$ — равнобедренная, то $|\overline{AC}|=|\overline{BD}|$ и $\overline{AC}\nparallel\overline{BD}$. Найдем векторы $\overline{AC}$ $(-6;\ -1)$, $\overline{BD}$ $(x-3;\ y+1)$ и воспользуемся тем, что $\overline{AC}^2=\overline{BD}^2$; имеем $36+1=(x-3)^2+(y+1)^2$ или $x^2+y^2-6x+2y=27$ (3). Решив систему уравнений (2) и (3), получим $x_1=-1{,}4$, $y_1=-5{,}2$ или $x_2=-3$, $y_2=-2$. Этим значениям соответствуют два вектора: $\overline{BD}$ $(-4{,}4;\ -4{,}2)$ и $\overline{BD}$ $(-6;\ -1)$. Последний вектор коллинеарен $\overline{AC}$ и, значит, не удовлетворяет условию. Итак, получаем ответ: D $(-1{,}4;\ -5{,}2)$. ■

5.003. $5x-y+7=0$. **5.004.** $y=0$, $y=2\sqrt{3}$, $y=x\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}(x-10)$. **5.005.** $(x-3{,}5)^2+(y\pm\sqrt{10})^2=12{,}25$. **5.006.** $y=-x\sqrt{3}+(3+2\sqrt{3})$; $6+3{,}5\sqrt{3}$ кв. ед. **5.007.** $(-1;\ 2)$; 13 кв. ед.

5.008. □ По условию, $AC=15$ см, $BD=8$ см, откуда находим координаты вершин ромба: A $(-7{,}5;\ 0)$, B $(0;\ 4)$, C $(7{,}5;\ 0)$, D $(0;\ -4)$ (рис. Р.5.2). Угловой коэффициент прямой BC есть $k_1=\operatorname{tg}\angle BCN=-\operatorname{tg}\angle BCO=-\dfrac{4}{7{,}5}=$ $=-\dfrac{8}{15}$. Тогда, зная координаты точки B, составим уравнение стороны BC: $y-4=-\dfrac{8}{15}(x-0)$ или $8x+15y-60=0$. Уравнение стороны AD найдем по известному ее угловому коэффициенту $k_1=-\dfrac{8}{15}$ (так как $AD\parallel BC$) и координатам точки D: $y+4=-\dfrac{8}{15}(x-0)$ или $8x+15y+60=0$. Далее, угловой коэффициент прямой AB есть $k_2=\operatorname{tg}\angle BAO=\dfrac{4}{7{,}5}=\dfrac{8}{15}$ и уравнение стороны AB записывается в виде $8x-15y+60=0$, а уравнение стороны DC — в виде $8x-15y-60=0$. Теперь проведем $OK\perp BC$ и для нахождения OK воспользу-

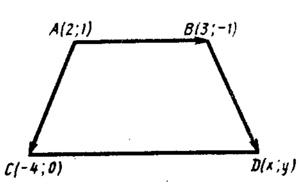


Рис. Р.5.1

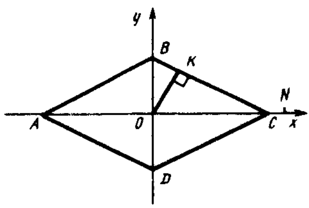


Рис. Р.5.2

емся тем, что $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OC\cdot OB=\frac{1}{2}OK\cdot BC$, откуда $OK=\frac{OC\cdot OB}{BC}$. Поскольку $BC=\sqrt{7{,}5^2+4^2}=8{,}5$, находим $OK=\frac{7{,}5\cdot 4}{8{,}5}=\frac{60}{17}$ (см). ■

5.009. $4\sqrt{17}/11$; $y=4x$.

5.010. □ Согласно условию, $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 0)$ — известные, а $C(x_1;\ y_1)$, $D(x_2;\ y_2)$ — неизвестные вершины квадрата (рис. Р.5.3). Так как длина стороны квадрата $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ и $BC=AB$, то $BC^2=(x_1-4)^2+y_1^2=5$ (1). Найдем угловой коэффициент стороны AB. Для этого воспользуемся формулой (5.4), записав ее в виде $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$, где $(x;\ y)$ — координаты точки B, а $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки A; тогда получим $k=\frac{0-1}{4-2}=-\frac{1}{2}$. Но $BC\perp AB$ и, следовательно, уравнение BC имеет вид $y-0=2(x-4)$, т. е. $y=2x-8$. Далее, точка $C(x_1;\ y_1)$ лежит на BC и, значит, $y_1=2x_1-8$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2), найдем две точки $C(5;\ 2)$ и $C(3;\ -2)$, которые, как легко убедиться, симметричны относительно точки B.

Для точки $C(5;\ 2)$ имеем $\overline{AC}(3;\ 1)$, $\overline{BD}(x_2-4;\ y_2)$, откуда, учитывая, что $AC\perp BD$, получаем $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$ или $3x_2-12+y_2=0 \Rightarrow y_2=12-3x_2$ (3). Кроме того, $BD^2=(x_2-4)^2+y_2^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2$ или $(x_2-4)^2+y_2^2=10$ (4). Решив теперь систему уравнений (3) и (4), найдем две точки $D(5;\ -3)$ и $D(3;\ 3)$. Чтобы отобрать нужную точку, воспользуемся коллинеарностью векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Если $D(5;\ -3)$, то $\overline{CD}(0;\ -5)$, $\overline{AB}(2;\ -1)$, т. е. $\overline{CD}\nparallel\overline{AB}$ и, значит, точка $D(5;\ -3)$ не является вершиной квадрата. Если же $D(3;\ 3)$, то $CD(-2;\ 1)$, т. е. $\overline{CD}\parallel\overline{AB}$. Итак, точки $C(5;\ 2)$ и $D(3;\ 3)$ являются вершинами квадрата.

Рассуждая аналогично, для точки $C(3;\ -2)$ находим вершину $D(1;\ -1)$. ■

5.011. $\sqrt{33}$; $\sqrt{105}$. **5.012.** $(-2+3\sqrt{3};\ -1)$ или $(-2-3\sqrt{3};\ -1)$; $9\sqrt{3}$ кв. ед. **5.013.** $(-2/3;\ -2/3)$. **5.014.** $C(4;\ -1)$. **5.015.** $1{,}5\sqrt{34}$. **5.016.** $(1{,}5;\ 1;\ 1)$. **5.017.** 13; $B(12;\ 5)$, $C(-5;\ 12)$, $D(-12;\ -5)$.

5.018. □ Так как уравнение данной окружности имеет вид $x^2+y^2=9$, то ее радиус равен 3. Точка касания B данной и искомой окружностей лежит на линии их центров OB (рис. Р.5.4); поэтому радиус искомой окружности равен 1,5. Наконец, центр M искомой окружности лежит на перпендикуляре к середи-

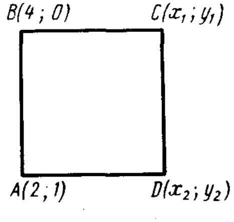


Рис. Р.5.3

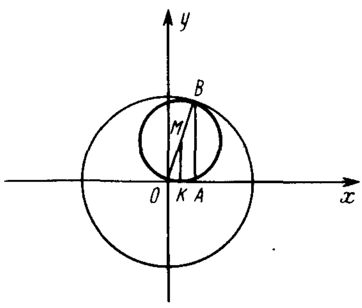


Рис. Р.5.4

не отрезка OA, т. е. абсцисса центра есть $x_M=0{,}5$, а его ординату находим из ΔOMK $(MK\perp OA)$: $y_M=\sqrt{1{,}5^2-0{,}5^2}=\sqrt{2}$. Однако возможно иное расположение искомой окружности, симметричное с изображенным на рис. Р.5.4 относительно оси Ox; в этом случае точка M имеет ординату $y_M=-\sqrt{2}$.

Заметим, что ординату точки M можно найти другим способом. А именно, воспользуемся тем, что точка касания B имеет координаты $(1;\ y_B)$ и что эти координаты удовлетворяют уравнению данной окружности: $1^2+y_B^2=9$ или $y_B=\pm 2\sqrt{2}$; так как $MK\perp Ox$, то $MK\parallel AB$, т. е. MK — средняя линия в ΔAOB и, значит, $y_M=\pm\sqrt{2}$.

Итак, зная координаты центра M $(0{,}5;\ \pm\sqrt{2})$ и радиус $r=1{,}5$ искомой окружности, получим ее уравнение: $(x-0{,}5)^2+(y\mp\sqrt{2})^2=2{,}25$. ■

5.019. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **5.020.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

5.021. $4\sqrt{2}$. **5.022.** $3x+4y-15=0$; $3x-4y-15=0$. **5.023.** $(x+1)^2+(y-3)^2=10$.

5.024. □ Уравнение сферы с центром C $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и радиусом R записывается в виде $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$ (1). Так как эта сфера касается координатных плоскостей, то должны выполняться равенства $|x_1|=|y_1|=|z_1|=R$ (2). Далее, координаты точки A $(1;\ -1;\ 4)$ удовлетворяют уравнению (1), т. е. $(1-x_1)^2+(-1-y_1)^2+(4-z_1)^2=R^2$ или

$$1-2x_1+x_1^2+1+2y_1+y_1^2+16-8z_1+z_1^2-R^2=0. \qquad (3)$$

Согласно условию (2), имеем $x_1^2+y_1^2+z_1^2=3R^2$ и равенство (3) примет вид

$$18-2x_1+2y_1-8z_1+2R^2=0 \text{ или } 9-x_1+y_1-4z_1+R^2=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим различные случаи расположения центра. Пусть $x_1>0$, $y_1>0$, $z_1>0$ (I октант), т. е. $x_1=y_1=z_1=R$. Тогда, подставив эти значения в равенство (4), получим уравнение $R^2-4R+9=0$, которое не имеет решений $(D/4=4-9<0)$.

Пусть теперь $x_1<0$, $y_1>0$, $z_1>0$ (II октант), т. е. $|x_1|=y_1=z_1=R$. Тогда в результате подстановки этих значений в равенство (4) получим уравнение $R^2-2R+9=0$, которое также не имеет решений.

Последовательно рассматривая остальные координатные октанты, устанавливаем, что центр искомой сферы расположен в IV октанте, где $x_1>0$, $y_1<0$, $z_1>0$ и $x_1=|y_1|=z_1=R$. В этом случае получаем уравнение $R^2-6R+9=0$, откуда $R_1=R_2=3$,т. е. $x_1=3$, $y_1=-3$, $z_1=3$. Итак, искомое уравнение имеет вид $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. ■

5.025. □ Используя формулу (5.21), находим

$$\cos\angle AOA_1=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OA_1}}{|\overline{OA}|\,|\overline{OA_1}|}=\frac{6\cdot 8+8\cdot 6}{\sqrt{36+64}\cdot\sqrt{64+36}}=\frac{24}{25}. \ ■$$

5.026. $\alpha=\arccos\dfrac{31}{5\sqrt{41}}$. **5.027.** $\cos A=-\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **5.028.** $120°$. **5.029.** $\bar{p}$ $(2;\ -1;\ 1)$.

5.030. $\dfrac{7}{5\sqrt{33}}$.

5.031. $\dfrac{6}{7}$; $-\dfrac{2}{7}$; $-\dfrac{3}{7}$. ● Воспользоваться тем, что если x, y, z — координаты вектора $\bar{a}$ и α, β, γ — углы вектора соответственно с осями Ox, Oy и Oz, то $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\bar{a}|}$.

5.032. □ Пусть $\bar{n}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\overline{OA}$; тогда $\bar{n}\left(\cos\frac{\pi}{3};\ \cos\frac{\pi}{3};\ \cos\frac{\pi}{4}\right)$ или $\bar{n}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а $\overline{OB}\ (-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$. Обозначив угол между $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ через α, находим

$$\cos\alpha=\frac{\bar{n}\cdot\overline{OB}}{|\bar{n}|\ |\overline{OB}|}=\frac{\frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}(-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-2\sqrt{2})}{1\cdot 4}=-1,$$

откуда получаем ответ: $\alpha=180^\circ$. ■

5.033. □ По условию, $|\overline{BA}|=|\overline{BC}|=a$, $(\widehat{\overline{AM_1};\overline{CM_2}})=\beta=60^\circ$, где AM_1 и CM_2 — медианы $\triangle ABC$ (рис. Р. 5.5); требуется найти $(\widehat{\overline{BA};\overline{BC}})=\alpha$. Воспользуемся формулой

$$\cos\beta=\frac{\overline{AM_1}\cdot\overline{CM_2}}{|\overline{AM_1}|\ |\overline{CM_2}|}. \tag{1}$$

С помощью рис. Р.5.5 находим $\overline{AM_1}=\overline{BM_1}-\overline{BA}$, $\overline{CM_2}=\overline{BM_2}-\overline{BC}$. Следовательно,

$$\overline{AM_1}\cdot\overline{CM_2}=\overline{BM_1}\cdot\overline{BM_2}-\overline{BA}\cdot\overline{BM_2}-\overline{BM_1}\cdot\overline{BC}+\overline{BA}\cdot\overline{BC}=$$
$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cos\alpha-a\cdot\frac{1}{2}a\cos 0-\frac{1}{2}a\cdot a\cos 0+a\cdot a\cos\alpha=a^2\left(\frac{5}{4}\cos\alpha-1\right). \tag{2}$$

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $\overline{AM_1}=\overline{CM_2}$, откуда

$$|\overline{AM_1}|\ |\overline{CM_2}|=\overline{AM}_1^2=(\overline{BM_1}-\overline{BA})^2=BM_1^2-2\overline{BM_1}\cdot\overline{BA}+BA^2=$$
$$=\frac{a^2}{4}-2\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cos\alpha+a^2=a^2\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right). \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), имеем

$$\cos 60^\circ=\frac{a^2\left(\frac{5}{4}\cos\alpha-1\right)}{a^2\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}\ \text{или}\ \frac{1}{2}=\frac{\frac{5}{4}\cos\alpha-1}{\frac{5}{4}-\cos\alpha},$$

откуда $\cos\alpha=\frac{13}{14}$, т. е. $\alpha=\arccos\frac{13}{14}$. ■

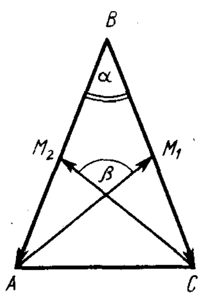


Рис. Р.5.5

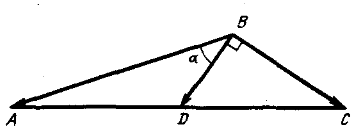


Рис. Р.5.6

5.034. 120°.

5.035. □ По условию, $\angle DBC=90°$, $BD=(\sqrt{3}/4)AB$, $AD=DC$ (рис. Р.5.6); требуется найти $\angle ABD=\alpha$. Для нахождения угла α будем использовать формулу $\cos\alpha=\dfrac{\overline{BA}\cdot\overline{BD}}{|\overline{BA}|\,|\overline{BD}|}$. Так как BD — медиана $\triangle ABC$, то $BD=\dfrac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{BC})$, откуда $\overline{BA}=2\overline{BD}-\overline{BC}$. Следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{(2\overline{BD}-\overline{BC})\overline{BD}}{|\overline{BA}|\,|\overline{BD}|}=\frac{2BD^2-\overline{BC}\cdot\overline{BD}}{|\overline{BA}|\,|\overline{BD}|}. \qquad (1)$$

Но $\overline{BC}\perp\overline{BD}$, т. е. $\overline{BC}\cdot\overline{BD}=0$, а из равенства $BD=(\sqrt{3}/4)AB$ следует, что $AB=(4/\sqrt{3})BD$. Тогда равенство (1) примет вид

$$\cos\alpha=\frac{2BD^2}{(4/\sqrt{3})BD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$ откуда $\alpha=\pi/6$. ■

5.036. $\dfrac{13}{2\sqrt{43}}$.

5.037. □ Пусть $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$, $D(x_3;\ y_3)$ — неизвестные вершины трапеции (рис. Р.5.7). Поскольку точка $E(6;\ -1)$ — середина основания AB, имеем систему $\dfrac{3+x_1}{2}=6$, $\dfrac{0+y_1}{2}=-1$, откуда $x_1=9$, $y_1=-2$, т. е. $B(9;\ -2)$. Но $BC\parallel Oy$ и, значит, $x_2=9$, а уравнение BC есть $x=9$. Далее, точка $F(7;\ 2)$ — середина основания DC, откуда $\dfrac{x_3+9}{2}=7$, т. е. $x_3=5$. Уравнение прямой AB имеет вид $y+1=k(x-6)$; так как $A\in(AB)$, то $0+1=$ $=k(3-6)\Rightarrow k=-1/3$. Поэтому $k_{DC}=-1/3$ и получаем уравнение DC: $y-2=-\dfrac{1}{3}(x-7)$ или $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$. Решив систему уравнений прямых BC и DC, т. е. $x=9$ и $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$, находим $y=\dfrac{4}{3}$, т. е. $C\left(9;\ \dfrac{4}{3}\right)$. Наконец, ординату точки D найдем из равенства $\dfrac{y_3+\frac{4}{3}}{2}=2$, откуда $y_3=\dfrac{8}{3}$, т. е.

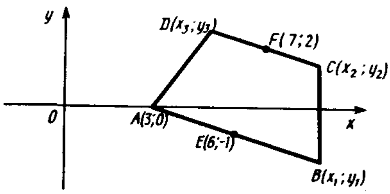


Рис. Р.5.7

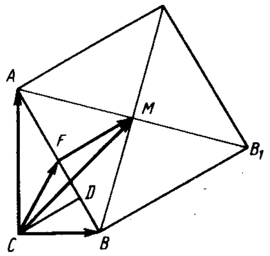


Рис. Р.5.8

$D\left(5;\ \frac{8}{3}\right)$. Таким образом, $BC=y_2-y_1=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$, $AD=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$, т. е. $BC=AD$ и, значит, трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Положим $\angle DAB=\alpha$ и воспользуемся формулой $\cos\alpha=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{|\overline{AD}|\,|\overline{AB}|}$. Имеем $\overline{AD}\left(2;\ \frac{8}{3}\right)$, $\overline{AB}\,(6;\ -2)$, $|\overline{AB}|=2\sqrt{10}$ и, следовательно, $\cos\alpha=\frac{2\cdot 6+\frac{8}{3}(-2)}{\frac{10}{3}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, т. е. $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. ■

5.038. □ Пусть $\angle MCB=\alpha$, $\angle MCA=\beta$ (рис. Р.5.8); тогда $\cos\alpha=\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CM}|\,|\overline{CB}|}$, $\cos\beta=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CM}}{|\overline{CA}|\,|\overline{CM}|}$. Положим $CB=a$, $CA=b$ и найдем отношение

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CB}\cdot|\overline{CA}|}{\overline{CA}\cdot\overline{CM}\cdot|\overline{CB}|}=\frac{b}{a}\,\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CB}}{\overline{CA}\cdot\overline{CM}}. \qquad (1)$$

В $\triangle ABC$ проведем медиану CF и точку F соединим с M. Далее имеем $CF=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $FM=\frac{1}{2}AB$ (апофема квадрата), $\angle FCB=\angle FBC=\angle B$, $\overline{CM}=\overline{CF}+\overline{FM}$ (рис. Р.5.8). Теперь находим скалярные произведения $\overline{CM}\cdot\overline{CB}$ и $\overline{CA}\cdot\overline{CM}$:

$$\overline{CM}\cdot\overline{CB}=(\overline{CF}+\overline{FM})\overline{CB}=\overline{CF}\cdot\overline{CB}+\overline{FM}\cdot\overline{CB}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot a\cos B-\frac{1}{2}\overline{BB_1}\cdot\overline{BC}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cos B-\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cos(90^\circ+B)=$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}(\cos B+\sin B) \qquad (2)$$

и аналогично

$$\overline{CA}\cdot\overline{CM}=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}(\cos A+\sin A). \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1) и заметив, что $\cos B+\sin B=$ $=\cos A+\sin A$ (так как $A+B=90^\circ$), получим $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=1$, т. е. $\alpha=\beta$ и, значит, CM — биссектриса угла C. ■

5.039. □ По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $SA=AB=a$, $M\in SC$, $SM:MC=2:1$ (рис. Р.5.9). Положим $\overline{AD}=\overline{m}$, $\overline{AB}=\overline{n}$, $\overline{AS}=\overline{p}$ и $(\widehat{\overline{DC};\ \overline{AM}})=\varphi$. Искомый угол φ будем искать по формуле $\cos\varphi=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{AM}}{|\overline{DC}|\,|\overline{AM}|}$ (1). Разложим векторы $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$ по векторам $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$.

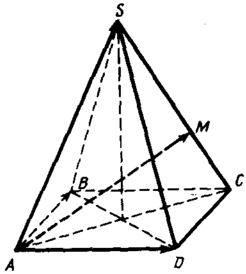


Рис. P.5.9

Имеем $\overline{DC}=\overline{AB}=\bar{n}$, $\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CM}$. Из условия $SM:MC=2:1$ следует, что $\overline{CM}=-\frac{1}{3}\overline{CS}$, где $\overline{CS}=\overline{AS}-\overline{AC}=\bar{p}-(\bar{m}+\bar{n})$. Таким образом, $\overline{AM}=\bar{m}+\bar{n}+\frac{1}{3}\bar{p}-\frac{1}{3}(\bar{m}+\bar{n})=\frac{2}{3}\bar{m}+\frac{2}{3}\bar{n}+$ $+\frac{1}{3}\bar{p}$ и $\overline{DC}\cdot\overline{AM}=\bar{n}\left(\frac{2}{3}\bar{m}+\frac{2}{3}\bar{n}+\frac{1}{3}\bar{p}\right)=$ $=\frac{1}{3}(2\bar{n}\bar{m}+2\bar{n}^2+\bar{n}\bar{p})$. Но $\bar{n}\bar{m}=0$ (так как $\bar{n}\perp\bar{m}$), $\bar{n}^2=a^2$ и $\bar{n}\bar{p}=a^2\cos 60°=\frac{a^2}{2}$; значит, $\overline{DC}\cdot\overline{AM}=$ $=\frac{1}{3}\left(2a^2+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{5}{6}a^2$. Далее находим $|\overline{DC}|=a$,

$$|\overline{AM}|=\sqrt{\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{8}{9}\bar{m}\bar{n}+\frac{4}{9}\bar{m}\bar{p}+\frac{4}{9}\bar{n}\bar{p}}=\sqrt{a^2+\frac{8}{9}a^2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

Подставляя найденные выражения в равенство (1), получим $\cos\varphi=\frac{5\sqrt{13}}{26}$, откуда $\varphi=\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$. ■

5.040. $\frac{8}{5\sqrt{17}}$. **5.041.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **5.042.** $\cos x=\frac{a^2+d^2-e^2-b^2}{2cf}$, где $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $DA=d$, $DB=e$, $DC=f$.

5.043. □ Вектор $\bar{a}-\bar{b}$ имеет координаты $(4;\ -4;\ 4\sqrt{2})$. Пусть $\bar{k}\ (0;\ 0;\ 1)$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz. Полагая $(\widehat{\bar{a}-\bar{b};\ \bar{k}})=\gamma$, находим

$$\cos\gamma=\frac{(\bar{a}-\bar{b})\bar{k}}{|\bar{a}-\bar{b}|\,|\bar{k}|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{16+16+32}\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$ т. е. $\gamma=45°$. ■

5.044. $\arccos(1/\sqrt{14})$.

5.045. □ Данные векторы сонаправлены, если x^3-1 и $2x$ имеют одинаковые знаки. Для определения искомых значений x решаем неравенство $2x(x^3-1)>0$ и получаем ответ: $x\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty)$. ■

5.046. $m\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 2)$.

5.047. □ Данные векторы сонаправлены, если $5x-x^2>0$, откуда $0<x<5$ (1). Далее решаем неравенство $|x-5|\cdot|\bar{a}|\leqslant 3|\bar{a}|$. Учитывая условие (1) и то, что $|\bar{a}|>0$, получаем $5-x\leqslant 3$, т. е. $x\geqslant 2$ (2). Из (1) и (2) следует, что $x\in[2,\ 5)$. ■

5.048. $y\in(2/3,\ 3)$. **5.049.** $x=-5/4$, $y=8/5$. **5.050.** $x\in(-\infty,\ -1)\cup(5,\ \infty)$. **5.052.** $(4\sqrt{2};\ -2;\ 8)$ или $(-4\sqrt{2};\ 2;\ -8)$.

5.053. □ Так как O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (рис. P.5.10), то

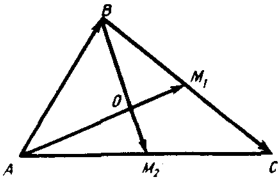


Рис. Р.5.10

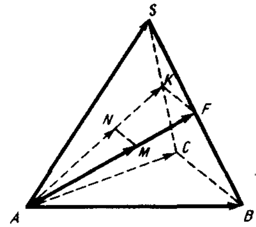


Рис. Р.5.11

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}_1$; тогда $\overline{AM}_1=\frac{3}{2}\bar{a}$, $\overline{M_1C}=\overline{AC}-\overline{AM}_1=\bar{b}-\frac{3}{2}\bar{a}$, $BC=2\overline{M_1C}=$ $=2\bar{b}-3\bar{a}$, $\overline{AB}=\overline{AM_1}+\overline{M_1B}=\overline{AM_1}-\overline{M_1C}=\frac{3}{2}\bar{a}-\left(\bar{b}-\frac{3}{2}\bar{a}\right)=3\bar{a}-\bar{b}$. ■

5.054. □ Пусть AF и AK — медианы граней SAB и SAC, M и N — точки пересечения медиан указанных граней (рис. Р.5.11). Тогда $\overline{AF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AS})$, $\overline{AK}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{AS})$. Используя свойство точки пересечения медиан треугольника, находим $\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AF}=\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AS})$, $\overline{AN}=\frac{2}{3}\overline{AK}=\frac{1}{3}(\overline{AC}+\overline{AS})$. Значит, $\overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}=\frac{1}{3}(\overline{AC}+\overline{AS}-\overline{AB}-\overline{AS})=\frac{1}{3}(\overline{AC}-\overline{AB})=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Итак, $\overline{MN}=\frac{1}{3}\overline{BC}$; следовательно, $\overline{MN}\|\overline{BC}$ и $|\overline{MN}|:|\overline{BC}|=\frac{1}{3}$. ■

5.055. $\overline{BD}=2(\bar{b}-\bar{a})$, $\overline{AD}=\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{a}$.

5.056. □ По условию, $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AN}=\bar{b}$ (рис. Р.5.12) и, значит, $\overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}=\bar{b}-\bar{a}$. Так как $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, $\frac{DN}{NC}=\frac{1}{2}$, то $\frac{MC}{BC}=\frac{2}{3}$, $\frac{NC}{CD}=\frac{2}{3}$ и угол C — общий у треугольников NCM и DCB. Следовательно, $\triangle NCM\sim\triangle DCB$, откуда $\frac{MN}{BD}=\frac{2}{3}$ и $\overline{BD}=\frac{3}{2}\overline{MN}$, т. е. $BD=\frac{3}{2}(\bar{b}-\bar{a})$. Пусть $\overline{AD}=x$, $\overline{AB}=\bar{y}$. Имеем $\overline{AD}-\overline{AB}=\overline{BD}$ или $\bar{x}-\bar{y}=\frac{3}{2}(\bar{b}-\bar{a})$ (1). Далее, $\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AM}$ или $\bar{y}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\bar{a}$, т. е. $\bar{y}+\frac{1}{3}\bar{x}=\bar{a}$ (2). Остается решить систему уравнений (1) и (2); в результате получим $\overline{AD}=\frac{9}{8}\bar{b}-\frac{3}{8}\bar{a}$, $\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b}$. ■

5.057. $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2\sqrt{3}}$. **5.058.** $\bar{a}=\frac{3}{2}\bar{b}-3\bar{c}$.

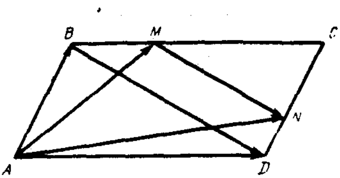


Рис. Р.5.12

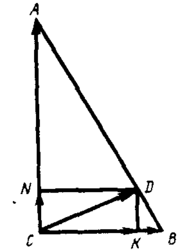


Рис. Р.5.13

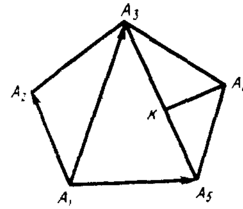


Рис. Р.5.14

5.059. □ Проведем $DK \| AC$ и $DN \| CB$ (рис. Р.5.13). Тогда $\overline{CD} = \overline{CK} + \overline{CN} = m\overline{CB} + n\overline{CA}$ (1). Для решения задачи следует найти $m = \dfrac{|\overline{CK}|}{|\overline{CB}|}$ и $n = \dfrac{|\overline{CN}|}{|\overline{CA}|}$. Так как $\triangle NAD \sim \triangle CAB$, то $\dfrac{ND}{CB} = \dfrac{NA}{CA}$ или $\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{NA}{CA}$ или $\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{CA - CN}{CA}$ или $\dfrac{CK}{CB} = 1 - \dfrac{CN}{CA}$, т. е. $m = 1 - n$ (2). Но $\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0$ и, значит,

$$(m\overline{CB} + n\overline{CA})\overline{AB} = 0; \; m\overline{CB} \cdot \overline{AB} + n\overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0;$$

$$m\overline{BC} \cdot \overline{BA} - n\overline{AC} \cdot \overline{AB} = 0; \; m\,|\overline{BC}|\,|\overline{BA}|\cos B - n\,|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|\cos A = 0.$$

Сокращая на $|\overline{AB}|$ и используя равенство (2), получим

$$(1 - n)\,|\overline{BC}|\cos B - n\,|\overline{AC}|\cos A = 0. \qquad (3)$$

С помощью рис. Р.5.13 устанавливаем, что $\cos B = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$; тогда равенство (3) примет вид $\dfrac{BC^2}{AB} - \dfrac{nBC^2}{AB} - \dfrac{nAC^2}{AB} = 0$. Отсюда находим $n = \dfrac{BC^2}{AB^2}$ и, значит, $m = 1 - \dfrac{BC^2}{AB^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$. Подставляя значения m и n в разложение (1), окончательно получим $\overline{CD} = \dfrac{AC^2\overline{CB} + BC^2\overline{CA}}{AB^2}$. ■

5.060. □ По условию, $A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный пятиугольник (рис. Р.5.14); требуется разложить $\overline{A_1A_3}$ по векторам $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_5}$. Запишем очевидное разложение $\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_5} + \overline{A_5A_3}$. Легко установить, что в правильном пятиугольнике $A_5A_3 \| A_1A_2$, т. е. $\overline{A_5A_3} = m\overline{A_1A_2}$, и, следовательно,

$$\overline{A_1A_3} = m\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_5} \text{ (1), где } m = \frac{A_5A_3}{A_1A_2}. \qquad (2)$$

Пусть $A_1A_2 = a$. Проведем $A_4K \perp A_3A_5$ и в $\triangle A_3A_4K$ имеем $A_3K = A_3A_4 \cos \angle KA_3A_4$. Так как $\angle A_3A_4A_5 = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$, то

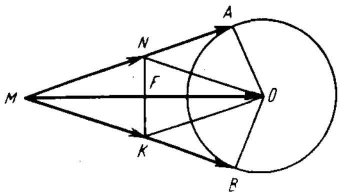


Рис. Р.5.15

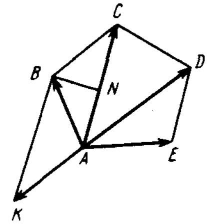


Рис. Р.5.16

$\angle KA_3A_4=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$, откуда

$$A_5A_3=2A_3K=2a\cos 36^\circ. \qquad (3)$$

Для нахождения $\cos 36^\circ$ воспользуемся равенством $\sin(2\cdot 18^\circ)=\cos(3\cdot 18^\circ)$. Тогда, используя формулу $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, получим уравнение $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$. После сокращения на $\cos 18^\circ\neq 0$ имеем $2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$ или $2\sin 18^\circ=4-4\sin^2 18^\circ-3$. Положим $\sin 18^\circ=z$ и решим квадратное уравнение $4z^2+2z-1=0$, откуда $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$; так как $z>0$, то $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Далее находим $\cos 36^\circ=\cos(2\cdot 18^\circ)=1-2\sin^2 18^\circ=$ $=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. Подставив это значение в (3), получим $A_5A_3=a\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, затем из (2) найдем $m=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ и тогда соотношение (1) примет вид $\overline{A_1A_3}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_5}$. ■

5.061. □ Из центра O окружности проведем $ON\parallel BM$ и $OK\parallel AM$ (рис. Р.5.15); тогда $\overline{MO}=\overline{MK}+\overline{MN}$, где $|\overline{MK}|=|\overline{MN}|$ (фигура $MNOK$ — параллелограмм, в котором диагональ MO является биссектрисой угла M, т. е. $MNOK$ — ромб). Следовательно, $\overline{MO}=n(\overline{MA}+\overline{MB})$ (1), где $n=\dfrac{|\overline{MN}|}{|\overline{MA}|}$. Так как $NK\perp MO$, то $\triangle MFN$ — прямоугольный и $MN=\dfrac{MF}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{MO}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Затем из $\triangle MAO$ находим $MA=MO\cos\frac{\alpha}{2}$ и, значит, $n=\dfrac{MO}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot MO\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Подставив это значение в (1), окончательно получим $\overline{MO}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(\overline{MA}+\overline{MB})$. ■

5.062. $\overline{DK}=\frac{7}{8}\overline{AB}-\overline{AD},\ \frac{DK}{AB}=\frac{\sqrt{337}}{24}$.

5.063. $\arccos\frac{13}{14}$. ● Разложить векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$ по векторам $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{AD}=\bar{b}$.

5.064. $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

5.065. □ Через точку B проведем прямую $BK\parallel CA$ (рис. Р.5.16). Так как в правильном пятиугольнике $AD\parallel BC$, то $\overline{AK}$ и $\overline{AD}$ коллинеарны и противоположно направлены. Имеем $\overline{AB}=\overline{AK}+\overline{AC}$, причем $\overline{AK}=k\overline{AD}$, где $k<0$ и $|k|=\frac{|\overline{AK}|}{|\overline{AD}|}$. Проведем $BN\perp AC$ и из $\triangle BNC$ найдем $AK=CB=\frac{CN}{\cos\angle BCN}$. Так как $CN=\frac{1}{2}AC$, $AD=AC$, то $CN=\frac{1}{2}AD$. Поэтому $AK=\frac{AD}{2\cos 36^\circ}=\frac{2AD}{\sqrt{5}+1}$ (см. задачу 5.060). Отсюда находим $|k|=\frac{2AD}{(\sqrt{5}+1)AD}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Учитывая, что $k<0$, получим $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и, значит, $\overline{AB}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\overline{AD}+\overline{AC}$. Аналогично устанавливаем, что $\overline{AE}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\overline{AC}+\overline{AD}$. ■

5.066. $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$.

5.067. □ Проведем $AK\parallel BD$ и $DK\parallel AB$ (рис. Р.5.17). Тогда $\overline{AK}=\overline{BD}$, $\overline{DK}=\overline{BA}$. Воспользуемся очевидными равенствами $\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}$, $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$; сложив их почленно, получим $\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ (1). Далее, с помощью рис. Р.5.17 запишем $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CD}$, $\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AD}+\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{BA}+\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{DC}$. Сложим эти равенства: $2\overline{MN}=\overline{BC}+\overline{AD}$ или $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{AD})$, откуда в силу (1) имеем $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$. Теперь ис-

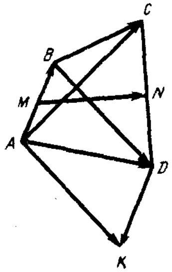


Рис. Р.5.17

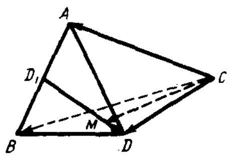


Рис. Р.5.18

пользуем неравенство $|\bar{a}+\bar{b}|\leqslant|\bar{a}|+|\bar{b}|$ и окончательно получим $MN\leqslant\frac{1}{2}(BC+AD)$, $MN\leqslant\frac{1}{2}(AC+BD)$. ■

5.069. □ С помощью рис. Р.5.18 запишем равенства

$$\overline{CM}=\overline{CD}+\overline{DM}\quad(1),\quad \overline{DM}=\frac{3}{10}\overline{DD_1}\quad(2),\quad \overline{DD_1}=\overline{AD_1}-\overline{AD}, \tag{3}$$

$$\overline{AD}=\overline{CD}-\overline{CA}\quad(4),\quad AD_1=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}(\overline{CB}-\overline{CA}). \tag{5}$$

Переходя последовательно от (5) к (1), находим $\overline{DD_1}=\frac{1}{2}(\overline{CB}-\overline{CA})-(\overline{CD}-\overline{CA})=\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{2}\overline{CA}-\overline{CD}$,

$$\overline{CM}=\overline{CD}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{2}\overline{CA}-\overline{CD}\right)=\frac{3}{20}\overline{CA}+\frac{3}{20}\overline{CB}+\frac{7}{10}\overline{CD}.\ ■$$

5.070. $A_1O=-\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}$. **5.071.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$. **5.072.** $\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}$.

5.073. □ По условию, $\overline{DM}=\alpha\overline{DA}+\beta\overline{DB}+\gamma\overline{DC}$, где $M\in(ABC)$ (рис. Р. 5.19). Следовательно,

$$\overline{MA}=\overline{DA}-\overline{DM}=(1-\alpha)\overline{DA}-\beta\overline{DB}-\gamma\overline{DC}, \tag{1}$$

$$\overline{MB}=\overline{DB}-\overline{DM}=-\alpha\overline{DA}+(1-\beta)\overline{DB}-\gamma\overline{DC}, \tag{2}$$

$$\overline{MC}=\overline{DC}-\overline{DM}=-\alpha\overline{DA}-\beta\overline{DB}+(1-\gamma)\overline{DC}. \tag{3}$$

Так как $M\in(ABC)$, то векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ компланарны; поэтому существуют такие числа p, q и r, что $p\overline{MA}+q\overline{MB}+r\overline{MC}=\bar{0}$. Используя разложения (1) — (3), преобразуем последнее соотношение:

$$p(1-\alpha)\overline{DA}-p\beta\overline{DB}-p\gamma\overline{DC}-q\alpha\overline{DA}+q(1-\beta)\overline{DB}-q\gamma\overline{DC}-$$

$$-r\alpha\overline{DA}-r\beta\overline{DB}+r(1-\gamma)\overline{DC}=\bar{0};$$

$$(p(1-\alpha)-q\alpha-r\alpha)\overline{DA}+(-p\beta+q(1-\beta)-\beta)\overline{DB}+$$

$$+(-p\gamma-q\gamma+r(1-\gamma))\overline{DC}=\bar{0}. \tag{4}$$

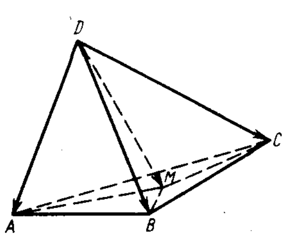


Рис. Р.5.19

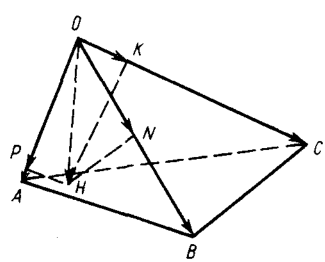


Рис. Р.5.20

Векторы $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ не компланарны и, значит, равенство (4) возможно лишь тогда, когда коэффициенты при $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ равны нулю:

$$\begin{cases} p-p\alpha-q\alpha-r\alpha=0, \\ -p\beta+q-q\beta-r\beta=0, \\ -p\gamma-q\gamma+r-r\gamma=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $\alpha=\frac{p}{p+q+r}$; аналогично из второго и третьего находим $\beta=\frac{q}{p+q+r}$ и $\gamma=\frac{r}{p+q+r}$. Таким образом, $\alpha+\beta+\gamma=1$. ■

5.074. □ Проведем $HP\perp OA$, $HN\perp OB$ и $HK\perp OC$ (рис. Р.5.20). Тогда $\overline{OH}=\overline{OP}+\overline{ON}+\overline{OK}=m\overline{OA}+n\overline{OB}+p\overline{OC}$ (1), где m, n и p определим из равенств $m=\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OA}|}$, $n=\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OB}|}$, $p=\frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OC}|}$. Так как $\Delta OPH\sim\Delta OHA$, то $\frac{OP}{OH}=\frac{OH}{OA}$, откуда $OP=\frac{OH^2}{OA}$ и, значит, $m=\frac{OH^2}{OA^2}$ (2). Для нахождения OH воспользуемся тем, что $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OH=\frac{1}{3}S_{\Delta AOB}\cdot OC$ (поскольку $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=90°$). Отсюда имеем $OH=\frac{S_{\Delta AOB}\cdot c}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}abc}{S_{\Delta ABC}}$, где $S_{\Delta ABC}$ вычислим с помощью формулы Герона:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{((\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2})^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2)((\sqrt{a^2+b^2})^2-(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2})^2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)})(2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}-2c^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}.$$

Следовательно, $OH=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$. Подставив это значение в (2), найдем $m=\frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)a^2}=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. Аналогично находим

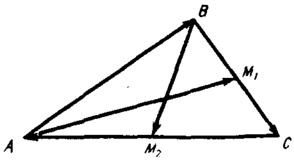


Рис. Р.5.21

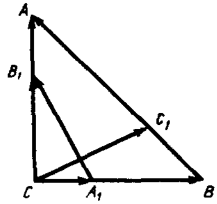


Рис. Р.5.22

$n=\dfrac{OH^2}{OB^2}=\dfrac{a^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ и $p=\dfrac{OH^2}{OC^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. Наконец, подставляем эти выражения в (1) и получаем ответ:

$$\overline{OH}=\frac{b^2c^2\,\overline{OA}+a^2c^2\,\overline{OB}+a^2b^2\,\overline{OC}}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \ ■$$

5.075. $\alpha=-4$, $\beta=2$ или $\alpha=-8$, $\beta=-2$. **5.078.** $-11{,}5$. **5.079.** 5 кв. ед.

5.080. □ Введем следующие обозначения: $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, $AB=\bar{c}$, $\overline{AM_1}=\overline{m_1}$, $\overline{BM_2}=\overline{m_2}$, где AM_1 и BM_2 — медианы $\triangle ABC$ (рис. Р.5.21). Так как $\overline{m_1}=\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{m_2}=\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$, то

$$\overline{m_1}\,\overline{m_2}=\left(\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}\right)\left(\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}\right)=\bar{c}\bar{a}+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\bar{c}\bar{b}+\frac{1}{4}\bar{a}\bar{b}. \qquad (1)$$

Для нахождения $\bar{c}\bar{a}$, $\bar{c}\bar{b}$ и $\bar{a}\bar{b}$ воспользуемся тем, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Имеем

$$\bar{c}+\bar{a}=-\bar{b}\Rightarrow c^2+a^2+2\bar{c}\bar{a}=b^2\Rightarrow \bar{c}\bar{a}=\frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2) \qquad (2)$$

и аналогично

$$\bar{c}\bar{b}=\frac{1}{2}(a^2-c^2-b^2) \quad (3), \quad \bar{a}\bar{b}=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2). \qquad (4)$$

Теперь подставим выражения (2), (3) и (4) в равенство (1):

$$\overline{m}_1\overline{m}_2=\frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2)+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}(a^2-c^2-b^2)+\frac{1}{8}(c^2-a^2-b^2)=$$

$$=\frac{1}{8}(4b^2-4c^2-4a^2+4a^2+2a^2-2c^2-2b^2+c^2-a^2-b^2)=\frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)=0,$$

поскольку, согласно условию, $a^2+b^2=5c^2$. Итак, $\overline{m}_1\perp\overline{m}_2$.

Докажем, что справедливо и обратное утверждение. Действительно, пусть известно, что $\overline{m}_1\perp\overline{m}_2$, т. е. $\overline{m}_1\overline{m}_2=0$. Тогда, проведя вычисление $\overline{m}_1\overline{m}_2$

способом, указанным в первой части доказательства, получим $\overline{m}_1\overline{m}_2=\frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)=0$, откуда $a^2+b^2=5c^2$. ■

5.081. □ Введем следующие обозначения: $CB=CA=a$ (рис. Р.5.22),

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Найдем разложения векторов $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{CC_1}$ по векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Имеем $\overline{A_1B_1}=\overline{CB_1}-\overline{CA_1}$. Но из равенств (1) следует, что $\overline{CA}_1=\frac{n}{m+n}\overline{CB}$, а $CB_1=\frac{m}{m+n}\overline{CA}$. Поэтому

$$\overline{A_1B_1}=\frac{m}{m+n}\overline{CA}-\frac{n}{m+n}\overline{CB}. \qquad (2)$$

Далее находим $\overline{CC_1}=\overline{CB}+\overline{BC_1}$, $\overline{BC_1}=\frac{n}{m+n}\overline{BA}=\frac{n}{m+n}(\overline{CA}-\overline{CB})$. Значит,

$$CC_1=\left(1-\frac{n}{m+n}\right)\overline{CB}+\frac{n}{m+n}\overline{CA}=\frac{m}{m+n}\overline{CB}+\frac{n}{m+n}\overline{CA}. \qquad (3)$$

Теперь, используя разложения (2) и (3), получим

$$\overline{A_1B_1}\cdot\overline{CC_1}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^2\underbrace{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}_{0}-\frac{mn}{m+n}\overline{CB}^2+\frac{mn}{m+n}\overline{CA}^2-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2\underbrace{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}_{0}=$$

$$=\frac{mn}{m+n}(a^2-a^2)=0 \Rightarrow \overline{A_1B_1}\perp\overline{CC_1},$$

$$|\overline{A_1B_1}|^2=|\overline{CC_1}|^2=\left(\frac{m}{m+n}\right)^2a^2+\left(\frac{n}{m+n}\right)^2a^2 \Rightarrow |\overline{A_1B_1}|=|\overline{CC_1}|. \ ■$$

5.082. □ Так как в $\triangle ABC$ (рис. Р.5.23) $AB=BC$, D — середина AC, то $BD\perp AC$. Запишем разложения $\overline{BM}=\overline{BD}+\overline{DM}$, $\overline{AK}=\overline{AD}+\overline{DK}=\overline{AD}+2\overline{DM}$. Следовательно,

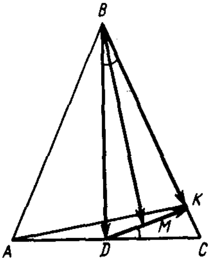


Рис. Р.5.23

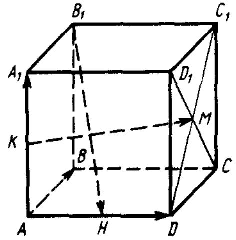


Рис. Р.5.24

$$\overline{BM}\cdot\overline{AK}=\underbrace{\overline{BD}\cdot\overline{AD}}_{0}+\overline{DM}\cdot\overline{AD}+\overline{BD}\cdot 2\overline{DM}+2\overline{DM}^2=$$

$$=\overline{DM}\cdot\overline{AD}+2\overline{BD}\cdot\overline{DM}+2\overline{DM}^2. \qquad (1)$$

Пусть $\angle KDC=\alpha$; тогда $\angle DBK=\angle KDC=\alpha$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и равенство (1) примет вид

$$\begin{aligned}\overline{BM}\cdot\overline{AK}&=|\overline{DM}|\,|\overline{AD}|\cos\alpha-2\,|\overline{BD}|\,|\overline{DM}|\cos(90^\circ-\alpha)+2\overline{DM}^2=\\&=|\overline{DM}|(|\overline{AD}|\cos\alpha-2\,|\overline{BD}|\sin\alpha+2\,|\overline{DM}|).\end{aligned} \qquad (2)$$

Но $|\overline{AD}|\cos\alpha=|\overline{DC}|\cos\alpha=|\overline{DK}|$, $|\overline{BD}|\sin\alpha=|\overline{DK}|$ (рис. Р.5.23), $2\,|\overline{DM}|=|\overline{DK}|$. Подставив найденные значения в (2), получим $\overline{BM}\cdot\overline{AK}=|\overline{DM}|\,(|\overline{DK}|-2\,|\overline{DK}|+|\overline{DK}|)=0$, т. е. $\overline{BM}\perp\overline{AK}$. ■

5.083. Равнобедренный остроугольный. **5.084.** $AB=5$; $S_{\triangle OAB}=5$ кв. ед.; $|\overline{OM}|=2{,}5$.

5.085. □ Так как вектор $\bar{b}\in xOy$, то он имеет координаты $(x;\ y;\ 0)$. Используя условия $|\bar{b}|=2\sqrt{5}$, $\bar{b}\perp\bar{a}$, составим систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\x-2y=0.\end{cases}$ Решив ее, получим два вектора $(4;\ 2;\ 0)$ и $(-4;\ -2;\ 0)$. ■

5.086. $(1/\sqrt{11};\ -3/\sqrt{11};\ 1/\sqrt{11})$ или $(-1/\sqrt{11};\ 3/\sqrt{11};\ -1/\sqrt{11})$.

5.087. □ Выберем единичные векторы $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ и $\bar{c}_0$, направленные вдоль ребер трехгранного угла. Тогда направляющие векторы $\bar{m}$, $\bar{n}$ и $\bar{p}$ биссектрис трех плоских углов трехгранного угла запишутся в виде $\bar{m}=\bar{a}_0+\bar{b}_0$, $\bar{n}=\bar{c}_0+\bar{a}_0$ и $\bar{p}=\bar{b}_0+\bar{c}_0$. По условию, $\bar{m}\perp\bar{n}$, откуда

$$(\bar{a}_0+\bar{b}_0)(\bar{c}_0+\bar{a}_0)=0;\ \bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0+\bar{a}_0^2+\bar{b}_0\bar{a}_0=0;\ \bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{a}_0=-1. \qquad (1)$$

Теперь найдем $\bar{m}\bar{p}=\bar{a}_0\bar{b}_0+\bar{b}_0^2+\bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0=-1+1=0$ (см. (1)) и, значит, $\bar{m}\perp\bar{p}$. Аналогично получим $\bar{n}\bar{p}=0$, т. е. $\bar{n}\perp\bar{p}$. ■

5.088. □ Пусть $\overline{AD}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AA_1}=\bar{c}$ (рис. Р.5.24). Найдем разложения $\overline{B_1H}$ и $\overline{KM}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Имеем $\overline{B_1H}=\overline{B_1A_1}+\overline{A_1A}+\overline{AH}=-\bar{b}-\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{KM}=\overline{KA_1}+\overline{A_1D_1}+\overline{D_1M}$; так как $\overline{D_1M}=\frac{1}{2}\overline{D_1C}=\frac{1}{2}(\bar{b}-\bar{c})$, то $\overline{KM}=\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{a}+\frac{1}{2}(\bar{b}-\bar{c})=\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$. Следовательно, $\overline{B_1H}\cdot\overline{KM}=$ $=\left(\frac{1}{2}\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}\right)\left(\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}\right)=\frac{1}{2}(\bar{a}^2-\bar{b}^2)=0$, поскольку $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$, $\bar{a}\perp\bar{b}|$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|$. Итак, $\overline{B_1H}\perp\overline{KM}$. ■

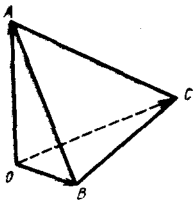


Рис. Р.5.25

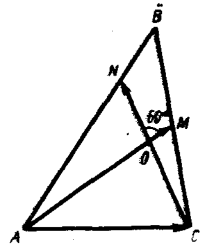


Рис. Р.5.26

5.089. □ Так как $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, то $\overline{OA}\perp\overline{OB}$ и $\overline{OA}\perp\overline{OC}$, а значит, $\overline{OA}\perp(OBC)$, т. е. OA — высота пирамиды $AOBC$ (рис. Р.5.25). Пусть $\angle BOC=\varphi$; тогда $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\,OB\cdot OC\sin\varphi$. Из условия $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=8$ следует, что $|\overline{OB}|\,|\overline{OC}|\cos\varphi=8$ или $2\cdot6\cos\varphi=8$, откуда $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Учитывая, что $0<\varphi<180°$, находим $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким образом, $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$ (кв. ед.) и окончательно получим $V_{AOBC}=\frac{1}{3}\,S_{\Delta OBC}\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{5}\cdot5=\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (куб. ед.). ■

5.090. 1/2; 4.

5.091. □ По условию, AM — медиана ΔABC (рис. Р.5.26) и, значит, $\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$ (1). Далее, $\overline{AC}=\overline{AN}+\overline{NC}=\frac{3}{4}\overline{AB}-\overline{CN}$ (2). Подставив (2) в (1), имеем $\overline{AM}=\frac{7}{8}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{CN}$, откуда $\overline{AB}=\frac{8}{7}\overline{AM}+\frac{4}{7}\overline{CN}$. Следовательно,

$$AB^2=\frac{64}{49}AM^2+\frac{64}{49}\overline{AM}\cdot\overline{CN}+\frac{16}{49}CN^2=$$

$$=\frac{64}{49}\cdot49+\frac{64}{49}\cdot7\cdot7\cos60°+\frac{16}{49}\cdot49=112,$$

т. е. $|\overline{AB}|=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ (см). ■

5.092. $\sqrt{13}$.

5.093. 4 см. ● Разложить $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AK}$ и $\overline{AM}$.

5.094. 7 см. **5.095.** При $x=0$. **5.096.** $\sqrt{43}$ см.

5.097. □ На рис. Р.5.27 изображены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и большой круг вписан-

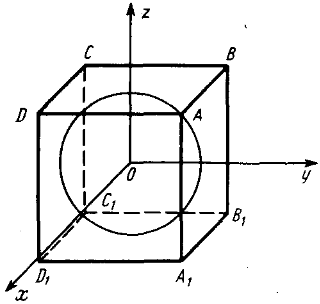


Рис. Р.5.27

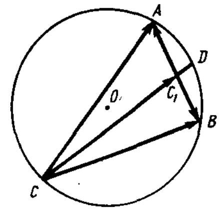


Рис. Р.5.28

ного в него шара. Введем систему координат с началом в центре шара O. Пусть ребро куба равно a; тогда его вершина A имеет координаты $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, радиус вписанного шара равен $\frac{a}{2}$ и уравнение сферы имеет вид $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{4}$. Для произвольной точки $N\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$, лежащей на сфере, имеем $\overline{NA}\left(\frac{a}{2}-x_1; \frac{a}{2}-y_1; \frac{a}{2}-z_1\right)$. Следовательно,

$$NA^2=\frac{3}{4}a^2+(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-a(x_1+y_1+z_1)=a^2-a(x_1+y_1+z_1).$$

Вершина C_1 симметрична вершине A относительно точки O; тогда $C_1\left(-\frac{a}{2};\right.$ $\left.-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\overline{NC_1}\left(-\frac{a}{2}-x_1;\ -\frac{a}{2}-y_1;\ -\frac{a}{2}-z_1\right)$ и $NC_1^2=a^2+a(x_1+y_1+z_1)$.

Теперь находим $NA^2+NC_1^2=2a^2$. Но $NA^2+NC_1^2=NB^2+ND_1^2=NC^2+$ $+NA_1^2=ND^2+NB_1^2=2a^2$, т. е. сумма квадратов расстояний от любой точки N сферы до двух симметричных относительно O вершин куба постоянна и равна $2a^2$. Значит, сумма квадратов расстояний от N до всех вершин куба постоянна и равна $2a^2\cdot 4=8a^2$. ■

5.098. $3a^2$, где a — длина стороны квадрата. **5.099.** $4a^2$, где a — длина стороны квадрата.

5.101. ● Воспользоваться тем, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и пересекаются в одной точке.

5.102. □ Имеем $\overline{CA}=\overline{CC_1}+\overline{C_1A}$, $\overline{CB}=\overline{CC_1}+\overline{C_1B}$ (рис. Р.5.28). Тогда $CA^2=CC_1^2+2\overline{CC_1}\cdot\overline{C_1A}+C_1A^2$, $CB^2=CC_1^2+2\overline{CC_1}\cdot\overline{C_1B}+C_1B^2$. Сложив эти равенства, получим

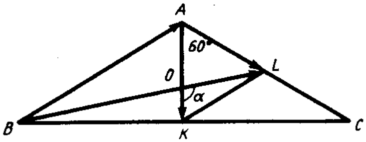


Рис. Р.5.29

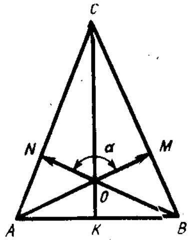


Рис. Р.5.30

$$CA^2+CB^2=2CC_1^2+2\overline{CC_1}\,(\overline{C_1A}+\overline{C_1B})+C_1A^2+C_1B^2=$$
$$=2CC_1^2+2C_1A^2=2\,(CC_1^2+C_1A^2), \qquad (1)$$

так как $|\overline{C_1A}|=|\overline{C_1B}|$ и векторы $\overline{C_1A}$ и $\overline{C_1B}$ противоположно направлены. Далее, согласно свойству пересекающихся хорд, $CC_1\cdot C_1D=C_1A\cdot C_1B=$ $=C_1A^2$. Заменив в равенстве (1) C_1A^2 на $CC_1\cdot C_1D$, находим $CA^2+CB^2=$ $=2CC_1(CC_1+C_1D)=2CC_1\cdot CD$. ■

5.103. $\bar{x}\,(2;\ 3;\ -2)$. **5.104.** $\bar{x}\,(-4;\ -6;\ 12)$.

5.105. □ По условию, $\angle BAC=120°$, $AB=AC$; следовательно, медиана $AK\perp BC$ и $\angle KAC=60°$ (рис. Р.5.29). Искомое скалярное произведение будем искать по формуле

$\overline{AK}\cdot\overline{BL}=|\overline{AK}|\,|\overline{BL}|\cos\alpha$ (1), где $(\widehat{\overline{AK},\overline{BL}})=\alpha$.

В $\triangle ABK$ имеем $\angle ABK=30°$, откуда $AK=\dfrac{1}{2}AB$ (2). Используя разложение $\overline{BL}=\overline{BA}+\overline{AL}$, находим $BL^2=BA^2+2\overline{BA}\cdot\overline{AL}+AL^2$; так как $AL=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}AB$, то

$$BL^2=\frac{5}{4}AB^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AL}=\frac{5}{4}AB^2-2\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cos 120°=\frac{7}{4}AB^2;\quad BL=\frac{\sqrt{7}}{2}AB. \qquad (3)$$

Далее, $\overline{KL}=\overline{OL}-\overline{OK}$, где $KL=\dfrac{1}{2}AB$ (KL — средняя линия в $\triangle ABC$), $OL=\dfrac{1}{3}BL=\dfrac{\sqrt{7}}{6}AB$ (см. (3)), $OK=\dfrac{1}{3}AK=\dfrac{1}{6}AB$ (см. (2)). Следовательно, $KL^2=OL^2-2\overline{OL}\cdot\overline{OK}+OK^2$ или

$$\frac{1}{4}AB^2=\frac{7}{36}AB^2-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}AB\cdot\frac{1}{6}AB\cos\alpha+\frac{1}{36}AB^2,\ \text{откуда}\ \cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{7}}. \qquad (4)$$

Теперь подставим результаты (2), (3) и (4) в (1) и полу...

$$\overline{AK}\cdot\overline{BL}=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}AB\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)=-\frac{1}{8}AB^2. \qquad (5)$$

Остается выразить AB^2 через данное значение S. Имеем $S=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB^2\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$, откуда $AB^2=\frac{4S}{\sqrt{3}}$. Подставив это выражение в (5), окончательно находим $\overline{AK}\cdot\overline{BL}=-\frac{S\sqrt{3}}{6}$. ■

5.106. Пусть $\angle MON=\alpha$, где O — точка пересечения высот AM и BN (рис. Р.5.30); тогда

$$\overline{AM}\cdot\overline{BN}=|\overline{AM}|\,|\overline{BN}|\cos\alpha. \qquad (1)$$

Так как $\angle MON+\angle ACB=180^\circ$, то $\alpha=180^\circ-\angle C=\angle A+\angle B=2\angle B$ и, значит,

$$\cos\alpha=\cos 2B=2\cos^2 B-1. \qquad (2)$$

Согласно условию, $S=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CK$, откуда $CK=\frac{2S}{c}$. Из ΔCKB находим

$$BC=\sqrt{KB^2+CK^2}=\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{4S^2}{c^2}}=\frac{1}{2c}\sqrt{c^4+16S^2} \qquad (3)$$

и, следовательно,

$$\cos B=\frac{KB}{BC}=\frac{c\cdot 2c}{2\sqrt{c^4+16S^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{c^4+16S^2}}. \qquad (4)$$

Теперь выражение (4) подставим в (2):

$$\cos\alpha=2\cdot\frac{c^4}{c^4+16S^2}-1=\frac{c^4-16S^2}{c^4+16S^2}. \qquad (5)$$

Далее, используя равенство $S=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$ и соотношение (3), найдем

$$AM=\frac{2S}{BC}=\frac{4cS}{\sqrt{c^4+16S^2}}. \qquad (6)$$

Наконец, учитывая, что $AM=BN$, и подставляя выражения (6) и (5) в (1), получим ответ:

$$\overline{AM}\cdot\overline{BN}=\left(\frac{4cS}{\sqrt{c^4+16S^2}}\right)^2\frac{c^4-16S^2}{c^4+16S^2}=\frac{16c^2S^2(c^4-16S^2)}{(c^4+16S^2)^2}.$$ ■

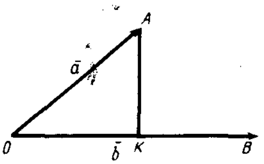


Рис. Р.5.31

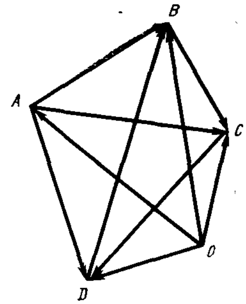


Рис. Р.5.32

5.108. Имеем $OK = \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$ (рис. Р.5.31). Отсюда, используя равенство $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\varphi$, находим $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$. Так как $\bar{b}$ — направляющий вектор оси, на которую проецируется вектор $\bar{a}$, то

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{7(-8)+(-4)6}{\sqrt{64+36}} = \frac{-56-24}{10} = -8, \text{ т. е. } |\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}| = 8. \blacksquare$$

5.109. □ Из произвольной точки O проведем радиусы-векторы $\overline{OA} = \bar{r}_1$, $\overline{OB} = \bar{r}_2$, $\overline{OC} = \bar{r}_3$ и $\overline{OD} = \bar{r}_4$ (рис. Р.5.32). Теперь выразим через них нужные нам векторы: $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{CD} = \bar{r}_4 - \bar{r}_3$, $\overline{AC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1$, $\overline{DB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_4$, $\overline{AD} = \bar{r}_4 - \bar{r}_1$, $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$. Далее находим скалярные произведения

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_4 - \bar{r}_3) = \bar{r}_2\bar{r}_4 - \bar{r}_1\bar{r}_4 - \bar{r}_2\bar{r}_3 + \bar{r}_1\bar{r}_3,$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_4) = \bar{r}_3\bar{r}_2 - \bar{r}_1\bar{r}_2 - \bar{r}_3\bar{r}_4 + \bar{r}_1\bar{r}_4,$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\bar{r}_4 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2) = \bar{r}_4\bar{r}_3 - \bar{r}_1\bar{r}_3 - \bar{r}_4\bar{r}_2 + \bar{r}_1\bar{r}_2$$

и, наконец, их сумму $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$. ■

5.110. □ В тетраэдре $SABC$ проведем $SO \perp (ABC)$ (рис. Р.5.33) и выразим векторы ребер пирамиды через радиусы-векторы $\overline{OA} = \bar{r}_1$, $\overline{OB} = \bar{r}_2$, $\overline{OC} = \bar{r}_3$ и $\overline{OS} = \bar{r}_4$. Имеем $\overline{SA} = \bar{r}_1 - \bar{r}_4$, $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, $\overline{SB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_4$, $\overline{AC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1$, $\overline{SC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_4$, $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. По условию, $SA^2 + BC^2 = SB^2 + AC^2 = SC^2 + AB^2$, откуда, переходя к радиусам-векторам, получим

$$r_1^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_4 + r_4^2 + r_3^2 - 2\bar{r}_3\bar{r}_2 + r_2^2 = r_2^2 - 2\bar{r}_2\bar{r}_4 + r_4^2 + r_3^2 - 2\bar{r}_3\bar{r}_1 + r_1^2 =$$
$$= r_3^2 - 2\bar{r}_3\bar{r}_4 + r_4^2 + r_2^2 - 2\bar{r}_2\bar{r}_1 + r_1^2. \qquad (1)$$

Но $\bar{r}_1\bar{r}_4 = \bar{r}_2\bar{r}_4 = \bar{r}_3\bar{r}_4 = 0$ (2) (согласно условию перпендикулярности векторов), а потому из равенств (1) следует, что $\bar{r}_3\bar{r}_2 = \bar{r}_3\bar{r}_1 = \bar{r}_2\bar{r}_1$ (3). Тогда $\overline{SA} \cdot \overline{BC} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_4)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2) = \bar{r}_1\bar{r}_3 - \bar{r}_4\bar{r}_3 - \bar{r}_1\bar{r}_2 + \bar{r}_4\bar{r}_2 = 0$ (в силу (2) и (3)), т. е. $SA \perp BC$. Аналогично устанавливаем, что $SC \perp AB$, $SB \perp AC$. ■

5.112. 4 : 1. **5.115.** $\overline{M_1M_2}$ (1,5; 1; −0,5), $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{3{,}5}$. **5.116.** −29; 14 кв. ед.

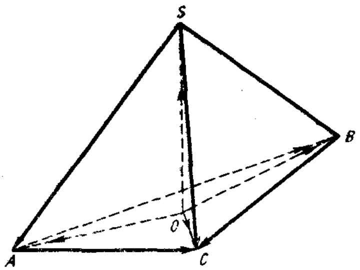


Рис. Р.5.33

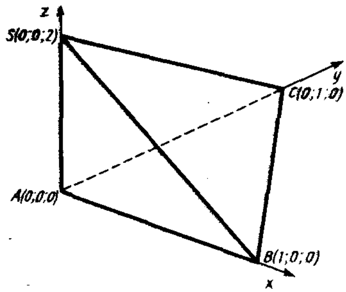


Рис. Р.5.34

5.117. □ Имеем

$(\bar{a}+\bar{b})\|\bar{c} \Rightarrow \bar{c}=m(\bar{a}+\bar{b})=m\bar{a}+m\bar{b}$; $(\bar{b}+\bar{c})\|\bar{a} \Rightarrow \bar{b}+\bar{c}=n\bar{a} \Rightarrow \bar{c}=n\bar{a}-\bar{b}$.

В силу единственности разложения $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заключаем, что $m=n$ и $m=-1$. Значит, $m=n=-1$, т. е. $\bar{c}=-\bar{a}-\bar{b}$. Теперь находим $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}-\bar{a}-\bar{b}=\bar{0}$. ■

5.118. $2(\bar{a}-\bar{b})$.

5.119. $-1{,}5$.● Из условия $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$ следует, что эти векторы образуют правильный треугольник и $(\widehat{\bar{e}_1;\ \bar{e}_2})=(\widehat{\bar{e}_2;\ \bar{e}_3})=(\widehat{\bar{e}_3;\ \bar{e}_1})=180°-60°=120°$.

5.121. $(a+b):c$, $(b+c):a$, $(c+a):b$. **5.122.** 6. **5.123.** $\pm\sqrt{6}$. **5.124.** 12,5 куб. ед. **5.125.** 5 кв. ед. **5.126.** $\sqrt{442/19}$; $\angle ABC$ — тупой. **5.127.** 3 : 1.

5.128. □ По условию, вершина A (0; 0; 0) совпадает с началом координат, а вершины B (1; 0; 0), C (0; 1; 0) и S (0; 0; 2) лежат соответственно на осях Ox, Oy и Oz (рис. Р.5.34). Так как искомая точка M должна лежать на оси Oz, то она имеет координаты $(0;\ 0;\ z_1)$. Далее, пусть $N\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — вторая искомая точка; тогда вектор $\overline{MN}$ имеет координаты $(x_2;\ y_2;\ z_2-z_1)$, а, с другой стороны, $\overline{MN}\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right)$. Следовательно, $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=\frac{1}{3}$, $z_2-z_1=0$, т. е. $z_2=z_1$ и $N\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ z_1\right)$. Остается найти значение z_1, что мы и сделаем двумя различными способами.

I способ. Общее уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$. Поскольку $B\in(SBC)$, координаты точки B удовлетворяют этому уравнению, откуда $a+d=0$ (1). Аналогично, $C\in(SBC) \Rightarrow b+d=0$ (2) и $S\in(SBC) \Rightarrow$ $\Rightarrow 2c+d=0$ (3). Из системы (1), (2) и (3) находим $a=b=2c=-d$ и уравнение плоскости SBC примет вид

$$-dx-dy-\frac{d}{2}\,z+d=0 \text{ или } x+y+\frac{1}{2}\,z-1=0.$$

Наконец, $N\in(SBC)$ и для нахождения z_1 получаем уравнение $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,z_1-1=0$, откуда $z_1=\frac{2}{3}$. Итак, $M\left(0;\ 0;\ \frac{2}{3}\right)$, $N\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

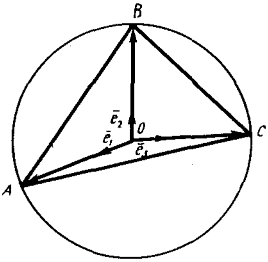


Рис. Р.5.35

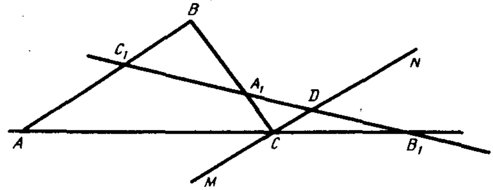


Рис. Р.5.36

II способ. Пусть $\bar{n}$ — нормальный вектор плоскости SBC, т. е. $\bar{n}$ $(a;\ b;\ c)$. Найдем $\overline{BC}$ $(-1;\ 1;\ 0)$. Так как $\overline{BC}\in(SBC)$ и $\bar{n}\perp\overline{BC}$, то $\bar{n}\cdot\overline{BC}=0$ или $-a+b+0=0 \Rightarrow a=b$; аналогично, $\bar{n}\perp\overline{SB}$, где $\overline{SB}$ $(1;\ 0;\ -2)$, и, значит, $\bar{n}\cdot\overline{SB}=0$ или $a+0-2c=0 \Rightarrow a=2c$. Таким образом, $a=b=2c$ (1). Составим теперь уравнение плоскости SBC как уравнение плоскости, имеющей нормальный вектор $\bar{n}$ $(a;\ b;\ c)$ и проходящей через данную точку S $(0;\ 0;\ 2)$: $ax+by+c(z-2)=0$. Далее, используя равенства (1), получим

$2cx+2cy+cz-2c=0$ или $2x+2y+z-2=0$.

Наконец, учитывая, что $N\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ z_1\right)\in(SBC)$, имеем $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+z_1-2=0$, откуда $z_1=\frac{2}{3}$ и получаем тот же ответ. ■

5.129. □ Пусть O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$ (рис. Р.5.35). Тогда в силу свойства центральных и вписанных углов имеем $\angle AOB=2\angle C$, $\angle BOC=2\angle A$, $\angle AOC=2\angle B$. Построим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$, направленные вдоль векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$; их сумма дает вектор $\bar{d}$, т. е. $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{d}$. Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2+2\bar{e}_1\bar{e}_2+2\bar{e}_1\bar{e}_3+2\bar{e}_2\bar{e}_3=d^2$$

или

$$3+2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=d^2.$$

Так как $d^2\geqslant 0$, то $3+2(\cos 2A+\cos B+\cos 2C)\geqslant 0$, откуда $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -3/2$. ■

5.130. □ Введем следующие обозначения (рис. Р.5.36):

$$\frac{AC_1}{C_1B}=m,\ \frac{BA_1}{A_1C}=n,\ \frac{CB_1}{B_1A}=p \qquad (1)$$

или $\frac{AB-C_1B}{C_1B}=m,\ \frac{BC-A_1C}{A_1C}=n,\ \frac{CA-B_1A}{B_1A}=p$, откуда

$$\frac{AB}{C_1B}=m+1,\ \frac{BC}{A_1C}=n+1,\ \frac{CA}{B_1A}=p+1. \qquad (2)$$

Найдем разложение вектора $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Имеем $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1C}+\overline{CB_1}$. Но из (2) следует, что $\overline{A_1C}=\frac{1}{n+1}\overline{BC}$, а из (1) — что $\overline{CB_1}=p\overline{B_1A}=p(\overline{B_1C}+\overline{CA})$; поэтому $\overline{CB_1}-p\overline{B_1C}=p(\overline{CB}+\overline{BA})$ или $(p+1)\overline{CB_1}=-p(\overline{AB}+\overline{BC})$, откуда

$$\overline{CB_1}=-\frac{p}{p+1}(\overline{AB}+\overline{BC}). \tag{3}$$

Тогда получим

$$\overline{AB}+\overline{A_1B_1}=\overline{AB}+\frac{1}{n+1}\overline{BC}-\frac{p}{p+1}(\overline{AB}+\overline{BC})=\frac{1}{p+1}\overline{AB}+\frac{1-np}{(n+1)(p+1)}\overline{BC}. \tag{4}$$

Аналогично, используя равенства (1), (2), (3), находим

$$\overline{BC}+\overline{B_1C_1}=\overline{BC}+\overline{B_1A}+\overline{AC_1}=\overline{BC}+\frac{1}{p}\overline{CB_1}+m\overline{C_1B}=$$

$$=\overline{BC}-\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+1}(\overline{AB}+\overline{BC})+m\cdot\frac{1}{m+1}\overline{AB}=\frac{mp-1}{(m+1)(p+1)}\overline{AB}+\frac{p}{p+1}\overline{BC}. \tag{5}$$

Чтобы доказать коллинеарность векторов $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}$ и $\overline{BC}+\overline{B_1C_1}$, нужно установить равенство отношений коэффициентов при $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ в разложениях (4) и (5). Для этого проведем прямую $MN\parallel AB$, которая пересечет C_1B_1 в точке D. Тогда $\triangle C_1A_1B\sim\triangle A_1CD$, а $\triangle AC_1B_1\sim\triangle CDB_1$, откуда

$$\frac{C_1B}{CD}=\frac{C_1A_1}{A_1D}=\frac{BA_1}{A_1C}=n, \quad (6) \qquad \frac{AC_1}{CD}=\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{C_1B_1}{DB_1}=-\frac{1}{p}, \tag{7}$$

поскольку из (1) следует, что $\frac{AB_1}{CB_1}=-1:\frac{CB_1}{B_1A}=-\frac{1}{p}$. Находим отношение $\frac{AC_1}{CD}:\frac{C_1B}{CD}=\frac{AC_1}{C_1B}=m$, откуда $\frac{AC_1}{CD}=m\frac{C_1B}{CD}=mn=-\frac{1}{p}$ (см. (7)) и, значит,

$$mnp=-1. \tag{8}$$

Теперь найдем отношения коэффициентов при $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ в разложениях (4) и (5):

$$\frac{1}{p+1}:\frac{mp-1}{(m+1)(p+1)}=\frac{m+1}{mp-1}, \quad (9) \qquad \frac{1-np}{(n+1)(p+1)}:\frac{p}{p+1}=\frac{1-np}{(n+1)p}. \tag{10}$$

Из равенства (8) следует, что $n=-\frac{1}{mp}$; подставив это значение в отношение (10), получим, что указанное отношение равно $\frac{m+1}{mp-1}$, т. е. оно совпадает с (9). Тем самым доказано, что $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}\parallel\overline{BC}+\overline{B_1C_1}$.

Аналогично доказывается, что $\overline{CA}+\overline{C_1A_1}\parallel\overline{AB}+\overline{A_1B_1}$. ■

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Вариант I. □ **1.** Имеем

$x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$, $x\sqrt{x}-1=\sqrt{x^3}-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$.

Следовательно,

$$A=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}+2\sqrt{x}=$$

$$=(\sqrt{x}-1)^2+2\sqrt{x}=x+1.$$

Полагая $x=7$, найдем $A=8$.

2. Используя формулу тангенса разности двух углов и то, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, получим

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{4}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=7.$$

3. Так как $4^{x-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^{2x}$, то уравнение преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{4}(2^x)^2-\frac{3}{4}\cdot 2^x-1=0\Rightarrow(2^x+1)(2^x-4)=0\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=2.$$

4. Имеем

$$f'(x)=6\sqrt{2}\sin^2 x\cos x;\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=3.$$

5. По условию, $AB=BC$, $AD\perp BC$, $AC=30$, $AD=24$ (рис. Р.П.1). Пусть $\angle BCA=\alpha$; тогда в ΔADC имеем $\sin\alpha=\frac{AD}{AC}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$, откуда $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Наконец, из ΔBEC (где $BE\perp AC$) находим $BC=\frac{EC}{\cos\alpha}=\frac{15}{3/5}=25$.

6. Сначала найдем

$$f'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}.$$

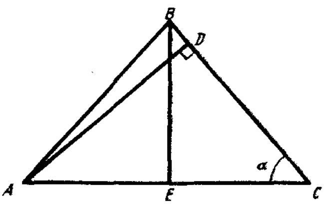


Рис. Р.П.1

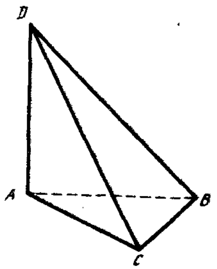


Рис. Р.П.2

Тогда данное уравнение запишется в виде

$$\sqrt{x^2-6x+10}+\frac{4(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+10}}=0 \text{ или } x^2-2x-2=0,$$

да следует, что $x_1+x_2=2$ (второй коэффициент в приведенном квадратном уравнении).

7. Имеем

$$\cos^2\frac{\pi x}{2}=1 \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{2}=\pm 1 \Rightarrow \frac{\pi x}{2}=\pi k \Rightarrow x=2k.$$

Теперь найдем корни, принадлежащие отрезку $[\pi, 3\pi]$; неравенство $\pi \leqslant 2k \leqslant 3\pi$ выполняется для значений $k=2$, $k=3$ и $k=4$, которым соответствуют корни $x=4$, $x=6$ и $x=8$. Итак, искомое произведение равно 192.

8. Перейдем от данной системы неравенств к равносильной ей:

$$\begin{cases}\log_{1/2}(2x-3)>-3,\\ x^2-4x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<2x-3<2^3,\\ x(x-4)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1{,}5<x<5{,}5,\\ x<0 \text{ или } x>4\end{cases} \Rightarrow 4<x<5{,}5.$$

Искомым целым числом, удовлетворяющим этому неравенству, является 5.

9. По условию, $AD\perp AB$, $AD\perp AC$, $AD=5\sqrt{2}$, $\angle DCA=\angle DBA=45°$, $\angle CDB=60°$ (рис. Р.П.2). Прямоугольные треугольники DAC и DAB — равнобедренные (один из острых углов равен 45°). Тогда $CD=BD=\sqrt{2\cdot(5\sqrt{2})^2}=10$. Теперь, применяя теорему косинусов к равнобедренному треугольнику CDB, находим

$BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cos\angle CDB=$
$=2\cdot 100-2\cdot 100\cos 60°=100$, т. е. $BC=10$.

10. Воспользуемся тем, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$\bar{a}\bar{b}=0 \Rightarrow x\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot 0=0 \Rightarrow x=2.$

Значит, вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(2;\ -1;\ 2)$, а его модуль $|\bar{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$. ■

Вариант II. □ 1. Находим

$$(4^{-0,25}-2^{0,5})(4^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{1/3})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-1+\sqrt[6]{\frac{4\cdot 2}{8}}-\sqrt[6]{8\cdot 4\cdot 2}=-\frac{1}{2}+1-2=-\frac{3}{2}.$$

2. Сложив уравнения $x+y=4$, $y+z=8$, $x+z=6$, получим $2(x+y+z)=18$ или $x+y+z=9$. Отсюда находим $x=9-(y+z)=1$, $y=9-(x+z)=3$, $z=9-(x+y)=5$. Искомое выражение есть $x-y+2z=1-3+10=8$.

3. Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 2^{\frac{1}{x}}>2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ \frac{1}{x}>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ \frac{x-1}{x}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ 0<x<1\end{cases} \Rightarrow 0<x<1.$$

Преобразуя данное уравнение, получим

$$\lg 2^{\frac{1}{2x}}=\lg\left(2^{\frac{1}{x}}-2\right)\Rightarrow 2^{\frac{1}{2x}}=2^{\frac{1}{x}}-2\Rightarrow\left(2^{\frac{1}{2x}}\right)^2-2^{\frac{1}{2x}}-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2^{\frac{1}{2x}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{2x}}-2\right)=0\Rightarrow 2^{\frac{1}{2x}}=2\Rightarrow\frac{1}{2x}=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

4. Имеем

$$\sin x+\cos 2x=0\Rightarrow \sin x+1-2\sin^2 x=0\Rightarrow 2(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Далее находим:

1) $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; из условия $-\pi\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant 3\pi$ следует, что $-\frac{3\pi}{2}\leqslant 2\pi n\leqslant\frac{5\pi}{2}$, т. е. $-\frac{3}{4}\leqslant n\leqslant\frac{5}{4}$; последнее неравенство выполняется при $n=0$ и $n=1$.

2) $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; отбираем корни, удовлетворяющие условию

$-\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$; $x=-\frac{5\pi}{6}$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{11\pi}{6}$.

Итак, отрезку $[-\pi, 3\pi]$ принадлежат шесть корней данного уравнения.

5. Находим

$$25\sin^2\alpha\cos\alpha=25\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=25\cdot\frac{9}{16\left(1+\frac{9}{16}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=7{,}2.$$

6. Здесь $x\geqslant 0$. Решаем данное неравенство:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leqslant 6\Rightarrow(\sqrt[4]{x})^2+\sqrt[4]{x}-6\leqslant 0\Rightarrow(\sqrt[4]{x}+3)(\sqrt[4]{x}-2)\leqslant 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\leqslant\sqrt[4]{x}\leqslant 2\Rightarrow 0\leqslant\sqrt[4]{x}\leqslant 2\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 16.$$

Итак, искомая длина равна 16.

7. График функции $f(x)=x^3+3x^2+5x=x(x^2+3x+5)$ пересекает ось Ox только один раз, поскольку квадратный трехчлен x^2+3x+5 не имеет действительных корней.

8. Пусть a_1 — первый член прогрессии, а d — ее разность. Тогда получим систему

$$\begin{cases}a_1+6d+a_1+10d=10,\\ a_1+4d+a_1+9d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+16d=10,\\ 2a_1+13d=1\end{cases}\Rightarrow d=3,\ a_1=-19.$$

Следовательно,

$$S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})\,20}{2}=10(2a_1+19d)=190.$$

9. Находим

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}};\ f'(1)=-\frac{1}{2}.$$

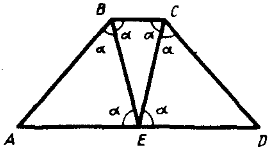


Рис. Р.П.3

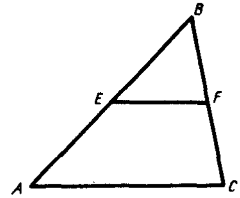


Рис. Р.П.4

10. По условию, в трапеции $ABCD$ имеем $AB=CD$, $AB=3BC$, BE и CE — биссектрисы углов ABC и BCD, $E \in AD$ (рис. Р.П.3); требуется найти $S_{ABCD} : S_{\triangle BCE}$.

Пусть $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=\alpha$, $BC=b$; тогда $CD=AB=3b$. Заметим, что $\angle CBE=\angle BEA=\alpha$ и $\angle BCE=\angle CED=\alpha$ как накрест лежащие углы; значит, треугольники ABE и CDE — равнобедренные и равные. Отсюда следует, что $CD=DE=AB=AE=3b$, $BE=CE=d$. Так как $\triangle BCE \sim \triangle CED$, то $\frac{b}{d}=\frac{d}{3b}$, откуда $d^2=3b^2$. Теперь найдем площади $\triangle BCE$ и $\triangle CED$:

$$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BE\cdot CE\sin(180^\circ-2\alpha)=\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha=\frac{3}{2}b^2\sin 2\alpha,$$

$$S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}ED\cdot CD\sin(180^\circ-2\alpha)=\frac{9}{2}b^2\sin 2\alpha.$$

Учитывая, что $S_{ABCD}=2S_{\triangle CED}+S_{\triangle BCE}$, находим искомое отношение:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{2S_{\triangle CED}}{S_{\triangle BCE}}+1=\frac{9b^2\sin 2\alpha}{\frac{3}{2}b^2\sin 2\alpha}+1=7. \blacksquare$$

Вариант III.□ **1.** Здесь $3x+1\geqslant 0$, $x-1\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 1$. Пусть $\sqrt{3x+1}=u$, $\sqrt{x-1}=v$, где $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} u-v=2, \\ u^2-3v^2=4, \end{cases}$ из которой получим $4v-2v^2=0$, т. е. $v_1=0$, $v_2=2$. Итак, $x_1=1$, $x_2=5$.

2. По условию, $AC=15$ см, $EF \parallel AC$, $S_{AEFC}=0{,}75S_{\triangle ABC}$ (рис. Р.П.4). Тогда $S_{\triangle EBF}=0{,}25S_{\triangle ABC}$. Так как $\triangle EBF \sim \triangle ABC$, то $\frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{EF}{AC}\right)^2$ или $0{,}25=\left(\frac{EF}{AC}\right)^2$, т. е. $EF=0{,}5AC$. Итак, $EF=7{,}5$ см.

3. Имеем

$$A=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Так как $\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=0{,}8$ и $0^\circ<\alpha<90^\circ$, то $A=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$.

4. Учитывая, что $x\geqslant 0$, получим

$$\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg x=9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\lg 100+\lg x)^2-(\lg 10+\lg x)^2+\lg x=9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(2+\lg x)^2-(1+\lg x)^2+\lg x=9\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=100.$$

5. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{3+2x}{4-x}\geqslant 0\Rightarrow\frac{2(x+1{,}5)}{x-4}\leqslant 0\Rightarrow -1{,}5\leqslant x<4.$$

Итак, наименьшим отрицательным решением является $x=-1{,}5$.

6. Здесь $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\neq 0$, т. е. $\frac{3\pi}{2}+x\neq\pi n$, откуда $x\neq-\frac{3\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}+\pi l$. Преобразуем данное уравнение:

$$1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+\operatorname{tg}^2 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}=2\cos^2 x-1\Rightarrow 2(\cos^2 x)^2-\cos^2 x-1=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\cos^2 x-1)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow\cos x=\pm 1\Rightarrow x=\pi k.$$

Условию $|x|\leqslant\pi$ удовлетворяют три корня.

7. Имеем

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}-\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}=0\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-7=7x-3\Rightarrow x=1.$$

8. Пусть x и y $(x>y)$ — искомые числа. Тогда, по условию, $\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{13}{12}$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{13}{6}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-\frac{13}{6}\sqrt{\frac{x}{y}}+1=0\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{2}{3}\right)=0.$$

Тогда $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{2}{3}$, что не удовлетворяет требованию $x>y$; $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$, откуда $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$.

9. Находим

$$A=81\cos^2\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=81\sin^2 6\alpha=81\cdot 4\sin^2 3\alpha\cos^2 3\alpha=$$

$$=81\cdot 4(1-\cos^2 3\alpha)\cos^2 3\alpha,$$

откуда при $\cos 3\alpha=\frac{2}{3}$ получим $A=81\cdot 4\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}=80.$

10. Данная функция преобразуется следующим образом:

$$f(x)=\sin^2 2x+0{,}5\cos 4x+2\sin^2 x+\cos 2x=$$
$$=\sin^2 2x+(0{,}5-\sin^2 2x)+(1-\cos 2x)+\cos 2x=1{,}5=\text{const}.\ \blacksquare$$

Вариант IV. □ 1. Преобразуем выражения B и C:

$$B=\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 6;\ C=\frac{2}{\log_2 10}=2\lg 2=\lg 4.$$

Тогда получим

$$A=2^B-10^C=2^{\log_2 6}-10^{\lg 4}=6-4=2.$$

2. Имеем

$$10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\cdot 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}\Rightarrow\frac{10x}{2^{2/3}}=\frac{2^{5/3}\cdot 2^{-4/3}}{2}\Rightarrow 10x=1\Rightarrow x=0{,}1.$$

3. Здесь $x\geqslant 2$. Имеем

$$2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}\Rightarrow 2(\sqrt[4]{x-2})^2-\sqrt[4]{x-2}-15=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\sqrt[4]{x-2}-3)(\sqrt[4]{x-2}+2{,}5)=0\Rightarrow\sqrt[4]{x-2}=3\Rightarrow x-2=81\Rightarrow x=83.$$

4. Учитывая, что $x\geqslant 0$, получим

$$2x-5\sqrt{x}+2\leqslant 0\Rightarrow 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+2\leqslant 0\Rightarrow 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-0{,}5)\leqslant 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}5\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2\Rightarrow 0{,}25\leqslant x\leqslant 4.$$

Искомым наибольшим значением x является $x=4$.

5. По условию, в трапеции $ABCD$ имеем $AB=CD$, $CE\perp AD$, $CE=16$, $AC=20$ (рис. Р.П.5). Пусть $\angle CAD=\beta$; тогда из ΔAEC находим $\sin\beta=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3}{5}$. Далее, ΔAOD — равнобедренный, причем $\angle AOD=180°-2\beta$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AOD=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20\sin 2\beta=$$
$$=400\sin\beta\cos\beta=192\ \text{(кв. ед.)}.$$

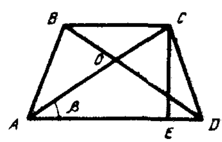


Рис. Р.П.5

6. Имеем

$$\sin(90°+2x)+\sin x=0\Rightarrow\cos 2x+\sin x=0\Rightarrow 1-2\sin^2 x+\sin x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Решив уравнения $\sin x=1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$ и учитывая, что $0°<x<270°$, получим ответ: $x_1=90°$, $x_2=210°$.

7. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$A=\frac{49}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{49}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{49\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=49\cdot\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Подставив значения $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{9}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{8}{9}$, получим $A=49\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{8}{9}\left(\frac{9}{7}\right)^2=32$.

8. Пусть t — время работы второго станка (в часах), а x и $x-5$ — количество деталей, которые обрабатывали в час соответственно на первом и втором станках. Тогда, согласно условию, получим систему уравнений

$$\begin{cases}(t-1{,}5)x=150,\\ t(x-5)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0{,}3x,\\ 0{,}3x^2-1{,}5x-150=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x-500=0\Rightarrow x_1=-20 \text{ (не годится)},\ x_2=25.$$

Итак, на первом станке в час обрабатывали 25 деталей, а на втором — 20 деталей.

9. Уравнение имеет смысл, если $\sqrt{3x-2}\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 2/3$. Выполним преобразования:

$$x^2\cdot 5^{\sqrt{3x-2}}+5^{2+x}=5^{\sqrt{3x-2}+2}+x^2\cdot 5^x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{\sqrt{3x-2}}(x^2-25)=5^x(x^2-25)\Rightarrow(5^{\sqrt{3x-2}}-5^x)(x^2-25)=0.$$

Далее имеем:

1) $5^{\sqrt{3x-2}}=5^x\Rightarrow\sqrt{3x-2}=x\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=2;$

2) $x^2-25=0;\ x_3=-5$ (не годится), $x_4=5$.

Ответ: $x=1$, $x=2$, $x=5$.

10. Здесь $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 1$. Имеем

$$\frac{6-x}{1-x^2}-\frac{x+3}{x(1-x)}=\frac{x+5}{x(1+x)}\Rightarrow\frac{6-x}{(1-x)(1+x)}-\frac{x+3}{x(1-x)}=\frac{x+5}{x(1+x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6x-x^2-x-3-x^2-3x-x-5+x^2-5x}{x(1-x)(1+x)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2+6x-8}{x(1-x)(1+x)}=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4.\ \blacksquare$$

Вариант V. 1. 1. **2.** 4,3. **3.** 3. **4.** 4,1. **5.** 6. **6.** 0. **7.** 30°. **8.** 42 см. **9.** 3,53. **10.** −1,5. **Вариант VI. 1.** 4. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 7. **6.** 41. **7.** 3. **8.** 64. **9.** 4. **10.** 1. **Вариант VII. 1.** 2. **2.** 1, 2 и 4. **3.** 2. **4.** 5. **5.** 6 см^3. **6.** 8. **7.** 0,5. **8.** 4 и 36. **9.** 8. **10.** 0 и 5. **Вариант VIII. 1.** 40. **2.** −25. **3.** 10. **4.** 1. **5.** 0,28. **6.** 90°. **7.** 72 см^2. **8.** 2,3 см. **9.** 13 и 13. **10.** 6. **Вариант IX. 1.** 1. **2.** 11. **3.** 0; 4. **4.** 48. **5.** 0,8. **6.** 4. **7.** 31,5. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 18. **Вариант X. 1.** 2; 0,25. **2.** 225°; 315°. **3.** 4. **4.** 0,3. **5.** 168 см^2. **6.** 3 км/ч. **7.** 1. **8.** 0,75. **9.** 6 и 0. **10.** 2,5. **Вариант XI. 1.** 2. **2.** 9. **3.** 10. **4.** 8 см. **5.** 0,8. **6.** 0. **7.** 103. **8.** 4 см. **9.** 6. **10.** 16 кв. ед. **Вариант XII. 1.** −9. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 11. **5.** −1. **6.** 7. **7.** 4. **8.** 0. **9.** $y_{\min}=-1/e$ при $x=1/e$. **10.** 2. **Вариант**

XIII. **1.** 6. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 5. **5.** 0. **6.** −1. **7.** 5. **8.** Один раз. **9.** 20. **10.** 2,25. **Вариант XIV.** **1.** $(2x+1)^2$. **2.** $2\operatorname{tg}2\alpha$. **3.** 1. **4.** −10; 3. **5.** 9. **6.** 2. **7.** 10. **8.** 4. **9.** −3. **10.** 1. **Вариант XV.** **1.** 3. **2.** 1,6. **3.** 5. **4.** 12 и 24. **5.** −1; 1. **6.** 4. **7.** 12. **8.** 0,5. **9.** 8. **10.** 120°; 240°. **Вариант XVI.** **1.** −4; −3; 4. **2.** 25. **3.** 5. **4.** −58. **5.** 2; 3. **6.** 2,25. **7.** 9,375 кв. ед. **8.** 12. **9.** 150°; 210°. **10.** 40 л. **Вариант XVII.** **1.** 4. **2.** 3/4. **3.** 5. **4.** 60 кв. ед. **5.** 0,8. **6.** 10. **7.** 6. **8.** 6. **9.** 12 куб. ед. **10.** 8. **Вариант XVIII.** **1.** 5. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 66. **6.** 1. **7.** 12 куб. ед. **8.** 13. **9.** 2. **10.** 3. **Вариант XIX.** **1.** 4. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 7. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 6 кв. ед. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3. **Вариант XX.** **1.** 7. **2.** 8 кв. ед. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 0,6. **6.** 2. **7.** 51,6. **8.** 3. **9.** 16. **10.** 120°. **Вариант XXI.** **1.** 4. **2.** 48 кв. ед. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 7. **7.** 10. **8.** 4. **9.** 5. **10.** 2. **Вариант XXII.** 1. $(2\log_2 5+1)^2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 0,36. **7.** 0,8. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 2. **Вариант XXIII.** **1.** 4. **2.** 5. **3.** 9 кв. ед. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 6. **10.** 4. **Вариант XXIV.** **1.** 14. **2.** 0,5. **3.** 5. **4.** 7. **5.** 4. **6.** 250 куб. ед. **7.** 63. **8.** 0,2. **9.** 5. **10.** 20. **Вариант XXV.** **1.** 1. **2.** 16. **3.** 6. **4.** 0,28. **5.** (9; −1). **6.** 6. **7.** 3. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 4 кв. ед. **Вариант XXVI.** **1.** −2; −1. **2.** 0,5; 0,6. **3.** 0,75. **4.** 18 кв. ед. **5.** 4. **6.** 3 и 0. **7.** 16. **8.** −2; −1. **9.** 120°; 240°. **10.** 12. **Вариант XXVII.** **1.** 135°; 225°. **2.** 24 см^2. **3.** 2 и 22134. **4.** −5 и 3. **5.** −5. **6.** 15. **7.** −1,5. **8.** 1,75. **9.** 2. **10.** 4. **Вариант XXVIII.** **1.** 20. **2.** −0,4. **3.** 1. **4.** −1, 2. **5.** 4. **6.** −6 и −6. **7.** −0,6. **8.** 0,4 и 0,4. **9.** 5 и 6. **10.** 39 и −39. **Вариант XXIX.** **1.** 1000. **2.** 0. **3.** 4. **4.** 25. **5.** 1; 11; 21. **6.** 10. **7.** −2; −1. **8.** 4 см. **9.** −45°; 0°; 45°. **10.** 8 см^3. **Вариант XXX.** **1.** 6; 2. **2.** (2; 3; −3). **3.** 2. **4.** −52,5°; 7,5°; 37,5°. **5.** 10; 11; 13; 14. **6.** 6 см^3. 7. 30 и 35 км/ч. **8.** 0. **9.** 20,25. **10.** Первое.

ВАРИАНТЫ БИЛЕТОВ

ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

Вариант I. □ **1.** Так как

$$\sqrt{17^3}-\sqrt{x^3}=(\sqrt{17}-\sqrt{x})(17+\sqrt{17x}+x),\ (\sqrt{17}+\sqrt{x})^2=17+2\sqrt{17x}+x,$$

$$4^{\log_2 x-0,5\log_2 17}=2^{2\log_2 x-\log_2 17}=2^{\log_2 (x^2/17)}=\frac{x^2}{17},$$

то выражение для $f(x)$ упростится следующим образом:

$$f(x)=\left(17+2\sqrt{17x}+x-\frac{(\sqrt{17}-\sqrt{x})(17+\sqrt{17x}+x)}{\sqrt{17}-\sqrt{x}}\right)^2\frac{x^2}{17}=(\sqrt{17x})^2\frac{x^2}{17}=x^3.$$

Значит, $f'(x)=3x^2$.

2. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4^x+1-2^{3x}-2\cdot 4^x}{2^x+2}=\dfrac{y}{2(2^x+2)},\\ y^2=4(1-2^{3x})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2(1-2^{3x}),\\ y^2=4(1-2^{3x})\end{cases}\Rightarrow 4(1-2^{3x})^2=4(1-2^{3x}).$$

Уравнение $1-2^{3x}=0$ имеет решение $x=0$, а уравнение $1-2^{3x}=1$ не имеет решений. Итак, $x=0$, $y=0$.

3. Пусть x и y — искомые числа; тогда $x+y=10$, а выражение $2x^2+3y^2$ должно принимать наименьшее значение. Имеем $f(x)=2x^2+3(10-x)^2=2x^2+$ $+3(100-20x+x^2)=5(x^2-12x+60)$, $f'(x)=5(2x-12)=10(x-6)$. Очевидно, что $f'(x)=0$ при $x=6$; если $0<x<6$, то $f'(x)<0$, а если $6<x<10$, то $f'(x)>0$. Итак, при $x=6$ функция $f(x)$ имеет минимум. Отсюда следует, что искомыми двумя слагаемыми являются числа 6 и 4.

4. Учитывая, что $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\sin x$, преобразуем данное уравнение:

$$0,5\cdot 2\cos^2 x\sin x-\sin^3 x=2\sin x\Rightarrow \sin x(\cos^2 x-\sin^2 x-2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin x(\cos 2x-2)=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=\pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Теперь отберем корни, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi(x+1)\geqslant 1$. Так как $\pi>1$, то $x+1\geqslant\pi$, т. е. $\geqslant\pi-1$. Следовательно, $\pi k\geqslant\pi-1$ или $k\geqslant 1-\dfrac{1}{\pi}$. Этому условию удовлетворяют значения $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Итак, получаем ответ: $x=\pi k$, $k\in\mathbb{N}$.

5. По условию, $ABCD$ — ромб, $S_{\text{круга}}=S$, $\angle BAD=\alpha$ (рис. Р.П.6). Проведем $CE\perp AD$. Введем обозначения: $AC=d_1$, $BD=d_2$, r — радиус вписанного круга, $CE=2r$, $AB=BC=CD=AD=a$. Из равенства $S=\pi r^2$ находим $r^2=\dfrac{S}{\pi}$. В ΔCED имеем $\angle CDE=\alpha$, $a=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$, откуда $a^2=\dfrac{4r^2}{\sin^2\alpha}=\dfrac{4S}{\pi\sin^2\alpha}$. Искомые зна-

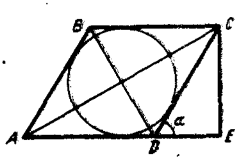


Рис. Р.П.6

чения d_1 и d_2 найдем с помощью теоремы косинусов, примененной соответственно к $\triangle DAC$ и $\triangle BAD$:

$$d_1^2 = AC^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(180° - \alpha) = 2a^2(1+\cos\alpha) =$$
$$= 2\cdot\frac{4S}{4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4S}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$d_2^2 = BD^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1-\cos\alpha) = 2\cdot\frac{4S}{4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4S}{\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, $d_1 = \dfrac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$, $d_2 = \dfrac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. ■

Вариант II. □ 1. Заметим, что

$$x+\sqrt{a} = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{a})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^2a}+\sqrt[3]{a}),$$
$$x-\sqrt{a} = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^2a}+\sqrt[3]{a}),$$
$$\sqrt[3]{xa^2}-\sqrt[3]{x^4}\sqrt{a} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{a}\,(\sqrt{a}-x).$$

Тогда заданное выражение преобразуется так:

$$(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^2a}+\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^2a}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{a})^3 = (-3\sqrt[6]{x^2a})^3 = -27x\sqrt{a}.$$

2. Используя свойства логарифмов, находим $\lg x^5 = 5\lg x$, $\lg\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = -\dfrac{1}{4}\lg x$. Область определения функции $f(x)$ задается системой неравенств

$$\begin{cases} x>0, \\ \frac{5}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg^2 x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ \lg^2 x + 5\lg x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ (\lg x+6)(\lg x-1)\geqslant 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg x\geqslant 1; \end{cases} \begin{cases} x>0, \\ \lg x\leqslant -6. \end{cases}$$

Решение первой из них есть $x\geqslant 10$; решением второй является промежуток $0<x\leqslant 10^{-6}$. Итак, получаем ответ: $x\in(0,\ 10^{-6}]\bigcup[10,\ \infty)$.

3. Сначала найдем значения данной функции на концах отрезка $[0;\ 1{,}5]$: $f(0)=0$, $f(1{,}5)=\frac{8}{3}\cdot 1{,}5^3 - 18\cdot 1{,}5^2 + 28\cdot 1{,}5 = 10{,}5$. Теперь найдем критические точки, принадлежащие этому отрезку. Имеем $f'(x)=8x^2-36x+28$; уравнение $f'(x)=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=3{,}5$ (последний не принадлежит данному отрезку). Сравнивая между собой значения $f(0)=0$, $f(1{,}5)=10{,}5$, $f(1)=38/3$, заключаем, что $f_{\text{наим}}=f(0)=0$, а $f_{\text{наиб}}=f(1)=38/3$. График функции на указанном отрезке схематически изображен на рис. Р.П.7.

4. Здесь $\cos 2x\neq 0$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. Преобразуем данное уравнение:

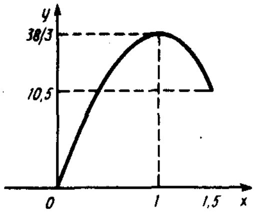


Рис. Р.П.7

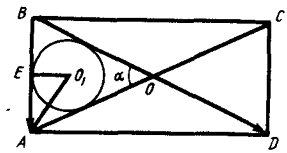


Рис. Р.П.8

$$1+\sin 2x+\cos 2x+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\cos 2x)+\sin 2x\,\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x} \Rightarrow (1+\cos 2x)(1+\operatorname{tg} 2x)=0.$$

Из уравнения $1+\cos 2x=0$ находим, что $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, а из уравнения $1+\operatorname{tg} 2x=0$ — что $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi l}{2}$. Отрезку $[-\pi/2,\ \pi]$ принадлежат: из первой серии значения $x_1=-\frac{\pi}{2}$ и $x_2=\frac{\pi}{2}$, а из второй серии — значения $x_3=-\frac{\pi}{8}$, $x_4=\frac{3\pi}{8}$ и $x_5=\frac{7\pi}{8}$.

5. По условию, $ABCD$ — прямоугольник, $O_1E=r$, $\angle BOA=\alpha$ (рис. Р.П.8). В $\triangle AOB$ имеем $\angle OBA=\angle OAB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$; так как AO_1 — биссектриса $\angle OAB$, то $\angle EAO_1=45^\circ-\frac{\alpha}{4}$. Далее, из $\triangle AEO_1$ находим $AE=r\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$, откуда $AB=2r\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$. Теперь найдем искомое скалярное произведение:

$$\overline{BA}\cdot\overline{BD}=|\overline{BA}|\ \text{пр}_{\overline{BA}}\,\overline{BD}=|\overline{BA}|\cdot|\overline{BA}|=|\overline{BA}|^2=4r^2\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right). \blacksquare$$

Вариант III. □ 1. Здесь $a\geqslant 1$. Имеем

$$\frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1})((\sqrt{a-1})^2+\sqrt{(a-1)(a+1)}+(\sqrt{a+1})^2)}=$$

$$=\frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{(a-1-a-1)(a-1+\sqrt{a^2-1}+a+1)}=\frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{-2(2a+\sqrt{a^2-1})}=-\frac{1}{2}.$$

2. Так как $2^x+1>0$, то

$$\frac{2^{x+1}+x-1}{2^x+1}\leqslant 2 \Rightarrow 2^{x+1}+x-1\leqslant 2^{x+1}+2 \Rightarrow x-1\leqslant 2 \Rightarrow x\leqslant 3.$$

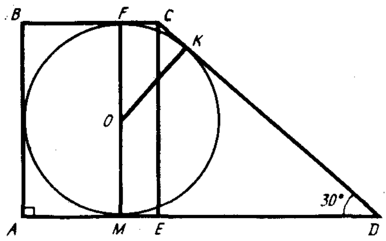


Рис. Р.П.9

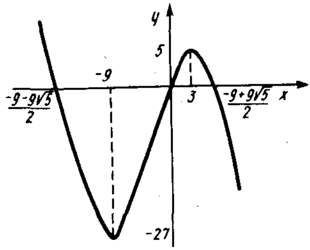


Рис. Р.П.10

3. Первая бригада за один день убирает 1/8 часть поля, а вторая — 1/6 часть. Пусть x — число дней, которое обе бригады проработали вместе. Тогда получим уравнение $\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)x=1$, откуда $x=3$ (дня).

4. После применения формул приведения придем к уравнению $|\sin x|=\sin x+2\cos x$. Далее рассмотрим два случая:

1) $\sin x\geqslant 0 \Rightarrow \sin x=\sin x+2\cos x \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ (с учетом того, что $\sin x\geqslant 0$);

2) $\sin x<0 \Rightarrow -\sin x=\sin x+2\cos x \Rightarrow \sin x+\cos x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$ (с учетом того, что $\sin x<0) \Rightarrow x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$.

Теперь найдем область определения функции $y=\sqrt{\cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$:

$$\cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant\frac{x}{4}<\frac{\pi}{4}+2\pi k \Rightarrow -\pi+8\pi k\leqslant x\leqslant\pi+8\pi k. \qquad (1)$$

Остается выяснить, при каких значениях n и m корни x_1 и x_2 удовлетворяют неравенству (1). Находим

$$-\pi+8\pi k\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant\pi+8\pi k \Rightarrow -\frac{3}{4}+4k\leqslant n\leqslant\frac{1}{4}+4k \Rightarrow n=4k;$$

$$-\pi+8\pi k\leqslant -\frac{\pi}{4}+2\pi m<\pi+8\pi k \Rightarrow -\frac{3}{8}+4k\leqslant m\leqslant\frac{5}{8}+4k \Rightarrow m=4k.$$

Подставляя эти значения n и m в выражения для x_1 и x_2, получаем ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+8\pi k,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+8\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

5. По условию, в трапеции $ABCD$ имеем $\angle BAD=90°$, $\angle ADC=30°$, $OF=OM=R$ (рис. Р.П.9). Так как трапеция описана около окружности, то $BC+AD=AB+CD$. Но $AB+CD=2R+\frac{CE}{\sin\angle CDE}=2R+\frac{2R}{\sin 30°}=2R+4R=6R$.

Итак, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)AB=\frac{1}{2}\cdot 6R\cdot 2R=6R^2$. ■

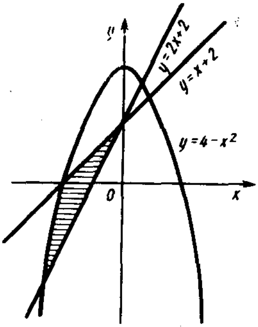


Рис. Р.П.11

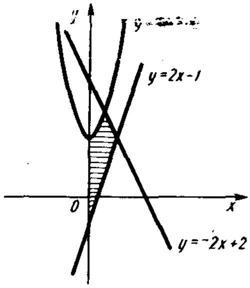


Рис. Р.П.12

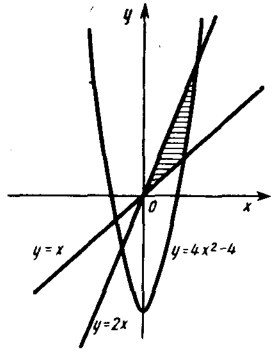


Рис. Р.П.13

Вариант IV. 1. $0{,}25-4x^4$. 2. $x>\sqrt{2}$. 3. Возрастает на $(-9,\ 3)$, убывает на $(-\infty,\ -9)$ и на $(3,\ \infty)$; $y_{\min}=-27$ при $x=-9$, $y_{\max}=5$ при $x=3$ (рис. Р.П.10). 4. $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$. 5. $\frac{a^2(1+\operatorname{tg}\alpha)}{2}$. **Вариант V.** 1. $\frac{x}{2-x}$. 2. $x\geqslant 2{,}5$. 3. Возрастает на $(-7,\ 7)$, убывает на $(-\infty,\ -7)$ и на $(7;\ \infty)$; $y_{\min}=-14$ при $x=-7$, $y_{\max}=14$ при $x=7$. 4. $-\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; π; $\frac{7\pi}{6}$. 5. $\frac{a^2}{3}$. **Вариант VI.** 1. x^9. 2. $(-\infty,\ 0)\bigcup[1/3,\ \infty)$. 3. Возрастает на $(-0{,}5;\ 0{,}5)$, убывает на $(-\infty;\ -0{,}5)$ и на $(0{,}5;\ \infty)$; $y_{\min}=-2$ при $x=-0{,}5$, $y_{\max}=2$ при $x=0{,}5$. 4. $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$. 5. $\frac{2}{\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **Вариант VII.** 1. $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. 2. $-1\leqslant x<2$. 3. Возрастает на $(0,\ 10)$, убывает на $(-\infty,\ 0)$ и на $(10,\ \infty)$; $y_{\min}=0$ при $x=0$, $y_{\max}=10$ при $x=10$. 4. $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$. 5. $\frac{2}{3}l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$.

Вариант VIII. 1. $\sqrt{2}-\sqrt{x}$. 2. $x\geqslant-2$. 3. $f_{\text{наим}}=-2$ при $x=-1$, $f_{\text{наиб}}=3$ при $x=-2$. 4. $-\frac{11\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $\frac{\pi}{18}$. 5. $\frac{P^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{64}$. **Вариант IX.** 1. $1-2x^4$. 2. $x\geqslant 8$. 3. $f_{\text{наим}}=0{,}25$ при $x=0$, $f_{\text{наиб}}=1$ при $x=1$. 4. $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. 5. $\frac{1}{2}\pi l^2\frac{\sin^2 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$. **Вариант X.** 1. $\sqrt[4]{4a}$. 2. См. рис. Р.П.11. 3. 2; 10; 50 или 50; 10; 2. 4. $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\pi$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. 5. $\frac{1}{4}l^3\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\beta$. **Вариант XI.** 1. $\sqrt{b}$. 2. См. рис. Р.П.12. 3. 5 и 1. 4. $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$. 5. $\frac{2}{3\sqrt[4]{27}}S\sqrt{S}\operatorname{ctg}\alpha$. **Вариант XII.** 1. 0,5. 2. См. рис. Р.П.13. 3. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4/3 см. ● Принять за независимую переменную угол α при основании треугольника, выразить площадь треугольника как функцию α и исследовать эту функцию на экстремум. 4. $-\frac{\pi}{4}$; arctg 3. 5. $\frac{4}{3}\frac{\pi h^3 \operatorname{tg}^3\alpha(1-\sin\alpha)^3}{\cos^3\alpha}$. **Вариант XIII.** 1. $f(x)=x+1-\sqrt[3]{3}$; $f'(x)=1$. 2. (1; 0), (0; $\log_5 2$). 3. На 25%. 4. $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$. 5. 45°. **Вариант XIV.** 1. $f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})$; $f'(x)=\frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}$. 2. $x=16$. 3. 0,4. 4. $x_1=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{6}+2\pi l$; $k, l=-2, -1, 0, 1, \ldots$. 5. $\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}$. **Вариант XV.** 1. $f(x)=\sqrt{3x}$; $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$. 2. $x=7$. 3. 6; 6; 6. 4. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$. 5. $\frac{4hm^2}{\sin\alpha}$. **Вариант XVI.** 1. $f(x)=0{,}25$; $f'(x)=0$. 2. $x=2$. 3. $-0{,}25$. 4. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi l$; $k, l=0, 1, 2, \ldots$. 5. $a^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$. **Вариант XVII.** 1. $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 2. $x_1=1$, $x_2=2$. 3. 6 и 3. 4. $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$; $k, l=2, 3, 4, \ldots$. 5. $a^2\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{4}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$. **Вариант XVIII.** 1. $f(x)=-x^2-1$; $f'(x)=-2x$. 2. $(-3;\ 0{,}5)$. 3. 6 и 6 см. 4. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$. 5. $\frac{S}{\sin\alpha}$. **Вариант XIX.** 1. $f(x)=2\sqrt{x}+5$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. 2. $(5;\ 2\sqrt{5})$, $(5;\ -2\sqrt{5})$. 3. $\pm 0{,}5$. 4. $x=\frac{\pi n}{3}$, $n=3, 4, 5, \ldots$. 5. $\frac{4r^2h}{\sin 2\alpha}$. **Вариант XX.** 1. $f(x)=-2x-1$; $f'(x)=-2$. 2. $(2;\ -1)$. 3. 0,75; 2,25. 4. $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$; $n=1, 2, 3, \ldots$. 5. $\frac{4}{\pi\sin\alpha}$.

Вариант XXI. □ 1. Полагая $y=1-x^2$, получаем квадратное неравенство $y^2+y<0 \Rightarrow y(y+1)<0 \Rightarrow -1<y<0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$-1<1-x^2<0 \Rightarrow -2<-x^2<-1 \Rightarrow 1<x^2<2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1<|x|<2 \Rightarrow x\in(-\sqrt{2},\ -1)\cup(1,\ \sqrt{2}).$$

2. Пусть $\sqrt{x-1}=y$, где $y\geqslant 0$. Тогда приходим к квадратному уравнению $7y^2-15y+2=0$, имеющему корни $y_1=2$, $y_2=1/7$. Вернемся к исходной переменной. Имеем $\sqrt{x-1}=2$, откуда $x_1=5$; $\sqrt{x-1}=1/7$, откуда $x_2=50/49$. Проверка показывает, что оба значения являются корнями данного уравнения.

3. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}(3x+1)^2>0,\\(3x+1)^2\neq 1,\\11-3x>0,\\3x+1>0,\\3x+1\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<11/3,\\x>-1/3,\\x\neq 0.\end{cases}$$

Используя свойства логарифмов, преобразуем данное неравенство:

$$1+\log_{3x+1}5\cdot\frac{\log_{3x+1}(11-3x)}{\log_{3x+1}5}\geqslant 5\log_{3x+1}2;$$

$$1+\log_{3x+1}(11-3x)\geqslant\log_{3x+1}32;\ \log_{3x+1}\frac{32}{11-3x}\leqslant 1.$$

Последнее неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases}3x+1>1,\\ 3x+1\geqslant\dfrac{32}{11-3x};\end{cases}\quad(1)\qquad\begin{cases}0<3x+1<1,\\ 3x+1\leqslant\dfrac{32}{11-3x}.\end{cases}\quad(2)$$

С учетом ОДЗ решаем систему (1), используя то, что $11-3x>0$:

$$\begin{cases}x>0,\\ (3x+1)(11-3x)\geqslant 32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ 9x^2-30x+21\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x>0,\\ 3(x-1)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ 1\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow x\in\left[1,\ \frac{7}{3}\right].$$

С учетом ОДЗ решаем систему (2), используя то, что ее второе неравенство противоположно второму неравенству системы (1):

$$\begin{cases}0<3x+1<1,\\ 3x+1\leqslant\dfrac{32}{11-3x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<x<0,\\ x\leqslant 1,\ x\geqslant\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{3},\ 0\right).$$

Ответ: $x\in(-1/3,\ 0)\bigcup[1,\ 7/3]$.

4. Так как $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}2x=\dfrac{\cos 2x}{2\sin x\cos x}$, $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, то данное уравнение имеет смысл при

$$\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$$

После приведения к общему знаменателю получим следующее уравнение:

$$2\cos x\sin^2 x-2\cos^3 x+\cos x-\sin x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)+\cos x-\sin x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\cos x-\sin x)(1-2\cos^2 x-2\sin x\cos x)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\cos x-\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=0.$$

Оно распадается на два уравнения:

1) $\cos x=\sin x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$

2) $\cos 2x=-\sin 2x\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}l,\ l\in\mathbf{Z}.$

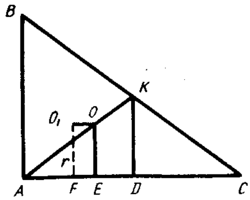


Рис. Р.П.14

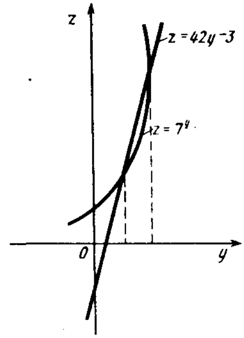


Рис. Р.П.15

Из двух полученных серий корней исходного уравнения выделяем корни, удовлетворяющие условию $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 1$. В первой серии это значение $x_1 = \pi/4$, соответствующее $k=0$, во второй — значение $x_2 = -\pi/8$, соответствующее $l=0$.

Ответ: $x_1 = \pi/4$, $x_2 = -\pi/8$.

5. Введем обозначения: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр; r — радиус вписанной в ΔABC окружности; O_1 — точка пересечения биссектрис, центр вписанной окружности; O — точка пересечения медиан (рис. Р.П.14). Так как $BK=KC$ и $BC=30$ см, то $BK=KC=AK=15$ см. Тогда точка K — центр описанной окружности и, значит, $\angle A=90°$. Опустим из точек K, O и O_1 перпендикуляры из AC; при этом $KD \| OE \| O_1F \| AB$. Имеем $KD=\frac{1}{2}c$ как средняя линия ΔABC. По условию, $O_1O \| AC$; следовательно, $OE=O_1F=r$. Из подобия прямоугольных треугольников AEO и ADK и свойства точки пересечения медиан треугольника следует

$$\frac{KD}{OE}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow \frac{c}{2r}=\frac{3}{2} \Rightarrow c=3r.$$

Далее, согласно свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем $BC=(AC-r)+(AB-r) \Rightarrow a=b+c-2r \Rightarrow b=30-r$, $p=30+r$.

Найдем радиус вписанной окружности, приравнивая различные выражения для площади ΔABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc=rp \Rightarrow \frac{1}{2}(30-r)\cdot 3r=r(30+r) \Rightarrow r=6 \text{ (см)}.$$

Итак, $b=AC=30-r=24$ (см), $c=AB=3r=18$ (см).

6. Преобразуем исходное уравнение к следующему виду:

$$7^{(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax}=42(x-1)^2+84(a-1)^2+84ax-35 \Rightarrow 7^y=42y-35,$$

где $y=(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax$ — новая переменная. Уравнение относительно y решаем графически. Из вида графиков $z=42y-35$ и $z=7^y$ (рис. Р.П.15) ясно, что может быть не более двух точек пересечения. Подбором находим, что $y_1=1$, $y_2=2$. Следовательно,

$(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax=1$, либо $(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax=2$.

Преобразуем левую часть этих уравнений:

$$(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax=x^2+2x(a-1)+(a-1)^2+(a-1)^2+1=$$
$$=(x+a-1)^2+(a-1)^2+1.$$

Если $y_1=1$, то $(x+a-1)^2+(a-1)^2=0$. Тогда $\begin{cases} a=1, \\ x=0. \end{cases}$ Исследуем этот случай.

При $a=1$ получим уравнения $(x-1)^2+2x=1$, либо $(x-1)^2+2x=2$. Эти уравнения имеют решения $x=0$, $x=1$, $x=-1$, т. е. исходное уравнение не имеет единственного решения. Значит, $a=1$ не удовлетворяет заданному условию. Пусть $a\neq 1$. Тогда выражение $(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax$ не принимает значение 1; остается исследовать уравнение

$$(x-1)^2+2(a-1)^2+2ax=2 \Rightarrow x^2+2x(a-1)+2a^2-4a+1=0.$$

Оно имеет единственное решение при условии $D=(a-1)^2-(2a^2-4a+1)=0$, откуда $a_1=0$, $a_2=2$. Если $a=0$, то $x=1$, а если $a=2$, то $x=-1$.
Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a=0$ и при $a=2$ (соответственно $x=1$ и $x=-1$). ■

Вариант XXII. □ 1. Приведем данное неравенство к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$:

$$\frac{6}{(x+2)(x-3)}-\frac{1}{x+2}>2 \Rightarrow \frac{6-(x-3)-2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}>0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-2x^2+x+21}{(x+2)(x+3)}>0 \Rightarrow \frac{2(x-7/2)\ (x+3)}{(x+2)(x-3)}<0.$$

Применим метод интервалов; отметим на числовой оси нули числителя и знаменателя $(-3,\ -2,\ 3,\ 7/2)$ и определим знак левой части полученного неравенства на каждом из интервалов. В результате получаем ответ: $x\in(-3,\ -2)\bigcup(3,\ 7/2)$.

2. Возведя обе части первого уравнения в квадрат, получим $\sqrt{x+y+2}=$ $=2 \Rightarrow x+y+2=4 \Rightarrow y=2-x$. Подставив это выражение во второе уравнение, имеем $x^2+(2-x)^2=4 \Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow x_1=0,\ \ x_2=2$, соответственно $y_1=2$, $y_2=0$. Проверка показывает, что обе пары $x_1=0$, $y_1=2$ и $x_2=2$, $y_2=0$ удовлетворяют заданной системе.

3. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 81x^2>0, \\ 81x^2\neq 1, \\ x>0, \\ x^3/9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq \pm\dfrac{1}{9}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Логарифмируем по основанию 9 обе части исходного неравенства (так как основание 9 больше 1, то знак неравенства сохраняется):

$$\log_9\left(27(81x^2)^{2\log_9\left(\frac{x^3}{9}\right)}\right)\leqslant\log_9 x^7.$$

Используя свойства логарифмов, имеем

$$2\log_9\left(\frac{x^3}{9}\right)\cdot\log_9(81x^2)+\log_9 27\leqslant 7\log_9 x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(3\log_9 x-1)(2+2\log_9 x)+\frac{3}{2}\leqslant 7\log_9 x.$$

Положим $y=\log_9 x$ и придем к квадратному неравенству

$$2(3y-1)(2+2y)+\frac{3}{2}\leqslant 7y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y^2+y-2{,}5\leqslant 0\Rightarrow 12\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{5}{12}\right)\leqslant 0\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{5}{12}.$$

Наконец, подставив $\log_9 x$ вместо y и учитывая, что основание логарифма больше единицы, получим

$$-\frac{1}{2}\leqslant\log_9 x\leqslant\frac{5}{12}\Rightarrow 9^{-1/2}\leqslant x\leqslant 9^{5/12}\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 3^{5/6}.$$

Найденное решение принадлежит ОДЗ. Ответ: $x\in[1/3,\ 3^{5/6}]$.

4. Возведем левую и правую части уравнения в квадрат и преобразуем полученное выражение, учитывая, что $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$2\sin^2\frac{x}{2}-\cos x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-2\cos x=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x+\cos x=0\Rightarrow\cos x(1+\sin x)=0.$$

Это уравнение распадается на два: $\cos x=0$ и $1+\sin x=0$. Решаем их, учитывая ОДЗ:

$$1)\ \begin{cases}\cos x=0,\\ 1-2\cos x\geqslant 0,\\ \sin x+\cos x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

$$2)\ \begin{cases}\sin x=-1,\\ 1-2\cos x\geqslant 0,\\ \sin x+\cos x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos x\leqslant\frac{1}{2},\\ \cos x\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\varnothing.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

5. Введем обозначения: $BC=a,\ AC=b,\ AB=c,\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр $\triangle ABC$; r, r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных соответственно в $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$ (рис. Р.П.16). Проведем $O_1K\perp BC$, $O_2L\perp BC$, $O_2M\perp O_1K$. Тогда $O_1K=r_1$, $O_2L=r_2$, $O_1M=r_1-r_2$, $O_2M=r_1+r_2$ и в $\triangle O_1MO_2$ имеем

$$O_1O_2^2=O_1M^2+O_2M^2\Rightarrow 8=(r_1-r_2)^2+(r_1+r_2)^2\Rightarrow r_1^2+r_2^2=4. \qquad (1)$$

Так как $AD\perp BC$, то прямоугольные треугольники ABC, ABD, ACD подобны, откуда

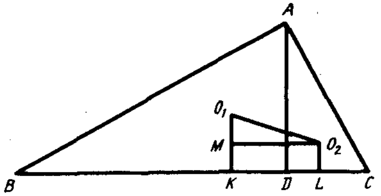


Рис. Р.П.16

$$\begin{cases} \frac{a}{r}=\frac{c}{r_1}=\frac{b}{r_2}=t, \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=rt, \\ b=r_2t, \\ c=r_1t, \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^2t^2+r_1^2t^2=r^2t^2 \Rightarrow r_1^2+r_2^2=r^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $r^2=4$, т. е. $r=2$. Далее, используя свойство касательных, проведенных из одной и той же точки к окружности, в $\triangle ABC$ имеем

$BC=(AC-r)+(AB-r) \Rightarrow a=b+c-2r \Rightarrow$
$\Rightarrow 2p=2b+2c-2r \Rightarrow b+c=p+r \Rightarrow b+c=12+2=14$ (см).

Другое соотношение между катетами b и c выводится из сравнения различных формул для площади $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC}=rp=\frac{1}{2}bc \Rightarrow bc=2\cdot 2\cdot 12=48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Решив систему $\begin{cases} b+c=14, \\ bc=48, \end{cases}$ находим $b=6$, $c=8$ или $b=8$, $c=6$. Итак, искомые катеты равны 6 и 8 см.

6. Найдем ОДЗ данного неравенства. Выражения $\sqrt{x^2-x+3}$ и $\sqrt{2x^2+1}$ определены на всей числовой оси. Правая часть неравенства положительна, второй множитель левой части также положителен; поэтому неравенство имеет смысл при $x(x+1)>0$, т. е. при $x<-1$ или $x>0$.

Пусть $\sqrt{x^2-x+3}=u$, $\sqrt{2x^2+1}=v$, где $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Тогда $x^2+x=v^2-u^2+2$ и исходное неравенство преобразуется следующим образом:

$(v^2-u^2+2)(1+u+v)-2-3u-v>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (v^2-u^2+2)(1+u+v)-1-u-v-1-2u>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1+u+v)(v^2-u^2+2-1)-1-2u>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1+u+v)(v^2-u^2+1)-1-2u>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (v^2-u^2)(1+u+v)+1+u+v-1-2u>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (v^2-u^2)(1+u+v)+v-u>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (v-u)((1+u+v)(u+v)+1)>0.$

Так как $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то полученное неравенство эквивалентно неравенству $v-u>0$. Возвращаясь к аргументу x, имеем

$\sqrt{2x^2+1}>\sqrt{x^2-x+3} \Rightarrow 2x^2+1>x^2-x+3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+x-2>0 \Rightarrow (x+2)(x-1)>0.$

Ответ: $x\in(-\infty, -2)\cup(1, \infty)$. ■

Вариант XXIII. □ **1.** Перенеся 1 в правую часть неравенства, получим

$$\frac{3-x}{x+1}-1\leqslant 0 \Rightarrow \frac{2-2x}{x+1}\leqslant 0 \Rightarrow \frac{2(1-x)}{x+1}\leqslant 0 \Rightarrow x\in(-\infty, -1)\cup[1, \infty).$$

2. Пусть $y=45+x-x^2$; тогда исходное уравнение примет вид $\frac{2y}{\sqrt{1+y}}=\sqrt{3+2y}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат и преобразуя, получим

$4y^2=3+2y+3y+2y^2 \Rightarrow 2y^2-5y-3=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(y-3)(y+0{,}5)=0 \Rightarrow y_1=3,\ y_2=-0{,}5.$

Уравнение относительно y имеет смысл при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ 1+y>0, \\ 3+2y\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -1, \\ y\geqslant -1{,}5 \end{cases} \Rightarrow y\geqslant 0.$$

Так как y_2 не удовлетворяет условию $y\geqslant 0$, то рассматриваем только значение $y_1=3$. Имеем $45+x-x^2=3 \Rightarrow x^2-x-42=0$, откуда $x_1=7$, $x_2=-6$. Проверкой убеждаемся, что оба корня обращают исходное уравнение в тождество.

3. Преобразуем левую часть уравнения, используя формулы приведения и формулу тангенса половинного угла:

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Теперь исходное уравнение запишется в виде

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\operatorname{tg} 6x=0, \\ \sin 2x\neq -1, \\ \cos 6x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos 6x}=0, \\ \cos 6x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{28}+\dfrac{\pi n}{7}, \\ x\neq\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi l}{6};\ n,\ l\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{28}+\frac{\pi n}{7},\ x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{\pi l}{6};\ n,\ l\in\mathbf{Z}.$

4. Сначала найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ 3-2x-x^2>0, \\ 1-3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0, \\ (x+3)(x-1)<0, \\ x<1/3 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1,\ 0)\bigcup(0,\ 1/3).$$

Далее рассмотрим два случая: 1) основание логарифма больше 1; 2) основание логарифма меньше 1. Имеем:

1) $\begin{cases} x+1>1, \\ 3-2x-x^2\geqslant 1-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ (x+1)(x-2)\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ -1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1/3$ (с учетом ОДЗ);

2) $\begin{cases} 0<x+1<1, \\ 3-2x-x^2\leqslant 1-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0, \\ x\leqslant -1,\ x\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ответ: $x\in(0,\ 1/3)$.

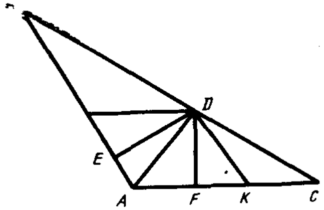


Рис. Р.П.17

5. Введем обозначения: $AB=c$, $AC=b$, h — высота ромба, a — сторона ромба, α — тупой угол ромба (рис. Р.П.17). Из вершины D ромба проведем высоты $DE\perp AB$ и $DF\perp AC$ ($DF=DE=h$), которые являются также высотами в $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$. В $\triangle DFK$ имеем $\sin\angle DKA=$

$$=\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{DF}{DK}=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=120^\circ.$$

Из условия $S_{\triangle ABC}=240\sqrt{3}$ см^2 и равенств

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}h(b+c)=\frac{15\sqrt{3}}{4}(b+c),$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

получаем систему для определения b и c:

$$\begin{cases}b+c=64,\\ bc=960,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=24,\\ c=40\end{cases}\text{ или }\begin{cases}b=40,\\ c=24.\end{cases}$$

По теореме косинусов находим третью сторону BC:

$BC^2=24^2+40^2-2\cdot 24\cdot 40\cos 120^\circ=3136$; $BC=56$ (см).

Ответ: 24, 40 и 56 см.

6. Преобразуем левую часть уравнения, используя формулы сокращенного умножения:

$$x^2+(1+a)y^2+(2+2a)xy+(4+6a)x+(4+4a)y+3a+4=$$
$$=a(x^2+y^2+4+2xy+4x+4y)+2ax-ax^2-a+(x^2+y^2+2xy+4x+4y+4)=$$
$$=a(x+y+2)^2+(x+y+2)^2-a(x-1)^2.$$

Исходное уравнение примет вид $(a+1)(x+y+2)^2-a(x-1)^2=0$. Это уравнение имеет единственное решение, если знаки слагаемых одинаковы, т. е. либо $\begin{cases}a+1<0,\\ a>0,\end{cases}$ либо $\begin{cases}a+1>0,\\ a<0\end{cases}$. Первая система не имеет решений, а решением второй служит интервал $-1<a<0$. При найденных значениях параметра a решением исходного уравнения является пара чисел $x=1$, $y=-3$. ■

Вариант XXIV. 1. (3; 2), (2; 3). 2. $x\in(-\infty,\ -5)\bigcup\{-4\}\bigcup(-3,\ 2)$. 3. $x_1=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$. 4. $x\in[1;\ 1{,}25)\bigcup(1{,}25;\ 5)$. 6. $a_1=-1$, $a_2=-1/2$, $a_3=1/2$.

Вариант XXV. 1. (1; -1), (-1; 1), (1/3; $-4/3$), ($-1/3$; 4/3). 2. $x\in\left[2\pi k+\frac{\pi}{6},\ 2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. 3. $x_1=-1/3$, $x_2=-1/4$, $x_3=3$. 4. 24 см^2. 5. Обе системы имеют по два решения, если $\begin{cases}0<a<\frac{\pi\sqrt{2}}{2},\\ ab=4,\end{cases}$ и по четыре решения, если $\begin{cases}a=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\\ ab>4\end{cases}$. 6. $x=5$.

Вариант XXVI. 1. $x=-2$ при $a=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. 2. (49; 9). 3. $x_1=\pi n$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$; n, $k\in Z$. 4. $x\in(-11{,}5;\ -1]\bigcup(0{,}25;\ 0{,}5)\bigcup(0{,}75;\ 1)\bigcup[2{,}5;\ \infty)$. 5. $45°$. 6. $x_{наиб}=6$ при $a=1$. Вариант XXVII. 1. $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. 2. $-9<x\leqslant 0$. 3. $x_1=\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{60}+\frac{\pi k}{10}$; n, $k\in Z$. 4. $x\in[2{,}25;\ 5)$. 5. 96 см^2. 6. $(0;\ a)$, $(-a;\ -0{,}5a)$, $(-1{,}5a;\ 0{,}25a)$; при $a=0$ система имеет бесконечное множество решений вида $x=-2y$. Вариант XXVIII. 1. $x=38{,}6$. 2. $x\in(-\infty,\ 1)\bigcup(1,\ \infty)$. 3. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 4. $(1/4;\ 1)$. 5. $90°$, $60°$, $30°$. 6. $x=0$, $y=0$ при $a=1{,}25$. Вариант XXIX. 1. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$. 2. $x\in(-\infty,\ -1)\bigcup\bigcup(3,\ \infty)$. 3. $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 4. $x\in(7^{-1},\ 7^{-0{,}2})$. 5. $AB=BC=1$ см, $CD=\sqrt{3}$ см, $AD=3$ см. 6. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ при $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Вариант XXX. 1. $x_1=-5$, $x_2=3$. 2. $0<x<2$, $2<x<\pi$, $\pi n<x<\pi+\pi n$, $n\in Z$, $n\neq 0$. Целые решения: 1, 3, 7, 8, 9. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}$; n, $k\in Z$. 4. $x\in(3^{-\sqrt{3}},\ 1)\bigcup(1,\ 3^{\sqrt{3}})$. 5. $11\sqrt{2}$ см^2. 6. $2\leqslant x\leqslant 3$ при $a\leqslant 3$; $2\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{4-a}$ при $3<a<4$; $x=2$, $x=3$ при $a\geqslant 4$. Вариант XXXI. 1. $x\in(-\infty,\ -2)\bigcup(-1,\ 2)\bigcup(2{,}5;\ \infty)$. 2. $(-3;\ -1)$, $(1;\ 3)$. 3. $x\in(0,\ 1/4]\bigcup[\sqrt{2},\ \infty)$. 4. $x_1=2\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; n, $k\in Z$. 5. 5 и 12 см. 6. $x\in(-3,\ 1)$. Вариант XXXII. 1. $x\in(-2,\ -\sqrt{3})\bigcup(\sqrt{3},\ 2)$. 2. $x=1$. 3. $x\in(-4;\ -3{,}5)\bigcup(-3;\ 8{,}5)$. 4. $3\pi/16$; $3\pi/8$. 5. 8, 10 и 12 см. 6. $x=1$ при $a=0$, $x=-1$ при $a=2$. Вариант XXXIII. 1. $x=\pi/2$. 2. $x_1=-3$, $x_2=0$. 3. $x_1=-\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $x_2=-\frac{\pi}{12}+\pi k$; n, $k\in Z$. 4. $x\in(-5,\ -3)\bigcup(3,\ 5)$. 6. $a=2$.

Вариант XXXIV. 1. $x\in[-2,\ 1)$. 2. $x\in[0,\ 3)\bigcup(3,\ \infty)$. 3. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k$; n, $k\in Z$. 4. $x\in(-\infty,\ -5/2)\bigcup(-5/2,\ -125/62)\bigcup(1/2,\ \infty)$. 5. $75\sqrt{3}$ см^2. 6. $k=4$. Вариант XXXV. 1. $x=2$. 2. $x\in(-\infty,\ -3)\bigcup(3,\ 1)$. 3. $x=\pi n$, $n\in Z$. 4. $x\in\in(-\infty,\ -2-\sqrt{2}]\bigcup\{-2\}\bigcup[-2+\sqrt{2},\ \infty)$. 6. $a\geqslant -9/40$; единственное решение при $a=-9/40$, $a=0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Егерев Виктор Константинович, **Зайцев** Владимир Валентинович, **Кордемский** Борис Анастасьевич, **Маслова** Тамара Николаевна, **Орловская** Ираида Федоровна, **Позойский** Роман Исаевич, **Ряховская** Галина Сергеевна, **Суходский** Андрей Матвеевич, **Федорова** Нина Михайловна

Сборник задач по математике
для поступающих во втузы
(с решениями)

Книга 2. Геометрия