

Б17.2  
Р 62  
УДК 517.944

**Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.** Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Изд. 2-е, перераб. и доп. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 688 стр.

Книга является существенно переработанным и дополненным результатами последнего десятилетия новым изданием работы того же названия, выпущенной в 1968 г. издательством «Наука».

Она посвящена математическим вопросам газовой динамики. В главе 1 излагается теория систем квазилинейных уравнений — основного математического аппарата газовой динамики. Глава 2 содержит рассмотрение основных задач одномерной газовой динамики, а глава 3 — изложение разностных методов газовой динамики. Последняя, четвертая глава посвящена теории разрывных решений систем квазилинейных уравнений.

Илл. 196, библи. 325 назв.

Р  $\frac{20203-092}{053(02)-78}$  53-78

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1978,  
с изменениями.

# Оглавление

Предисловие ко второму изданию . . . . .	7
Из предисловия к первому изданию . . . . .	8
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Основы теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными . . .</b>	<b>16</b>
§ 1. Основные определения . . . . .	16
§ 2. Характеристические направления системы квазилинейных уравнений 1. Производная по направлению (20). 2. Гиперболические системы квазилинейных уравнений (22). 3. Гиперболическая система нелинейных уравнений (25).	20
§ 3. Инварианты Римана . . . . .	27
1. Инварианты полулинейной системы уравнений (27). 2. Системы двух и трех квазилинейных уравнений (30).	
§ 4. Преобразования систем квазилинейных уравнений . . . . .	31
1. Преобразование систем по решению (31). 2. Преобразование голографа (33). 3. Продолженная система (34).	
§ 5. Консервативные системы квазилинейных уравнений . . . . .	37
1. Определения (37). 2. Законы сохранения газовой динамики (38). 3. Потенциал решения консервативной системы квазилинейных уравнений (41).	
§ 6. Постановка задачи Коши для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа . . . . .	43
1. Постановка задачи (43). 2. Разрешимость задачи Коши. Характеристики (44). 3. Область зависимости и область определенности. Понятие о корректности задачи Коши (47). 4. Метод характеристик и обзор результатов (5b). 5. Две леммы (53).	
§ 7. Задача Коши для линейной и полулинейной систем . . . . .	55
1. Существование и единственность решения задачи Коши в широком смысле (55). 2. Существование классического решения задачи Коши для линейной системы (59). 3. Некоторые свойства решений линейной и полулинейной систем (60).	
§ 8. Задача Коши для системы квазилинейных уравнений . . . . .	62
1. Оценка роста решения и его производных. Мажорантная система (62). 2. Теоремы единственности и существования решения (65). 3. Некоторые свойства решений задачи Коши для систем квазилинейных уравнений (70).	
§ 9. Задача Коши для одного уравнения . . . . .	72
1. Одно квазилинейное уравнение (72). 2. Одно нелинейное уравнение (78). 3. Гиперболическая система нелинейных уравнений (80).	
§ 10. Поведение производных решения системы квазилинейных уравнений . . . . .	81
1. Слабый разрыв. Транспортное уравнение (81). 2. Неограниченность производных. Градиентная катастрофа (84). 3. Сильно- и слабо-нелинейные системы квазилинейных уравнений (87).	
§ 11. Замечания по поводу смешанной задачи . . . . .	94
1. Постановка смешанной задачи для линейной системы (94). 2. Корректность краевых условий для системы квазилинейных уравнений (98).	

§ 12. Аналитические методы выделения решений систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными . . . . .	102
1. Исследование совместности переопределенных систем уравнений (102). 2. Решения, характеризующие дифференциальными связями (109). 3. Решения систем квазилинейных уравнений с вырожденным голографом (114).	
§ 13. Групповые свойства дифференциальных уравнений . . . . .	119
1. Однопараметрическая группа Ли (120). 2. Инварианты группы (121). 3. Продолженная группа (124). 4. Группы преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений (125). 5. Частично инвариантные и инвариантные решения (131).	
<b>Глава 2. Классические и обобщенные решения одномерной газовой динамики . . . . .</b>	<b>133</b>
§ 1. Общие замечания о математическом описании движения сжимаемых газов . . . . .	133
1. Газ как сплошная среда (133). 2. Неравновесные состояния и процессы в газах (137). 3. Различные способы описания течения. Эйлеровы и лагранжевы переменные (140). 4. Уравнения состояния газов. Совершенный газ. Газ Ван-дер-Ваальса. Нормальный газ (142).	
§ 2. Интегральные законы сохранения. Уравнения гидродинамики одномерных течений . . . . .	149
1. Общие предположения о течении сжимаемых газов (149). 2. Законы сохранения массы, импульса и энергии в трехмерном пространстве (150). 3. Интегральные законы сохранения для одномерных течений в эйлеровых координатах (154). 4. Интегральные законы сохранения в лагранжевых координатах (157). 5. Дифференциальные уравнения для одномерных течений (160). 6. Изучение уравнений в эйлеровых координатах. Характеристическая форма. Характеристики (163). 7. Изотермическое и изотермическое течения. Инварианты Римана (166). 8. Уравнения в лагранжевых координатах. Случай переменной энтропии (169). 9. Уравнения в инвариантах для политропного и изотермического газов (172).	
§ 3. Изучение простейших плоских одномерных течений . . . . .	175
1. Общие свойства. Интегрирование в случае $\gamma=3$ (175). 2. Бегущие волны (волны Римана) Волны сжатия и разрежения (184). 3. Профили в волне Римана. Градиентная катастрофа (189). 4. Задача о поршне. Исчезение газа в вакуум (193). 5. Задача с двумя поршнями. Отражение и преломление бегущей волны на контактной границе (198). 6. Замечания по поводу краевых условий для уравнений газовой динамики и иллюстрация их разрешимости на примере задачи о поршне (203).	
§ 4. Разрывы в одномерном течении сжимаемых газов. Ударные волны	204
1. Условия Гюгонио (204). 2. Различные виды разрывов: ударные волны, контактные разрывы. Различные формы условий Гюгонио. Адиабата Гюгонио (206). 3. Адиабата Гюгонио для нормального газа (209). 4. Устойчивые и неустойчивые разрывы. Условия устойчивости и теорема Цемплена (214). 5. Условия Гюгонио для политропного газа (218). 6. Условия Гюгонио для изотермического газа (221). 7. Сильные и слабые ударные волны. Сравнение ударной волны и волны сжатия Римана (225). 8. Ударный переход для сред с аномальными термодинамическими свойствами (227). 9. Примеры (228).	
§ 5. Изучение ударного перехода. Ширина ударной волны . . . . .	230
1. Постановка вопроса для нормального газа (230). 2. Свойства кривых $M=0$ , $\mathcal{L}=0$ для нормального газа (235). 3. Качественное исследование интегральных кривых ударного перехода (237). 4. Предельные случаи. Изотермический скачок (239). 5. Ударный переход для случая идеального газа (исследование Беккера) (242). 6. Стационарные решения уравнений газодинамики с вязкостью Неймана—Рихтмайера (246). 7. Ударный переход в среде с аномальными термодинамическими свойствами (247).	
§ 6. Задача о распаде произвольного разрыва . . . . .	255
1. Общие свойства решения задачи о распаде разрыва (255). 2. Конфигурация А (257). 3. Конфигурация Б (262). 4. Конфигурация В (264). 5. Обзор конфигураций. Газы с равным давлением (267). 6. Задача о распаде разрыва для изотермического идеального газа (268). 7. Задача о распаде разрыва для нормальных газов (269). 8. Решение задачи о распаде разрыва и плоскости переменных $p$ и $(p, u)$ диаграмма (273). 9. Задача о распаде разрыва в средах с аномальными термодинамическими свойствами (276). 10. Лицеаризованные формулы распада разрыва в случае политропного газа (284). 11. Распад разрыва в канале переменного сечения (285).	

§ 7. Взаимодействие сильных разрывов . . . . .	290
1. Набегание ударной волны на границу двух сред (290). 2. Встреча двух ударных волн (293). 3. Соединение ударных волн, идущих в одном направлении (295). 4. Взаимодействие сильных разрывов в изотермическом газе (298).	
§ 8. Взаимодействие ударных волн с бегущими волнами . . . . .	300
1. Взаимодействие ударной волны с бегущей волной в изотермическом газе (301). 2. Асимптотика взаимодействия ударной волны и центрированной волны разрежения (303). 3. Взаимодействие ударных волн с бегущими в баротропных полиатропных газах (307).	
§ 9. Аналитические решения одномерной газовой динамики . . . . .	308
1. Общий интеграл изоэнтропического одномерного плоского течения (308). 2. Видлихи о взаимодействии элементарных решений (313). 3. Плоские одномерные течения с переменной энтропией. Метод Мартина (317). 4. Уравнение гидродинамической поверхности (321). 5. Решения уравнений газовой динамики, характеризуемые дифференциальными связями (323). 6. Решение одномерных уравнений газовой динамики с константным произведением (326). 7. Автомодельные решения в лагранжевых координатах (336). 8. Течения с линейным профилем скорости (366).	
Глава 3. Разностные методы решения уравнений газовой динамики	338
§ 1. Задача Коши в банаховом пространстве для систем линейных дифференциальных уравнений . . . . .	338
1. Линейные операторы в нормированных пространствах (338). 2. Корректность задачи Коши в банаховом пространстве для систем линейных дифференциальных уравнений (344). 3. Метод Фурье (348).	
§ 2. Основные понятия теории разностных схем . . . . .	357
1. Разностная задача Коши (357). 2. Дисперсионный анализ разностной схемы (368). 3. Аппроксимационная вязкость и первое дифференциальное приближение разностной схемы (381).	
§ 3. Исследование устойчивости разностных схем . . . . .	396
1. Спектральный метод исследования (396). 2. Принцип замороженных коэффициентов и локальный алгебраический метод (399). 3. Метод мажорантных или априорных оценок (405). 4. Практический подход к проблеме устойчивости вычислений. Применение метода Пикара для подавления неустойчивости (410).	
§ 4. Анализ простейших разностных схем . . . . .	416
1. Схемы для одного уравнения $u_t + au_x = 0$ (417). 2. Схемы «бегущего» счета для уравнений акустики (423). 3. Схема «крест» и неявная схема с весами (424). 4. Схема Лакса (425). 5. Симметричная схема второго порядка точности (схема предиктор — корректор) (426).	
§ 5. Методы построения разностных схем для уравнений газовой динамики . . . . .	427
1. Общие замечания (427). 2. Способы описания газодинамических течений и построения разностных схем (429). 3. Граничные условия в задачах газовой динамики (430).	
§ 6. Метод характеристик . . . . .	432
1. Метод характеристик для гладких течений (432). 2. Метод характеристик в окрестности контактной границы (436). 3. Метод характеристик в окрестности ударной волны (436).	
§ 7. Явные схемы бегущего счета . . . . .	439
§ 8. Однородные разностные схемы. Схемы с псевдовязкостью . . . . .	444
1. Способы единообразного описания газодинамических течений (444). 2. Разностная схема «крест» для системы уравнений с вязкостью (450). 3. Разностные схемы Лакса, Лакса — Вендрофа, предиктор — корректор (458). 4. Схемы С. К. Годунова и В. Ф. Куропатенко (465). 5. Схемы повышенной точности (475).	
§ 9. Схемы в эйлеровых координатах и неявные схемы . . . . .	478
1. Схемы в эйлеровых координатах (478). 2. Неявные схемы (484).	
§ 10. Особенности разностного решения . . . . .	496
1. Поведение разностных решений вблизи разрыва (496). 2. Замечания (502).	

Глава 4. Обобщенные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа . . . . .	505
§ 1. Постановка задачи Коши в классе разрывных функций . . . . .	505
1. Общие замечания (505). 2. Условия Гюгоино (507). 3. Устойчивые и неустойчивые разрывы. Условия устойчивости (510). 4. Необратимость процессов, описываемых разрывными решениями систем квазилинейных уравнений (519).	
§ 2. Одно квазилинейное уравнение . . . . .	522
1. Обзор результатов (522). 2. Построение Э. Хопфа (525). 3. Задача Коши для уравнения $u_t + \Phi_x = 0$ при условии $\Phi''_{uu} > 0$ (537). 4. Задача Коши для неоднородного закона сохранения (550). 5. Единственность обобщенного решения при условии $\Phi''_{uu} > 0$ (558). 6. Асимптотическое поведение обобщенных решений при $t \rightarrow \infty$ (566). 7. Метод вязкости (574).	
§ 3. Система квазилинейных уравнений . . . . .	583
1. Вводные замечания (583). 2. Автомодельные решения системы квазилинейных уравнений (584). 3. Задача о распаде произвольного разрыва (594). 4. Пример неединственности автомодельного решения задачи о распаде (600). 5. Задача о распаде для системы двух квазилинейных уравнений (603). 6. Задача Гурса для системы двух квазилинейных уравнений (612). 7. Построение разрывных решений системы двух квазилинейных уравнений (624). 8. Замечания о единственности разрывного решения системы двух уравнений (634). 9. Теорема Глима (636). 10. Метод вязкости для системы квазилинейных уравнений. Феномены метода вязкости (644).	
§ 4. Приложения общей теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа . . . . .	656
1. Теория «медкой воды» (656). 2. Плоское установившееся течение сжимаемого газа (659). 3. Химическая сорбция и задачи хроматографии (661). 4. Приложения к дифференциальной геометрии (665). 5. Уравнения магнитной гидродинамики (667).	
Литература . . . . .	672

## Предисловие ко второму изданию

Со времени выхода в свет первого издания нашей книги прошло 10 лет. За это время было получено много новых интересных результатов по рассматриваемым в книге вопросам, и особенно по разностным методам решения задач математической физики и газовой динамики.

Во второе издание внесены некоторые исправления текста, а также значительное число дополнений, призванных отразить имевший место прогресс. Однако, как и в первом издании, на отборе материала сказались общий план и стиль изложения книги. Особенно это относится к новым материалам главы 3, посвященной разностным методам. Огромное число работ по разностным методам и по необходимости небольшой объем главы 3 заставили нас отказаться от изложения ряда теоретических вопросов, уже достаточно подробно освещенных в доступных монографиях и учебниках.

При работе над вторым изданием мы снова пользовались помощью наших друзей и товарищей по работе, а также наших учеников. Мы выражаем всем им нашу глубокую благодарность.

## Из предисловия к первому изданию

При написании книги авторы общались с различными коллективами советских математиков. Среди них мы отметим коллективы, возглавляемые М. В. Келдышем, А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским, И. М. Гельфандом. На наши взгляды и точки зрения неизбежно влияло общение с друзьями и товарищами по работе; ряд результатов известен нам от них из устных сообщений.

Каждый из нас читал в течение ряда лет спецкурс для студентов по теме этой книги. В результате работы над книгой было получено несколько новых результатов, которые впервые здесь и публикуются.

Настоящая книга возникла в процессе многолетней работы, во время которой мы постоянно пользовались помощью многих наших друзей и товарищей по работе, а также многих наших учеников.

Мы благодарны А. Н. Тихонову, советами которого мы постоянно пользовались.

Особенно ценной была для нас помощь Л. В. Овсянникова, который не только просмотрел рукопись всей книги и сделал ряд ценных замечаний, но и предоставил в наше распоряжение материалы, использованные нами при написании § 13 главы 1.

А. А. Самарский прочитал рукопись главы 3 этой книги и сделал ряд ценных замечаний.

Большую помощь нам оказал Н. Н. Кузнецов, который прочитал всю рукопись, сделал ряд ценных замечаний и как редактор этой книги во многом способствовал ее улучшению.

Мы выражаем им всем нашу глубокую благодарность.

## Введение

Для описания поведения сплошной среды (газ, жидкость, твердое тело) теоретическая физика использует различные модели, которые в большинстве случаев приводят к нелинейным дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными.

Механика сплошной среды — это основная, но не единственная область практического применения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При описании большинства реальных физических процессов мы приходим к нелинейным уравнениям, и только существенные дополнительные предположения о малости амплитуд воли поля или амплитуд колебания среды, амплитуд отклонения от состояния равновесия и т. п. приводят к линейным уравнениям, которые изучены более глубоко. В главе 4 этой книги приведено несколько примеров задач физики, химии, математики, которые связаны с нелинейными уравнениями.

Изучение общих свойств нелинейных уравнений и методов их решения представляет собой быстро развивающуюся область современной математики.

При всем обилии интересных фактов и многообразии оригинальных и остроумных методов исследования и решения нелинейных уравнений эта область математики до сих пор не имеет столь же основательного теоретического фундамента, как теория линейных уравнений. Это связано в первую очередь с тем, что к нелинейным дифференциальным уравнениям неприменим принцип суперпозиции решений, так что многообразие решений не является линейным.

Среди гиперболических систем нелинейных уравнений с частными производными наиболее простыми являются системы квазилинейных уравнений. Наиболее изучены системы уравнений с двумя независимыми переменными; эти системы описывают, в частности, неустановившиеся одномерные и сверхзвуковые двумерные установившиеся течения сжимаемых газов и жидкостей. Но даже и для этих систем в настоящее время нет достаточно полной теории, нет общих теорем существования и единственности решения задачи с начальными данными.

Это объясняется тем, что для гиперболических систем нелинейных уравнений решение задачи Коши в целом связано с существенным осложнением как самой постановки этой задачи, так и методов ее решения. При этом почти все основные возникающие здесь трудности представлены уже для случая двух независимых переменных, и можно ожидать, что решения многомерных уравнений газовой динамики локально имеют в основном те же особенности, что и решения одномерных.

Таким образом, изучение гиперболических систем нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными составляет совершенно необходимый и пока еще не преодоленный этап в исследовании более общих нелинейных уравнений.

Исходя из этих соображений, авторы решили ограничиться в основном теорией гиперболических систем с двумя независимыми переменными и изучением одномерных неустановившихся течений сжимаемых жидкостей и газов. Поэтому, как правило, об одной из независимых переменных мы будем говорить как о времени и обозначать ее буквой  $t$ .

Поясним здесь кратко современное состояние вопроса о разрешимости задачи Коши для гиперболических систем квазилинейных уравнений и трудностях, возникающих при попытке построить решение этой задачи в целом. Основным методом решения гиперболических систем квазилинейных уравнений является метод характеристик, подробно изложенный в главе 1. С его помощью доказаны существование, единственность и непрерывная зависимость от входных данных классического решения задачи Коши. Полученные результаты являются в высокой степени удовлетворительными в том смысле, что классическое решение строится во всей области переменных  $t, x$ , где оно существует. Заметим, что область существования классического решения, вообще говоря, ограничена, так как решения нелинейных уравнений, в отличие от уравнений линейных, обладают свойством неограниченного возрастания величины производных, которое называют *градиентной катастрофой*.

Смысл этого свойства состоит в том, что даже при сколь угодно гладких начальных значениях первые производные решения остаются ограниченными, вообще говоря, лишь в течение конечного времени. При некотором  $t_0 > 0$  они становятся неограниченными, и при  $t > t_0$  классического решения поставленной задачи Коши уже не существует.

С точки зрения газовой динамики это соответствует образованию ударной волны (скачка уплотнения) из волны сжатия. Таким образом, если мы хотим определить решение задачи Коши при любых  $t \geq 0$ , т. е. в целом (а именно так стоит проблема, например, в газовой динамике), то мы должны прежде всего дать определение решения, так как решение системы

уравнений в обычном смысле — классическое решение, — как мы говорили выше, при  $t > t_0$  не существует.

В большинстве физических задач и, в частности, в газовой динамике определение обобщенного решения диктуется самой постановкой задачи. Так, например, в газовой динамике основными физическими законами, из которых мы выводим все следствия, являются законы сохранения массы, импульса и энергии. Эти законы сохранения имеют характер интегральных соотношений, и они применимы не только к гладким (дифференцируемым) течениям. Напротив, дифференциальные уравнения газовой динамики получаются из этих законов сохранения при предположении о гладкости течения.

Таким образом, мы определяем обобщенное решение уравнений газовой динамики как течение (возможно, даже с разрывными параметрами), удовлетворяющее основным законам сохранения: массы, импульса и энергии. К этому добавляют требование термодинамики о возрастании энтропии каждой замкнутой в тепловом отношении системы. Широко распространено мнение, до сих пор не опровергнутое ни одним примером, что так определенное решение существует, единственно и удовлетворяет всем разумным требованиям.

Презвычайно существенным здесь является требование термодинамики о возрастании энтропии, которое показывает возможное направление процесса быстрого изменения состояния газа. Это требование не фигурирует при рассмотрении классических решений уравнений газовой динамики для газа, лишенного вязкости и теплопроводности, так как в гладких течениях энтропия системы сохраняется в силу тех же основных законов сохранения.

Хорошо известен в газовой динамике и другой подход к обобщенным (разрывным) течениям идеального газа, лишенного вязкости и теплопроводности. Поскольку газ без диссипации является идеализацией газа, обладающего диссипативными процессами, естественно рассматривать его разрывное течение как «пределное течение» вязкого теплопроводящего газа при стремлении к нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности. При этом предполагается, что вязкие течения всегда описываются классическими решениями дифференциальных уравнений, а предел при стремлении диссипативных коэффициентов к нулю существует и единствен в разумном смысле. И действительно, до сих пор это предположение не опровергнуто ни одним примером, хотя точные доказательства получены к настоящему времени лишь для весьма частного случая стационарной ударной волны.

При этом следует принять во внимание, что во многих случаях реальные газы обладают достаточно малой диссипацией,

так что их можно «приближать» недиссипативными газами. Однако наличие диссипативных процессов, хотя бы и малых, приводит к возрастанию энтропии системы. Таким образом, требование возрастания энтропии в разрывном течении идеального газа связано с представлением этого течения в качестве «предельного» течения вязкого теплопроводного газа.

Отметим, что с математической точки зрения требование возрастания энтропии есть требование, гарантирующее единственность обобщенного решения, его устойчивость по отношению к возмущениям.

Хотя подобная постановка задачи о течении сжимаемых газов известна уже более века и еще Риман изучал простейшие разрывные течения, имеется сравнительно небольшой прогресс в исследовании общих свойств обобщенных решений уравнений газовой динамики. Так, и мы уже упоминали об этом, до сих пор нет удовлетворительных теорем существования и единственности.

С другой стороны, требования практики, обусловленные настоятельной необходимостью практического изучения разрывных течений, а также новые вычислительные возможности, связанные с применением быстродействующей вычислительной техники, привели к тому, что, невзирая на наши недостаточные сведения об общих свойствах разрывных течений, создавались и использовались различные численные алгоритмы, позволяющие удовлетворительно рассчитывать течения с ударными волнами. Нужно отметить, что при создании этих численных алгоритмов большинство гипотез, о которых мы говорили выше, принимались за достоверные.

Ввиду того, что непосредственное и строгое обоснование различных предположений об обобщенных решениях в газовой динамике представляется трудной задачей, возникает естественное желание провести проверку наших взглядов хотя бы на модельных уравнениях и системах уравнений, которые в какой-то степени имитируют уравнения газовой динамики.

Следствием этого желания явилось возникновение за последние десятилетия так называемой *теории обобщенных решений систем квазилинейных уравнений* или, короче, *теории систем квазилинейных уравнений* (при этом обычно имеют в виду системы гиперболического типа). Эта теория ставит своей задачей ввести по аналогии с газовой динамикой понятие обобщенного решения для «произвольной» системы квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, доказать его существование, единственность, непрерывную зависимость от входных данных задачи, изучить свойства таких решений. По крайней мере формально такая теория является более об-

щей, чем одномерная газовая динамика, и включает последнюю как частный случай.

Она привлекла внимание многих математиков, и ряд результатов, полученных усилиями советских и иностранных ученых, позволяет надеяться на ее дальнейшее развитие.

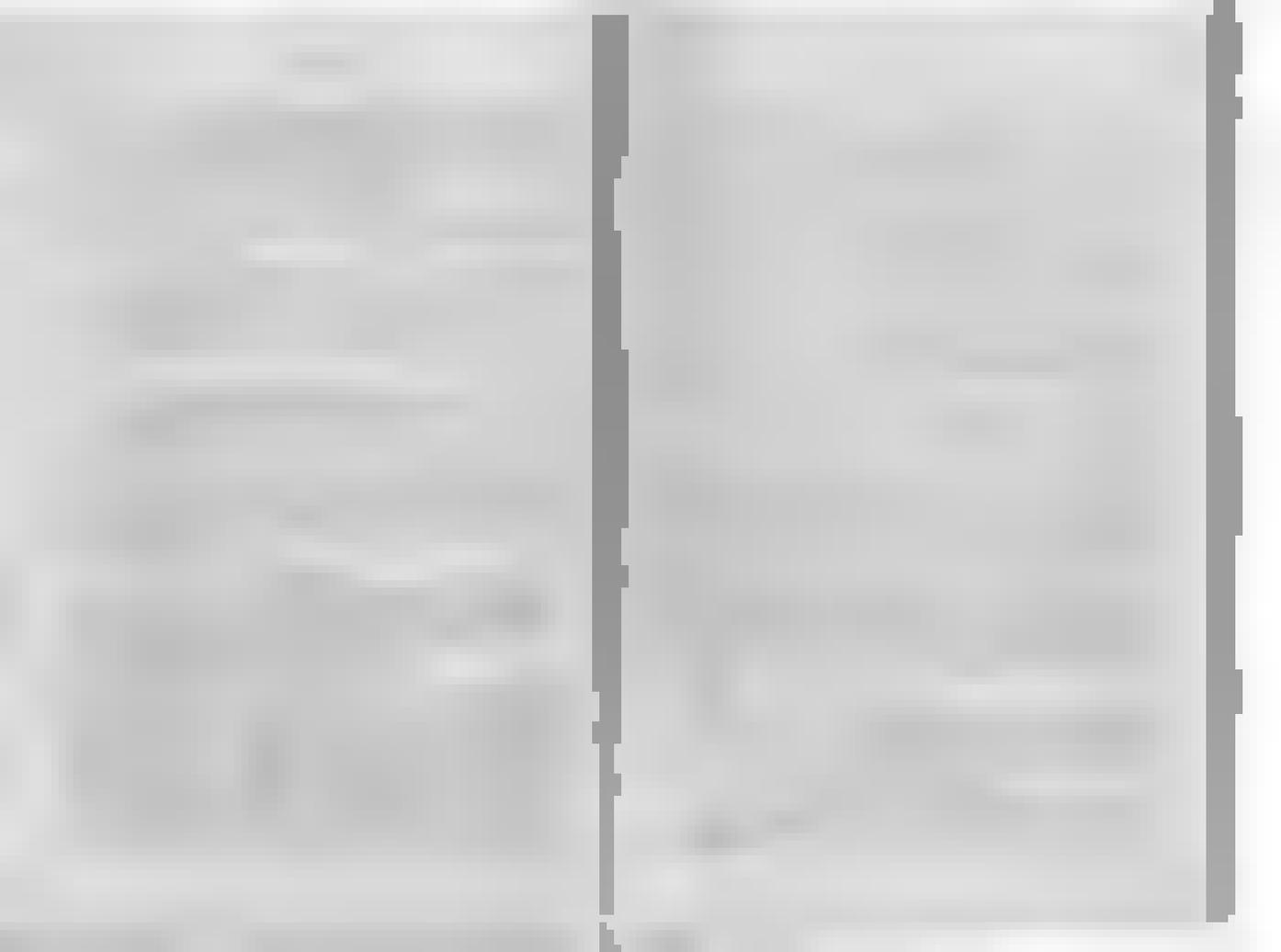
Исходя из такого представления о развитии теории обобщенных (разрывных) решений систем квазилинейных уравнений, авторы ограничились случаем лишь двух независимых переменных и включили в книгу следующие основные вопросы:

1. Методы построения классических решений систем квазилинейных уравнений; доказательства теорем существования, единственности, непрерывной зависимости классических решений; аналитические методы построения решений систем нелинейных уравнений; условия образования разрывов в решениях произвольных систем квазилинейных уравнений. Эти вопросы изложены в главе 1 книги. Здесь приведены результаты, полученные для классических решений систем квазилинейных уравнений за последние годы.

2. Классические и обобщенные решения уравнений газовой динамики для одномерных нестационарных течений. Этот вопрос освещается в главе 2 книги. Авторы сочли целесообразным подробно рассмотреть некоторые вопросы газовой динамики, освещенные во многих руководствах. Излагаются основы термодинамики, вывод уравнений газовой динамики при различной симметрии одномерного течения, условия Гюгонио, общие свойства течений, теория ударного перехода, автотельные и аналитические решения газовой динамики. Включение в книгу этих традиционных вопросов газовой динамики позволяет изложить с единой точки зрения некоторые математические задачи, которые возникают в газовой динамике; кроме того, на этом материале фактически основано большинство численных методов в газовой динамике. Подробно рассматривается основная задача теории разрывных решений уравнений газовой динамики — задача о распаде произвольного разрыва, а также взаимодействие ударных волн друг с другом, с бегущими волнами, с контактной границей.

3. Глава 3 книги посвящена разностным методам решения уравнений газовой динамики. Эти методы в наше время стали основным средством исследования задач газовой динамики, поэтому прогресс в изучении разрывных течений в значительной мере связан с разностными методами.

В этой главе мы вынуждены изложить основные понятия теории разностных методов. К сожалению, большинство утверждений этой теории относится лишь к случаю линейных уравнений.



Современное положение с обоснованием разностных методов, применяющихся для численного решения задач газовой динамики, кратко говоря, заключается в следующем. Классические решения (гладкие течения) могут быть рассчитаны с практически произвольной точностью. Основной метод — численный метод характеристик — для классических решений достаточно обоснован. В то же время численные методы, применяемые для расчета разрывных течений, строго не обоснованы и в большинстве своем используют те или иные гипотезы о поведении решений, об аппроксимации одних уравнений другими и т. п. Для проверки тех или иных предположений чаще всего пользуются простыми уравнениями, для которых поведение разрывного решения хорошо известно. Не случайно в этой главе в большинстве случаев каждая схема подвергается проверке на одном простейшем квазилинейном уравнении, решение которого может быть явно выписано.

Такое положение с обоснованием разностных методов показывает, что прогресс в этой области в значительной мере связан с прогрессом в исследовании общих свойств обобщенных решений систем квазилинейных уравнений и, в частности, уравнений газовой динамики. С другой стороны, разностные методы дают экспериментальный материал и сильнее всего образуют стимулы развитию теории обобщенных решений.

4. Глава 4 посвящена теории обобщенных решений систем квазилинейных уравнений гиперболического типа и содержит основные результаты, полученные в этой области за последние годы. Основным успехом здесь следует считать построение теории обобщенного решения одного квазилинейного уравнения, которую можно считать почти законченной. Для этого уравнения доказаны существование, единственность и непрерывная зависимость обобщенного решения от входных данных, показана эквивалентность определений обобщенного решения с точки зрения закона сохранения, с одной стороны, и как предела «вязких решений», с другой.

В то же время, как и в газовой динамике, изучение обобщенных решений систем уравнений наталкивается на большие трудности, и здесь получены пока лишь весьма скромные результаты. Основная задача, которая подвергается сейчас всеобщему исследованию, — это задача о распаде произвольного разрыва. С помощью этой простейшей задачи можно изучить структуру обобщенного решения, а для случая системы из двух уравнений, опираясь на нее, можно даже построить обобщенные решения.

Следует отметить, что в последние годы усиленно изучаются и более общие задачи для системы квазилинейных уравнений.

В главе 4 изложены основные результаты, полученные для одного квазилинейного уравнения, рассмотрена задача о распаде разрыва для произвольной гиперболической системы квазилинейных уравнений, и приведены некоторые результаты, относящиеся к более общим случаям. В заключение этой главы описан ряд задач из различных областей науки, связанных с теорией систем квазилинейных уравнений и, в частности, разрывных решений таких уравнений.

Из сказанного выше должно быть ясно, что математическая теория разрывных решений систем квазилинейных уравнений и, в частности, уравнений газовой динамики, хотя и имеет много замечательных результатов и достижений, далека еще от своего завершения. Мы надеемся, что наша книга даст читателю представление о современных методах решения и исследования систем квазилинейных уравнений и в то же время побудит его к дальнейшим исследованиям в этой интересной, быстро развивающейся области прикладной математики.

Книга разделена на главы, параграфы и пункты. Нумерация формул — самостоятельная в каждом пункте, поэтому при ссылках вряду с номером формулы указывается номер пункта и номер параграфа, так что формула (2.7.18) означает формулу (18) в пункте 7 § 2 данной главы. Лишь в случае, когда ссылка не выводит за пределы данного пункта, указывается только номер формулы.

## Основы теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными

### § 1. Основные определения

В этой книге мы ограничиваемся рассмотрением дифференциальных уравнений для функций, зависящих лишь от двух независимых переменных.

Система соотношений

$$\mathcal{F}_i \left( x, t, u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

связывающая значения неизвестных функций  $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$  и их первых производных  $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t}$ , называется *системой дифференциальных уравнений первого порядка* относительно функций  $u_1, \dots, u_n$ . Система (1) называется *определенной* в случае  $m = n$ . Мы ограничиваемся рассмотрением только этого случая.

Вводя векторы

$$u = \{u_1, \dots, u_n\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\},$$

можно записать систему (1) короче:

$$\mathcal{F}_i \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Функции  $u_i = u_i(x, t)$ , обладающие непрерывными первыми производными и удовлетворяющие уравнениям системы (2), называются *решением* этой системы уравнений.

Если систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) удается представить в форме, разрешенной относительно производных функций  $u_1, \dots, u_n$  по какому-либо переменному (например,  $t$ ):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \varphi_i \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

то такую форму системы (2) называют *нормальной формой*. Систему (3) называют *системой типа Коши — Ковалевской*. Заметим, что при приведении системы (2) к нормальной форме допускается преобразование переменных  $x, t$ .

Система (2) называется *системой квазилинейных уравнений*, если функции  $\mathcal{F}_i$  линейны относительно величин  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ ; если же функции  $\mathcal{F}_i$  линейны по совокупности переменных  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ , то система (2) называется *линейной*.

Система квазилинейных уравнений первого порядка может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}, c_i$  зависят от  $x, t, u$ . Если коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}$  не зависят от  $u$ , то система (4) называется *полулинейной* (если при этом  $c_i$  линейно зависят от  $u$ , то она линейна). Можно несколько упростить запись системы (4), если ввести в рассмотрение определенные выше векторы  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ , вектор  $c = \{c_1, \dots, c_n\}$  и матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = ((a_{ij})), \quad B = ((b_{ij})).$$

При использовании матричными обозначениями полагают, что символы  $Au$  и  $uA$  означают векторы, компоненты которых вычисляются по правилам:

$$(Au)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} u_j, \quad (uA)_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} u_j = (A'u)_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $A'$  — транспонированная матрица.

Если матрица  $A$  симметрична, то  $A' = A$ , и

$$Au = uA.$$

Ниже мы будем рассматривать действительные матрицы и векторы. Скалярное произведение векторов  $u, v$  задается формулой

$$uv = (u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Поэтому из формул (5) следует

$$v(Au) = (vA)u = vAu,$$

Под нормой  $\|u\|$  вектора  $u$  мы будем понимать величину

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

*Нормой матрицы  $A$*  назовем наименьшее число  $\|A\|$ , которое для любых векторов  $u$  удовлетворяет неравенству

$$\|Au\| \leq \|A\| \|u\|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|A\| = \sqrt{\lambda},$$

где  $\lambda$  — наибольшее собственное значение матрицы  $AA'$  (или  $A'A$ , что то же). Так как  $\lambda \leq \text{Sp } AA'$ , то

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Напомним еще несколько определений линейной алгебры. Вектор  $l = \{l_1, \dots, l_n\}$  и число  $\xi$  называются соответственно *левым собственным вектором* и *собственным значением матрицы  $A$* , если

$$lA = \xi l, \quad \|l\| \neq 0. \quad (6)$$

Аналогично, вектор  $r$  называется *правым собственным вектором матрицы  $A$* , если

$$Ar = \xi r, \quad \|r\| \neq 0. \quad (7)$$

Согласно формулам (5), (6), собственное значение  $\xi$  матрицы  $A$  является корнем характеристического уравнения

$$\text{Det}((a_{ij} - \xi \delta_{ij})) = 0, \quad (8)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ). Каждому собственному значению  $\xi$  матрицы  $A$  соответствует линейное пространство левых собственных векторов  $l$  и правых собственных векторов  $r$ . Размерность этих пространств равна  $n - \beta$ , где  $\beta$  — ранг матрицы

$$A - \xi E = ((a_{ij} - \xi \delta_{ij})). \quad (9)$$

Ранг матрицы (9), как известно, не меньше, чем  $n - \alpha$ , где  $\alpha$  — кратность корня  $\xi$  уравнения (8).

Предположим, что собственные значения  $\xi$  матрицы  $A$  вещественны. Занумеруем их в порядке возрастания, т. е. будем считать, что

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n. \quad (10)$$

Знак равенства в (10) допускается ввиду возможности кратных корней уравнения (8), а каждый кратный корень  $\xi$  повторяется в (10) столько раз, какова его кратность.

Если для любого собственного значения  $\xi$  матрицы  $A$  кратности  $\alpha$  ранг матрицы (9) равен  $n - \alpha$ , то собственные векторы, как левые  $l$ , так и правые  $r$ , отвечающие всем собственным значениям, образуют базис в пространстве  $E_n$ .

Итак, в этом случае мы можем считать, что существуют собственные векторы  $l^1, l^2, \dots, l^n$ , образующие базис в пространстве  $E_n$ , т. е. удовлетворяющие условию

$$\det A = \det ((l_i^k)) = \det \begin{vmatrix} l_1^1 & \dots & l_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ l_1^n & \dots & l_n^n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

Индекс левого собственного вектора  $l^k$  при этом соответствует номеру собственного значения  $\xi_k$ ; последние упорядочены с помощью неравенств (10).

Если  $\xi_k \neq \xi_j$ , то  $l^k$  и  $r^j$  ортогональны. В самом деле, пусть

$$l^k A = \xi_k l^k, \quad A r^j = \xi_j r^j. \quad (12)$$

Скалярно умножая первое из равенств (12) на  $r^j$ , второе на  $l^k$  и вычитая, получим

$$(\xi_k - \xi_j) l^k r^j = (l^k A) r^j - l^k (A r^j) = l^k (A r^j) - l^k (A r^j) = 0. \quad (13)$$

Так как  $\xi_k \neq \xi_j$ , отсюда следует ортогональность  $l^k, r^j$ . В случае, когда все собственные значения матрицы  $A$  просты, знак равенства в неравенствах (10) исключается и левые и правые собственные векторы образуют биортогональную систему, т. е.

$$l^k r^j = \sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha}^k r_{\alpha}^j = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j. \quad (14)$$

Если матрица  $A$  симметрична, то можно считать, что  $r^k = l^k$ . Потребуем, чтобы левые собственные векторы  $l^k$  матрицы  $A$  удовлетворяли условию нормировки:

$$\|l^k\| = 1 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (15)$$

Тогда, если для любого собственного значения  $\xi = \xi_k$  ранг матрицы (9) равен  $n - \alpha$ , собственные векторы  $l^k$  образуют нормированный базис в  $E_n$  и удовлетворяют, конечно, условию (11); если при этом матрица  $A$  симметрична, то базис  $\{l^k\}$  может быть выбран ортонормированным.

Матрица  $A$  называется *неособой*, если  $\xi = 0$  не является ее собственным значением, и *особой* — в противном случае.

Ограничившись этими краткими сведениями из линейной алгебры, запишем систему (4) в виде

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = c. \quad (16)$$

В случае, когда матрица  $A$  неособая, система (16) приводится к нормальной форме (3) и может быть после преобразований записана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} = b, \quad (17)$$

где  $A_1 = A_1(x, t, u)$ ,  $b = b(x, t, u)$  — некоторые новые матрица и вектор соответственно. В дальнейшем мы ограничимся изучением систем (16), приводящихся к нормальной форме (17).

Выше мы сделали предположение о матрице  $A(x, t, u)$  системы уравнений (16). Однако  $A$  зависит от  $u$ , т. е. от решения, которое нам, как правило, неизвестно. Поэтому договоримся, в каком смысле мы будем делать предположения о коэффициентах систем (16), (17).

1) Либо мы будем считать, что решение  $u = u(x, t)$  систем (16), (17) задано как функция переменных  $x, t$ . Тогда выполнение тех или иных ограничений, накладываемых на матрицы  $A, B, A_1$  и векторы  $c, b$ , проверяется непосредственно.

2) Либо эти ограничения удовлетворяются тождественно (при любых значениях  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ ) в некоторой односвязной области пространства  $(x, t, u)$ , в которой будут рассматриваться система квазилинейных уравнений и ее решения.

В этой главе мы будем накладывать ограничения в основном во втором смысле.

## § 2. Характеристические направления системы квазилинейных уравнений

1. Производная по направлению. Пусть  $f(x, t)$  — дифференцируемая функция своих переменных. Рассмотрим в некоторой точке  $(x_0, t_0)$  выражение

$$A \frac{\partial f}{\partial t} + B \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1)$$

считая, что  $A, B$  не равны одновременно нулю.

При любых  $A$  и  $B$ , непрерывных в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ , можно найти гладкую кривую  $\Gamma$ , проходящую через эту точку и такую, что при ее надлежащей параметризации выражение (1) пропорционально производной функции  $f(x, t)$  на кривой  $\Gamma$  по параметру  $\tau$ .

Действительно, пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнениями

$$\Gamma: x = x(\tau), \quad t = t(\tau), \quad x(\tau_0) = x_0, \quad t(\tau_0) = t_0. \quad (2)$$

Тогда на кривой  $\Gamma$  функция  $f(x, t)$  является функцией одного переменного  $\tau$ :  $f(x(\tau), t(\tau)) = F(\tau)$ . Потребуем, чтобы выражение (1) было пропорционально  $F'(\tau)$ , какова бы ни была функция  $f$ .

Это будет выполнено, если

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha B, \quad \frac{dt}{d\tau} = \alpha A, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — любая непрерывная функция  $\tau$ . Ясно, что существенным условием, однозначно определяющим направление кривой  $\Gamma$  в точке  $(x_0, t_0)$ , является уравнение

$$\frac{dx}{B} = \frac{dt}{A}, \quad (4)$$

а формулы (3) определяют соответствующую параметризацию.

Производной функции  $f$  по направлению  $\Gamma$  называется производная  $f'(\tau)$  при натуральной параметризации  $\Gamma$ , когда

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . В этом случае параметр  $\tau$  есть длина дуги кривой  $\Gamma$ . При  $\alpha = 1$  выражение (1) будем называть

производной функции  $f$  по параметру  $\tau$  и направлению кривой  $\Gamma$ . Это простое понятие находит важные применения в теории уравнений с частными производными.

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение

$$A(x, t) \frac{du}{dt} + B(x, t) \frac{du}{dx} = 0, \quad (5)$$

предполагая, что функции  $A, B$  непрерывно дифференцируемы. Уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = A(x, t), \quad \frac{dx}{d\tau} = B(x, t) \quad (6)$$

или уравнение (4) определяют однопараметрическое семейство кривых  $\Gamma$ . Параметр  $\tau$  определяется вдоль каждой из этих кривых однозначно, если вдоль некоторой (произвольно выбранной) кривой  $\gamma_0$ , пересекающей кривые  $\Gamma$ , положить  $\tau = \tau_0$  (рис. 1.1).

Поставим в соответствие каждой кривой  $\Gamma$  значение некоторого параметра  $\omega$  (например, длину дуги кривой  $\gamma_0$ , отсчитываемую от произвольной точки на ней до точки ее пересечения с данной кривой  $\Gamma$ ). Тогда каждой точке  $(x, t)$  соответствует одна и только одна пара чисел  $\tau, \omega$ .

Функцию  $u(x, t)$  можно считать, следовательно, функцией переменных  $\tau, \omega$ ; уравнения линий  $\Gamma$  имеют вид  $\omega = \text{const}$ , а уравнение (5), согласно предыдущему, запишется в виде

$$\frac{\partial u(\tau, \omega)}{\partial \tau} = 0. \quad (7)$$

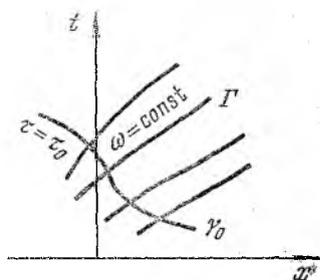


Рис. 1.1.

Отсюда вытекает, что  $u = F(\omega)$  есть общее решение уравнения (5) и функция  $u(x, t)$  постоянна вдоль кривых  $\Gamma$ .

Направления кривых  $\Gamma$ , определенные вектором  $\{B, A\}$ , называются *характеристическими направлениями* уравнения (5), а кривые  $\Gamma$  — *характеристиками*.

Заметим, что форма (7) уравнения (5) уже не предполагает существования производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ : уравнение (7) удовлетворяется произвольной функцией  $F(\omega)$ , в частности, даже разрывной. При этом функцию  $u = F(\omega)$  можно трактовать как решение уравнения (5) в обобщенном смысле.

**2. Гиперболические системы квазилинейных уравнений.** Рассмотрим систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = b. \quad (1)$$

Умножая ее на вектор  $l$ , получим скалярное уравнение

$$l \frac{\partial u}{\partial t} + lA \frac{\partial u}{\partial x} = lb. \quad (2)$$

Если  $l$  — левый собственный вектор матрицы  $A$ , то уравнение (2) записывается в виде

$$l \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x} \right) = lb, \quad (3)$$

где  $\xi$  — соответствующее собственное значение матрицы  $A$ .

В уравнении (3) все компоненты  $u_i$  вектора  $u$  дифференцируются в одном и том же направлении. Действительно, записывая уравнение (3) в компонентах, получим

$$\sum_{i=1}^n l_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \xi \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^n l_i b_i.$$

Обозначая через

$$\left( \frac{du_i}{dt} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \xi \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

производную функции  $u_i(x, t)$  по переменному  $t$  в направлении  $\frac{dx}{dt} = \xi$ , видим, что уравнение (3) содержит линейную комбинацию производных  $\left( \frac{du_i}{dt} \right)$ . Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \xi$$

определяет общее для всех функций  $u_i(x, t)$  направление дифференцирования в равенстве (3), которое называется *характеристическим направлением* системы уравнений (1).

Систему квазилинейных уравнений (1) будем называть *гиперболической* в некоторой односвязной области  $D$  пространства переменных  $x, t, u$ , если в каждой точке этой области выполнены следующие условия:

- 1) все собственные значения  $\xi = \xi_k(x, t, u)$  матрицы  $A = A(x, t, u)$  вещественны;
- 2) существует базис  $\{l^1(x, t, u), \dots, l^n(x, t, u)\}$  в пространстве  $E_n$ , составленный из левых собственных векторов матрицы  $A$ , подчиненных условию нормировки, т. е. существуют нормированные собственные векторы  $l^1, l^2, \dots, l^n$ , удовлетворяющие условию (1.11).

Отметим, что если система (1) полулинейна, то собственные значения  $\xi_k$  и левые собственные векторы  $l^k$  не зависят от  $u$ . Поэтому свойство гиперболичности для полулинейных систем определяется в некоторой области переменных  $(x, t)$  при произвольных  $u$  (в цилиндрической области).

В связи с определением гиперболичности заметим, что часто к условиям 1), 2) добавляют еще требование определенной гладкости собственных векторов  $l^k$  и собственных значений  $\xi_k$ . Так, например, в книге И. Г. Петровского [1961] система (1) называется гиперболической, если выполнены условия 1), 2) и, кроме того,  $\xi_k(x, t, u)$ ,  $l^k(x, t, u)$  обладают той же гладкостью, что и элементы матрицы  $A(x, t, u)$ .

В дальнейшем нам, конечно, придется прибегать к предположению о гладкости  $\xi_k, l^k$ . Мы их будем делать по мере необходимости. Отметим в связи с этим, что та или иная гладкость  $l^k, \xi_k$  не всегда вытекает из предположения о той же гладкости матрицы  $A$ .

Покажем это на следующем примере системы двух квазилинейных уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + a(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

Матрица  $A$  в этом случае имеет вид

$$A = A(u) = \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ a(u_1, u_2) & u_2 \end{vmatrix},$$

все собственные значения  $\xi_1, \xi_2$  определяются из уравнения

$$(\xi - u_1)(\xi - u_2) = 0,$$

откуда  $\xi_1 = u_1, \xi_2 = u_2$ . Собственные векторы  $l^1, l^2$  определяются из уравнений

$$0 \cdot l_1^1 + a(u_1, u_2) l_2^1 = 0, \quad 0 \cdot l_1^2 + (u_2 - u_1) l_2^2 = 0, \quad (4)$$

$$(u_1 - u_2) l_1^2 + a(u_1, u_2) l_2^2 = 0, \quad 0 \cdot l_1^2 + 0 \cdot l_2^2 = 0. \quad (5)$$

запишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \varphi_i(x, t, v, \omega) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Пусть  $\varphi_k(x, t, v, \omega) \in C_2$ . Обозначим через  $A(x, t, v, \omega)$  квадратную матрицу порядка  $n$ :

$$A = \left( \left( \frac{\partial \varphi_k(x, t, v, \omega)}{\partial \omega_i} \right) \right) = \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right) \right). \quad (4)$$

Систему нелинейных уравнений (1) будем называть *гиперболической в некоторой области* изменения переменных  $x, t, v, \omega$ , если в каждой точке этой области собственные значения  $\xi = \xi_k(x, t, v, \omega)$  вещественны, а из левых собственных векторов  $l^k(x, t, v, \omega)$  матрицы  $A$  может быть построен базис в  $E_n$ .

Гиперболическая система нелинейных уравнений (1) сводится к системе квазилинейных уравнений гиперболического типа. Дифференцируя каждое из уравнений (1) по переменному  $x$  и учитывая обозначения (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x, t, v, \omega) = \\ = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_\alpha} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\alpha} \omega_\alpha + (\varphi_i)'_x = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В формуле (5) по греческому индексу  $\alpha$  производится суммирование \*) в пределах от 1 до  $n$ . В дальнейшем для упрощения записи мы часто будем пользоваться этим соглашением.

Соединяя уравнения (3) и (5), получим систему из  $2n$  уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\varphi(x, t, v, \omega), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + A(x, t, v, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \bar{f}(x, t, v, \omega), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_i &= -[\varphi_i(x, t, v, \omega)]'_x - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\alpha} \omega_\alpha, \quad v = \{v_1, \dots, v_n\}, \\ \omega &= \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \quad \bar{f} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

которую мы можем рассматривать как систему квазилинейных

\*) Во избежание недоразумений подчеркнем, что суммирование производится только по греческим индексам. Например,  $l_{\alpha \xi}^k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha \xi}^k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$ , а по латинскому индексу  $k$  суммирование не производится.

уравнений относительно  $2n$  неизвестных

$$u = \{u_1, \dots, u_{2n}\} = \{v_1, \dots, v_n; \omega_1, \dots, \omega_n\} = \\ = \left\{ v_1, \dots, v_n; \frac{\partial v_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\}.$$

Покажем, что система  $2n$  квазилинейных уравнений (6) является гиперболической. Умножая вторую группу уравнений (6) на левый собственный вектор  $l^k(x, t, v, \omega)$  матрицы  $A(x, t, v, \omega)$ , получим

$$l^k \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = f_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

$$f_k = l^k \bar{f}. \quad (9)$$

Итак, система (6) приводится к виду

$$l^k \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = f_k, \quad \frac{\partial v_k}{\partial t} = -\varphi_k(x, t, v, \omega) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (10)$$

откуда следует ее гиперболичность.

Если  $\varphi_k = \varphi_k(x, t, \omega)$ , т. е.  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i} \equiv 0$ , то первая группа уравнений (10) может рассматриваться независимо, как гиперболическая система  $n$  квазилинейных уравнений относительно  $n$  неизвестных  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .

Разумеется, нельзя говорить об эквивалентности системы (10) и системы (1).

Во-первых, не всякое решение  $v_k, \omega_k$  системы (10) дает решение  $v_k(x, t)$  системы (1). Действительно, решение  $v_k, \omega_k$  системы (10) не обязано, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (2).

Как мы покажем в п. 3 § 9, выполнение условий (2) сводится к выполнению их на прямой  $t = 0$ . Таким образом, решения системы (10) приводят к решению  $v(x, t)$  системы (1) лишь в случае удовлетворения условий (2). С другой стороны, неэквивалентность систем (10) и (1) проявляется также и в том, что решение системы (10), удовлетворяющее условиям (2), требует, чтобы  $v(x, t) \in C_2$ . В то же время определение решения  $v(x, t)$  системы (1) требует лишь его непрерывной дифференцируемости. Поэтому эквивалентность системы (10) системе (1) может иметь место лишь для решений  $v(x, t)$  системы (1) из класса  $C_2$ .

### § 3. Инварианты Римана

**1. Инварианты полулинейной системы уравнений.** В каждом уравнении характеристической формы (2.2.7) функции  $u_i(x, t)$  дифференцируются в одном направлении. В некоторых случаях возможно дальнейшее упрощение характеристической формы: заменой переменных можно добиться, чтобы в каждом из

уравнений (2.2.7) дифференцировалась лишь одна функция переменных  $x, t, u$ .

Рассмотрим сначала случай полулинейной системы. Тогда уравнения (2.2.7) могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{dr_k}{dt}\right)_k = \frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где

$$r_k = l^k u = l^k_\alpha u_\alpha, \quad g_k = f_k + u_\alpha \left(\frac{dl^k_\alpha}{dt}\right)_k = f_k + u_\alpha \left[\frac{\partial l^k_\alpha}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial l^k_\alpha}{\partial x}\right]. \quad (2)$$

Так как для гиперболической системы

$$\text{Det } \Lambda = \text{Det}((l^k_i)) \neq 0,$$

то

$$\frac{\partial [r_1, \dots, r_n]}{\partial [u_1, \dots, u_n]} = \text{Det } \Lambda \neq 0 \quad (3)$$

и величины  $r_k(x, t, u)$  могут быть взяты в качестве новых неизвестных функций. Выразим из уравнений (2)  $u_1, \dots, u_n$  через  $r_1, \dots, r_n$ :

$$u_k = \lambda^k_\alpha r_\alpha = \lambda^k r, \quad (4)$$

где через  $r$  мы обозначаем вектор  $\{r_1, \dots, r_n\}$ , а  $\lambda^k_\alpha$  — коэффициенты матрицы  $\Lambda^{-1}$ , обратной матрице  $\Lambda$ :

$$\Lambda = ((l^k_i(x, t))), \quad \Lambda^{-1} = ((\lambda^k_i(x, t))).$$

Подставляя формулы (4) в правые части системы (2), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5)$$

которую будем называть *системой, записанной в инвариантах*.

Проиллюстрируем понятие инвариантов на примере волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}).$$

Оно сводится к гиперболической системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

характеристическая форма которой имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a \left(\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Следовательно, определяемые формулами (2) инварианты системы

$$r_1 = u - av, \quad r_2 = u + av.$$

Заметим, что мы воспользовались здесь ненормированными формами  $l^1, l^2$ .

Система, записанная в инвариантах:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + a \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + a \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0,$$

показывает, что инвариант  $r_1$  постоянен вдоль прямых  $x + at = \text{const}$ , а  $r_2 = \text{const}$  — вдоль линий  $x - at = \text{const}$ ; поэтому

$$r_1 = f(x + at), \quad r_2 = g(x - at),$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции.

Возвращаясь к функции  $u$ , получаем известное общее решение волнового уравнения:

$$u = \frac{f(x + at) + g(x - at)}{2}.$$

В случае системы квазилинейных уравнений векторы  $l^k$  зависят от  $x, t, u$ . Рассмотрим дифференциальные формы

$$\omega_k(x, t, u, du) = l^k(x, t, u) du = l^k_\alpha(x, t, u) du_\alpha. \quad (6)$$

Пусть каждая из этих форм, рассматриваемых при фиксированных значениях переменных  $x, t$ , имеет интегрирующий множитель  $\mu_k = \mu_k(x, t, u)$ , так что для любого  $k = 1, \dots, n$  имеем

$$\mu_k(x, t, u) \omega_k(x, t, u, du) = \mu_k l^k_\alpha du_\alpha = \frac{\partial r_k(x, t, u)}{\partial u_\alpha} du_\alpha \quad (7)$$

(напомним, что суммирование производится лишь по греческим индексам; в формуле (7) номер  $k$  фиксирован). Уравнения (2.2.7) после умножения на  $\mu_k$  принимают вид

$$\left( \frac{dr_k(x, t, u)}{dt} \right)_k = \frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = \bar{g}_k(x, t, u) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (8)$$

и

$$\bar{g}_k = \mu_k \dot{f}_k + r'_{kt} + \xi_k r'_{kx}. \quad (9)$$

В формуле (9) величины  $r'_{kx}, r'_{kt}$  суть частные производные функций  $r_k(x, t, u)$  соответственно по  $x$  и  $t$  при фиксированных значениях переменных  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ .

Пользуясь снова независимостью функций  $r_k(x, t, u)$ , выражаем через них переменные  $u$ , после чего получим из (8) систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Величины  $r_k$  называют *инвариантами* (инвариантами Римана), а систему (10) — *системой в инвариантах*. Впервые понятие инвариантов ввел в своей классической работе Б. Риман [1876]. Если системы (2.2.1), (2.2.7) однородны и не зависят явно от  $x, t$  ( $A = A(u)$ ,  $f \equiv 0$ ), то уравнения (10) также однородны:

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r) \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (11)$$

т. е. функции  $r_k(x, t)$  постоянны вдоль интегральных кривых уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(r(x, t)), \quad (12)$$

называемых *характеристиками системы уравнений* (11).

**2. Системы двух и трех квазилинейных уравнений.** Известно, что не всякая дифференциальная форма  $\omega_k(u, du)$  имеет интегрирующий множитель. Исключение составляет случай  $n = 2$ , когда этот множитель существует всегда. В этом случае инварианты Римана могут быть определены следующим образом. Пусть уравнения

$$\omega_k(x^0, t^0, u, du) = 0 \quad (k = 1, 2)$$

имеют интегралы

$$\Phi_k(x^0, t^0, u) = \text{const} \quad (k = 1, 2).$$

Тогда, очевидно, в качестве инвариантов Римана могут быть взяты функции

$$r_k = \Phi_k(x, t, u).$$

Рассмотрим теперь случай  $n = 3$ . Известно (см. В. В. Степанов [1959]), что в этом случае произвольная дифференциальная форма

$$\omega_k(x, t, u, du) = l^k(x, t, u) du \quad (1)$$

( $x, t$  фиксированы) может быть представлена в одном из видов:

$$\text{а) } dU, \quad \text{б) } V dU, \quad \text{в) } dU + V dW,$$

где  $U, V, W$  — функции от  $x, t, u$ . Случаи а), б), в) следуют друг за другом в порядке общности.

Если формы  $\omega_k$  относятся при  $k = 1, 2, 3$  к типам а), б), то это означает наличие интегрирующего множителя  $\mu_k$  для каждой формы  $\omega_k$ , т. е. возможность приведения системы квазилинейных уравнений к инвариантам \*).

\*) Известно (см. В. В. Степанов [1959]), что форма  $l^k du_\alpha$  принадлежит к типу а), если  $\text{rot } l^k = 0$ , и к типу б), если  $l^k \text{ rot } l^k = 0$ , причем эти условия необходимы и достаточны (операция  $\text{rot}$  берется по переменным  $u_1, u_2, u_3$ ).

В общем случае формы  $\omega_k$  принадлежат к типу в) и система приводится к виду

$$\left(\frac{dU_k}{dt}\right)_k + V_k \left(\frac{dW_k}{dt}\right)_k = \bar{g}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где  $U_k, W_k, V_k$  — функции переменных  $u_1, u_2, u_3, x, t$ . Пусть  $V_3 = 0$ , т. е. форма  $\omega_3(x, t, u, du)$  имеет интегрирующий множитель и система квазилинейных уравнений имеет один инвариант Римана  $r_3 = U_3$ . Тогда уравнения (2.2.7) приводятся к форме

$$I^k \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f_k \quad (k = 1, 2), \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial U_3}{\partial x} = \bar{g}_3, \quad (4)$$

где  $U_k = U_k(x, t, u)$ .

Если формы  $\omega_k(x, t, u, du)$  ( $k = 1, 2$ ) рассматривать на поверхности  $U_3 = U_3(x, t, u) = \text{const}$ ,  $x = x_0, t = t_0$ , то они имеют интегрирующий множитель. Отсюда следует, что

$\mu_k(x, t, u) \omega_k(x, t, u, du)$

$$-dU_k(x, t, u) - \frac{\partial U_k}{\partial U_3} dU_3 - \frac{\partial U_k}{\partial t} dt - \frac{\partial U_k}{\partial x} dx \quad (k = 1, 2),$$

где предполагается, что

$$U_k(x, t, u) = U_k(x, t, u_1, u_2, U_3(u_1, u_2, u_3, x, t)).$$

Система квазилинейных уравнений в этом случае может быть записана в следующей характеристической форме:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dU_k}{dt}\right)_k + \left(\eta_k - \frac{\partial U_k}{\partial U_3}\right) \left(\frac{dU_3}{dt}\right)_k &= \bar{g}_k \quad (k = 1, 2), \\ \left(\frac{dU_3}{dt}\right)_3 &= \bar{g}_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\eta_k, \bar{g}_k$  — функции переменных  $U_k(x, t, u), x, t$ .

#### § 4. Преобразования систем квазилинейных уравнений

1. Преобразование систем по решению. Преобразованием зависимых и независимых переменных

$$x' = x'(x, t), \quad t' = t'(x, t), \quad v = v(x, t, u), \quad (1)$$

имеющим обратное, т. е. таким, что

$$\frac{\partial [x', t']}{\partial [x, t]} \neq 0, \quad \frac{\partial [v_1, v_2, \dots, v_n]}{\partial [u_1, u_2, \dots, u_n]} \neq 0,$$

система квазилинейных уравнений гиперболического типа переводится в некоторую новую систему квазилинейных уравнений

гиперболического типа. Характеристические направления гиперболической системы являются инвариантами преобразования (1). Это означает, что если направление  $\frac{dx}{dt} = \xi_k$  являлось характеристическим для исходной системы, то после преобразования (1) направление

$$\frac{dx'}{dt'} = \xi'_k = \frac{\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial x} \xi_k}{\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x} \xi_k}$$

будет также характеристическим.

Рассмотрим преобразование независимых переменных, применяемое в газовой динамике, которое будем называть *преобразованием независимых переменных по решению*. Пусть новые переменные  $x', t'$  связаны со старыми  $x, t$  формулами

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \varphi_1(x, t, u) dx - \psi_1(x, t, u) dt, \\ dt' &= \varphi_2(x, t, u) dx - \psi_2(x, t, u) dt. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Чтобы линии  $x' = \text{const}$ ,  $t' = \text{const}$  образовывали регулярную сеть при любых решениях  $u = u(x, t)$  исходной системы, т. е. чтобы каждой точке  $x, t$  соответствовала одна и только одна точка  $x', t'$ , достаточно, чтобы в рассматриваемой односвязной области переменных  $x, t$  выполнялись условия

$$\frac{\partial \varphi_1(x, t, u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(x, t, u)}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

$$\Delta = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 \neq 0. \quad (4)$$

В равенствах (3)  $u = u(x, t)$  — произвольное решение исходной системы; при дифференцировании должна учитываться зависимость  $u$  от  $x, t$ .

Так как равенства (3) должны иметь место для любого решения  $u = u(x, t)$  исходной системы, они сами должны быть ее следствиями. Предположим, что это имеет место и выполнено (4). Тогда из (2) следуют формулы дифференцирования

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \varphi_1 + \frac{\partial u}{\partial t'} \varphi_2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x'} \psi_1 - \frac{\partial u}{\partial t'} \psi_2. \quad (5)$$

По формулам (5) производные  $\frac{\partial u}{\partial t'}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x'}$  линейно выражаются через  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , и после подстановки в исходную систему, очевидно, снова получится система квазилинейных уравнений.

Преобразование (2) — более общее по сравнению с обычным преобразованием независимых переменных (1). Для его применимости, однако (в случае зависимости  $\varphi_i, \psi_i$  от  $u$ ), необходимо,

чтобы система квазилинейных уравнений имела в качестве следствий специальные уравнения. Как мы увидим в § 5, не всякая система квазилинейных уравнений имеет в качестве следствий хотя бы одно уравнение типа (3).

Приведем пример преобразования независимых переменных по решению. Система уравнений газовой динамики (см. гл. 2, § 2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad p = p(\rho, S), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

содержит три уравнения с тремя неизвестными  $\rho$ ,  $u$ ,  $S$ . Рассмотрим преобразование

$$dx' = \rho dx - \rho u dt, \quad dt' = dt. \quad (7)$$

В этом случае  $\varphi_1 = \rho$ ,  $\psi_1 = \rho u$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\psi_2 = -1$ ; условия (3) выполнены в силу первого уравнения (6), а условие (4) приводит к требованию  $\rho > 0$ . Итак, если  $\rho > 0$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \rho u \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x},$$

и система (6) переходит после преобразования (7) в новую систему:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial u}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t'} = 0. \quad (8)$$

В газовой динамике переменные  $x$ ,  $t$  носят название эйлеровых, а переменные  $q = x'$ ,  $t' = t$  — лагранжевых.

**2. Преобразование годографа.** Для однородной системы квазилинейных уравнений, коэффициенты которой не зависят явно от  $x$ ,  $t$ , в случае  $n = 2$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = \{u_1, u_2\}, \quad (1)$$

поменяем ролями зависимые и независимые переменные, т. е. будем считать, что  $x = x(u_1, u_2)$ ,  $t = t(u_1, u_2)$ . Простые вычисления приводят к результату

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \Delta \frac{\partial t}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\Delta \frac{\partial t}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\Delta \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta \frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial [u_1, u_2]}{\partial [x, t]}. \quad (3)$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то, подставляя формулы (2) в (1), приходим к линейной системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{11}(u) \frac{\partial t}{\partial u_2} + a_{12}(u) \frac{\partial t}{\partial u_1} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} - a_{21}(u) \frac{\partial t}{\partial u_2} + a_{22}(u) \frac{\partial t}{\partial u_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $a_{ij}(u)$  — элементы матрицы  $A(u)$ .

Такое преобразование переменных носит название *преобразования годографа*; оно используется в газовой динамике.

**3. Продолженная система.** Систему квазилинейных уравнений гиперболического типа запишем в характеристической форме:

$$\begin{aligned} l^k(x, t, u) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= \\ = l_\alpha^k \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right] &= f_k(x, t, u) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (1)$$

Во многих исследованиях наряду с системой (1) полезно рассматривать систему уравнений, в которой неизвестными являются также производные решения  $u(x, t)$ . Эта система получается дифференцированием (1) и является ее дифференциальным следствием.

Мы будем называть систему (1) и ее дифференциальные следствия *продолженной системой*.

Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = q \quad \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} = p_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = q_i \right); \quad (2)$$

тогда система (1) может быть записана в виде

$$l^k(q + \xi_k p) = l_\alpha^k(q_\alpha + \xi_k p_\alpha) = f_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Дифференцируя каждое уравнение (3) по переменным  $t, x$ , получим

$$l^k \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \bar{\mathcal{G}}_k, \quad l^k \left( \frac{\partial q}{\partial x} + \xi_k \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_k &= \frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial u_\alpha} q_\alpha - (q_\alpha + \xi_k p_\alpha) \left( \frac{\partial l_\alpha^k}{\partial t} + \frac{\partial l_\alpha^k}{\partial u_\beta} q_\beta \right) - \\ &\quad - l_\alpha^k \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial t} + \frac{\partial \xi_k}{\partial u_\beta} q_\beta \right) p_\alpha, \\ \bar{\mathcal{F}}_k &= \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial u_\alpha} p_\alpha - (q_\alpha + \xi_k p_\alpha) \left( \frac{\partial l_\alpha^k}{\partial x} + \frac{\partial l_\alpha^k}{\partial u_\beta} p_\beta \right) - \\ &\quad - l_\alpha^k \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \frac{\partial \xi_k}{\partial u_\beta} p_\beta \right) p_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из (2) следуют, как условия интегрируемости, уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6)$$

и, следовательно, уравнения (4) могут быть переписаны в виде

$$l^k \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \bar{\mathcal{G}}_k, \quad l^k \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (7)$$

где  $\bar{\mathcal{G}}_k, \bar{\mathcal{F}}_k$  являются, согласно (5), функциями от  $x, t, u, p, q$ .

Уравнения (2), (7) будем называть продолженной системой. Продолженную систему можно записать в другом представлении. Уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = q, \quad l^k \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \bar{\mathcal{G}}_k \quad (8)$$

представляют собой продолженную систему из  $2n$  уравнений, если входящие в  $\bar{\mathcal{G}}_k$  величины  $p$  исключены с помощью уравнений (3). При этом предполагается, что  $\xi_k \neq 0$  \*).

В такой форме продолженная система была введена Р. Курантом и П. Лаксом [1949].

Остановимся на замечательном свойстве продолженной системы. Как было показано, гиперболическая полулинейная система приводима к инвариантам. Для систем квазилинейных уравнений это, вообще говоря, не имеет места. Однако продолженная система любой системы квазилинейных уравнений гиперболического типа уже обладает этим свойством, т. е. приводима к инвариантам.

Действительно, обозначая

$$\mathcal{P}_k = l^k p = l^k_{\alpha} p_{\alpha}, \quad \mathcal{Q}_k = l^k q \quad (9)$$

и переходя в уравнениях (7) к переменным  $\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} &= \mathcal{F}_k(x, t, u, \mathcal{P}, \mathcal{Q}), \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial x} &= \mathcal{G}_k(x, t, u, \mathcal{P}, \mathcal{Q}), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_k &= \bar{\mathcal{F}}_k + p_{\alpha} \left[ \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial u_{\beta}} (q_{\beta} + \xi_k p_{\beta}) \right], \\ \mathcal{G}_k &= \bar{\mathcal{G}}_k + q_{\alpha} \left[ \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial l^k_{\alpha}}{\partial u_{\beta}} (q_{\beta} + \xi_k p_{\beta}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

\*) Требование  $\xi_k \neq 0$  не является существенным. Заменой переменных можно добиться того, что  $\xi_k \neq 0$  при всех  $k = 1, \dots, n$ .

Так как  $\text{Det}((l_a^k)) \neq 0$ , то величины  $p, q$  однозначно выражаются через  $\mathcal{P}, Q$  и могут быть исключены из  $\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k$ .

Присоединяя к уравнениям (10) уравнения

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = p_k = \lambda_a^k \mathcal{P}_a, \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} = q_k = \lambda_a^k Q_a, \quad (12)$$

получаем систему  $4n$  квазилинейных уравнений, записанную в инвариантах.

Можно уменьшить число уравнений до  $2n$ , если, например, к первой группе уравнений (10) присоединить первую группу уравнений (12), т. е. рассматривать систему  $2n$  уравнений в инвариантах:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} = \mathcal{F}_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} = p_k = \lambda_a^k \mathcal{P}_a, \quad (13)$$

и считать, что в функциях  $\mathcal{F}_k$  величины  $q$  исключены с помощью (3), а  $p$  — с помощью (12).

Однако вторая группа уравнений (13) неудобна для исследования. Мы преобразуем ее. Из уравнений (3) имеем

$$q_k = \lambda_a^k f_a - \lambda_a^k f_a^{\alpha} \xi_{\alpha} p_{\beta} = \lambda_a^k f_a - \lambda_a^k \xi_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha}. \quad (14)$$

Поэтому вместо системы (13) можно рассматривать систему

$$\frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} = \mathcal{F}_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} = q_k = \lambda_a^k f_a - \lambda_a^k \xi_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha}, \quad (15)$$

которая также записана в инвариантах, а функции  $\mathcal{F}_k$  суть функции от  $x, t, u, \mathcal{P}$ .

Продолженную систему (15) запишем в окончательной форме:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} = \mathcal{F}_k(x, t, u, \mathcal{P}), \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = F_k(x, t, u, \mathcal{P}). \quad (17)$$

Из формул (15), (11), (5), (3) следует, что

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}^k(x, t, u) + \mathcal{F}_a^k(x, t, u) \mathcal{P}_a + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u) \mathcal{P}_{\alpha} \mathcal{P}_{\beta}, \quad (18)$$

$$F_k = F^k(x, t, u) + F_a^k(x, t, u) \mathcal{P}_a, \quad (19)$$

где  $\mathcal{F}^k, \mathcal{F}_a^k, \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k, F^k, F_a^k$  — некоторые функции, зависящие лишь от  $x, t, u$ . Формулы для этих величин довольно громоздки, и мы не будем их здесь выписывать. Отметим, однако, что  $F^k, F_a^k$  выражаются через коэффициенты исходной системы, а  $\mathcal{F}^k, \mathcal{F}_a^k, \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k$  — через коэффициенты и их первые производные по переменным  $x, t, u$ .

Продолженная система (16), (17) будет нами в дальнейшем использована для оценки роста решения системы квазилинейных уравнений и его производных (см. § 8).

Согласно § 2 система  $n$  нелинейных уравнений гиперболического типа приводится к системе  $2n$  квазилинейных уравнений. Продолженная система для произвольной системы квазилинейных уравнений гиперболического типа сводится в свою очередь к уравнениям в инвариантах. Поэтому система  $n$  нелинейных уравнений гиперболического типа приводится к системе не более чем  $4n$  квазилинейных уравнений в инвариантах с помощью обрешетки продолженной системы.

### § 5. Консервативные системы квазилинейных уравнений

#### 1. Определения. Если уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, t, u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(x, t, u)}{\partial x} = F(x, t, u) \quad (1)$$

является следствием системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = b \quad (2)$$

для любых решений системы (2), то мы назовем его *законом сохранения системы* (2).

Пусть система (2) имеет  $m$  законов сохранения (1), соответствующих функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_m; \psi_1, \dots, \psi_m$ . Эти законы сохранения будем называть *независимыми в области  $D$* , если функции  $1, \varphi_1(x_0, t_0, u), \dots, \varphi_m(x_0, t_0, u)$  линейно независимы при всех  $x_0, t_0, u$  из рассматриваемой области  $D$ .

Если  $\varphi = \varphi(x, t)$ , то, согласно этому определению, равенство (1) не является независимым законом сохранения.

Если система (2) имеет  $n$  независимых законов сохранения, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial [\varphi_1, \dots, \varphi_n]}{\partial [u_1, \dots, u_n]} \neq 0,$$

то мы назовем ее *консервативной*, в противном случае — *неконсервативной*.

Итак, консервативная система (2) может быть приведена к виду

$$\frac{\partial \varphi(x, t, u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(x, t, u)}{\partial x} = F(x, t, u), \quad (3)$$

где под  $\varphi, \psi, F$  мы понимаем теперь векторы с  $n$  компонентами. Заметим, что систему типа (3) часто называют «*дивергентной*», иногда этот термин относят лишь к случаю  $F = 0$ .

Получим уравнения, которые служат для определения всех законов сохранения системы (2), т. е. функций  $\varphi, \psi$ . Для этого

умножим систему (2) на вектор  $\alpha = \alpha(x, t, u) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  и потребуем, чтобы результат имел форму (1).

Приходим к уравнениям

$$\alpha_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ji} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$F = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \Phi'_t + \Psi'_x.$$
(4)

Исключая из этих уравнений величины  $\alpha_i$ , получим систему, в которую входят лишь две неизвестные функции  $\Phi(x, t, u)$ ,  $\Psi(x, t, u)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x, t, u) \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$
(5)

Переменные  $x, t$  входят в коэффициенты этой системы как параметры.

Множество линейно независимых решений системы (5) определяет множество независимых законов сохранения системы (2).

Если система (2) линейна или полулинейна, то она консервативна. В самом деле, в этом случае  $A = A(x, t)$  и система (5) имеет  $n$  независимых решений:

$$\varphi_k(x, t, u) = u_k, \quad \psi_k(x, t, u) = a_{ka}(x, t) u_a \quad (k = 1, \dots, n).$$

При  $n \leq 2$  система (5) является либо недоопределенной, либо определенной и имеет бесчисленное количество решений. При  $n \geq 3$  система (5) переопределена и не имеет, вообще говоря, ни одного решения  $\varphi, \psi$ , которое зависело бы существенно от  $u$ . Доказательство этого утверждения можно получить на примере системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0,$$

для которой легко устанавливается, что система (5) не имеет нетривиальных решений (см. Б. Л. Рождественский [1959а]).

**2. Законы сохранения газовой динамики.** В качестве примера (см. Б. Л. Рождественский [1957]) рассмотрим систему уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах (гл. 2, § 2, п. 8), которую запишем в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(V, S)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$
(1)

Поставим вопрос об отыскании всех законов сохранения этой системы уравнений (очевидно, система (1) уже записана в виде законов сохранения и является поэтому консервативной).

Будем предполагать, что давление  $p = p(V, S)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией удельного объема  $V$  и энтропии  $S$ .

Для системы (1) выпишем соответствующую ей систему уравнений (5.1.5) относительно  $\varphi = \varphi(V, u, S)$  и  $\psi = \psi(V, u, S)$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial V} = p'_V(V, S) \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = - \frac{\partial \varphi}{\partial V}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial S} = p'_S(V, S) \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \quad (4)$$

Будем искать дважды непрерывно дифференцируемые функции  $\varphi, \psi$ , удовлетворяющие системе уравнений (2) — (4). Комбинируя равенства (2) и (4), получим

$$p'_S(V, S) \frac{\partial \psi}{\partial V} - p'_V(V, S) \frac{\partial \psi}{\partial S} = 0,$$

что означает функциональную зависимость при фиксированном переменном  $u$  величин  $\psi, p$ , т. е.

$$\psi = \Psi(p, u). \quad (5)$$

Учитывая (5), сводим систему (2) — (4) к двум уравнениям

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}(p, u) = \frac{\partial \varphi(V, u, S)}{\partial u}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(p, u) = - \frac{\partial \varphi(V, u, S)}{\partial V}. \quad (7)$$

Дифференцируя (6) по переменному  $V$  и учитывая (7), получаем

$$p'_V(V, S) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(p, u)}{\partial p^2} = - \frac{\partial^2 \Psi(p, u)}{\partial u^2}. \quad (8)$$

Будем рассматривать случай, когда величина  $p'_V$  функционально независима (как функция переменных  $V, S$ ) с давлением  $p(V, S)$ , т. е.

$$p'_V p''_{VS} - p'_S \cdot p''_{VV} \neq 0. \quad (9)$$

Если это так <sup>\*</sup>), то в левой части (8) стоит функция трех переменных, а в правой — только двух. Поэтому равенство (8) возможно лишь в том случае, когда

$$\frac{\partial^2 \Psi(p, u)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \Psi(p, u)}{\partial u^2} = 0. \quad (10)$$

<sup>\*</sup>) Условие (9) исключает случай  $p = F(V + f(S))$ , где  $F$  и  $f$  — произвольные гладкие функции.

Отсюда имеем общее решение системы (2) — (4) для  $\psi(V, u, S)$ :

$$\psi(V, u, S) = \Psi(p, u) = C_1 u + C_2 p + C_3 u p, \quad (11)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — постоянные числа.

Подставляя (11) в (6) и (7), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = -C_3 p - C_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = C_3 u + C_2. \quad (12)$$

Из второго начала термодинамики (гл. 2, § 1, п. 1, ф-лы (16))  $p = -\frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V}$ , поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = C_3 \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V} - C_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = C_3 u + C_2. \quad (13)$$

Интегрируя уравнения (13), находим общее решение системы (2) — (4) относительно  $\Phi = \psi(V, u, S)$ :

$$\Phi(V, u, S) = -C_1 V + C_2 u + C_3 \left[ \varepsilon(V, S) + \frac{u^2}{2} \right] + f(S), \quad (14)$$

где  $f(S)$  — произвольная функция энтропии.

Величина  $\varepsilon(V, S)$  есть внутренняя энергия газа и, согласно второму началу термодинамики, определена равенством

$$d\varepsilon = T dS - p dV. \quad (15)$$

Итак, если выполнено (9), то мы нашли общее представление всех законов сохранения рассматриваемой системы

$$\Phi = -C_1 V + C_2 u + C_3 \left[ \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right] + f(S), \quad (16)$$

$$\psi = C_1 u + C_2 p + C_3 u p + 0 \cdot f(S). \quad (17)$$

Легко заметить, что формулы (16), (17) содержат как законы сохранения объема, импульса и энтропии, выраженные уравнениями системы (1), так и еще один независимый закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0,$$

который соответствует случаю  $C_3 = 1, C_1 = C_2 = f(S) = 0$  и носит название *закона сохранения энергии*. Отметим, что в случае, когда нарушено (9), система (1) может иметь дополнительные законы сохранения.

Из нашего доказательства вытекает, что при выполнении условия (9) уравнения газовой динамики (1) не имеют никаких других законов сохранения, кроме известных законов сохранения массы, импульса, энергии и энтропии.

В качестве еще одного примера рассмотрим систему

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (18)$$

где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(u_1, \dots, u_n)$  — скалярные функции (см. С. К. Годунов [1961a]). Система (18) является гиперболической, если матрица

$$\mathcal{L}_{uu} = \left( \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_i \partial u_j} \right) \right)$$

явноопределенная.

Система уравнений (18), очевидно, консервативна. Легко проверяется, что она имеет еще один закон сохранения, независимый с законами сохранения (18), если  $\mathcal{L}_{uu}$  — непостоянная матрица:

$$\varphi = u_\alpha \mathcal{L}_{u_\alpha} - \mathcal{L}, \quad \psi = u_\alpha \mathcal{L}_{u_\alpha}^1 - \mathcal{L}^1.$$

Интересно отметить, что к виду (18) приводятся уравнения газовой динамики, а также некоторые другие системы уравнений математической физики.

**3. Потенциал решения консервативной системы квазилинейных уравнений.** Рассмотрим консервативную систему  $n$  квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = F.$$

Согласно определению консервативности

$$\frac{\partial [\varphi_1, \dots, \varphi_n]}{\partial [u_1, \dots, u_n]} \neq 0.$$

Поэтому в качестве новых независимых переменных можно выбрать величины  $u_i = \varphi_i(x, t, u)$  и рассматривать лишь консервативные системы специального вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x, t, u)}{\partial x} = F(x, t, u). \quad (1)$$

Пусть известно решение  $u(x, t) \in C_1$  системы (1). Найдем вектор  $\mathcal{F}(x, t)$  такой, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial x} = F(x, t, u(x, t)).$$

Очевидно, вектор  $\mathcal{F}(x, t)$  определен неоднозначно; для определенности положим

$$\mathcal{F}(x, t) = \int_{x_0(t)}^x F(\xi, t, u(\xi, t)) d\xi, \quad (2)$$

где  $x = x_0(t)$  — гладкая кривая, однозначно проектирующаяся на ось  $x = 0$ . Система (1) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x, t, u) - \mathcal{F}(x, t)] = 0.$$

Интегрируя это уравнение по области  $\mathcal{G}_C$ , ограниченной контуром  $C$ , заключаем, что контурный интеграл

$$\oint_C u dx - [\varphi(x, t, u) - \mathcal{F}(x, t)] dt$$

обращается в нуль для любого кусочно-гладкого замкнутого контура  $C$ . Поэтому криволинейный интеграл

$$\Phi(x, t) = \int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} u dx - [\varphi - \mathcal{F}] dt \quad (3)$$

не зависит от пути интегрирования и определяет вектор  $\Phi(x, t) \in C_2$ , если  $\varphi \in C_1$ ,  $F \in C_0$ .

Из (3) вытекают формулы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\varphi(x, t, u) + \mathcal{F}(x, t).$$

Исключая  $u$  и пользуясь формулой (2), находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi\left(x, t, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \int_{x_0(t)}^x F\left(\xi, t, \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi}\right) d\xi. \quad (4)$$

Теперь систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (4) можно рассматривать самостоятельно, независимо от (1). Если известно решение  $\Phi(x, t) \in C_2$  системы (4), то  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \in C_1$  есть решение системы (1). Сводя систему (1) к системе (4), мы можем рассматривать, таким образом, менее гладкие решения  $u(x, t)$  системы (1) как производные решений  $\Phi(x, t)$  системы (4), имеющих большую гладкость.

По этой причине такой прием находит применение при рассмотрении обобщенных (например, разрывных) решений систем квазилинейных уравнений.

Вектор  $\Phi(x, t)$  будем называть *потенциалом решения*  $u(x, t)$  системы уравнений (1) (см. Б. Л. Рождественский [1958a]).

Отметим некоторые частные случаи. Если  $F \equiv 0$ , то система (4) становится нелинейной системой типа Коши — Ковалевской. Сведение системы (1) к системе (4) в этом случае следует сравнить с обратным приемом — сведением нелинейной системы

в системе квазилинейных уравнений (§ 2). В случае, если система (1) линейна, то линейна и система (4). Поэтому указанный процесс повышения гладкости решения для систем линейных уравнений можно применять и дальше.

### § 6. Постановка задачи Коши для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа

1. **Постановка задачи.** Для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = b, \quad (1)$$

которую также будем записывать в характеристической форме

$$l^k \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = f_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

рассмотрим следующую задачу:

В некоторой окрестности дуги  $a \leq \tau \leq b$  кривой  $\mathcal{L}$

$$x = x(\tau), \quad t = t(\tau)$$

найти решение  $u(x, t)$  системы (1), принимающее на  $\mathcal{L}$  заданные значения

$$u(x(\tau), t(\tau)) = u^0(\tau), \quad a \leq \tau \leq b. \quad (2)$$

Условия (2) называются *начальными*, вектор-функция  $u^0$  — *начальной функцией*, а кривая  $\mathcal{L}$  — *начальной кривой*.

Задача (1), (2) называется задачей с начальными данными, или *задачей Коши*.

Задача Коши для уравнения (1) интерпретируется геометрически как задача построения в пространстве  $n+2$  измерений поверхности  $(x, t, u)$  двумерной интегральной поверхности  $u = u(x, t)$ , проходящей через заданную кривую

$$x = x(\tau), \quad t = t(\tau), \quad u = u^0(\tau),$$

которую мы также будем называть *начальной*.

Для уточнения постановки задачи Коши надо указать:

а) гладкость матрицы  $A(x, t, u)$ , вектора  $b(x, t, u)$  (либо  $l^k, \xi_k, f_k$ ), начальной кривой и функции  $u^0(\tau)$  (эти величины мы будем называть *входными данными задачи Коши*);

б) область  $\mathcal{O}$  переменных  $x, t$ , в которой ищется решение задачи Коши.

Эти вопросы будут рассмотрены в последующих параграфах при построении решения задачи Коши.

Заметим, что, по определению, решение  $u(x, t)$  системы (1) непрерывно дифференцируемо ( $u \in C_1$ ). Если  $u(x, t)$  обладает

меньшей гладкостью, но в каком-либо смысле удовлетворяет системе (1), то функция  $u(x, t)$  называется *обобщенным решением системы (1)*.

В этой главе мы построим решение  $u(x, t) \in C_1$  для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа; для линейной и полулинейной систем будет построено обобщенное решение  $u(x, t) \in C$ . Следуя К. О. Фридрихсу, мы будем называть последнее *решением задачи Коши в широком смысле*.

**2. Разрешимость задачи Коши. Характеристика.** Пусть  $x(\tau)$ ,  $t(\tau)$ ,  $u^0(\tau) \in C_1$ ,  $l^k(x, t, u)$ ,  $\xi_k$ ,  $f_k \in C$  и некоторая вектор-функция  $u(x, t) \in C_1$  принимает на кривой  $\mathcal{L}$  значение  $u^0(\tau)$ , а ее производные  $p$ ,  $q$  удовлетворяют на линии  $\mathcal{L}$  уравнениям системы (6.1.1).

Поставим вопрос о возможности определения (на линии  $\mathcal{L}$ ) производных  $p$ ,  $q$  по этим данным, т. е. вопрос о существовании функции  $u(x, t) \in C_1$ , удовлетворяющей этим требованиям.

На линии  $\mathcal{L}$  имеем равенства

$$u(x(\tau), t(\tau)) = u^0(\tau), \quad l^k [q + \xi_k p] = f_k, \quad (1)$$

где  $l^k$ ,  $\xi_k$ ,  $f_k$ , очевидно, являются известными на  $\mathcal{L}$  функциями переменного  $\tau$ .

Дифференцируя  $u(x(\tau), t(\tau)) = u^0(\tau)$  по  $\tau$ , получим

$$t'(\tau) q + x'(\tau) p = \frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \varphi(\tau), \quad (2)$$

и, следовательно,  $\varphi(\tau) \in C$ .

Уравнения (1) и (2) образуют систему  $2n$  уравнений для определения (на линии  $\mathcal{L}$ ) производных  $p$ ,  $q$ . Так как матрица  $\left( \begin{pmatrix} l_a^k \\ l_a^k \end{pmatrix} \right)$  неособая, то, исключая из уравнений (1), (2) вектор  $q$ , получим

$$[t'(\tau) \xi_k - x'(\tau)] l^k p = [t'(\tau) \xi_k - x'(\tau)] l_a^k p_a = \bar{f}_k, \quad (3)$$

где  $\bar{f}_k$  — непрерывная функция переменного  $\tau$ . Определитель  $D(\tau)$  системы (3) легко вычисляется:

$$D(\tau) = [\text{Det} \left( \begin{pmatrix} l_a^k \end{pmatrix} \right)] \prod_{k=1}^n [t'(\tau) \xi_k - x'(\tau)] = \text{Det} \Lambda \prod_{k=1}^n [t'(\tau) \xi_k - x'(\tau)].$$

Он отличен от нуля, если при всех  $k=1, \dots, n$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\mathcal{L}} = \frac{x'(\tau)}{t'(\tau)} \neq \xi_k = \xi_k(x(\tau), t(\tau), u^0(\tau)). \quad (4)$$

Мы предполагаем, что  $|x'(\tau)| + |t'(\tau)| \neq 0$ . Если  $t'(\tau) = 0$ , то заведомо  $D(\tau) \neq 0$ , так как  $\xi_k$  ограничены.

Итак, если выполнены условия (4), то система уравнений (3) имеет единственное решение  $p = p(\tau)$  и, следовательно, произ-

водные  $p, q$  функции  $u(x, t)$  однозначно определяются на линии  $\mathcal{L}'$  из условий (1).

Пусть теперь  $u(x, t) \in C_2$ ;  $x(\tau), t(\tau), u^0(\tau) \in C_2$ ,  $l^k, \xi_k, f_k \in C_1$ . Если  $u = u^0$  на  $\mathcal{L}$ , первые производные  $u(x, t)$  удовлетворяют на  $\mathcal{L}$  уравнениям (6.1.1), а вторые производные  $u(x, t)$  удовлетворяют на  $\mathcal{L}$  дифференциальным следствиям системы (6.1.1) (т. е. уравнениям, полученным формальным дифференцированием системы (6.1.1) по переменным  $x, t$ ), то при соблюдении условий (4) на  $\mathcal{L}$  однозначно определяются также и вторые производные  $u(x, t)$ .

Точно так же, если выполнены условия (4), можно определить на  $\mathcal{L}$  производные любого порядка  $m$  функции  $u(x, t)$ , если выполнены условия (1) и, кроме того, все производные  $u$  до порядка  $m$  включительно удовлетворяют на  $\mathcal{L}$  всем дифференциальным следствиям уравнений (6.1.1) до порядка  $m$  включительно. При этом, конечно, входные данные должны быть достаточно гладки.

Заметим, что, как нетрудно сообразить, в этих рассуждениях достаточно говорить не о всех дифференциальных следствиях, а лишь о тех, которые получаются дифференцированием уравнений (6.1.1) в каком-либо фиксированном направлении, не совпадающем с направлением кривой  $\mathcal{L}$  (так называемом *выводящем* направлении). Таким направлением является, например, направление нормали.

Подобная процедура определения производных может быть продолжена как угодно далеко, если входные данные аналитичны, и позволяет построить для таких данных аналитическое решение задачи (6.1.1), (6.1.2). Это обстоятельство составляет аналитическую основу хорошо известного метода Коши — Ковалевской.

Если при всех  $k = 1, \dots, n$  на кривой  $\mathcal{L}$  выполнены условия (4), задачу Коши будем называть *нормальной*.

Кривую  $\mathcal{L}$ , заданную в пространстве  $n + 2$  переменных  $x, t$ , и уравнениями

$$x = x(\tau), \quad t = t(\tau), \quad u = u^0(\tau), \quad (5)$$

называют *характеристикой номера  $k_0$*  системы (6.1.1), если на этой кривой выполнено равенство

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\mathcal{L}} = \frac{x'(\tau)}{t'(\tau)} = \xi_{k_0}(x(\tau), t(\tau), u^0(\tau)). \quad (6)$$

В случае, когда на  $\mathcal{L}'$  совпадают несколько характеристических значений  $\xi_k$ , кривая  $\mathcal{L}'$  может оказаться характеристикой сразу нескольких номеров  $k$ .

Иногда мы будем называть характеристикой также и проекцию кривой (5) на плоскость переменных  $(x, t)$ , имея, однако, в виду выполнение на ней равенства (6).

Пусть кривая  $\mathcal{L}$  в условиях задачи Коши — характеристика номера  $k_0$ . Левая часть уравнения системы (3), соответствующего  $k = k_0$ , обращается тогда в нуль. Если при этом правая часть этого уравнения  $\bar{f}_{k_0}(\tau)$  не обращается тождественно в нуль, то система уравнений (3) вообще не имеет решений. Поэтому не существует функции  $u(x, t) \in C_1$ , принимающей на  $\mathcal{L}$  заданные значения  $u^0(\tau)$ , которая удовлетворяла бы на  $\mathcal{L}$  системе (6.1.1). Тем более не существует решения  $u(x, t) \in C_1$  задачи Коши (6.1.1), (6.1.2).

Таким образом, если начальная кривая — характеристика, то начальные условия (6.1.2) и система (6.1.1), вообще говоря, противоречат друг другу, и задача Коши неразрешима \*).

Чтобы задача Коши имела смысл и в этом случае, необходимо потребовать, чтобы  $\bar{f}_{k_0}(\tau) \equiv 0$ .

Итак, если начальная кривая есть характеристика номера  $k_0$ , то начальные данные нельзя задавать произвольно; они должны удовлетворять условию

$$\bar{f}_{k_0}(\tau) = t'(\tau) \bar{f}_{k_0}(x(\tau), t(\tau), u^0(\tau)) - l^{k_0}(x(\tau), t(\tau), u^0(\tau)) \frac{du^0(\tau)}{dt} \equiv 0, \quad (7)$$

которое называется *условием разрешимости*.

Пусть начальная кривая  $\mathcal{L}$  — характеристика номера  $k_0$  и выполнено условие разрешимости (7). Тогда система (3) совместна, но имеет бесконечно много решений. Следовательно, решение  $u(x, t)$  задачи Коши не определяется однозначно начальными условиями (6.1.2) и существует бесконечно много решений системы (6.1.1), удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям. Таким образом, мы приходим к общему определению характеристики системы (6.1.1):

*Характеристикой* называется такая кривая  $\mathcal{L}$ , для которой задача Коши либо неразрешима, либо разрешима, но не единственным образом.

Для однозначного определения решения  $u(x, t)$  в случае, когда кривая  $\mathcal{L}$  — характеристика и выполнены условия разрешимости, можно поставить некоторые дополнительные условия. Примеры таких задач рассматриваются в § 11.

С задачей Коши связан вопрос о продолжении решения  $u(x, t)$  через кривую  $\mathcal{L}$ . Пусть решение  $u(x, t) \in C_1$  известно по одну сторону от кривой  $\mathcal{L}$  и его требуется продолжить по другую сторону. Эта задача сводится к задаче Коши с кривой  $\mathcal{L}$  в качестве начальной.

\*) Из этого рассмотрения следует другое определение характеристики как кривой  $\mathcal{L}$ , на которой линейная комбинация уравнений рассматриваемой системы содержит лишь внутренние производные, т. е. производные по параметру  $\tau$  в направлении кривой  $\mathcal{L}$ .

Если  $\mathcal{L}$  не является характеристикой, то эта задача Коши нормальна и вопрос о продолжении решения решается однозначно. При этом из условия непрерывности продолжения следует непрерывность всех производных  $u(x, t)$ , которые существуют на линии  $\mathcal{L}$ , в частности, следует, что  $u(x, t) \in C_1$ . Если же кривая  $\mathcal{L}$  — характеристика, то соответствующая задача Коши тем не менее разрешима, ибо условие разрешимости (7), очевидно, выполнено (так как  $u(x, t)$  — решение по одну сторону от  $\mathcal{L}$ ). Однако решается она неоднозначно.

Рассмотрим, например, непрерывное продолжение. Как мы видели, значения  $u(x, t)$  на кривой  $\mathcal{L}$  не определяют однозначно ее первых производных  $p, q$ ; поэтому непрерывное продолжение решения с разрывом первых производных на характеристике  $\mathcal{L}$  возможно бесчисленным множеством способов. Если же потребовать непрерывности на  $\mathcal{L}$  первых производных, то разрыв могут испытывать производные более высокого порядка, так что и в этом случае продолжение определяется неоднозначно.

Итак, характеристика — это линия, через которую решение продолжается неоднозначно.

Задача продолжения решения  $u(x, t)$  через характеристику  $\mathcal{L}$  однозначно разрешается лишь в случае аналитических решений, как, очевидно, всякая задача об аналитическом продолжении функции.

Теперь основное внимание уделим нормальной задаче Коши. Преобразованием переменных  $x' = x'(x, t)$ ,  $t' = t'(x, t)$ , переводящим кривую  $\mathcal{L}$  в отрезок оси  $t' = 0$ , общая задача сводится к задаче Коши специального типа, с начальными условиями, заданными на оси  $t = 0$ : найти решение  $u(x, t)$  системы (6.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (8)$$

Из ограниченности величин  $\xi_k$  следует, что такая задача Коши нормальна. Мы будем решать задачу Коши (6.1.1), (8) лишь в полуплоскости  $t \geq 0$ . Построение решения  $u(x, t)$  в полуплоскости  $t \leq 0$  проводится аналогично.

**3. Область зависимости и область определенности. Понятие о корректности задачи Коши.** Пусть известно решение  $u(x, t)$  системы (6.1.1), принимающее начальные значения (6.2.8). Через точку  $M = (x^0, t^0)$  полуплоскости  $t > 0$  проведем характеристики  $x = x_k(x^0, t^0, \tau)$ , заданные уравнениями

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k(x_k, \tau, u(x_k, \tau)) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

до пересечения их с осью  $t = 0$ . Пусть они пересекают ось  $t = 0$  в некоторых точках, крайние из которых обозначены  $a'$  и  $b'$

( $a' < b'$ ) (рис. 1.2). Отрезок начальной оси  $t = 0$   $a' \leq x \leq b'$  называется *областью зависимости решения*  $u(x, t)$  в точке  $\mathcal{M}$ .

*Областью определенности*  $G$  решения задачи Коши называют часть полуплоскости  $t \geq 0$ , состоящую из всех точек  $(x, t)$ , для которых область зависимости  $a' \leq x \leq b'$  принадлежит начальному отрезку  $[a, b]$ , т. е.  $[a', b'] \subseteq [a, b]$ .

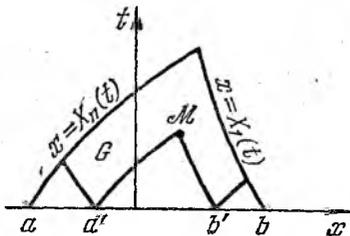


Рис. 1.2.

Наконец, *областью влияния* отрезка  $a' \leq x \leq b'$  начальной оси называют область  $G'$  полуплоскости  $t \geq 0$ , состоящую из всех точек  $(x, t)$ , область зависимости которых имеет непустое пересечение с отрезком  $[a', b']$ .

Поскольку характеристики системы могут быть найдены лишь одновременно с решением  $u(x, t)$ , определение области определенности представляется трудной задачей. Дело обстоит значительно проще в случае полулинейной системы, когда  $\xi_k = \xi_k(x, t)$ . В этом случае область определенности  $G$  задается условиями

$$G: t \geq 0, \quad X_n(t) \leq x \leq X_1(t),$$

где через  $X_1(t)$ ,  $X_n(t)$  обозначены решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_n(t)}{dt} = \max_{k=1, \dots, n} \{\xi_k(X_n(t), t)\}, \quad \frac{dX_1(t)}{dt} = \min_{k=1, \dots, n} \{\xi_k(X_1(t), t)\},$$

принимающие при  $t = 0$  значения  $X_n(0) = a$ ,  $X_1(0) = b$ .

В случае системы квазилинейных уравнений априорное определение  $G$  затруднительно. Однако, если известно, что  $\|u(x, t)\| \leq U$ , то справедливо утверждение:

$$\bar{G} \subseteq G,$$

где

$$\bar{G}: t \geq 0, \quad \bar{X}_n(t) \leq x \leq \bar{X}_1(t),$$

$$\frac{d\bar{X}_n}{dt} = \max_{k=1, \dots, n} \max_{\|u\| \leq U} \{\xi_k(\bar{X}_n(t), t, u)\}, \quad \bar{X}_n(0) = a,$$

$$\frac{d\bar{X}_1}{dt} = \min_{k=1, \dots, n} \min_{\|u\| \leq U} \{\xi_k(\bar{X}_1(t), t, u)\}, \quad \bar{X}_1(0) = b.$$

Задачу Коши называют *корректной* или *корректно поставленной*, если ее решение  $u(x, t)$  существует, единственно и непрерывным образом зависит от входных данных. Разумеется, вопрос о метрике, в которой имеет место непрерывная зависимость, зависит от классов рассматриваемых решений и входных

данных и решается в каждом из этих классов по-разному. При доказательстве теорем существования решения задачи Коши будет указано, в каком смысле имеет место непрерывная зависимость решений от входных данных.

Поясним введенные понятия на примере линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Инварианты

$$r_k = I^k u = I_{\alpha}^k u_{\alpha} \quad (2)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

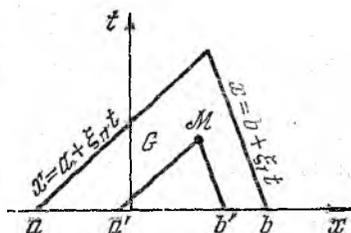


Рис. 1.3.

т. е. система (1) распадается на  $n$  независимых уравнений. Характеристики системы (1) — прямые

$$x = x_k = x_k^0 + \xi_k t.$$

Следовательно, область определенности решения задачи Коши для системы (1) есть треугольник

$$G: t \geq 0, \quad a + \xi_n t \leq x \leq b + \xi_1 t,$$

и область зависимости решения в точке  $M(x, t)$  есть отрезок  $[a', b']$  оси  $t=0$ , где  $a' = x - \xi_n t$ ,  $b' = x - \xi_1 t$  (рис. 1.3).

Функции  $r_k(x, t)$  легко определяются:

$$r_k(x, t) = f_k(x - \xi_k t),$$

где  $f_k$  — произвольные функции.

Если поставлены начальные условия

$$u(x, 0) = u^0(x),$$

то, согласно (2),

$$r_k(x, 0) = I^k u^0(x) = r_k^0(x).$$

Отсюда

$$r_k(x, t) = r_k^0(x - \xi_k t) = I^k u^0(x - \xi_k t) = I_{\alpha}^k u_{\alpha}^0(x - \xi_k t).$$

Возвращаясь по формулам (2) к функциям  $u$ , получим

$$u_k(x, t) = \lambda_{\alpha}^k I_{\beta}^{\alpha} u_{\beta}^0(x - \xi_{\alpha} t).$$

Из этой формулы непосредственно вытекает непрерывная зависимость решения задачи Коши системы (1) с постоянными коэффициентами от входных данных — матрицы  $A$  и начальных функций  $u^0(x)$ .

**4. Метод характеристик и обзор результатов.** В §§ 7, 8 будет подробно изложено применение метода характеристик к доказательству основных теорем о разрешимости задачи Коши. Здесь мы лишь кратко опишем идею метода характеристик с тем, чтобы читатель, не интересующийся деталями, имел представление о методе характеристик и полученных результатах, не читая доказательств соответствующих теорем.

Пусть для системы

$$l^k(x, t, u) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = f_k(x, t, u) \quad (1)$$

поставлены начальные условия

$$u(x, 0) = u^0(x). \quad (2)$$

Для простоты считаем, что  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ; величины  $l^k$ ,  $\xi_k$ ,  $f_k$ ,  $u^0$  предполагаем достаточно гладкими функциями своих переменных.

Допустим, что в полосе  $0 \leq t \leq t_0$  известно гладкое решение  $u(x, t)$  задачи (1), (2). Функции

$$\bar{l}^k(x, t) = l^k(x, t, u(x, t)), \quad \bar{\xi}_k = \xi_k(x, t, u(x, t)), \\ \bar{f}_k = f_k(x, t, u(x, t))$$

можно тогда считать функциями переменных  $x, t$ , а систему (1) рассматривать как систему линейных уравнений

$$\bar{l}^k \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \bar{f}_k$$

и записать ее в инвариантах:

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = \bar{g}_k(x, t). \quad (3)$$

Здесь функции  $\bar{g}_k(x, t)$  выражаются через  $u(x, t)$ ,  $\bar{f}_k$ ,  $\bar{l}^k$ ,  $\bar{\xi}_k$  и первые производные от  $\bar{l}^k$ .

Каждое из уравнений (3) может быть проинтегрировано. В самом деле, если обозначить через  $x = x_k(x^0, t^0, \tau)$  решение задачи

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \bar{\xi}_k(x_k, \tau), \quad x_k|_{\tau=t^0} = x^0,$$

то выражение  $\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial}{\partial x}$  есть оператор дифференцирования по переменному  $t$  в направлении характеристики  $x = x_k(x^0, t^0, t)$ ; поэтому

$$r_k(x, t) = r_k^0(x_k(x, t, 0)) + \int_0^t \bar{g}_k(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $r_k^0$  равны, в соответствии с (3.1.2),

$$r_k^0(x) = \bar{l}^k(x, 0) u^0(x) = l^k(x, 0, u^0(x)) u^0(x).$$

Ввиду гиперболичности системы (1) матрица  $((\bar{l}_\alpha^k))$  неособая, поэтому из (4) может быть определена  $u(x, t)$ :

$$u_k(x, t) = \bar{\lambda}_\alpha^k(x, t) r_\alpha(x, t), \quad \bar{\lambda}_\alpha^k = \lambda_\alpha^k(x, t, u(x, t))$$

(см. формулу (3.1.4)).

Однако решение  $u(x, t)$  нам неизвестно и, следовательно, неизвестны величины  $\bar{l}^k, \bar{\xi}_k, \bar{f}_k$ . Поэтому, за исключением простейших случаев, построение решения  $u(x, t)$  не сводится к указанной несложной процедуре, а требует применения метода последовательных приближений.

Пусть в полосе  $0 \leq t \leq t_0$  известно приближенное значение  $u(x, t)$  решения задачи Коши (1), (2). Тогда мы сможем определить величины  $\bar{l}^{(s)}, \bar{\xi}_k^{(s)}, \bar{f}_k^{(s)}$  и указанным выше способом найти следующее приближение  $u^{(s+1)}(x, t)$ .

Таким образом, приближение  $u^{(s+1)}(x, t)$  можно рассматривать как результат применения к  $u^{(s)}(x, t)$  некоторого оператора  $T$ :

$$u^{(s+1)}(x, t) = Tu^{(s)}(x, t).$$

Этот оператор является нелинейным и содержит операции дифференцирования по  $x, t$  и интегрирования вдоль характеристик. Решение  $u(x, t)$  задачи (1), (2) при таком подходе удовлетворяет уравнению

$$u(x, t) = Tu(x, t),$$

которое, очевидно, символически описывает задачу Коши (1), (2). Для доказательства сходимости последовательных приближений  $\{u^{(s)}(x, t)\}$  прежде всего необходимо установить их равномерную ограниченность в некоторой полосе  $0 \leq t \leq t_0$ . После этого доказательство сходимости сводится к установлению полной непрерывности оператора  $T$  (т. е. того, что он отображает всякое ограниченное множество в компактное). Наконец, покажется, что предел обладает нужной гладкостью и является решением нашей задачи. Обычно этот последний этап связан

с исследованием последовательности производных  $\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x}$ . Эти вопросы детально изучаются в следующих двух параграфах.

Первые результаты по существованию и единственности решения задачи Коши были получены методом Коши — Ковалевской для систем уравнений типа Коши — Ковалевской в предположении аналитичности входных данных задачи Коши. Эти обременительные ограничения снижают ценность полученных результатов, так как задачу Коши для уравнений гиперболического типа желательно рассмотреть при минимальных требованиях гладкости входных данных.

Г. Леви [1927] показал, что, по существу, решение системы линейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными сводится к решению задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта работа положила начало классическому методу характеристик \*).

Мы кратко изложим здесь результаты, полученные в последнее время в вопросе о разрешимости задачи Коши для систем уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными.

К. О. Фридрихс [1948] рассмотрел вопрос о существовании и единственности решения задачи (1), (2) для систем линейных, полулинейных и квазилинейных уравнений. Для линейной системы К. О. Фридрихс предполагает непрерывную дифференцируемость  $l^k(x, t)$ , липшиц-непрерывность  $\xi_k(x, t)$  и непрерывность  $f_k(x, t, u) = f^k(x, t) + f^k_\alpha(x, t)u_\alpha$ . При этих условиях он устанавливает существование решения в широком смысле в предположении лишь непрерывности  $u^0(x)$  (понятие решения в широком смысле будет рассмотрено в § 7). Для системы квазилинейных уравнений Фридрихс требует, чтобы  $l^k_\alpha, \xi_k \in C_2, f_k \in C_1, u^0(x) \in C_2$ . При этом доказывается существование решения  $u(x, t) \in C_2$ .

Р. Курант и П. Лакс [1949] пользуются представлением продолженной системы в инвариантах. Несмотря на изящество доказательств, в этой работе делаются более жесткие предположения о гладкости входных данных. Так, например, от начальных функций  $u^0(x)$  требуется существование третьих производных.

В работах А. Дуглиса [1952] и Ф. Хартмана и А. Винтнера [1952] решение задачи (1), (2) строится в предположении непрерывной дифференцируемости входных данных. А. Дуглис строит решение сначала для более гладких входных данных; указанные входные данные рассматриваются с помощью предельного перехода. Ф. Хартман и А. Винтнер строят решение при указанных предположениях непосредственно методом характеристик. Существенную роль в их построении играет лемма 2, которая приводится в следующем пункте.

\*) Для одного уравнения метод характеристик был развит раньше.

Итак, минимальное требование к входным данным, при котором в настоящее время доказаны существование и единственность решения  $u(x, t) \in C_1$ , — это требование их непрерывной дифференцируемости. К этому следует добавить, что, как показывают простейшие примеры, решения  $u(x, t) \in C_1$  не существует, если входные данные недифференцируемы.

Заметим, что некоторые теоремы существования могут быть получены как специализация на случай двух независимых переменных более общих теорем. Так, например, в работе И. Г. Петровского [1937], С. А. Христиановича [1937] были получены общие результаты, из которых, в частности, вытекают теоремы существования для интересующего нас случая. Отметим, однако, что при этом требования, предъявляемые к входным данным, естественно, завышены.

Наконец, сделаем несколько замечаний по поводу изложения этих вопросов, принятого в этой книге. Задача Коши для линейной системы изучается на базе работы К. О. Фридрихса; теорема существования доказывается при тех же предположениях.

Для систем квазилинейных уравнений за основу принят метод характеристик в изложении Ф. Хартмана и А. Винтнера. Несколько существенных деталей отличают, однако, наше изложение. Упомянем некоторые из них. Доказательство ограниченности последовательных приближений и их производных обычно весьма громоздко в методе характеристик. Оценки роста с помощью «мажорантной системы», употребляемые нами, по существу, значительно упрощают и делают более общими эти оценки, избавляя от необходимости арифметического подсчета. Другое отличие нашего изложения состоит в доказательстве равномерной сходимости в области определенности  $G$  не только последовательных приближений, но и последовательностей их первых производных.

#### 5. Две леммы.

**Лемма 1.** Пусть непрерывная на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  вектор-функция  $u(t) = \{u_1, \dots, u_n\}$  удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leq U_0 + \int_0^t [A(\tau) + B(\tau) \max_{0 \leq \xi \leq \tau} \|u(\xi)\|] d\tau, \quad (1)$$

и пусть при  $0 \leq t \leq t_0$

$$|A(t)| \leq A, \quad |B(t)| \leq B, \quad U_0 \geq 0.$$

Тогда при  $0 \leq t \leq t_0$  имеет место оценка

$$\|u(t)\| \leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \leq U_0 e^{Bt} + \frac{A}{B} (e^{Bt} - 1). \quad (2)$$

При  $B=0$  формула (2) превращается в очевидное неравенство

$$\|u(t)\| \leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \leq U_0 + At.$$

Доказательство. Обозначим через  $U(t)$  величину  $\max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|$ . Пусть  $t \geq 0$  — любое число из отрезка  $[0, t_0]$  и

$$U(t) = \|u(t')\| \quad (0 \leq t' \leq t).$$

Записывая неравенство (1) для точки  $t'$ , получим

$$\begin{aligned} \|u(t')\| = U(t) &\leq U_0 + \int_0^{t'} [A + BU(\tau)] d\tau \leq \\ &\leq U_0 + \int_0^t [A + BU(\tau)] d\tau = U_0 + At + B \int_0^t U(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Многократно применяя эту оценку, будем иметь

$$\begin{aligned} U(t) &\leq U_0 \left[ 1 + Bt + \dots + \frac{(Bt)^s}{s!} \right] + \\ &+ A \left[ t + \frac{Bt^2}{2!} + \dots + \frac{(Bt)^{s+1}}{B(s+1)!} \right] + U(t_0) \frac{(Bt)^{s+1}}{(s+1)!}, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (2).

Следствие. Пусть вектор  $u(x, t) \in C_1$  удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\| \leq \|f(t)\| + \|f_{\alpha}^k u_{\alpha}(t)\|.$$

Тогда имеет место оценка (2), где

$$U_0 = \|u(0)\|, \quad A = \max_t \|f(t)\|, \quad B = \max_t \|((f_{\alpha}^k(t)))\|.$$

Лемма 2. Пусть  $u(x, t, \tau), v(x, t, \tau) \in C_1$ . Тогда функция

$$I(x, t) = \int_0^t u(x, t, \tau) \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

непрерывно дифференцируема ( $I(x, t) \in C_1$ ).

Доказательство. Вычислим, например, производную  $\frac{\partial I}{\partial x}$ .  
Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} [I(x + \Delta x, t) - I(x, t)] &= \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^t \left\{ u(x + \Delta x, t, \tau) \frac{\partial v(x + \Delta x, t, \tau)}{\partial \tau} - u(x, t, \tau) \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{u(x + \Delta x, t, \tau) - u(x, t, \tau)}{\Delta x} \cdot \frac{\partial v(x + \Delta x, t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_0^t u(x, t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [v(x + \Delta x, t, \tau) - v(x, t, \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Производя в последнем интеграле интегрирование по частям и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= u(x, t, t) v_x(x, t, t) - u(x, t, 0) v_x(x, t, 0) + \\ &\quad + \int_0^t [u_x(x, t, \tau) v_\tau(x, t, \tau) - u_\tau(x, t, \tau) v_x(x, t, \tau)] d\tau. \quad (3) \end{aligned}$$

Формула (3) доказывает лемму 2 и одновременно дает правило для вычисления производных функции  $I(x, t)$ .

### § 7. Задача Коши для линейной и полулинейной систем

1. Существование и единственность решения задачи Коши в широком смысле. Рассмотрим полулинейную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x, t, u), \quad (1)$$

и пусть система

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(x, t) \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r) \quad (2)$$

есть запись системы (1) в инвариантах.

Пусть на некотором отрезке  $[a, b]$  оси  $t=0$  для системы (1) заданы начальные условия

$$u(x, 0) = u^0(x). \quad (3)$$

Заметим, что отрезок  $[a, b]$  может быть неограниченным.

Обозначая  $r_k^0(x) = l^k(x, 0) u^0(x)$ , получим начальные условия

$$r(x, 0) = r^0(x) \quad (4)$$

для системы (2).

Предположим, что функции  $A, \xi_k, l^k \in C_1$  в  $G$  (напомним, что  $G$  обозначает область определенности нашей задачи),  $f_k, \frac{\partial f_k}{\partial u_\alpha} \in C_0$  в области  $\bar{G} \times \{u \mid -\infty < \|u\| < \infty\}$ ,  $u^0(x) \in C_0$  на  $[a, b]$ .

Тогда  $g_k, \frac{\partial g_k}{\partial r_\alpha} \in C_0$  в области  $G \times \{r \mid -\infty < \|r\| < \infty\}$ ,  $r^0(x) \in C_0$  на  $[a, b]$ .

Непрерывные в  $G$  функции  $r(x, t)$  называются *решением задачи Коши* (2), (4) в широком смысле, если  $r(x, 0) = r_0(x)$  и каждая из функций  $r_k(x, t)$  непрерывно дифференцируема по переменному  $t$  вдоль соответствующей характеристики  $x = x_k(\xi, \tau, t)$ , причем

$$\frac{d}{dt} r_k(x_k(\xi, \tau, t), t) = g_k(x_k, t, r(x_k, t)). \quad (5)$$

Вектор  $u(x, t)$ , полученный из вектора  $r(x, t)$  по формулам (3.1.4), будем называть *решением в широком смысле задачи Коши* (1), (3).

Докажем *единственность* решения в широком смысле. Пусть в  $G$  существуют два решения в широком смысле  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  задачи (1), (3). Им соответствуют два решения в широком смысле  $r(x, t), \bar{r}(x, t)$  задачи (2), (4).

Введем разность

$$v(x, t) = r(x, t) - \bar{r}(x, t) \quad (v(x, 0) = 0). \quad (6)$$

Вычитая из уравнения (5), записанного для функции  $r(x, t)$ , это же уравнение, записанное для  $\bar{r}(x, t)$ , получим

$$\frac{dv_k(x_k(\xi, \tau, t), t)}{dt} = g_\alpha^k(x_k, t) v_\alpha(x_k, t), \quad (7)$$

где через  $g_\alpha^k(x, t)$  обозначены величины

$$g_\alpha^k(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial g_k}{\partial r_\alpha}(x, t, r(x, t) - \lambda v(x, t)) d\lambda.$$

Согласно определению решения в широком смысле, функции  $r, \bar{r}, v$  непрерывны в  $G$ . Поэтому функции  $g_\alpha^k$  — непрерывны в  $G$  и ограничены в любой полосе  $0 \leq t \leq t_0$ .

Интегрируя уравнение (7) по  $t$  от 0 до  $\tau$  с учетом условия (6), получим

$$v_k(\xi, \tau) = \int_0^\tau g_\alpha^k(x_k, t) v_\alpha(x_k, t) dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ввиду ограниченности матрицы  $((g_\alpha^k))$  отсюда после применения леммы 1 из § 6 следует, что всюду в  $G$

$$\|v(x, t)\| = 0$$

и, следовательно,  $r(x, t) \equiv \bar{r}(x, t)$ ,  $u(x, t) \equiv \bar{u}(x, t)$ . Теорема доказана.

Из этой теоремы, конечно, следует, что единственно также и классическое, т. е. непрерывно дифференцируемое, решение задачи Коши.

Докажем существование решения в широком смысле для линейной системы. Решение задачи (2), (4) для линейной системы будем строить методом последовательных приближений.

Пусть

$$g_k(x, t, r) = g^k(x, t) + g_{\alpha}^k(x, t) r_{\alpha}.$$

Согласно формуле (5) решение  $r_k$  удовлетворяет уравнению

$$r_k(x, t) = r_k^0(x_k(x, t, 0)) + \int_0^t g^k(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau + \int_0^t g_{\alpha}^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_{\alpha}(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau. \quad (8)$$

Применяя метод последовательных приближений, положим

$$r_k^{(s+1)}(x, t) = r_k^{(0)}(x_k(x, t, 0)) + \int_0^t g_{\alpha}^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_{\alpha}^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau \quad (9)$$

$$(s = 0, 1, \dots),$$

где

$$r_k^{(0)}(x, t) = r_k^0(x_k(x, t, 0)) + \int_0^t g^k(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau.$$

Отсюда видно, что  $r_k^{(s+1)}(x, t)$  определены и непрерывны в  $G$  и имеют непрерывную производную по  $t$  в соответствующем характеристическом направлении. Докажем равномерную сходимость последовательности  $\{r^{(s)}(x, t)\}$ .

Из формулы (9) следует

$$\|r^{(s+1)}(x, t) - r^{(s)}(x, t)\| \leq B \int_0^t \sup_{G_{\tau}} \|r^{(s)} - r^{(s-1)}\| d\tau, \quad (10)$$

где через  $G_{\tau}$  обозначено пересечение  $G$  с полосой  $0 \leq t \leq \tau$ , а  $B$  — константа, ограничивающая в области  $G$  норму матрицы  $((g_{\alpha}^k))$ .

Обозначая

$$V^{(s)}(t) = \sup_{(\xi, \eta) \in G_t} \|r_k^{(s+1)}(\xi, \eta) - r_k^{(s)}(\xi, \eta)\|,$$

запишем (10) в виде

$$V^{(s)}(t) \leq B \int_0^t V^{(s-1)}(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$V^{(s)}(t) \leq \frac{(Bt)^s}{s!} V^{(0)}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, последовательность  $\{r^{(s)}(x, t)\}$  равномерно сходится к непрерывной функции  $r(x, t)$ , если область  $G$  конечна по переменному  $t$ . Если же область  $G$  бесконечна по  $t$ , то последовательность  $\{r^{(s)}(x, t)\}$  равномерно сходится в любой ее конечной (по  $t$ ) подобласти  $G_{t_0}$ . Переходя в равенстве (9) к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , получаем, что  $r(x, t)$  удовлетворяет уравнениям (8). Так как

$$x_k(x, t, \tau) = x_k(x_0, t_0, \tau),$$

если точка  $(x_0, t_0)$  лежит на этой характеристике, то равенства (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} r_k(x_k(x_0, t_0, t), t) = & r_k^0(x_k(x_0, t_0, 0)) + \int_0^t g_k^k(x_k(x_0, t_0, \tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t g_a^k(x_k(x_0, t_0, \tau), \tau) r_a(x_k(x_0, t_0, \tau), \tau) d\tau. \quad (11) \end{aligned}$$

Из непрерывности подынтегральных функций следует непрерывная дифференцируемость правой части (11) по переменному  $t$ . Следовательно,  $r_k(x, t)$  непрерывно дифференцируема вдоль характеристики  $x = x_k$ ; при этом выполнено равенство (5). Таким образом,  $r_k(x, t)$  — решение задачи (2), (4) в широком смысле. По формулам (3.1.4) может быть получено решение  $u(x, t)$  задачи (1), (3).

В случае полулинейной системы последовательные приближения задаются аналогично (9):

$$r_k^{(s+1)}(x, t) = r_k^{(0)}(x, t) + \int_0^t g_k^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_k^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau,$$

и равномерно сходятся в подобласти  $G_{t_0}$  области  $G$ , в которой они равномерно ограничены.

Таким образом, построение решения в широком смысле для полулинейной системы отличается от линейного случая лишь тем, что в качестве области сходимости последовательных приближений выступает область  $G_{t_0}$ , в которой решение полулинейной системы остается ограниченным. Рассмотрение вопроса об ограниченности решения мы отложим до § 8.

2. **Существование классического решения задачи Коши для линейной системы.** Пусть система (7.1.1) линейна:  $b(x, t, u) = = b_1(x, t) + B(x, t)u$ . Тогда в системе (7.1.2)

$$g_k(x, t, r) = g^k(x, t) + g_\alpha^k(x, t)r_\alpha,$$

причем  $g^k(x, t) = l^k b_1$ , а

$$g_\alpha^k(x, t) = \gamma_\alpha^k(x, t) + \left[ \frac{\partial l_\beta^k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial l_\beta^k}{\partial x} \right] \lambda_\alpha^\beta(x, t), \quad (1)$$

где  $\gamma_\alpha^k = l_\beta^k B_{\beta\delta} \lambda_\alpha^\delta$  (см. формулы (3.1.2)).

Предположим, что  $l^k, \xi_k, B_{\alpha\beta} \in C_1$  в  $G$ . Тогда, очевидно, и  $\lambda_\alpha^k, \gamma_\alpha^k \in C_1$  в  $G$ . Пусть также  $u^0(x) \in C_1, r^0(x) \in C_1$ .

Покажем, что построенное выше решение является при этих предположениях непрерывно дифференцируемым в  $G$  и, следовательно, дает решение задачи (7.1.2), (7.1.4) в обычном смысле

В случае (1) формула (7.1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} r_k^{(s+1)}(x, t) &= r_k^{(0)}(x, t) + \int_0^t \gamma_\alpha^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{d}{d\tau} l_\beta^k(x_k(x, t, \tau), \tau) \right] \lambda_\alpha^\beta(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что из сделанных предположений вытекает непрерывная дифференцируемость в  $G$  первых двух членов правой части (2), если в  $G$  непрерывно дифференцируемо приближение  $r^{(s)}$

к  $r(x, t)$ . Что касается последнего члена формулы (2), то он также непрерывно дифференцируем в  $G$ , если  $r^{(s)}(x, t) \in C_1$ . Это следует из леммы 2 § 6.

Дифференцируя (2) по переменному  $x$  (последний член — по формуле (6.5.3)), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_k^{(s+1)}}{\partial x} &= \frac{\partial r_k^{(0)}}{\partial x} + \int_0^t \frac{\partial x_k(x, t, \tau)}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_\alpha^k}{\partial x} r_\alpha^{(s)} + \gamma_\alpha^k \frac{\partial r_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right] d\tau + \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x} l_\beta^k(x_k(x, t, \tau), \tau) \right]_{\tau=t} \lambda_\alpha^\beta(x, t) r_\alpha^{(s)}(x, t) - \\ &- \left[ \frac{\partial}{\partial x} l_\beta^k(x_k(x, t, \tau), \tau) \right]_{\tau=0} \lambda_\alpha^\beta(x_k(x, t, 0), 0) r_\alpha^{(s)}(x_k(x, t, 0), 0) + \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_\alpha^\beta(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} l_\beta^k(x_k(x, t, \tau), \tau) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{d}{d\tau} \left[ \lambda_\alpha^\beta(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha^{(s)}(x_k(x, t, \tau), \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} l_\beta^k(x_k(x, t, \tau), \tau) \right] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \right\| \leq A^1(x, t) \left\| r^{(s)}(x, t) - r^{(s-1)}(x, t) \right\| + \\ + \int_0^t A^2(x, t, \tau) \max_{\sigma_\tau} \left\| r^{(s)} - r^{(s-1)} \right\| d\tau + \int_0^t A^3(x, t, \tau) \max_{\sigma_\tau} \left\| \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \right\| d\tau,$$

а функции  $A^1, A^2, A^3$  непрерывны и ограничены в  $G$ .

Так как последовательность  $\{r^{(s)}(x, t)\}$  сходится в  $G$ , а величины  $A^1, A^2, A^3$  ограничены в  $G$ , то аналогично предыдущему доказывается равномерная сходимость в  $G$  последовательности

$\left\{ \frac{\partial r_k^{(s)}}{\partial x} \right\}$ . Значит, построенное выше решение в широком смысле непрерывно дифференцируемо по переменному  $x$ . Аналогично доказывается непрерывная дифференцируемость  $r(x, t)$  по  $t$ . Впрочем, это вытекает уже из непрерывности в  $G$  комбинации производных

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r).$$

Таким образом, при выполнении сформулированных условий решение  $r(x, t)$  в широком смысле является и решением задачи Коши (7.1.2), (7.1.4) в обычном смысле. Переходя по формулам (3.1.4) от  $r$  к  $u$ , заключаем, что полученная функция  $u$  есть решение системы (7.1.1) в обычном смысле.

Совершенно аналогично доказывается для полулинейной системы утверждение: если в области  $G_{t_0}$  решение  $u(x, t)$  задачи (7.1.1), (7.1.3) ограничено и  $\xi_k, l^k \in C_1; f_k(x, t, u) \in C_1, u_0(x) \in C_1$ , то построенное выше решение в широком смысле непрерывно дифференцируемо, т. е.  $u(x, t) \in C_1$ .

Непосредственным дифференцированием системы уравнений (7.1.2) убеждаемся, что при указанных предположениях производные  $p, q$  удовлетворяют в широком смысле уравнениям продолженной системы.

**3. Некоторые свойства решений линейной и полулинейной систем.** Решение задачи Коши в широком смысле для линейной и полулинейной систем равномерно непрерывно в  $G$ , если область  $G$  конечна; если  $G$  — неограниченная область, то равномерная непрерывность имеет место в любой конечной части  $G$ . При этом в случае полулинейной системы равномерная непрерывность решения в широком смысле имеет место лишь в области  $G_{t_0}$  ограниченности решения. Эти свойства легко выводятся из формул (7.1.8), определяющих решение  $r(x, t)$ .

В случае классического решения ( $u(x, t) \in C_1$ ) производные  $p, q$  удовлетворяют в широком смысле уравнениям продолженной системы (см. п. 3 § 4). Замечая, что в случае полулинейной системы продолженная система линейна относительно производных  $p, q$ , заключаем, что производные решения полулинейной системы остаются ограниченными в области  $G_{t_0}$ , в которой остается ограниченным само решение.

Пусть теперь  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  — два решения в широком смысле задачи Коши, входные данные которых обозначим соответственно через  $l^k, \xi_k, f_k, u^0(x)$  и  $\bar{l}^k, \bar{\xi}_k, \bar{f}_k, \bar{u}^0(x)$ . Будем предполагать, что входные данные удовлетворяют условиям, сформулированным при доказательстве теоремы существования решения в широком смысле.

Легко видеть, что при  $\xi_k, \bar{\xi}_k \in C_1, \bar{x}_k(x, t, \tau) \rightarrow x_k(x, t, \tau)$ , если  $\bar{\xi}_k \rightarrow \xi_k$ ; поэтому при  $\bar{\xi}_k \rightarrow \xi_k, \bar{G} \rightarrow G$ . Из формулы (7.1.8) следует, что если  $\bar{\xi}_k \rightarrow \xi_k, \bar{l}^k \rightarrow l^k$  и т. д., то

$$\bar{r}_k(x, t) \rightarrow r_k(x, t), \quad \bar{u}_k(x, t) \rightarrow u_k(x, t).$$

Таким образом, решение задачи Коши в широком смысле непрерывно зависит (в норме  $C$ ) от входных данных этой задачи. Таким образом, задача Коши в такой постановке корректна.

Если входные данные непрерывно дифференцируемы, то, как мы видели, решение обладает непрерывными производными и является классическим. Разумеется, сказанное выше о непрерывной зависимости распространяется и на эти решения.

Если, далее, не только входные данные, но и производные входных данных равномерно стремятся друг к другу, то не только  $\bar{u} \rightarrow u$ , но и

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Это вытекает из того, что производные решения удовлетворяют в широком смысле уравнениям продолженной системы, которые линейны относительно производных. Аналогичные заключения можно сделать и о производных более высокого порядка, если соответственно усилить требования на гладкость входных данных.

Построение решения задачи Коши сводится к построению отображения, переводящего начальную функцию в решение задачи Коши в момент времени  $t$ . Рассмотрим для определенности линейную систему (7.1.1) с  $b = Bu$ . Тогда решение  $u(x, t)$  задается формулой

$$u = Su^0,$$

где оператор  $S$  линеен. Областью определения этого оператора служит, очевидно, множество непрерывно дифференцируемых

функций. Будем рассматривать  $S$  как отображение  $C \rightarrow C$ . Тогда оператор  $S$  определен на всюду плотном множестве (каким является в  $C$  множество непрерывно дифференцируемых функций) и ограничен на этом множестве. Согласно известной теореме функционального анализа  $S$  допускает непрерывное расширение с сохранением нормы на все пространство  $C$ . Пусть  $S^*$  — результат этого расширения. Тогда

$$u = S^*u^0, \quad u^0 \in C$$

есть решение задачи Коши в широком смысле, существование которого было нами доказано независимо.

Отсюда следует, что для построения обобщенного (в смысле расширений операторов) решения достаточно приблизить начальную функцию  $u^0(x)$  элементом всюду плотного множества  $u_\delta^0(x)$  (т. е. «сгладить» начальную функцию), построить гладкое решение  $u_\delta = Su_\delta^0$  и перейти к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , пользуясь соответствующей метрикой.

Аналогичные рассуждения проходят и в полулинейном случае. Они лишь осложняются тем обстоятельством, что оператор  $S$ , задающий решение задачи Коши:

$$u = S(u^0),$$

теперь нелинеен. Он определен, ограничен и непрерывен, как оператор из  $C$  в  $C$  на множестве непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенству

$$\|u^0\| < U_{t_0}, \quad U_{t_0} = \text{const} \quad (1)$$

( $0 \leq t < t_0$  — полоса, в которой рассматривается решение). Совершенно аналогично предыдущему случаю, оператор  $S$  может быть расширен до непрерывного ограниченного оператора, определенного на всем множестве элементов  $C$ , удовлетворяющих неравенству (1). Результат такого расширения, как и в линейном случае, есть решение в широком смысле.

Подчеркнем, что обобщенные решения линейных и полулинейных уравнений являются, таким образом, пределами классических решений в той или иной метрике.

## § 8. Задача Коши для системы квазилинейных уравнений

1. Оценка роста решения и его производных. Мажорантная система. Для системы квазилинейных уравнений  $l^k = l^k(x, t, u)$ ;  $\xi_k = \xi_k(x, t, u)$ . В этом случае построение решения задачи Коши усложняется по сравнению с линейной системой. Укажем основные отличия этого случая:

1) для системы квазилинейных уравнений уже нельзя ввести понятие решения в широком смысле ввиду отсутствия инвариантов;

2) область  $G$  определенности решения задачи Коши определяется одновременно с решением  $u(x, t)$  и, вообще говоря, не может быть указана заранее;

3) решение  $u(x, t)$  и его производные не остаются ограниченными.

Поэтому в первую очередь мы установим оценки роста решения и его производных и укажем область  $\bar{G} \subseteq G$  переменных  $x, t$ , в которой решение и его производные остаются заведомо ограниченными.

Введем область  $G_0(U)$  пространства  $(x, t, u)$ , заданную условиями:

$$G_0(U) = \{a_0 \leq x \leq b_0, 0 \leq t \leq T_0; \|u\| \leq U\}, \quad a_0 < a, \quad b_0 > b.$$

Пусть  $l^k(x, t, u), \xi_k(x, t, u), f_k(x, t, u) \in C_1(G_0(U))$  при любом  $U > 0$ ;  $u^0(x) \in C_1(a, b)$ .

Согласно п. 3 § 4 продолженная система для гиперболической системы квазилинейных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} = \mathcal{F}_k; \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} = F_k, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}^k(x, t, u) + \mathcal{F}_\alpha^k(x, t, u) \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u) \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta,$$

$$F_k = F^k(x, t, u) + F_\alpha^k(x, t, u) \mathcal{P}_\alpha, \quad \mathcal{P}_k = l_\alpha^k(x, t, u) p_\alpha.$$

Величины  $\mathcal{F}^k, \mathcal{F}_\alpha^k, \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k; F^k, F_\alpha^k$  выражаются через  $l_\alpha^k, \xi_k, f_k$  и их первые производные. Поэтому эти величины непрерывны в области  $G_0(U)$  при любом  $U > 0$ . Введем обозначения:

$$\mathcal{F}_0(U) = \max_{G_0(U)} \|\mathcal{F}(x, t, u)\|, \quad \mathcal{F} = \{\mathcal{F}^k\},$$

$$\mathcal{F}_1(U) = \max_{G_0(U)} \|\mathcal{F}_\alpha^k(x, t, u)\|,$$

$$\mathcal{F}_2(U) = \max_{G_0(U)} \|\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u)\|,$$

$$F_0(U) = \max_{G_0(U)} \|F(x, t, u)\|,$$

$$F_1(U) = \max_{G_0(U)} \|F_\alpha^k(x, t, u)\|$$

и рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \mathcal{F}_0(U) + \mathcal{F}_1(U) \mathcal{P} + \mathcal{F}_2(U) \mathcal{P}^2, \quad (2)$$

$$\frac{dU}{dt} = F_0(U) + F_1(U) \mathcal{P}, \quad (3)$$

которую мы будем называть *мажорантной системой*. Обозначим через  $U_0, \mathcal{P}_0$  величины

$$U_0 = \max_{a \leq x \leq b} \|u^0(x)\|, \quad \mathcal{P}_0 = \max_{a \leq x \leq b} \left\| l_a^k(x, 0, u^0(x)) \frac{du_a^0(x)}{dx} \right\|.$$

Для системы уравнений (2), (3) зададим начальные условия:

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0, \quad U(0) = U_0, \quad (4)$$

Из сравнения уравнений (1), (2), (3) следует, что если

$$\|u(x, t)\| \leq U(t), \quad \|\mathcal{P}(x, t)\| \leq \mathcal{P}(t), \quad (5)$$

то

$$\left\| \frac{du(x, t)}{dt} \right\| \leq \frac{dU(t)}{dt}, \quad \left\| \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}_k(x, t)}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k(x, t)}{\partial x} \right\} \right\| \leq \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt}.$$

Так как из (4) следует выполнение (5) при  $t=0$ , то при любых  $t \geq 0$

$$\|u(x, t)\| \leq U(t), \quad \|\mathcal{P}(x, t)\| \leq \mathcal{P}(t).$$

Итак, функции  $U(t), \mathcal{P}(t)$  мажорируют рост решения  $u(x, t)$  и его первых производных.

Пусть при  $0 \leq t \leq t_0$  решение  $U(t), \mathcal{P}(t)$  мажорантной системы, удовлетворяющее начальным условиям (4), остается ограниченным. Тогда заведомо при  $0 \leq t \leq t_0$  остаются ограниченными решение  $u(x, t)$  и его производные  $p(x, t)$ . Поэтому мы можем определить область  $\bar{G} \subseteq G$ , задавая ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \{0 \leq t \leq t_0, \bar{X}_1(t) \leq x \leq \bar{X}_2(t)\}, \\ \frac{d\bar{X}_1}{dt} &= \max_{k=1, \dots, n} \max_{\|u\| \leq U(t)} \{\xi_k(\bar{X}_1(t), t, u)\}, \quad \bar{X}_1(0) = a, \\ \frac{d\bar{X}_2}{dt} &= \min_{k=1, \dots, n} \min_{\|u\| \leq U(t)} \{\xi_k(\bar{X}_2(t), t, u)\}, \quad \bar{X}_2(0) = b. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши для системы квазилинейных уравнений будем строить в области  $\bar{G} \subseteq G$  (рис. 1.4).

Для ряда примеров напомним мажорантную систему.

1) Линейная система. Пусть  $l_a^k = l_a^k(x, t)$ ,  $\xi_k = \xi_k(x, t)$ ,  $f_k = f_k(x, t) + f_a^k(x, t)u_a$ . Тогда из формул п. 3 § 4 следует

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(U) &= \mathcal{F}_0 + \bar{\mathcal{F}}_0 U, \quad \mathcal{F}_1(U) = \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2(U) = 0, \\ F_0(U) &= F_0 + \bar{F}_0 \cdot U, \quad F_1(U) = F_1, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{F}_0, \bar{\mathcal{F}}_0, \mathcal{F}_1; F_0, \bar{F}_0, F_1$  — постоянные, зависящие от области  $G$  переменных  $x, t$ . Мажорантная система для  $\mathcal{F}$ :

линейных уравнений также линейна. Значит, решение мажорантной системы, а вместе с ним и решение  $u(x, t)$  и его производные  $p(x, t)$  остаются ограниченными в любой конечной части полуплоскости  $t \geq 0$ . Величина  $t_0$  в этом случае произвольна, а область  $G$  совпадает с областью определенности  $G$ .

2) Полулинейная система а. Пусть  $l_\alpha^k = l_\alpha^k(x, t)$ ,  $\xi_k = \xi_k(x, t)$ ,  $f_k = f_k(x, t, u)$ . Тогда  $\mathcal{F}_2(U) = 0$ . Мажорантная система (2), (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dt} &= \mathcal{F}_0(U) + \mathcal{F}_1(U)\mathcal{P}, \\ \frac{dU}{dt} &= F_0(U) + F_1(U)\mathcal{P}. \end{aligned}$$

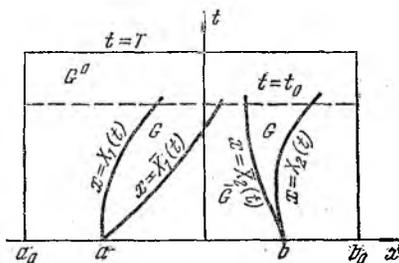


Рис. 1.4.

Отсюда следует, что  $\mathcal{P}(t)$  ограничена, если ограничена  $U(t)$ . Это обстоятельство выражает общее свойство решений полулинейной системы: производные решения остаются ограниченными, пока ограничено само решение.

2. Теоремы единственности и существования решения. При сделанных в п. 1 предположениях рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} l^k(x, t, u) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= f_k(x, t, u), \\ u(x, 0) &= u^0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Прежде всего докажем теорему единственности. Пусть в области  $G$  существуют два решения  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  задачи Коши (1), (2). Тогда разность  $v(x, t) = u - \bar{u}$  удовлетворяет в области  $G$  системе линейных уравнений

$$l_\alpha^k \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right] = \bar{f}_\alpha^k v_\alpha \quad (k = 1, \dots, n)$$

и нулевым начальным условиям

$$v(x, 0) = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$l_\alpha^k = l_\alpha^k(x, t, \bar{u}(x, t)), \quad \bar{\xi}_k = \xi_k(x, t, \bar{u}(x, t)),$$

$$\begin{aligned} l_\alpha^k = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial u_\alpha}(x, t, \bar{u} + \lambda v(x, t)) - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_\beta(x, t)}{\partial t} \frac{\partial f_\beta^k}{\partial u_\alpha}(x, t, \bar{u} + \lambda v(x, t)) - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_\beta(x, t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} (l_\beta^k \cdot \xi_k)(x, t, \bar{u} + \lambda v) \right\} d\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Величины  $\bar{l}_\alpha^k, \bar{\xi}_k$ , очевидно, непрерывно дифференцируемы в  $G$ , а  $\bar{f}_\alpha^k$  непрерывны.

По теореме единственности решения задачи Коши для системы линейных уравнений, установленной в § 7, получаем, что в  $G$   $v(x, t) \equiv 0$ , т. е.  $u(x, t) \equiv \bar{u}(x, t)$ . Теорема единственности доказана.

Для доказательства теоремы существования применим метод последовательных приближений. Пусть построено приближение  $u(x, t) \in C_1$ . Определим  $u(x, t)$  как решение задачи Коши для линейной системы

$$l^k(x, t, u(x, t)) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(x, t, u(x, t)) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = f_k(x, t, u(x, t)), \quad (4)$$

принимая начальные значения (2):

$$u(x, 0) = u^0(x). \quad (5)$$

Из теоремы существования решения линейной системы уравнений, установленной в § 7, вытекает, что в области  $G$  задачи Коши (4), (5) существует решение  $u(x, t) \in C_1$ , так что все последовательные приближения определены и непрерывно дифференцируемы в областях  $G$ .

Первый этап будет состоять в доказательстве существования некоторой области  $\bar{G}$ , принадлежащей всем областям  $G$ , и такой, что последовательные приближения и их первые производные равномерно ограничены в этой области.

Обозначим

$$\mathcal{P}_k = l_\alpha^k(x, t, u) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$$

и выпишем продолженную систему для линейной системы (4). Она имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x} &= \mathcal{F}^k(x, t, u) + \\ &+ \Phi_\alpha^k(x, t, u, u) \mathcal{P}_\alpha + \Psi_\alpha^k(x, t, u, u) \mathcal{P}_\alpha + \\ &+ \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u, u) \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = F^k(x, t, u) + F_\alpha^k(x, t, u) \mathcal{P}_\alpha.$$

Мы не выписываем здесь явных выражений функций, входящих в эту систему, так как они получаются совершенно аналогично формулам (4.3.16) — (4.3.19). Отметим только, что с функциями, входящими в систему (8.1.1), они связаны следующими очевидными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha^k(x, t, u) &= \Phi_\alpha^k(x, t, u, u) + \Psi_\alpha^k(x, t, u, u), \\ \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u) &= \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u, u). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Наряду с системой (6) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{P}}{dt} &= \mathcal{F}_0(\tilde{U}) + \Phi_1(\tilde{U})\tilde{P} + \Phi_2(\tilde{U})\tilde{P}^2, \\ \frac{d\tilde{U}}{dt} &= F_0(\tilde{U}) + F_1(\tilde{U})\tilde{P}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где функции  $\mathcal{F}_0, F_0, F_1$  определены в п. 1, а

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tilde{U}) &= \Phi'(\tilde{U}) + \Psi(\tilde{U}), \\ \Phi'(\tilde{U}) &= \max_{\substack{\|u\| \leq \tilde{U} \\ \|v\| \leq \tilde{U}}} \|\Phi_\alpha^k(x, t, u, v)\|, \\ \Psi(\tilde{U}) &= \max_{\substack{\|u\| \leq \tilde{U} \\ \|v\| \leq \tilde{U}}} \|\Psi_\alpha^k(x, t, u, v)\|, \\ \Phi_2(\tilde{U}) &= \max_{\substack{\|u\| \leq \tilde{U} \\ \|v\| \leq \tilde{U}}} \|\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u, v)\|. \end{aligned}$$

Для системы (8) зададим начальные условия:

$$\tilde{P}(0) = \mathcal{P}_0, \quad \tilde{U}(0) = U_0$$

(ср. с условиями (1.4)).

Поскольку из (7) вытекает, что

$$\mathcal{F}_1(U) \leq \Phi_1(U), \quad \mathcal{F}_2(U) \leq \Phi_2(U),$$

то решение системы (8) мажорирует решение мажорантной системы (8.1.2) — (8.1.3):

$$U(t) \leq \tilde{U}(t), \quad \mathcal{P}(t) \leq \tilde{P}(t).$$

Следовательно, если область  $\tilde{G}$  построена по функции  $\tilde{U}(t)$  так, как в п. 1 была построена по функции  $U(t)$  область  $\bar{G}$ , то

$$\tilde{G} \subseteq \bar{G}.$$

Предположим теперь, что все последовательные приближения  $u$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$  удовлетворяют неравенствам

$$\|u^{(k)}\| \leq \tilde{U}(t), \quad \|\mathcal{P}^{(k)}\| \leq \tilde{P}(t). \quad (9)$$

Обозначая

$$U_{s+1}(t) = \sup_x \|u^{(s+1)}\|, \quad \mathcal{P}_{s+1}(t) = \sup_x \|\mathcal{P}^{(s+1)}\|,$$

из системы (6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_{s+1}}{dt} &\leq \mathcal{F}_0(\tilde{U}) + \Phi'(\tilde{U})\tilde{P} + \Psi(\tilde{U})\mathcal{P}_{s+1} + \Phi_2(U)\tilde{P}\mathcal{P}_{s+1}, \\ \frac{dU_{s+1}}{dt} &\leq F_0(\tilde{U}) + F_1(\tilde{U})\tilde{P}, \end{aligned}$$

так что, очевидно,

$$U_{s+1}(t) \leq \tilde{U}(t), \quad \mathcal{P}_{s+1}(t) \leq \tilde{P}(t).$$

Так как начальное приближение можно выбрать так, чтобы (9) удовлетворялись, то тем самым доказано, что все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам (9). Отсюда вытекает существование области  $\tilde{G}$ , принадлежащей как  $\tilde{G}$ , так и всем областям  $\tilde{G}^{(s)}$ , в которой выполнены неравенства (9).

Вторым этапом нашего доказательства будет доказательство равномерной сходимости в области  $\tilde{G}$  последовательности  $\{u^{(s)}\}$ .

Пусть

$$r_k^{(s)} = l^k(x, t, u^{(s-1)}) - u^{(s-1)}.$$

Тогда из (4) получаем

$$\frac{\partial r_k^{(s+1)}}{\partial t} + \xi_k(x, t, u^{(s)}) \frac{\partial r_k^{(s+1)}}{\partial x} = g_\alpha^k r_\alpha^{(s+1)} + f_\alpha^k r_\alpha^{(s)}, \quad (10)$$

где функции  $g_\alpha^k, f_\alpha^k$  вычисляются по формулам, аналогичным (3). В эти формулы входят  $u, u^{(s-1)}$  и их производные; при этом всюду в  $\tilde{G}$  в силу (9)

$$\|f_\alpha^k\| \leq B, \quad \|g_\alpha^k\| \leq B.$$

Поскольку область определенности системы (10) содержит область  $\tilde{G}$ , то, интегрируя вдоль характеристик, получаем для каждой точки  $\tilde{G}$

$$|r_k^{(s+1)}| \leq \int_0^t |f_\alpha^k r_\alpha^{(s)} + g_\alpha^k r_\alpha^{(s+1)}| d\tau,$$

так что

$$R_{s+1}(t) \leq B \int_0^t [R_s(\tau) + R_{s+1}(\tau)] d\tau,$$

где

$$R_s(t) = \max_{(x, \tau) \in \tilde{G}, \tau \leq t} \|r^{(s)}\|.$$

Применяя лемму 1 из § 6, получаем

$$R_{s+1}(t) \leq C \int_0^t R_s(\tau) d\tau,$$

или

$$R_{s+1}(t) \leq \text{const} \frac{(Ct)^s}{s!},$$

что и доказывает равномерную сходимость в  $\tilde{G}$  последовательности  $\{u^{(s)}\}$ .

Переходим, наконец, к последнему этапу доказательства. Покажем, что производные последовательных приближений равномерно сходятся в области  $\tilde{G}$ . Очевидно, это равносильно доказательству равномерной сходимости последовательности  $\{\mathcal{P}^{(s)}\}$ .

Мы докажем сначала равностепенную непрерывность этой последовательности по  $x$ . Иными словами, мы покажем, что существует функция  $M(\delta)$ ,  $M(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , такая, что всюду в  $\tilde{G}$  и для всех  $s$

$$\|\mathcal{P}^{(s)}(x'', t) - \mathcal{P}^{(s)}(x', t)\| \leq M(\delta) \quad \text{при} \quad |x'' - x'| \leq \delta.$$

Выше было показано, что последовательность  $\{\mathcal{P}^{(s)}\}$  равномерно ограничена. Отсюда следует, что функции  $u^{(s)}(x, t)$ , а вместе с ними и функции  $\xi_k^{(s)}(x, t, u(x, t))$ ,  $\mathcal{F}^k(x, t, u)$ ,  $\Phi_{\alpha}^k(x, t, u, u^{(s-1)})$ ,  $\Psi_{\alpha}^k(x, t, u, u^{(s-1)})$ ,  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k(x, t, u, u^{(s-1)})$  (см. систему (6)) равностепенно непрерывны в  $\tilde{G}$ . Кроме того, из равностепенной непрерывности функций  $\xi_k^{(s)}(x, t, u)$  вытекает аналогичное свойство функций  $x_k^{(s)}(x, t, \tau)$ , задающих характеристики системы (6).

Поэтому, обозначая

$$M_s(t, \delta) = \max_{k \leq s} \sup_{\substack{|x'' - x'| \leq \delta \\ \tau \leq t}} \|\mathcal{P}^{(k)}(x'', \tau) - \mathcal{P}^{(k)}(x', \tau)\|$$

и интегрируя уравнения (6) вдоль характеристик, получим

$$M_{s+1}(t, \delta) \leq (t+1)N(\delta) + C \int_0^t M_{s+1}(\tau, \delta) d\tau,$$

где функция  $N(\delta)$  такова, что  $N(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Применяя лемму 1 из § 6, заключаем, что требуемая функция  $M(\delta)$  существует, так что последовательность  $\{\mathcal{P}\}^{(s)}$  равномерно непрерывна.

Так как, по известной лемме Арцела, из всякой равномерно ограниченной и равномерно непрерывной последовательности можно выделить сходящуюся (равномерно) подпоследовательность, то некоторая последовательность  $\{\mathcal{P}_\alpha\}^{(s_k)}$ , а следовательно также  $\{p_\alpha\}^{(s_k)}$ , равномерно сходится в  $\bar{G}$  к непрерывной функции  $p_\alpha$ . По известной теореме анализа, это означает, что функция  $u_\alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} u_\alpha^{(s)}$  непрерывно дифференцируема в  $\bar{G}$  и

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = p_\alpha.$$

Отсюда следует, что последовательность  $\{p_\alpha\}^{(s)}$  имеет лишь одну предельную точку, а следовательно, последовательность  $\{p_\alpha\}^{(s)}$  не только компактная, но и сходящаяся. Тем самым доказательство сходимости последовательности  $p$  (следовательно, также и  $q$ ) завершено.

Переходя в системе (4) к пределу, заключаем, что  $u$  есть решение задачи (1), (2). Теорема существования доказана.

**3. Некоторые свойства решений задачи Коши для систем квазилинейных уравнений.** Пусть  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  — два решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений, соответствующие входным данным  $l_\alpha^k, \xi_k, f_k, u^0; \bar{l}_\alpha^k, \bar{\xi}_k, \bar{f}_k, \bar{u}^0$ . Будем предполагать, что входные данные этих двух задач Коши удовлетворяют условиям п. 2, т. е. непрерывно дифференцируемы.

В пересечении  $G$  областей определенности решений  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  разность  $v(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t)$  удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\bar{l}^k \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \gamma_\alpha^k v_\alpha + \Delta f_k,$$

где  $\gamma_\alpha^k, \Delta f_k$  ограничены и непрерывны в  $G$  и  $\Delta f_k$  стремятся к нулю, когда  $\bar{l}_\alpha^k, \bar{\xi}_k, \bar{f}_k \rightarrow l_\alpha^k, \xi_k, f_k$ .

Как мы видели в § 7, решения систем линейных уравнений непрерывным образом зависят от входных данных задачи Коши. Поэтому отсюда следует, что в  $G$   $v(x, t) \Rightarrow 0$ , когда  $\bar{l}_\alpha^k \Rightarrow l_\alpha^k$ ,  $\bar{\xi}_k \Rightarrow \xi_k$ ,  $\bar{f}_k \Rightarrow f_k$  и  $v(x, 0) = u^0(x) - \bar{u}^0(x) \Rightarrow 0$ .

Здесь, однако, нужно сделать разъяснение. Существенно, что входные данные каждой задачи Коши имеют ограниченные производные.

В отличие от случая полулинейной системы, полоса  $0 \leq t \leq t_0$ , в которой решение  $u(x, t)$  (и его производные) остается ограниченным, зависит от производных начальных функций и  $t_0 \rightarrow 0$ , если  $\left\| \frac{du^0}{dx} \right\| \rightarrow \infty$ . Поэтому непрерывная зависимость решений задачи Коши для системы квазилинейных уравнений имеет место лишь в классе входных данных с равномерно ограниченными производными.

Если по-прежнему символически записать процедуру решения задачи Коши в виде равенства

$$u(x, t) = Su^0(x),$$

то нелинейный оператор  $S$  определяет решение  $u(x, t)$  лишь в области  $G$  полуплоскости  $t \geq 0$ . Ширина полосы  $0 \leq t \leq t_0$ , в которой заключена область  $G$ , зависит от производных  $\frac{du^0}{dx}$  и стремится к нулю при  $\left\| \frac{du^0}{dx} \right\| \rightarrow \infty$ .

Поэтому оператор  $S$ , в отличие от случая линейной системы, не допускает расширения на класс непрерывных начальных функций  $u^0(x)$ . По этой причине обобщенное решение системы квазилинейных уравнений не может быть определено формально с помощью расширения пространства классических решений. Понятие обобщенного решения системы квазилинейных уравнений должно быть, таким образом, введено независимо от понятия решения этой системы. Подробно обобщенные решения будут изучены в главе 4.

Отметим небольшое расширение класса входных данных, для которых из изложенного выше следует существование решения задачи Коши.

Функцию  $\xi_k(x, t, u)$  называют *липшиц-непрерывной* в области  $G_0(U)$  по совокупности переменных  $x, t, u$ , если существует константа  $C > 0$  такая, что

$$|\xi_k(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) - \xi_k(x, t, u)| \leq C \{ |\bar{x} - x| + |\bar{t} - t| + \|\bar{u} - u\| \}$$

для любых  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), (x, t, u) \in G_0(U)$ .

Если рассматривать класс липшиц-непрерывных входных данных, характеризуемый константой Липшица  $K$ , то он может

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial reporting. This section also outlines the various methods and tools used to collect and analyze data, highlighting the need for consistency and reliability in the information gathered.

2. The second part of the document focuses on the implementation of internal controls and risk management strategies. It details how these measures are designed to prevent fraud, reduce errors, and protect the organization's assets. The text provides a comprehensive overview of the internal control framework, including the roles and responsibilities of different departments and individuals involved in the process.

3. The third part of the document addresses the challenges and opportunities associated with digital transformation. It explores how emerging technologies, such as artificial intelligence and cloud computing, are reshaping the business landscape. The text discusses the potential benefits of digitalization, such as improved efficiency and data-driven decision-making, while also acknowledging the risks and challenges that must be managed to ensure a successful transition.

4. The fourth part of the document provides a detailed analysis of the organization's financial performance and market position. It includes a thorough review of the income statement, balance sheet, and cash flow statement, along with a comparison of key financial ratios to industry benchmarks. This section also discusses the organization's competitive advantages and the strategies being implemented to maintain and enhance its market position.

5. The fifth part of the document outlines the organization's strategic vision and long-term goals. It describes the key initiatives and projects that will be undertaken to achieve these goals, including investments in research and development, marketing, and human resources. The text also discusses the organization's commitment to sustainability and social responsibility, highlighting the various programs and initiatives in place to address these issues.

6. The sixth part of the document provides a summary of the key findings and conclusions of the report. It reiterates the importance of maintaining accurate records and implementing effective internal controls, and emphasizes the need for continuous improvement and innovation in the face of a rapidly changing business environment. The text also provides recommendations for further action and areas for future research.

7. The seventh part of the document discusses the organization's approach to talent management and human resources. It outlines the strategies for attracting, developing, and retaining top talent, including the use of performance management systems and employee development programs. The text also discusses the organization's commitment to diversity and inclusion, highlighting the various initiatives and programs in place to create a more inclusive and equitable work environment.

8. The eighth part of the document provides a detailed overview of the organization's operations and supply chain management. It describes the various processes and systems used to manage the flow of goods and services, from procurement to production and distribution. The text also discusses the organization's efforts to optimize its supply chain, including the use of data analytics and automation to improve efficiency and reduce costs.

9. The ninth part of the document discusses the organization's approach to customer relationship management and marketing. It outlines the strategies for building strong, long-term relationships with customers, including the use of personalized marketing and customer service programs. The text also discusses the organization's efforts to improve its marketing mix, including the use of digital marketing and social media to reach a wider audience.

10. The tenth part of the document provides a final summary and conclusion of the report. It reiterates the key findings and conclusions, and emphasizes the organization's commitment to transparency, accountability, and continuous improvement. The text also provides a final recommendation for further action and areas for future research.

рассматриваться как замыкание класса входных данных с равномерно ограниченными той же константой  $K$  первыми производными. Поэтому решение задачи Коши с липшиц-непрерывными входными данными можно рассматривать как предел классических решений  $u(x, t) \in C_1$ , поскольку последние образуют семейство с равномерно ограниченными первыми производными.

Разумеется, этот предел уже не является решением задачи Коши в обычном смысле, так как не обладает непрерывными первыми производными. Однако он является липшиц-непрерывной функцией переменных  $x, t$  и обладает производными почти всюду в области  $G$ . Эти производные почти всюду в  $G$  удовлетворяют системе квазилинейных уравнений.

Класс липшиц-непрерывных решений  $u(x, t)$  задачи Коши представляет собой пример формального расширения оператора  $S$ , определенного в классе  $C_1$ , на класс липшиц-непрерывных входных данных.

Однако уже это небольшое расширение класса классических решений содержит интересные решения, которые широко изучаются. Примером таких решений являются решения с так называемыми слабыми разрывами, когда само решение непрерывно, а его производные, оставаясь ограниченными, терпят разрыв (см. § 10, п. 1).

## § 9. Задача Коши для одного уравнения

**1. Одно квазилинейное уравнение.** Результаты § 8, безусловно, относятся к случаю одного квазилинейного уравнения. Однако они являются слишком общими в применении к этому случаю, в котором имеются важные упрощающие детали.

Поэтому подробнее рассмотрим задачу Коши для одного квазилинейного уравнения

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Интегрирование уравнения (1) сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = \xi(X, t, U), \quad \frac{dU}{dt} = f(X, t, U), \quad (3)$$

которую называют *характеристической системой* уравнения (1). Каждое решение  $x = X(t)$ ,  $u = U(t)$  задает характеристику в пространстве переменных  $x, t, u$ .

Предположим, что функции  $\xi$ ,  $f$  непрерывно дифференцируемы. Тогда через любую точку  $(x_0, t_0, u_0)$  проходит одна и только одна характеристика.

Задача Коши (1), (2) геометрически интерпретируется как задача построения интегральной поверхности уравнения (1), проходящей через заданную начальную кривую:  $t = 0$ ,  $u = u_0(x)$ . Так как при этом мы хотим получить однозначную дифференцируемую функцию  $u(x, t)$  переменных  $x$ ,  $t$ , эта поверхность, очевидно, должна однозначно проектироваться на плоскость  $u = 0$  переменных  $x$ ,  $t$ .

Поскольку решение  $u$  однозначно определяется вдоль каждой характеристики, проходящей через точку  $(x_0, t_0, u_0)$ , эта задача состоит в построении поверхности, состоящей из характеристик, проведенных через данную начальную кривую, и однозначно проектирующейся на плоскость  $u = 0$ .

Обозначим через  $X = X(t, x_0, u_0)$ ,  $U = U(t, x_0, u_0)$  решение характеристической системы (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0, x_0, u_0) = x_0, \quad U(0, x_0, u_0) = u_0. \quad (4)$$

Тогда решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) задается формулой

$$u(X(t, x_0, u_0(x_0)), t) = U(t, x_0, u_0(x_0)). \quad (5)$$

Формула (5) неявным образом определяет функцию  $u(x, t)$ , которая в случае  $u_0(x) \in C_1$  непрерывно дифференцируема во всех точках  $x$ ,  $t$ , в которых однозначно разрешается относительно параметра  $x_0$  уравнение

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0)) \quad (6)$$

и остается ограниченной правая часть уравнения (5).

Пусть в этих точках

$$x_0 = X^{-1}(t, x) = x_0(x, t) \quad (7)$$

есть результат разрешения уравнения (6) относительно  $x_0$ . Тогда из формулы (5) получаем явную формулу для решения  $u(x, t)$  задачи (1), (2):

$$u(x, t) = U(t, x_0(x, t), u_0(x_0(x, t))). \quad (8)$$

Поясним графически построение решения задачи Коши (1), (2). Через любую точку  $x_0 \in [a, b]$  проведем проекцию характеристики (4) на плоскость  $u = 0$  (плоскость  $(x, t)$ ), полагая  $u_0 = u_0(x_0)$  (рис. 1.5). Эту проекцию (6) мы также будем называть *характеристикой*.

На характеристике (6) задана непрерывно дифференцируемая функция  $U(t, x_0, u_0(x_0))$  переменного  $t$ , которая и дает решение  $u(x, t)$  на линии  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ .

Может случиться, что в некоторых точках  $(x, t)$  при  $t > 0$  могут пересечься две или более линий  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ , отвечающих различным значениям параметра  $x_0$  (рис. 1.5). В этих точках уравнение (6) относительно  $x_0$  имеет более одного решения и формулы (5), (8) определяют некоторую многозначную функцию переменных  $x, t$ . В этом случае не существует непрерывного решения  $u(x, t)$  задачи (1), (2).

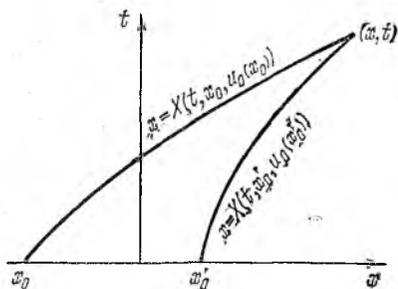


Рис. 1.5

Покажем, что при  $0 \leq t \leq t_0$  при достаточно малых  $t_0 > 0$  через любую точку  $(x, t) \in G$  проходит единственная характеристика (6), т. е. уравнение (6) имеет единственное решение относительно  $x_0$ .

Для обоснования возможности однозначной разрешимости уравнения (6) относительно  $x_0$  достаточно показать, что

$$\dot{X} = \frac{\partial X(t, x_0, u_0(x_0))}{\partial x_0} > 0, \quad (9)$$

так как  $X(0, x_0, u_0(x_0)) \equiv x_0$  и

$$\dot{X}(0, x_0, u_0(x_0)) = 1. \quad (10)$$

Обозначая

$$\dot{U} = \frac{\partial U(t, x_0, u_0(x_0))}{\partial x_0} \quad (\dot{U}(0, x_0, u_0(x_0)) \equiv u_0'(x_0)) \quad (11)$$

и дифференцируя уравнения (3), получим

$$\frac{d\dot{X}}{dt} = \xi'_u \dot{U} + \xi'_x \dot{X}, \quad \frac{d\dot{U}}{dt} = f'_u \dot{U} + f'_x \dot{X}, \quad (12)$$

где для краткости опущены аргументы у всех величин. Итак,  $\dot{X}, \dot{U}$  удовлетворяют системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12) и начальным условиям (10), (11). Отсюда ясно, что при достаточно малых  $t_0$  неравенство (9) будет иметь место.

Итак, существует  $t_0 > 0$  такое, что при  $0 \leq t \leq t_0$  формулы (7), (8) определяют функцию  $u(x, t) \in C_1$ , удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Задача Коши (1), (2) предполагает, как мы уже отмечали, существование однозначной функции  $u(x, t) \in C_1$  переменных  $x, t$ , удовлетворяющей уравнению (1) и начальному условию (2). В то же время более общая задача определения интегральной поверхности  $S$ , проходящей через начальную кривую, вовсе не

предполагает, что эта поверхность однозначно проектируется на плоскость переменных  $x, t$ , и может иметь и, как правило, имеет решение в большей области переменных  $x, t$ , чем задача Коши (1), (2).

Будем, например, искать уравнение поверхности  $S$  в виде

$$\varphi(x, t, u) = 0. \quad (13)$$

Любая характеристика (4) уравнения (1) должна лежать на поверхности  $S$ , поэтому

$$\varphi(X, t, U) = 0. \quad (14)$$

Дифференцируя (14) по переменному  $t$  и учитывая (3), получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f(x, t, u) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad (15)$$

которое является линейным дифференциальным уравнением первого порядка для функции  $\varphi$ , зависящей от трех независимых переменных  $(x, t, u)$ .

Поверхность  $S$  определена уравнениями (13), (14) однозначно для любых  $x_0, t$ , при которых  $X, U$  конечны, и является гладкой поверхностью ( $\varphi \in C_1$ ), если  $u_0(x) \in C_1, \xi, f \in C_1$ .

Из уравнения (13) определяется функция  $u(x, t) \in C_1$ , дающая решение задачи (1), (2) лишь в области значений  $x, t$ , в которой уравнение (6) однозначно разрешается относительно  $x_0$ .

Таким образом, разница в постановках задачи Коши (1), (2) и задачи определения поверхности  $S$  состоит в том, что в первом случае ищется интегральная поверхность  $u = u(x, t)$ , однозначно проектирующаяся на плоскость  $u = 0$ ; во втором — эта поверхность может быть произвольной.

При достаточно малых значениях  $t_0$  в случае  $u_0(x) \in C_1$  обе эти задачи Коши эквивалентны; в целом (т. е. при любых  $t > 0$ ) геометрическая постановка задачи Коши более общая и допускает решение и тогда, когда задача (1), (2) неразрешима.

Если предположить, что функция  $u(x, t)$  описывает какую-либо физическую величину в пространстве переменных  $x, t$ , то естественно, что эта величина должна быть однозначной функцией  $x, t$ . Поэтому задачи физики, приводящиеся к задаче Коши (1), (2), требуют определения однозначной функции  $u = u(x, t)$ . Как мы видели, задача Коши (1), (2) разрешима в такой постановке в классе непрерывных решений  $u(x, t) \in C$  лишь в достаточно малой полосе  $0 \leq t \leq t_0$ .

На рис. 1.6 изображен типичный вид поверхности  $S$ . На этом рисунке видно, что  $\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| \rightarrow \infty$  в тех точках  $(x, t)$ , вблизи

которых поверхность  $S$  неоднозначно проектируется на плоскость переменных  $(x, t)$ .

Поясним сказанное на примере простейшего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

для которого поставим начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^- = aa + \beta & \text{при } x \leq a, \\ \alpha x + \beta & \text{при } a \leq x \leq b, \\ u^+ = ab + \beta & \text{при } x \geq b. \end{cases} \quad (17)$$

Начальная функция  $u_0(x)$  непрерывна при  $-\infty < x < \infty$ ; производная  $u'_0(x)$  терпит разрыв в точках  $x = a$ ,  $x = b$ . Построим

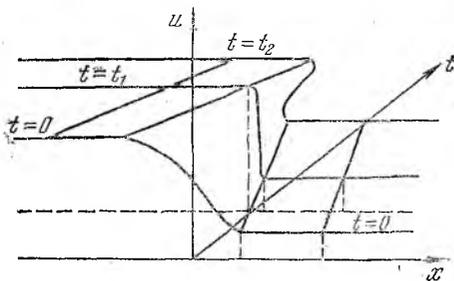


Рис. 1.6.

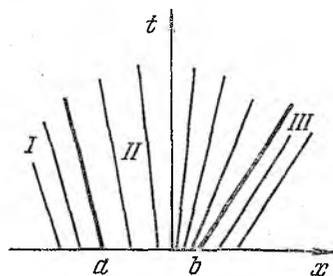


Рис. 1.7.

решение задачи (16), (17), удовлетворяющее уравнению (16) в широком смысле в точках, в которых не существуют производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Характеристическая система (3) уравнения (16) имеет решение

$$X(t, x_0, u_0) = x_0 + u_0 t, \quad U(t, x_0, u_0) = u_0, \quad (18)$$

которое остается ограниченным при любых значениях  $t, x_0, u_0$ . Пусть  $\alpha \geq 0$ . Проекция характеристик (18) на плоскость  $u = 0$  имеют вид, изображенный на рис. 1.7. В этом случае через каждую точку  $(x, t)$  полуплоскости  $t \geq 0$  проходит единственная характеристика  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ , т. е. уравнение (6) имеет единственное решение относительно  $x_0$ . Функция  $u(x, t)$  постоянна вдоль характеристик (6), поэтому в зоне I, т. е. при  $x \leq a + u^- t$ ,

$$u(x, t) = u^- = aa + \beta,$$

в зоне III, при  $x \geq b + u^+ t$ ,

$$u(x, t) = u^+ = ab + \beta.$$

В зоне II, при  $a + u^-t \leq x \leq b + u^+t$ , уравнение (6) разрешается относительно  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t}.$$

По формуле (8) определяем решение  $u(x, t)$  в зоне II:

$$u(x, t) = u_0(x_0(x, t)) = \alpha \cdot \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t} + \beta = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}.$$

Итак, решение задачи Коши (16), (17) при  $\alpha \geq 0$  задается формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- = \alpha a + \beta & \text{при } x \leq a + u^-t, \\ \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t} & \text{при } a + u^-t \leq x \leq b + u^+t, \\ u^+ = \alpha b + \beta & \text{при } x \geq b + u^+t. \end{cases} \quad (19)$$

Решение (19) непрерывно дифференцируемо при  $t \geq 0$  всюду, кроме линий  $x = a + u^-t$ ,  $x = b + u^+t$ , где терпят разрыв первые производные.

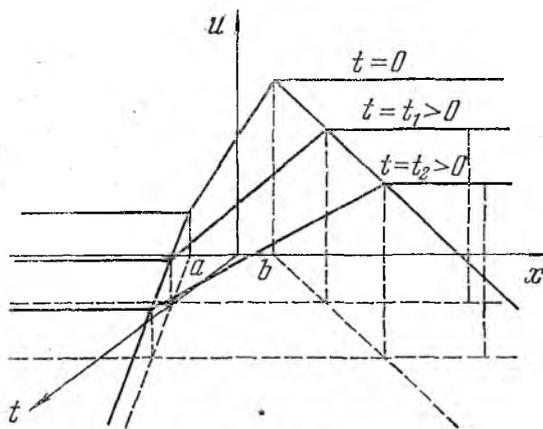


Рис. 1.8.

В пространстве переменных  $x, t, u$  решение (19) определяет интегральную поверхность  $S$ , изображенную на рис. 1.8. Эта поверхность однозначно проектируется на плоскость  $u = 0$  при  $t \geq 0$ .

В случае  $\alpha < 0$   $u^- > u^+$  и картина характеристик в проекции на плоскость  $(x, t)$  имеет вид, изображенный на рис. 1.9. Все характеристики (6) при  $a \leq x_0 \leq b$  сходятся в точке  $x = x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}$ ,  $t = t_0 = -\frac{1}{\alpha} > 0$ . В зоне I  $u(x, t) = u^-$ , в зоне II

$u(x, t) = u^+$ . В зоне III  $u(x, t) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}$ , однако так как  $\alpha < 0$ , то эта формула не определяет решения  $u(x, t)$  при  $t = -\frac{1}{\alpha}$ . Наконец, в зоне IV, функция

$$U(t, x_0(x, t), u_0(x_0(x, t)))$$

трехзначна и принимает значения:

$$u_I(x, t) = u^-, \quad u_{II}(x, t) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}, \quad u_{III}(x, t) = u^+.$$

Итак, в случае  $\alpha < 0$  непрерывное решение  $u(x, t)$  задачи Коши (16), (17) существует лишь при  $t < -\frac{1}{\alpha}$ , а интегральная поверхность  $S$  определена при всех  $t \geq 0$  (рис. 1.10); однако при

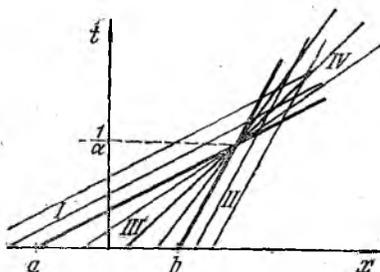


Рис 1.9.

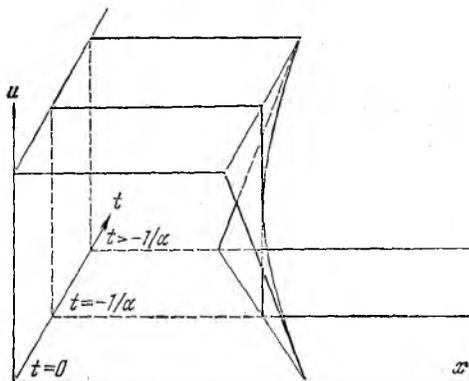


Рис. 1.10.

$t \geq -\frac{1}{\alpha}$  она не проектируется однозначно на плоскость  $u = 0$ .

2. Одно нелинейное уравнение. Задача Коши для нелинейного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi(x, t, v, \omega) = 0, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (1)$$

в случае  $\varphi \in C_2$ ,  $v_0(x) \in C_2$  сводится после дифференцирования по  $x$  уравнения (1) к задаче Коши для системы двух квазилинейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \varphi'_\omega(x, t, v, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} &= -\varphi'_v \omega - \varphi'_{x'} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\varphi(x, t, v, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \omega(x, 0) = v_0'(x).$$

Последнее условие ( $\omega(x, 0) = v_0'(x)$ ) гарантирует, что при любом  $t$ , при котором существует решение системы (2), будет выполнено условие

$$\omega(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}.$$

Доказательство этого будет приведено в следующем пункте для более общего случая.

Воспользовавшись этим, перепишем систему (2) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi'_\omega \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi + \varphi'_\omega \cdot \omega, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \varphi'_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\varphi'_v \cdot \omega - \varphi'_x. \quad (4)$$

Система уравнений (3), (4) характерна тем, что в каждом из уравнений функции  $v$  и  $\omega$  дифференцируются в одном и том же направлении, т. е. характеристическое направление  $\frac{dx}{dt} = \varphi'_\omega$  для этой системы является двукратным.

Системы подобного типа называются *системами с одинаковой главной частью*.

Эти обстоятельства позволяют свести поставленную задачу к интегрированию системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

В самом деле, если для характеристической системы уравнения (1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \varphi'_\omega(X, t, V, \Omega), \\ \frac{dV}{dt} &= \Omega \varphi'_\omega(X, t, V, \Omega) - \varphi(X, t, V, \Omega), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\Omega \varphi'_v(X, t, V, \Omega) - \varphi'_x(X, t, V, \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

известно ее решение

$$X = X(t, x_0, v_0, \omega_0), \quad V = V(t, x_0, v_0, \omega_0), \quad \Omega = \Omega(t, x_0, v_0, \omega_0),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0, x_0, v_0, \omega_0) = x_0, \quad V(0, x_0, v_0, \omega_0) = v_0, \quad \Omega(0, x_0, v_0, \omega_0) = \omega_0, \quad (6)$$

то решение  $v(x, t) \equiv C_2$  задачи Коши (1) задается формулой

$$v\left(X\left(t, x_0, v_0(x_0), \frac{dv_0(x_0)}{dx_0}\right), t\right) = V\left(t, x_0, v_0(x_0), \frac{dv_0(x_0)}{dx_0}\right), \quad (7)$$

которая параметрически определяет функцию  $v(x, t)$ . Если  $x_0 = x_0(x, t)$  есть результат однозначного разрешения уравнения

$$x = X\left(t, x_0, v_0(x_0), \frac{dv_0(x_0)}{dx_0}\right) \quad (8)$$

относительно параметра  $x_0$ , то из (7) следует явная формула для решения  $v(x, t)$  задачи Коши (1):

$$v(x, t) = V\left(t, x_0(x, t), v_0(x_0(x, t)), v_0'(x_0(x, t))\right). \quad (9)$$

Формула (9) определяет однозначную функцию  $v(x, t) \in C_2$  лишь в тех точках  $(x, t)$ , в которых уравнение (8) однозначно разрешимо относительно  $x_0$ .

Решение задачи Коши (1) получено нами лишь для случая  $v_0(x) \in C_2$ . Простые примеры показывают, что если  $v_0'(x)$  лишь непрерывна, то, вообще говоря, не существует решения  $v(x, t) \in C_1$  задачи (1). Постановка задачи Коши (1) в случае начальных функций  $v_0(x) \in C_1$  нуждается в уточнении.

**3. Гиперболическая система нелинейных уравнений.** В случае задачи Коши для системы нелинейных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi(x, t, v, \omega) = 0, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad (2)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\} \quad (3)$$

будем предполагать, что  $\varphi \in C_2$ ,  $v^0 \in C_2$ . Тогда, согласно п. 3 § 2, функции  $v, \omega$  являются решением системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\varphi(x, t, v, \omega), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + A(x, t, v, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = \bar{f} \quad (4)$$

(см. § 3, п. 2), где матрица  $A = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_j} \right) \right)$ . Если для системы (4) мы поставим начальные условия

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega^0(x) = \frac{dv^0(x)}{dx}, \quad (5)$$

то вопрос о том, является ли функция  $v(x, t)$ , определенная в результате решения задачи Коши (4), (5), решением исходной задачи (1), (2), есть вопрос о выполнении равенства (3) при любых  $(x, t) \in G$ .

Дифференцируя первую группу уравнений (4) по  $x$ , вычитая из полученных результатов вторую группу уравнений (4) и учитывая, что  $\bar{f} = -\varphi'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \omega$  (см. формулу (2.3.7)), найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x} - \omega_i \right) = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\alpha} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} - \omega_\alpha \right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

и, согласно (5),

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}(x, 0) = \omega_i(x, 0). \quad (7)$$

На основании следствия из леммы 1 (п. 5 § 6), из (6) и (7) следует, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}(x, t) = \omega_i(x, t), \quad (8)$$

т. е. равенство (3) выполнено тождественно.

Так как существование решения системы квазилинейных уравнений доказано нами лишь в классе  $C_1$ , то для систем нелинейных уравнений гиперболического типа построенные решения принадлежат классу  $C_2$ .

## § 10. Поведение производных решения системы квазилинейных уравнений

**1. Слабый разрыв. Транспортное уравнение.** В §§ 7, 8 было построено решение задачи Коши для системы квазилинейных уравнений, обладающее непрерывными первыми производными. Рассматривая липшиц-непрерывные начальные данные, мы пришли к некоторому обобщению классических решений — к липшиц-непрерывным решениям задачи Коши, обладающим первыми производными почти всюду в области определения.

Рассмотрим более частный класс обобщенных решений  $u(x, t)$  системы квазилинейных уравнений — класс непрерывных, обладающих кусочно-непрерывными первыми производными, функций  $u(x, t)$ . Допустим, что вектор-функция  $u(x, t)$  непрерывна и обладает непрерывными первыми производными всюду, кроме некоторых кусочно-дифференцируемых линий, на которых первые производные  $p, q$  терпят разрыв первого рода; допустим, что вне линий разрыва первых производных  $u(x, t)$  удовлетворяет системе квазилинейных уравнений

$$l_\alpha^k \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right] = f_k, \quad (1)$$

где  $l_\alpha^k(x, t, u)$ ,  $\xi_k(x, t, u)$ ,  $f_k(x, t, u) \in C_1$ . Пусть  $x = x(t)$  — уравнение линии разрыва первых производных функции  $u(x, t)$ ;

обозначим

$$p_k^\pm = p_k^\pm(x(t), t) = p_k(x(t) \pm 0, t) = \frac{\partial u_k}{\partial x}(x(t) \pm 0, t),$$

$$q_k^\pm = q_k^\pm(x(t), t) = q_k(x(t) \pm 0, t) = \frac{\partial u_k}{\partial t}(x(t) \pm 0, t).$$

Если  $p^+ \neq p^-$ , но решение  $u(x, t)$  непрерывно на линии  $x = x(t)$ , то такую особенность решения называют *слабым разрывом*, а линию  $x = x(t)$  — *линией слабого разрыва*.

Из условия непрерывности  $u(x, t)$  на линии слабого разрыва  $x = x(t)$  следует

$$x'(t) p^- + q^- = x'(t) p^+ + q^+,$$

т. е.

$$[p] x'(t) = -[q], \quad (2)$$

где

$$[p] = p^+ - p^-, \quad [q] = q^+ - q^-.$$

По предположению, функция  $u(x, t)$  слева и справа от линии  $x = x(t)$  удовлетворяет системе (1); поэтому в точках этой линии

$$l^k(q^+ + \xi_k p^+) = f_k, \quad l^k(q^- + \xi_k p^-) = f_k \quad (3)$$

(величины  $l^k$ ,  $\xi_k$ ,  $f_k$  непрерывны на линии  $x = x(t)$ ).

Вычитая из первой группы уравнений (3) вторую, получим

$$l_a^k(q_a^+ - q_a^-) + \xi_k(\mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^-) = 0,$$

где

$$\mathcal{P}_k^\pm = l_a^k p_a^\pm \quad (k = 1, \dots, n).$$

Исключая отсюда с помощью (2)  $(q_a^+ - q_a^-)$ , получим

$$[\xi_k - x'(t)] [\mathcal{P}_k] = [\xi_k - x'(t)] (\mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^-) = 0 \quad (4)$$

$$(k = 1, \dots, n).$$

Обозначим

$$\mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^- = [\mathcal{P}_k] = \eta_k.$$

Если  $x'(t) \neq \xi_k$  при всех  $k = 1, \dots, n$ , то  $\mathcal{P}_k^+ = \mathcal{P}_k^-$ . Ввиду линейной независимости собственных векторов  $l^k$ , в этом случае  $p_i^- = p_i^+$  при всех  $i = 1, \dots, n$ , т. е. разрыв производных отсутствует.

Поэтому

$$x'(t) = \xi_s(x(t), t, u(x(t), t)). \quad (5)$$

Это уравнение означает, что линия слабого разрыва  $x = x(t)$  является характеристикой системы (1). Этот вывод, естественно, согласуется с определением характеристики как линии, че-

рез которую решение системы (1) продолжается неоднозначно (см. § 6, п. 2).

Пусть на рассматриваемом отрезке линии слабого разрыва  $x = x(t)$  выполнено равенство (5), и пусть  $x = x(t)$  является  $m$ -кратной характеристикой системы (1), т. е. равенство (5) справедливо при  $s = j, j + 1, \dots, j + m - 1$ .

Тогда из (4), (5) следует, что

$$\eta_k = \mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^- = 0 \quad \text{при } k < j \text{ и } k \geq j + m.$$

Выведем уравнения, которым удовлетворяют  $\eta_k$ , характеризующие величину слабого разрыва. Так как решение  $u(x, t)$  слева и справа от линии слабого разрыва  $x = x(t)$  является классическим решением системы (1), то величины  $\mathcal{P}_k^\pm$  удовлетворяют на линии  $x = x(t)$  в широком смысле уравнениям продолженной системы (§ 4, п. 3), написанным для характеристики  $x = x(t)$ :

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{P}_k^+\right)_k = \frac{\partial \mathcal{P}_k^+}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^+}{\partial x} = \mathcal{F}^k + \mathcal{F}_\alpha^k \mathcal{P}_\alpha^+ + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k \mathcal{P}_\alpha^+ \mathcal{P}_\beta^+, \quad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{P}_k^-\right)_k = \frac{\partial \mathcal{P}_k^-}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^-}{\partial x} = \mathcal{F}^k + \mathcal{F}_\alpha^k \mathcal{P}_\alpha^- + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^- \quad (7)$$

$$(k = j, j + 1, \dots, j + m - 1).$$

Коэффициенты уравнений (6), (7) непрерывны на линии  $x = x(t)$ , поэтому мы не снабжаем их значками  $\pm$ .

Вычитая (7) из (6), получим

$$\left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)_k = \frac{\partial \eta_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \eta_k}{\partial x} = \mathcal{F}_\alpha^k \eta_\alpha + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k [\mathcal{P}_\alpha^+ \mathcal{P}_\beta^+ - \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^-] \quad (8)$$

$$(k = j, j + 1, \dots, j + m - 1).$$

Так как

$$\mathcal{P}_\alpha^+ \mathcal{P}_\beta^+ - \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^- = \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^+ + \eta_\alpha \mathcal{P}_\beta^+ - \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^- = \mathcal{P}_\alpha^- \eta_\beta + \mathcal{P}_\beta^+ \eta_\alpha$$

и  $\eta_\alpha = 0$  при  $\alpha \neq j, j + 1, \dots, j + m - 1$ , то уравнения (8) записываются в виде

$$\left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)_k = \sum_{\alpha=j}^{j+m-1} \psi_\alpha^k \eta_\alpha \quad (k = j, j + 1, \dots, j + m - 1), \quad (9)$$

где

$$\psi_\alpha^k = \mathcal{F}_\alpha^k + \sum_{\beta=1}^n (\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k \mathcal{P}_\beta^+ + \mathcal{F}_{\beta\alpha}^k \mathcal{P}_\beta^-).$$

Из линейности системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) следует важный вывод: *слабый разрыв решения*

системы квазилинейных уравнений гиперболического типа, распространяясь вдоль характеристики, не может ни возникнуть, ни исчезнуть, если только решение и его первые производные остаются ограниченными.

В случае системы, гиперболической в узком смысле (§ 2, п. 2), характеристика  $x = x(t)$  является простой. Поэтому система (9) превращается в одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Уравнения (9) носят название *транспортных уравнений* для слабого разрыва.

Замечая, что

$$\mathcal{P}_\alpha^+ \mathcal{P}_\beta^+ - \mathcal{P}_\alpha^- \mathcal{P}_\beta^- = \eta_\alpha \eta_\beta + \mathcal{P}_\alpha^- \eta_\beta + \mathcal{P}_\beta^- \eta_\alpha,$$

системе (9) можно придать следующий вид:

$$\left( \frac{d\eta_k}{dt} \right)_k = \mathcal{F}_\alpha^k \eta_\alpha + \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k [\eta_\alpha \eta_\beta + \mathcal{P}_\alpha^- \eta_\beta + \mathcal{P}_\beta^- \eta_\alpha] \quad (10)$$

$$(k = j, j+1, \dots, j+m-1).$$

Система (10) нелинейна. Из нее можно сделать вывод, что величина слабого разрыва  $\eta$  может стать бесконечной за конечное время. Действительно, например, для систем, гиперболических в узком смысле, система (10) превращается в одно уравнение типа Рикатти или типа Бернулли. Однако величины  $\eta_k$  обращаются в бесконечность лишь одновременно с  $\mathcal{P}_k^-$ ,  $\mathcal{P}_k^+$ . Поэтому этот эффект не специфичен для слабого разрыва решения, а является следствием общего свойства неограниченного возрастания производных решения системы квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Для системы двух квазилинейных уравнений, гиперболической в узком смысле, транспортное уравнение в форме (10) было получено Дж. Нитше [1953].

Мы установили, что для системы, гиперболической в узком смысле, слабый разрыв отличен от нуля во всех точках характеристики. Следовательно, слабый разрыв решения задачи Коши возникает лишь в случае, когда начальные функции обладают разрывом первых производных.

Произвольный разрыв производных начальных функций распадается на слабые разрывы, которые распространяются, вообще говоря, по всем характеристикам, выходящим из точки разрыва производных начальных функций, удовлетворяя на каждой условии (9). Иногда этот эффект называют *распадом произвольного слабого разрыва*.

**2. Неограниченность производных. Градиентная катастрофа.** Согласно п. 1 § 8 рост решения  $u(x, t)$  и его первых производных с увеличением  $t$  оценивается с помощью решения мажорантной системы (8.1.2), (8.1.3). Эта система является нелинейной

системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, и из нее непосредственно вытекает, что при достаточно большом значении  $t > 0$  величины  $\mathcal{P}(t)$ ,  $U(t)$ , вообще говоря, одновременно обращаются в бесконечность. Таким образом, оценка роста решения и его производных с помощью решения мажорантной системы приводит к выводу о том, что для произвольной системы квазилинейных уравнений гиперболического типа решение  $u(x, t)$  и его производные  $p(x, t)$  с ростом  $t$ , вообще говоря, стремятся к бесконечности.

Этот вывод относится к произвольной системе квазилинейных уравнений. Однако представляют интерес и частные классы систем квазилинейных уравнений, например, системы, решения которых остаются ограниченными при любых значениях переменного  $t$ .

Таким свойством обладают, например, системы линейных уравнений, а также системы, приводящиеся к инвариантам, т. е. представимые в виде

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = f_k(x, t, r) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1)$$

если при этом  $f_k$  не слишком быстро растут с ростом  $r$ , например, если при любых  $x, t, r$

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial r_j} \right| \leq C \quad (k, j = 1, \dots, n).$$

Нетрудно заметить, что решения  $r(x, t)$  систем такого типа остаются ограниченными при любых значениях  $t$ , однако их производные тем не менее неограниченно возрастают по абсолютной величине, если  $\xi_k(x, t, r)$  существенно зависят от  $r = \{r_1, \dots, r_n\}$ .

Эффект образования неограниченных производных при ограниченности решения системы квазилинейных уравнений называют *градиентной катастрофой*.

Поясним это простым примером. Рассмотрим однородную систему двух квазилинейных уравнений, коэффициенты которой не зависят явно от  $x, t$ . Она приводится к инвариантам и может быть записана в форме

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r) \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (2)$$

Предположим, что  $\frac{\partial \xi_k}{\partial r_k} > 0$ , и рассмотрим для системы (2) задачу Коши с начальными условиями, поставленными на всей оси  $t = 0$ :

$$r_1(x, 0) = r_1^0(x), \quad r_2(x, 0) = r_2^0(x) = r_2^0 = \text{const}. \quad (3)$$

Пусть  $r_1^0(x) \in C_1$ ,  $|r_1^0(x)| < M$ . Решение задачи Коши (2), (3) сводится к задаче Коши для одного квазилинейного уравнения:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + \xi_1(r_1, r_2^0) \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad r_1(x, 0) = r_1^0(x).$$

Согласно § 9 решение  $r_1(x, t)$  этой задачи задается неявно формулой  $r_1(x, t) = r_1^0(x - \xi_1(r_1(x, t), r_2^0) \cdot t)$ .

Вычислим производную  $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\frac{dr_1^0(x_0)}{dx_0}}{1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial r_1}(r_1(x, t), r_2^0) \frac{dr_1^0(x_0)}{dx_0} \cdot t},$$

где  $x_0 = x - \xi_1(r_1, r_2^0) \cdot t$ . Отсюда следует, что при  $\frac{dr_1^0(x_0)}{dx_0} < 0$  производная  $\frac{\partial r_1}{\partial x}$  монотонно убывает с ростом  $t$  на характеристике  $x = x_0 + \xi_1(r_1, r_2^0) \cdot t$  и при

$$t = t_m = \frac{-1}{\frac{d}{dx_0} \xi_1(r_1^0(x_0), r_2^0)} > 0$$

становится неограниченной.

Таким образом, если  $\frac{\partial \xi_k}{\partial r_k} \neq 0$ , то, как правило, производные решения  $r(x, t)$  системы (2) с ростом переменного  $t$  неограниченно (по модулю) возрастают.

Для системы (2) эти же выводы можно получить более формально. Обозначая  $p_k = \frac{\partial r_k}{\partial x}$ , получим дифференцированием уравнений (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \xi_1(r_1, r_2) \frac{\partial p_1}{\partial x} &= -\frac{\partial \xi_1}{\partial r_1}(r_1, r_2) p_1^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2}(r_1, r_2) p_1 p_2, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \xi_2(r_1, r_2) \frac{\partial p_2}{\partial x} &= -\frac{\partial \xi_2}{\partial r_2}(r_1, r_2) p_2^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial r_1}(r_1, r_2) p_1 p_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(r_1, r_2) &= \exp \left[ - \int_0^{r_2} \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2}(r_1, r_2) \frac{1}{\xi_2(r_1, r_2) - \xi_1(r_1, r_2)} dr_2 \right], \\ \Phi_2(r_1, r_2) &= \exp \left[ \int_0^{r_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial r_1}(r_1, r_2) \frac{1}{\xi_2(r_1, r_2) - \xi_1(r_1, r_2)} dr_1 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

получаем из (4), (5), (2) следующие следствия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 p_1) + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 p_1) &= \frac{d}{dt_1} (\varphi_1 p_1) = -\kappa_1(r_1, r_2) (\varphi_1 p_1)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_2 p_2) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 p_2) &= \frac{d}{dt_2} (\varphi_2 p_2) = -\kappa_2(r_1, r_2) (\varphi_2 p_2)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\kappa_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial r_i} / \varphi_i$ .

Продолженная система (6) исходной системы (2) легко позволяет судить об образовании градиентной катастрофы, а также об условиях, при которых в целом существует классическое решение системы (2). Например, пусть  $\frac{\partial \xi_i}{\partial r_i} > 0$  при всех  $r_1, r_2$ ; тогда из (6) следует, что если

$$\min_x \min_i \{p_i(x, 0)\} < 0,$$

то производные решения системы (2) становятся неограниченными при конечном значении  $t > 0$ . Если при тех же условиях на систему (2)

$$\min_x \min_i \{p_i(x, 0)\} \geq 0,$$

то производные решения остаются ограниченными при любом  $t > 0$ . Следовательно, в этом случае существует классическое решение задачи Коши при любом  $t > 0$ .

**3. Сильно- и слабо-нелинейные системы квазилинейных уравнений.** Систему квазилинейных уравнений (10.2.1) будем называть *слабо-нелинейной* в некоторой области пространства переменных  $x, t, r$ , если в этой области

$$\frac{\partial \xi_k(x, t, r)}{\partial r_k} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

в противном случае систему (10.2.1) будем называть *сильно-нелинейной*.

Согласно определению слабо-нелинейная система двух квазилинейных уравнений записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \xi_1(x, t, r_2) \frac{\partial r_1}{\partial x} &= f_1(x, t, r_1, r_2), \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \xi_2(x, t, r_1) \frac{\partial r_2}{\partial x} &= f_2(x, t, r_1, r_2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Заметим, что если  $\frac{\partial \xi_1}{\partial r_2} \neq 0$ ,  $\frac{\partial \xi_2}{\partial r_1} \neq 0$ , то система (2) приводится к виду

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + r_2 \frac{\partial r_1}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + r_1 \frac{\partial r_2}{\partial x} = f_2.$$

Мы покажем сейчас, что производные решения слабо-нелинейной системы (2) остаются ограниченными при любых значениях  $t$ , если ограниченным остается само решение  $r(x, t)$ .

**Теорема.** Пусть решение  $r(x, t)$  системы (2) ограничено\*) при  $0 \leq t \leq T$ :

$$|r_k(x, t)| \leq R, \quad (3)$$

а система (2) — гиперболическая в узком смысле\*\*), т. е.

$$\xi_2(x, t, r_1(x, t)) - \xi_1(x, t, r_2(x, t)) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

и функции  $\xi_k, f_k \in C_1$ . Тогда производные  $\frac{\partial r_k}{\partial x}, \frac{\partial r_k}{\partial t}$  ограничены при  $0 \leq t \leq T$ , если они ограничены при  $t=0$ .

**Доказательство.** Решение  $r(x, t)$  будем считать решением задачи Коши для системы (2) с начальными условиями

$$r_k(x, 0) = r_k^0(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Согласно условиям теоремы

$$|r_k^0(x)| \leq R, \quad \left| \frac{dr_k^0}{dx}(x) \right| \leq P_0.$$

Пусть  $x = x_1(t, x_0)$  — уравнение характеристики системы (2) первого семейства, проходящей через точку  $x = x_0$  оси  $t = 0$ . Перепишем первое уравнение системы (2) в виде

$$\left( \frac{dr_1}{dt} \right)_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t} + \xi_1(x, t, r_2(x, t)) \frac{\partial r_1}{\partial x} = f_1(x, t, r_1, r_2).$$

Если считать функцию  $r_2(x, t)$  известной, то определение  $r_1(x, t)$  сводится к решению задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi_1(x_1, t, r_2(x_1, t)), \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = f_1(x_1, t, \bar{r}_1, r_2(x_1, t)) \quad (\bar{r}_1 = \bar{r}_1(t, x_0)) \quad (6)$$

с начальными данными

$$x_1(0, x_0) = x_0, \quad \bar{r}_1(0, x_0) = r_1^0(x_0). \quad (7)$$

Если  $\bar{r}_1(t, x_0)$  есть решение задачи (5) — (7), то формула

$$r_1(x_1(t, x_0), t) = \bar{r}_1(t, x_0) \quad (8)$$

определяет решение  $r_1(x, t)$ .

\*) Как мы отмечали, условие (3) будет выполняться автоматически, если  $\left| \frac{\partial f_k}{\partial r_i} \right| \leq C$ .

\*\*) Нам достаточно выполнения условия (4) для данного решения  $r(x, t)$ . Конечно, система (2) может быть гиперболической в узком смысле тождественно, т. е. при любых  $r_1, r_2$ .

Обозначим

$$\dot{x}_1(t, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} x_1(t, x_0)$$

и продифференцируем по параметру  $x_0$  уравнение (5). Мы получим

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\xi_1(x, t, r_2(x, t))] \right\}_{x=x_1(t, x_0)} \dot{x}_1(t, x_0). \quad (9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\xi_1(x, t, r_2)}{dt} \right)_2 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2}(x, t, r_2) \left[ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} \right] + \xi'_{1t} + \xi_2 \xi'_{1x}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \bar{f}_2(x, t, r), \quad (10)$$

где

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2} f_2 + \xi'_{1t} + \xi_2 \xi'_{1x}.$$

Вычитая из (10) равенство

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \left( \frac{d\xi_1}{dt} \right)_1,$$

найдем

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\bar{f}_2 - \left( \frac{d\xi_1}{dt} \right)_1}{\xi_2 - \xi_1}. \quad (11)$$

Аналогично предыдущему получим

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \left( \frac{d\xi_2}{dt} \right)_1 = \bar{f}_1.$$

Преобразуем равенство (11) с помощью тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} &= \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{\bar{f}_1 - \left( \frac{d\xi_1}{dt} \right)_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{\left( \frac{d\xi_2}{dt} \right)_1 - \left( \frac{d\xi_1}{dt} \right)_1}{\xi_2 - \xi_1} = \\ &= \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} + \left( \frac{d}{dt} \ln [\xi_2(x, t, r_1) - \xi_1(x, t, r_2)] \right)_1. \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в уравнение (9), преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \left[ \frac{\dot{x}_1(t, x_0)}{\xi_2(x, t, r_1(x, t)) - \xi_1(x, t, r_2(x, t))} \right]_{x=x_1(t, x_0)} &= \\ &= \left[ \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} \right]_{x=x_1(t, x_0)}. \quad (12) \end{aligned}$$

Из начального условия (7) имеем

$$\dot{x}_1(0, x_0) = 1;$$

поэтому, интегрируя уравнение (12) от 0 до  $t$ , получим

$$\frac{\dot{x}_1(t, x_0) [\xi_2(x_0, 0, r_1^0(x_0)) - \xi_1(x_0, 0, r_2^0(x_0))]}{[\xi_2(x, t, r_1(x, t)) - \xi_1(x, t, r_2(x, t))]_{x=x_1(t, x_0)}} = \exp \int_0^t \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} d\tau. \quad (13)$$

Из предположений (3) об ограниченности решения и непрерывности функций  $\bar{f}_k$ ,  $\bar{f}'_k$ ,  $\xi_k$  следует, что существует число  $M > 0$  такое, что

$$|\bar{f}_k| \leq \frac{M}{2}, \quad |\xi_2 - \xi_1| \leq M, \quad |\bar{f}_2 - \bar{f}_1| \leq M.$$

Кроме того, по условию (4) теоремы, имеем

$$\xi_2 - \xi_1 \geq \varepsilon > 0.$$

Поэтому из формулы (13) получаем оценку

$$\frac{\varepsilon}{M} e^{-\frac{Mt}{\varepsilon}} \leq \dot{x}_1(t, x_0) \leq \frac{M}{\varepsilon} e^{\frac{Mt}{\varepsilon}}, \quad (14)$$

которая показывает, что поле характеристик 1-го семейства  $x = x_1(t, x_0)$  является дифференцируемым по  $x_0$  при всех  $t$  из интервала  $[0, T]$ .

Отсюда следует, что характеристики  $x = x_1(t, x_0)$  не пересекаются друг с другом при  $0 \leq t \leq T$ . Теперь легко получить доказательство нашей теоремы. Обозначая

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_1(t, x_0) = \frac{\partial \bar{r}_1(t, x_0)}{\partial x_0}$$

и дифференцируя уравнение (6) по параметру  $x_0$ , получим

$$\frac{d\dot{\bar{r}}_1}{dt} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial r_1} \dot{\bar{r}}_1 + \dot{x}_1 \left[ \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + \dot{f}'_{1x} \right]. \quad (15)$$

Обозначим

$$P(t) = \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ -\infty < x < \infty}} \max_{k=1, 2} \left| \frac{\partial r_k(x, \tau)}{\partial x} \right|$$

и будем считать, что константа  $M$  столь велика, что при всех  $0 \leq t \leq T$ ,  $-\infty < x < \infty$

$$\left| \frac{\partial \dot{f}_i}{\partial r_j} \right| \leq M, \quad |\dot{f}'_{ix}| \leq M \quad (i, j = 1, 2). \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (15), получим

$$\begin{aligned} \dot{r}_1(t, x_0) = \dot{r}_1(0, x_0) \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial r_1} d\tau \right\} + \\ + \int_0^t \left[ \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} + \dot{f}'_{1x} \right] \dot{x}_1(\tau, x_0) \exp \left\{ \int_\tau^t \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial r_1} d\zeta \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя сюда оценки (14), (16) и используя начальное условие (7), получим

$$|\dot{r}_1(t, x_0)| \leq P_0 e^{Mt} + \frac{M^2}{\varepsilon} e^{\frac{2Me+M}{\varepsilon}t} \int_0^t [P(\tau) + 1] d\tau. \quad (17)$$

Из формулы (8) имеем

$$\frac{\partial r_1(x, t)}{\partial x} = \frac{\dot{r}_1(t, x_0)}{\dot{x}_1(t, x_0)},$$

так что из оценок (17) и (14) следует

$$\left| \frac{\partial r_1(x, t)}{\partial x} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon} e^{Mt + \frac{Mt}{\varepsilon}} P_0 + \frac{M^3}{\varepsilon^2} e^{\frac{2Mt(\varepsilon+1)}{\varepsilon}t} \int_0^t [P(\tau) + 1] d\tau.$$

Легко проследить, что аналогично получается и оценка для величины  $\frac{\partial r_2}{\partial x}$ ; поэтому

$$\left| \frac{\partial r_k}{\partial x} \right| \leq P_0 \frac{M}{\varepsilon} e^{Mt + \frac{Mt}{\varepsilon}} + \frac{M^3}{\varepsilon^2} e^{\frac{2Mt(\varepsilon+1)}{\varepsilon}t} \int_0^t [P(\tau) + 1] d\tau \quad (k=1, 2).$$

Из этих неравенств вытекает оценка

$$P(t) \leq AP_0 + B \int_0^t [P(\tau) + 1] d\tau,$$

где

$$P(0) = P_0, \quad A = \frac{M}{\varepsilon} e^{Mt(1 + \frac{1}{\varepsilon})}, \quad B = MA^2,$$

справедливая при  $0 \leq t \leq T$ .

Применяя теперь к полученному неравенству лемму 1 из § 6, получим

$$P(t) \leq [AP_0 + Bt] e^{Bt},$$

откуда следует ограниченность производных  $\frac{\partial r_k(x, t)}{\partial x}$  на всем отрезке  $0 \leq t \leq T$ . Теорема доказана.

Ввиду произвольности  $T$  производные  $\frac{\partial r_k}{\partial x}$  решения слабо-нелинейной системы (2) остаются ограниченными в любой полосе по переменному  $t$ , в которой выполнены условия теоремы (3), (4).

Из доказанной теоремы вытекает

*Следствие. Задача Коши для слабо-нелинейной системы двух квазилинейных уравнений, гиперболической в узком смысле, разрешима в области определенности  $G$ , если решение  $r(x, t)$  остается в ней ограниченным\*).*

Поясним подробнее это следствие. Для произвольной системы квазилинейных уравнений производные становятся неограниченными даже при ограниченности самого решения. Если рассматривать задачу Коши с начальными условиями, заданными, например, на всей начальной оси  $t = 0$ , то для сильно-нелинейной системы производные обращаются в бесконечность при конечном значении  $t_0 > 0$  и при  $t > t_0$  не существует решения (классического) такой задачи Коши.

Для слабо-нелинейной системы, гиперболической в узком смысле, решение которой остается ограниченным (например,

при  $\left| \frac{\partial f_k}{\partial r_i} \right| \leq C$  ( $i, k = 1, 2$ )), производные остаются ограниченными при всех  $t > 0$ . Поэтому решение задачи Коши может

быть построено в любой конечной полосе  $0 \leq t \leq T$  методом, изложенным в § 8. Таким образом, для слабо-нелинейной системы существует решение задачи Коши в целом, т. е. при любых конечных значениях переменного  $t$ . Это обстоятельство сближает слабо-нелинейные системы с линейными.

С другой стороны, это показывает, что любая особенность начальных данных, будучи сглаженной при  $t = 0$ , уже не воспроизводится при  $t > 0$ . Поэтому обобщенные решения слабо-нелинейной системы, гиперболической в узком смысле, могут рассматриваться как пределы гладких решений сразу во всей полуплоскости  $t \geq 0$ , аналогично тому, как это имеет место для линейных уравнений.

Рассмотрим в качестве примера слабо-нелинейную систему двух уравнений\*\*)

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r_{3-k}) \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (18)$$

\*) Это же свойство слабо-нелинейных систем доказано для произвольной системы (10.2.1) при  $\dot{r}_k = 0$  (см. Б. Л. Рождественский, А. Д. Сидоренко [1967]).

\*\*\*) Общий интеграл системы (18) был получен в работе Н. Н. Яненко [1955].

Здесь  $f_1 = f_2 = \bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 0$ ; поэтому формула (13) переходит в равенство

$$\dot{x}_k(t, x_0^k) = \frac{\xi_2(r_1(x, t)) - \xi_1(r_2(x, t))}{\xi_2(r_1^0(x_0^k)) - \xi_1(r_2^0(x_0^k))} \quad (k = 1, 2),$$

и для производной  $\frac{\partial r_k}{\partial x}$  имеем

$$\frac{\partial r_k(x, t)}{\partial x} = \frac{dr_k^0(x_0^k)}{dx_0^k} \cdot \frac{\xi_2(r_1^0(x_0^k)) - \xi_1(r_2^0(x_0^k))}{\xi_2(r_1(x, t)) - \xi_1(r_2(x, t))}. \quad (19)$$

Отсюда следует более точная оценка производных решения системы (18):  $\left| \frac{\partial r_k(x, t)}{\partial x} \right| \leq P_0 \frac{M}{\varepsilon}$ .

Отметим интересное следствие формулы (19): если  $\xi_2(r_1(x, t)) = \xi_1(r_2(x, t))$ , то  $\frac{\partial r_k(x, t)}{\partial x} = \infty$ .

**З а м е ч а н и е.** Определение слабо-нелинейных систем квазилинейных уравнений было введено лишь для систем, приводящихся к инвариантам. Это возможно в общем случае лишь при  $n \leq 2$  (см. § 3). Теорема об ограниченности производных тем более была доказана лишь для  $n = 2$ .

Вопрос о выделении класса систем, которые не приводят к неограниченности производных в случае  $n \geq 3$ , остается открытым. Возможно, что производные решения системы, гиперболической в узком смысле, остаются ограниченными в случае выполнения условий

$$r_u^k(x, t, u) \frac{\partial \xi_k(x, t, u)}{\partial u} \equiv 0 \quad (\alpha, k = 1, \dots, n) \quad (20)$$

(см. П. Лакс [1957]). Легко убедиться, что условия (20) и условия (1) совпадают в случае существования инвариантов.

Если условия (20) выполнены, то легко проверить, что коэффициенты  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha}^k$  продолженной системы (4.3.16) — (4.3.19) тождественно обращаются в нуль. В сочетании с требованием гиперболичности в узком смысле это, возможно, позволит доказать ограниченность производных решения таких систем, как следствие ограниченности самого решения.

Другой интересный вопрос, который до сих пор не нашел еще удовлетворительного решения, — выделение класса систем, решение  $u(x, t)$  которых остается ограниченным даже при обращении производных в бесконечность. Очевидно, здесь интересен лишь случай  $n \geq 3$ , когда система не имеет инвариантов.



## § 11. Замечания по поводу смешанной задачи

1. **Постановка смешанной задачи для линейной системы.** Рассмотрим типичную смешанную задачу.

Найти решение  $u(x, t)$  системы линейных уравнений гиперболического типа, принимающее при  $t = 0$  заданные значения

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

и удовлетворяющее некоторым граничным условиям

$$c_\alpha^i(x, t) u_\alpha(x, t) \Big|_{\Gamma_1} = c^i u \Big|_{\Gamma_1} = c_i(x, t) \quad (1 \leq i \leq n_1), \quad (2)$$

$$d_\alpha^i(x, t) u_\alpha(x, t) \Big|_{\Gamma_2} = d^i u \Big|_{\Gamma_2} = d_i(x, t) \quad (1 \leq i \leq n_2), \quad (3)$$

которые задаются на некоторых линиях  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , выходящих соответственно из концов  $x = a$  и  $x = b$  отрезка  $[a, b]$  оси  $t = 0$  (рис. 1.11).

Будем считать, что кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  обладают непрерывно изменяющейся касательной и  $l_\alpha^k(x, t), \xi_k(x, t), f^k(x, t), f_\alpha^k(x, t) \in C_1$  в области, ограниченной кривыми  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и осью  $t = 0$ ;  $c_\alpha^i, c_i \in C_1$  на кривой  $\Gamma_1$ ,  $d_\alpha^i, d_i \in C_1$  на кривой  $\Gamma_2$ .

Пусть выполнены условия согласования начальных условий (1) и краевых условий (2), (3):

$$\left. \begin{aligned} c_\alpha^i(a, 0) u_\alpha^0(a) &= c_i(a, 0) & (1 \leq i \leq n_1), \\ d_\alpha^i(b, 0) u_\alpha^0(b) &= d_i(b, 0) & (1 \leq i \leq n_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если условия (4) не выполнены, то решение  $u(x, t)$  смешанной задачи разрывно, и его следует тогда понимать как обобщенное решение.

Разложим векторы  $c^i, d^i$  по векторам  $l^k(x, t)$ :

$$c^i(x, t) = \mu_\alpha^i(x, t) l^\alpha(x, t), \quad d^i(x, t) = \nu_\alpha^i(x, t) l^\alpha(x, t).$$

Тогда граничные условия (2), (3) переписутся в виде

$$\mu_\alpha^i l_\beta^\alpha u_\beta \Big|_{\Gamma_1} = c_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, n_1),$$

$$\nu_\alpha^i l_\beta^\alpha u_\beta \Big|_{\Gamma_2} = d_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, n_2),$$

или, в инвариантах,

$$\mu_\alpha^i r_\alpha \Big|_{\Gamma_1} = c_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, n_1), \quad (5)$$

$$\nu_\alpha^i r_\alpha \Big|_{\Gamma_2} = d_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, n_2). \quad (6)$$

Пусть условия (5), (6) совместны и линейно независимы, т. е. ранг матрицы  $((\mu_\alpha^i))$  равен  $n_1$ ; ранг  $((\nu_\alpha^i))$  равен  $n_2$ .

Пусть  $G^0$  — область определенности решения задачи Коши с начальным условием (1).

Очевидно, что кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  должны лежать вне области  $G^0$ , так как решение линейной системы уравнений однозначно определяется в области  $G^0$  начальным условием (1) и, вообще говоря, не удовлетворяет в ней условиям (5), (6).

Рассмотрим случай, когда кривая  $x = X_1(t)$  пересекает  $\Gamma_1$  в точке  $D$ , а кривая  $x = X_n(t)$  (см. § 6, п. 3) пересекает  $\Gamma_2$  в точке  $E$ .

Решение  $u(x, t)$  однозначно определяется в области  $G^0$  и может быть построено в этой области методом последовательных приближений (см. § 7). Поэтому достаточно рассмотреть задачу построения  $u(x, t)$  в области  $ACD$ ; в области  $BCE$  решение строится аналогично.

Для выяснения условий разрешимости смешанной задачи существенно знать, какие семейства характеристик  $x = x_k(\xi, 0, t)$ , выходящих из точек отрезка  $[a, b]$  начальной оси ( $a \leq \xi \leq b$ ), пересекают дуги  $AD$  и  $BE$  кривых  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Пусть при  $k = 1, 2, \dots, p$  характеристики  $x = x_k(\xi, 0, t)$  для  $\xi \in [a, b]$  пересекают отрезок  $AD$  кривой  $\Gamma_1$ , а при  $k = n - s + 1, n - s + 2, \dots, n$  пересекают отрезок  $BE$  кривой  $\Gamma_2$ .

Обозначая  $u^0(x, t), r^0(x, t)$  решение задачи Коши с начальным условием (1) в области  $G^0$ , приходим к следующей задаче в области  $ACD(G^1)$ :

Найти решение  $r(x, t)$  линейной системы

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g^k(x, t) + g_{\alpha}^k(x, t) r_{\alpha}, \quad (7)$$

удовлетворяющее на линии  $AC$  условиям

$$r_k(x, t)|_{AC} = r_k^0(x, t)|_{AC} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

а на линии  $AD$  — условиям (5).

Согласно определению области  $G^0$  ее граница состоит из отрезков характеристик системы (7).

Итак, определение решения в области  $G^1$  свелось к определению решения системы (7), принимающего заданные значения на характеристике  $AC$  и удовлетворяющего условиям (5) на линии  $AD$  (рис. 1.12). Ввиду существования решения системы (7) в области  $G^0$  значения  $r^0(x, t)$  на линии  $AC$  удовлетворяют условиям разрешимости (§ 6, п. 2). Таким образом, здесь мы

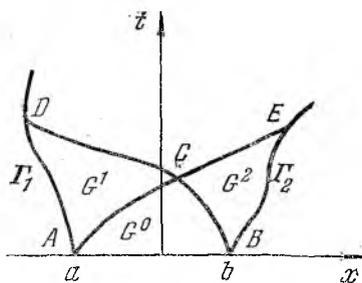


Рис. 1.11

впервые встретились с задачей, когда начальные значения задачи на характеристике. Задачу с данными на характеристике называют обычно *задачей Гурса*.

Рассмотрим произвольную точку  $(x, t)$  в области  $G^1$  (рис. 1.12) и проведем через нее все характеристики  $x = x_k(x, t, \tau)$  системы (7). Согласно нашим предположениям, характеристики

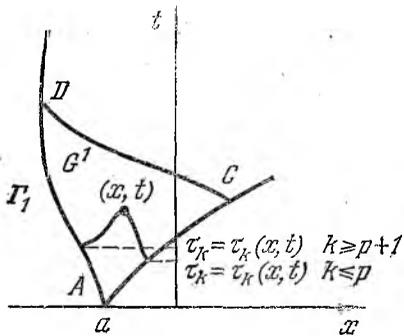


Рис. 1.12.

стики  $x = x_k(x, t, \tau)$  пересекут кривую  $AC$  при  $1 \leq k \leq p$  в некоторых точках  $(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k)$ , при этом  $\tau_k = \tau_k(x, t) \leq t$ .

Аналогично характеристики  $x = x_k$  пересекают кривую  $AD$  в точках  $(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k)$  при  $k \geq p+1$  и  $\tau_k = \tau_k(x, t) \leq t$ .

Краевые условия (5) будем называть *корректными*, если:

- 1) число  $n_1$  краевых условий (5) равно числу  $q = n - p$  характеристик  $x = x_k(x, t, \tau)$ , падающих из произвольной точки  $(x, t) \in G^1$  на линию  $AD$ ;
- 2) условия (5) могут быть однозначно разрешены относительно величин  $r_k(x, t)$  при  $k \geq p+1$ .

Пусть эти условия выполнены, т. е.  $n_1 = q = n - p$  и при  $(x, t) \in AD$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \mu_{p+1}^1 & \dots & \mu_{p+q-n}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{p+1}^q & \dots & \mu_n^q \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда условия (5) можно переписать в виде

$$r_i(x, t)|_{AD} = \bar{c}_i(x, t) + \sum_{\alpha=1}^p \bar{\mu}_\alpha^i(x, t) r_\alpha(x, t)|_{AD} \\ (i = p+1, p+2, \dots, p+q = n).$$

В дальнейшем будем отбрасывать черту над  $c_i, \mu_\alpha^i$ . Решение  $r(x, t)$  удовлетворяет в  $G^1$  уравнениям

$$r_k(x, t) = r_k^0(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k) + \\ + \int_{\tau_k(x, t)}^t \{g_k^k(x_k(x, t, \tau), \tau) + g_\alpha^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha(x_k(x, t, \tau), \tau)\} d\tau \\ (k \leq p),$$

$$\begin{aligned}
 r_k(x, t) &= c_k(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k) + \\
 &+ \sum_{\alpha=1}^p \mu_\alpha^k(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k) r_\alpha(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k) + \\
 &+ \int_{\tau_k(x, t)}^t \{g^k(x_k(x, t, \tau), \tau) + g_\alpha^k(x_k(x, t, \tau), \tau) r_\alpha(x_k(x, t, \tau), \tau)\} d\tau \\
 &\quad (k \geq p+1).
 \end{aligned}$$

Будем искать решение  $r(x, t)$  методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 r_k^{(s+1)}(x, t) &= r_k^0(x_k(x, t, \tau_k), \tau_k) + \\
 &+ \int_{\tau_k(x, t)}^t \{g^k(x, \tau) + g_\alpha^k(x, \tau) r_\alpha^{(s)}(x, \tau)\}_{x=x_k(x, t, \tau)} d\tau \quad (k \leq p),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_k^{(s+1)}(x, t) &= \left[ c_k(\zeta, \eta) + \sum_{\alpha=1}^p \mu_\alpha^k(\zeta, \eta) r_\alpha^{(s)}(\zeta, \eta) \right]_{\substack{\zeta=x_k(x, t, \tau_k) \\ \eta=\tau_k}} + \\
 &+ \int_{\tau_k(x, t)}^t \{g^k(x, \tau) + g_\alpha^k(x, \tau) r_\alpha^{(s)}(x, \tau)\}_{x=x_k(x, t, \tau)} d\tau \quad (k \geq p+1),
 \end{aligned}$$

выбрав подходящее начальное приближение, обладающее непрерывными первыми производными в области  $G^1$ .

Если обозначить

$$V(t) = \max_{\alpha^1} \max_{k=1, \dots, n} |r_k^{(s)}(\zeta, \tau) - r_k^{(s-1)}(\zeta, \tau)|,$$

то аналогично § 7 получим оценку

$$V^{(s+1)}(t) \leq B \int_0^t V^{(s)}(\tau) d\tau + p\mu \int_0^t V^{(s)}(\tau) d\tau = (B + p\mu) \int_0^t V^{(s)}(\tau) d\tau.$$

Здесь мы считаем, что в  $G^1$

$$B \geq n |g_\alpha^k(x, t)|, \quad \mu \geq |\mu_\alpha^k(x, t)|_{\Gamma}.$$

Из полученной оценки вытекает равномерная сходимость в области  $G^1$  последовательности  $\{r^{(s)}(x, t)\}$  к решению  $r(x, t)$  смешанной задачи.

Решение  $r(x, t)$  ( $u(x, t)$ ), построенное в области  $G^1$ , обладает в ней всеми свойствами решения задачи Коши, перечисленными в § 7; оно непрерывно дифференцируемо и непрерывным образом зависит от входных данных смешанной задачи, в том числе и от кривой  $\Gamma_1$ , если она удовлетворяет свойствам 1), 2).

Отметим, однако, что линия  $AC$ , вообще говоря, является линией разрыва производных решения смешанной задачи. Для того чтобы решение смешанной задачи имело непрерывные первые производные в области  $G^0 + G^1$ , необходимо, чтобы начальные и краевые условия удовлетворяли условиям согласования для производных. Эти условия будут получены ниже для более общего случая.

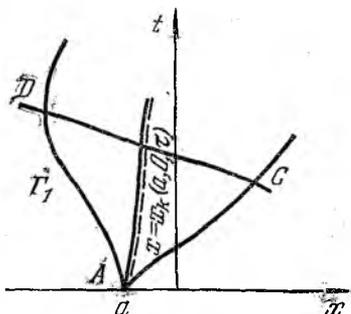


Рис. 1.13.

Выше для простоты было предположено, что при фиксированном  $k$  все характеристики  $k$ -го семейства  $x = x_k(x, t, \tau)$ , проходящие через любую точку  $(x, t) \in G^1$ , пересекают при  $\tau < t$  либо только линию  $AC$ , либо только линию  $AD$ .

Может, конечно, случиться, что это не так.

Пусть, например, через точку  $A$  проходит характеристика  $x = x_k(a, 0, \tau)$ , разбивающая область  $G^1$  на две части (рис. 1.13). В этом случае решение строится аналогично предыдущему, с очевидными изменениями.

Отметим, что эта характеристика также будет линией разрыва первых производных.

Вообще производные решения  $r(x, t)$  терпят разрыв на характеристиках, выходящих из точки  $A$ , если только в этой точке не выполнены условия согласования производных.

**2. Корректность краевых условий для системы квазилинейных уравнений.** Для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа поставим начальные

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (1)$$

и краевые условия

$$c_i(x, t, u)|_{\Gamma_1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_1), \quad (2)$$

$$d_i(x, t, u)|_{\Gamma_2} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_2). \quad (3)$$

Будем предполагать, что коэффициенты системы удовлетворяют требованиям, которые накладывались в § 8 при доказательстве теоремы существования решения задачи Коши.

Пусть  $u^0(x) \in C_1$ , кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — некоторые кривые с непрерывной касательной, лежащие в полуплоскости  $t \geq 0$  и проходящие соответственно через точки  $(a, 0), (b, 0)$ , а  $c_i(x, t, u), d_i(x, t, u)$  — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Будем говорить, что в точке  $(a, 0)$  выполнены условия согласования (условия непрерывности решения), если

$$c_i(a, 0, u^0(a)) = 0 \quad (i = 1, \dots, n_1).$$

Установим условия согласования производных в точке  $(a, 0)$ . Пусть  $x = X(t)$  — уравнение кривой  $\Gamma_1$ . Предположим существование решения  $u(x, t) \in C_1$  системы квазилинейных уравнений, удовлетворяющего условиям (1), (2).

Дифференцируя краевые условия (2) по переменному  $t$  на линии  $x = X(t)$ , получим

$$\frac{\partial c_i}{\partial u_a} (q_a + X'(t) p_a) + \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x} X'(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n_1).$$

Производные  $p_a = \frac{\partial u_a}{\partial x}$  при  $t=0$  определяются из начальных условий (1), а поэтому из системы уравнений

$$l_a^k [q_a + \xi_k p_a] = f_k$$

могут быть определены производные  $q_a = \frac{\partial u_a}{\partial t}$  на начальной оси  $t=0$ :

$$q_k(x, 0) = -\lambda_a^k \xi_a l_{\beta}^a p_{\beta}(x, 0) + \lambda_a^k f_a = q_k^0(x),$$

$$p_k(x, 0) = p_k^0(x) = \frac{du_k^0(x)}{dx}.$$

В этих формулах величины  $\lambda_a^k, \xi_a, l_{\beta}^a, f_a$  — известные функции переменного  $x$ , например:  $\lambda_a^k = \lambda_a^k(x, 0, u^0(x))$  и т. д.

Будем говорить, что в точке  $A(a, 0)$  кривой  $\Gamma_1$  выполнены условия согласования производных, если

$$\frac{\partial c_i}{\partial u_a} [q_a^0(a) + X'(0) p_a^0(a)] + c'_i + X'(0) c'_{ix} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_1);$$

при этом функции  $\frac{\partial c_i}{\partial u_a}, \frac{\partial c_i}{\partial t}, \frac{\partial c_i}{\partial x}$  берутся в точке  $(a, 0)$ , на-

пример,  $\frac{\partial c_i}{\partial u_a} = \frac{\partial c_i}{\partial u_a}(a, 0, u^0(a))$ .

Предполагая по-прежнему существование решения  $u(x, t) \in C_1$  смешанной задачи, установим требования, которым должны удовлетворять краевые условия. Вообще говоря, вывод

о том, что кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  должны лежать вне области определенности  $G^0$  решения задачи Коши, для существенно нелинейных уравнений  $\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} \neq 0\right)$  неверен. Существуют корректно поставленные смешанные задачи, когда кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  могут находиться в области  $G^0$ . Примером такой задачи является задача о поршне в газовой динамике (см. гл. 2, § 3). Однако решения этих задач разрывны. Ограничиваясь рассмотрением классических решений, мы сейчас исключим этот случай, предположив, что  $\Gamma_1, \Gamma_2$  лежат вне  $G^0$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{l}_\alpha^k(x, t) &= l_\alpha^k(x, t, u(x, t)), \\ \bar{\xi}_k &= \xi_k(x, t, u(x, t)) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и будем рассматривать нашу задачу как смешанную задачу для линейной системы

$$\bar{l}_\alpha^k \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right] = \bar{f}_k$$

при начальных и краевых условиях (1) — (3).

Функции

$$\bar{r}_k = \bar{l}_\alpha^k u_\alpha$$

удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} + \bar{\xi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x} = \bar{g}^k(x, t) + \bar{g}_\alpha^k(x, t) \bar{r}_\alpha.$$

Рассмотрим область  $G^1$  (рис. 1.14), и пусть точка  $(X(t), t)$  лежит на линии  $\Gamma_1$ .

Характеристику  $x = x_k(X(t), t, \tau)$  будем называть *приходящей* в точку  $(X(t), t)$  линии  $\Gamma_1$ , если она лежит в области  $G^1$  при  $\tau \leq t$ , и *выходящей*, если она лежит в области  $G^1$  при  $\tau \geq t$ . На рис. 1.14  $MM'$  — приходящая характеристика,  $MM''$  — выходящая.

Пусть в каждой точке  $\Gamma_1$  характеристики  $x = x_k$  при  $k = 1, 2, \dots, p$  являются приходящими, а при  $k = p+1, \dots, \dots, n$  — выходящими.

Аналогично случаю линейной системы потребуем, чтобы:

- 1) число условий (2) было равно  $q = n - p$ ,
- 2) уравнения (2) однозначно разрешались относительно величин  $\bar{r}_{p+1}, \bar{r}_{p+2}, \dots, \bar{r}_n$  при известных  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_p$ .

Если (2) переписать в виде

$$c_i(x, t, \bar{\lambda}_\alpha^k \bar{r}_\alpha) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1 = q),$$

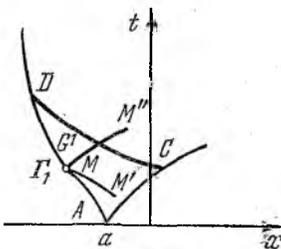


Рис. 1.14.

то условие 2) будет выполнено, если

$$\text{Det} \left( \left( \frac{\partial c_i}{\partial u_\alpha} \lambda_k^\alpha \right) \right) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, q; \quad k = p + 1, \dots, n = p + q), \\ (x, t) \in \Gamma_2.$$

Заметим, однако, что проверить корректность краевых условий для системы нелинейных уравнений бывает очень трудно, так как условия 1), 2) зависят от решения  $u(x, t)$ , которое нам неизвестно. Тем не менее при решении смешанной задачи можно поступать следующим образом.

На достаточно малом отрезке кривой  $\Gamma_1$ , примыкающем к точке  $A$ , решение  $u(x, t)$  (если оно существует) будет достаточно близким к значению  $u^0(a)$ . Это дает возможность проверки условий корректности постановки смешанной задачи при достаточно малых значениях переменного  $t$ . Если они выполнены, то решим задачу для этого малого интервала и будем рассматривать значения решения  $u(x, t)$  на конце интервала как новые начальные значения. Таким путем мы сможем построить решение смешанной задачи во всей области переменных  $x, t$ , где оно существует.

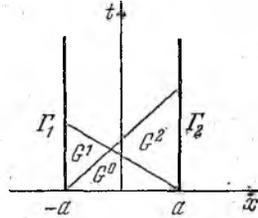


Рис. 1.15.

Рассмотрим пример. Для системы двух квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + \xi_1(r_1, r_2) \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + \xi_2(r_1, r_2) \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0$$

поставлены начальные

$$r_i(x, 0) = r_i^0 = \text{const}, \quad |x| \leq a$$

и граничные

$$c(t, r_1(-a, t), r_2(-a, t)) = 0, \quad d(t, r_1(a, t), r_2(a, t)) = 0$$

условия. Пусть  $\xi_1 < 0$ ,  $\xi_2 > 0$ . Условия согласования выполнены, если

$$c(0, r_1^0, r_2^0) = 0, \quad d(0, r_1^0, r_2^0) = 0. \quad (4)$$

При выполнении этих условий решение  $r(x, t)$  непрерывно в некоторой окрестности оси  $t = 0$ . Если помимо (4) выполнены условия согласования производных

$$\frac{\partial c}{\partial t}(0, r_1^0, r_2^0) = 0, \quad \frac{\partial d}{\partial t}(0, r_1^0, r_2^0) = 0,$$

то решение  $r(x, t)$  обладает непрерывными производными.

Решение  $r(x, t)$  постоянно в области  $G^0$  (рис. 1.15):

$$r_i(x, t) = r_i^0.$$

В области  $G^1$   $r_1(x, t) = r_1^0$ . Краевые условия корректны, если

$$\frac{\partial c(t, r_1^0, r_2)}{\partial r_2} \neq 0, \quad \frac{\partial d(t, r_1, r_2^0)}{\partial r_1} \neq 0.$$

## § 12. Аналитические методы выделения решений систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными

**1. Исследование совместности переопределенных систем уравнений.** Аналитические методы отыскания решений систем квазилинейных уравнений в большинстве случаев приводят к построению более узких классов решений, чем общее решение. Как было показано в предшествующих параграфах, общее решение системы из  $n$  квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными зависит от  $n$  произвольных функций одного переменного. Можно пытаться строить более узкие классы решений, зависящих от меньшего числа произвольных функций или даже параметров, требуя, чтобы решение исходной системы удовлетворяло дополнительным условиям, например дополнительным уравнениям.

В результате мы приходим к переопределенным системам уравнений, т. е. системам, у которых число уравнений превосходит число искомых функций. Переопределенные системы могут вообще не иметь решений, поэтому для установления существования решений и степени их произвола необходим анализ совместности переопределенных систем. При этом часто можно считать некоторые коэффициенты исходной системы, которые могут варьироваться, также подлежащими определению. Этот подход означает, что мы ищем частные случаи исходной системы, для которой этот путь построения решений приводит к результату.

Наиболее универсальным методом анализа совместности систем уравнений является метод внешних форм Картана (см. Э. Картан [1962], П. К. Рашевский [1947]). Мы, однако, изложим здесь более простой метод, предшествовавший методу Картана, который достаточен для наших целей. Для простоты изложения мы поясним его на нескольких характерных примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим переопределенную систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_{ij}(x, u) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m), \quad (1)$$

где  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ ;  $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ , для  $n$  функций  $u_1, \dots, u_n$  от  $m$  независимых переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Пусть функции  $f_{ij}$  непрерывно дифференцируемы в некоторой области  $G$  переменных  $x, u$ . Если при любых  $i = 1, \dots, n$ ;  $j, k = 1, \dots, m$  в области  $G$  тождественно выполнены условия

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_\alpha} f_{\alpha k} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_\alpha} f_{\alpha j}, \quad (2)$$

обеспечивающие равенство смешанных производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$ , то система (1) называется вполне интегрируемой в  $G$ .

В этом случае при любых  $(x^0, u^0) \in G$  существует некоторая окрестность  $|x - x^0| < r$  точки  $x^0$ , в которой система (1) определяет единственное решение  $u(x) \in C_2$  такое, что  $u(x^0) = u^0$  (см. В. И. Смирнов [1957]). Определение  $u(x)$  сводится при этом к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m f_{i\alpha}(x(t), u) \cdot \frac{dx_\alpha}{dt} \quad (3)$$

при начальном условии

$$u(0) = u^0; \quad x(0) = x^0.$$

Здесь  $x = x(t) \in C_2$  — линия, соединяющая точку  $x^0$  с рассматриваемой точкой  $x$ ,  $u_i = u_i(x(t))$ .

Таким образом, решение  $u(x)$  вполне интегрируемой системы (1) зависит от  $n + m$  постоянных  $u_1^0, \dots, u_n^0; x_1^0, \dots, x_m^0$ . Поэтому говорят, что решение вполне интегрируемой системы имеет «константный произвол».

**Пример 2.** Рассмотрим переопределенную систему линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$L_i u = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (4)$$

с одной неизвестной функцией  $u(x_1, \dots, x_m)$ , и пусть коэффициенты  $a_{i\alpha}$  — достаточно гладкие функции от  $x_1, \dots, x_m$ .

Алгоритм исследования совместности систем типа (4) известен и сводится к последовательному образованию так называемых

мых скобок Пуассона (см. П. К. Рашевский [1947], В. И. Смирнов [1957]).

Для линейных операторов  $L_i, L_j$  образуем коммутант

$$[L_i, L_j] = L_i L_j - L_j L_i = \sum_{\alpha=1}^n b_{ija} \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$b_{ija} = \sum_{\beta=1}^m \left( a_{i\beta} \frac{\partial a_{j\alpha}}{\partial x_\beta} - a_{j\beta} \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_\beta} \right).$$

Оператор  $[L_i, L_j]$  называется *скобкой Пуассона*. Если  $u(x_1, \dots, x_m) \in C_2$  — решение (4), то оно удовлетворяет, как следствие, также и линейным однородным уравнениям первого порядка

$$[L_i, L_j] u = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p). \quad (5)$$

Присоединяя уравнения (5) при всех  $i, j = 1, \dots, p$  к системе (4), мы получаем систему уравнений первого порядка того же самого типа, что и исходная система (4), так называемую расширенную систему. Этот цикл операций мы будем называть продолжением. После конечного числа продолжений мы приходим к линейной системе, для которой присоединение скобок Пуассона не дает новых независимых уравнений, т. е. коммутанты дифференциальных операторов системы являются линейными комбинациями этих операторов.

Такие системы называются *полными*. Итак, по определению система (4) называется *полной*, если

$$[L_i, L_j] = \sum_{\alpha=1}^p C_{ij}^\alpha(x_1, \dots, x_m) \cdot L_\alpha \quad (i, j = 1, \dots, p). \quad (6)$$

Пусть ранг матрицы  $((a_{i\alpha}(x_1, \dots, x_m)))$  в  $G$  равен  $p$ . Для полной системы (4) возможны два случая:

а)  $p = m$ , тогда система (4) допускает только тривиальное решение  $u = \text{const}$ .

б)  $p < m$ , тогда можно показать (см. Э. Гурса [1933], В. И. Смирнов [1957]), что система (4) путем замены переменных сводится к одному линейному однородному уравнению для одной неизвестной функции от  $m - p + 1$  аргументов  $y_1, \dots, y_{m-p+1}$ . Следовательно, общее решение полной системы (4) в этом случае зависит от одной произвольной функции от  $m - p$  аргументов.

Таким образом, исследование совместности системы (4) состоит в продолжении ее до полной системы и в вычислении ранга матрицы коэффициентов полученной полной системы.

Пример 3. Рассмотрим переопределенную систему двух нелинейных уравнений, одно из которых есть уравнение Монжа — Ампера

$$b \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + a = 0, \quad (7)$$

а другое уравнение первого порядка

$$\varphi(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $b$ ,  $a_{\alpha\beta}$ ,  $a$  — гладкие функции от  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ ;  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ .

Рассмотрим условия, при которых переопределенная система (7), (8) допускает семейство решений, зависящих от одной произвольной функции одного аргумента.

Полагая

$$du = p dx_1 + q dx_2, \quad dp = r dx_1 + s dx_2, \quad dq = s dx_1 + t dx_2, \quad (9)$$

пишем уравнения (7), (8) в виде

$$b(rt - s^2) + a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t + a = 0, \quad (10)$$

$$\varphi(x_1, x_2, u, p, q) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) при фиксированных  $x_1, x_2, u, p, q$  определяет в трехмерном пространстве величины  $r, s, t$  поверхность второго порядка (квадрику), имеющую, вообще говоря, два семейства прямолинейных образующих.

Как известно (см. Э. Гурса [1933]), эти семейства определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} br - b_1 r + a_{22} - \mu \lambda_1 &= 0, \\ bs - b_1 s + \lambda_{1-1} - \mu a_{11} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{11}a_{22} - ab = 0.$$

Величина  $\mu$  определяет конкретную образующую в каждом из семейств прямых (12), совокупность  $\mu, s$  — точку на образующей. Меняя независимо  $\mu, s$ , получаем исходную квадрику (10).

Дифференцируя соотношение (11) по  $x_1, x_2$ , находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} p &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для того чтобы система (7), (8) имела решение, зависящее от произвольной функции, необходимо, чтобы алгебраическая система уравнений (10), (13) относительно переменных  $r, s, t$  допускала бесконечное множество решений. Действительно, в противном случае  $r, s, t$  определились бы как конкретные функции от  $x_1, x_2, u, p, q$ , подставляя которые в (9) мы получили бы систему уравнений в полных дифференциалах. Эта система задавала бы все производные величин  $u, p, q$  по переменным  $x_1, x_2$  как функции от  $u, p, q, x_1, x_2$  и, как мы видели в примере 1, допускала бы в лучшем случае лишь константный произвол.

Требование бесконечного числа решений системы (10), (13) означает, что прямая (13) есть одна из образующих (12). Это приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} p \\ &= -b\mu = \frac{a_{22} - \mu \lambda_i}{a_{22} - \mu \lambda_i}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} q \\ &= -b\mu = \frac{\lambda_{3-i} - \mu a_{11}}{\lambda_{3-i} - \mu a_{11}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $i = 1, 2$  — номер семейства образующих (12), к которому принадлежит прямая (13).

Исключая  $\mu$  из уравнений (14), приходим к системе уравнений для  $\varphi(x_1, x_2, u, p, q)$ :

$$\left. \begin{aligned} b \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + p \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) - a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= 0, \\ b \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + q \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) - \lambda_{3-i} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Покажем, что если уравнения (15) выполнены при некотором  $i = 1, 2$ , то исходная система (7), (8) имеет решение, зависящее от произвольной функции. В самом деле, пусть  $\varphi$  есть решение (15), а  $u(x_1, x_2)$  — решение уравнения (8), покажем, что  $u(x_1, x_2)$  есть решение (7). Для этого дифференцируем (8); мы получаем уравнения (13). Уравнения (15) означают, что можно так ввести параметр  $\mu$ , что будут выполнены уравнения (14). Уравнения (14) означают, что прямая (13) лежит на квадрике (10), т. е.  $u(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению (7). Так как  $u(x_1, x_2)$  — произвольное решение (8), то оно, вообще говоря, зависит от одной произвольной функции одного аргумента. Поэтому утверждение доказано.

Для отыскания  $\varphi$  мы должны решить переопределенную систему (15) при  $i = 1$  или  $i = 2$ . Здесь мы можем воспользоваться методом исследования совместности, рассмотренным в примере 2, для линейной однородной системы с одной неизвестной функцией, каковой является система (15).

М. Марином [1953б], К. Ладфордом [1955], Ю. С. Завьяловым [1956] был проведен анализ совместности системы (7), (8) для частного случая

$$b = 1, \quad a_{\alpha\beta} = 0, \quad a = f^2(x_1, x_2), \quad (16)$$

который находит применения в газовой динамике.

Приведем результат, который получен в указанных работах. Для того чтобы система (7), (8) при условиях (16) была совместна и ее решения зависели от произвольной функции одного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(x_1, x_2)$  была представима в одном из двух видов:

$$f = \sqrt{F'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}, \quad (17)$$

$$f = \frac{1}{(x_2 + \alpha_2)^2} \sqrt{F' \left( \frac{x_1 + \alpha_1}{x_2 + \alpha_2} \right)}, \quad (18)$$

где  $F$  — произвольная функция одного аргумента,  $\alpha_1, \alpha_2$  — произвольные константы.

Для этих  $f(x_1, x_2)$  найдены  $\varphi(x_1, x_2, u, p, q)$ :

$$\varphi = \alpha_2 p - \alpha_1 q \pm g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),$$

если  $f$  задана в виде (17), и

$$\varphi = u - p(x_1 + \alpha_1) - q(x_2 + \alpha_2) \pm g \left( \frac{x_1 + \alpha_1}{x_2 + \alpha_2} \right),$$

если  $f$  имеет вид (18). В обоих случаях  $g(\theta)$  связана с  $F(\theta)$  соотношением

$$g'(\theta) = \sqrt{F'(\theta)}.$$

Наконец, если  $f = 0$ , то

$$\varphi = \varphi(p, q).$$

Эти результаты были использованы М. Марином [1953б], К. Ладфордом [1955] и Ю. С. Завьяловым [1956] для получения обобщенных волн Римана (см. гл. 2, § 9, п. 3).

Пример 4. Рассмотрим также случай  $b = 0$  задачи (7), (8), когда уравнение (7) заменяется линейным уравнением второго порядка. В обозначениях (9) оно имеет вид

$$a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t + b_1p + b_2q + c = 0. \quad (19)$$

Мы будем рассматривать случай, когда коэффициенты  $a_{ik}, b_i, c$  зависят лишь от  $x_1, x_2$ .

Присоединенное уравнение (8) или (11) сужает класс решений уравнения (19); мы хотим найти такие функции  $\varphi(x_1, x_2, u, p, q)$ , чтобы система (19), (11) была совместной и допускала функциональный произвол в решении. Для этого необходимо, чтобы система уравнений (13), (19), линейная относительно вторых производных  $r, s, t$ , содержала не более двух

линейно независимых уравнений. Это требование приводит к двум однородным уравнениям для функции  $\varphi$ :

$$\eta\varphi_p - \varphi_q = 0, \quad (20)$$

$$a_{11}\eta\varphi_{x_1} + a_{22}\varphi_{x_2} + (a_{11}\eta p + a_{22}q)\varphi_u - (b_1p + b_2q + c)\varphi_q = 0, \quad (21)$$

где  $\eta = \eta(x_1, x_2)$  — корень характеристического уравнения

$$a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\eta + a_{22} = 0.$$

Уравнения (20), (21) будем рассматривать как переопределенную систему для  $\varphi$ . Совместность этой системы исследуется с помощью образования скобок Пуассона (см. пример 2). Скобка Пуассона для операторов уравнений (20) и (21) приводит к уравнению для  $\varphi$ :

$$(a_{22} - a_{11}\eta^2)\varphi_u + (a_{11}\eta\eta_{x_1} + a_{22}\eta_{x_2})\varphi_p + (b_1\eta - b_2)\varphi_q = 0. \quad (22)$$

Скобка Пуассона для операторов из (20) и (22) тождественно равна нулю, а для операторов (21) и (22) приводит еще к одному уравнению:

$$v_1\varphi_u + v_2\varphi_p + v_3\varphi_q = 0, \quad (23)$$

в котором величины  $v_i$  определяются только через коэффициенты уравнения (19) и их производные.

Для того чтобы система трех уравнений (20), (21), (22) была полной, необходимо, чтобы уравнение (23) было алгебраическим следствием уравнений (20) и (22). Это требование приводит к уравнению, связывающему коэффициенты  $a_{ij}(x_1, x_2)$ ,  $b_i(x_1, x_2)$  и их производные. Если оно выполнено, то для  $\varphi$  мы имеем полную систему из трех уравнений, которая имеет решения, зависящие от одной произвольной функции двух аргументов.

Если  $\varphi(x_1, x_2, u, p, q)$  есть решение этой полной системы, то равенство  $\varphi = 0$  называется промежуточным интегралом уравнения (19), так как любое решение уравнения  $\varphi = 0$  есть одновременно решение уравнения (19). Поэтому для некоторого класса уравнений (19) поиск промежуточного интеграла в виде (8) приводит к построению частных решений (19).

Сравним класс решений, полученных выше, с классом так называемых функционально-инвариантных решений (см. В. И. Смирнов, С. Л. Соболев [1932]). Решение  $u = u(x_1, x_2)$  уравнения (19) называется функционально-инвариантным, если при произвольной функции  $F(u) \in C_2$   $z = F(u(x_1, x_2))$  также решение (19). Рассматривая случай  $c = 0$ , обнаруживаем, что если  $u = u(x_1, x_2)$  — функционально-инвариантное решение (19), то

$$a_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{22} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (24)$$

Изучение совместности уравнений (19) и (24) приводит к выводу, что класс уравнений (19), имеющих функционально-инвариантные решения, является более узким, чем класс уравнений, обладающих промежуточным интегралом.

**2. Решения, характеризуемые дифференциальными связями.** Для выделения класса частных решений заданного дифференциального уравнения или системы уравнений мы вводили выше дополнительные алгебраические или дифференциальные уравнения и требовали, чтобы решения исходной задачи удовлетворяли этим дополнительным условиям. Следуя работе Н. Н. Яненко [1964], будем называть дополнительные дифференциальные уравнения дифференциальными связями, а наивысший порядок входящих в них производных — порядком связи.

Пусть задана система двух квазилинейных уравнений, записанная в инвариантах:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \xi_i(x, t, r_1, r_2) \frac{\partial r_i}{\partial x} = f_i(x, t, r_1, r_2) \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Будем искать решение системы (1), удовлетворяющее *дифференциальной связи первого порядка*

$$F(x, t, r_1, r_2, p_1, p_2) = 0, \quad (2)$$

где  $p_i = \frac{\partial r_i}{\partial x}$ . Очевидно, что уравнения (1) позволяют исключить из уравнения связи производные  $q_i = \frac{\partial r_i}{\partial t} = f_i - \xi_i p_i$ , поэтому достаточно рассмотреть лишь случай (2).

Найдем условия, при которых семейство решений системы (1), удовлетворяющих дифференциальной связи (2), имеет функциональный произвол. Имеем равенства

$$dt_i = p_i dx + q_i dt = p_i dx + (f_i - \xi_i p_i) dt \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

и условия интегрируемости (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial p_i}{\partial x} &= g_i \quad (i = 1, 2) \\ g_i &= f'_{ix} - p_i \xi'_{ix} + \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial f_i}{\partial r_\alpha} - p_i \frac{\partial \xi_i}{\partial r_\alpha} \right) p_\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) есть, очевидно, уравнения продолженной системы исходной системы (1). Дифференцируя уравнение связи (2),

получим

$$F'_x + \sum_{\alpha=1}^2 \left( F'_{r_\alpha} \cdot p_\alpha + F'_{p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x} \right) = 0, \quad (5)$$

$$F'_t + \sum_{\alpha=1}^2 \left( F'_{r_\alpha} \cdot q_\alpha + F'_{p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} \right) = 0.$$

Для того чтобы решение имело функциональный произвол, необходимо, чтобы в системе из четырех уравнений (4), (5) было не более трех линейно независимых, так как в противном случае из нее определяются четыре производные  $\frac{\partial p_\alpha}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}$  как функции  $x$ ,  $t$ ,  $r_\alpha$ ,  $p_\alpha$  и решение в соответствии с п. 1 имеет не более чем константный произвол. Таким образом, мы требуем, чтобы ранг расширенной матрицы системы (4), (5), линейной относительно величин  $\frac{\partial p_\alpha}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}$ , был равен 3. Это приводит к двум условиям, первое из которых имеет вид

$$F'_{p_1} \cdot F'_{p_2} \cdot (\xi_2 - \xi_1) = 0.$$

Пусть  $\xi_1 \neq \xi_2$ , тогда возможны два случая  $F'_{p_1} = 0$  и  $F'_{p_2} = 0$ . Рассмотрим лишь случай  $F'_{p_2} = 0$ ; тогда второе условие записывается в виде

$$A + B p_2 = 0, \quad (6)$$

где

$$A = \xi_1 F'_x + F'_t + f_1 \cdot F'_{r_1} + f_2 \cdot F'_{r_2} + F'_{p_1} [f'_{1x} + (f'_{1r_1} - \xi'_{1x}) p_1 - \xi'_{1r_1} p_1^2], \quad (7)$$

$$B = (\xi_1 - \xi_2) F'_{r_2} + (f'_{1r_2} - \xi'_{1r_2} \cdot p_1) F'_{p_1}. \quad (8)$$

Если равенство (6) не выполнено тождественно, то оно позволяет определить  $p_2$  или  $p_1$ , в этом случае мы снова приходим лишь к константному произволу. Следовательно, для функционального произвола должны выполняться линейные уравнения для  $F$

$$A = 0, \quad B = 0. \quad (9)$$

Задача о совместности этих двух линейных уравнений и о степени произвола их решений снова решается с помощью образования скобок Пуассона. Поскольку в рассматриваемом случае ( $F'_{p_2} = 0$ ) функция  $F$  зависит от пяти аргументов, то для существования решения системы (9) с функциональным произволом достаточно, чтобы ранг полной системы, образованной присоединением к (9) скобок Пуассона, был равен 4.

Аналогичным образом рассматривается случай дифференциальной связи произвольного порядка, когда в уравнение связи входят производные старших порядков от решения системы (1).

Можно рассмотреть консервативную систему квазилинейных уравнений, для которой в уравнение связи входят значения потенциалов  $\Phi_i(x, t)$  решения этой системы (см. п. 3 § 6 гл. 1). Пример связи подобного типа рассмотрен в п. 3 § 9 гл. 2

В заключение этого пункта применим понятие дифференциальной связи к линейному уравнению Дарбу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2)u, \quad (10)$$

которое встречается в задачах гидродинамики.

Дифференциальная связь первого порядка

$$\varphi(x_1, x_2, u, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (11)$$

уже рассматривалась нами в предыдущем пункте (см. пример 4).

В этом случае дифференциальная связь дает промежуточный интеграл уравнения Дарбу. Условия совместности уравнений (10) и (11) приводят к требованию  $\varphi_p \cdot \varphi_q = 0$ . Пусть, например,  $\varphi_q = 0$ . Тогда

$$f(x_1, x_2) = 0; \quad \varphi = \varphi(x_1, p) = \varphi\left(x_1, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right),$$

т. е. инвариант Лапласа обращается в нуль и уравнение Дарбу превращается в уравнение колебаний.

Рассмотрим совместность дифференциальной связи второго порядка

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \varphi(x_1, x_2, p) \quad (12)$$

с уравнением Дарбу (10), которое запишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = f(x_1, x_2)u. \quad (13)$$

Условие совместности уравнений (12) и (13) имеет вид

$$\varphi'_{x_2} + \varphi'_p \frac{\partial p}{\partial x_2} = \varphi'_{x_2} + \varphi'_p \cdot f \cdot u = f'_{x_1} u + fp,$$

оно будет тождественно выполнено, если

$$\varphi'_{x_2} = f \cdot p; \quad \varphi'_p \cdot f = f'_{x_1}. \quad (14)$$

Отсюда следует, как условие совместности (14), что

$$f = \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (15)$$

и

$$\varphi = p \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} + F(x_1), \quad (16)$$

где  $F(x_1)$  — произвольная функция.

Мы видим, что в этом случае уравнение Дарбу преобразованием Лапласа (см. Л. В. Овсянников [1960]) можно привести к уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Покажем, как с помощью метода дифференциальной связи можно построить функцию Римана для уравнения Дарбу (10). Функция Римана  $R(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$  является решением уравнения (10) (по переменным  $x_1, x_2$ ) и удовлетворяет дополнительным условиям на двух характеристиках  $x_1 = \xi_1$ ;  $x_2 = \xi_2$  этого уравнения:

$$R = 1 \text{ при } x_1 = \xi_1 \text{ и при } x_2 = \xi_2.$$

Иными словами,  $R(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$  есть решение уравнения (10), равное 1 на характеристиках  $PM$ ,  $MN$  (рис. 1.16). Пусть

$u(x_1, x_2)$  — любое решение (10), тогда применение формулы Грина к функциям  $u = u(x_1, x_2)$  и  $v = R(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$  приводит к формуле

$$u(M) = \frac{u(P) + u(N)}{2} - \frac{1}{2} \left[ \int_N^P \left( u \frac{\partial R}{\partial x_1} - R \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( R \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial R}{\partial x_2} \right) dx_2 \right], \quad (17)$$

где интеграл берется вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки  $P$  и  $N$  на осях  $x_1 = \xi_1$ ,  $x_2 = \xi_2$ .

Знание функции Римана  $R$  позволяет решать задачу Коши для уравнения (10) с заданными значениями  $u$ ,  $u'_{x_1}$ ,  $u'_{x_2}$  на кривой  $PN$ .

Случай дифференциальной связи первого порядка очевиден, так как тогда  $f = 0$ ,  $R = 1$ , а формула (17) есть известная формула Даламбера.

В случае дифференциальной связи второго порядка имеем равенства (15), (16); под  $u(x_1, x_2)$  понимаем теперь функцию Римана.

Интегрируя уравнение (12) с учетом (16), получаем

$$\begin{aligned} p &= C(x_1, x_2) f, \\ C(x_1, x_2) &= \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{F(\tau)}{f(\tau, x_2)} d\tau + g(x_2), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $g(x_2)$  — произвольная функция.

Функцию  $F(x_1)$  определяем из условий для функции Римана

$$u(x_1, \xi_2) = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \xi_2) = p(x_1, \xi_2) = 0,$$

откуда следует, что

$$C(x_1, \xi_2) = 0. \quad (19)$$

Равенство (19) возможно только в случае

$$F(x_1) = 0, \quad g(\xi_2) = 0,$$

поэтому

$$p(x_1, x_2) = g(x_2) f(x_1, x_2). \quad (20)$$

Интегрируя уравнение (20), находим

$$u(x_1, x_2) = g(x_2) \int_{\xi_1}^{x_1} f(\tau, x_2) d\tau + K(x_2). \quad (21)$$

Так как  $u(\xi_1, x_2) = 1$ , то

$$K(x_2) \equiv 1$$

и для  $u(x_1, x_2)$  получаем представление

$$u(x_1, x_2) = g(x_2) \int_{\xi_1}^{x_1} f(\tau, x_2) d\tau + 1. \quad (22)$$

Удовлетворяя уравнению Дарбу (13), получим уравнение для  $g(x_2)$

$$\frac{dg}{dx_2} + g \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} = g \int_{\xi_1}^{x_1} f(\tau, x_2) d\tau + 1. \quad (23)$$

Принимая во внимание условие (15), уравнению (23) придадим вид

$$g'(x_2) + l(\xi_1, x_2) g(x_2) = 1, \quad (24)$$

где

$$l(x_1, x_2) = \frac{\partial \ln f}{\partial x_2}, \quad f = \frac{\partial l}{\partial x_1}. \quad (25)$$

Отсюда получаем выражение для  $g(x_2)$

$$g(x_2) = g(x_2; \xi_1, \xi_2) = \left[ \frac{1}{f(\xi_1, x_2)} \right] \int_{\xi_2}^{x_2} f(\xi_1, \tau) d\tau$$

и для функции Римана

$$u(x_1, x_2) = R(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \frac{\int_{\xi_2}^{x_2} f(\xi_1, \tau) d\tau \int_{\xi_1}^{x_1} f(\tau, x_2) d\tau}{f(\xi_1, x_2)} + 1. \quad (26)$$

Если учесть, что функция  $f$ , удовлетворяющая уравнению (15), имеет вид (см. Л. В. Овсянников [1960])

$$f = 2 \frac{a'_1(x_1) a'_2(x_2)}{[a_1(x_1) + a_2(x_2)]},$$

то получаем окончательно

$$R(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = 2 \frac{[a_2(x_2) - a_2(\xi_2)] [a_1(x_1) - a_1(\xi_1)]}{[a_1(\xi_1) + a_2(\xi_2)] [a_1(x_1) + a_2(x_2)]} + 1.$$

**3. Решения систем квазилинейных уравнений с вырожденным годографом.** Одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений с частными производными является получение частных решений и построение с их помощью более широкого класса решений. Для линейных уравнений принцип суперпозиции решений позволяет расширить класс решений; на этом, в частности, основан метод Фурье, имеющий широкое применение в математической физике. Однако для систем нелинейных уравнений принцип суперпозиции решений не имеет места, поэтому задача построения более широких классов решений на базе частных решений существенно осложняется. Известен метод огибающих, позволяющий построить из решений, зависящих от двух произвольных параметров (полный интеграл) решения, зависящие от произвольной функции (общий интеграл), однако этот метод применим, вообще говоря, лишь к случаю одного нелинейного уравнения.

Особенно эффективен метод огибающих для случая уравнений, не зависящих непосредственно от искомым функций, а только от их производных. Например, нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

имеет очевидное решение

$$\Phi = ax - \varphi(a) \cdot t + b, \quad (2)$$

где  $a, b$  — произвольные числа. Будем считать  $b = \psi(a)$  — функцией параметра  $a$ , тогда семейство (2) может иметь огибающую, которая определена уравнениями

$$\begin{aligned}\Phi &= ax - \varphi(a) \cdot t + \psi(a), \\ 0 &= x - \varphi'(a) \cdot t + \psi'(a).\end{aligned}\quad (3)$$

Как известно, формулы (3) неявным образом определяют решение уравнения (1), зависящее от произвольной функции  $\psi$ , т. е. общий интеграл.

Формулам (3) отвечает общее решение одного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

для которого  $\Phi(x, t)$  является потенциалом (см. § 5, п. 3), и оно задается формулой

$$u = \frac{\partial}{\partial x} [ax - \varphi(a) \cdot t + \psi(a)] = a = a(x, t), \quad (5)$$

где  $a = a(x, t)$  определяется из второго уравнения (3).

Однако при  $n \geq 2$  метод огибающих приводит лишь к построению более узких классов решений. Это обстоятельство имеет простой геометрический смысл.

При  $n = 1$  пространство  $(\Phi, x, t)$  является трехмерным и интегральные поверхности (2), отвечающие разным значениям параметра  $a$ , пересекаются по линии (характеристике). Однопараметрическое семейство характеристик образует затем огибающую поверхность, которая является интегральным многообразием уравнения (1). Если же  $n = 2$ , то  $\Phi_i = \Phi_i(x, t, a)$  — двумерные поверхности в четырехмерном пространстве переменных  $(x, t, \Phi_1, \Phi_2)$ , и пересечение этих поверхностей, соответствующих двум различным значениям параметра  $a$ , происходит, вообще говоря, не по линии, а в точке.

Рассмотрим класс решений, к которому приводит метод огибающих, для системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \varphi_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right\}.\end{aligned}\quad (6)$$

Имеем семейство решений системы (6)

$$\left. \begin{aligned}\Phi_i &= a_i x - \varphi_i(a) \cdot t + b_i \\ \varphi_i(a) &= \varphi_i(a_1, \dots, a_n)\end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7)$$

с произвольными параметрами  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ .

Будем рассматривать семейство интегральных поверхностей (7), считая, что величины  $a_i, b_i$  являются функциями одного

параметра  $\tau$ . Тогда огибающая этого семейства определяется уравнениями (7) и еще  $n$  уравнениями

$$0 = \dot{a}_i x - t \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i(a)}{\partial a_j} \dot{a}_j + \dot{b}_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8)$$

которые служат для определения параметра  $\tau$ .

Для того чтобы существовала характеристика (общая линия пересечения плоскостей (7), (8)), необходимо и достаточно, чтобы в системе (8) было лишь одно независимое уравнение, т. е. выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i(a)}{\partial a_j} \dot{a}_j = \mu(\tau) \dot{a}_i, \quad \dot{b}_i = \nu(\tau) \dot{a}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Пусть система уравнений (6) является гиперболической в узком смысле, т. е. матрица  $A = \left( \left( \frac{\partial \Phi_i(a)}{\partial a_j} \right) \right)$  имеет действительные различные собственные значения  $\xi_1(a) < \xi_2(a) < \dots < \xi_n(a)$ , которым соответствуют правые собственные векторы  $r^1(a), \dots, r^n(a)$ . Тогда уравнения (9) имеют  $n$  различных решений

$$\mu(\tau) = \xi_k(a); \quad \dot{a}_i(\tau) = \lambda_k(\tau) r_i^k(a(\tau)), \quad \dot{b}_i(\tau) = \nu_k(\tau) \dot{a}_i(\tau), \quad (10)$$

соответствующих каждому собственному значению  $\xi_k(a)$ . Поскольку параметр  $\tau$  неопределен, то мы, например, можем считать  $\lambda_k(\tau)$  заданной функцией параметра  $\tau$ , что отвечает определенной параметризации  $a_i, b_i$ . Тогда в (10) остается одна произвольная функция  $\nu_k(\tau)$ , от которой существенно зависит огибающая семейства (7).

При выполнении условий (10) уравнения (8) сводятся к единственному уравнению

$$x - \xi_k(a(\tau))t + \nu_k(\tau) = 0, \quad (11)$$

которое означает в совокупности с (10), что величины  $a_i, b_i$  постоянны вдоль  $k$ -й характеристики (11).

Построенному решению  $\Phi_i(x, t)$  соответствует решение  $u_i(x, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$  консервативной системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(u)}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

$$u = \{u_1, \dots, u_n\}.$$

При этом в силу уравнений (7), (8) имеем

$$u_i(x, t) = a_i(\tau(x, t)), \quad (13)$$

где  $\tau = \tau(x, t)$  определяется из (11). Постоянное значение  $\tau$  определяет характеристику — прямую (11), вдоль которой в силу (13) решение  $u(x, t)$  постоянно. Таким образом, метод интегрирующих привел нас к построению решения консервативной системы квазилинейных уравнений, зависящего от одной произвольной функции одного переменного  $v(\tau)$ . Построенный нами класс решений системы (12) носит название *простых волн*.

Простой волной называется решение  $u = u(x, t)$  системы уравнений (12), удовлетворяющее условию

$$\text{ранг} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x} \end{vmatrix} = 1. \quad (14)$$

Это условие означает, что функции  $u_i(x, t)$  могут быть представлены в виде

$$u_i(x, t) = u_i(\tau), \quad \tau = \tau(x, t), \quad (15)$$

где  $\tau(x, t)$  — гладкая функция.

Таким образом, решение (13), построенное выше, — простая волна. Из представления (15), так же как и выше, следует, что прямые (11) — характеристики простой волны, а функция  $\tau(x, t)$  постоянна вдоль этих характеристик.

Легко заметить, что простая волна определяется целиком матрицей  $A(u) = \left( \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right) \right)$ . Поэтому простая волна определяется аналогичным образом и для неконсервативной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = \{u_1, \dots, u_n\} \quad (16)$$

равенствами

$$\begin{aligned} \dot{u}(\tau) &= \lambda_k(\tau) \cdot r^k(u(\tau)), \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \xi_k(u(\tau)) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Частным случаем простой волны является центрированная волна, когда характеристики  $k$  го семейства — прямые, пересекающиеся в одной точке  $x_0, t_0$ . В этом случае в качестве функции  $\tau(x, t)$  в (15) может быть выбран наклон этих характеристик, т. е.

$$\tau(x, t) = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \xi_k(u(\tau)). \quad (18)$$

Из соотношений (15) следует, что в простой волне  $k$ -го типа существует  $n - 1$  функциональная зависимость \*)

$$v_i^k(u_1, \dots, u_n) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (19)$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство центрированных волн (18), (19), в котором константы  $c_i$  фиксированы, а  $x_0$ ,  $t_0$  связаны зависимостью. Тогда мы имеем однопараметрическое семейство интегральных поверхностей системы уравнений (16), которое имеет огибающую. Эта огибающая есть простая волна, но уже не центрированная. Следовательно, простые волны являются огибающими центрированных.

Каждое решение  $u = u(x, t)$  системы (16) можно рассматривать как параметрическое задание в пространстве переменных  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  некоторого многообразия  $S$  через переменные  $(x, t)$ . Если условие (14) не выполнено в некоторой области  $D$  переменных  $x, t$ , то это двумерное многообразие. Если в  $D$  выполнено условие (14), то это многообразие одномерное и формулы  $u_i = u_i(x, t)$  дают отображение области  $D$  на некоторую линию. Итак, простые волны изображаются в пространстве годографа  $(u_1, \dots, u_n)$  линиями  $u_i = u_i(\tau)$ , поэтому о простых волнах говорят как о *решениях с вырожденным годографом*. Как мы видели выше, для однородных систем квазилинейных уравнений (16) каждой такой линии в пространстве годографа соответствует семейство решений (простых волн) с однофункциональным произволом.

Можно получить уравнения, определяющие поверхность  $S$  в пространстве годографа (см. Н. Н. Яненко [1955]), а также показать, что, как правило, поверхности  $S$  отвечает семейство решений не более чем с константным произволом. Лишь в исключительных случаях поверхности  $S$  соответствует семейство решений с функциональным произволом.

Например, для системы из трех квазилинейных уравнений поверхность  $S$  определяется одним квазилинейным уравнением третьего порядка (см. также § 9 гл. 2).

В заключение приведем примеры неоднородных систем квазилинейных уравнений, которые имеют решения типа простой волны. Так система двух квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \xi_i(r_1, r_2) \frac{\partial r_i}{\partial x} = f_i(r_1, r_2) \quad (i = 1, 2)$$

имеет решение  $r_i = r_i(\tau) = r_i(x - ct)$  с вырожденным годографом с константным произволом ( $c = \text{const}$ ); при этом зависи-

\*) Совокупность  $\{v_1^k(u), \dots, v_{n-1}^k(u)\}$  называется  $(n - 1)$ -мерным вектор-инвариантом Римана (см. гл. 4, § 3, п. 2).

Многи  $r_i(\tau)$  определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{d\tau} = \frac{f_i(r_1(\tau), r_2(\tau))}{\xi_i(r_1(\tau), r_2(\tau)) - c} \quad (i = 1, 2).$$

Некоторые системы уравнений после преобразования переменных переходят в системы, имеющие решение с вырожденным годографом. Например, система

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \xi_i(r_1, r_2) \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{g_i(r_1, r_2)}{x^\alpha} \quad (i = 1, 2) \quad (20)$$

с функциями  $\xi_i, g_i$  — однородными по переменным  $r_1, r_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_i(\theta r_1, \theta r_2) &= \theta^{\beta_1} \cdot \xi_i(r_1, r_2), \\ g_i(\theta r_1, \theta r_2) &= \theta^{\beta_2} \cdot g_i(r_1, r_2) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2)$$

при

$$v\beta_1 = 1, \quad \alpha = 1, \quad v\beta_2 - v - \alpha = 0$$

подстановкой

$$r_i = \left(\frac{x}{t}\right)^v R_i \quad (i = 1, 2), \quad \tau = \ln t, \quad z = \ln x$$

переходит в систему типа (20), но с  $\alpha = 0$  и снова имеет решения с вырожденным годографом; это семейство также имеет лишь константный произвол.

Система (20) при  $\alpha \neq 1$  заменой

$$\begin{aligned} r_i &= x^v \cdot R_i \quad (i = 1, 2), \\ z &= x^{-v\beta_1+1}, \quad v = \frac{\alpha - 1}{\beta_2 - 1 - \beta_1} \end{aligned}$$

приводится снова к системе типа (20), но со значением  $\alpha' = 1$ , и, следовательно, будет иметь решения с вырожденным годографом.

### § 13. Групповые свойства дифференциальных уравнений

Задача отыскания и размножения решений тесно связана с групповыми свойствами дифференциальных уравнений. Тот факт, что простые волны являются огибающими центрированных волн, а последние являются *автомодельными*, т. е. инвариантными относительно преобразования гомотетии

$$x^1 \rightarrow kx^1, \quad x^2 \rightarrow kx^2$$

в плоскости  $x^1, x^2$ , имеет групповую природу.

Возможность приведения квазилинейных уравнений к виду, удобному для получения простых волн, может быть обнаружена после анализа их групповых свойств.

Давно известные автомодельные решения одномерной газовой динамики, по существу, были получены с помощью группового анализа, специфической формой которого является теория размерностей.

Групповой анализ позволяет строить регулярные алгоритмы для нахождения частных решений без привлечения дополнительных соображений, исходя только из заданной системы дифференциальных уравнений.

**1. Однопараметрическая группа Ли.** Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $X_n$  переменных  $\{x^1, \dots, x^n\}$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \dots, x^n), \quad (1)$$

для которой можно поставить задачу Коши

$$x^i(t_0) = x_0^i. \quad (2)$$

При достаточно гладких функциях  $\xi^i(x^1, \dots, x^n)$  задача (1), (2) имеет единственное решение

$$x^i(t) = f^i(x_0^1, \dots, x_0^n, t), \quad (3)$$

которое является достаточное число раз дифференцируемой функцией начальных значений  $x_0^i$  и параметра  $t$  в некоторой области изменения переменных  $x_0^i$  и  $t$ .

Решение (3) задачи (1), (2) обладает свойством инвариантности относительно сдвига по параметру  $t$ : если в задаче (1), (2) сохранить начальные значения  $x_0^i$  и заменить  $t_0$  на  $t_0 + \tau$ , то она будет иметь решение

$$x^i(t) = f^i(x_0^1, \dots, x_0^n, t - \tau). \quad (4)$$

Формулу (3) можно символически представить в виде

$$x(t) = S(t, t_0) x(t_0), \quad (5)$$

где  $S(t, t_0)$  есть оператор, переводящий  $x(t_0)$  в  $x(t)$ . В силу инвариантности решения относительно сдвига по  $t$  оператор  $S(t, t_0)$  обладает свойством

$$S(t, t_0) = S(t - t_0, 0) = S(t - t_0). \quad (6)$$

Последовательно решая задачу Коши с начальными моментами времени  $t = t_0, t_1, t_2$ , приходим к свойству композиции

$$S(t_1 + t_2) = S(t_2) S(t_1) = S(t_1) S(t_2). \quad (7)$$

К нему следует добавить свойство непрерывного примыкания решения к начальным данным

$$S(\tau) \rightarrow E \quad (\tau \rightarrow 0) \quad (8)$$

и свойство обратимости

$$S(\tau) S(-\tau) = E, \tag{9}$$

где  $E$  — тождественный оператор.

Совокупность операторов (преобразований)  $S(t)$ , обладающая свойствами (7) — (9), образует, по определению, *однопараметрическую непрерывную группу (группу Ли)*.

Мы будем называть  $\xi = \{\xi^1, \dots, \xi^n\}$  *направляющим вектором* однопараметрической группы Ли и обозначать группу с направляющим вектором  $\xi$  символом  $G_1(\xi)$ .

**2. Инварианты группы.** Скалярная функция  $F(x) = F(x^1, \dots, x^n)$  называется *инвариантом* группы  $G_1(\xi)$ , если

$$F(Sx) \equiv F(x) \tag{1}$$

для любого преобразования  $S \in G_1(\xi)$ .

Введем понятие производной Ли функции  $F(x)$ . Для  $x^i$  производная Ли, по определению, есть величина

$$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \xi^i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

*Производная Ли* функции  $F(x)$  определяется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\delta F(x)}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{\delta x^\alpha}{\delta t} = \xi^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Производная Ли  $\frac{\delta F(x)}{\delta t}$  есть не что иное, как производная функции  $F(x)$  вдоль траектории по параметру  $t$ .

Дифференциальный оператор

$$L(\xi) = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \tag{4}$$

будем называть *инфинитезимальным оператором* (в дальнейшем — просто *оператором*) группы  $G_1(\xi)$  и говорить, что оператор  $L(\xi)$  порождает группу преобразований  $G_1(\xi)$ .

Таким образом, производная Ли функции  $F(x)$  есть не что иное, как результат применения оператора  $L(\xi)$  к  $F(x)$ . Нетрудно убедиться в том, что  $F(x)$  является инвариантом  $G_1(\xi)$  тогда и только тогда, когда равна нулю производная Ли функции  $F(x)$ :

$$\frac{\delta F}{\delta t} = L(\xi) F = 0. \tag{5}$$

Выражение

$$\delta F = \left( \xi^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \right) \delta t \tag{6}$$

будем называть *дифференциалом Ли* функции  $F$ . В частности,  $\delta x^i = \xi^i \delta t$  есть дифференциал Ли функции  $x^i$ .

Под дифференциалом  $dx^i$  будем понимать выражение

$$dx^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_0^\alpha} dx_0^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (7)$$

вычисленное при фиксированном  $t$ .

Аналогично определяется дифференциал функции  $F(x)$ :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_0^\beta} dx_0^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что операторы  $\delta$  и  $d$  перестановочны, так что справедливо соотношение

$$\delta dx^i = d \delta x^i. \quad (9)$$

Многообразие  $\Phi$ , задаваемое уравнениями

$$F^i(x^1, \dots, x^n) = C^i \quad (i = 1, \dots, q), \quad (10)$$

называется *инвариантным* относительно  $G_1(\xi)$ , если преобразования  $S \in G_1$  переводят точки многообразия вновь в точки многообразия.

Для инвариантности  $\Phi$  необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\xi$  в точках  $\Phi$  касался  $\Phi$ , т. е. чтобы на многообразии (10) выполнялись условия

$$\xi^\alpha \frac{\partial F^i}{\partial x^\alpha} = LF^i = 0 \quad (i = 1, \dots, q; \alpha = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Если произвольная точка многообразия  $\Phi$  не является инвариантной относительно  $G_1$ , в то время как само многообразие  $\Phi$  инвариантно, то говорят, что группа  $G_1$  индуцирует непрерывную группу преобразований на многообразии  $\Phi$ . Зададим  $\Phi$  параметрическими уравнениями

$$x^i = f^i(v^1, \dots, v^p) \quad (p = n - q; i = 1, \dots, n). \quad (12)$$

Тогда группа  $G_1(\xi)$  индуцирует в пространстве  $v = \{v^1, \dots, v^p\}$  группу  $g_1(\eta)$ , где направляющий вектор  $\eta = \{\eta^1, \dots, \eta^p\}$  связан с направляющим вектором  $\xi = \{\xi^1, \dots, \xi^n\}$  соотношениями

$$\xi^i = \frac{\delta x^i}{\delta t} = \frac{\partial f^i}{\partial v^\beta} \cdot \frac{\delta v^\beta}{\delta t} = \frac{\partial f^i}{\partial v^\beta} \eta^\beta \quad (i = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, p), \quad (13)$$

вытекающими из равенств (12).

Пусть

$$\Omega(x, dx) = A_\alpha(x^1, \dots, x^n) dx^\alpha \quad (14)$$

есть линейная дифференциальная форма. Тогда дифференциал Ли формы  $\Omega$  есть, по определению, выражение

$$\delta \Omega = \delta(A_\alpha dx^\alpha) = \delta A_\alpha dx^\alpha + A_\alpha \delta dx^\alpha. \quad (15)$$

Пользуясь коммутативностью операторов  $d$ ,  $\delta$ , имеем

$$\delta\Omega = \delta A_\alpha dx^\alpha + A_\alpha d\delta x^\alpha = \left[ \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \xi^\beta dx^\alpha + A_\alpha d\xi^\alpha \right] \delta t \quad (16)$$

$$(\alpha, \beta = 1, \dots, n).$$

Производная Ли формы  $\Omega$ , по определению, есть выражение

$$\Lambda(x, \xi, dx, d\xi) = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \xi^\beta dx^\alpha + A_\alpha d\xi^\alpha, \quad (17)$$

которое само является линейной дифференциальной формой.

Форму  $\Omega$  будем называть *инвариантной* относительно  $G_1(\xi)$ , если ее производная Ли, т. е. форма  $\Lambda(x, \xi, dx, d\xi)$ , равна нулю.

Пусть группа  $G_1(\xi)$  оставляет инвариантными формы

$$\Omega^i = A_\alpha^i(x) dx^\alpha \quad (i = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, n) \quad (18)$$

и многообразие  $\Phi$ , задаваемое или уравнениями (10), или параметрическими уравнениями (12).

Формы  $\Omega^i$  переходят на  $\Phi$  в формы

$$\omega^i = a_\beta^i dv^\beta, \quad a_\beta^i = A_\alpha^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial v^\beta} \quad (19)$$

$$(i = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, p),$$

которые остаются инвариантными относительно группы  $g_1(\eta)$ , индуцируемой группой  $G_1(\xi)$  на  $\Phi$ .

По определению, производные Ли форм  $\omega^i$  равны нулю, т. е. выполняются равенства

$$\Lambda^i(v, \eta; dv, d\eta) = \frac{\partial a_\beta^i}{\partial v^\gamma} \eta^\gamma dv^\beta + a_\beta^i d\eta^\beta = 0 \quad (20)$$

$$(i = 1, \dots, r; \beta, \gamma = 1, \dots, p).$$

Пусть  $G_1(\xi_1)$ ,  $G_2(\xi_2)$ , ...,  $G_p(\xi_p)$  — однопараметрические группы преобразований в пространстве  $X_n$ . Будем искать совместные инварианты этих групп. Если  $F(x) = F(x^1, \dots, x^n)$  есть инвариант  $G_1(\xi_1)$ ,  $G_2(\xi_2)$ , ...,  $G_p(\xi_p)$ , то должны иметь место соотношения

$$\left. \begin{aligned} L_1 F &= \xi_1^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = 0, \\ L_2 F &= \xi_2^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ L_p F &= \xi_p^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$(\alpha = 1, \dots, n).$$

Пусть система (21) полная, т. е. операторы  $[L_i, L_j]$  являются линейными комбинациями  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ):

$$[L_i, L_j] = c_{ij}^\alpha L_\alpha \quad (i, j, \alpha = 1, \dots, p).$$

Если коэффициенты  $c_{ij}^\alpha$  постоянны и удовлетворяют условиям

$$c_{ij}^\alpha = -c_{ji}^\alpha, \quad c_{ij}^\alpha c_{\alpha k}^l + c_{ki}^\alpha c_{\alpha j}^l + c_{jk}^\alpha c_{\alpha i}^l = 0,$$

то совокупность операторов  $L_1, \dots, L_p$  порождает  $p$ -параметрическую группу Ли таким образом, что любой оператор

$$L(\xi) = \lambda_1 L_1(\xi_1) + \dots + \lambda_p L_p(\xi_p)$$

с постоянными коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  порождает однопараметрическую группу (см. Л. В. Овсянников [1962]).

**3. Продолженная группа.** До сих пор все переменные  $x^\alpha$  были равноправны. Определим некоторое пространство  $X_n = \{x^\alpha\}$ , соответствующее выделению в точечном пространстве  $X_{m+2}(x^1, x^2, u^1, \dots, u^m)$  двумерных многообразий

$$u^i = u^i(x^1, x^2) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1)$$

Точка  $x = \{x^1, \dots, x^n\} \in X_n$  будет определяться координатами

$$x^s = x^s, \quad x^{2+i} = u^i, \quad (2a)$$

$$x^{2+m+i} = \frac{\partial u^i}{\partial x^1} = p_1^i, \quad x^{2+2m+i} = \frac{\partial u^i}{\partial x^2} = p_2^i \quad (2b)$$

$$(s = 1, 2; i = 1, \dots, m; n = 3m + 2).$$

Среди всех преобразований в пространстве  $X_n$  выделим преобразования, оставляющие инвариантными формы

$$\Omega^i(x, dx) = dx^{2+i} - x^{2+\beta m+i} dx^\beta \quad (i = 1, \dots, m; \beta = 1, 2). \quad (3)$$

Такие преобразования будем называть *касательными*. Для них сохраняются неизменными соотношения (2б).

Среди касательных преобразований выделим подкласс *продолженных* преобразований, которые характеризуются тем, что подпространство  $X_{m+2} = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^{m+2}\} \subset X_n$  остается инвариантным. Преобразования в  $X_{m+2}$  будем называть *точечными*.

Покажем, что точечные преобразования полностью определяют продолженные.

Пусть  $\xi = \{\xi^1, \dots, \xi^{m+2}\}$  — направляющий вектор точечного преобразования  $G_1(\xi)$  в  $X_{m+2}$ ,  $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^{m+2}, \bar{\xi}^{m+3}, \dots, \bar{\xi}^{3m+2}\}$  — направляющий вектор соответствующего продолженного преобразования  $\bar{G}_1(\bar{\xi})$ .

Из инвариантности  $X_{m+2}$  следует, что

$$\bar{\xi}^i = \xi^i \quad (i = 1, \dots, m+2). \quad (4)$$

Из условия инвариантности  $\Omega^i$  относительно  $\bar{G}_1(\bar{\xi})$  находим

$$d\bar{\xi}^{2+i} - x^{2+\beta m+i} d\bar{\xi}^\beta - \bar{\xi}^{2+\beta m+i} dx^\beta = 0 \quad (i = 1, \dots, m; \beta = 1, 2). \quad (5)$$

Отсюда следует

$$\bar{\xi}^{2+\beta m+i} = \frac{\partial \bar{\xi}^{2+i}}{\partial x^s} + \frac{\partial \bar{\xi}^{2+i}}{\partial u^\alpha} p_s^\alpha - p_\beta^i \left[ \frac{\partial \bar{\xi}^\beta}{\partial x^s} + \frac{\partial \bar{\xi}^\beta}{\partial u^\alpha} p_s^\alpha \right] \quad (6)$$

(s,  $\beta = 1, 2$ ; i,  $\alpha = 1, \dots, m$ ).

Утверждение доказано.

Конечно, можно рассматривать дальнейшие продолжения группы в пространстве компонент производных второго и выше порядков.

**4. Группы преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений.** Для простоты изложения мы ограничимся квазилинейными уравнениями. Пользуясь обозначениями (1.3.2), запишем систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} + a_\alpha^i(x^1, x^2; u^1, \dots, u^m) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = f^i(x^1, x^2; u^1, \dots, u^m) \quad (1)$$

(i,  $\alpha = 1, \dots, m$ )

в виде уравнений в дифференциалах:

$$\Omega^i(x, dx) = dx^{2+i} - x^{2+\beta m+i} dx^\beta = 0 \quad (i = 1, \dots, m; \beta = 1, 2) \quad (2)$$

и конечных соотношений:

$$F^i(x^1, \dots, x^n) = x^{2m+2+i} + a_\alpha^i x^{m+2+\alpha} - f^i = 0 \quad (i, \alpha = 1, \dots, m). \quad (3)$$

Тогда интегральное многообразие системы (2), (3) можно определить как поверхность в пространстве  $X_n = X_{3m+2}$  переменных  $x^1, \dots, x^{3m+2}$ :

$$x^i = x^i(x^1, x^2) \quad (i = 1, \dots, n = 3m+2), \quad (4)$$

на которой формы  $\Omega^i$  обращаются в нуль и которая сама лежит на многообразии  $\Phi$ , заданном уравнением (3).

Система (1) допускает группу  $G_1(\xi)$  в пространстве  $X_{m+2}$  переменных  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m+2$ ), если соответствующая ей продолженная группа  $\bar{G}_1(\bar{\xi})$  оставляет инвариантным многообразие  $\Phi$ , т. е. группа  $G_1(\xi)$  переводит интегральную поверхность

уравнения (1) в интегральную поверхность. Совокупность групп  $G_1(\xi)$  образует множество допустимых преобразований системы (1).

Условие инвариантности многообразия  $\Phi$  имеет вид

$$\xi^{2m+2+i} + a_{\alpha}^i \xi^{m+2+\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha}^i}{\partial x^{\beta}} \xi^{\beta} x^{m+2+\alpha} - \frac{\partial f^i}{\partial x^{\beta}} \xi^{\beta} = 0 \quad (5)$$

$$(\beta = 1, \dots, m+2; \quad i, \alpha = 1, \dots, m).$$

Подставляя в (5) выражения для  $\xi^{2+\beta m+i}$  из (13.3.6) и выражая с помощью (3)  $x^{2m+2+i} = p_2^i$  через  $x^{m+2+i} = p_1^i$ , мы приходим к системе уравнений

$$A^i + A_{\alpha}^i p_1^{\alpha} + A_{\alpha_1 \alpha_2}^i p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} = 0 \quad (i, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 = 1, \dots, m), \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A^i &= b_{\beta}^{i\alpha} (x^1, \dots, x^{m+2}) \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + b_{\beta}^i (x^1, \dots, x^{m+2}) \xi^{\beta}, \\ A_j^i &= b_{j\beta}^{i\alpha} (x^1, \dots, x^{m+2}) \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + b_{j\beta}^i (x^1, \dots, x^{m+2}) \xi^{\beta}, \\ A_{j_1 j_2}^i &= b_{j_1 j_2 \beta}^{i\alpha} (x^1, \dots, x^{m+2}) \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + b_{j_1 j_2 \beta}^i (x^1, \dots, x^{m+2}) \xi^{\beta} \\ & (i, j, j_1, j_2 = 1, \dots, m; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m+2); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

коэффициенты  $b(x)$  зависят от

$$a_{\alpha}^i(x), \quad f^i(x), \quad \frac{\partial a_{\alpha}^i(x)}{\partial x^{\beta}}, \quad \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^{\beta}}$$

$$(i, \alpha = 1, \dots, m; \quad \beta = 1, \dots, m+2).$$

На  $(2m+2)$ -мерном многообразии  $\Phi$  независимыми параметрами являются величины  $x^1, \dots, x^{m+2}, p_1^1, \dots, p_1^m$ . Так как соотношения (6) должны выполняться тождественно относительно этих параметров, то из (6) следует

$$A^i = 0, \quad A_{\alpha}^i = 0, \quad A_{\alpha_1 \alpha_2}^i + A_{\alpha_2 \alpha_1}^i = 0 \quad (i, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 = 1, \dots, m). \quad (8)$$

Уравнения (8) составляют линейную однородную систему уравнений относительно  $\xi^1, \dots, \xi^{m+2}$ ; эта система называется *определяющей* и является, вообще говоря, переопределенной.

Выполнение (8) необходимо и достаточно для того, чтобы группа  $G_1(\xi)$  была допустимой для данной системы (1).

Рассмотрим ряд примеров.

Л. В. Овсянниковым [1962] на основании указанного алгоритма была исследована группа преобразований для системы

одномерных уравнений газовой динамики и политропного уравнения состояния:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Система (9) при любом значении  $\gamma$  допускает операторы

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad L_4 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_5 &= -t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad L_6 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + p \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При  $\gamma = 3$  система (9) допускает еще один независимый оператор:

$$L_7 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x} + (x - tu) \frac{\partial}{\partial u} - tp \frac{\partial}{\partial \rho} - 3tp \frac{\partial}{\partial p}. \quad (11)$$

Операторы  $L_1, L_2$  суть операторы сдвига по осям  $x, t$ , оператор  $L_3$  соответствует преобразованию Галилея, оператор  $L_4$  — оператор подобного преобразования (гомотетии) в плоскости  $x, t$ . Эти операторы имеют место для любого уравнения состояния. Операторы  $L_5, L_6$  соответствуют политропному уравнению состояния, оператор  $L_7$  — специфическому значению  $\gamma = 3$ .

Уравнение Эйлера — Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{a}{(x_1 - x_2)^2} u = 0 \quad (a = \text{const}) \quad (12)$$

допускает операторы

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad L_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ L_3 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad L_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad L_5 = \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\varphi(x_1, x_2)$  есть произвольное решение (12). Оператор  $L_1$  есть оператор согласованного сдвига по осям  $x_1, x_2$ ;  $L_2$  — оператор гомотетии в плоскости  $x_1, x_2$ ;  $L_3$  — оператор инверсии. Оператор  $L_5$  содержит в своих коэффициентах две произвольные функции одного аргумента и порождает в совокупности с операторами  $L_1, L_2, L_3, L_4$  бесконечномерную группу Ли.

Покажем, следуя Л. В. Овсянникову, как знание группы преобразований, допускаемых уравнением Эйлера — Пуассона (12), позволяет определить для него функцию Римана.

Как известно (см. п. 2 § 12), функция Римана есть решение  $u(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)$  уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$u(\xi_1, \xi_2; \xi_1, x_2) = u(\xi_1, \xi_2; x_1, \xi_2) = 1. \quad (14)$$

Операторы  $L_1, L_2, L_3$  порождают трехпараметрическую группу согласованных дробно-линейных преобразований

$$\bar{x}_1 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \bar{x}_2 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}, \quad (15)$$

где  $a, b, c, d$  — произвольные константы и  $ad - bc \neq 0$ . Так как уравнение (12) допускает операторы  $L_1, L_2, L_3$ , то преобразования (15) оставляют его без изменения. Пользуясь этим, подберем преобразование (15) таким образом, чтобы значениям  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$  отвечали

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \infty.$$

Это достигается преобразованием

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{x_1 - \xi_2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2 - \xi_1}{x_2 - \xi_2}. \quad (16)$$

В результате решение  $u(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)$  задачи (12), (14) переходит в решение  $v(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} + \frac{a}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2} v &= 0, \\ v(0, \bar{x}_2) &= 1, \quad v(\bar{x}_1, \infty) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Задача (17) допускает оператор растяжения  $L_2$  и тем самым является автомодельной. Ее решение можно искать в виде

$$v(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = v(\xi), \quad \xi = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в первое из соотношений (17), приходим к уравнению

$$\xi v'' + v' - \frac{a}{(\xi - 1)^2} v = 0, \quad (19)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\xi$ . Искомое решение  $v(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = v(\xi)$  удовлетворяет второму и третьему из условий (17), если

$$v(0) = 1. \quad (20)$$

Представим  $a$  в виде

$$a = m(m - 1). \quad (21)$$

Уравнение (19) приводится к гипергеометрическому уравнению подстановкой

$$v = (1 - \xi)^m w \quad (22)$$

и принимает вид

$$\xi(\xi - 1) w'' + [-1 + (2m + 1)\xi] w' + m^2 w = 0. \quad (23)$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  этого уравнения находятся из соотношений

$$\gamma = 1, \quad \alpha + \beta + 1 = 2m + 1, \quad \alpha\beta = m^2 \quad (24)$$

и имеют значения

$$\alpha = \beta = m, \quad \gamma = 1. \quad (25)$$

Таким образом, имея в виду (20), находим

$$\omega = F(m, m, 1, \xi), \quad (26)$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  — гипергеометрическая функция. После этого, возвращаясь к функциям  $v(\xi)$ ,  $v(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ,  $u(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)$ , имеем

$$v(\xi) = (1 - \xi)^m F(m, m; 1, \xi), \quad (27)$$

$$v(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(1 - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^m F\left(m, m; 1, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right), \quad (28)$$

$u(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) =$

$$= \left[ \frac{(\xi_1 - \xi_2)(x_1 - x_2)}{(\xi_1 - x_2)(x_1 - \xi_2)} \right]^m F\left(m, m; 1, \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{(x_1 - \xi_2)(x_2 - \xi_1)}\right). \quad (29)$$

В случае консервативных систем возможно строить преобразования не только в пространстве продолженной системы, но также и в пространстве потенциалов.

Консервативную однородную систему

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial v^i(u^1, \dots, u^n)}{\partial x^1} = \frac{\partial u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} = 0 \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

можно, введя потенциал  $\varphi^i$  (см. п. 3 § 5), преобразовать к системе уравнений в дифференциалах:

$$\omega^i = d\varphi^i - u^i dx^1 + v^i(u^1, \dots, u^n) dx^2 = 0. \quad (31)$$

В пространстве  $x^1, x^2, u^i, \varphi^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) рассмотрим оператор

$$L = \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \xi^{2+\alpha} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \xi^{n+2+\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n; \beta = 1, 2). \quad (32)$$

Оператору  $L$  соответствуют допустимые преобразования, если производная Ли от форм  $\omega^i$  равна нулю:

$$\frac{\delta \omega^i}{\delta \tau} = L\omega^i = 0. \quad (33)$$

Из условия (33) следует

$$d\xi^{n+2+i} - u^i d\xi^{2+i} + v^i d\xi^2 - \xi^{2+i} dx^1 + a_\alpha^i \xi^{2+\alpha} dx^2 = 0. \quad (34)$$

Отсюда приходим к уравнениям для  $\xi^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 2$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi^{n+2+i}}{dx^1} - u^i \frac{d\xi^1}{dx^1} + v^i \frac{d\xi^2}{dx^1} &= \xi^{2+i}, \\ \frac{d\xi^{n+2+i}}{dx^2} - u^i \frac{d\xi^1}{dx^2} + v^i \frac{d\xi^2}{dx^2} &= -a_\alpha^i \xi^{2+\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx^1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} + p_1^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}, \\ \frac{d}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x^2} + p_2^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - v^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}, \\ p_s^\alpha &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^s} \quad (\alpha = 1, \dots, n; s = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Величины  $p_s^i$  связаны, в силу (30), соотношениями

$$p_2^i = -a_\alpha^i p_1^\alpha, \quad a_\alpha^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (37)$$

Подставляя (36) в (35), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial \varphi^\alpha} - u^i \left( \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi^\alpha} \right) + \\ + v^i \left( \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi^\alpha} \right) + p_1^\alpha \left( \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial u^\alpha} - u^i \frac{\partial \xi^1}{\partial u^\alpha} + v^i \frac{\partial \xi^2}{\partial u^\alpha} \right) &= \xi^{2+i}, \\ \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial \varphi^\alpha} - u^i \left( \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi^\alpha} \right) + \\ + v^i \left( \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi^\alpha} \right) + p_2^\alpha \left( \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial u^\alpha} - u^i \frac{\partial \xi^1}{\partial u^\alpha} + v^i \frac{\partial \xi^2}{\partial u^\alpha} \right) &= \\ &= -a_\alpha^i \xi^{2+\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Требую выполнения (38) тождественно относительно  $p_1^\alpha$ , приходим к системе определяющих уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial \varphi^\alpha} - u^i \left( \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi^\alpha} \right) + \\ + v^i \left( \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + u^\alpha \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi^\alpha} \right) &= \xi^{2+i}, \\ \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial \varphi^\alpha} - u^i \left( \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi^\alpha} \right) + \\ + v^i \left( \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} - v^\alpha \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi^\alpha} \right) &= -a_\alpha^i \xi^{2+\alpha}, \\ \frac{\partial \xi^{n+2+i}}{\partial u^\alpha} - u^i \frac{\partial \xi^1}{\partial u^\alpha} + v^i \frac{\partial \xi^2}{\partial u^\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

**Б. Частично инвариантные и инвариантные решения.** Будем искать на многообразии  $\Phi$ , задаваемом уравнением (13.4.3), подмногообразия  $\varphi \in \Phi$ , инвариантные относительно некоторой совокупности допустимых преобразований. Не входя в детали, напомним путь нахождения инвариантных подмногообразий и соответствующих допустимых преобразований.

Пусть

$$x^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^{2m+2}) \quad (i = 1, \dots, 3m+2) \quad (1)$$

есть параметрическое представление  $\Phi$ ,

$$x^j = \varphi^j(v^1, \dots, v^p) \quad (j = 1, \dots, 2m+2) \quad (2)$$

параметрическое представление искомого многообразия  $\varphi$  и  $G_1(\xi)$  индуцирует на  $\varphi$  группу  $G_1(\eta)$ ,  $\eta = \{\eta^1, \dots, \eta_p\}$ . Соответствия (1), (2) переводят формы  $\Omega_i$  из (13.4.2) в формы

$$\omega^i = c_\alpha^i(v) dv^\alpha \quad (i = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, p). \quad (3)$$

Здесь коэффициенты  $c_\alpha^i$  суть известные функции от  $\varphi^j$  ( $j = 1, \dots, 2m+2$ ) и линейные функции от  $\frac{\partial \varphi^j}{\partial v^k}$  ( $k = 1, \dots, p$ ). Условия инвариантности форм  $\omega^i$  относительно  $G_1(\eta)$  имеют вид

$$\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial v^\beta} \eta^\beta dv^\alpha + c_\alpha^i d\eta^\alpha = 0 \quad (i = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, p). \quad (4)$$

В силу соответствий (1), (2)  $\xi^i$ ,  $\eta$  связаны зависимостью

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\beta} \eta^\beta \quad (5)$$

$$(i = 1, \dots, 3m+2; \alpha = 1, \dots, 2m+2; \beta = 1, \dots, p),$$

где

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 2m+2). \quad (6)$$

В частности, при  $i = 1, \dots, m+2$  имеем

$$\xi^i = \xi^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial v^\beta} \eta^\beta. \quad (7)$$

Подставляя (7) в определяющую систему (13.4.8), получим некоторую линейную однородную систему уравнений первого порядка для  $\eta$

$$B_{\beta\gamma}^{(k)} \frac{\partial \eta^\beta}{\partial v^\gamma} + B_\beta^{(k)} \eta^\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, p; \gamma = 1, \dots, p), \quad (8)$$

коэффициенты  $B$  которой зависят от  $\varphi^i$  и линейны относительно  $\frac{\partial \varphi^i}{\partial v^\gamma}$  ( $i = 1, \dots, 2m + 2$ ;  $\gamma = 1, \dots, p$ ).

Из условий (4) находим

$$\frac{\partial c_j^i}{\partial v^\beta} \eta^\beta + c_\beta^i \frac{\partial \eta^\beta}{\partial v^j} = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j, \beta = 1, \dots, p). \quad (9)$$

Условия совместности для системы (8), (9) приводят к некоторым уравнениям для функций  $\varphi^j(v^1, \dots, v^p)$ . Решения (интегральные многообразия), лежащие в  $\varphi$ , называются *частично инвариантными* (см. Л. В. Овсянников [1962]).

В частном случае, когда многообразии  $\varphi$  является интегральным многообразием, имеем *инвариантное решение*. Инвариантные решения являются обобщением известных автомодельных решений. Мы видим, что теория частично инвариантных и инвариантных решений тесно связана с методом дифференциальных связей, так как уравнения, задающие многообразия  $\varphi$ , суть не что иное, как дифференциальные связи первого порядка.

Л. В. Овсянниковым было указано на связь известных в газовой динамике простых и двойных волн с частично инвариантными решениями.

## Классические и обобщенные решения одномерной газовой динамики

### § 1. Общие замечания о математическом описании движения сжимаемых газов

**1. Газ как сплошная среда.** Газ есть совокупность большого числа частиц (молекул, атомов, ионов), находящихся в непрерывном движении.

Для того чтобы охарактеризовать состояние газа в данный момент времени, надо задать положение и скорость каждой частицы газа.

Задача учета взаимодействий и движения каждой частицы газа чрезвычайно трудна; поэтому при описании состояния газа применяют статистический подход.

При статистическом описании состояния газа удобно считать, что составляющие его частицы непрерывным образом заполняют занятый ими объем. При этом, естественно, рассматривают лишь объемы, размеры которых достаточно велики по сравнению с расстояниями между частицами газа.

Поэтому применяемые в дальнейшем выражения «малый объем», «бесконечно малый объем» газа следует понимать как достаточно большие в указанном выше смысле.

Движение частиц газа можно характеризовать количеством частиц данного сорта, находящихся в заданном месте пространства и имеющих заданную скорость движения. Это количество пропорционально функции распределения, которая удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям переноса (так называемым *кинетическим* уравнениям). Простейшим примером кинетического уравнения для газов является уравнение Больцмана (см. С. Чепмен, Т. Каулинг [1952], Г. Н. Петтерсон [1950]).

Описание состояния газа с помощью функций распределения и решение кинетических уравнений также является весьма сложной задачей.

В то же время известно, что существуют такие течения, которые с хорошей точностью могут быть описаны с помощью некоторых конкретных функций распределения. Это описание достигается с помощью понятия состояния термодинамического равновесия как состояния, в котором функции распределения имеют вполне определенный характер.

Напомним бегло некоторые сведения из термодинамики (см. М. А. Леонтович [1950]).

Среди параметров, характеризующих состояние газа, часть определяется только внешними относительно рассматриваемой массы газа телами и никак не зависит от самого газа. Эти параметры называются *внешними*. Внешними параметрами являются, например, объем, занятый газом, напряженности внешних электромагнитного или гравитационного полей и т. д.

В отличие от внешних *внутренние* параметры определяются состоянием самого газа (например, энергия газа, температура, давление).

Состояние газа называется *равновесным*, если оно не изменяется во времени, а также отсутствует обмен энергией с внешними телами. Подчеркнем, что просто неизменность состояния (стационарность) еще не означает, что газ находится в равновесии.

Равновесное состояние — это состояние, из которого газ не может выйти самопроизвольно.

Если газ, находящийся в произвольном состоянии, предоставить самому себе (т. е. исключить обмен энергией с внешними телами и зафиксировать внешние параметры), то через некоторое время (так называемое *время релаксации*) он придет в состояние равновесия.

Обмен энергией между газом и внешними телами происходит, во-первых, с помощью передачи тепла, а во-вторых, при совершении над газом (или газом над внешними телами) работы. Работа совершается газом лишь при изменении внешних параметров  $a_i$  и при бесконечно малых изменениях последних равна величине

$$\delta W = \sum_i A_i da_i, \quad (1)$$

где  $A_i$  — так называемые *обобщенные силы*.

Если  $\delta Q$  — количество сообщенного газу тепла, то изменение внутренней энергии газа  $E$  (кинетическая энергия движения молекул плюс потенциальная энергия взаимодействия молекул), согласно закону сохранения энергии, запишется в виде

$$dE = \delta Q - \delta W = \delta Q - \sum_i A_i da_i. \quad (2)$$

По поводу величин  $A_i$  заметим, что при произвольном состоянии газа они, помимо  $a_i$ , зависят еще от положения и скоростей отдельных молекул газа, т. е. от микроскопического состояния газа.

Дело упрощается, если рассматривать равновесные состояния газа и бесконечно малые отклонения от них. Тогда по из-

известной основной теореме термодинамики все внутренние параметры и в том числе  $A_i$  являются однозначными функциями внешних параметров  $a_i$  и энергии (или температуры  $T$ ) газа.

В качестве равновесных внутренних параметров берутся обычно сами обобщенные силы  $A_i$ . Таким образом, в состоянии равновесия

$$A_i = A_i(T, a_1, \dots, a_n), \quad (3)$$

$$E = E(T, a_1, \dots, a_n), \quad (4)$$

и равенство (2) принимает вид

$$dE = \delta Q - \sum_i A_i(T, a) da_i. \quad (5)$$

Соотношения (3), (4) определяются микроскопической структурой рассматриваемого газа и называются *уравнениями состояния*.

Соотношения (3) называются *термическими уравнениями состояния газа*, а уравнение (4) — *калорическим уравнением состояния*.

Мы будем рассматривать случай, когда газ физически и химически однороден по своему микроскопическому составу и не взаимодействует ни с какими полями (т. е. отсутствуют силы тяжести, электромагнитные поля и т. д.). Тогда единственным внешним параметром газа является занятый им объем  $V$ , а силой  $A$  — давление  $p$ , так что многообразие термодинамических состояний двумерно. Поэтому

$$d\varepsilon = \delta Q - p dV. \quad (6)$$

Если рассматривать единицу массы газа, то величина  $V = \frac{1}{\rho}$  называется *удельным объемом*,  $\rho$  — *плотностью* газа, величина  $\varepsilon$  — *удельной внутренней энергией* газа.

Согласно второму началу термодинамики величина

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} (d\varepsilon + p dV) \quad (7)$$

является полным дифференциалом функции  $S = S(V, T)$ , называемой *энтропией* единицы массы газа.

Итак, второе начало термодинамики записывается в виде равенства

$$T dS = d\varepsilon + p dV, \quad (8)$$

где  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $S$  заданы уравнениями

$$p = p(V, T), \quad (9)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(V, T), \quad (10)$$

$$S = S(V, T). \quad (11)$$

Из второго начала термодинамики (8) следует, что уравнения состояния (9), (10) не являются независимыми, так как условие интегрируемости соотношения (8) налагает на них следующее ограничение:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + \frac{p}{T} \right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p}{T} \right). \quad (12)$$

Если, например, задано уравнение состояния (9), то условие (12) определяет калорическое уравнение (10) с точностью до аддитивной функции от температуры.

Таким образом, в состоянии термодинамического равновесия газ описывается следующими величинами: плотность  $\rho$  — масса, содержащаяся в единице объема; удельный объем  $V = \frac{1}{\rho}$ ; давление  $p$  — сила, действующая на единичную площадку;  $\varepsilon$  — внутренняя энергия единицы массы газа;  $T$  — температура газа;  $S$  — энтропия единицы массы газа.

Согласно равенствам (9)—(11) среди всех этих термодинамических переменных лишь две независимые.

Из равенства (8) следует:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{c_V}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right). \quad (13)$$

Таким образом, при заданных уравнениях состояния (9), (10) энтропия  $S$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая исключается, если энтропия нормируется с помощью соотношения Нернста:

$$S \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0.$$

Уравнения состояния газа (9)—(11) можно задавать и при другом выборе независимых параметров, например:

$$p = p(V, S), \quad \varepsilon = \varepsilon(V, S), \quad T = T(V, S) \quad (14)$$

либо

$$\varepsilon = \varepsilon(p, V), \quad S = S(p, V), \quad T = T(p, V). \quad (15)$$

При таком задании уравнений состояния второе начало термодинамики (8) требует выполнения равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V} &= -p(V, S), & \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S} &= T(V, S), \\ \frac{\partial T(V, S)}{\partial V} + \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

либо, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} T(p, V) \frac{\partial S(p, V)}{\partial V} &= p + \frac{\partial \varepsilon(p, V)}{\partial V}; & T \frac{\partial S(p, V)}{\partial p} &= \frac{\partial \varepsilon(p, V)}{\partial p}, \\ \frac{\partial T(p, V)}{\partial p} \frac{\partial S(p, V)}{\partial V} - \frac{\partial T(p, V)}{\partial V} \frac{\partial S(p, V)}{\partial p} &= \frac{\partial [T, S]}{\partial [p, V]} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

**Неравновесные состояния и процессы в газах.** В неравновесных состояниях газа теряют свой смысл основные понятия термодинамики — температуры, давления и энтропии.

Вообще неравновесное состояние газа не описывается полностью в терминах термодинамических (т. е. макроскопических) понятий, а требует микроскопического анализа.

Однако для целей классической газовой динамики достаточно и общепринят подход неравновесной термодинамики. Представим себе, что рассматриваемая масса газа подразделена на большое число элементарных частей весьма малых размеров, каждую из которых будем предполагать находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

Это предположение оправдывается тем, что время релаксации системы убывает с уменьшением ее размеров, так что для малой порции газа оно близко к нулю.

Понимая под «точкой» в газе «бесконечно малый» объем и указавшем в п. 1 смысле, мы можем ввести, таким образом, для каждой точки газа в каждый момент времени понятия давления, температуры и энергии. Теперь они приобретают смысл функций от координат точки и времени:

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t); \quad T = T(x_1, x_2, x_3, t); \quad S = S(x_1, x_2, x_3, t).$$

Что касается плотности  $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$  и энергии  $\varepsilon = \varepsilon(x_1, x_2, x_3, t)$ , то эти величины, очевидно, имеют смысл независимо от нашего предположения.

Итак, неравновесность газа мы понимаем как отсутствие равновесия между отдельными частицами газа, каждая из которых сама по себе равновесна.

Из предположения о равновесии малых порций газа следует, что функции  $p(V, T)$ ,  $\varepsilon(V, T)$ ,  $S(V, T)$  удовлетворяют уравнениям состояния (1.1.9) — (1.1.11).

Таким образом, при своем изменении термодинамические параметры удовлетворяют уравнениям состояния газа, которые определяются для равновесного газа. Такой процесс называется *равновесным* или *обратимым*.

Приведенные выше соображения о времени релаксации, однако, не дают представления о пределах применимости термодинамических понятий. Это представление может быть получено на базе более общей модели газа, каковой является статистическая модель.

Микроскопическое рассмотрение приводит к выводу, что термодинамические понятия температуры и энтропии имеют смысл, если изменения параметров, характеризующих состояние газа, на длинах порядка длины свободного пробега молекул газа по пространству и за времена порядка времени между соударениями молекул малы по сравнению с самими этими величинами.

Рассмотрим, к примеру, одномерное неравновесное течение газа. Пусть  $u(x, t)$  — скорость течения. Одно из приближений, сводящее уравнение Больцмана к уравнениям газовой динамики, предполагает, что в газе могут быть введены температура  $T$  и давление  $p$ , удовлетворяющие уравнениям состояния (1.1.9), (1.1.10), но потоки импульса и энергии определяются также неравновесными компонентами, связанными с молекулярной диффузией. Для материально фиксированной частицы газа в поток импульса вместо давления  $p$  входит величина

$$\bar{p} = p - \mu \operatorname{div} u = p - \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

поток энергии определяется величиной

$$\bar{p}u - \kappa \operatorname{grad} T = pu - \mu u \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2)$$

В этом приближении функция  $p(V, T)$  удовлетворяет уравнению состояния (1.1.9);  $\mu, \kappa$  — соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности, пропорциональные длине свободного пробега молекул газа.

Отсюда следует, что если на длинах пробега и на временах порядка времени между соударениями изменения термодинамических величин малы, то справедливо приближение равновесной термодинамики.

Действительно, для большого числа задач о движении газов и жидкостей это требование можно считать выполненным. В этом случае процесс носит квазиравновесный характер и можно ввести температуру и энтропию, которые с большой степенью точности будут удовлетворять всем термодинамическим соотношениям.

С другой стороны, как мы увидим в этой главе, в течениях газов и жидкостей возникают зоны резкого и быстрого изменения величин, характеризующих поток. В этих областях уже нельзя пренебрегать неравновесными компонентами в потоках импульса и энергии. Однако эти зоны имеют размеры порядка длины свободного пробега молекул газа. Поэтому, если эта длина мала по сравнению с характерными размерами задачи, то мы можем представлять зону неравновесности как поверхность разрыва, разделяющую зоны гладкого изменения параметров течения.

При таком подходе мы считаем, что эти параметры всюду удовлетворяют термодинамическим соотношениям, а на поверхности разрыва должны выполняться условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии. Итак, мы будем рассматривать разрывные течения в газах и жидкостях, вязкость и теплопроводность которых достаточно малы,

В настоящей главе мы рассмотрим в основном именно этот случай.

Наконец, в случае достаточно больших коэффициентов вязкости и теплопроводности необходимо рассматривать неравновесные компоненты в потоках импульса и энергии. Может случиться, что и это рассмотрение окажется недостаточным и необходимо привлечь интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра.

Таким образом, существуют течения, в которых сохраняют свое термодинамическое определение температура и энтропия, выполняются все термодинамические соотношения; при этом области резкого изменения рассматриваются как поверхности разрыва параметров течения.

Изучению такого типа течений и посвящена эта глава.

При равновесном процессе имеет место соотношение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \left( \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} \right) \quad (3)$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt}, \quad (4)$$

где  $\frac{dQ}{dt}$  — скорость притока тепла к рассматриваемой порции газа.

Если рассматриваемая порция газа теплоизолирована ( $dQ = 0$ ), то равновесный процесс называется адиабатическим. Для адиабатического процесса

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (5)$$

Для неравновесного процесса соотношение (4) не имеет места, а согласно второму закону для теплоизолированной системы

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (6)$$

Пусть масса газа участвует в неравновесном процессе, обмениваясь теплом с внешними телами. В этом случае второе начало термодинамики требует, чтобы выполнялось условие

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dS_e}{dt} > 0, \quad (7)$$

где  $S_e$  — энтропия внешних тел. Величина  $\frac{dS_e}{dt}$  может рассматриваться как поток энтропии от внешних тел к массе газа.

Вычисление потока энтропии  $\frac{dS_e}{dt}$  мы продемонстрируем на примере обмена теплом газа с термостатом постоянной температуры  $T_0$ . В этом случае

$$\frac{dS_e}{dt} = -\frac{1}{T_0} \frac{dQ}{dt}, \quad (8)$$

где  $\frac{dQ}{dt}$  — количество тепла, перетекающего от внешних тел к рассматриваемой порции газа. Поэтому в случае термостата в качестве внешних тел второе начало термодинамики требует, чтобы

$$\frac{dS}{dt} > \frac{1}{T_0} \frac{dQ}{dt}. \quad (9)$$

Эти соображения будут применены нами для анализа изотермического газа в § 4.

**3. Различные способы описания течения. Эйлеровы и лагранжевы переменные.** Описание движения сплошной среды можно производить двумя различными способами.

Первый способ состоит в том, что в каждый момент времени  $t$  мы определяем параметры состояния газа как функции от координат  $x_1, x_2, x_3$  точки в некоторой неподвижной системе координат. Таким образом,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  означает при таком способе описания скорость частицы, находящейся в момент времени  $t$  в точке  $(x_1, x_2, x_3)$ . Аналогично все остальные величины характеризуют состояние частицы газа, находящейся в момент  $t$  в точке  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Такой способ описания движения сплошной среды называется *эйлеровым*, а координаты  $x_1, x_2, x_3$  называются *эйлеровыми координатами*.

Другой способ описания, который носит название *лагранжева*, предполагает задание термодинамических величин и скорости  $\mathbf{u}$  газа для каждой частицы как функций времени  $t$ .

Пусть частицу газа мы отличаем от прочих с помощью некоторых параметров  $y_1, y_2, y_3$ . Тогда мы ищем все величины, характеризующие течение, как функции от переменных  $y_1, y_2, y_3, t$ .

При таком способе описания, например, вектор  $\mathbf{u}(y_1, y_2, y_3, t)$  при фиксированных  $y_1, y_2, y_3$  означает скорость перемещения в пространстве вполне определенной частицы газа. Координаты  $y_1, y_2, y_3$  носят название *лагранжевых*.

В большинстве случаев в качестве координат  $y_1, y_2, y_3$  выбирают эйлеровы координаты точки, в которой частица газа находилась в какой-либо определенный момент времени, например в момент  $t = 0$ .

Если мы примем указанный выбор лагранжевых координат  $y_1, y_2, y_3$ , то легко вычислить положение частицы и в момент

времени  $t \neq 0$ . Так как при фиксированных  $y_1, y_2, y_3$  скорость  $u(y_1, y_2, y_3, t)$  есть скорость частицы, то

$$x_i = y_i + \int_0^t u_i(y_1, y_2, y_3, \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь  $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, t)$  — координаты в момент времени  $t$  (эйлеровы координаты) частицы, которая в момент времени  $t = 0$  находилась в точке с координатами  $x_i = y_i$ ;  $u_i(y_1, y_2, y_3, t)$  — компоненты вектора скорости  $u(y_1, y_2, y_3, t)$ .

Формулы (1) устанавливают, таким образом, связь между лагранжевыми координатами  $y_i$  частицы и ее эйлеровыми координатами  $x_i$ .

Пусть  $f(x_1, x_2, x_3, t)$  — какая-либо функция эйлеровых координат, а  $\bar{f}(y_1, y_2, y_3, t)$  — представление той же функции в лагранжевых координатах. Тогда, согласно (1),

$$f\left(y + \int_0^t u(y, \tau) d\tau, t\right) = \bar{f}(y, t), \quad (2)$$

где для простоты письма мы обозначили

$$y = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad u = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

Дифференцируя (2) по переменному  $t$  (естественно, при этом предполагается дифференцируемость  $\bar{f}$ ), получим

$$\frac{\partial \bar{f}(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + u(y, t) \operatorname{grad} f(x, t), \quad (3)$$

так как, согласно (1),

$$x = y + \int_0^t u d\tau.$$

По самому смыслу понятия скорости частицы газа  $u(y, t) = u(x, t)$  (здесь мы обозначаем одной буквой  $u$  разные зависимости:  $u(y, t)$  — в лагранжевых переменных и  $u(x, t)$  — в эйлеровых), поэтому мы перепишем (3) в виде

$$\frac{\partial \bar{f}(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + u \nabla f(x, t), \quad (4)$$

где  $u \nabla$  — оператор дифференцирования по пространству в направлении вектора  $u$ :

$$u \nabla = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (5)$$

Обычно в газовой динамике все величины обозначаются одними и теми же буквами как в эйлеровом, так и лагранжевом

представлении. Поэтому во избежание путаницы величину  $\frac{\partial f(y, t)}{\partial t}$  обозначают  $\frac{df(y, t)}{dt}$ . При таких обозначениях формула (3) принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + u_a \frac{\partial f}{\partial x_a}. \quad (6)$$

Величина  $\frac{df}{dt}$  равна полной производной по времени от функции  $f$  вдоль траектории частицы  $x = y + \int_0^t u \, d\tau$  и носит название *субстанциональной производной*.

Согласно формулам (1) лагранжевым координатам  $y, t$  соответствуют определенные эйлеровы, и это преобразование  $y, t \rightarrow x, t$  однозначно. Обратное преобразование  $x, t \rightarrow y, t$  определено, вообще говоря, не всегда.

Действительно, легко представить себе случай, когда газ заполнял в момент времени  $t = 0$  все пространство  $y_1, y_2, y_3$ , но в результате движения при  $t > 0$  некоторая часть пространства  $x_1, x_2, x_3$  оказалась свободной от газа. Это означает, что в этой части пространства при данном  $t > 0$  координатам  $x_1, x_2, x_3$  не отвечают никакие значения  $y_1, y_2, y_3$ .

Как мы увидим ниже, условие взаимно однозначного отображения  $x, t \rightarrow y, t$  выражается в виде  $\rho(x, t) \neq 0$ .

**4. Уравнения состояния газов. Совершенный газ. Газ Ван-дер-Ваальса. Нормальный газ.** Ограничившись этими краткими замечаниями по поводу способов описания движения газов и жидкостей, остановимся коротко на некоторых простейших уравнениях состояния газов.

Совершенным (идеальным) газом называется газ, для которого справедлив закон Клапейрона:

$$pV = RT, \quad (1)$$

где  $R$  — газовая постоянная. Из соотношения (1.1.12) тогда следует, что

$$\frac{\partial \varepsilon(V, T)}{\partial V} = 0, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \varepsilon(T), \quad (2)$$

т. е. внутренняя энергия газа является функцией только температуры; при этом удельная теплоемкость газа  $c_V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = c_V(T)$  также является функцией только температуры.

Газ называется политропным, если  $c_V$  не зависит от температуры. Тогда

$$\varepsilon = c_V T, \quad (3)$$

т. е. внутренняя энергия пропорциональна температуре газа.

Кинетическая теория газов приводит к уравнениям состояния податливого газа в следующих предположениях:

1. Потенциальная энергия взаимодействия молекул пренебрежимо мала по сравнению с их кинетической энергией. Вследствие этого предположения, энергия данной массы газа есть сумма кинетических энергий молекул газа, ее составляющих.

2. Возможны только парные столкновения между молекулами, которые происходят по законам упругого столкновения. При этом внутреннее строение молекул остается неизменным и сохраняются их суммарный импульс и кинетическая энергия.

Второе предположение означает, в частности, что собственный объем молекул мал сравнительно с объемом, занятым газом.

Кинетическая теория даст следующие выражения для коэффициентов  $c_V$ ,  $c_p$ ,  $R$  уравнений состояния (1), (2) идеального газа:

$$c_V = \frac{f}{2} k \frac{N}{M}, \quad (4)$$

$$R = c_p - c_V, \quad (5)$$

где  $f$  — число степеней свободы молекулы ( $f = 3$  для одноатомного газа,  $f = 5$  для двухатомного газа и т. д.),  $k$  — постоянная Больцмана,  $N$  — число Авогадро,  $M$  — молекулярный вес.

Принимая во внимание уравнения состояния (1), (3), из основного соотношения (1.1.13) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= c_V \ln T + R \ln V + \text{const} = c_V \ln T + c_p \ln V - \\ &- c_V \ln V + \text{const} = c_V \ln p + c_p \ln V + \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Простейшая поправка к уравнению состояния идеального газа, связанная с учетом объема молекул и сил молекулярного сцепления, дается уравнением Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (7)$$

Здесь  $a$  — величина, пропорциональная силе сцепления молекул газа,  $b$  — величина, пропорциональная собственному объему молекул.

Аналогичным образом получаем выражения для  $\varepsilon$ ,  $S$ :

$$\varepsilon = \int c_V(T) dT - \frac{a}{V}, \quad (8)$$

$$S = \int \frac{c_V(T)}{T} dT + R \ln(V-b) + \text{const}. \quad (9)$$

Если некоторый элемент газа подвергается медленному расширению или сжатию, так что при этом не происходит теплообмена с окружающей средой, то элемент совершает адиабатический переход из одного термодинамического состояния в другое. При этом медленный процесс является обратимым и энтропия элемента остается неизменной. Поэтому такой переход называется еще *изоэнтропическим*.

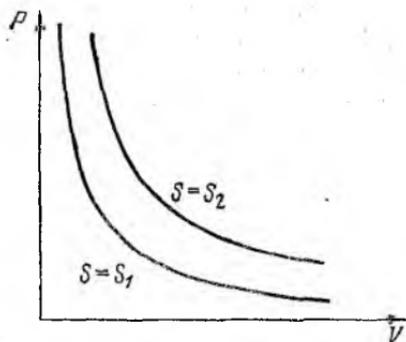


Рис. 2.1.

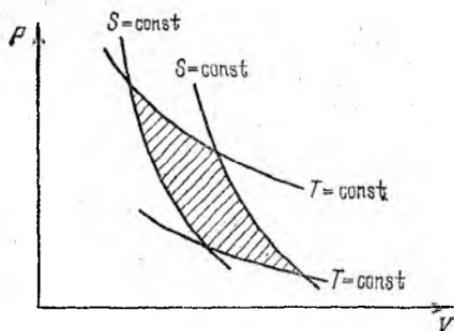


Рис. 2.2.

Все термодинамические состояния, через которые проходит при этом данный элемент газа, будут лежать на кривой

$$S = \text{const}, \quad (10)$$

которая называется *адиабатой Пуассона*.

Для идеального политропного газа, как легко следует из (6), уравнение адиабаты Пуассона имеет вид

$$p = \frac{A^2}{\gamma} V^{-\gamma}, \quad (11)$$

где

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} > 1, \quad A^2 = A^2(S) = a^2 e^{\frac{S}{c_v}} = \text{const}.$$

Легко видеть, что вдоль адиабаты Пуассона для политропного газа имеют место соотношения (рис. 2.1)

$$\frac{dp}{dV} = \frac{\partial p(V, S)}{\partial V} < 0 \quad (\text{свойство I}), \quad (12)$$

$$\frac{d^2 p}{dV^2} = \frac{\partial^2 p(V, S)}{\partial V^2} > 0 \quad (\text{свойство II}). \quad (13)$$

Таким образом, адиабата Пуассона  $p = p(V, S_0)$  есть кривая, монотонно убывающая по  $V$ , обращенная выпуклостью вниз. Легко видеть, что оси  $V = 0$ ;  $p = 0$  являются асимптотами

адиабаты Пуассона, т. е.  $p \rightarrow 0$  при  $V \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow \infty$  при  $V \rightarrow 0$  (свойство III).

Если некоторый элемент газа подвергается сжатию или расширению, так что при этом температура элемента остается неизменной, то совершаемый газом переход называется *изотермическим процессом*.

В идеальном газе, совершающем изотермический процесс,  $V$ ,  $p$  связаны соотношением

$$p = c^2 \frac{1}{V} = c^2 \rho, \quad c^2 = (c_p - c_v) T = RT = \text{const.} \quad (14)$$

Поэтому в некоторых случаях идеальный изотермический газ можно формально рассматривать как политропный газ с показателем  $\gamma = 1$ .

Кривая (14) называется *изотермой*. Она удовлетворяет всем трем свойствам адиабаты Пуассона. Изотерма  $T$  и адиабата  $A$  Пуассона пересекаются в плоскости  $V, p$  так, как указано на рис. 2.2.

Таким образом, изотермы и адиабаты Пуассона идеального газа образуют в плоскости  $V, p$  регулярную сетку.

Воп, что уравнения состояния идеального газа обеспечивают выполнение свойств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} &= 0 \quad (\text{свойство IV}), \\ \frac{\partial p(V, S)}{\partial V} &= 0 \quad (\text{свойство V}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

**Изотермы газа Ван-дер-Ваальса** удовлетворяют свойствам I — III уже не во всей фазовой плоскости  $V, p$ .

В квадрате  $A'CB'$  (рис. 2.3) может нарушиться свойство II, в квадрате  $BCA$  — свойство I, свойство III вообще не выполняется, так как асимптотой изотерм является прямая  $V = b$ . Заметим, что нарушение свойства I, выражаемого неравенством (12), указывает на невозможность термодинамического равновесия. Действительно, пусть некоторый объем газа, для которого нарушено свойство I, подвергается сжатию под действием внешнего давления, которое будем считать постоянным и превосходящим начальное давление газа. Если сжатие производится медленно и если  $\frac{\partial p(V, S)}{\partial V} > 0$ , то давление в газе падает,

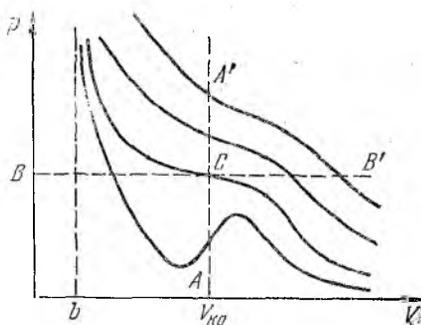


Рис. 2.3.

т. е. его сопротивление внешнему сжатию уменьшается. В результате произойдет полное схлопывание объема газа. Наоборот, объем газа, обладающего избытком давления над окружающей средой, должен неограниченно возрастать.

Если представить себе теперь газ, для которого  $\frac{\partial p(V, S)}{\partial V} > 0$ , в термодинамическом равновесии при постоянном давлении, то такое равновесие окажется абсолютно неустойчивым, так как малейшее отклонение от равновесия приведет к тому, что одни части газа будут сжиматься, другие расширяться, не возвращаясь к исходному состоянию.

Иначе обстоит дело в случае газа, удовлетворяющего условию I. При адиабатическом сжатии он будет увеличивать свое давление и препятствовать сжатию. При отклонении от равновесия в газе возникают колебания, которые приводят его в исходное состояние.

Таким образом, свойство I является условием устойчивости термодинамического равновесия и выполнено для всех реальных веществ в стабильном состоянии.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением газов, уравнения состояния которых удовлетворяют, помимо термодинамических соотношений п. 1, справедливых для любых веществ, ряду предположений, не вытекающих из требований термодинамики.

Именно, будем требовать, чтобы удовлетворялись свойства I—V:

$$I. \quad \frac{\partial p(V, S)}{\partial V} < 0. \quad (16)$$

$$II. \quad \frac{\partial^2 p(V, S)}{\partial V^2} > 0. \quad (17)$$

$$III. \quad p(V, S) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad V \rightarrow 0. \quad (18)$$

$$IV. \quad \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} > 0. \quad (19)$$

$$V. \quad c_V = \frac{\partial \varepsilon(V, T)}{\partial T} > 0. \quad (20)$$

Дополнительно будем требовать, чтобы область переменных  $V, T$ , в которой выполнены свойства I—V, была выпуклой (свойство VI).

Газ, уравнения состояния которого удовлетворяют свойствам I—VI, будем называть *нормальным газом* \*).

Свойство I, очевидно, означает, что вдоль адиабаты А Пуассона давление  $p$  монотонно убывает с ростом  $V$ ; свойство II тре-

\* Соотношения I—V были сформулированы Бете и Вейлем (см. Г. Вейль [1949]).

ост, чтобы эта кривая была обращена выпуклостью вниз; свойство III требует, чтобы  $V = 0$  была асимптотой любой адиабаты Пуассона; наконец, свойство IV означает, что адиабата Пуассона, отвечающая большей энтропии, лежит выше в плоскости переменных  $V, p$  (см. рис. 2.1), т. е.

$$\frac{\partial^2 S(V, p)}{\partial p^2} > 0, \quad \frac{\partial S(V, p)}{\partial V} > 0. \quad (21)$$

Рассмотрим поведение поверхности  $S = S(V, p)$  в трехмерном пространстве переменных  $V, p, S$ , предположив, что уравнения состояния удовлетворяют свойствам I—V.

В соответствии со свойствами I—IV каждое горизонтальное сечение «рельефа» энтропии есть монотонно выпуклая кривая с асимптотой  $V = 0$ . Каждое сечение плоскостью  $V = \text{const}$  или  $p = \text{const}$  есть монотонная по  $p$ , соответственно по  $V$ , кривая.

Таким образом, любое вышележащее горизонтальное сечение проектируется внутрь нижележащего сечения (рис. 2.4).

Из основного соотношения (1.1.7)

$$T dS = d\varepsilon + p dV$$

следует в силу V

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon(V, T)}{\partial T} = \frac{c_V}{T} > 0. \quad (22)$$

Отсюда

$$\frac{dp(V, T)}{dT} = \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} > 0. \quad (23)$$

Принимая во внимание формулы (21), (22), находим

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} > 0. \quad (24)$$

Последнее неравенство означает, что изотермы и адиабаты  $A$  образуют регулярную сеть того же типа, что и в случае идеального газа (см. рис. 2.2).

Дифференцируя тождество

$$S = S(V, p) = S(V, p(V, S))$$

по переменным  $V, S$ , получим

$$\frac{\partial S(V, p)}{\partial p} \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial S(V, p)}{\partial V} + \frac{\partial S(V, p)}{\partial p} \frac{\partial p(V, S)}{\partial V} = 0, \quad (25)$$

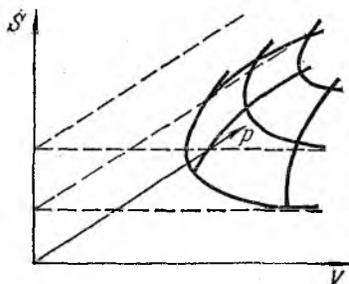


Рис. 2.4.

а дифференцируя второе уравнение (25) по переменному  $V$ , находим

$$S_{VV} + 2S_{Vp}p_V + S_{pp}p_V^2 = -S_p p_{VV} < 0. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (26), получим

$$S_{VV}S_p^2 - 2S_{Vp}S_V S_p + S_{pp}S_V^2 = -S_p^3 p_{VV} < 0. \quad (27)$$

Рассмотрим характер изменения энтропии  $S$  вдоль прямых

$$p = p_0 + at, \quad V = V_0 + bt \quad (28)$$

в плоскости переменных  $V, p$ .

Справедливы утверждения:

а) Если  $a \geq 0, b \geq 0$  ( $a \leq 0; b \leq 0$ ), то

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad \left( \frac{dS}{dt} \leq 0 \right). \quad (29)$$

Это следует из неравенств (21).

б) Если  $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$ , то

$$\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)_{t=t_0} = \frac{\partial^2 S}{\partial p^2} a^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial V} ab + \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} b^2 < 0. \quad (30)$$

Действительно, из  $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{\partial S}{\partial p} a + \frac{\partial S}{\partial V} b = 0$  имеем  $\frac{\partial S}{\partial p} = kb, \frac{\partial S}{\partial V} = -ka$ , где  $k$  — некоторый множитель пропорциональности. Подставляя  $b = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial p}$ ,  $a = -\frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial V}$  в (30), получаем (27).

в) Если  $\frac{dS}{dt} \leq 0$  при  $t=0$ , то  $\frac{dS}{dt} < 0$  при  $t > 0$ .

Предположим противное. Тогда существуют  $t_1 \geq 0, \varepsilon > 0$  такие, что  $\frac{dS}{dt} < 0$  в промежутке  $0 \leq t < t_1$ ,  $\frac{dS}{dt} = 0$  при  $t = t_1$ ,  $\frac{dS}{dt} > 0$  при  $t_1 < t < t_1 + \varepsilon$ . Следовательно,  $\frac{d^2S}{dt^2} \geq 0$  при  $t = t_1$ , что противоречит свойству б). Утверждение доказано.

Заметим, что свойства а), б), в) легко следуют из характера «рельефа» функции  $S(V, p)$  (рис. 2.4).

В силу свойств I, II адиабат Пуассона луч, проходящий через точку  $V_0, p_0$  адиабаты  $S = S_0$ , не пересечет ее более ни в какой точке, если он лежит в I и III четвертях (рис. 2.5), и пересечет ее еще в одной точке, если он лежит во II и IV четвертях (сюда включается случай, когда луч касается адиабаты  $A$ , и мы тогда будем считать точку касания сдвоенной точкой).

В первом случае  $S$  есть монотонная функция параметра  $t$ , во втором случае  $S$  имеет единственный максимум. Точка максимума есть точка касания лучом некоторой адиабаты.

Заметим при этом следующее: точка  $S = S_{\max}$  на луче делит его на две половины, так что произвольная адиабата пересекает

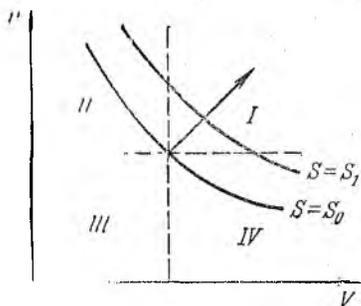


Рис. 2.5.

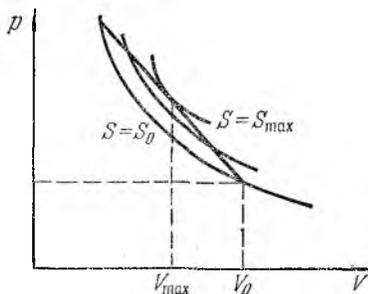


Рис. 2.6.

его верхней ветвью в верхней половине, нижней ветвью — в нижней (рис. 2.6).

В верхней половине луча имеем

$$\frac{\partial p(V, S)}{\partial V} < \frac{p - p_0}{V - V_0} \quad (V < V_{\max}); \quad (31)$$

в нижней половине луча имеет место обратное неравенство

$$\frac{\partial p(V, S)}{\partial V} > \frac{p - p_0}{V - V_0} \quad (V > V_{\max}). \quad (32)$$

## § 2. Интегральные законы сохранения. Уравнения гидродинамики одномерных течений

1. Общие предположения о течении сжимаемых газов. Движение газа мы представляем как движение сплошной среды в трехмерном пространстве  $x_1, x_2, x_3$ . В соответствии с § 1 движение полностью определено, если известны зависимости  $u = u(x, t)$ ,  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ ,  $S = S(x, t)$ . Почти всюду в этой главе мы будем предполагать, что в газе отсутствуют внутреннее трение и теплопроводность, т. е. частицы газа теплоизолированы друг от друга.

При этих условиях каждый элемент жидкости не участвует в теплообмене и не теряет свою энергию на трение. Поэтому при плавных изменениях состояния энтропия каждого элемента должна оставаться постоянной.

Мы, однако, хотим особо обратить внимание на то, что это следствие справедливо лишь при медленных, плавных изменениях параметров частицы газа. Поэтому, если частица газа резко изменяет свои термодинамические параметры, то ее энтропия уже не остается постоянной во времени.

В соответствии с § 1 мы считаем, что всюду, кроме поверхностей разрыва, течение является достаточно плавным (квазиравновесным). Поэтому частица изменяет свою энтропию, лишь пересекая поверхности разрыва; вне поверхностей разрыва определены понятия температуры, давления, энтропии, которые вместе с заданными уравнениями состояния удовлетворяют всем термодинамическим соотношениям.

Итак, мы будем рассматривать жидкость, лишенную внутреннего трения и теплопроводности; однако частицы жидкости могут изменять свою энтропию, пересекая поверхности разрыва. На самом деле поверхность разрыва параметров течения представляет собой узкую зону (зону неравновесности), в которой влияние вязкости и теплопроводности существенно, как бы малы они ни были. Действительно, как мы говорили уже в § 1, изменение энтропии определяется величинами  $\mu \operatorname{div} u$ ,  $\kappa \operatorname{grad} T$ , которые в этой узкой зоне конечны.

При нашем же рассмотрении этих зон больших градиентов как поверхностей разрыва термодинамических параметров мы отказываемся от детального рассмотрения неравновесного течения в этих зонах; однако учитываем эту неравновесность в целом, что и приводит к повышению энтропии частицы при пересечении ею поверхности разрыва (зоны неравновесности).

Впоследствии (§ 5) мы увидим, что учет вязкости и теплопроводности в жидкости и дальнейший переход к пределу при  $\mu, \kappa \rightarrow 0$  приводят нас именно к такой картине течения.

Итак, течения жидкости, которые мы в основном будем здесь рассматривать, суть предельные течения вязкой и теплопроводящей жидкости при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к нулю.

С другой стороны, подобное описание течений требует применения лишь общих законов, справедливых одновременно как для равновесных, так и для неравновесных процессов.

Таковыми являются основные законы сохранения физики: закон сохранения массы жидкости, закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, к выводу которых мы приступаем в п. 2.

**2. Законы сохранения массы, импульса и энергии в трехмерном пространстве.** Мы будем изучать одномерные течения сжимаемых газов. Однако для единообразного получения уравнений при различных видах симметрии течения (плоская, сферическая, цилиндрическая) сначала получим уравнения для

произвольного трехмерного неустановившегося течения, а затем на них выведем интересующие нас уравнения для одномерных течений.

Пусть, пусть газ движется в трехмерном пространстве с декартовыми координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , отсчитываемыми в некоторой инерциальной системе. Такие координаты будем называть *флеровыми*.

Будем предполагать, что отсутствуют внешние силы, действующие на газ, а также что в занятом газом пространстве нет источников массы, импульса и энергии.

Пусть  $G$  — некоторая часть пространства  $(x_1, x_2, x_3)$ , ограниченная замкнутой гладкой поверхностью  $\Sigma_G$ . Количество газа, находящегося в момент времени  $t$  в объеме  $G$ , равно величине

$$\int \int \int_G \rho \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_G \rho(P, t) \, dG. \quad (1)$$

В формуле (1) через  $dG$  мы обозначаем элемент объема,  $P$  — точки с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Величина

$$\int_G [\rho(P, t_2) - \rho(P, t_1)] \, dG \quad (2)$$

равна приращению массы газа в объеме  $G$  за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$ .

Так как в объеме  $G$  отсутствуют источники, то приращение массы газа (2) должно равняться массе газа, втекшего за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  через поверхность  $\Sigma_G$  объема  $G$ .

Обозначим через  $d\Sigma$  вектор, имеющий направление внешней нормали к  $\Sigma$  и равный по величине площади выделенного малого кусочка поверхности  $\Sigma$ . Через площадку  $d\Sigma$  за единицу времени втекает в объем  $G$  масса газа, равная величине  $\rho u \, d\Sigma$ . Поэтому, приравнявая величину (2) количеству газа, втекшего в  $G$ , получим уравнение

$$\int_G [\rho(P, t_2) - \rho(P, t_1)] \, dG + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} \rho u \, d\Sigma \right] dt = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) выражает закон сохранения массы газа.

Изменение импульса в объеме  $G$  за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  равно величине

$$\int_G [\rho u |_{t=t_2} - \rho u |_{t=t_1}] \, dG = \int_G \rho u \Big|_{t_1}^{t_2} \, dG \quad (4)$$

и обусловлено втекающим через поверхность  $\Sigma_G$  газом, который приносит импульс

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} \rho u (u d\Sigma) \right] dt, \quad (5)$$

а также силами давления  $p$ , действующими со стороны остальной массы газа на газ в объеме  $G$  по нормали к поверхности  $\Sigma_G$ . Полный импульс сил давления, действующих на газ в объеме  $G$ , равен величине

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} p d\Sigma \right] dt. \quad (6)$$

Приравнивая величину (4) сумме величин (5) и (6), получим интегральное соотношение, выражающее закон сохранения импульса:

$$\int_G \rho u \Big|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} p d\Sigma + \rho u (u d\Sigma) \right] dt = 0. \quad (7)$$

При выводе соотношения (7) использовался тот факт, что в объеме  $G$  отсутствуют источники импульса.

Величина импульса в объеме  $G$  есть вектор; поэтому уравнения (7) содержат три скалярных уравнения для каждой из компонент импульса.

Энергия, содержащаяся в единице объема, равна  $\rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right)$ . Величина

$$\int_G \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG \quad (8)$$

равна приращению полной энергии в объеме  $G$  за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$ . Это приращение вызвано переносом энергии движущимся газом в количестве

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) u d\Sigma \right] dt \quad (9)$$

и работой сил давления  $p$ .

На газ в объеме  $G$  через элемент поверхности  $d\Sigma$  действует со стороны окружающего газа сила  $-p d\Sigma$ ; частицы газа на поверхности  $\Sigma_G$  движутся со скоростью  $u$ . Поэтому за единицу времени силы давления производят работу над газом  $-\int_{\Sigma_G} p u d\Sigma$ ,

а полная работа сил давления за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  равна

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} p u d\Sigma \right] dt. \quad (10)$$

Приравнивая величину (8) сумме величин (9), (10), получим интегральное соотношение, выражающее закон сохранения энергии:

$$\int_G \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Sigma_G} \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) u d\Sigma \right] dt = 0. \quad (11)$$

При выводе (11) предполагалось, что газ лишен теплопроводности. Формулы (3), (7), (11) математически выражают законы сохранения массы, импульса и энергии для газов, лишенных трения и теплопроводности, и являются основными уравнениями, определяющими движение газа.

К уравнениям (3), (7), (11) добавляются уравнения состояния газа. Например, если мы зададим соотношение

$$p = p(V, \varepsilon), \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad (12)$$

то задача определения течения сводится к нахождению пяти величин: трех компонент скорости  $\mathbf{u}$  и двух термодинамических:  $\rho$ ,  $\varepsilon$ , так как согласно (12)  $p$  есть функция от  $\rho$ ,  $\varepsilon$ . Для этой цели служат пять скалярных соотношений (3), (7), (11).

Заметим, впрочем, что уравнения состояния можно задавать и в любой другой форме из рассмотренных в § 1, а не обязательно в виде (12).

Вектор  $\rho \mathbf{u}$  называется *вектором потока массы*,  $\rho \mathbf{u} \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)$  — *вектором потока энергии*; тензор

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho u_i u_k$$

— *тензором потока импульса*.

Теперь мы перейдем к более подробному изучению одномерных течений, т. е. течений, в которых величины  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  зависят лишь от одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ .

Мы будем рассматривать три случая одномерных течений:

1. Плоское одномерное течение, когда величины  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  постоянны в плоскостях  $x = x_1 = \text{const}$ ;  $\mathbf{u} = \{u, 0, 0\}$ . Этот случай будем называть случаем плоской симметрии.

2. Цилиндрическое одномерное течение (случай цилиндрической симметрии). В этом случае  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  постоянны на поверхностях цилиндров  $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \text{const}$  (при фиксированном  $t$ ). Полагаем

$$u = u(x, t) \left\{ \frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, 0 \right\}; \quad \rho = \rho(x, t); \quad p = p(x, t), \dots \quad (13)$$

3. Сферически симметричное течение (случай сферической симметрии) получается, если имеют место формулы

$$u = u(x, t) \left\{ \frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, \frac{x_3}{x} \right\}, \quad x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};$$

$$\rho = \rho(x, t); \quad p = p(x, t), \dots$$

3. Интегральные законы сохранения для одномерных течений в эйлеровых координатах. В случае плоского одномерного течения все величины зависят лишь от  $x$  и  $t$ . Интегральные законы сохранения (2.2.3), (2.2.7), (2.2.11) переписываются в виде\*)

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho u \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 \quad (1)$$

— закон сохранения массы,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} [p + \rho u^2] \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 \quad (2)$$

— закон сохранения импульса и

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 \quad (3)$$

— закон сохранения энергии.

В уравнениях (1)–(3)  $x_1$ ,  $x_2$  фиксируют выделенный объем  $G$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  — произвольные моменты времени.

В случае цилиндрической симметрии мы получим интегральные соотношения, записывая законы сохранения (2.2.3), (2.2.7), (2.2.11) в применении к объему  $G$ , указанному на рис. 2.7.

Ввиду постоянства всех величин на поверхностях цилиндров  $x = \text{const}$ , закон сохранения массы запишется для объема  $G$  в форме

$$2al \int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} x dx + 2al \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

\*) В дальнейшем под  $x_1$  и  $x_2$  понимаются два значения единственной координаты  $x$ , а не различные декартовы координаты, рассматривавшиеся в предыдущем пункте.

или, после сокращения на  $2\alpha l$ , в окончательном виде

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} x dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0. \quad (4)$$

Несколько сложнее выводится интегральный закон сохранения импульса. Запишем равенство (2.2.7) в применении к объему  $G$  (рис. 2.7) лишь для компоненты импульса в направлении вектора  $e$ . Сразу же заметим, что для двух других ортогональных к  $e$  направлений равенство (2.2.7) приводит к тождеству.

В силу (2.2.13) интеграл  $\int \rho u_e dG$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \int \rho u_e dG &= 2l \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi \int_{x_1}^{x_2} \rho u x dx = \\ &= 2l \sin \alpha \int_{x_1}^{x_2} \rho u x dx. \end{aligned}$$

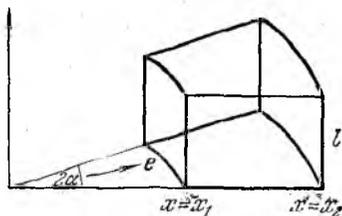


Рис. 2.7.

Подынтегральное выражение в интеграле  $\int_{\Sigma_G} \rho u_e (u d\Sigma)$  отлично от нуля лишь на частях  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  поверхности  $\Sigma_G$ ; поэтому

$$\int_{\Sigma_G} \rho u_e (u d\Sigma) = 2l \sin \alpha [\rho u^2 x] \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Наконец, компонента интеграла  $\int_{\Sigma_G} p d\Sigma$  в направлении вектора  $e$  состоит из двух слагаемых: интегралов по частям  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  поверхности  $\Sigma_G$ :

$$2l \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi [p x] \Big|_{x_1}^{x_2} = 2l \sin \alpha [p x] \Big|_{x_1}^{x_2},$$

и интегралов по частям  $\varphi = \pm \alpha$  поверхности  $\Sigma_G$  (рис. 2.7):

$$- 2l \sin \alpha \int_{x_1}^{x_2} p dx.$$

Подставляя все эти выражения в (2.2.7), получаем после сокращения на  $2l \sin \alpha$  окончательную формулу

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho u] \Big|_{t_1}^{t_2} x dx + \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho u^2) x] \Big|_{x_1}^{x_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} p dx dt. \quad (5)$$

Закон сохранения энергии (2.2.11) в применении к объему  $G$  для течения с цилиндрической симметрией записывается в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_2} x dx + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) x \right]_{x_1}^{x_2} dt = 0. \quad (6)$$

Итак, соотношения (4), (5), (6) дают представление законов сохранения массы, импульса и энергии для течения с цилиндрической симметрией.

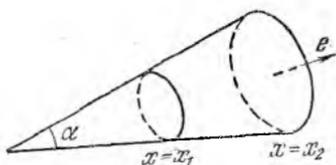


Рис. 2.8.

Для сферически симметричного течения законы сохранения массы, импульса и энергии записываются для объема  $G$ , вырезанного из кругового конуса с углом раствора  $\alpha$  сферами  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  (рис. 2.8).

Выкладки, аналогичные только что проведенным, приводят к следующим уравнениям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \rho \right)_{t_1}^{t_2} x^2 dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x^2)_{x_1}^{x_2} dt = 0, \quad (7)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \rho u \right)_{t_1}^{t_2} x^2 dx + \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho u^2) x^2]_{x_1}^{x_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} 2\rho x dx dt, \quad (8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_2} x^2 dx + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) x^2 \right]_{x_1}^{x_2} dt = 0. \quad (9)$$

Теперь легко заметить, что для всех трех случаев одномерных течений законы сохранения массы, импульса и энергии записываются общими формулами:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} x^v dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x^v)_{x_1}^{x_2} dt = 0, \quad (10)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u \Big|_{t_1}^{t_2} x^v dx + \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho u^2) x^v]_{x_1}^{x_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} v \rho x^{v-1} dx dt, \quad (11)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_2} x^v dx + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) x^v \right]_{x_1}^{x_2} dt = 0. \quad (12)$$

В формулах (10)–(12) следует полагать  $v = 0$  в случае плоской,  $v = 1$  в случае цилиндрической и  $v = 2$  в случае сферической симметрии течения.

Рассмотрим в плоскости переменных  $x, t$  прямоугольный контур  $C$  и ограниченную им область  $G_C$  (рис. 2.9). Очевидно, что равенства (10)—(12) могут быть переписаны в виде

$$\oint_C \rho x^v dx - \rho u x^v dt = 0, \quad (13)$$

$$\oint_C \rho u x^v dx - (p + \rho u^2) x^v dt = - \int_{G_C} v p x^{v-1} dx dt, \quad (14)$$

$$\oint_C \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) x^v dx - \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) x^v dt = 0, \quad (15)$$

если контур  $C$  имеет вид, указанный на рис. 2.9.

Но своему физическому смыслу величины  $\int_{x_1}^{x_2} \rho x^v dx$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} \rho u x^v dx$ ,  $\int_{t_1}^{t_2} \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) x^v dx$  — непрерывные функции переменных  $t, x_1, x_2$ , и  $\int_{t_1}^{t_2} \rho u x^v dt$ ,  $\int_{t_1}^{t_2} (p + \rho u^2) x^v dt$ ,  $\int_{t_1}^{t_2} \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) dt$  — непрерывные функции переменных  $x, t_1, t_2$ . Поэтому, предполагая, что величины  $u, p, v, \rho$  — ограниченные и кусочно непрерывные функции \*) переменных  $x, t$ , приходим к заключению, что соотношения (13)—(15) будут выполнены для любого замкнутого кусочно гладкого контура  $C$  и ограниченной им области  $G_C$ .

**4. Интегральные законы сохранения в лагранжевых координатах.** Пусть  $r$  обозначает начальное положение частицы газа, например, в момент  $t = 0$ ;  $x = x(r, t)$  — положение этой же частицы в момент времени  $t$ . Лагранжева координата  $r$  и эйлерова  $x$  связаны, как мы видели в п. 3 § 1, соотношением

$$x = r + \int_0^t u(r, \tau) d\tau = x(r, t). \quad (1)$$

\*) В случае сферической и цилиндрической симметрии ограниченность этих величин может нарушиться на прямой  $x = 0$ . Это, впрочем, несущественно для дальнейшего.

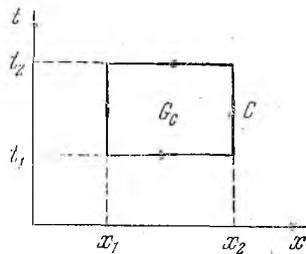


Рис. 2.9.

В (1) скорость  $u = u(r, t)$  задана как функция лагранжевых переменных. При известной скорости  $u(r, t)$  уравнение (1) определяет траекторию частицы. Очевидно, что масса газа, заключенная в объеме, ограниченном сечениями  $x = x(r_0, t)$ ,  $x = x(r, t)$ , остается постоянной во времени. Поэтому мы можем записать \*):

$$\int_{x(r_0, t)}^{x(r, t)} \rho(x, t) x^v dx = \int_{r_0}^r \rho_0(r) r^v dr = M = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\rho_0(r)$  означает плотность в момент времени  $t = 0$ .

Дифференцируя (2) по переменному  $r$ , получим

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial r} = \frac{r^v}{x^v} \frac{\rho_0(r)}{\rho(r, t)}, \quad (3)$$

так как, очевидно,  $\rho(x(r, t), t) = \rho(r, t)$ .

Формула (3) показывает, что отображение лагранжевых координат  $r$  на эйлеровы  $x$  взаимно однозначно при условии  $\rho(r, t) \neq 0$ .

В областях, где  $\rho = 0$  (области вакуума), точкам  $x, t$  не отвечают никакие лагранжевы координаты  $r, t$ , т. е. через эти точки не проходят траектории течения.

Согласно формуле (1)

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = u(r, t). \quad (4)$$

Поэтому из формул (3), (4) заключаем, что переход от эйлеровых координат  $x, t$  к лагранжевым  $r, t$  задается соотношением

$$dx = \frac{r^v}{x^v} \frac{\rho_0(r)}{\rho(r, t)} dr + u(r, t) dt. \quad (5)$$

Подстановка формулы (5) в закон сохранения массы (2.3.13) превращает его в тождество. Однако из (5) следует интегральное соотношение

$$\oint_C x^v dx = \oint_C \frac{\rho_0(r)}{\rho(r, t)} r^v dr + u(r, t) x^v dt = 0, \quad (6)$$

эквивалентное закону сохранения массы, так как оно есть следствие соотношения (2). В равенстве (6)  $C$  — произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в плоскости переменных  $r, t$ ;  $x = x(r, t)$  определяется с помощью формулы (1).

Заметим, что равенство (6) называют также интегральным законом сохранения объема, занятого газом.

\* ) Величина  $M$  имеет размерность массы лишь в случае сферической симметрии.

Переходя от переменных  $x, t$  к лагранжевым переменным  $r, t$  в уравнении (2.3.14), получим

$$\oint_C \rho_0(r) r^\nu dr - p x^\nu(r, t) dt = - \iint_{G_C} \nu p x^{\nu-1} dt \frac{\partial x(r, t)}{\partial r} dr = \\ = - \iint_{G_C} \nu p x^{\nu-1} \frac{r^\nu}{x^\nu} \frac{\rho_0(r)}{\rho(r, t)} dt dr = - \iint_{G_C} \nu p \frac{r^\nu}{x(r, t)} \frac{\rho_0(r)}{\rho(r, t)} dt dr \quad (7)$$

уравнение сохранения импульса. В формуле (7)  $C$  — контур плоскости  $r, t$ ,  $G_C$  — ограниченная им область этих переменных. Наконец, закон сохранения энергии (2.3.15) записывается в переменных Лагранжа в виде

$$\oint_C \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \rho_0(r) r^\nu dr - u p x^\nu(r, t) dt = 0. \quad (8)$$

Уравнения (6) — (8) представляют собой законы сохранения объема, импульса и энергии в переменных Лагранжа.

Заметим, что они могли быть получены непосредственно, применением законов сохранения к фиксированной массе газа, без перехода от эйлеровых координат к лагранжевым.

Законы сохранения (6) — (8) несколько упрощаются, если ввести обозначения

$$V(r, t) = V = \frac{l}{\rho(r, t)}; \quad q = q(r) = \int_0^r \rho_0(r) r^\nu dr. \quad (9)$$

Величина  $q$  совпадает с  $M$  и называется *массовой лагранжевой координатой*.

Переходя к этим переменным, получим

$$\oint_C V dq + x^\nu(q, t) u dt = 0, \quad (10)$$

$$\oint_C u dq - p x^\nu dt = - \iint_{G_C} \frac{\nu p V}{x} dq dt, \quad (11)$$

$$\oint_C \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dq - u p x^\nu dt = 0. \quad (12)$$

В уравнениях (10) — (12)  $C$  — произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в плоскости переменных  $q, t$ .

5. Дифференциальные уравнения для одномерных течений. Предположим, что в некоторой области переменных  $x, t$  функции  $u, \rho, p, \varepsilon$ , описывающие течение газа, являются непрерывно дифференцируемыми. Тогда по формуле Грина контурные интегралы в равенствах (2.3.13)—(2.3.15) преобразуются в интегралы по области  $G_C$ ; при этом подынтегральные выражения будут содержать первые производные от  $u, \rho, p, \varepsilon$ . Ввиду произвольности области  $G_C$  эти подынтегральные выражения должны обращаться в нуль. Поэтому для гладких течений ( $u, \rho, p, \varepsilon \in C_1$ ) из выполнения интегральных законов сохранения (2.3.13)—(2.3.15) следует выполнение дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(x^v \rho) + \frac{\partial}{\partial x}(x^v \rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x^v \rho u) + \frac{\partial}{\partial x}[x^v(p + \rho u^2)] = vx^{v-1}p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[x^v \rho (\varepsilon + \frac{u^2}{2})] + \frac{\partial}{\partial x}[x^v \rho u (\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2})] = 0. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения (1)—(3) записаны в эйлеровых координатах  $x, t$  и справедливы для гладких течений. Аналогично из законов сохранения (2.4.10)—(2.4.12) следуют дифференциальные уравнения в лагранжевых координатах  $q, t$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial q} x^v u = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} x^v p = \frac{v p V}{x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon + \frac{u^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial q} (u p x^v) = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (4)—(6) эйлерова координата частицы  $x$  должна рассматриваться как функция лагранжевой координаты  $q$  и времени  $t$ , т. е.  $x = x(q, t)$ ; из формулы (2.4.4) получаем дифференциальное уравнение для  $x(q, t)$

$$\frac{\partial x(q, t)}{\partial t} = u(q, t). \quad (7)$$

Уравнения (4)—(7) описывают в лагранжевых координатах гладкое одномерное течение газа.

Уравнения (1)—(3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{v \rho u}{x} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

где  $S$  — энтропия, определяемая уравнением

$$T dS = dv + p dV.$$

Аналогично, комбинируя уравнения (4)–(7) в лагранжевых координатах, получим

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = 0,$$

Это уравнение показывает, что энтропия  $S$  каждой частицы газа остается постоянной во времени во всей области гладкости течения. Отсюда следует, что если течение является гладким, то энтропия каждой частицы газа остается постоянной.

Отметим, что если газ обладает конечной вязкостью и теплопроводностью, то уравнения (1)–(3) для вязкого теплопроводного газа заменяются на следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^{\nu} \rho) + \frac{\partial}{\partial x} (x^{\nu} \rho u) = 0. \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^{\nu} \rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^{\nu} \left( p + \rho u^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = \nu x^{\nu-1} \left( p - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ x^{\nu} \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^{\nu} \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - \mu x^{\nu} u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x} x^{\nu} \kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\mu > 0$ ,  $\kappa > 0$  — соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности,  $T$  — температура газа.

Соответствующие уравнения в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial q} x^{\nu} u = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \left[ x^{\nu} \left( p - \mu \rho x^{\nu} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right] = \frac{\nu V}{x} \left[ p - \mu \rho x^{\nu} \frac{\partial u}{\partial q} \right], \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ u x^{\nu} \left( p - \mu \rho x^{\nu} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial q} \left[ x^{2\nu} \rho \kappa \frac{\partial T}{\partial q} \right]. \quad (16)$$

Теперь, комбинируя аналогично предыдущему уравнения (11)–(13), найдем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\mu}{T \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{T} \frac{1}{x^{\nu} \rho} \frac{\partial}{\partial x} \kappa x^{\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (17)$$

или, в лагранжевых координатах,

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = \frac{\mu \rho x^{2\nu}}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial q} \kappa x^{2\nu} \rho \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (18)$$

Из уравнений (17), (18) следует, что для всякой теплоизолированной массы газа, обладающего вязкостью и теплопроводностью, ее полная энтропия не убывает с ростом времени  $t$ .

В самом деле, записывая уравнение (18) в виде

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = \frac{\mu \rho x^v}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial q} \kappa x^{2v} \rho \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\kappa x^{2v} \rho}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial q} \right)^2 \quad (19)$$

и интегрируя его в пределах от  $q = q_1$  до  $q = q_2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{q_1}^{q_2} S(q, t) dq = \\ = \frac{\kappa x^{2v} \rho}{T} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{q_1}^{q_2} + \int_{q_1}^{q_2} \left[ \frac{\mu \rho x^v}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \frac{\kappa x^{2v} \rho}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial q} \right)^2 \right] dq. \end{aligned} \quad (20)$$

Обозначая через  $S_n = \int_{q_1}^{q_2} S(q, t) dq$  полную энтропию данной массы газа, получаем из (20), что

$$\frac{dS_n}{dt} \geq - \frac{W}{T} \Big|_{q_1}^{q_2}, \quad (21)$$

где  $W = -\kappa x^{2v} \rho \frac{\partial T}{\partial q}$  — поток тепла, величина  $\frac{W}{T}$  — поток энтропии. Таким образом, неравенство (21) указывает, что для любой массы вязкого теплопроводного газа производство энтропии превосходит ее приток через границы этой массы газа. Если масса газа, заключенная между сечениями  $q = q_1$ ,  $q = q_2$ , теплоизолирована, то  $\kappa \frac{\partial T}{\partial q} x^{2v} \rho = 0$  при  $q = q_1$ ,  $q = q_2$ . Поэтому из (20) следует, что

$$\frac{dS_n}{dt} \geq 0. \quad (22)$$

Таким образом, если рассматривать движение газа, лишенного вязкости и теплопроводности, как предельное движение вязкого и теплопроводного газа при  $\mu, \kappa \rightarrow 0$ , то из уравнений (17), (18), (20) следует, что  $S(q, t) = S(q, 0)$  лишь в том случае, если  $\sqrt{\mu} \frac{\partial u}{\partial q} \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{\kappa} \frac{\partial T}{\partial q} \rightarrow 0$  при  $\mu, \kappa \rightarrow 0$ . Как мы увидим позже, движение газа, лишенного вязкости и теплопроводности, не является гладким, так как в газе образуются области, где градиенты  $\frac{\partial u}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q}$  не ограничены. По этой причине, если рассматривать течение невязкого и нетеплопроводного газа как предельное при  $\mu, \kappa \rightarrow 0$ , то сохранение энтропии  $S$  для каждой частицы газа имеет место лишь до тех пор, пока траектория частицы находится в области гладкости течения.

Если же траектория частицы проходит через зону неограниченности градиентов либо через поверхность разрыва гидродинамических величин, то энтропия этой частицы возрастает.

Этот принцип возрастания энтропии при прохождении частицей поверхности разрыва (зона неравновесности) будет нами в дальнейшем использован (§ 4) для отбора устойчивых разрывов при изучении течения газа, лишенного вязкости и теплопроводности.

Заметим теперь, что для однозначного определения течения к уравнениям (1)—(3) либо (4)—(6) для невязкого и нетеплопроводного газа, а также к уравнениям (11)—(13) либо (14)—(16) для газа с вязкостью и теплопроводностью должны быть присоединены уравнения состояния газа. Мы будем в дальнейшем задавать уравнения состояния в одной из следующих форм:

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T); \quad (23)$$

$$e = e(\rho, p) \quad \text{либо} \quad p = p(\rho, e); \quad (24)$$

$$e = e(V, S), \quad p = p(V, S) \quad \text{либо} \quad p = p(\rho, S). \quad (25)$$

Уравнения состояния можно задавать в любом из этих видов, однако в случае газа с вязкостью и теплопроводностью особенно удобно применить их в виде (23), так как это позволяет выобразить в качестве основной термодинамической переменной температуру  $T$ .

В случае, когда в движении участвуют различные газы, мы должны считать, что эти зависимости различны в областях, занятых разными газами. Так как эти области заранее неизвестны, то мы не можем, вообще говоря, задать эти зависимости в виде функций от эйлеровых координат  $x, t$ .

Отметим в связи с этим преимущество лагранжевых координат, в которых уравнения состояния (23)—(25) можно считать заданными в виде функций от  $q, t$ , например:

$$e = e(V, p, q). \quad (26)$$

В этом случае зависимость (26) следует считать разрывной по переменной  $q$  в точках  $q = q_i = \text{const}$ , которые являются границами раздела различных газов.

**6. Изучение уравнений в эйлеровых координатах. Характеристическая форма. Характеристики.** Будем считать, что уравнение состояния задано в виде (2.5.25):

$$p = p(\rho, S).$$

Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Подставляя это выражение в систему уравнений (2.5.8)—(2.5.10), получим уравнения одномерного течения в эйлеровых переменных, записанные в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\frac{\nu \rho u}{x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Приведем систему трех квазилинейных уравнений (1)—(3) относительно трех неизвестных  $\rho$ ,  $u$ ,  $S$  к характеристическому виду. Для этого, согласно § 2 гл. 1, нужно вычислить корни  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  уравнения

$$\begin{vmatrix} u - \xi & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} p'_\rho & u - \xi & \frac{1}{\rho} p'_S \\ 0 & 0 & u - \xi \end{vmatrix} = (u - \xi)^3 - p'_\rho (u - \xi) = 0. \quad (4)$$

Как уже говорилось в § 1, мы будем предполагать, что

$$\frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho} > 0. \quad (5)$$

Обозначая тогда

$$c^2 = c^2(\rho, S) = \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}, \quad (6)$$

запишем уравнение (4) в виде

$$(u - \xi)[(u - \xi)^2 - c^2] = 0, \quad (7)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u - c; & \xi_2 &= u; & \xi_3 &= u + c; \\ \xi_1 &< \xi_2 < \xi_3 & (c > 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, при выполнении условия (5) система уравнений (1)—(3) является системой гиперболического типа.

В § 1 мы видели, что условие  $\frac{\partial p}{\partial \rho} = -V^2 \frac{\partial p}{\partial V} > 0$  есть условие устойчивости термодинамического состояния газа. Это же условие обеспечивает гиперболичность уравнений газовой динамики и, следовательно, корректность задачи Коши для уравнений газовой динамики. Если же  $\frac{\partial p}{\partial \rho} < 0$ , то задача Коши для системы (1)—(3) была бы, вообще говоря, некорректной.

Приведем эту систему уравнений к характеристической формс. Для этого умножим уравнение (1) на величину  $-\frac{c}{\rho}$ , сложим с уравнением (2), а к результату прибавим уравнение (3), умноженное на величину  $-\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial S}$ . Мы получим после этого уравнение в характеристическом виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \\ - \frac{\partial p}{\partial S} \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial S}{\partial x} \right] = \frac{vcu}{x}. \quad (9)$$

Второе характеристическое уравнение, соответствующее собственному значению  $\xi_2 = u$ , есть уравнение (3):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

а третье получается умножением (1) на  $\frac{c}{\rho}$ , сложением результата с (2), после чего к результату добавляется уравнение (3), умноженное на  $\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial S}$ . В результате получаем третье уравнение в характеристическом виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \\ + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial S} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial S}{\partial x} \right] = -\frac{vcu}{x}. \quad (11)$$

Итак, уравнения (9), (10), (11) есть характеристическая форма уравнений газовой динамики (1)–(3) в эйлеровых координатах. Величина

$$a = a(\rho, S) = \sqrt{\frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}}$$

носит название *скорости звука*, так как малые возмущения решения распространяются вдоль характеристик; наклоны же характеристик суть величины  $u - c$ ,  $u$ ,  $u + c$ . Поэтому малые возмущений распространяются относительно вещества со скоростями 0,  $\pm c(\rho, S)$ . Интегральные кривые уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (12)$$

называются характеристиками системы уравнений (1)–(3) либо (9), (11), при этом линия  $\frac{dx}{dt} = u$  называется также *траекторией*.

Согласно уравнению (10) энтропия  $S$  постоянна вдоль траектории. Мы получаем вывод, который уже отмечался нами: энтропия частицы остается постоянной, пока течение является гладким.

Так как  $c > 0$ , то характеристики  $\frac{dx}{dt} = u - c$  первого семейства относительно вещества движутся с ростом времени  $t$  влево, а характеристики третьего семейства  $\frac{dx}{dt} = u + c$  — вправо относительно вещества.

Наконец, отметим еще одну форму записи характеристической системы (9) — (11), которая часто встречается в литературе:

$$\left. \begin{aligned} dx &= (u - c) dt, \quad du - \frac{c}{\rho} d\rho - \frac{\partial p}{\partial S} \frac{1}{\rho c} dS = \frac{vcu}{x} dt; \\ dx &= u dt, \quad dS = 0; \\ dx &= (u + c) dt, \quad du + \frac{c}{\rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial S} \frac{1}{\rho c} dS = -\frac{vcu}{x} dt. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В такой записи указано, вдоль каких линий выполняются дифференциальные соотношения между искомыми функциями.

**7. Изэнтропическое и изотермическое течения. Инварианты Римана.** Пусть на прямой  $t = 0$  нам заданы начальные значения газодинамических переменных:

$$u = u_0(x), \quad \rho = \rho_0(x), \quad S = S_0(x). \quad (1)$$

Если предположить, что начальные функции  $u_0$ ,  $\rho_0$ ,  $S_0$  обладают ограниченной первой производной (либо липшиц-непрерывны), то тогда из результатов главы 1 следует существование в некоторой полосе  $0 \leq t \leq t_0$  дифференцируемого (либо липшиц-непрерывного) решения системы уравнений (2.6.9) — (2.6.11).

Предположим, что  $S_0(x) = S_0 = \text{const}$ . Тогда из уравнения (2.6.10) следует, что во всей области переменных  $x$ ,  $t$ , где существует дифференцируемое решение системы (2.6.9) — (2.6.11), энтропия остается постоянной:

$$S(x, t) = S_0(x) = S_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Такое течение называется *изэнтропическим*.

Задача определения изэнтропического течения сводится, очевидно, к интегрированию системы двух квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \frac{vcu}{x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = -\frac{vcu}{x}, \quad (4)$$

где

$$c = c(\rho, S_0) = \sqrt{\frac{\partial p(\rho, S_0)}{\partial \rho}} = c(\rho). \quad (5)$$

Как и всякая система двух квазилинейных уравнений, система (3), (4) приводится к инвариантам Римана (гл. 1, § 3). Вводи функцию

$$\Phi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho) d\rho}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c^2(\rho) d\rho}{\rho c(\rho)} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp(\rho, S_0)}{\rho c(\rho)} \quad (6)$$

и новые переменные  $s, r$ :

$$s = u - \Phi(\rho), \quad r = u + \Phi(\rho), \quad (7)$$

вплеснем систему (3), (4) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{vcu}{x}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{vcu}{x}. \quad (8)$$

Переменные  $r, s$  называются инвариантами Римана.

По известным  $r, s$  однозначно определяются  $u, \rho$ , т. е. преобразование (7) имеет обратное. В самом деле,

$$u = \frac{r + s}{2} \quad (9)$$

и

$$\Phi(\rho) = \frac{r - s}{2}. \quad (10)$$

Так как

$$\Phi'(\rho) = \frac{c(\rho)}{\rho} > 0, \quad (11)$$

то на формулы (10) однозначно определяется  $\rho$  как функция  $r - s$ , т. е. мы можем считать, что

$$\rho = \Phi^{-1}(r - s), \quad r(\rho) = \Psi(r - s) = c(\Phi^{-1}(r - s)), \quad (12)$$

при этом

$$(\Phi^{-1})' = \frac{\rho}{2c(\rho)} > 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\rho c'(\rho)}{c(\rho)}. \quad (13)$$

Так, система уравнений для изэнтропического течения записывается с помощью инвариантов Римана в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left[ \frac{r + s}{2} - \Psi(r - s) \right] \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{(r + s) v \Psi(r - s)}{2x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \left[ \frac{r + s}{2} + \Psi(r - s) \right] \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{(r + s) v \Psi(r - s)}{2x}. \quad (15)$$

Особенно упрощаются уравнения для изоэнтروпического плоско-симметричного течения. В этом случае  $v = 0$  и правые части в уравнениях (14), (15) исчезают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \left[ \frac{r+s}{2} - c \right] \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial t} + \left[ \frac{r+s}{2} + c \right] \frac{\partial r}{\partial x} &= 0, \quad c = \psi(r-s). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из уравнений (16) вытекает, что инварианты Римана  $r$ ,  $s$  сохраняют постоянные значения вдоль соответствующих характеристик: инвариант  $s$  постоянен вдоль характеристик

$$\frac{dx_1}{dt} = u - c = \frac{s+r}{2} - \psi(r-s),$$

инвариант  $r$  постоянен вдоль характеристик

$$\frac{dx_2}{dt} = u + c = \frac{r+s}{2} + \psi(r-s).$$

Рассмотрим также еще один частный случай — случай изотермического газа. Предположим, что газ обладает чрезвычайно большой теплопроводностью и заключен в термостат, который поддерживает постоянную температуру  $T_0$ . Вследствие большой теплопроводности температура в газе будет очень быстро выравниваться, и мы приближенно можем считать ее постоянной и равной  $T_0$ . Это означает, что мы рассматриваем предельный случай бесконечной теплопроводности.

В отличие от приближения локально адиабатического процесса, в котором сохранение энтропии частиц нарушается в области резких градиентов, эта модель имеет смысл и остается непротиворечивой также и для разрывных течений.

Поэтому установим интегральные законы сохранения, которые справедливы в этом случае.

Вполне понятно, что законы сохранения массы и импульса справедливы и в случае этой модели течения. Что же касается закона сохранения энергии, то в этом случае его следует видоизменить, так как газ сохраняет постоянную температуру  $T_0$ , получая либо отдавая энергию термостату.

Закон сохранения энергии теперь имеет смысл лишь для замкнутой системы газ — термостат. Что же касается самого газа, то применение закона сохранения энергии к любой массе газа показывает лишь количество тепла, отданное либо полученное от термостата. Пример подобного рассмотрения имеется в п. 6 § 4.

Записывая уравнения состояния в виде  $p = p(\rho, T_0)$ , мы видим, что в этом случае давление можно считать функцией одной лишь плотности  $\rho$  и  $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$ .

Из законов сохранения (2.3.13), (2.3.14) следуют дифференциальные уравнения (2.5.1) и (2.5.2), которые приводятся к характеристической форме (3), (4), где под  $c$  следует понимать теперь величину

$$c = c_T(\rho) = \sqrt{\frac{\partial p(\rho, T_0)}{\partial \rho}}; \quad (17)$$

$c = c_T(\rho)$  — так называемая «изотермическая скорость звука».

Уравнения (3), (4), естественно, записываются в виде (14), (15) и в случае изотермического газа, при этом для  $r$ ,  $s$  справедливы формулы (7), для  $c_T(\rho)$  — формула (12), а для  $\varphi(\rho)$  — формула (6), если только под  $c(\rho)$  понимать величину (17).

**8. Уравнения в лагранжевых координатах. Случай переменной энтропии.** В качестве исходных уравнений в лагранжевых переменных будем считать уравнения (2.5.4), (2.5.5), (2.5.6), в которых  $q$  — массовая координата. Запишем их в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - x^v \frac{\partial u}{\partial q} = vx^{v-1}u \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{vuV}{x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x^v \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad V = \frac{1}{\rho}; \quad (3)$$

при этом эйлерова координата  $x = x(q, t)$  должна рассматриваться как решение дифференциального уравнения (2.5.7):

$$\frac{\partial x(q, t)}{\partial t} = u(q, t), \quad (4)$$

удовлетворяющее начальному условию, следующему из (2.4.9):

$$\int_0^{x(q, 0)} \rho_0(r) r^v dr = q, \quad (5)$$

т. е. можно считать, что

$$x(q, 0) = x_0(q), \quad (6)$$

где  $x_0(q)$  — монотонно возрастающая и непрерывная функция переменного  $q$ . К уравнениям (1) — (4), как всегда, присоединяется уравнение состояния, которое мы будем считать заданным в виде

$$p = p(V, S), \quad p'_V(V, S) < 0. \quad (7)$$

Величина  $x = x(q, t)$  определяется из уравнения (4); для производной  $\frac{\partial x}{\partial q}$  имеем следующее выражение:

$$\frac{\partial x(q, t)}{\partial q} = \frac{1}{x^v} V. \quad (8)$$

Собственные значения  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , как обычно, определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\xi & -x^v & 0 \\ x^v \rho'_V & -\xi & x^v \rho'_S \\ 0 & 0 & -\xi \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

т. е.

$$\xi [\xi^2 + x^{2v} \rho'_V] = 0. \quad (10)$$

Так как

$$\rho'_V(V, S) = -\rho^2 \rho'_\rho(\rho, S) = -\rho^2 c^2(\rho, S), \quad (11)$$

то

$$\xi_1 = -\rho c x^v = -\frac{c x^v}{V}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \rho c x^v = \frac{c x^v}{V}.$$

Эти же формулы для  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  могут быть получены из результатов п. 6 применением преобразования координат  $x, t$  в  $q, t$  по формуле (2.4.5).

Приведение системы (1)–(3) к характеристической форме производится так же, как и в п. 6. Мы приводим окончательную форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - x^v \rho c \frac{\partial u}{\partial q} + \rho c \left( \frac{\partial V}{\partial t} - x^v \rho c \frac{\partial V}{\partial q} \right) - \\ - \frac{\rho'_S(V, S)}{\rho c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - x^v \rho c \frac{\partial S}{\partial q} \right) = \frac{v c u}{x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + x^v \rho c \frac{\partial u}{\partial q} - \rho c \left( \frac{\partial V}{\partial t} + x^v \rho c \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \\ + \frac{\rho'_S(V, S)}{\rho c} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + x^v \rho c \frac{\partial S}{\partial q} \right) = -\frac{v c u}{x}. \end{aligned} \quad (14)$$

К уравнениям (12)–(14) присоединяется уравнение (4) с начальным условием (6).

Для изэнтропического течения  $S(q, t) = S_0$ . Инварианты Римана

$$s = u - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c d\rho}{\rho}, \quad r = u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c d\rho}{\rho}$$

совпадают с введенными в п. 7 (см. (2.7.6), (2.7.7)). Это, впрочем, есть общее свойство инвариантов Римана; они инвариантны при замене зависимых и независимых переменных,

Таким образом, изоэнтропическое течение удовлетворяет системе двух квазилинейных уравнений в инвариантах

$$\frac{\partial s}{\partial t} - x^{\nu} \rho c \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{vcu}{x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + x^{\nu} \rho c \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{vcu}{x}, \quad (16)$$

а функция  $x = x(q, t)$  определена формулами (4) и (6). Величина  $\rho c$  зависит лишь от  $\rho = \frac{1}{V}$  и является однозначной функцией  $r - s$ :

$$\rho c = \psi(r - s) \varphi^{-1}(r - s) = \xi(r - s).$$

Уравнения (15), (16) значительно упрощаются в случае плоской симметрии, когда  $\nu = 0$ .

В отличие от случая эйлеровых координат, в лагранжевых координатах задача определения гладкого течения с переменной энтропией также сводится к системе двух квазилинейных уравнений и допускает, следовательно, введение инвариантов.

В самом деле, пусть нам известно распределение энтропии в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$S(q, 0) = S_0(q), \quad (17)$$

и  $S_0(q)$  — дифференцируемая функция.

В области гладкости течения из уравнения (13) следует

$$S(q, t) = S_0(q), \quad (18)$$

и задача сводится к решению двух уравнений (12), (14). Вводя, как и выше, инварианты Римана

$$s = u + \int_{V_0}^V \sqrt{-\frac{\partial p(V, S_0(q))}{\partial V}} dV, \quad (19)$$

$$r = u - \int_{V_0}^V \sqrt{-\frac{\partial p(V, S_0(q))}{\partial V}} dV, \quad (20)$$

запишем уравнения (12), (14) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} - x^{\nu} \rho c \frac{\partial s}{\partial q} = f_1, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + x^{\nu} \rho c \frac{\partial r}{\partial q} = f_2, \quad (21)$$

где

$$f_1 = \frac{vcu}{x} - \frac{dS_0(q)}{dq} \left[ x^{\nu} p'_S(V, S_0) - x^{\nu} c \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial c(\rho, S_0(q))}{\partial S_0} \frac{d\rho}{\rho} \right], \quad (22)$$

$$f_2 = -\frac{vcu}{x} - \frac{dS_0(q)}{dq} \left[ x^{\nu} p'_S(V, S_0) - x^{\nu} c \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial c(\rho, S_0(q))}{\partial S_0} \frac{d\rho}{\rho} \right]. \quad (23)$$

Функции  $f_1, f_2$  представляются в виде

$$f_i = f_i \left( x, u, r - s, \frac{\partial S_0(q)}{\partial q}, S_0(q) \right), \quad (24)$$

при этом зависимости (24) линейны по переменным  $u, \frac{\partial S_0}{\partial q}$ . Для наглядности напишем эти уравнения в случае плоской симметрии, т. е. при  $v = 0$ :

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \rho c \frac{\partial s}{\partial q} = f_1, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \rho c \frac{\partial r}{\partial q} = f_2, \quad (25)$$

$$f_1 = f_2 = - \frac{\partial S_0}{\partial q} \left[ p'_S - c \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial c(\rho, S_0(q))}{\partial S} \frac{d\rho}{\rho} \right]. \quad (26)$$

Величины  $\rho$  и  $c$  выражаются однозначно через  $r, s$ .

В случае изотермического течения уравнения в лагранжевых переменных по-прежнему имеют вид (15), (16), только величина  $c$ , входящая теперь в эти уравнения и в определение инвариантов Римана  $r, s$ , есть изотермическая скорость звука  $c_T$  (формула (2.7.17)).

**9. Уравнения в инвариантах для политропного и изотермического газов.** Для политропного газа давление  $p$  задается формулой

$$p = \frac{A^2(S)}{\gamma} \rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1, \quad (1)$$

поэтому

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = A^2(S) \rho^{\gamma-1}, \quad c(\rho, S) = A(S) \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (2)$$

Для изоэнтропического течения инварианты Римана определены формулами (2.7.7). Вычисляя  $\varphi(\rho)$ , получим

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{A(S) \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} d\rho}{\rho} = \frac{2A(S)}{\gamma-1} \left[ \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \right],$$

так как  $\gamma > 1$ . Для простоты положим  $\rho_0 = 0$ , тогда

$$\varphi(\rho) = \frac{2A(S)}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad c(\rho) = A(S) \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma-1}{2} \varphi(\rho), \quad (3)$$

т. е.

$$c(\rho) = \frac{\gamma-1}{4} (r - s). \quad (4)$$

Итак, уравнения изоэнтропического течения (2.7.14), (2.7.15) для политропного газа принимают вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\nu(\gamma - 1)(r^2 - s^2)}{4x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\nu(\gamma - 1)(r^2 - s^2)}{4x}, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}. \quad (7)$$

Запишем эти уравнения для случая плоской симметрии ( $\nu = 0$ ):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Выпишем также формулы (2.7.7) для инвариантов  $r, s$ :

$$s = u - \varphi(\rho) = u - \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad r = u + \varphi(\rho) = u + \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad (9)$$

и обратные формулы:

$$u = \frac{r + s}{2}, \quad c = c(\rho, S_0) = \frac{\gamma - 1}{4} (r - s). \quad (10)$$

В случае изотермического идеального газа

$$p = R\rho T_0, \quad (11)$$

поэтому

$$c_T = \sqrt{RT_0} = \text{const} = c_0, \quad (12)$$

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_T d\rho}{\rho} = c_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (13)$$

Полагая для определенности  $\rho_0 = 1$ , будем иметь

$$2\varphi(\rho) = (r - s) = 2c_0 \ln \rho, \quad \rho = \exp \left\{ \frac{r - s}{2c_0} \right\}. \quad (14)$$

Уравнения в инвариантах для изотермического газа принимают вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left( \frac{r + s}{2} - c_0 \right) \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\nu c_0}{2x} (r + s), \quad (15)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \left( \frac{r + s}{2} + c_0 \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\nu c_0}{2x} (r + s). \quad (16)$$

Интересны частные случаи системы (8) ( $\nu = 0$ ). Один из случаев,  $\gamma = -1$  (соответствующий так называемому газу

Чаплыгина \*)), приводит к слабо-нелинейной системе:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + s \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Другой интересный случай  $\gamma = 3$  приводит к распадающейся системе уравнений

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

характеристиками которой, как мы видели в главе 1, являются прямые линии.

В заключение этого пункта приведем уравнения в лагранжевых переменных для движения политропного газа в случае плоской симметрии ( $v = 0$ ) с переменной энтропией.

Из формул (2.8.25), (2.8.26) в этом случае, очевидно, получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} - B(S_0(q))(r-s) \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\partial s}{\partial q} = f_1, \quad (19)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + B(S_0(q))(r-s) \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\partial r}{\partial q} = f_2, \quad (20)$$

где

$$B(S_0(q)) = \left[ \frac{\gamma-1}{4A(S_0(q))} \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} A(S_0(q)), \quad (21)$$

$$f_1 = f_2 = \frac{dS_0(q)}{dq} \left[ \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \rho^\gamma \right] \cdot 2A(S_0(q))A'(S_0(q)), \quad (22)$$

а  $\rho$ , как всегда, определяется как некоторая функция от разности  $r-s$  и величины  $S_0(q)$ .

Отметим также, что в случае изоэнтропического течения газа Чаплыгина ( $\gamma = -1$ ) уравнения (19), (20) становятся линейными:

$$\frac{\partial s}{\partial t} - B \frac{\partial s}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + B \frac{\partial r}{\partial q} = 0. \quad (23)$$

Отсюда имеем общий интеграл

$$s = s_0(q + Bt), \quad r = r_0(q - Bt),$$

где  $s_0, r_0$  — произвольные функции одного аргумента. Из этого следует, что если решение  $r, s$  системы (23) было гладким в момент  $t = t_0$ , то оно остается гладким и при любых  $t$ .

Система (23) есть слабо-нелинейная система (17), преобразованная к переменным Лагранжа. Следовательно, решения си-

\*) Для придания физического смысла уравнению состояния следует при этом считать, что  $p = p_0 - \frac{A^2(S)}{\rho}$ ,  $p_0 = \text{const} > 0$ .

стемы (17) также сохраняют свою гладкость. Этот факт может рассматриваться как иллюстрация теоремы о слабо-нелинейных системах, доказанной в § 10 главы 1.

### § 3. Изучение простейших плоских одномерных течений

В этом параграфе мы будем изучать качественные свойства простейших, в основном изоэнтропических либо изотермических, течений в случае плоской симметрии ( $\nu = 0$ ).

**1. Общие свойства. Интегрирование в случае  $\gamma = 3$ .** В эйлеровых координатах изоэнтропическое течение описывается системой двух уравнений, которая для случая политропного газа имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma-1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma-1}{4}, \quad \gamma \neq 1. \quad (2)$$

Будем считать, что для системы (1) поставлены начальные условия

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad r(x, 0) = r_0(x), \quad (3)$$

и функции  $s_0, r_0$  ограничены и обладают непрерывной первой производной.

Тогда из результатов главы 1 следует существование решения задачи Коши (1), (2) в некоторой полосе  $0 \leq t < t_0$ ; величина  $t_0$  есть момент времени, в который производные решения станут неограниченными.

Предположим, что решение  $s(x, t), r(x, t)$  известно. Интегральную кривую уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_1(s, r) = \alpha s(x, t) + \beta r(x, t) = u - c$$

будем называть  $s$ -характеристикой, аналогично интегральную кривую уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_2(s, r) = \alpha r(x, t) + \beta s(x, t) = u + c$$

$r$ -характеристикой.

Вдоль  $s$ -характеристики  $x = x_s(t, x_0)$  постоянен инвариант  $s = s(x, t)$ , как это следует из уравнений (1), т. е.  $s(x_s(t, x_0), t) = s_0(x_0)$ , если  $x_s(0, x_0) = x_0$ .

Аналогично

$$r(x_r(t, x_0), t) = r_0(x_0),$$

если  $x = x_r(t, x_0)$  — уравнение  $r$ -характеристики, проходящей через точку  $x = x_0$  начальной оси  $t = 0$ . Для решения  $s, r$  имеют место оценки

$$\left. \begin{aligned} \min_x s_0(x) &\leq s(x, t) \leq \max_x s_0(x), \\ \min_x r_0(x) &\leq r(x, t) \leq \max_x r_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

справедливые лишь в области  $0 \leq t \leq t_0$ , в которой решение остается непрерывным.

Поскольку

$$s = u - \frac{2}{\gamma-1} c, \quad r = u + \frac{2}{\gamma-1} c, \quad u = \frac{r+s}{2}, \quad c = \frac{\gamma-1}{4} (r-s), \quad (5)$$

то из (4) следуют оценки для скорости  $u$  и скорости звука  $c$  (при  $\gamma > 1$ ):

$$\begin{aligned} \min_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] + \min_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] &\leq 2u(x, t) \leq \\ &\leq \max_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] + \max_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \min_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] - \max_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] &\leq \\ &\leq \frac{4}{\gamma-1} c(x, t) \leq \max_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] - \\ &\quad - \min_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c_0(x), u_0(x)$  — начальные значения скорости звука и скорости потока.

Если загрузить эти оценки, то легко получим

$$\begin{aligned} \min_x u_0(x) - \frac{1}{\gamma-1} [\max_x c_0(x) - \min_x c_0(x)] &\leq u(x, t) \leq \\ &\leq \max_x u_0(x) + \frac{1}{\gamma-1} [\max_x c_0(x) - \min_x c_0(x)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \min_x c_0(x) - \frac{\gamma-1}{4} [\max_x u_0(x) - \min_x u_0(x)] &\leq c(x, t) \leq \\ &\leq \max_x c_0(x) + \frac{\gamma-1}{4} [\max_x u_0(x) - \min_x u_0(x)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \min_x u_0(x) &= u_0, & \max_x u_0(x) &= U_0, & \min_x c_0(x) &= c_0, \\ \max_x c_0(x) &= C_0, & \Delta u_0 &= U_0 - u_0, & \Delta c_0 &= C_0 - c_0, \end{aligned}$$

перепишем неравенства (8), (9) короче:

$$u_0 - \frac{1}{\gamma-1} \Delta c_0 \leq u(x, t) \leq U_0 + \frac{1}{\gamma-1} \Delta c_0, \quad (10)$$

$$c_0 - \frac{\gamma-1}{4} \Delta u_0 \leq c(x, t) \leq C_0 + \frac{\gamma-1}{4} \Delta u_0. \quad (11)$$

Следует иметь в виду, что по своему смыслу скорость звука  $c \geq 0$ . Поэтому, если  $c_0 - \frac{\gamma-1}{4} \Delta u_0 < 0$  либо

$$\min_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] - \max_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] < 0,$$

то в левой части неравенств (11) и (7) должен стоять нуль. Из формул (5) поэтому также следует

$$\min_x \left[ u_0(x) - \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right] \leq u(x, t) \leq \max_x \left[ u_0(x) + \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) \right].$$

Однако, когда  $c_0 - \frac{\gamma-1}{2} \Delta u_0 < 0$ , оценка  $c(x, t) \geq 0$  также оказывается грубой. Поэтому мы покажем сейчас, что если начальные функции  $u_0(x)$ ,  $c_0(x)$  обладают ограниченными производными, то  $c(x, t) \neq 0$  ни при каком конечном значении  $t > 0$ . Одновременно мы установим полезные оценки для производных решения задачи Коши (1), (3).

Поскольку доказываемое утверждение носит общий характер, мы будем рассматривать случай любого  $\gamma \geq -1$ . При  $\gamma \geq -1$

$$a \geq 0.$$

*Теорема. Если в изэнтропическом течении политропного газа ( $\gamma \geq -1$ ) не возникают ударные волны (не пересекаются характеристики одного семейства) и начальные значения  $r_0(x)$  и  $s_0(x)$  инвариантов Римана дифференцируемы, то существуют функции  $P(t) < \infty$  и  $\rho_0(t) > 0$  такие, что*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \leq P(t), \quad \rho(x, t) \geq \rho_0(t).$$

*Доказательство.* Обозначим  $\frac{\partial s}{\partial x} = p_1$ ,  $\frac{\partial r}{\partial x} = p_2$ , и пусть

$$\frac{ds_0(x)}{dx} = p_1(x, 0) \leq P_0, \quad \frac{dr_0(x)}{dx} = p_2(x, 0) \leq P_0, \quad (12)$$

и также

$$0 < \rho_0 \leq \rho(x, 0) = \rho_0(x) = \left[ \frac{\gamma-1}{4A} (r_0(x) - s_0(x)) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \leq R_0. \quad (13)$$

Предположим сначала, что  $r_0(x)$ ,  $s_0(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы, тогда и решение системы (1) дважды непрерывно дифференцируемо.

Обозначим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{d}{dt}\right)_s, \\ \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{d}{dt}\right)_r.\end{aligned}$$

Дифференцируя уравнения (1) по переменному  $x$ , получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{dp_1}{dt}\right)_s &= -\alpha p_1^2 - \beta p_1 \cdot p_2 = -p_1[\alpha(p_1 - p_2) + p_2], \\ \left(\frac{dp_2}{dt}\right)_r &= -\alpha p_2^2 - \beta p_1 \cdot p_2 = -p_2[\alpha(p_2 - p_1) + p_1].\end{aligned}\quad (14)$$

Записывая уравнения (1) в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_s = \frac{\partial s}{\partial t} + (u - c)p_1 = 0; \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_r = \frac{\partial r}{\partial t} + (u + c)p_2 = 0,$$

легко устанавливаем формулы

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{1}{2c} \left(\frac{ds}{dt}\right)_r = -\frac{1}{2c} \left[\frac{d}{dt}(r - s)\right]_r = \\ &= \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{c} \left(\frac{dc}{dt}\right)_r = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_r, \\ p_2 &= -\frac{1}{2c} \left(\frac{dr}{dt}\right)_s = -\frac{1}{2c} \left[\frac{d}{dt}(r - s)\right]_s = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_s.\end{aligned}\quad (15)$$

С помощью формул (15) уравнения (14) приводятся к виду

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{p_1}{\rho}\right)_s = \alpha p_1 \left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right), \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{p_2}{\rho}\right)_r = \alpha p_2 \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}\right). \quad (16)$$

Обозначая

$$\frac{p_1}{\rho} = v_1, \quad \frac{p_2}{\rho} = v_2; \quad \alpha p_1 = \beta_1, \quad \alpha p_2 = \beta_2,$$

перепишем систему (16):

$$\left(\frac{dv_1}{dt}\right)_s = \beta_1(v_2 - v_1), \quad \left(\frac{dv_2}{dt}\right)_r = \beta_2(v_1 - v_2). \quad (17)$$

Если  $\gamma = -1$ , то  $\alpha = 0$ ,  $\beta_i = 0$ , система (17) интегрируется и из нее следует оценка

$$\frac{p_i(x, t)}{\rho(x, t)} \leq \max_x \left\{ \frac{p_i(x, 0)}{\rho(x, 0)} \right\} \leq \frac{P_0}{\rho_0}, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому далее считаем, что  $\gamma > -1$  ( $\alpha > 0$ ),

Пусть  $A(x, t)$  — произвольная точка полуплоскости  $t > 0$ . Через эту точку проведем две характеристики:  $s$ -характеристику I и  $r$ -характеристику II (рис. 2.10). Обозначим  $v_0 = \max\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$ , и пусть  $v_0 > 0$ . Докажем, что по крайней мере на одной из характеристик I и II найдется точка  $B(x', t')$ , в которой  $\max\{v_1(x', t'), v_2(x', t')\} \geq v_0$  и  $t' < t$ . Пусть, например,  $v_0 = v_1(x, t)$ . Тогда, интегрируя первое из уравнений (17) вдоль характеристики I от точки  $A(x, t)$  до произвольной точки  $B(x', t')$  характеристики I, получим соотношение

$$v_1(x', t') - v_0 = v_1(x', t') - v_1(x, t) = \int_t^{t'} \beta_1 (v_2 - v_0) e^{-\int_{\tau}^{t'} \beta_1 d\xi} d\tau. \quad (18)$$

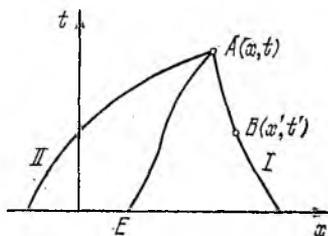


Рис. 2.10.

Возможны два случая:  $v_2(x, t) < v_0$  и  $v_2(x, t) = v_0$ . Если  $v_2(x, t) < v_0$ , то  $v_2(x', t') - v_0 < 0$  в некоторой окрестности точки  $(x, t)$ ;  $\beta_1 > 0$  вдоль всей характеристики I, так как  $v_0 > 0$ . Поэтому при  $t'$ , достаточно близких к  $t$  и  $t' < t$  интеграл в правой части равенства (18) будет положителен; это значит, что на характеристике I существует область  $0 \leq t - t' < \varepsilon$ , в которой  $v_1(x', t') - v_0 > 0$ , т. е.  $v_1(x', t') > v_0 = v_1(x, t)$ .

Во втором случае ( $v_2(x, t) = v_0$ ) точки, в которых  $\max\{v_1(x', t'), v_2(x', t')\} \geq v_0$  найдутся на любой из характеристик I и II. Покажем, что они есть на характеристике I. Для этого рассмотрим произвольную точку  $(x', t')$  на характеристике I при  $t' < t$ . Если  $v_1(x', t') - v_0 \geq 0$ , то требуемая точка и есть точка  $(x', t')$ , если же  $v_1(x', t') - v_0 < 0$ , то снова рассмотрим равенство (18). Левая часть равенства (18) отрицательна, нижний предел внешнего интеграла в (18) больше верхнего,  $\beta > 0$  на всей характеристике I, равно как и экспоненциальный множитель. Поэтому равенство (18) возможно лишь в том случае, если на характеристике I имеются интервалы, где  $v_2 - v_0 > 0$ . Это и означает, что на характеристике I обязательно существуют точки, в которых  $\max\{v_1(x', t'), v_2(x', t')\} \geq v_0$  и  $t' < t$ .

Из доказанного следует, что  $\max_x \max\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$  не возрастает с ростом времени  $t$ , и поэтому

$$\frac{p_i(x, t)}{\rho(x, t)} \leq \max_x \max \left\{ \frac{p_1(x, 0)}{\rho(x, 0)}, \frac{p_2(x, 0)}{\rho(x, 0)} \right\} \leq \frac{P_0}{\rho_0}, \quad (19)$$

где  $P_0$  и  $\rho_0$  заданы условиями (12), (13).

Наконец, отметим, что в оценку (19) не входят вторые производные от начальных функций, поэтому она остается справедливой для начальных функций, дифференцируемых только один раз. В этом случае следует считать, что уравнения (14), (15), (16), (17) выполняются в «широком смысле» (см. п. 1 § 7 гл. 1).

Так как  $u = (r + s)/2$ , то из (19) следует также односторонняя оценка производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leq \rho(x, t) \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (20)$$

Отметим, что оценки (19) и (20) являются точными: они достигаются в случае  $p_1(x, 0) = p_2(x, 0) = P_0$  и  $\rho(x, 0) = \rho_0$ . Записывая уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

в виде

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x},$$

закключаем, что, согласно (20),

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 \geq -\frac{P_0 \rho^2(x, t)}{\rho_0}, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}\right)_0 \leq \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (21)$$

Интегрируя неравенство (21) от произвольной точки  $A(x, t)$  до точки  $E$  начальной оси вдоль траектории  $AE$  (рис. 2.10), очевидно, получим

$$\frac{1}{\rho(x, t)} - \frac{1}{\rho_0(E)} \leq \frac{P_0 t}{\rho_0},$$

т. е.

$$\rho(x, t) \geq \frac{\rho_0(E) \rho_0}{\rho_0 + \rho_0(E) P_0 t} \geq \frac{\rho_0^2}{\rho_0 + R_0 P_0 t}. \quad (22)$$

Неравенство (22) показывает, что плотность  $\rho(x, t)$  не может обращаться в нуль, если начальные значения обладали ограниченной производной (очевидно, мы должны считать, что  $P_0 \geq 0$ ). Неравенства (20) и (22) доказывают теорему.

Неравенство (22) означает, что в указанных условиях при  $t \geq 0$  имеет место взаимно однозначное соответствие эйлеровых и лагранжевых координат.

Это обстоятельство физически истолковывается следующим образом. Газ, непрерывно заполняющий в момент времени  $t = 0$  все пространство с отличной от нуля плотностью, не может при своем движении «разорваться», т. е. образовать область вакуума, в которой  $\rho = 0$ , если только при  $t = 0$  отсутствуют скачки скорости  $u_0(x)$  такие, что  $u_0(x - 0) < u_0(x + 0)$ .

Этот факт имеет место также и в более общих случаях. Он справедлив, в частности, и для неизоэнтропических непрерывных течений и для неидеальных газов, а также и для разрывных решений (течений с ударными волнами).

Так как  $c = A\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ , то при  $\gamma > 1$  из (22) следует оценка снизу и для величины  $c(x, t)$ . Так как при  $\gamma > 1$   $c(x, t)$ , а следовательно, и  $\rho(x, t)$  ограничены сверху с помощью неравенств (11), то из (20) следует оценка производной

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \leq P_0 \left[ \frac{C_0}{c_0} + \frac{\gamma-1}{4} \frac{\Delta u_0}{c_0} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

Заметим, что при  $\gamma < 1$  неравенства (11) изменяются так, что вместе с (22) они ограничивают величину  $c(x, t)$  сверху и снизу.

Выше мы установили оценки для  $p_1, p_2$  сверху. Для оценки этих величин снизу, заметим, что из системы (14) следует, что если через  $P(t)$  обозначить величину

$$P(t) = \max_{-\infty < x < \infty} \{ |p_1(x, t)|, |p_2(x, t)| \},$$

то

$$\frac{dP(t)}{dt} \leq (|\alpha| + |\beta|) P^2(t).$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} P(t) &\leq \frac{P_0}{1 - (|\alpha| + |\beta|) t \cdot P_0}, \\ p_i(x, t) &\geq \frac{-P_0}{1 - (|\alpha| + |\beta|) t \cdot P_0}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Оценки (19) и (23) ограничивают производные решения сверху и снизу. Из (23) следует, что при  $t < 1/(|\alpha| + |\beta|)P_0$  производные остаются ограниченными и сверху и снизу. Таким образом, полоса  $0 \leq t \leq 1/(|\alpha| + |\beta|)P_0$  есть полоса, в которой заведомо существует классическое решение задачи Коши (1), (2).

Естественно, оценка (23) слишком груба. Так, например, если  $\frac{ds_0}{dx} \geq 0, \frac{dr_0}{dx} \geq 0$ , то  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ , как это следует из уравнений (14), и вследствие (19) классическое решение существует при всех  $t > 0$ .

Поясним наши общие замечания на примере течения полиатомного газа с показателем  $\gamma = 3$ . В этом случае  $\alpha = 1, \beta = 0$  и система уравнений (1) распадается на два отдельных уравнения:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Так как вдоль  $s$ -характеристики инвариант  $s$  постоянен, а наклон  $s$ -характеристики равен  $s$ , то эти характеристики — прямые линии.

Вдоль линии  $x = x_0 + s_0(x_0)t = x_s(t, x_0)$  имеем  $s(x, t) = s_0(x_0)$ ; аналогично  $r(x, t) = r_0(x_0)$  вдоль линии  $x = x_0 + r_0(x_0)t$ . Таким образом, решение задачи Коши для системы (24) задается неявно формулами

$$\begin{aligned} s(\xi + s_0(\xi)t; t) &= s_0(\xi), \\ r(\eta + r_0(\eta)t; t) &= r_0(\eta). \end{aligned}$$

Для явного задания решения  $s(x, t)$ ,  $r(x, t)$  необходимо разрешить зависимости

$$x = \xi + s_0(\xi)t, \quad x = \eta + r_0(\eta)t \quad (25)$$

относительно величин  $\xi$ ,  $\eta$ . Пусть из (25) мы их определили:

$$\xi = \xi(x, t), \quad \eta = \eta(x, t);$$

тогда

$$s(x, t) = s_0(\xi(x, t)), \quad r(x, t) = r_0(\eta(x, t)). \quad (26)$$

Геометрический смысл величин  $\xi(x, t)$ ,  $\eta(x, t)$  ясен из рис. 2.11.

Проверим выполнение некоторых из оценок, полученных выше. Дифференцируя соотношения (25) по переменному  $x$ , получим

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{1 + t \frac{ds_0}{dx}(\xi(x, t))}.$$

Следовательно, из (26) следует, что

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial x} = \left( \frac{\frac{ds_0(x_0)}{dx}}{1 + t \frac{ds_0}{dx}(x_0)} \right)_{x_0 = \xi(x, t)},$$

и мы видим, что оценка (23) в этом случае имеет место. Согласно рис. 2.11

$$r(x, t) - s(x, t) = \frac{\xi(x, t) - \eta(x, t)}{t} = r_0(\eta(x, t)) - s_0(\xi(x, t)). \quad (27)$$

Проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} r_0(\eta) - s_0(\xi) &= r_0(\eta) - s_0(\eta) + s_0(\eta) - s_0(\xi) = \\ &= 2c_0(\eta) + s_0(\eta) - s_0(\xi). \end{aligned} \quad (28)$$

Из (27), (28) поэтому следует

$$2c(x, t) \geq 2c_0(\eta) - P_0[\xi(x, t) - \eta(x, t)]. \quad (29)$$

Но из (27) имеем

$$\xi(x, t) - \eta(x, t) = 2c(x, t)t. \quad (30)$$

Комбинируя равенство (30) с неравенством (29), получаем

$$c(x, t) \geq \frac{c_0(\eta)}{1 + P_0 t} \geq \frac{\rho_0}{1 + P_0 t}. \quad (31)$$

Так как при  $\gamma = 3$   $\rho = c$ , то неравенство (31) — небольшое уточнение оценки (22). Аналогично для случая  $\gamma = 3$  легко проверяются все другие оценки, полученные выше.

В заключение этого пункта снова вернемся к случаю произвольного  $\gamma > -1$  и покажем, что вопрос о существовании или несуществовании в целом (т. е. при любом  $t > 0$ ) классического решения задачи Коши (1), (3) решается однозначно. Для этого преобразуем уравнения (14), умножая каждое из них на  $(r - s)^{-\frac{\beta}{\alpha - \beta}}$ . Учитывая, что

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_s = -(\alpha - \beta)(r - s)p_2; \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)_r = (\alpha - \beta)(r - s)p_1,$$

получаем из (14) уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \left[ p_1 (r - s)^{-\frac{\beta}{\alpha - \beta}} \right]\right)_s &= -\alpha p_1^2 (r - s)^{-\frac{\beta}{\alpha - \beta}}, \\ \left(\frac{d}{dt} \left[ p_2 (r - s)^{-\frac{\beta}{\alpha - \beta}} \right]\right)_r &= -\alpha p_2^2 (r - s)^{-\frac{\beta}{\alpha - \beta}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из формул (2.9.4) и (2.9.2) имеем

$$\rho = B(r - s)^{\frac{1}{\alpha - \beta}}, \quad (33)$$

поэтому уравнения (32) переписываются в виде

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\rho^\beta}{p_1}\right)_s = \alpha \rho^\beta; \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\rho^\beta}{p_2}\right)_r = \alpha \rho^\beta. \quad (34)$$

Мы уже говорили выше и это легко видеть из уравнений (32), что величины  $p_1$  и  $p_2$  сохраняют свой знак соответственно на  $s$ - и  $r$ -характеристиках. Поэтому, учитывая оценки (20) и (22), заключаем, что если  $p_1(x, 0) \geq 0$ ,  $p_2(x, 0) \geq 0$ , то классическое решение задачи Коши (1), (3) существует в целом, т. е. при любом  $t > 0$ .

Наоборот, если  $p_1(x, 0)$  или  $p_2(x, 0)$  имеют отрицательные значения, то в решении задачи Коши (1), (3) наступает графическая катастрофа.

В самом деле, пусть, например,  $p_1(x_0, 0) = p_1^0 < 0$ . Интегрируя первое уравнение (34) вдоль  $s$ -характеристики, проходящей через точку  $(x_0, 0)$ , получим

$$\frac{\rho^\beta(t)}{p_1(t)} - \frac{\rho_0^\beta(x_0)}{p_1^0} = \int_0^t \rho^\beta(\tau) d\tau$$

ИЛИ

$$p_1(t) = p_1^0 \frac{\rho^\beta(t)}{\rho_0^\beta(x_0) + p_1^0 \int_0^t \rho^\beta(\tau) d\tau}. \quad (35)$$

Здесь  $\rho(t)$ ,  $p_1(t)$  — значения функций  $\rho(x, t)$ ,  $p_1(x, t)$  вдоль рассматриваемой  $s$ -характеристики.

Интеграл, стоящий в знаменателе формулы (35), стремится к  $\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . В самом деле, если  $0 \leq \beta < 1$  ( $3 \geq \gamma > -1$ ), то, используя оценку плотности (22), имеем

$$\int_0^t \rho^\beta(\tau) d\tau \geq \int_0^t \frac{\rho_0^{2\beta} d\tau}{(\rho_0 + R_0 P_0 t)^\beta} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

а если  $\beta < 0$  ( $\gamma > 3$ ), то используем оценку (11), из которой следует, что  $\rho(\tau) \leq B \left[ C_0 + \frac{\gamma-1}{4} \Delta u_0 \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} = R$ . Тогда при  $\beta < 0$

$$\int_0^t \rho^\beta(\tau) d\tau \geq \int_0^t R^{-\beta} d\tau \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Поэтому при любом  $\gamma > -1$  знаменатель правой части (35) обращается в нуль при конечном значении  $t$  (так как  $p_1^0 < 0$ ) и производная  $p_1(x, t)$  обращается в бесконечность.

Итак, для того чтобы при  $\gamma > -1$  классическое решение задачи Коши (1), (3) с ограничениями (12), (13) существовало при всех  $t > 0$ , необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\frac{\partial s(x, 0)}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial r(x, 0)}{\partial x} \geq 0.$$

**2. Бегущие волны (волны Римана). Волны сжатия и разрежения.** Здесь мы рассмотрим некоторые простейшие изоэнтропические течения в случае плоской симметрии ( $v = 0$ ). При изучении бегущих волн практически безразлично, в каких переменных — эйлеровых или лагранжевых — вести рассмотрение. Мы воспользуемся здесь лагранжевыми. Тогда уравнения изоэнтропического течения записываются в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \xi(r-s) \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\partial s}{\partial t} - c\rho \frac{\partial s}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \xi(r-s) \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial r}{\partial t} + c\rho \frac{\partial r}{\partial q} = 0, \quad (2)$$

где инварианты Римана  $r, s$  связаны с  $u, V$  формулами

$$s = u + \int \frac{c}{V} dV = u + \int \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}} dV,$$

$$r = u - \int \frac{c}{V} dV = u - \int \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}} dV.$$

Для изоэнтропического потока  $p$  есть функция единственного переменного  $V$ .

Мы будем считать, что  $p = p(V)$  — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая, однако, условиям I, II:

$$\frac{dp}{dV} < 0, \quad \frac{d^2 p}{dV^2} > 0. \quad (3)$$

Тогда, обозначая

$$\varphi(V) = - \int \frac{c(V) dV}{V} = \frac{r-s}{2},$$

получим

$$\varphi'(V) = -\frac{c(V)}{V} < 0.$$

и

$$\xi'(r-s) = -\frac{1}{4} \frac{\frac{d^2 p}{dV^2}}{\frac{dp}{dV}} > 0.$$

Таким образом, из условий (3) следует, что  $\xi(r-s)$  — монотонно возрастающая функция разности  $r-s$ .

Изоэнтропическое течение, в котором постоянен один из инвариантов Римана, называется *волной Римана* или *бегущей волной*. Положим для определенности, что  $r = r_0 = \text{const}$ ; тогда уравнение (2) удовлетворяется тождественно, а уравнение (1)

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \xi(r_0 - s) \frac{\partial s}{\partial q} = 0, \quad (4)$$

служит для определения функции  $s(q, t)$ .

Характеристики — интегральные кривые уравнения

$$\frac{dq}{dt} = -\xi(r_0 - s(q, t)),$$

— очевидно, являются прямыми линиями в плоскости  $q, t$ , так как вдоль них постоянен инвариант  $s(q, t)$ . Отсюда следует, что вдоль этих прямых

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q - q_0}{t - t_0} = -\xi(r_0 - s(q, t)) \quad (5)$$

постоянны как  $s(q, t)$ , так и  $r = r_0$  и, следовательно, постоянны все гидродинамические величины  $V, \rho, p, c, u$ . Заметим сразу же, что  $s$ -характеристики будут прямыми также и в плоскости эйлеровых координат  $x, t$ .

Если в некоторой области  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$ , то характеристики (5) образуют расходящийся пучок прямых (рис. 2.12, а); если же  $\frac{\partial s}{\partial q} < 0$ , то — сходящийся пучок прямых (рис. 2.12, б). Так как

$$u = \frac{1}{2}(r + s) = \frac{1}{2}(r_0 + s),$$

то из  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$  следует  $\frac{\partial u}{\partial q} > 0$ . Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q}$$

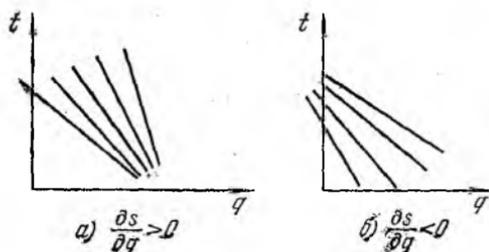


Рис. 2.12.

поэтому следует, что при  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$   $\frac{\partial V}{\partial t} > 0$  и плот-

ность  $\rho$  убывает при возрастании времени  $t$ . Поэтому волна Римана, в которой  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$ , называется *волной разрежения*, а волна Римана, в которой  $\frac{\partial s}{\partial q} < 0$ , — *волной сжатия*.

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда  $s = s_0 = \text{const}$ . В этом случае также при  $\frac{\partial r}{\partial q} < 0$  имеем волну сжатия, а при  $\frac{\partial r}{\partial q} > 0$  — волну разрежения. Таким образом, общий признак волны сжатия  $\frac{\partial u}{\partial q} < 0$  или, что то же,  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$  приводит к условиям  $\frac{\partial s}{\partial q} < 0$  для  $s$ -волны ( $r = r_0$ ) и  $\frac{\partial r}{\partial q} < 0$  для  $r$ -волны ( $s = s_0$ ) Римана.

Для газа Чаплыгина  $p = AV + p_0$ ,  $\frac{d^2 p}{dV^2} = 0$  и  $\xi = \sqrt{-A}$  — постоянная величина. Наклон характеристик в этом случае фиксирован и поэтому все  $s$ -характеристики параллельны друг другу, равно как и  $r$ -характеристики.

Тем не менее условие  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$  снова выделяет область разрежения в волне Римана  $r = r_0$ .

Волна Римана ( $r = r_0$ ) называется *центрированной*, если  $s$ -характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки  $(q_0, t_0)$  (рис. 2.13). Так как инвариант  $s(q, t)$  постоянен

идоль  $s$ -характеристик, то отсюда следует, что в центрированной волне Римана

$$s = s \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right), \quad r = r_0$$

либо

$$r = r \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right), \quad s = s_0.$$

Автомоделными называются решения, зависящие лишь от переменной  $y = \frac{q - q_0}{t - t_0}$ .

Покажем, что центрированные волны Римана дают все автомоделные решения уравнений газовой динамики.

Записывая уравнения (2.5.4) — (2.5.6) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (v = 0) \quad (6)$$

и считая, что величины  $V, u, p, S$  зависят лишь от  $y = \frac{q - q_0}{t - t_0}$ , совершим замену по формулам

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \frac{y}{t - t_0} \frac{d}{dy},$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{t - t_0} \frac{d}{dy},$$

после чего придем к уравнениям:

$$y \frac{dV}{dy} + \frac{du}{dy} = 0,$$

$$y \frac{du}{dy} - \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\frac{dS}{dy} = 0.$$

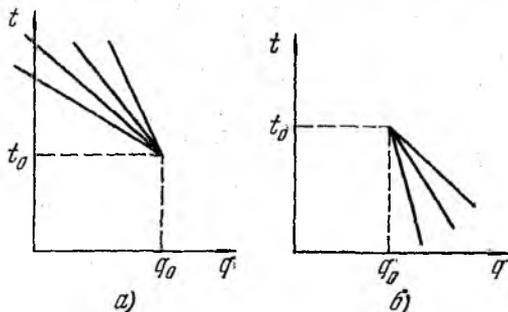


Рис. 2.13.

Из последнего уравнения следует, что  $S = S_0 = \text{const}$ , и автомоделное течение есть, следовательно, изэнтропическое течение.

Переходя в оставшихся двух уравнениях к инвариантам Римана, запишем их в виде

$$[y + \xi(r - s)] \frac{ds}{dy} = 0, \quad [y - \xi(r - s)] \frac{dr}{dy} = 0.$$

Если  $y \neq -\xi(r - s)$ , то  $\frac{ds}{dy} = 0$  и  $s = s_0$ . Так как  $\xi(r - s) > 0$ , то при  $y = -\xi(r - s)$  имеем  $r = r_0 = \text{const}$ . Итак, для автомоделного решения есть лишь две возможности: либо

$$s = s_0 = \text{const}, \quad y = \xi(r - s_0), \quad (7)$$

либо

$$r = r_0 = \text{const}, \quad y = -\xi(r_0 - s), \quad (8)$$

и, следовательно, всякое автомодельное решение уравнений (6) есть волна Римана.

Так как  $\xi'(r-s) > 0$ , то, дифференцируя равенства (7), (8) по переменному  $q$ , заключаем, что всякое автомодельное решение при  $t < t_0$  есть волна сжатия, а при  $t > t_0$  — волна разрежения.

Итак, если мы рассматриваем полуплоскость  $t \geq 0$ , то в ней всякое автомодельное решение, зависящее от переменного  $y = q/t$  ( $q_0 = t_0 = 0$ ), есть волна разрежения Римана.

В эйлеровых переменных центрированная волна Римана задается условиями

$$s = s_0 = \text{const}, \quad y = \frac{x - x_0}{t - t_0} = u + c$$

либо

$$r = r_0 = \text{const}, \quad y = \frac{x - x_0}{t - t_0} = u - c.$$

Рассмотрим некоторые соотношения, имеющие место для произвольной волны Римана в случае политропного газа.

Для политропного газа

$$s = u - \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad r = u + \frac{2}{\gamma - 1} c.$$

Пусть в волне Римана  $r = r_0 = \text{const}$ , и пусть  $u_0, c_0$  — значения скорости и скорости звука в некоторой точке волны Римана. Тогда

$$u_0 + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 = u + \frac{2}{\gamma - 1} c,$$

или

$$c = c_0 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u - u_0}{c_0} \right). \quad (9)$$

Так как  $p = \frac{1}{\gamma} A^{-\frac{2}{\gamma-1}} c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ , то из (9) имеем связь давления  $p$  и скорости  $u$  в  $s$ -волне Римана

$$p = p_0 \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u - u_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (r = r_0 = \text{const}). \quad (10)$$

Аналогично в  $r$ -волне Римана

$$p = p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u - u_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (s = s_0 = \text{const}). \quad (11)$$

Наконец, отметим еще одно важное свойство волны Римана.

*Всякое непрерывное течение, примыкающее к зоне постоянного течения, есть волна Римана.*

В самом деле, пусть течение непрерывно и постоянно слева от линии  $AB$  (рис. 2.14). Значит, линия  $AB$  есть линия, через которую не единственным образом продолжается решение системы уравнений газовой динамики, и, следовательно, линия  $AB$  — характеристика. Так как течение слева от  $AB$  постоянно, то  $AB$  — прямая.

Пусть, например,  $AB$  есть  $s$ -характеристика, тогда справа от  $AB$   $r = r_0$  и течение справа от  $AB$  есть  $s$ -волна Римана.

**3. Профили в волне Римана. Градиентная катастрофа.** Рассмотрим поведение гидродинамических величин в бегущих волнах сжатия и разрежения. Пусть, например,  $r = r_0 = \text{const}$  и  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$ , т. е. мы рассматриваем случай  $s$ -волны разрежения.

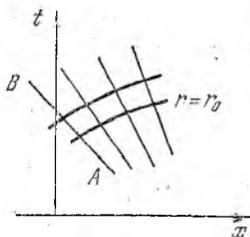


Рис. 2.14.

Как мы видели выше, в этом случае  $\frac{\partial u}{\partial q} > 0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t} > 0$ . Так как  $\xi^2(r - s) = -\frac{dp}{dV}$ ,  $\frac{d^2p}{dV^2} > 0$ , то с увеличением величины  $\xi$  убывает  $V$  и, следовательно, растет  $s$ . Так как, кроме того,

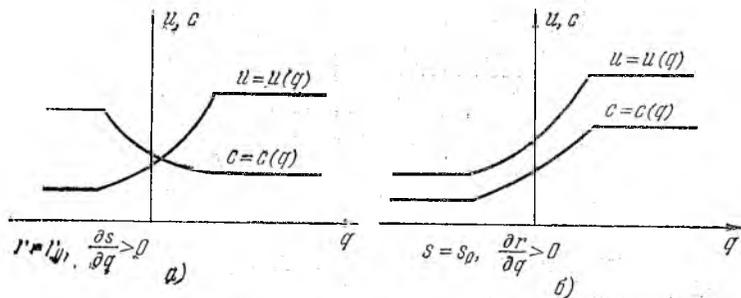


Рис. 2.15.

$\xi'(r - s) > 0$ , то из условия  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$ ,  $r = r_0 = \text{const}$  следует, что  $\frac{\partial V}{\partial q} > 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial q} < 0$ ,  $\frac{\partial c}{\partial q} < 0$ . Итак, профили скорости  $u$  и скорости звука  $c$  в  $s$ -волне разрежения ( $r = \text{const}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial q} > 0$ ) имеют вид, приведенный на рис. 2.15, а.

Аналогично получаем профили в случае  $r$ -волны разрежения (рис. 2.15, б).

На рис. 2.16, а, б приведены профили гидродинамических величин в случае волны сжатия.

Итак, в волне разрежения  $\frac{\partial u}{\partial q} > 0$ , в волне сжатия  $\frac{\partial u}{\partial q} < 0$ . Волна  $r = \text{const}$  отличается от волны  $s = \text{const}$  знаком величины  $\frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial c}{\partial q}$ : при  $r = r_0$   $\frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial c}{\partial q} < 0$ , при  $s = s_0$   $\frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial c}{\partial q} > 0$ .

Заметим, что знак  $du \, dc$  совпадает со знаком  $du \, dp$ . Поэтому в плоскости переменных  $p, u$  ( $p, u$ -диаграмма) семейство состояний в  $s$ -волне Римана описывается кривой (3.2.10), имеющей

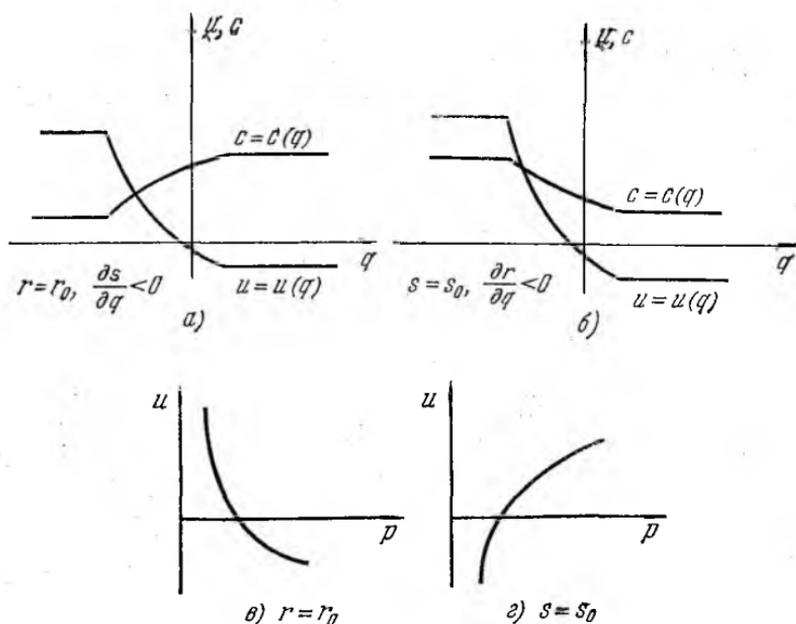


Рис. 2.16.

вид, изображенный на рис. 2.16, в. Аналогично для  $r$ -волны  $du \, dp > 0$  (рис. 2.16, з).

Рассмотрим изменение во времени профилей гидродинамических величин.

Так как решение постоянно в бегущей волне вдоль прямых и эти прямые расходятся при возрастании  $t$  в волне разрежения, то в волне разрежения градиенты всех гидродинамических величин убывают по абсолютной величине с ростом времени  $t$ .

Наоборот, в волне сжатия характеристики соответствующего семейства сходятся с ростом времени  $t$  и градиенты всех гидродинамических величин возрастают по абсолютной величине. На рис. 2.17, а, б показано изменение профиля  $s = s(q, t)$  с ростом  $t$  в волнах сжатия и разрежения в случае  $r = r_0 = \text{const}$ .

Характеристики в волне сжатия пересекаются при некотором конечном значении  $t = t_0$ . В точке пересечения характеристик

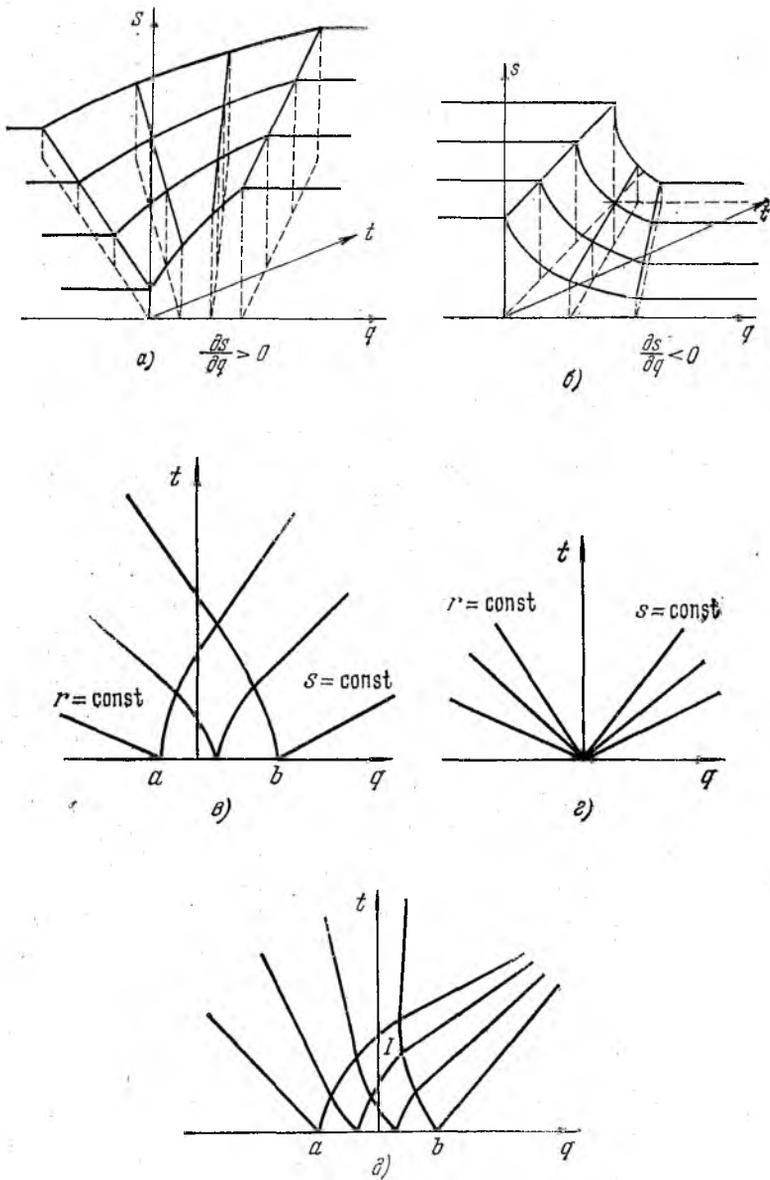


Рис 2.17.

производные гидродинамических величин становятся неограниченными.

Нетрудно вычислить момент образования неограниченных производных. Пусть  $r = r_0$ , а  $s(q, 0) = s_0(q)$ . Тогда, согласно (3.2.5), две  $s$ -характеристики, выходящие из точек  $q = q_1^0$  и  $q = q_2^0$  начальной оси  $t = 0$ , пересекаются в момент  $t_n$ :

$$t_n = \frac{q_2^0 - q_1^0}{\xi_1(r_0 - s_0(q_1^0)) - \xi(r_0 - s_0(q_2^0))}. \quad (1)$$

В случае, если  $s_0(q)$  дифференцируема, получаем наименьшее значение времени  $t$ , при котором пересекаются  $s$ -характеристики:

$$t_{\min} = \frac{1}{\max_q \left[ -\frac{\partial \xi(r_0 - s_0(q))}{\partial q} \right]}. \quad (2)$$

Формула (2) имеет смысл лишь в том случае, если  $\max_q \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial q} \right] > 0$ . Если  $t_{\min} \leq 0$ , то  $s$ -характеристики не пересекаются при  $t > 0$  и производные в волне Римана остаются ограниченными.

Итак, во всякой бегущей волне сжатия градиенты возрастают и за конечное время становятся неограниченными. Это явление называют *градиентной катастрофой*.

При  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} > 0$  градиентная катастрофа наступает в бегущей волне сжатия, при  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} < 0$  — в бегущей волне разрежения. Таким образом, при  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} > 0$  образуется ударная волна сжатия, при  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} < 0$  — ударная волна разрежения (см. § 4).

При  $t > t_{\min} > 0$  не существует непрерывного решения: решение становится разрывным.

Рассмотрим более сложный вид течения — *течение с локальными начальными данными*.

Будем говорить, что начальные данные локальны, если начальные функции  $r_0(q)$ ,  $s_0(q)$  переменны лишь на конечном отрезке  $a \leq q \leq b$  оси  $t = 0$ , т. е.

$$r_0(q) = \begin{cases} r^- & \text{при } q < a, \\ r^+ & \text{при } q > b, \end{cases} \quad s_0(q) = \begin{cases} s^- & \text{при } q < a, \\ s^+ & \text{при } q > b. \end{cases} \quad (3)$$

Возникающее при начальных условиях (3) течение не описывается бегущими волнами Римана. Однако в некоторых случаях это течение при достаточно большом  $t > 0$  может состоять лишь из бегущих волн.

Если, например,  $r'_0(q) \geq 0$ ,  $s'_0(q) \geq 0$ , то решение обладает ограниченными производными при любом  $t \geq 0$ , как это следует из оценок (см. п. 1). Значения инварианта  $s$  переносятся вдоль  $s$ -характеристик, которые имеют скорость  $-\rho c < 0$ ; значения инварианта  $r$  переносятся вдоль  $r$ -характеристик, имеющих скорость  $\rho c > 0$ . Поэтому при некотором  $t_1 > 0$  зоны переменности инвариантов  $r$  и  $s$  разойдутся и решение будет состоять из двух бегущих волн разрежения, разделенных зоной постоянного течения (рис. 2.17, в).

Если теперь стремиться  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ , т. е. переходить к задаче с кусочно-постоянными начальными данными, то решение  $r(q, t)$ ,  $s(q, t)$  будет, очевидно, стремиться к автомодельному решению, состоящему из двух центрированных волн разрежения (рис. 2.17, з).

Задача Коши с кусочно-постоянными начальными данными

$$r_0(q) = \begin{cases} r^-, & q < 0, \\ r^+, & q > 0, \end{cases} \quad s_0(q) = \begin{cases} s^-, & q < 0, \\ r^+, & q > 0 \end{cases} \quad (4)$$

начинается задачей о распаде произвольного разрыва и изучается подробно в § 6 этой главы.

Проведенный выше анализ позволяет утверждать, что если  $s^- \leq s^+$ ,  $r^- \leq r^+$ , то задача о распаде имеет непрерывное при  $t \rightarrow 0$  решение, состоящее из двух центрированных волн разрежения (рис. 2.17, з).

Аналогичный подход к рассмотрению задачи о распаде разрыва как предельной задачи с локальными начальными данными позволяет предсказать качественное поведение решения и при отказе от неравенств  $r^- \leq r^+$ ,  $s^- \leq s^+$ . Если, например,  $r^- > r^+$ , то после взаимодействия бегущих волн (зона I) вправо будет распространяться  $r$ -волна сжатия (рис. 2.17, д). Как мы видели выше, градиенты в волнах сжатия возрастают неограниченно. Это приводит к разрыву решения. В решении появляются ударные волны.

Исходя из этого, можно утверждать, что если  $s^- > s^+$  либо  $r^- > r^+$ , то в решении задачи о распаде обязательно возникают ударные волны.

**4. Задача о поршне. Истечение газа в вакуум.** Бегущие волны находят многочисленные применения в ряде простейших задач, а также при качественном исследовании порой весьма сложных течений. Мы рассмотрим здесь несколько простых задач, решение которых описывается с помощью бегущих волн.

Пусть газ находится с одной стороны (справа) от жесткой стенки (поршня), которая начиная с начального момента времени  $t = 0$  двигается по определенному закону.

Будем считать, что в начальный момент газ покоился и обладал постоянной плотностью, давлением и энтропией, т. е. будем считать, что

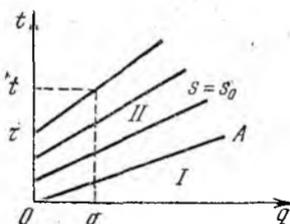
$$u(q, 0) = 0, \quad p(q, 0) = p_0, \quad \rho(q, 0) = \rho_0, \quad S(q, 0) = S_0. \quad (1)$$

Для газа считаем заданным уравнение состояния, удовлетворяющее условиям I, II:

$$\frac{\partial p}{\partial V} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} > 0, \quad p(\infty, S) = 0. \quad (2)$$

Поршень находится на границе газа, координату  $q$  которой мы будем считать равной нулю. Закон движения поршня выражает зависимость

$$u(0, t) = U(t), \quad (3)$$



где  $U(t)$  — скорость поршня, заданная как функция времени  $t$ , а  $u(q, t)$  — скорость газа\*). Будем считать, что  $U(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$U(0) = 0. \quad (4)$$

Рис. 2.18.

Вначале рассмотрим случай, когда  $U'(t) \leq 0$ . Построение решения этой задачи сводится к нахождению решения уравнений изэнтропического течения, удовлетворяющего начальным условиям (1) и краевому условию (3). В инвариантах Римана задача сводится к нахождению решения уравнений

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \xi(r-s) \frac{\partial s}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \xi(r-s) \frac{\partial r}{\partial q} = 0, \quad (5)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$s(q, 0) = -r(q, 0) = -\varphi(V_0), \quad V_0 = \frac{1}{\rho_0}, \quad (6)$$

и краевому условию, заданному на прямой  $q=0$ :

$$s(0, t) + r(0, t) = 2U(t). \quad (7)$$

Зона I (рис. 2.18), ограниченная слева характеристикой  $OA$  ( $q = c_0 \rho_0 t$ ), есть, очевидно, зона постоянства течений, т. е. в зоне I

$$s = s_0, \quad r = r_0 = -s_0, \quad u = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad c = c_0. \quad (8)$$

Зона II непостоянного течения граничит по  $r$ -характеристике  $OA$  с зоной постоянного течения. Следовательно, течение в зоне II есть волна Римана. Как это видно из рис. 2.18, в зоне II по-

\*) Равенство (3) имеет место лишь в том случае, когда газ не отрывается от поршня.

становится инвариант Римана  $s(q, t)$ , значения которого переносятся в зону II вдоль  $s$ -характеристик с начальной оси  $t = 0$ .

Итак, в зоне II

$$s(q, t) = s_0 = \text{const},$$

и нам остается интегрировать лишь второе уравнение системы (5):

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \xi(r - s_0) \frac{\partial r}{\partial q} = 0. \quad (9)$$

Если  $t$ -характеристика пересекает<sup>\*)</sup> ось  $q = 0$  в точке  $\tau > 0$ , то в этой точке  $s(0, \tau) = s_0$  и из (7) мы определяем  $r(0, \tau)$ :

$$r(0, \tau) = 2U(\tau) - s_0 = 2U(\tau) + \varphi(V_0). \quad (10)$$

В зоне II волны Римана инвариант  $r(q, t)$  постоянен вдоль  $r$ -характеристик, которые являются прямыми:

$$\frac{q}{t - \tau} = \xi(r(0, \tau) - s_0) = \xi(r(q, t) - s_0). \quad (11)$$

Вдоль прямой (11)  $r(q, t) = r(0, \tau)$ , где  $r(0, \tau)$  задано формулой (10). Формула (11) задает решение  $r = r(q, t)$  параметрически с помощью параметра  $\tau$  — ординаты точки пересечения характеристики (11) с осью  $q = 0$ . Из (11) следует, что если  $U'(t) < 0$ , то в зоне II  $\frac{\partial r(q, t)}{\partial q} > 0$ , т. е. движение в зоне II есть волна разрежения и картина характеристик имеет вид, указанный на рис. 2.18. При разрешении граничного условия (7) предполагалось, что  $s$ -характеристики, выходящие из луча  $q > 0$  начальной оси, пересекают линию  $q = 0$  при  $t > 0$ .

Согласно своему физическому смыслу величина

$$c \geq 0, \quad (12)$$

поэтому формула (10) имеет смысл лишь при выполнении неравенства

$$c = \psi(2U(t) - 2s_0) = \psi(2U(t) + 2\varphi(V_0)) \geq 0. \quad (13)$$

Согласно (2)  $\psi(r - s)$  — монотонно возрастающая функция. Поэтому неравенство (13), вообще говоря, ограничивает снизу скорость поршня  $U(t)$ , для которой может быть удовлетворено красное условие (3), т. е. ограничивает снизу скорость газа на линии  $q = 0$ .

При достаточно малых по модулю  $U(t) < 0$  неравенство (13), очевидно, заведомо выполнено, так как при  $U(t) = 0$ .

$$\psi(2\varphi(V_0)) = \psi(r_0 - s_0) = c_0 > 0.$$

\*) Как мы увидим ниже, при достаточно больших по модулю  $U(t) < 0$  это не так, т. е.  $r$ -характеристики не пересекают ось  $q = 0$ .

Пусть при каком-либо  $t = t_1$  неравенство (13) превращается в равенство и при  $t > t_1$   $U(t) < U(t_1)$ . Тогда при  $t > t_1$  краевое условие (3) теряет смысл.

В этом случае поршень отрывается от газа, и между поршнем и газом возникает область вакуума. Формула (11) параметрически определяет решение  $r(q, t)$  во всей зоне II при параметре  $\tau$  из отрезка  $0 \leq \tau \leq t_1$ .

Заметим, что из предположений (2) следует, что если  $\sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}} = \xi(r-s) = c\rho = 0$ , то  $\rho = 0$ , и поэтому граница  $q = 0$  при  $t > t_1$  может рассматриваться как свободная граница газа, т. е. граница газа с вакуумом, в котором  $\rho = 0$ ,  $p = 0$ . Неудобство лагранжевых координат проявляется в этом случае в том, что в плоскости  $q, t$  граница газа  $q = 0$  совпадает с положением поршня, так как в области между ними  $\rho = \frac{1}{V} = 0$ .

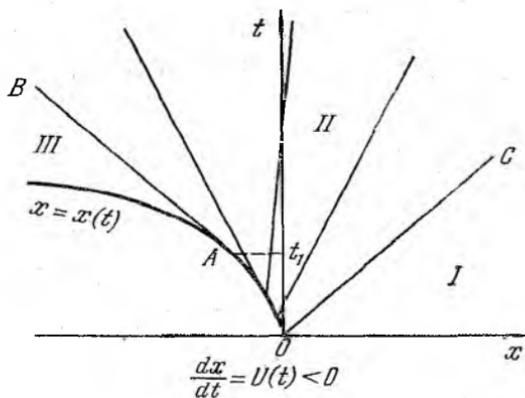


Рис. 2.19

рис. 2.19 приведена картина  $r$ -характеристик в случае отрыва газа от поршня в эйлеровых координатах.

В зоне I мы имеем по-прежнему покоящийся газ, зона II, ограниченная  $r$ -характеристиками  $OC$  и  $AB$ , — зона волны разрежения, зона III (между траекторией поршня  $x = x(t)$  и характеристикой  $AB$ ) — зона вакуума. В точке  $A$  ( $t = t_1$ ) происходит отрыв газа от поршня. Заметим, что, очевидно, прямая  $AB$ , являющаяся границей между газом и вакуумом, есть одновременно  $r$ - и  $s$ -характеристика. Для политропного газа  $\psi(V) = \frac{2}{\gamma-1} c$ ,  $\psi(r-s) = c = \frac{\gamma-1}{4} (r-s)$ ; поэтому условие (13) записывается при  $\gamma > 1$  в виде

$$\left[ U(t) + \frac{2}{\gamma-1} c_0 \right] \geq 0, \quad (14)$$

т. е.

$$U(t) \geq -\frac{2}{\gamma-1} c_0. \quad (15)$$

Итак, при  $U(t) < -\frac{2}{\gamma-1} c_0$  наступает отрыв газа от поршня. Заметим, что если изотермический газ рассматривать формально как газ, для которого  $\gamma = 1$ , то из (15) следует, что отрыв изотермического газа от поршня вообще не происходит, так как величина  $\frac{2}{\gamma-1} c_0 \rightarrow \infty$  при  $\gamma \rightarrow 1$ . Этот же вывод может быть получен и из формулы для  $\rho$ , так как

$$\rho = \exp \left\{ \frac{r-s}{2c_T} \right\} > 0, \quad \text{где } c_T = \sqrt{RT} = \text{const.}$$

Почти так же решается другая физическая задача о поршне, когда задана не скорость поршня, а давление на поршне. Это приводит к краевому условию в лагранжевых переменных:

$$p(0, t) = p_0(t). \tag{16}$$

Будем считать, что в условиях предыдущей задачи  $U(t)$  монотонно уменьшается на отрезке  $0 \leq t \leq t_1$ , а при  $t \geq t_1$

$$U(t) = U_0 = \text{const.}$$

Картина характеристик в плоскости  $q, t$  приведена для этого случая на рис. 2.20, а. Мы видим, что если  $U_0 \geq -\frac{2}{\gamma-1} c_0$ , то в зоне III течение постоянно.

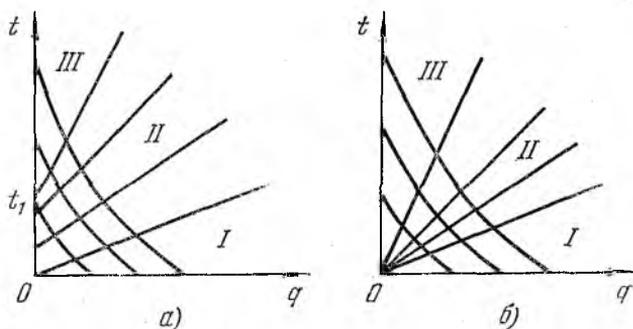


Рис. 2.20.

Если теперь стремить величину  $t_1$  к нулю, то в пределе при  $t_1 \rightarrow 0$  мы получим автомодельное решение, картина характеристик для которого приведена на рис. 2.20, б. Это автомодельное решение соответствует задаче с поршнем, выдвигающимся из газа с постоянной скоростью  $U_0 \geq -\frac{2}{\gamma-1} c_0$ . В случае  $U_0 < -\frac{2}{\gamma-1} c_0$  зона III исчезает, уступая место волне разрежения,

т. е. зона II в этом случае вытесняет зону III. При  $U_0 < -\frac{2}{\gamma-1}c_0$  на границе  $q=0$  соблюдается условие  $\rho=0$ , а газ не контактирует с поршнем, т. е. они разделены областью вакуума.

Это автомодельное решение дает решение другой задачи, называемой задачей об истечении газа в вакуум. В этой задаче мы можем считать, что в начальный момент времени  $t=0$  убирается стенка, ограничивавшая газ слева (в точке  $q=0$ ).

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$U'(t) \geq 0, \quad U(0) = 0. \quad (17)$$

Краевому условию (7) теперь всегда можно удовлетворить, так как при  $U(t) > 0$  всегда выполнено неравенство (13). Легко видеть, что при  $U(t) > 0$   $\frac{\partial r(q, t)}{\partial q} < 0$  и течение в зоне II есть, следовательно, волна сжатия.

На рис. 2.21 приведена картина ха-

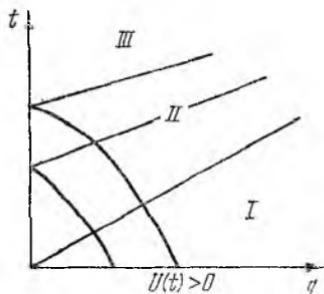


Рис. 2.21.

рактеристик в плоскости  $q, t$ . Так как  $r$ -характеристики пересекаются при  $t > 0$ , то классическое решение задачи о поршне для случая  $U(t) > 0$  существует лишь ограниченное время.

После пересечения двух характеристик решение задачи о поршне становится разрывным.

Вообще заметим, что если рассматривать произвольный закон движения поршня  $u = U(t)$  и если  $U'(t) > 0$  при некоторых  $t$ , то в решении этой задачи обязательно возникают разрывы. Таким образом, полное решение задачи о поршне в этих случаях описывается разрывными решениями уравнений газовой динамики, содержащими ударные волны. Свойства ударных волн мы будем изучать в § 4.

Заметим также еще, что если считать, что поршень начинает двигаться в сторону газа с конечной скоростью  $U(0) > 0$ , то решение разрывно при всех  $t > 0$ . Поэтому в этом случае бессмысленно рассматривать изоэнтропическую задачу.

**5. Задача с двумя поршнями. Отражение и преломление бегущей волны на контактной границе.** Качественное изучение простейших течений мы продолжим на примере этих двух задач, в которых приходится рассматривать взаимодействие двух волн Римана.

Как мы уже отметили в п. 1, в случае политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 3$  характеристиками являются прямые линии в плоскости эйлеровых координат  $x, t$ , вдоль которых

постоянен соответствующий инвариант Римана. Это обстоятельство позволяет получить решение задачи Коши, а также и любой корректно поставленной краевой задачи в случае, если в решении не образуются ударные волны. Пусть политропный газ с показателем  $\gamma = 3$  в начальный момент времени  $t = 0$  находится в состоянии покоя ( $u = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $p = p_0$ ,  $S = S_0$ ), ограничен с двух сторон поршнями, траектории движения которых заданы:  $x = x_1(t)$ ,  $x = x_2(t)$  (рис. 2.22). Мы применим теперь эйлеровы координаты  $x$ ,  $t$ .

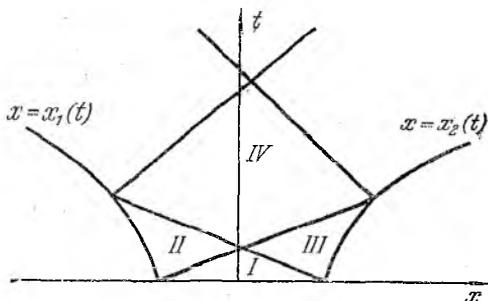


Рис. 2.22.

Очевидно, что в зоне I имеем постоянное течение, совпадающее с начальным, в зонах II и III — волны Римана, а зона IV — зона интерференции волн Римана.

Рассмотрим качественно другую простейшую задачу: взаимодействие волн Римана с контактной границей, т. е. с границей двух различных газов (либо одинаковых газов разной плотности). Для простоты будем считать оба газа политропными: газ слева от границы  $x = x_0$  (рис. 2.23) имеет показатель адиабаты  $\gamma = \gamma_1$ , газ справа — показатель  $\gamma = \gamma_2$ , т. е. считаем, что слева от  $x = x_0$ ,  $p = A_1 \rho^{\gamma_1}$ , справа  $p = A_2 \rho^{\gamma_2}$ . Легко понять, что если соседствуют два газа, то граница между ними является траекторией, и поэтому на границе двух газов должны выполняться условия

$$u_- = u_+, \quad p_- = p_+, \quad (1)$$

где  $u_-$ ,  $p_-$ ,  $u_+$ ,  $p_+$  — соответственно скорость и давление в газах слева и справа от контактной границы.

Как будет показано в § 4, эти уравнения следуют из законов сохранения массы, импульса и энергии.

Обозначая инварианты Римана  $s$ ,  $r$  слева и справа от контактной границы соответственно через  $s_1$ ,  $r_1$ ;  $s_2$ ,  $r_2$ , заключаем, что непрерывность скорости на контактной границе, требуемая первым из условий (1), записывается равенством

$$s_1 + r_1 = s_2 + r_2 = 2U(t), \quad (2)$$

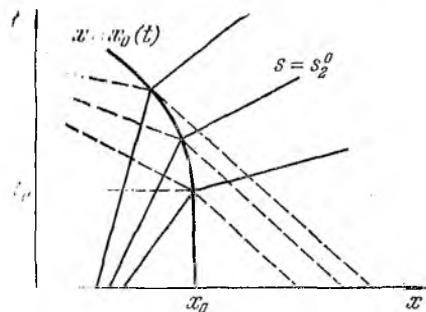


Рис. 2.23.

где  $U(t)$  — скорость контактной границы. Рассмотрим некоторую точку  $(x_0(t), t)$  на контактной границе (рис. 2.23) после прихода на нее  $r$ -волны Римана со стороны левого газа. Так как  $s$ -характеристики приносят на контактную границу  $x = x_0(t)$  в газе II постоянные значения инварианта  $s = s_2 = s_2^0$ , то движение справа от контактной границы есть, очевидно,  $r$ -волна Римана ( $s = s_2^0 = \text{const}$ ). Поэтому, согласно формуле (3.2.11), давление на контактной границе определяется зависимостью

$$p_2 = p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} \frac{U(t)}{c_2^0} \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}, \quad (3)$$

где  $p_0$  — начальное давление в газах I, II,  $c_2^0$  — начальная скорость звука в газе II (начальная скорость в газах I, II равна нулю).

Вычислим давление  $p_1$  в газе I. Так как

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{c_1}{c_1^0} \right)^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}},$$

где  $c_1^0$  — значение скорости звука в газе I в начальный момент времени, а  $c_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{4} (r_1 - s_1)$ , то

$$p_1 = p_0 \left[ \frac{\gamma_1 - 1}{4} \frac{r_1 - s_1}{c_1^0} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}}. \quad (4)$$

Исключая отсюда с помощью (2) величину  $s_1$ , получим формулу

$$p_1 = p_0 \left[ \frac{r_1}{r_1^0} - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U(t)}{c_1^0} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}}, \quad (5)$$

где  $r_1^0 = \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1^0$  — значение инварианта  $r$  в зоне постоянного течения газа I перед  $r$ -волной Римана (мы предполагаем здесь, что  $U(0) = 0$ ). Приравняв давления  $p_1$ ,  $p_2$ , получим уравнение

$$\left[ \frac{r_1}{r_1^0} - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U(t)}{c_1^0} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = \left[ 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} \frac{U(t)}{c_2^0} \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}. \quad (6)$$

Если считать, что  $r_1 = r_1(t)$  — известная функция, то отсюда можно определить  $U(t)$ . На самом деле, величина  $r_1(t)$  неизвестна, так как взаимодействие двух волн Римана слева от контактной границы (рис. 2.23) приводит к искривлению  $r$ -характеристик. Однако можно провести качественное исследование зависимости  $U(t)$  от  $r_1(t)$  и изучить качественно характер течения.

Пусть, например, на контактную границу падает  $r$ -волна разрежения. Тогда, как легко видеть из рис. 2.23,  $r_1(t)$  — монотонно убывающая функция переменного  $t$  ( $\frac{dr_1(t)}{dt} < 0$ ). При  $t = t_0$  (рис. 2.23)  $r_1(t_0) = r_1^0$ , поэтому из (6) следует, что  $U(t_0) = 0$ . Так как мы считаем, что  $\gamma_1, \gamma_2 > 1$ , то левая часть в равенстве (6) убывает с ростом  $U(t)$ , правая, напротив, монотонно возрастает. Отсюда следует, что если  $r_1(t)$  — монотонно убывающая функция переменного  $t$ , то  $U(t) < 0$  и  $U(t)$  также монотонно убывает.

Значит, течение в газе II можно рассматривать как движение, вызванное выдвиганием поршня со скоростью  $U(t) < 0$ . Поэтому  $r$ -волна Римана в газе II есть волна разрежения. Совершенно аналогично можно установить, что если падающая волна есть волна сжатия, то  $U'(t) > 0$  и в газ II распространяется  $r$ -волна сжатия.

Несколько сложнее устанавливается характер отраженной от контактной границы  $s$ -волны, т. е. знак  $\frac{ds_1(t)}{dt}$ . Дифференцируя равенство (2) по переменному  $t$ , получаем

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 2U'(t) - \frac{dr_1(t)}{dt}. \quad (7)$$

Отсюда заключаем, что если  $2U'(t) > \frac{dr_1(t)}{dt}$ , то отраженная волна есть волна разрежения, в противном случае — волна сжатия. Для простоты мы рассмотрим лишь случай одинаковых газов ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ), энтропия которых различна, т. е.  $c_1^0 \neq c_2^0$ . Тогда уравнение (6) переписывается в виде

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{r_1(t) - U(t)}{c_1^0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U(t)}{c_2^0} \quad (8)$$

и

$$U(t) = \frac{r_1(t) - \frac{2}{\gamma - 1} c_1^0}{1 + c_1^0/c_2^0} \quad \text{и} \quad U'(t) = \frac{1}{1 + c_1^0/c_2^0} r_1'(t).$$

Отсюда мы заключаем, что если  $c_1^0/c_2^0 < 1$ , то величина  $\frac{ds_1(t)}{dt}$  имеет знак  $\frac{dr_1(t)}{dt}$ ; если же  $c_1^0/c_2^0 > 1$ , то знаки  $\frac{ds_1(t)}{dt}$  и  $\frac{dr_1(t)}{dt}$  противоположны.

Для одного и того же газа ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ) неравенство  $c_1^0 < c_2^0$  означает, что плотность  $\rho_1^0$  газа I больше плотности  $\rho_2^0$  газа II, так как  $\rho = \frac{c^2 \rho}{\gamma}$ . Поэтому мы можем сформулировать полученный результат следующим образом:

От более плотной среды ( $\rho_2^0 > \rho_1^0$ ,  $c_2^0 < c_1^0$ ) волна разрежения (сжатия) отражается также в виде волны разрежения (сжатия), и, наоборот, от менее плотной среды ( $\rho_2^0 < \rho_1^0$ ,  $c_2^0 > c_1^0$ ) волна разрежения (сжатия) отражается в виде волны сжатия (разрежения).

Отметим один частный случай  $c_2^0 = 0$  ( $\rho_2^0 = \infty$ ), при котором  $U(t) = 0$ . Этот случай можно трактовать как отражение волны Римана от бесконечно плотного газа или как отражение от жесткой стенки ( $U(t) = 0$ ). Мы заключаем, что волны сжатия (разрежения) отражаются от жесткой стенки всегда в виде волн сжатия (разрежения).

Формула (6) позволила нам провести качественное исследование задачи о преломлении волн Римана на контактной границе. Полное же решение этой задачи затрудняется тем, что на самом деле функция  $r_1(t)$  неизвестна, так как  $r$ -характеристики искривляются в зоне взаимодействия падающей волны Римана с отраженной от контактной границы волной.

В связи с этим отметим один частный случай, когда решение этой задачи сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим случай, когда  $\gamma_1 = 3$ , а  $\gamma_2 > 1$  произвольно. Тогда характеристики в газе I — прямые линии, и мы можем считать, что  $r_1(x, t) = f_1(x, t)$ , где  $f_1(x, t)$  определяется в волне Римана однозначно. Однако в уравнении (6)  $r_1(t)$  есть значение инварианта  $r_1(x, t)$  на контактной границе, т. е. в точке  $(x_0(t), t)$ :

$$r_1(t) = r_1(x_0(t), t) = f_1(x_0(t), t). \quad (9)$$

Так как по смыслу величины  $U(t)$

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = U(t), \quad (10)$$

а из уравнений (6), (9)  $U(t)$  выражается как определенная функция переменных  $t, x_0(t)$ , то и решение всей задачи сводится к интегрированию уравнения (10). В качестве начального условия для уравнения (10) при этом ставится условие (рис. 2.23)

$$x_0(t_0) = x_0.$$

Так, например, если  $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$  и набегаёт центрированная волна разрежения, то уравнение (10) принимает, согласно (8), вид

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{x_0(t) - c_1^0}{1 + c_1^0/c_2^0}, \quad x_0(t_0) = c_1^0 t_0, \quad t_0 > 0, \quad (11)$$

так как в центрированной волне разрежения при  $\gamma = 3$   
 $t(x, t) = \frac{x}{t}$ .

6. Замечания по поводу краевых условий для уравнений газовой динамики и иллюстрация их разрешимости на примере задачи о поршне. При анализе разрешимости задачи с краевыми и граничными условиями для уравнений газовой динамики полностью применимы выводы, которые мы сделали при рассмотрении этого вопроса для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа в § 11 главы 1.

Тем не менее при изучении движения газов и жидкостей некоторые классы краевых и граничных условий являются особенно естественными и поэтому особенно важными. Поэтому мы рассмотрим здесь типичные краевые условия для уравнений газовой динамики.

Наиболее естественно ставить граничные условия на границе идеального объема газа, т. е. на траектории. В лагранжевых координатах траектории соответствует фиксированная координата  $q$ ; поэтому такого рода граничные условия в лагранжевых координатах ставятся на прямых  $q = \text{const}$ .

Можно различать два типа граничных условий:

1. Внешние граничные условия, или условия на внешних границах. Это будут, собственно, краевые условия, эффективно описывающие воздействие внешней среды на данный объем газа. Для рассматриваемого нами одномерного течения такими условиями являются условия на левой и правой границах области, в которой расположен газ.

2. Внутренние граничные условия, или условия на внутренних границах. К ним относятся условия на контактных границах между газами, обладающими различными свойствами (различными энтропиями, различными уравнениями состояния и т. д.). К числу внутренних граничных условий могут быть отнесены также условия на линиях разрыва решения. Эти условия будут подробно обсуждаться в следующем параграфе.

Что же касается условий на контактных границах, то в газовой динамике они всегда одинаковы и требуют непрерывности скорости потока  $u$  и давления  $p$ . Пример использования этих условий дает п. 5, где качественно изучалась задача об отражении волны Римана от контактной границы.

Остановимся на внешних граничных условиях. В случае задачи о поршне, рассмотренной в п. 4, граничное условие ставится в точке  $q = 0$ . Легко заметить, что если на поршне задано давление

$$p(0, t) = p(t) \geq 0, \quad (1)$$

то такая краевая задача разрешима, и притом единственным образом, так как из условия (1) следует, что  $c \geq 0$ . В случае же,

когда задана скорость поршня

$$u(0, t) = U(t), \quad (2)$$

мы видим, что при  $U(t) < 0$  возможен отрыв газа от поршня, т. е. условие (2) не выполняется, а заменяется условием  $p = 0$ .

Такая же ситуация имеет место и для систем линейных уравнений. Если краевые условия поставлены вне области зависимости от начальных данных, то эти условия, вообще говоря, не определяют единственным образом решения.

В случае задачи о поршне физическая постановка задачи позволила получить правильное решение, заменяя, где это требуется, условие (2) условием «свободной границы»  $p = 0$ .

При  $U(t) > 0$  задача о поршне с краевым условием (2), напротив, всегда разрешима, хотя решение и будет разрывным. Этот вывод следует сравнить со случаем системы линейных уравнений, для которой краевая задача, вообще говоря, не разрешима ни в классе гладких, ни в классе разрывных решений, если краевое условие поставлено в области определенности решения задачи Коши.

#### § 4. Разрывы в одномерном течении сжимаемых газов. Ударные волны

**1. Условия Гюгонио.** На примерах простейших течений в § 3 мы убедились в том, что, как правило, решения уравнений

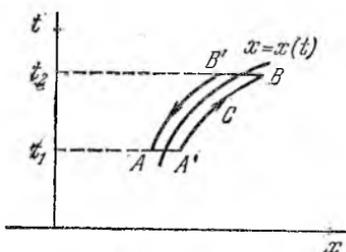


Рис. 2.24.

газовой динамики остаются непрерывными ограниченное время, а затем в решении возникают разрывы. Естественно, что дифференциальные уравнения теряют смысл для разрывных течений; однако, как мы уже говорили выше, интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии сохраняют смысл и для разрывных течений.

Выведем условия, которые должны выполняться на линиях разрыва решений уравнений газовой динамики, как следствия интегральных законов сохранения.

Пусть  $x = x(t)$  — уравнение одной из линий разрыва гидродинамических величин, которую будем предполагать на рассматриваемом отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$  обладающей непрерывной касательной (рис. 2.24). Пусть  $f(x, t)$  терпит разрыв на линии  $x = x(t)$ . Обозначим

$$f_1(t) = f(x(t) - 0, t); \quad f_2(t) = f(x(t) + 0, t); \quad [f] = f_2(t) - f_1(t). \quad (1)$$

Интегральные законы сохранения в эйлеровых координатах (2.3.13) — (2.3.15) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \rho x^v dx - \rho u x^v dt &= 0, \\ \oint_C \rho u x^v dx - (p + \rho u^2) x^v dt &= - \iint_{G_C} v p x^{v-1} dx dt, \\ \oint_C \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) x^v dx - \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) x^v dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Запишем законы сохранения (2) для контура  $AA'BB'$ , считая, что линии  $A'B$  и  $B'A$  бесконечно близко примыкают к линии разрыва  $x(t)$  соответственно справа и слева от нее.

Ввиду ограниченности всех гидродинамических величин исчезают интегралы по частям  $AA'$  и  $BB'$  контура  $C$ , а также двойной интеграл  $\iint_{G_C} v p x^{v-1} dx dt$ . Вдоль линии  $x = x(t)$  имеем  $dx = D dt$ , где  $D = \dot{x}(t) = x'(t)$ . Поэтому, например, из первого уравнения (2), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} x^v(t) \{ (\rho_2(t) - \rho_1(t)) D(t) - (\rho_2(t) u_2(t) - \rho_1(t) u_1(t)) \} dt = 0. \quad (3)$$

Ввиду произвольности пределов интегрирования в (3), должно равняться нулю подинтегральное выражение, т. е.

$$x^v(t) \{ D(t) [\rho] - [\rho u] \} = 0.$$

Сокращая это равенство на  $x^v$ , мы видим, что условия на линии разрыва одинаковы для трех случаев симметрии  $v = 0, 1, 2$ . Поступая аналогичным образом со всеми законами сохранения (2), получим условия на линии разрыва  $x = x(t)$ :

$$D [\rho] = [\rho u], \quad (4)$$

$$D [\rho u] = [p + \rho u^2], \quad (5)$$

$$D \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right], \quad (6)$$

которые связывают скачки гидродинамических величин на линии разрыва  $x = x(t)$  и скорость  $D = x'(t)$  линии разрыва.

Соотношения (4) — (6) называются *условиями гидродинамической совместности разрыва* либо *условиями Гюгонно*, по имени французского ученого, впервые их получившего\*).

\*) В американской литературе эти условия часто называют условиями Ренкина либо Ренкина — Гюгонно.

Согласно, обозначению величина  $D = D(t)$ , поэтому  $D[f] = [Df]$ . Значит, уравнение (4) можно переписать в виде

$$[\rho(u - D)] = 0. \quad (7)$$

Умножая уравнение (7) на  $D$  и вычитая из (5), получим

$$[\rho + \rho(u - D)^2] = 0. \quad (8)$$

Наконец, умножая (8) на  $D$ , вычитая результат из (6) и учитывая, что  $[D] = [D^2] = 0$ , получим

$$\left[ \rho(u - D) \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(u - D)^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (9)$$

Учитывая обозначения (1), мы можем переписать условия Гюгонио (7) — (9) в виде равенств:

$$\rho_2(u_2 - D) = \rho_1(u_1 - D) = m, \quad (10)$$

$$p_2 + \rho_2(u_2 - D)^2 = p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2 = j, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(u_2 - D) \left( \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(u_2 - D)^2}{2} \right) = \\ = \rho_1(u_1 - D) \left( \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(u_1 - D)^2}{2} \right) = f. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно п. 2 § 2 величины  $m$ ,  $j$ ,  $f$  означают соответственно потоки массы, импульса и энергии, вычисленные в системе координат, движущейся со скоростью  $D$  относительно системы, в которой вычисляется скорость течения  $u$ . Поэтому условия Гюгонио (10) — (12) требуют непрерывности потоков массы, импульса и энергии на линии разрыва гидродинамических величин.

Заметим, наконец, что интегральные законы сохранения, записанные в лагранжевых координатах, приводят к тем же самым условиям Гюгонио (4) — (6), если учесть связь лагранжевых координат с эйлеровыми.

**2. Различные виды разрывов: ударные волны, контактные разрывы. Различные формы условий Гюгонио. Адиабата Гюгонио.** Разрывы решения мы будем различать в зависимости от выполнения условий  $m = 0$ ,  $m \neq 0$ .

Если  $m(t) = m = 0$ , то такой вид разрыва будем называть *контактным*; если  $m(t) \neq 0$ , то разрыв будем называть *ударной волной*.

В случае контактного разрыва из (4.1.10) следует, что

$$D = u_1 = u_2 = x'(t), \quad (1)$$

т. е. линия разрыва совпадает с траекторией частицы (в лагранжевых координатах контактный разрыв изображается поэтому прямой  $q = \text{const}$ ).

Полагая  $u_1 = D$ ,  $u_2 = D$ , получим из (4.1.11)

$$p_1 = p_2 = j, \quad (2)$$

а условие (4.1.12) при  $u_1 = u_2 = D$  выполняется тождественно. Итак, на контактном разрыве выполняются два условия:

$$u_1 = u_2, \quad p_1 = p_2, \quad (3)$$

т. е. давление и скорость течения непрерывны. Легко показать и обратное: если на разрыве выполнены условия (3), то разрыв контактный.

Величины  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $S$  могут испытывать на контактном разрыве произвольный скачок, удовлетворяя, однако, при этом условию непрерывности давления (2). Контактный разрыв, в частности, может являться границей раздела двух различных газов, удовлетворяющих различным уравнениям состояния. Условия непрерывности скорости и давления (3) при этом могут рассматриваться как внутренние граничные условия на границе раздела различных газов.

В случае ударной волны  $m \neq 0$  и вещество протекает через линию разрыва  $x = x(t)$ . В случае  $m > 0$  вещество протекает через линию разрыва слева направо; поэтому мы будем говорить, что при  $m > 0$  ударная волна движется относительно вещества справа налево, наоборот, при  $m < 0$  будем говорить, что ударная волна движется вправо.

Рассмотрим различные представления условий Гюгонио (4.1.10)–(4.1.12) для случая ударной волны.

Условие непрерывности потока импульса (4.1.11) может быть записано в виде следующих эквивалентных равенств:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 + m(u_2 - D) &= \rho_1 + m(u_1 - D), \\ \rho_2 + V_2 m^2 &= \rho_1 + V_1 m^2, \\ m^2 &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{V_1 - V_2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $V = \frac{1}{\rho}$ . Условие (4.1.12) после деления на  $m$  приобретает вид

$$\varepsilon_2 + \rho_2 V_2 + \frac{(u_2 - D)^2}{2} = \varepsilon_1 + \rho_1 V_1 + \frac{(u_1 - D)^2}{2}. \quad (5)$$

Если обозначить буквой  $\mathcal{F}$  величину  $\varepsilon + pV$ , называемую *энthalпией*, то (5) записывается в виде

$$\mathcal{F}_2 + \frac{(u_2 - D)^2}{2} = \mathcal{F}_1 + \frac{(u_1 - D)^2}{2}. \quad (6)$$

Из (4.1.10) имеем

$$(u_2 - D)(u_1 - D) = \frac{m^2}{\rho_1 \rho_2} = m^2 V_1 V_2, \quad (7)$$

Подставляя сюда третью формулу (4), получим

$$(u_2 - D)(u_1 - D) = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_1 V_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (8)$$

Согласно (4.1.10)

$$\begin{aligned} (u_1 - D) &= mV_1; & (u_2 - D) &= mV_2; \\ (u_1 - D)^2 &= m^2 V_1^2; & (u_2 - D)^2 &= m^2 V_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя сюда третью формулу (4), получим

$$(u_1 - D)^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_1^2, \quad (u_2 - D)^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_2^2. \quad (10)$$

Отметим еще несколько полезных формул. Из (9) имеем

$$u_2 - u_1 = [(u_2 - D) - (u_1 - D)] = m(V_2 - V_1).$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} (u_2 - u_1)(u_1 - D) &= m^2 V_1 (V_2 - V_1) = (p_1 - p_2) V_1, \\ (u_2 - u_1)(u_2 - D) &= m^2 V_2 (V_2 - V_1) = (p_1 - p_2) V_2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и, наконец,

$$\left. \begin{aligned} (u_2 - u_1)^2 &= (p_2 - p_1)(V_1 - V_2), \\ (u_2 - D)^2 - (u_1 - D)^2 &= (p_1 - p_2)(V_1 + V_2). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из полученных формул можно сделать несколько заключений:  
1) Из формул (4) следует, что при переходе через ударный фронт давление возрастает либо убывает одновременно с плотностью.

2) Из формулы (7) следует, что разности  $(u_2 - D)$  и  $(u_1 - D)$  имеют один и тот же знак.

3) При конечном  $m$  разности  $(V_2 - V_1)$ ,  $(p_2 - p_1)$  имеют один и тот же порядок, так что при  $V_2 - V_1 \rightarrow 0$   $p_2 - p_1 \rightarrow 0$ .

Равенства (10) выражают относительные скорости  $u_2 - D$ ,  $u_1 - D$  через термодинамические величины. Поэтому, подставляя эти формулы в равенства (5) и (6), получаем соотношения, содержащие только термодинамические величины:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (p_2 + p_1) (V_1 - V_2), \quad (13)$$

$$\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_2 + V_1). \quad (14)$$

Равенство (13) либо (14) называют *уравнением адиабаты Гюгонно*.

Введем в рассмотрение функцию

$$H(p, V; p_0, V_0) = \varepsilon(p, V) - \varepsilon(p_0, V_0) + (V - V_0) \frac{p + p_0}{2}, \quad (15)$$

которую будем рассматривать как функцию двух переменных  $p, V$ , параметрически зависящую от  $p_0, V_0$ .

Пусть  $M_1 = \{p_1, V_1\}$ ,  $M_2 = \{p_2, V_2\}$  — точки плоскости  $p, V$ , характеризующие термодинамическое состояние вещества с разных сторон от линии разрыва. Тогда в силу (13) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} H(M_2, M_1) = H(p_2, V_2; p_1, V_1) &= -H(M_1, M_2) = \\ &= -H(p_1, V_1; p_2, V_2) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Точки  $M_1, M_2$ , связанные соотношением (16), будем называть *сопряженными*. Свойство сопряженности не является транзитивным, так как из соотношений  $H(M_0, M_1) = 0$ ,  $H(M_1, M_2) = 0$  не следует  $H(M_0, M_2) = 0$ .

Фиксируем точку  $M_0(p_0, V_0)$  плоскости  $p, V$  и рассмотрим множество точек  $M(p, V)$ , сопряженных  $M_0$ . Они должны лежать на кривой

$$H(M, M_0) = H(p, V, p_0, V_0) = 0. \quad (17)$$

Кривую, заданную равенством (17), будем называть *адиабатой Гюгоньо* с центром в точке  $M_0(p_0, V_0)$ . Согласно равенству (13), адиабата Гюгоньо есть геометрическое место точек  $(p, V)$ , характеризующих термодинамическое состояние вещества с одной стороны фронта разрыва (ударной волны), если задано состояние  $p_0, V_0$  с другой стороны фронта.

Пусть адиабата Гюгоньо  $H(M, M_0)$  проходит через точку  $M_1$ . Тогда адиабата Гюгоньо  $H(M, M_1)$  проходит через точку  $M_0$ , но не совпадает с адиабатой  $H(M, M_0)$  (рис. 2.25). Это обстоятельство отражает тот факт, что адиабата Гюгоньо не является линией постоянства функции двух переменных, а есть линия постоянства функции двух переменных, зависящей также от двух параметров. Поэтому, если выбрать точки  $(p, V)$ , сопряженные точке  $(p_0, V_0)$ , в качестве новых центров адиабат Гюгоньо, то мы получим однопараметрическое семейство адиабат Гюгоньо, проходящих через точку  $(p_0, V_0)$  (пучок адиабат).

**3. Адиабата Гюгоньо для нормального газа.** Наши предыдущие замечания по поводу адиабаты Гюгоньо относились к веществу с произвольным уравнением состояния,

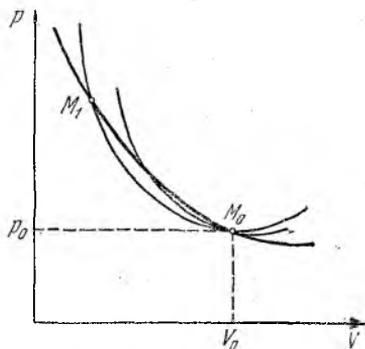


Рис. 2.25.

Для более детального изучения адиабаты Гюгонио мы предположим, что уравнения состояния вещества  $p = p(V, S)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(V, T)$  удовлетворяют требованиям, которые были сформулированы в п. 4 § 1 для нормального газа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p(V, S)}{\partial V} < 0 & \quad \text{(I)}, & \quad \frac{\partial^2 p(V, S)}{\partial V^2} > 0 & \quad \text{(II)}, \\ p(V, S) \rightarrow \infty & \quad \text{при} & \quad V \rightarrow 0 & \quad \text{(III)}, \\ \frac{\partial p(V, S)}{\partial S} > 0 & \quad \text{(IV)}, & \quad c_V = \frac{\partial \varepsilon(V, T)}{\partial T} > 0 & \quad \text{(V)}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(I)}$$

Условием VI было требование выпуклости области переменных  $p, V$ , в которой удовлетворяются требования I—V.

Все наше дальнейшее рассмотрение, за исключением случаев, которые будут оговариваться особо, будет относиться к нормальному газу.

Рассмотрим полный дифференциал  $dH$  функции  $H(p, V, p_0, V_0)$  двух переменных  $p, V$ , считая  $p_0, V_0$  фиксированными:

$$dH = d\varepsilon + \frac{p + p_0}{2} dV + \frac{V - V_0}{2} dp. \quad (2)$$

Пользуясь основным термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = T dS - p dV,$$

получим следующее выражение для  $dH$ :

$$dH = T dS + \frac{V - V_0}{2} dp - \frac{p - p_0}{2} dV. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно записать также в виде

$$dH = T dS + \frac{(V - V_0)^2}{2} dK, \quad (4)$$

где

$$K = \frac{p - p_0}{V - V_0} \quad (5)$$

есть наклон луча, проходящего через центр  $M_0(p_0, V_0)$ . Согласно равенству (4.2.4),

$$K = -m^2, \quad (6)$$

где  $m$  — поток массы через ударный фронт, разделяющий состояния  $p_0, V_0$  и  $p, V$  (при этом  $H(p, V, p_0, V_0) = 0$ ).

Рассмотрим взаимное расположение следующих кривых: а) адиабаты Пуассона, заданной уравнением  $dS = 0$  и проходящей через точку  $M_0(p_0, V_0)$ ; эту кривую будем обозначать буквой  $A$ ; б) адиабаты Гюгонио  $dH = 0$ , проходящей через точку  $M_0(p_0, V_0)$ ; обозначим эту кривую  $H$ .

Согласно формулам (3) и (4), при  $V = V_0$ ,  $p = p_0$   $dH = T dS$ . Таким образом, кривые  $A$ ,  $H$  в точке их пересечения имеют общую касательную.

Рассмотрим поведение дифференциалов  $dH$ ,  $dS$ ,  $dK$  на каждой из указанных кривых.

а) На адиабате  $A$   $dS = 0$ . Согласно (4),

$$dH = \frac{(V - V_0)^2}{2} dK. \quad (7)$$

Согласно свойствам I, II, вдоль  $A$  (т. е. при  $S = \text{const}$ )

$$\frac{dK}{dV} > 0, \quad (8)$$

поэтому на адиабате  $A$

$$\frac{dH}{dV} > 0. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} H < 0 \text{ в верхней части адиабаты } A (V < V_0), \\ H > 0 \text{ в нижней части адиабаты } A (V > V_0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

б) На луче  $dK = 0$

$$dH = T dS. \quad (11)$$

Это равенство означает, что вдоль луча  $K$  знаки  $dH$  и  $dS$  совпадают и, в частности, совпадают стационарные точки функций  $H$  и  $S$ .

Как было показано в п. 4 § 1, на луче  $K = \text{const} > 0$  энтропия  $S$  не имеет стационарных точек и монотонно возрастает с ростом  $p$ ; на луче  $K < 0$  энтропия  $S$  имеет единственную стационарную точку, в которой  $S$  достигает максимума. То же самое справедливо, следовательно, и для функции  $H$ , так что  $H$  вдоль луча  $K = \text{const} > 0$  не имеет стационарных точек; на луче  $K < 0$   $H$  имеет единственный максимум, в той же точке, что и  $S$ . Отсюда следует, что на каждом луче,  $K = \text{const} < 0$  существует единственная точка  $M_H$  адиабаты Гюгонио  $H$ , лежащая между точкой  $M_A$  адиабаты Пуассона и центром  $M_0$ .

Таким образом, существует кривая  $H$  — адиабата Гюгонио, проходящая через точку  $M_0$ . Гладкость адиабаты Гюгонио следует из того, что она является интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения (2), проходящей через центр  $M_0$ .

в) На адиабате  $H$  из соотношения (4) следует

$$T dS = - \frac{(V - V_0)^2}{2} dK. \quad (12)$$

Отсюда следует, что если точка  $M(p, V)$  движется вдоль адиабаты  $H$  так, что луч  $K(M, M_0)$  движется по часовой стрелке ( $dK < 0$ ), то энтропия  $S$  монотонно возрастает.

Суммируя наши заключения о поведении дифференциалов  $dH$ ,  $dS$ ,  $dK$  на кривых  $A$ ,  $K$ ,  $H$ , заключаем, что в окрестности точки  $M_0$ , где адиабаты пересекаются касаясь, кривые  $A$ ,  $H$  располагаются так, как это указано на рис. 2.26.

Взаимное расположение адиабат  $A$ ,  $H$  в окрестности центра  $M_0$  указывает на то, что касание адиабат  $A$  и  $H$  должно иметь порядок не ниже второго. Подтвердим это выкладкой.

Из (3) имеем вдоль  $H$

$$T dS = -\frac{V-V_0}{2} dp + \frac{p-p_0}{2} dV. \quad (13)$$

Дифференцируя равенство (13) по переменному  $V$ , находим

$$\begin{aligned} dT dS + T d^2S &= \\ &= -\frac{1}{2} dV dp - \frac{V-V_0}{2} d^2p + \\ &+ \frac{1}{2} dp dV = -\frac{V-V_0}{2} d^2p, \quad (14) \end{aligned}$$

т. е.  $d^2S = 0$  в точке  $(p_0, V_0)$  и касание кривых  $A$ ,  $H$  имеет второй порядок. Наконец, дифференцируя (14) еще раз по  $V$ , найдем

$$d^2T dS + 2 dT d^2S + T d^3S = -\frac{1}{2} dV d^2p - \frac{V-V_0}{2} d^3p.$$

Так как в точке  $M_0$   $dS = d^2S = 0$ , то отсюда находим

$$T d^3S = -\frac{1}{2} dV d^2p \quad \text{и} \quad \frac{d^3S}{dV^3} = -\frac{1}{2T} \frac{d^2p}{dV^2} < 0$$

в точке  $M_0$  согласно свойству II уравнения состояния.

Таким образом, в точке  $M_0$  кривой  $H$  отлична от нуля лишь третья производная  $\frac{d^3S}{dV^3}$ .

Нетрудно видеть, что в окрестности центра  $M_0(p_0, V_0)$  имеют место следующие свойства адиабаты  $H$ :

1) Для любой точки  $M$  кривой  $H$

$$K = \frac{p-p_0}{V-V_0} < 0. \quad (15)$$

2) Никакой луч  $M_0M_H$  не касается адиабаты  $H$  при  $M_H \neq M_0$ .

3) Каждый луч  $M_0M_H$  пересекает адиабату  $H$  не более чем в одной точке  $M_H \neq M_0$ .

4) Каждый луч, пересекающий верхнюю ветвь адиабаты  $A$ , пересекает и верхнюю ветвь адиабаты  $H$ . При этом на луче

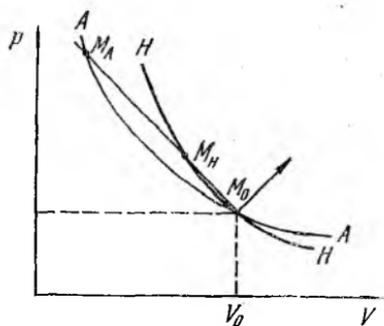


Рис. 2.26.

$M_0 M_H$  функции  $H$  и  $S$  имеют профили вида, указанного на рис. 2.27.

Заметим, что из свойств 2) и 3) не следует выпуклость кривой  $H$ , так как эти свойства справедливы для лучей, выходящих лишь из определенной точки адиабаты, а именно из ее центра.

Докажем, что эти свойства адиабаты  $H$  имеют место не только локально, но и в целом. Пусть  $M_H$  — произвольная точка адиабаты  $H$ . Так как

$$H(M_H, M_0) = H(M_0, M_0) = 0,$$

то на луче  $M_0 M_H$  имеется стационарная точка функции  $H$  (а в силу (11) и  $S$ ). Следовательно,  $K < 0$  и свойство 1) адиабаты  $H$  доказано.

Докажем свойство 2). Стационарная точка  $M_{ст}$  лежит строго внутри отрезка  $M_0 M_H$  и является единственной стационарной точкой.

Касание адиабаты  $H$  с лучом  $K$  означало бы существование на луче  $K$  двух стационарных точек функции  $H$  и, следовательно, двух стационарных точек  $S$ , что невозможно. Свойство 2) доказано.

Из существования луча, пересекающего кривую  $H$  в двух различных от  $M_0$  точках, необходимо следует существование луча, касющегося  $H$  в точке, отличной от  $M_0$ . Это невозможно в силу свойства 2), и поэтому свойство 3) также доказано.

Наконец, так как  $S(M_H) > S(M_0)$  при  $\rho_H > \rho_0$ , то любой луч, пересекающий верхнюю часть адиабаты  $H$ , пересечет сначала адиабату  $H$  в точке  $M_H$ , а затем адиабату  $A$  в точке  $M_A$ . Свойство 4) доказано.

В частности, отсюда следует, что наклон луча  $K$ , пересекающего адиабату  $H$  в точке  $M_H \neq M_0$ , находится в пределах

$$-\infty < K = \frac{p - p_0}{V - V_0} < \frac{\partial p(V_0, S_0)}{\partial V} < 0. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

Задано состояние по одну сторону линии разрыва (ударной волны). Оно характеризуется параметрами  $u = u_0$ ,  $V = V_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon(\rho_0, V_0)$ . Задан также поток массы  $m$  через фронт разрыва. Требуется определить состояние  $(u, V, \rho, \varepsilon)$  по другую сторону линии разрыва, исходя из условий Гюгонио.

Предположим, что  $K = -m^2$  удовлетворяет условию (16). Покажем, что для нормального газа эта задача всегда имеет, и притом единственное, решение.

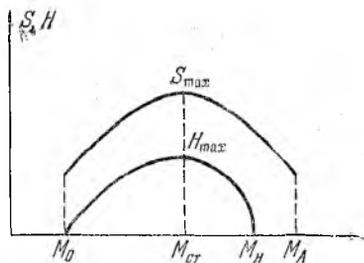


Рис. 2.27.

Термодинамические параметры газа  $p, V$  определяются точкой пересечения адиабаты Гюгонио  $H(p, V, p_0, V_0) = 0$  с лучом  $K = \frac{p - p_0}{V - V_0} = -m^2$ . Так как  $K$  удовлетворяет условию (16), то по свойствам 1) — 4) адиабаты  $H$  точка  $(p, V)$  существует и определяется единственным образом.

Итак, термодинамические параметры  $p, V, \varepsilon$  определяются однозначно. После этого однозначно определяются все остальные параметры ударной волны. По формулам (4.2.9) определяются разности  $u_0 - D = mV_0$  и  $u - D = mV$ . Так как  $u_0$  известно, то отсюда определяется скорость  $D$  ударной волны.

Значит, поставленная задача имеет при условии (16) единственное решение.

Рассмотрим предельный случай, когда  $K = -m^2 = \frac{\partial p(V_0, S_0)}{\partial V}$ .

При этом значении  $K$  луч касается адиабаты Гюгонио (одновременно Пуассона) в точке  $M_0(p_0, V_0)$ . Сопряженная точка  $M(p, V)$ , характеризующая состояние вещества по другую сторону фронта, совпадает с  $M_0(p_0, V_0)$ , т. е. ударная волна является бесконечно слабой.

В этом случае  $u = u_0$  и по формуле (4.2.8) имеем

$$(u - D)^2 = \frac{\partial p(p_0, S_0)}{\partial p} = c_0^2, \quad \text{т. е.} \quad u - D = \pm c_0 = \pm c.$$

Таким образом, бесконечно слабая ударная волна движется по веществу со скоростью звука, т. е. является слабым разрывом.

При  $K = -\infty$  ударная волна называется *бесконечно сильной*.

**4. Устойчивые и неустойчивые разрывы. Условия устойчивости и теорема Цемплена.** Пусть величины  $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1; u_2, p_2, V_2, \varepsilon_2$  и скорость ударной волны  $D$  удовлетворяют условиям Гюгонио (4.1.10) — (4.1.12). Легко заметить, что условия Гюгонио не изменяются от того, будем ли мы считать состояние  $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1$  состоянием газа слева от фронта ударной волны, а состояние  $u_2, p_2, V_2, \varepsilon_2$  правым состоянием, либо, наоборот,  $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1$  — правым, а  $u_2, p_2, V_2, \varepsilon_2$  — левым. Однако, как мы сейчас увидим, по своему физическому смыслу эти случаи существенно различаются между собой, так что один из них даже следует признать невозможным.

Начнем с того, что предположим у потока массы  $m = \rho_1(u_1 - D) = \rho_2(u_2 - D)$  какой-либо определенный знак. Пусть, например,  $m < 0$ . В этом случае волна относительно вещества движется направо и, таким образом, в процессе движения вещество пересекает фронт ударной волны, двигаясь относительно фронта справа налево.

Как мы говорили в § 1 этой главы, поверхность разрыва течения мы представляем как узкую зону больших градиентов,

в которой существенно действие диссипативных сил — вязкости и теплопроводности. Действие этих процессов приводит, как это известно из термодинамики, к возрастанию энтропии, что характеризует собой необратимость процессов с вязкостью и теплопроводностью. Так как при  $m < 0$  частицы газа в процессе движения переходят из правого относительно фронта ударной волны положения в левое, то, очевидно, вследствие необратимости процессов, происходящих в узкой зоне, которую мы свяжем с ударной волной, мы должны требовать, чтобы  $S_{\text{прав}} < S_{\text{лев}}$ , где  $S_{\text{прав}}$  и  $S_{\text{лев}}$  — соответственно энтропия газа справа и слева от фронта волны.

Неравенство

$$S_{\text{прав}} < S_{\text{лев}} \quad (m < 0) \quad (1)$$

уже не позволяет менять местами состояния  $u_1, p_1, V_1, \epsilon_1; u_2, p_2, V_2, \epsilon_2$ , а, напротив, указывает определенное положение этих состояний относительно фронта.

Ударную волну при  $m < 0$ , для которой выполняется условие (1), будем называть *устойчивым разрывом*; если условие (1) нарушено, то такой разрыв мы будем называть *неустойчивым*.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят нас к выводу, что при  $m > 0$

$$S_{\text{лев}} < S_{\text{прав}} \quad (m > 0) \quad (2)$$

Условия (1) — (2) будем называть *условиями устойчивости ударной волны*.

Если мы договоримся называть состоянием перед фронтом ударной волны состояние справа от него при  $m < 0$  и слева от него при  $m > 0$ , а второе состояние состоянием за фронтом ударной волны, то неравенства (1), (2) требуют, чтобы энтропия газа, находящегося за фронтом, была больше, чем энтропия газа перед фронтом волны.

Будем обозначать состояние перед фронтом буквами  $u_0, p_0, V_0, \epsilon_0$ , состояние за фронтом — через  $u, p, V, \epsilon$ ; тогда условия устойчивости (1), (2) записываются одним неравенством:

$$S > S_0. \quad (3)$$

В дальнейшем под ударной волной мы будем понимать только устойчивую ударную волну, т. е. разрыв, удовлетворяющий условиям Гюгоньо и условию (3)\*.

Вернемся к задаче определения состояния по одну сторону фронта, если задано состояние по другую сторону и поток массы

\*) Отметим, что если уравнения состояния газа не удовлетворяют условиям (4.3.1) для нормального газа, то неравенство (3) недостаточно для определения устойчивости ударной волны. Этот вопрос вкратце рассматривается в п. 8.

$m$ , рассмотренной в предыдущем пункте. Если  $u_0, \rho_0, V_0, \varepsilon_0$  — состояние перед фронтом ударной волны, то задача определения состояния за фронтом, удовлетворяющего условию устойчивости (3), решается, и притом однозначно, при выполнении условия

$$-m^2 = K = \frac{p - p_0}{V - V_0} < \frac{\partial p}{\partial V}(V_0, S_0). \quad (4)$$

Для нормального газа условие устойчивости (3) приводит к следствиям:

1. Каждому значению  $D$  и состоянию перед фронтом  $u_0, \rho_0, V_0, \varepsilon_0$  отвечает одно и только одно состояние за фронтом  $u, \rho, V, \varepsilon$ , если  $|D - u_0| > c_0$ .

В самом деле,  $m = \rho_0(u_0 - D)$  и  $m^2 > \rho_0^2 c_0^2 = -\frac{\partial p(V_0, S_0)}{\partial V}$ . Отсюда следует (4.3.16) и справедливость утверждения.

2. При возрастании  $|D - u_0|$  от  $c_0$  до  $\infty$  энтропия за фронтом монотонно возрастает.

3. Ударные волны ведут только к сжатию вещества и увеличению давления.

В самом деле, на верхней ветви адиабаты  $H$ , которая соответствует состояниям за фронтом, имеем

$$S > S_0, \rho > \rho_0, V < V_0, \text{ т. е. } \rho > \rho_0.$$

4. Ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью по газу перед фронтом и с дозвуковой скоростью в среде за фронтом.

Это утверждение (теорема Цемплена), записывается в виде неравенств

$$|u_0 - D| > c_0, |u - D| < c. \quad (5)$$

Первое неравенство, как мы видели, равносильно условию  $S > S_0$ . В п. 3 было показано, что

$$-\frac{p - p_0}{V - V_0} < -\frac{\partial p}{\partial V} = \rho^2 c^2 \quad (6)$$

при  $p, V$ , лежащих справа от адиабаты Пуассона  $A$ . Так как в соответствии с п. 3  $M_H$  лежит справа от адиабаты  $A$ , то неравенство (6) выполнено. Поэтому

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = -m^2 = -\rho^2(u - D)^2 > -\rho^2 c^2.$$

Отсюда  $|u - D| < c$ , что и требовалось доказать.

Теперь заметим, что можно рассматривать и задачу определения состояния  $u_0, \rho_0, V_0, \varepsilon_0$  перед фронтом по заданному состоянию  $u, V, \rho, \varepsilon$  за фронтом и потоку массы  $m$  (либо скорости

1) через фронт разрыва. Условие устойчивости (3) в этом случае может быть заменено эквивалентным неравенством

$$K = \frac{p - p_0}{V - V_0} > \frac{\partial p(V, S)}{\partial V},$$

в точке  $(p, V)$  (если она существует) единственна и лежит на нижней ветви адиабаты Гюгонио с центром в точке  $M(p, V)$ . Напомняя, что скорости характеристик  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  равны

$$\xi_1 = u - c, \quad \xi_2 = u, \quad \xi_3 = u + c, \quad (7)$$

мы можем записать неравенства (5) также в виде

$$\xi_{1 \text{ лев}} > D > \xi_{1 \text{ прав}} \quad \text{при } D < u_{\text{прав}}, \quad (8)$$

$$\xi_{3 \text{ лев}} > D > \xi_{3 \text{ прав}} \quad \text{при } D > u_{\text{лев}}, \quad (9)$$

где  $\xi_{1 \text{ лев}}$  и  $\xi_{3 \text{ прав}}$  — соответственно скорости характеристик слева и справа от разрыва.

Наконец, заметим еще, что условия устойчивости разрыва (1), (2) либо (3) эквивалентны неравенству

$$u_{\text{лев}} > u_{\text{прав}}. \quad (10)$$

В самом деле, пусть, например,  $m < 0$ . Тогда согласно (4.2.10)

$$u_{\text{лев}} - u_{\text{прав}} = u - u_0 = m(V - V_0).$$

Так как  $V > V_0$ , то отсюда следует (10). Аналогично доказывается случай  $m > 0$ .

Неравенства (8)–(10) позволяют схематически представить поведение характеристик и линий тока в окрестности линии разрыва.

На рис. 2.28, а, 2.28, б показано взаимное расположение линии разрыва  $x = x(t)$ , линий тока  $\frac{dx}{dt} = u$  и характеристик  $\frac{dx}{dt} = \xi_1 = u - c$ ,  $\frac{dx}{dt} = \xi_3 = u + c$  в области слева и справа от ударного фронта в эйлеровых координатах для случая ударной волны, идущей по газу вправо ( $m < 0$ ) и влево ( $m > 0$ ).

На рис. 2.29 приведено взаимное расположение соответствующих кривых в плоскости лагранжевых координат  $q, t$  для случая  $m < 0$ . На этом рисунке  $q = q(t)$  — линия разрыва,  $q = \text{const}$  — линия тока,  $\frac{dq}{dt} = \pm \rho c$  — характеристики 1-го и 3-го семейств.

Отметим одно характерное обстоятельство, которое следует из картины взаимного расположения линии разрыва и характеристик, приведенной на рис. 2.28, 2.29. На линию разрыва  $x = x(t)$  приходят в каждую ее точку снизу (из области меньших значений времени  $t$ ) четыре характеристики, выходят (определены при больших значениях  $t$ ) лишь две характеристики, при

этом одна из них — линия тока. В случае  $m < 0$  на линии разрыва пересекаются две приходящие характеристики 3-го семейства,

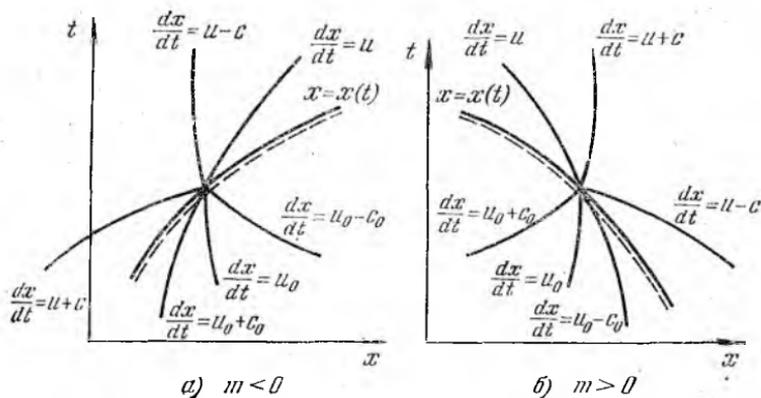


Рис. 2.28.

при  $m > 0$  — 1-го семейства. Говорят, что при  $m < 0$  характеристики 3-го семейства образуют «елочку», при  $m > 0$  «елочку» образуют характеристики 1-го семейства.

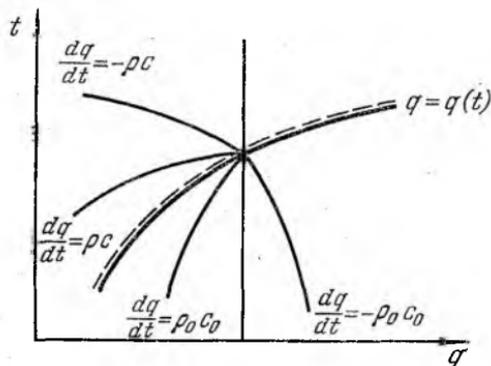


Рис. 2.29.

Отмеченное обстоятельство существенным образом связано с устойчивостью ударной волны. Оно, в частности, указывает, что решение в этом случае обязательно разрывно, так как на линии разрыва пересекаются приходящие характеристики одного семейства. Эти соображения позволяют формально определить устойчивость раз-

рывного решения системы уравнений гиперболического типа как удовлетворение «условиям елочки» на линиях разрыва. Такой подход к разрывным решениям применяется и широко обсуждается в главе 4 (см. также п. 9).

**5. Условия Гюгонио для политропного газа.** В случае политропного газа уравнение состояния имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} c^2, \quad c^2 = \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}. \quad (1)$$

Для энтальпии  $\mathcal{F}$  имеем выражение

$$\mathcal{F} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1-h}{2h} c^2, \quad 0 < h = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} < 1, \quad (2)$$

и уравнение адиабаты Гюгонио с центром в точке  $(p_0, V_0)$  имеет вид

$$pV + h(p_0V - pV_0) - p_0V_0 = 0 \quad (3)$$

или

$$(p + hp_0)(V - hV_0) = (1 - h^2)p_0V_0. \quad (4)$$

На рис. 2.30 приведены графики адиабаты Гюгонио и адиабаты Пуассона для случая политропного газа. Адиабата Гюгонио  $H$ , согласно (4), есть гипербола с асимптотами

$$V = hV_0, \quad p = -hp_0, \quad (5)$$

и адиабата Пуассона задается уравнением

$$pV^\gamma = a^2(S_0) = \text{const} \quad (6)$$

и имеет своими асимптотами оси  $p = 0$ ,  $V = 0$ .

Для политропного газа справедливы следующие свойства:

1. Давление  $p$  меняется вдоль адиабаты Гюгонио от 0 до  $\infty$ , когда  $V$  меняется от  $V_0/h$  до  $hV_0$ ;  $p = \infty$ ,  $V = hV_0$  соответствует бесконечно сильной ударной волне при значениях  $p_0, V_0$  перед фронтом;  $p = 0$ ,  $V = V_0/h$  соответствует бесконечно сильной ударной волне при заданном состоянии  $p_0, V_0$  за фронтом. Из рис. 2.30 заключаем, что предельное сжатие политропного газа ударной волной равно

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{1}{h} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} > 1. \quad (7)$$

2. Вдоль адиабаты Гюгонио

$$\frac{dp}{dV} < 0. \quad (8)$$

Это означает, что при возрастании величины  $|D - u_0|$  монотонно возрастают давление  $p$  и плотность  $\rho$  за фронтом волны.

В пп. 3, 4 мы показали, что для нормального газа из условий Гюгонио однозначно определяется состояние за фронтом ударной волны, если заданы состояние перед фронтом  $(u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0)$

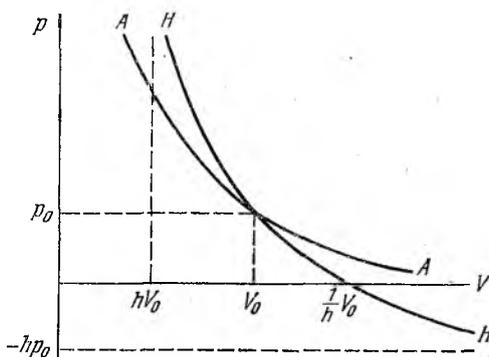


Рис. 2.30.

и величина, характеризующая силу ударной волны (поток массы  $m$  либо скорость ударной волны  $D$ ).

Укажем здесь соответствующие расчетные формулы для случая политропного газа. Силу ударной волны будем характеризовать безразмерной величиной

$$M_0 = \frac{|u_0 - D|}{c_0}, \quad (9)$$

которая, в силу теоремы Цемплена, больше или равна 1.

Если известно  $M_0$ , то находим модуль потока массы  $m$  через фронт волны:

$$|m| = \rho_0 c_0 M_0. \quad (10)$$

Выразим теперь явно величины  $p$ ,  $V$ ,  $c$ ,  $u$  через  $\rho_0$ ,  $V_0$ ,  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $M_0$ . Переписывая уравнение адиабаты (4) в виде

$$\frac{p + hp_0}{V_0} = \frac{\rho_0 + h\rho}{V} = \frac{(1-h)(\rho - \rho_0)}{V_0 - V} = (1-h)m^2, \quad (11)$$

где использовано (4.2.4), найдем

$$p + h\rho_0 = (1-h)\rho_0(u_0 - D)^2 = (1+h)\rho_0 M_0^2, \quad (12)$$

так как  $\rho_0 = c_0^2 \rho_0 \frac{1-h}{1+h}$ . Отсюда

$$p = \rho_0 [(1+h)M_0^2 - h], \quad (13)$$

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{p + h\rho_0}{\rho_0 + h\rho} = \frac{M_0^2}{(1-h) + hM_0^2}, \quad (14)$$

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{\rho\rho_0}{\rho_0\rho} = \frac{[(1+h)M_0^2 - h][(1-h) + hM_0^2]}{M_0^2}. \quad (15)$$

Формулы (13)–(15) выражают термодинамические величины за фронтом волны через известные перед фронтом и  $M_0$ . Для определения скорости  $u$  за фронтом пользуемся формулой (4.2.10), согласно которой

$$\begin{aligned} u &= u_0 + m(V - V_0) = u_0 \pm \rho_0 c_0 M_0 V_0 \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right) = \\ &= u_0 \pm c_0 M_0 \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right) = u_0 \pm (1-h)c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

(знак  $+$  в формуле (16) берется для случая волны, идущей вправо, т. е. при  $m < 0$ ; если относительно газа волна перемещается влево ( $m > 0$ ), то берется знак  $-$ ).

Равенства (13)–(16) выражают явно состояние за фронтом в виде рациональных функций от  $M_0$ . Величины

$$\frac{p}{\rho_0}, \quad \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \frac{c}{c_0}, \quad \left| \frac{u - u_0}{c_0} \right|$$

являются, как легко видеть, монотонно возрастающими функциями параметра  $M_0$ .

В силу симметрии условий Гюгонио состояние перед фронтом ударной волны  $u_0, \rho_0, V_0, \epsilon_0$  по заданному состоянию  $u, \rho, V, \epsilon$  за фронтом определяется по этим же формулам, если вместо  $M_0$  ввести число

$$M = \frac{|u - D|}{c},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} &= (1 + h) M^2 - h, & \frac{\rho_0}{\rho} &= \frac{M^2}{(1 - h) + hM^2}, \\ \frac{c_0}{c} &= \left[ (1 + h) - \frac{h}{M^2} \right] [(1 - h) + hM^2], \\ u_0 &= u \pm (1 - h) c \left[ M - \frac{1}{M} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

при этом из теоремы Цемплена следует, что  $M \leq 1$ .

**6. Условия Гюгонио для изотермического газа.** Изотермический газ является предельным случаем теплопроводного газа, когда коэффициент теплопроводности стремится к бесконечности, а температура в газе поддерживается постоянной за счет внешних источников тепла. Из интегральных законов сохранения в этом случае следуют только два закона сохранения на фронте разрыва — массы и импульса:

$$\rho_1 (u_1 - D) = \rho_2 (u_2 - D) = m, \quad (1)$$

$$\rho_1 + \rho_1 (u_1 - D)^2 = \rho_2 + \rho_2 (u_2 - D)^2 = j, \quad (2)$$

а давление  $p$  задается формулой

$$p = p(V, T_0) = F(V). \quad (3)$$

Так как в изотермическом газе температура одинакова перед фронтом и за фронтом ударной волны, то роль адиабаты Гюгонио  $H$  в этом случае играет изотерма (3), уравнение которой можно записать в виде

$$p - F(V) = \rho_0 - F(V_0) = 0. \quad (4)$$

В этом случае сопряженными будут любые две точки  $(\rho_0, V_0)$ ,  $(\rho, V)$ , лежащие на изотерме (3).

На рис. 2.31 показано взаимное расположение адиабаты Пуассона  $A$ , адиабаты Гюгонио  $H$  и изотермы  $T$  для случая нормального газа.

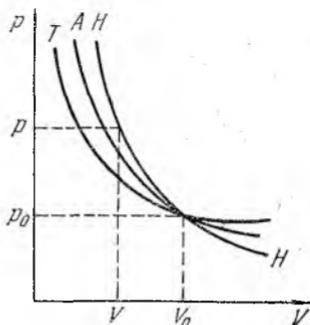


Рис. 2.31.

В предположении, что газ обладает свойствами I—V п. 3, изотерма удовлетворяет условиям (см. § 1, п. 4)

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{dF}{dV} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = \frac{d^2 F}{dV^2} > 0; \quad p \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad V \rightarrow 0. \quad (5)$$

Следовательно, изотерма (3) — выпуклая кривая, и любой луч, проведенный из точки  $(p_0, V_0)$ , пересекает ее не более чем в одной точке.

Поэтому луч  $K = \frac{p - p_0}{V - V_0}$  пересечет верхнюю часть изотермы (3) только в одной точке (рис. 2.32), если

$$-\infty < K = -m^2 < \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{V_0} = - \left[ \frac{c_T(V_0)}{V_0} \right]^2, \quad (6)$$

где  $c_T$  — изотермическая скорость звука. При  $K = -\infty$  (бесконечно сильная ударная волна) сжатие также будет бесконечным. Этот же вывод формально следует из формул для сжатия политропного газа при  $\gamma \rightarrow 1$ , так как  $h = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 1$ .

Укажем расчетные формулы для ударной волны в изотермическом газе, снова взяв в качестве параметра, определяющего силу волны, величину

$$M_0 = \frac{|u_0 - D|}{c_T(V_0)}.$$

Из (2) следует

$$\frac{F(V) - F(V_0)}{V_0 - V} = m^2 = \rho_0^2 c_T^2(V_0) M_0^2. \quad (7)$$

Отсюда определяется  $V$ , после чего  $u$  находится по формуле,

$$u - u_0 = m(V - V_0) = -\rho_0 c_T(V_0) M_0 (V - V_0), \quad (8)$$

где для определенности положено  $m < 0$  (ударная волна движется относительно газа слева направо). В случае идеального газа

$$p = F(V) = \frac{RT_0}{V} = \frac{c_T^2}{V} = c_T^2 \rho, \quad (9)$$

изотермическая скорость звука  $c_T = \sqrt{RT_0}$  постоянна и формулы (7), (8) принимают вид

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} = M_0^2, \quad (10)$$

$$u - u_0 = c_T M_0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) = c_T M_0 \left( 1 - \frac{1}{M_0^2} \right) = c_T \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right). \quad (11)$$

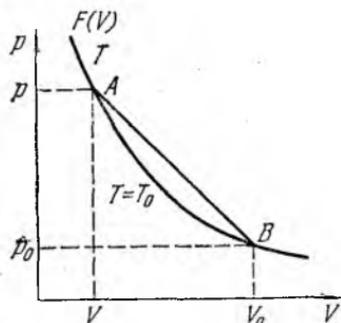


Рис. 2.32.

Переходя к инвариантам Римана (§ 2, п. 9)

$$s = u - c_T \ln p, \quad r = u + c_T \ln p, \quad (12)$$

приведем условиям Гюгонио (10), (11) симметричный вид:

$$s - s_0 = c_T \left[ -\ln M_0^2 + \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \right] = \Psi(M_0), \quad (13)$$

$$r - r_0 = c_T \left[ \ln M_0^2 + \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \right] = \Phi(M_0), \quad (14)$$

где  $s_0, r_0$  — значения инвариантов Римана, вычисленные в точке  $u_0, p_0, V_0$ .

Чтобы решить вопрос об устойчивости ударной волны в изотермическом газе, достаточно учесть требование второго закона термодинамики для неравновесного изотермического процесса (формула (1.2.9)):

$$\frac{dS}{dt} > \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt}. \quad (15)$$

Применим это неравенство к частице газа, пересекающей при своем движении ударную волну. Так как за единицу времени ударную волну пересекает масса газа  $|\rho_0(u_0 - D)| = |\rho(u - D)| = |m|$ , то, приняв эту величину за массу указанной частицы, мы сделаем равным 1 время перехода ее из состояния перед волной  $(u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0)$  в состояние за волной  $(u, p, V, \varepsilon)$ . Согласно закону сохранения энергии (формула (1.1.2)),  $\Delta Q = \Delta E + \Delta A$ , где  $\Delta E$  — приращение полной энергии частицы, а  $\Delta A$  — работа, совершенная ею за единицу времени над окружающим газом. Так как

$$\Delta E = |m| \left( \varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{u^2 - u_0^2}{2} \right), \quad \Delta A = (pu - p_0u_0) \operatorname{sign} m,$$

неравенство (15) дает

$$T_0(S - S_0) + \frac{p_0u_0 - pu}{m} + \varepsilon_0 - \varepsilon + \frac{u_0^2 - u^2}{2} > 0$$

(где  $m > 0$ , если волна движется справа налево относительно газа,  $m < 0$  в противном случае). Учитывая соотношения (1), (2), получаем

$$T_0(S - S_0) + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} + \varepsilon_0 - \varepsilon + \frac{(u_0 - D)^2}{2} - \frac{(u - D)^2}{2} > 0. \quad (16)$$

Подставляя сюда формулы (4.2.10):

$$(u - D)^2 = \frac{p_0 - p}{V - V_0} V^2, \quad (u_0 - D)^2 = \frac{p_0 - p}{V - V_0} V_0^2,$$

придадим неравенству (16) вид

$$T_0(S - S_0) - \left[ (\varepsilon - \varepsilon_0) + (V - V_0) \frac{p + p_0}{2} \right] = \\ = T_0(S - S_0) - H(p, V, p_0, V_0) > 0. \quad (17)$$

Вычислим величину  $T_0(S - S_0)$ . Для этого проинтегрируем термодинамическое тождество  $T dS = d\varepsilon + p dV$  вдоль изотермы  $T$  от точки  $(p_0, V_0)$  до точки  $(p, V)$  (рис. 2.32). Мы считаем газ нормальным, так что  $F = F(V)$  — кривая, обращенная выпуклостью вниз. Вдоль изотермы  $p = F(V)$ ,  $T = T_0 = \text{const}$ , поэтому

$$T_0(S - S_0) = \varepsilon - \varepsilon_0 + \int_{V_0}^V F(V) dV. \quad (18)$$

Подставляя это в неравенство (17), придадим ему окончательную форму:

$$\frac{p + p_0}{2} (V_0 - V) - \int_V^{V_0} F(V) dV > 0. \quad (19)$$

Очевидно, для нормального газа это требование равносильно условию  $V < V_0$ , т. е. состояниям за фронтом отвечает лишь верхняя половина изотермы  $T$ .

Отсюда, как и ранее, следует, что ударная волна в случае изотермического газа приводит к возрастанию давления и плотности; движение перед фронтом волны является сверхзвуковым, а за фронтом — дозвуковым (под скоростью звука здесь понимается изотермическая скорость звука  $c_T = V \sqrt{-\partial F / \partial V}$ ).

Условию устойчивости (19) можно придать иную форму. Рассмотрим в плоскости лагранжевых переменных  $(q, t)$  порцию газа, расположенную между прямыми  $q = q_1$  и  $q = q_2$  ( $q_1 < q_2$ ). Для любых последовательных моментов времени  $t_1, t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) неравенство (15), примененное к этой порции газа, дает

$$\int_{q_1}^{q_2} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} - T_0 S \right)_{t=t_1} dq - \int_{q_1}^{q_2} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} - T_0 S \right)_{t=t_2} dq \geq \Delta A, \quad (20)$$

где  $\Delta A$  — работа, совершенная этой порцией над окружающим газом за время  $t_2 - t_1$ :

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x^v)_{q=q_1} dt - \int_{t_1}^{t_2} (\rho u x^v)_{q=q_2} dt \quad (21)$$

(знак равенства в (20) соответствует случаю гладкого, т. е. квазиравновесного, течения). Из (20) и (21) легко получаем

Следующее интегральное условие, эквивалентное условию (19):

$$\oint_C \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} - T_0 S \right) dq - p u x^v dx \geq 0 \quad (22)$$

( $C$  — произвольный кусочно-гладкий контур, проходимый в положительном направлении).

Величина  $\varepsilon + u^2/2 - T_0 S = E - T_0 S$  называется в термодинамике *свободной энергией* (отнесенной к единице массы), а неравенство (22) выражает известный термодинамический закон: в изотермическом процессе совершаемая системой работа меньше, чем потеря собственной энергии, и равна ей лишь в случае квазиравновесного процесса.

В этом последнем случае течение гладкое, и из (22) вытекает дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} - T_0 S \right) + \frac{\partial}{\partial q} (p u x^v) = 0. \quad (23)$$

Оно должно выполняться тождественно в гладкой части течения, т. е. должно быть следствием дифференциальных уравнений движения (2.5.4), (2.5.5). Это действительно имеет место: из уравнений (2.5.4), (2.5.5) легко получается соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} - \int_1^V F(V) dV \right) + \frac{\partial}{\partial q} (p u x^v) = 0,$$

которое, в силу (18), совпадает с (23).

Заметим, что условия (19), (22), как это разъяснялось в § 1, можно понимать как требование возрастания энтропии полной системы, состоящей из частиц газа и внешних источников тепла (термостата). Равенство (23) тогда означает постоянство энтропии указанной системы в случае гладкого течения.

**7. Сильные и слабые ударные волны. Сравнение ударной волны и волны сжатия Римана.** Для простоты будем считать, что газ перед фронтом ударной волны покоится, т. е.  $u_0 = 0$ . Для бесконечно сильной ударной волны  $p/p_0 = \infty$ . Будем считать  $p$  конечным, а  $p_0 = 0$ .

Переходя в уравнениях (4.5.13) — (4.5.16) к пределу при  $M_0 \rightarrow \infty$ ,  $p_0 \rightarrow 0$ ,  $c_0 \rightarrow 0$ , получаем условия Гюгонио для бесконечно сильной ударной волны в политропном газе:

$$p = \lim (1 + h) p_0 M_0^2 = (1 - h) \rho_0 (u_0 - D)^2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2, \quad (1)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{1}{h} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad (2)$$

$$c = \sqrt{h(1 + h)} |D|, \quad (3)$$

$$u = (1 - h) D. \quad (4)$$

Мы видим, что кинетическая энергия газа за фронтом ударной волны равна внутренней, так как

$$\varepsilon = \frac{(1-h)^2}{2h(1+h)} c^2 = \frac{(1-h)^2}{2} D^2 = \frac{u^2}{2}.$$

Для слабых ударных волн будем считать величину  $M_0 = \frac{|u_0 - D|}{c_0}$  близкой к единице. Полагая

$$M_0 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

проведем разложение в формулах (4.5.13)–(4.5.16) по параметру  $\varepsilon$  с точностью до членов порядка  $\varepsilon^3$ :

$$\frac{p}{p_0} = 1 + (1+h)(2\varepsilon + \varepsilon^2), \quad (5)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M_0^2}{(1-h) + hM_0^2} = \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 + h\varepsilon(2 + \varepsilon)} \simeq [1 - 2h\varepsilon - h\varepsilon^2(1 - 4h)] \times \\ \times (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) = 1 + 2\varepsilon(1-h) + \varepsilon^2[1 - 5h + 4h^2] + O(\varepsilon^3), \quad (6)$$

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\left(1 + h - \frac{h}{M_0^2}\right)(1 - h + hM_0^2)} = 1 + 2h\varepsilon - h\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (7)$$

$$u - u_0 = (1-h)c_0 \left(M_0 - \frac{1}{M_0}\right) = (1-h)c_0(2\varepsilon - \varepsilon^2) + O(\varepsilon^3) \quad (8) \\ (m < 0).$$

Вычислим скачки инвариантов Римана  $r$ ,  $s$  на фронте слабой ударной волны:

$$r - r_0 = u - u_0 + \frac{(1-h)}{h}(c - c_0) = \\ = (1-h)c_0[(2\varepsilon - \varepsilon^2) + (2\varepsilon - \varepsilon^2)] + O(\varepsilon^3) = \\ = 4(1-h)c_0\varepsilon - 2(1-h)c_0\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (m < 0), \quad (9)$$

$$s - s_0 = u - u_0 - \frac{(1-h)}{h}(c - c_0) = (1-h)c_0(2\varepsilon - \varepsilon^2) - \\ - c_0 \frac{1-h}{h} [2h\varepsilon - h\varepsilon^2] + O(\varepsilon^3) = O(\varepsilon^3) \quad (m < 0). \quad (10)$$

Из общих свойств адиабаты Гюгонио  $H$ , как мы видели в п. 3, следует

$$S - S_0 = O(h^3). \quad (11)$$

Таким образом, в слабой ударной волне, распространяющейся по газу направо, инвариант  $r$  имеет скачок первого порядка по  $\varepsilon$ , а инвариант  $s$  и энтропия  $S$  имеют скачки третьего порядка. Аналогично в волне, идущей налево, инвариант  $r$  и энтропия  $S$  имеют скачки третьего порядка.

Формулы (10), (11) показывают, что слабая ударная волна идет себя, как «короткая» бегущая волна сжатия. Действительно, как мы видели в § 3, волну сжатия Римана характеризует постоянство энтропии  $S$  и одного инварианта Римана. Для слабых ударных волн это нарушается лишь в третьем порядке, и поэтому приближенно зависимости в слабой ударной волне можно считать такими же, как и в бегущей волне сжатия. Это позволяет приближенно заменять слабую ударную волну бегущей волной. В ряде случаев это оказывается полезным, особенно при анализе взаимодействий ударных волн с волнами Римана.

Учитывая, что в нашем приближении

$$D = c_0(1 + \epsilon) \quad (m < 0),$$

видим, что скорость слабой ударной волны есть среднее арифметическое скоростей  $r$ -характеристик, так как равенство

$$D = \frac{u_0 + c_0 + u + c}{2}$$

выполнено с точностью до членов третьего порядка.

**8. Ударный переход для сред с аномальными термодинамическими свойствами.** Вопрос о допустимости разрыва для газа (или жидкости), уравнения состояния которого не удовлетворяют условиям (4.3.1) для нормального газа, значительно усложняется. В целом, т. е. для произвольных уравнений состояния, удовлетворяющих лишь необходимым условиям термодинамики, этот вопрос не решен и в настоящее время.

В последние годы повысился интерес к физическим процессам, описываемым уравнениями состояния с аномальными термодинамическими свойствами (см. Л. В. Альтшулер [1965], Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер [1966]).

Наибольший интерес вызывает случай, когда нарушено требование II (см. п. 3) и величина  $p''_{VV}(V, S)$  может быть знакопеременной. В работах Г. Я. Галина [1958], А. Д. Сидоренко [1968], Б. Вендрофа [1972], Т. Лю [1975] рассмотрен этот случай.

Предполагается, что величина  $p''_{VV}(V, S)$  может быть знакопеременной, хотя нули этой функции при фиксированной  $S$  изолированы, кроме того, предполагается, что

$$p'_S(V, S) > 0, \quad p'_V(V, S) < 0. \quad (1)$$

Разумеется для газов с произвольными уравнениями состояния на любом разрыве должны быть выполнены условия Гюго-нио (4.2.4). В частности, поэтому параметры  $p_0, V_0$  перед фронтом разрыва и  $p, V$  — за фронтом должны лежать на адиабате Гюго-нио, т. е.

$$H(p, V; p_0, V_0) = 0. \quad (2)$$

В случае знакопеременности  $\rho''_{VV}$  условие  $S \geq S_0$  не является достаточным для выделения физически правильных разрывов; оно является, вообще говоря, лишь необходимым условием.

Достаточные условия допустимости разрыва, удовлетворяющего условию (2), могут быть получены из следующих, внешне различных, требований:

а) Требования устойчивости разрыва относительно разбиения его на последовательность нескольких разрывов, движущихся относительно газа в одном и том же направлении. Это требование предполагает, что при таком разбиении эти разрывы соединяются вновь в исходный разрыв.

б) Требования, чтобы состояния  $u_0, p_0, V_0$  и  $u, p, V$  могли быть предельными состояниями при  $x \rightarrow \pm\infty$  в ударном переходе для вязкого и теплопроводного газа с положительными коэффициентами вязкости и теплопроводности (см. § 5).

Эти требования при выполнении условий (1) приводят к следующему критерию допустимости разрыва.

Разрыв  $\{u, p, V; u_0, p_0, V_0\}$  ( $u_0, p_0, V_0$  — значения параметров перед фронтом ударной волны) допустим, если для любой точки  $(\bar{p}, \bar{V})$  адиабаты Гюгонио (2), промежуточной по отношению к ее точкам  $(p_0, V_0)$  и  $(p, V)$  выполнено неравенство

$$\frac{p - p_0}{V_0 - V} \geq \frac{\bar{p} - p_0}{V_0 - \bar{V}}. \quad (3)$$

При выполнении ограничений (1) из выполнения (3) следует, что  $S > S_0$ , т. е. критерий допустимости (3) для случая знакопеременности  $\rho''_{VV}(V, S)$  является более сильным ограничением, чем требование лишь возрастания энтропии.

**9. Примеры.** Рассмотрим здесь две простейшие задачи о течениях с ударными волнами.

1. Движение поршня в покоящемся газе.

В покоящийся политропный газ, расположенный справа от поршня и характеризуемый параметрами  $u_0 = 0, p_0, V_0, c_0$ , вдвигается поршень, имеющий постоянную скорость  $U > 0$  при  $t > 0$ .

По газу будет распространяться с постоянной скоростью  $D$  ударная волна, оставляющая за фронтом состояние с параметрами  $u, p, V, c$ . Ясно, что  $u = U$ . Из соотношения (4.5.16) поэтому определяем  $M_0$  как положительный корень уравнения

$$M_0^2 - \frac{U}{(1-h)c_0} M_0 - 1 = 0,$$

т. е.

$$M_0 = \frac{U}{2(1-h)c_0} + \sqrt{\frac{U}{4(1-h)^2 c_0^2} + 1}. \quad (1)$$

После этого величины  $p$ ,  $V$  определяются по формулам (4.5.13), (4.5.14), а  $D = c_0 M_0$ . Заметим, что при  $U > 0$  имеем  $V < V_0$  и условие устойчивости на ударной волне выполнено.

2. Отражение ударной волны от жесткой стенки.

По покоящемуся газу ( $u_0 = 0$ ,  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $c_0$ ) направо движется со скоростью  $D > 0$  ударная волна, оставляя за фронтом состояние  $u$ ,  $p$ ,  $V$ ,  $c$ , вычисленное выше (рис. 2.33, а). В момент  $t = 0$  ударная волна подходит к жесткой стенке  $x = x_0$ , ограничивающей газ справа. На жесткой стенке задается условие  $u(x_0, t) = 0$ .

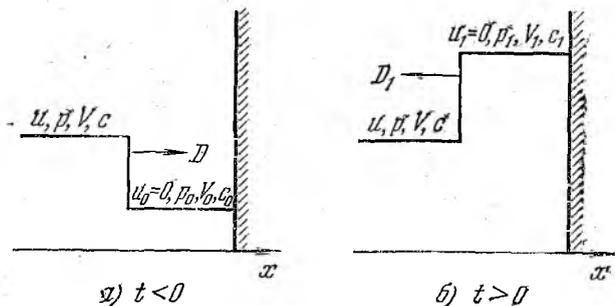


Рис. 2.33.

Поэтому ударная волна отражается от стенки в виде ударной волны, распространяющейся влево со скоростью  $D_1 < 0$ . Обозначим состояние за фронтом отраженной ударной волны через  $u_1 = 0$ ,  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $c_1$  (рис. 2.33, б).

Таким образом, задача сводится к определению именно этих параметров. Заметим, что задача определения  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $c_1$  по известным  $u$ ,  $p$ ,  $V$ ,  $c$  сводится к предыдущей, так как известно, что  $u_1 = 0$ .

Введем в рассмотрение величины

$$M_0 = \frac{D - u_0}{c_0} = \frac{D}{c_0}, \quad M = \frac{D - u}{c}, \quad M_1 = \frac{u - D_1}{c}. \quad (2)$$

Справедливы соотношения

$$M_0 > 1, \quad 0 < M < 1, \quad M_1 > 1, \quad (3)$$

$$u - u_0 = u = (1 - h) c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right), \quad (4)$$

$$u_0 - u = -u = (1 - h) c \left( M - \frac{1}{M} \right), \quad (5)$$

$$u - u_1 = u = (1 - h) c \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right). \quad (6)$$

Из уравнений (5), (6) следует, что величины  $M_1$  и  $1/M$  удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению

$$\alpha^2 - \frac{u}{(1-h)c} \alpha - 1 = 0. \quad (7)$$

Так как  $M_1 > 1$ ,  $\frac{1}{M} > 1$ , то

$$M_1 = \frac{1}{M}, \quad \text{т. е.} \quad MM_1 = 1. \quad (8)$$

Вычислим увеличение давления при отражении ударной волны. Пользуясь (8), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= (1+h)M^2 - h, \quad M^2 = \frac{\frac{p_0}{p} + h}{1+h}, \\ \frac{p_1}{p} &= (1+h)M_1^2 - h = (1+h)\frac{1}{M^2} - h = \frac{(1+2h)\frac{p}{p_0} - h}{1+h\frac{p}{p_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{p_1 - p_0}{p - p_0} = 1 + \frac{(1+h)}{h + \frac{p_0}{p}}. \quad (10)$$

В случае слабой волны  $\frac{p}{p_0} \rightarrow 1$ ,  $\frac{p_1 - p_0}{p - p_0} \rightarrow 2$ , что соответствует акустическому закону отражения.

В случае сильной волны, когда  $\frac{p_0}{p} \rightarrow 0$ ,  $\frac{p_1 - p_0}{p - p_0} \rightarrow 2 + \frac{1}{h} = 2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ . Для газов с показателем  $\gamma$ , близким к 1, получаем сильное увеличение давления. Однако не следует думать, что для изотермического газа увеличение давления будет бесконечным, так как аналогия изотермического газа и политропного с  $\gamma = 1$  здесь неприменима. Действительно, если для изотермического газа  $p_0 \rightarrow 0$ , то  $\rho_0 \rightarrow 0$ , так как  $c_T^2 = RT = \text{const}$ . Поэтому не существует изотермической ударной волны, идущей по фону  $p_0 = 0$  (вакуум) с конечной скоростью.

## § 5. Изучение ударного перехода. Ширина ударной волны

1. **Постановка вопроса для нормального газа.** Будем предполагать, что уравнения состояния газа удовлетворяют условиям I—VI, сформулированным в п. 4 § 1, т. е. газ нормален.

Как мы уже говорили, разрывные течения мы рассматриваем как предельные течения вязкой и теплопроводящей жидкости при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к

воду. Поэтому мы сейчас изучим некоторые простейшие решения уравнений газовой динамики для газа, обладающего вязкостью и теплопроводностью, а затем с помощью предельного перехода получим разрывные течения. При этом мы сможем оценить ширину зоны ударной волны для газов, обладающих конечной вязкостью и теплопроводностью \*).

Будем рассматривать лишь случай плоской симметрии ( $v = 0$ ), так как на достаточно малых участках и малых временах любая ударная волна при  $v \neq 0$  может приближенно рассматриваться как плоская.

Выпишем дифференциальные уравнения для вязкой теплопроводящей жидкости (2.5.11) — (2.5.13):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ p - \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u^2 \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - \mu u \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0. \quad (3)$$

К уравнениям (1) — (3) добавляются уравнения состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad (4)$$

которые мы предполагаем удовлетворяющими требованиям I—VI. Умножая (1) на  $\frac{u^2}{2} - \varepsilon$ , (2) на  $-u$  и суммируя результаты с уравнением (3), получим

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Выражая  $\frac{\partial u}{\partial x}$  из (1) и подставляя в (5), придадим ему форму

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + p \left( \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Поскольку  $T dS = d\varepsilon + p dV$ , то из (6) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\rho T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\mu}{\rho T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa}{\rho T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

\*) Наше изложение в пп. 1—4 следует работе Д. Джилбарга [1951].

Уравнение (7) показывает, что энтропия  $S$  теплоизолированной массы газа возрастает. В самом деле, интегрируя уравнение (7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{q_1}^{q_2} S(q, t) dq = \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} \Big|_{q_1}^{q_2} + \int_{q_1}^{q_2} \left[ \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (8)$$

где  $q$  — лагранжева координата ( $dq = \rho dx$ ),  $q_1, q_2$  — границы выделенного объема газа.

Если рассматриваемый объем газа теплоизолирован, то  $\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{q_1}^{q_2} = 0$ , и из (8) следует неубывание полной энтропии газа. В частности, из уравнения (7) следует, что в вязком, но лишенном теплопроводности газе энтропия каждой частицы не убывает по времени.

Рассмотрим простейшие решения системы уравнений (1)–(3), именно стационарные решения. Поскольку система (1)–(3) инвариантна относительно преобразования Галилея

$$x' = x - Ut, \quad u' = u - U,$$

то стационарные течения мы будем рассматривать в такой системе координат, в которой течение имеет неподвижные профили всех величин  $u, p, \rho, \varepsilon$ . Опуская штрихи у переменных  $x', u'$  и полагая  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$ , получим уравнения для определения стационарных течений:

$$\frac{d}{dx} \rho u = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ p + \rho u^2 - \mu \frac{du}{dx} \right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - \mu u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} \right] = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения имеют первые интегралы:

$$\rho u = C_1, \quad p + \rho u^2 - \mu \frac{du}{dx} = C_2, \quad C_1 \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - \mu u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = C_3. \quad (12)$$

Первый интеграл, очевидно, выражает постоянство потока массы, второй — потока импульса, третий — постоянство потока энергии через произвольное сечение  $x = \text{const}$ . Преобразуем уравнения (12) к виду, удобному для дальнейшего. Простые

преобразования приводят к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\mu \frac{dV}{dx} = \frac{1}{C_1} \left[ C_1^2 \left( V - \frac{C_2}{C_1} \right) + p(V, T) \right] = \mathcal{M}(V, T), \quad (13)$$

$$\kappa \frac{dT}{dx} = C_1 \left[ \varepsilon(V, T) - \frac{1}{2} C_1^2 \left( V - \frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{C_3}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{C_1^2} \right] = \mathcal{L}(V, T), \quad (14)$$

которые связывают две функции  $V, T$ . Как следствие уравнений (13), (14) получаем уравнение в плоскости  $V, T$ :

$$\frac{\kappa}{\mu} \frac{dT}{dV} = \frac{\mathcal{L}(V, T)}{\mathcal{M}(V, T)}, \quad (15)$$

играющее важную роль в анализе стационарных решений и условий их существования.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{V} = V \frac{C_1}{C_2}, \quad \bar{p} = \frac{p}{C_2}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{C_1^2}{C_2^2}, \quad \bar{T} = R \frac{C_1^2}{C_2^2} T. \quad (16)$$

Переходя к безразмерным переменным  $\bar{V}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{T}$ , перепишем уравнения (13), (14) в виде

$$\bar{\mu} \frac{d\bar{V}}{dx} = \bar{V} + \bar{p}(\bar{V}, \bar{T}) - 1 = \bar{\mathcal{M}}(\bar{V}, \bar{T}), \quad (17)$$

$$\bar{\kappa} \frac{d\bar{T}}{dx} = \bar{\varepsilon}(\bar{V}, \bar{T}) - \frac{1}{2}(\bar{V} - 1)^2 - \bar{\beta} = \bar{\mathcal{L}}(\bar{V}, \bar{T}), \quad (18)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu} &= \frac{\mu}{C_1}, & \bar{\kappa} &= \frac{\kappa}{C_1 R}, & \bar{\beta} &= \frac{C_3 C_1}{C_2^2} - \frac{1}{2}, \\ \bar{p}(\bar{V}, \bar{T}) &= p(V, T), & \bar{\varepsilon}(\bar{V}, \bar{T}) &= \varepsilon(V, T). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для упрощения записи в дальнейшем отбросим черту над всеми величинами и перепишем окончательно систему (17), (18):

$$\mu \frac{dV}{dx} = p(V, T) + V - 1 = \mathcal{M}(V, T), \quad (20)$$

$$\kappa \frac{dT}{dx} = \varepsilon(V, T) - \frac{1}{2}(V - 1)^2 - \beta = \mathcal{L}(V, T). \quad (21)$$

Однако мы должны помнить, что зависимости  $p(V, T), \varepsilon(V, T)$  в (20), (21) получаются из уравнений состояния с учетом (16).

В уравнения (20), (21) входят безразмерные величины  $p(V, T), \varepsilon(V, T)$ , где  $V, T$  также безразмерны. Легко проверить,

что эти зависимости таковы, что удовлетворяют условиям I—VI, если им удовлетворяют исходные уравнения состояния. (Здесь следует иметь в виду, что  $C_2 > 0$ ,  $C_3 C_1 > 0$ ).

Для системы (20), (21) поставим следующую краевую задачу:

Найти решение  $V(x)$ ,  $T(x)$  системы (20), (21), которое на бесконечности стремится к постоянным значениям, т. е.

при  $x \rightarrow +\infty$

$$V(x) \rightarrow V_1, \quad T(x) \rightarrow T_1, \quad (22)$$

а при  $x \rightarrow -\infty$

$$V(x) \rightarrow V_2, \quad T(x) \rightarrow T_2. \quad (23)$$

Необходимым условием существования такого решения является, очевидно, требование, чтобы точки  $(V_1, T_1)$ ,  $(V_2, T_2)$  были стационарными точками системы (20), (21), т. е.

$$\mathcal{M}(V_1, T_1) = \mathcal{L}(V_1, T_1) = \mathcal{M}(V_2, T_2) = \mathcal{L}(V_2, T_2) = 0. \quad (24)$$

Иными словами, точки  $(V_1, T_1)$ ,  $(V_2, T_2)$  должны быть точками пересечения кривых

$$\mathcal{M}(V, T) = 0, \quad \mathcal{L}(V, T) = 0. \quad (25)$$

Пусть такие точки  $(V_1, T_1)$ ,  $(V_2, T_2)$  существуют. Тогда в этих точках, согласно (20), (21),

$$\mu \frac{dV}{dx} = \kappa \frac{dT}{dx} = 0;$$

поэтому из интегралов (12) следует:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = C_1, \quad (26)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 = C_2, \quad (27)$$

$$\rho_1 u_1 \left( \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right) = \rho_2 u_2 \left( \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \right) = C_3 \quad (28)$$

(здесь все функции  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  — исходные, без преобразования к безразмерным переменным).

Отсюда следует, что состояния  $u_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $\varepsilon_1$ ;  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $p_2$ ,  $\varepsilon_2$  должны удовлетворять условиям Гюгонио. В самом деле, так как мы рассматриваем стационарное решение системы (1)—(3) в движущейся системе координат, то, обозначая скорость перемещения  $U$  системы координат через  $D$ , получим, что в условиях (26)—(28) величины  $u_1$ ,  $u_2$ , при переходе к неподвижной системе координат заменяются на  $u_1 - D$ ,  $u_2 - D$ , после чего условия (26)—(28) принимают обычный вид условий Гюгонио (4.1.10)—(4.1.12). Отсюда, в частности, следует, что точки  $(\rho_1, V_1)$ ,  $(\rho_2, V_2)$

в плоскости переменных  $p, V$  должны лежать на адиабате Гюгонио.

Итак, все точки пересечения кривых (25) лежат на адиабате Гюгонио, проходящей через одну из них.

2. Свойства кривых  $\mathcal{M} = 0, \mathcal{L} = 0$  для нормального газа. Покажем, что для нормального газа функции  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  обладают следующими свойствами:

$$1. \frac{\partial \mathcal{L}(V, T)}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial \mathcal{M}(V, T)}{\partial T} > 0.$$

2. Кривые  $\mathcal{M} = 0, \mathcal{L} = 0$  либо не имеют точек пересечения, либо имеют две и только две общие точки  $(V_1, T_1), (V_2, T_2)$ . Будем обозначать их через  $(V_0, T_0), (V_1, T_1)$ , предполагая, что  $V_0 > V_1$ .

$$3. \frac{\partial \mathcal{L}(V, T)}{\partial V} > 0 \text{ на кривой } \mathcal{L} = 0 \text{ при } V_1 < V < V_0.$$

$$4. \frac{\mathcal{L}_V}{\mathcal{L}_T} < \frac{\mathcal{M}_V}{\mathcal{M}_T} \text{ в точке } (V_0, T_0) \text{ и } \frac{\mathcal{L}_V}{\mathcal{L}_T} > \frac{\mathcal{M}_V}{\mathcal{M}_T} \text{ в точке } (V_1, T_1).$$

Из свойства 1 следует, что температура  $T$  есть однозначная функция переменного  $V$  вдоль кривых  $\mathcal{L} = 0, \mathcal{M} = 0$ . Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} T = l(V) \text{ вдоль кривой } \mathcal{L} = 0, \\ T = m(V) \text{ вдоль кривой } \mathcal{M} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из свойств 1, 3 следует, что кривая  $\mathcal{L} = 0$  на участке  $[V_1, V_0]$  монотонно понижается, т. е. функция  $l(V)$  монотонно убывает. Действительно, вдоль кривой  $\mathcal{L} = 0$  имеем

$$\frac{dl(V)}{dV} = \frac{dT}{dV} = - \frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}} < 0. \quad (2)$$

Наконец, свойство 4 означает, что наклон кривой  $\mathcal{M} = 0$  в точке  $(V_0, T_0)$  меньше наклона кривой  $\mathcal{L} = 0$ , а в точке  $(V_1, T_1)$  — больше.

Таким образом, свойства 1—4 функций  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  означают, что кривые  $\mathcal{L} = 0, \mathcal{M} = 0$  в плоскости  $V, T$  располагаются примерно следующим образом (рис. 2.34).

Докажем, что свойства 1—4 функций  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  следуют из свойств I—V уравнений состояния.

Свойство 1 для  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  записывается в виде

$$\frac{\partial p(V, T)}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial v(V, T)}{\partial T} > 0, \quad (3)$$

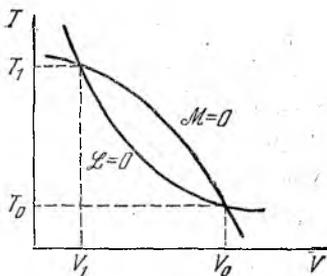


Рис 2.34

и так как безразмерные переменные (5.1.16) отличаются от размерных лишь положительными множителями, то неравенства (3) следуют из свойств IV, V (см. также формулу (1.4.23)).

Докажем теперь свойство 2. Все точки пересечения кривых  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$  должны лежать в плоскости  $V, T$  на адиабате Гюгонио  $H$ , проходящей через одну из них. Линия  $\mathcal{M} = 0$ , очевидно, в плоскости безразмерных величин  $p, V$  есть прямая

$$p = 1 - V \quad (4)$$

с отрицательным наклоном. Как мы видели в п. 3 § 4, любая прямая с отрицательным наклоном пересекает адиабату Гюгонио  $H$  ровно в двух точках. Итак, если кривые  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$  имеют хотя бы одну общую точку, то они имеют и вторую, но не более. Свойство 2 доказано.

Докажем теперь свойства 3, 4. Пользуясь соотношением  $de = T dS - p dV$  в выражениях (5.1.13), (5.1.14) для  $\mathcal{L}(V, T)$ ,  $\mathcal{M}(V, T)$  (в размерных переменных), получим

$$d\mathcal{L} = C_1 [T dS - C_1 \mathcal{M} dV]. \quad (5)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V, T)}{\partial V} = C_1 T \frac{\partial S(V, T)}{\partial V} - C_1^2 \mathcal{M}. \quad (6)$$

Рассмотрим картину пересечения кривых  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$  в плоскости размерных переменных  $V, p$  (рис. 2.35). Из (5) следует, что на кривой  $\mathcal{L} = 0$

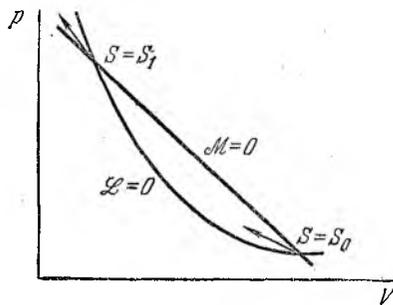


Рис. 2.35.

$$\frac{dS}{dV} = \frac{C_1}{T} \mathcal{M}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что  $\frac{dS}{dV} = 0$  в точках пересечения кривой  $\mathcal{L} = 0$  с прямой  $\mathcal{M} = 0$ , т. е. кривая  $\mathcal{L} = 0$  касается адиабаты  $A$  Пуассона, проходящей через точку пересечения, а следовательно, и адиабаты  $H$ . Так как наклон адиабаты  $A$  для нормального газа в точке  $(p_1, V_1)$  больше, чем наклон луча  $\mathcal{M} = 0$ , а в точке  $(p_0, V_0)$  меньше наклона  $\mathcal{M} = 0$ , то отсюда следует, что наклон кривой  $\mathcal{L} = 0$  в точке  $(p_1, V_1)$  больше наклона прямой  $\mathcal{M} = 0$ , а в точке  $(p_0, V_0)$  меньше.

При отображении плоскости  $V, p$  на плоскость  $V, T$  нижней полуплоскости  $\mathcal{M}(V, p) < 0$  соответствует область  $\mathcal{M}(V, T) < 0$ , которая лежит ниже кривой  $\mathcal{M} = 0$  в силу соотношения

$$\frac{\partial p(V, T)}{\partial T} > 0,$$

нраведливого для нормального газа. Отсюда следует, что картина пересечения кривых  $M = 0$ ,  $\mathcal{L} = 0$  в плоскости  $V, p$  качественно та же, что и в плоскости  $V, T$  (рис. 2.34).

Итак, свойства 3, 4 доказаны\*).

3. Качественное исследование интегральных кривых ударного перехода. Решение системы (5.1.20), (5.1.21), удовлетворяющее крайевым условиям (5.1.22), (5.1.23), описывает стационарную ударную волну в вязком теплопроводящем газе. Будем обозначать через  $V_0$ ,  $T_0$  состояние перед фронтом волны, через  $V_1$ ,  $T_1$  — состояние за фронтом, а для определенности будем считать, что  $m = C_1 > 0$ , т. е. ударная волна распространяется по оси влево. Тогда безразмерные величины  $\mu < 0$ ,  $\kappa > 0$ .

Решение  $V = V(x)$ ,  $T = T(x)$  системы (5.1.20), (5.1.21) можно рассматривать как параметрическое задание интегральной кривой уравнения

$$\frac{\kappa}{\mu} \frac{dT}{dV} = \frac{\mathcal{L}(V, T)}{\mathcal{M}(V, T)}. \quad (1)$$

Обратно, каждому решению  $T = T(V)$  уравнения (1) отвечает решение  $T = T(x)$ ,  $V = V(x)$  системы (5.1.20), (5.1.21), определенное с точностью до сдвига.

Ударному переходу будет отвечать решение  $T = T(V)$  уравнения (1), проходящее через точки  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$  пересечения кривых  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$ . Ясно, что эти точки являются особыми точками уравнения (1), и это делает возможной данную постановку задачи.

Рассмотрим в плоскости переменных  $V, T$  поле направлений вектора  $\{\mathcal{M}, \mathcal{L}\}$ . Кривые  $\mathcal{M} = 0$ ,  $\mathcal{L} = 0$  разделяют квадрант  $V > 0$ ,  $T > 0$  на четыре области I—IV. Номер области соответствует номеру четверти, в которой лежит вектор  $\{\mathcal{M}, \mathcal{L}\}$  (рис. 2.36).

Из приведенной на рис. 2.36 картины поля направлений для уравнения (1) следует, что в каждой из областей функция

\*) Заметим, что изучение кривых  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$  в плоскости  $V, p$  значительно проще, чем в плоскости  $V, T$ . Однако для исследования изотермического скачка удобнее пользоваться переменными  $V, T$ .

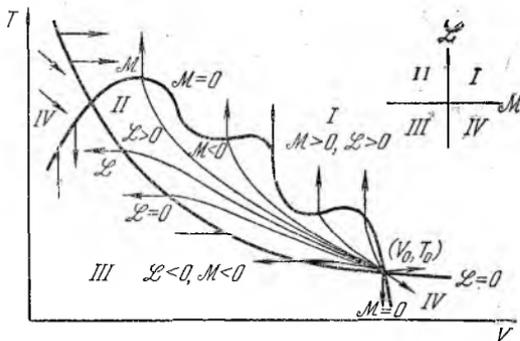


Рис. 2.36

$T = T(V)$  на интегральной кривой монотонна. При этом интегральные кривые могут переходить из одной области в другую в следующем порядке: из области *IV* в области *I* и *III*, из области *II* в области *I* и *III*. Невозможны переходы: из областей *I*, *III* в области *II*, *IV*, из области *IV* в *II* и обратно из *II* в *IV*.

Отсюда следует, что интегральная кривая, соединяющая точки  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$ , должна целиком лежать в области *II*. Таким образом, для ударного перехода должны иметь место соотношения

$$\frac{dV}{dx} < 0, \quad \frac{dT}{dx} > 0 \quad (m = C_1 > 0). \quad (2)$$

Докажем существование и единственность интегральной кривой ударного перехода. Для этого установим тип особых точек  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$  уравнения (1). Как известно, тип особой точки определяется характеристическим уравнением, которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} - \lambda & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Для корней  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения имеем выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}}.$$

Легко видеть, что в силу свойств 1 и 3 функций  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  характеристические корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и различны. Они одного знака, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \end{vmatrix} > 0,$$

и разных знаков, если  $\Delta < 0$ . Поэтому ввиду свойства 4 функций  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  заключаем, что в точке  $(V_0, T_0)$   $\lambda_1, \lambda_2$  — одного знака (положительны), а в точке  $(V_1, T_1)$  — разного. Итак, точка  $(V_0, T_0)$  является узлом, а точка  $(V_1, T_1)$  — седлом для уравнения (1). Покажем, что существует интегральная кривая уравнения (1), соединяющая точки  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$ . Согласно рис. 2.36 для поля направлений уравнения (1), через любую точку  $M$  кривой  $\mathcal{M} = 0$  проходит интегральная кривая уравнения (1), проходящая одновременно через точку  $(V_0, T_0)$ . Устремляя точку  $M$  по кривой  $\mathcal{M} = 0$  к точке  $(V_1, T_1)$ , получим по непрерывности, что точки  $(V_1, T_1)$  и  $(V_0, T_0)$  соединяются интегральной кривой уравнения (1).

Аналогично через любую точку  $L$  кривой  $\mathcal{L} = 0$  проходит интегральная кривая (1), проходящая через точку  $(V_0, T_0)$ . Устремляя точку  $L$  по кривой  $\mathcal{L} = 0$  к точке  $(V_1, T_1)$ , получим в пределе, что существует, быть может, отличная от предыдущей, интегральная кривая уравнения (1), соединяющая точки  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$ .

Так как точка  $(V_1, T_1)$  является седлом, то, согласно качественной теории дифференциальных уравнений, через нее проходят только две интегральные кривые уравнения (1).

Поэтому точки  $(V_0, T_0)$  и  $(V_1, T_1)$  соединяются одной и только одной интегральной кривой уравнения (1). Действительно, если бы эти точки соединялись двумя различными интегральными кривыми уравнения (1), то через эти точки проходила бы также любая интегральная кривая, проведенная через точку, лежащую внутри области, ограниченной этими двумя интегральными кривыми. Это противоречит нашему выводу о том, что точка  $(V_1, T_1)$  — седло.

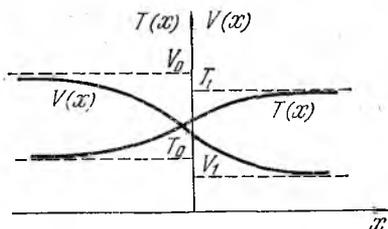


Рис. 2.37.

В силу свойств 1, 3 функций  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$ , кривые  $\mathcal{M} = 0$ ,  $\mathcal{L} = 0$  суть нули первого порядка этих функций. Отсюда следует, что в окрестности особых точек (например,  $(V_0, T_0)$ ) функции  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$  представляются в виде

$$\mathcal{L} = a_{11}(V - V_0) + a_{12}(T - T_0),$$

$$\mathcal{M} = a_{21}(V - V_0) + a_{22}(T - T_0),$$

а вдоль интегральной кривой, соединяющей точки  $(V_0, T_0)$ ,  $(V_1, T_1)$ ,

$$\mathcal{M} = b(V - V_0), \quad b \neq 0.$$

Из уравнения (5.1.21) следует, что «ширина» зоны ударного перехода бесконечна, так как интеграл

$$\Delta x = \int_{V_0}^{V_1} \frac{\mu dV}{\mathcal{M}(V, T)}$$

расходится. Поэтому графики ударного перехода имеют вид, показанный примерно на рис. 2.37, на котором видно, что значения  $V_0, T_0$  перед фронтом и  $V_1, T_1$  за фронтом достигаются асимптотически на бесконечности.

**4. Предельные случаи. Изотермический скачок.** Рассмотрим поведение ударного перехода в двух предельных случаях: при  $x \rightarrow 0$  и при  $\mu \rightarrow 0$ .

Если мы зафиксируем  $\mu > 0$  и будем варьировать  $\kappa$ , то зависимость ударных переходов от  $\kappa$  будет монотонной в том смысле, что меньшему значению  $\kappa$  будет отвечать интегральная кривая уравнения (5.3.1), лежащая ближе к кривой  $\mathcal{L} = 0$ .

Докажем, что при достаточно малом  $\kappa$  интегральная кривая (5.3.1) будет лежать в  $\varepsilon$ -полоске над кривой  $\mathcal{L} = 0$ . Действительно, в любой точке области  $\Pi$  над  $\varepsilon$ -полоской кривой  $\mathcal{L} = 0$  будем иметь  $\mathcal{L} > \delta(\varepsilon)$ . Тогда, выбрав сколь угодно большое  $N > 0$ , можно подобрать столь малое  $\kappa = \kappa(\varepsilon, N)$ , что в любой точке над  $\varepsilon$ -полоской

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{\mu}{\kappa} \left| \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}} \right| < -N,$$

т. е. наклон интегральных кривых уравнения (5.3.1) над  $\varepsilon$ -полоской может быть сделан больше максимального наклона кривой, ограничивающей сверху  $\varepsilon$ -полоску\*). Тогда, если интегральная кривая выйдет в какой-либо точке из  $\varepsilon$ -полоски, то она уже не войдет в точку  $(V_1, T_1)$ . Это означает, что при  $\kappa \rightarrow 0$  ударный переход стремится к кривой  $\mathcal{L} = 0$ .

Рассмотрим второй предельный случай, когда  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\kappa \neq 0$ . Если отрезок линии  $\mathcal{M} = 0$ , заключенный между особыми точками, есть монотонно опускающаяся в сторону растущих  $V$  кривая, то аналогичным рассуждением доказывается, что при  $\mu \rightarrow 0$  ударный переход стремится к кривой  $\mathcal{M} = 0$ .

В случае, когда этот участок кривой  $\mathcal{M} = 0$  не является монотонной кривой, дело обстоит иначе. Рассмотрим для простоты случай, когда кривая  $\mathcal{M} = 0$  на отрезке  $V_1 \leq V \leq V_0$  имеет один максимум (рис. 2.38). Ясно, что в этом случае верхней границей интегральных кривых является кривая  $A_1 A_2 A_0$ , состоящая из хорды  $A_1 A_2$ , параллельной оси  $V$ , и дуги  $A_0 A_2$  кривой  $\mathcal{M} = 0$ . Рассуждая аналогично предыдущему, можно доказать, что эта граница является точной, т. е. при  $\mu \rightarrow 0$  интегральная кривая стремится к кривой  $A_1 A_2 A_0$ , причем равномерно. В частности, на интервале  $[V_1 + \varepsilon, V_2 - \varepsilon]$  ударный переход лежит в  $\varepsilon$ -полоске  $A'_1 A''_1 A'_2 A''_2$  (заштрихована на рис. 2.38). Так как в этой полоске  $|\mathcal{M}(V, T)| > M_0(\varepsilon)$ , а  $|\mathcal{L}(V, T)| < L_0(\varepsilon)$ , то справедливо неравенство

$$\frac{\kappa}{\mu} \left| \frac{dT}{dV} \right| < \left| \frac{L_0}{M_0} \right|.$$

\*) Для определенности можно считать, что  $\varepsilon$ -полоска получается сдвигом кривой  $\mathcal{L} = 0$  по переменному  $T$  на величину  $\varepsilon$ .

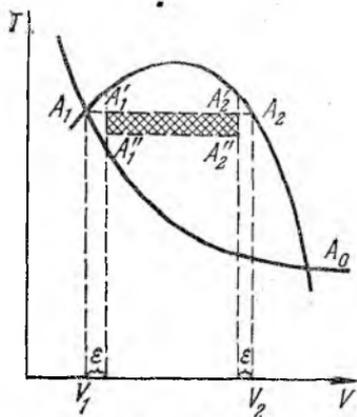


Рис. 2.38.

Отсюда следует, что можно сделать  $\mu$  столь малым, что на интервале  $[V_1 + \varepsilon, V_2 - \varepsilon]$  будем иметь

$$\left| \frac{dT}{dV} \right| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, \mu), \quad \delta_1 \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $T$  находится на этом интервале в пределах  $T_1 - \alpha(\varepsilon, \mu) \leq T \leq T_1 + \alpha(\varepsilon, \mu)$ ,  $\alpha(\varepsilon, \mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Соответствующий интервалу  $[V_1 + \varepsilon, V_2 - \varepsilon]$  отрезок  $\Delta x$  имеет величину

$$\Delta x = \Delta(\varepsilon, \mu) = \int_{V_1 + \varepsilon}^{V_2 - \varepsilon} \frac{\mu dV}{\mathcal{M}(V, T(V))}.$$

Так как на интервале  $[V_1 + \varepsilon, V_2 - \varepsilon]$   $\mathcal{M}(V, T) > M_0(\varepsilon) > 0$ , то отсюда следует, что  $\Delta(\varepsilon, \mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Полученные соотношения справедливы при произвольном  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, при наличии максимума на отрезке  $V_1 \leq V \leq V_0$  кривой  $\mathcal{M} = 0$  ударный переход в случае  $\mu \neq 0$ ,  $\mu = 0$  состоит в плавном изменении на интервале  $(-\infty, x_0)$  от

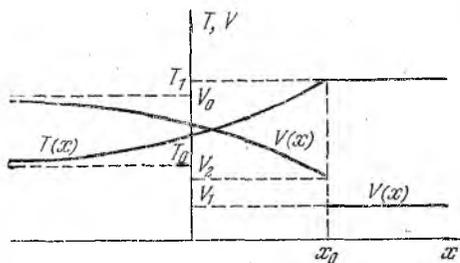


Рис. 2.39.

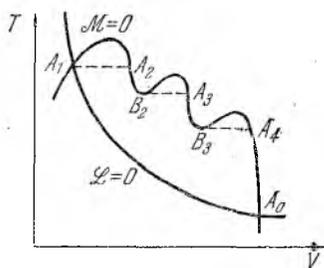


Рис. 2.40.

значений  $V_0, T_0$  перед фронтом до значений  $V_2, T_2 = T_1$  (точка  $A_2$  на рис. 2.38) и в скачке удельного объема в точке  $x_0$  от значений  $V_2$  слева до  $V_1$  справа при постоянной температуре  $T = T_1$  (рис. 2.39). Итак, при наличии одной лишь теплопроводности возможен скачок плотности при постоянной температуре. Такой скачок называется *изотермическим*.

Как следствие положительности коэффициента теплопроводности отсюда следует, что удельный объем  $V_2$  перед фронтом изотермического скачка больше удельного объема  $V_1$  за фронтом изотермического скачка. Тем самым мы получаем, что предельные разрывы при  $\mu \rightarrow 0$  удовлетворяют условию устойчивости разрыва в изотермическом газе, которое мы получили в п. 6 § 4.

В случае, если кривая  $\mathcal{M} = 0$  имеет несколько максимумов, ударный переход будет иметь несколько изотермических скачков (рис. 2.40), разделенных зонами гладкого течения. В этом

случае ударный переход стремится при  $\mu \rightarrow 0$  к кривой  $A_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 A_0$ , что ясно из того, что интегральная кривая уравнения (5.3.1) всегда остается внутри зоны II.

Заметим также, что явление изотермического скачка зависит не только от уравнений состояния, но также и от констант  $C_1, C_2, C_3$ , определяющих течение. Вообще говоря, изотермический скачок возникает лишь для достаточно сильных ударных волн. Это мы покажем ниже для случая идеального газа.

В заключение этого пункта заметим, что мы получили стационарные течения вязкого и теплопроводящего газа в виде «размазанной» ударной волны, типа указанной на рис. 2.37. В самом деле, значения  $V_0, T_0, u_0$  перед фронтом и  $V_1, T_1, u_1$  за фронтом удовлетворяют условиям Гюгоннио и условию устойчивости  $S_1 > S_0$  ( $V_1 < V_0$ ). Поэтому при  $\mu \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0$  мы получим в пределе из решений  $T = T(x), V = V(x)$  систем (5.1.20), (5.1.21) устойчивый разрыв (ударную волну), удовлетворяющий условиям динамической совместности и условию устойчивости.

Вообще существует предположение, что любые решения уравнений газовой динамики, содержащие устойчивые разрывы, могут рассматриваться как предельные решения уравнений газовой динамики с вязкостью и теплопроводностью при стремлении к нулю коэффициентов вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $\kappa$ .

До сих пор нет ни одного примера, опровергающего эту гипотезу, однако нет и ее доказательства. Последнее связано с трудностями, которые возникают при точном рассмотрении задачи Коши для нелинейных уравнений, описывающих течения вязкого теплопроводящего газа.

В настоящем параграфе мы показали лишь, что эта гипотеза верна для стационарных течений, т. е. для постоянной ударной волны, которая существует неопределенно долгое время.

**5. Ударный переход для случая идеального газа (исследование Беккера).** Первое исследование ударного перехода в вязком теплопроводящем газе было проведено Р. Беккером [1921]. Он рассмотрел случай идеального газа

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{R\varepsilon}{c_V V}, \quad \varepsilon = c_V T. \quad (1)$$

В безразмерных переменных уравнения (1) принимают вид

$$T = pV, \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} T = \frac{1}{\gamma - 1} pV, \quad (2)$$

а функции  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  специализируются следующим образом:

$$\mathcal{M}(V, T) = \frac{T}{V} + V - 1, \quad (3)$$

$$\mathcal{L}(V, T) = \frac{1}{\gamma - 1} T - \frac{1}{2} (V - 1)^2 - \beta. \quad (4)$$

Таким образом, кривая  $\mathcal{M}(V, T) = 0$  есть парабола

$$T = V - V^2 = -\left(V - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \quad (5)$$

обращенная выпуклостью вверх, имеющая ось прямую  $V = 1/2$  и вершиной точку  $V = 1/2$ ,  $T = 1/4$  (рис. 2.41). Кривая  $\mathcal{L}(V, T) = 0$  также есть парабола

$$T = \frac{\gamma - 1}{2}(V - 1)^2 + \beta(\gamma - 1), \quad (6)$$

обращенная выпуклостью вниз, с осью  $V = 1$  и вершиной в точке  $V = 1$ ,  $T = \beta(\gamma - 1)$ . Таким образом, форма параболы (6) неизменна, а ее положение зависит от  $\beta$ , т. е. от констант течения.

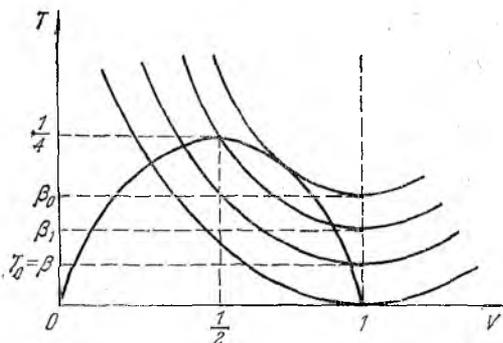


Рис. 2.41.

Параболы  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$  пересекаются в двух точках при  $0 \leq \beta < \beta_0$ ; случай  $\beta > \beta_0$  и  $\beta < 0$  физически нереализуемы, так как в первом случае нет точек пересечения и, следовательно, асимптотических значений  $V$ ,  $T$ , а во втором  $T < 0$ . Случай  $\beta = 0$  соответствует бесконечно сильной ударной волне, так как

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} = \infty.$$

а случай  $\beta = \beta_0 = \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)}$  — бесконечно слабому ударному переходу, так как в этом случае точки  $(V_0, T_0)$  и  $(V_1, T_1)$  сливаются, т. е.  $\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} = 1$ .

В случае  $\kappa = 0$ ,  $\mu \neq 0$  уравнения (5.1.20), (5.1.21) интегрируются. Действительно,

$$T(x) = \frac{\gamma - 1}{2}[V(x) - 1]^2 + \beta(\gamma - 1), \quad (7)$$

а  $V(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{dV}{dx} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{(V - V_0)(V - V_1)}{V} \quad \text{при} \quad V_1 \leq V \leq V_0. \quad (8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma + 1} \int \frac{V dV}{(V - V_0)(V - V_1)} = \\ = \frac{2}{\gamma + 1} \ln \left[ (V_0 - V)^{\frac{V_0}{V_0 - V_1}} (V - V_1)^{-\frac{V_1}{V_0 - V_1}} \right] = \frac{x}{\mu} + \text{const.} \quad (9) \end{aligned}$$

На рис. 2.42, а приведен примерный вид профиля  $V = V(x)$ , задаваемого формулой (9). Примыкание графика  $V(x)$  к

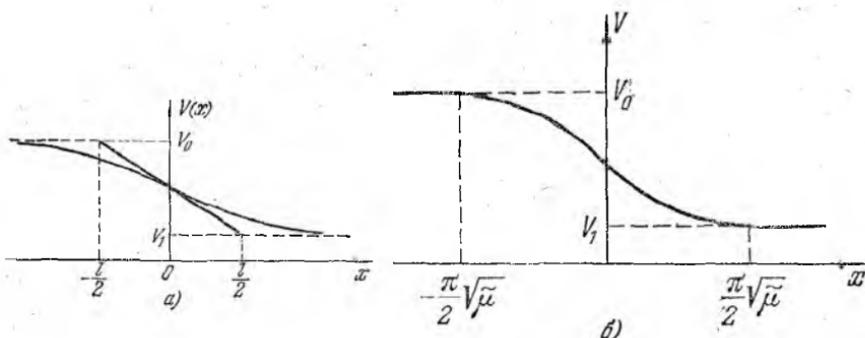


Рис. 2.42.

постоянным значениям  $V = V_1$  и  $V = V_0$  происходит при  $x \rightarrow \pm \infty$ , так что «ширина» ударной волны, строго говоря, является бесконечной. Однако это примыкание происходит экспоненциально, т. е. довольно быстро. Для определения порядка «ширины» зоны ударной волны ее определяют как величину

$$l = \frac{V_0 - V}{\max \left| \frac{dV(x)}{dx} \right|} \quad (10)$$

(см. также рис. 2.42, а).

Вычисления, проведенные Беккером, привели к поразительному результату. Оказалось, что для большинства газов при не очень высоких температурах и плотностях величины  $\mu$  и  $\gamma$  таковы, что ширина зоны ударного перехода оказывается порядка  $10^{-4}$ — $10^{-6}$  см, т. е. порядка длины пробега молекул газа.

Если исключить из рассмотрения факт неравновесности гидродинамических течений на расстояниях порядка длины пробега молекул, то это говорит о том, что с большой степенью точности

ударный переход можно эффективно заменить подвижным разрывом (ударной волной), левые и правые предельные значения которого удовлетворяют условиям Гюгонио и условию возрастания энтропии (условию устойчивости).

Тем самым оправдана общепринятая точка зрения, согласно которой течение разделяется на области обратимых процессов, где действуют уравнения гидродинамики без учета диссипативных членов, и на области необратимых процессов, которые представляют собой узкие зоны и могут быть эффективно описаны подвижными поверхностями разрыва.

Отметим дополнительно, что более точное представление о зоне ударного перехода в реальном газе может быть получено лишь с использованием уравнения Больцмана, однако оценка порядка ширины зоны ударной волны остается той же самой.

Отметим в заключение этого пункта, что в случае  $\mu = 0$ ,  $\kappa \neq 0$  изотермический скачок, как это легко видеть на рис. 2.41, существует лишь для достаточно сильных ударных волн, когда  $0 \leq \beta \leq \beta_1$ .

Приведем необходимые в дальнейшем формулы (5.1.13), (5.1.14) в лагранжевых переменных  $q, t$ :

$$\bar{\mu} \frac{dV}{dq} = C_1 \left( V - \frac{C_2}{C_1^2} \right) + \frac{p(V, T)}{C_1}, \quad \bar{\mu} = \mu_0 = \frac{\mu}{V}; \quad (11)$$

$$\bar{\kappa} \frac{dT}{dq} = C_1 \varepsilon - \frac{1}{2} C_1^3 \left( V - \frac{C_2}{C_1^2} \right)^2 - C_3 + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{C_1}, \quad \bar{\kappa} = \rho \kappa. \quad (12)$$

Для идеального газа  $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} pV$ . Рассмотрим случай  $\kappa = 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Из (11), (12) следует уравнение для  $V$ :

$$\bar{\mu} \frac{dV}{dq} = \frac{\gamma + 1}{2} m \frac{(V - V_1)(V - V_0)}{V}, \quad (13)$$

где  $m = C_1$  — массовая скорость ударной волны;  $V_0, V_1$  — значения удельного объема  $V$  перед и за фронтом ударной волны.

В случае  $\mu = \text{const}$  из (13) имеем интеграл

$$\ln \left( \frac{V_0 - V}{V - V_1} \right)^{\frac{1}{V_0 - V_1}} = \frac{\gamma + 1}{2\bar{\mu}} m q + \text{const}; \quad (14)$$

если же, например,  $\bar{\mu} = \mu_0 = \text{const}$ , то из (13) следует формула, близкая к (9):

$$\ln \frac{(V_0 - V)^{\frac{V_0}{V_0 - V_1}}}{(V - V_1)^{\frac{V_1}{V_0 - V_1}}} = \frac{\gamma + 1}{2\bar{\mu}} m q + \text{const}. \quad (15)$$

Из формулы (13) в предположении  $\mu = \text{const}$  и пользуясь определением ширины зоны ударной волны по формуле (10), получаем выражение для ширины зоны  $\Delta q$ :

$$\Delta q = \frac{\delta \mu}{\gamma + 1} \frac{1}{|\Delta u|},$$

где  $\Delta u = u_1 - u_0$  — скачок скорости на ударной волне.

**6. Стационарные решения уравнений газодинамики с вязкостью Неймана — Рихтмайера.** Рассмотрим теперь стационарное решение уравнений газовой динамики для политропного газа, теплопроводность которого равна нулю, а «вязкость», входящая в уравнения (5.1.1) — (5.1.3), имеет специальный вид\*):

$$\omega = \frac{\lambda}{V} \frac{\partial u}{\partial x} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad (1)$$

т. е. формально мы можем полагать в предыдущем рассмотрении коэффициент  $\mu$  равным величине

$$\mu = \frac{\lambda}{V} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (2)$$

Так как согласно (5.1.12), (5.1.16)

$$u = mV, \quad (3)$$

то легко видеть, что для политропного газа определение стационарного решения сводится к интегрированию уравнения

$$\bar{\mu} \frac{dV}{dx} \left| \frac{dV}{dx} \right| = (V - V_0)(V - V_1) \quad (4)$$

(см. уравнение (5.5.8)), где  $\bar{\mu} = \frac{2}{\gamma + 1} m\lambda$ . Для случая  $m > 0$ ,

$\bar{\mu} > 0$   $\frac{dV}{dx} < 0$  (см. рис. 2.42, а), поэтому уравнение (4) представляется в виде

$$\bar{\mu} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = (V - V_1)(V_0 - V) > 0 \quad (5)$$

и легко интегрируется:

$$\arcsin \frac{V - \frac{V_0 + V_1}{2}}{\frac{V_0 - V_1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{\bar{\mu}}} + C. \quad (6)$$

На рис. 2.42, б приведен профиль  $V = V(x)$  для решения (6). Существенным отличием от предыдущего случая здесь является конечная ширина  $\pi \sqrt{\bar{\mu}}$  ударного перехода. В связи с этим от-

\*) Вязкость такого типа была впервые рассмотрена Нейманом и Рихтмайером [1950].

Заметим, что примыкание решения  $V = V(x)$  к постоянным значениям  $V_0$  и  $V_1$  не является аналитическим, так как вторая производная  $V''(x)$  в точках  $x = \pm \frac{\pi \sqrt{\bar{\mu}}}{2}$  терпит разрыв, что легко проверяется как из уравнения (4), так и из формулы (6) для решения.

Если в уравнении (5.5.13) совершенно аналогично положить

$$\bar{\mu} = \frac{\lambda}{V} \left| \frac{\partial u}{\partial q} \right|, \quad (7)$$

то приходим к уравнению

$$\bar{\mu} \left| \frac{dV}{dq} \right| \frac{dV}{dq} = (V - V_0)(V - V_1), \quad \bar{\mu} = \frac{2\lambda}{\gamma + 1}, \quad (8)$$

интегралом которого является равенство

$$\arcsin \frac{V - \frac{V_0 + V_1}{2}}{\frac{V_0 - V_1}{2}} = \frac{q}{\sqrt{\bar{\mu}}} + C, \quad (9)$$

а ширина зоны ударного перехода равна

$$\pi \sqrt{\bar{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma + 1}}.$$

Заметим, что в случае лагранжевых координат вязкость Неймана — Рихтмайера приводит к конечной ширине ударного фронта, не зависящей от силы ударной волны.

Конечность ширины ударного перехода в некоторых случаях представляется существенной. Поэтому «вязкость» Неймана — Рихтмайера (1) широко используется при численных расчетах разрывных решений уравнений газовой динамики. В уравнения газовой динамики для газов, лишенных внутреннего трения и теплопроводности, вводят искусственную «вязкость» типа (1) с малым коэффициентом  $\lambda$ . Это позволяет размазывать ударные переходы на конечную область, что бывает удобно при численных расчетах. Подробнее это будет обсуждаться в главе 3.

**7. Ударный переход в среде с аномальными термодинамическими свойствами.** Рассмотрим кратко вопрос о допустимости ударного перехода, который мы подняли в п. 8 § 4, основываясь на методах, развитых в этом параграфе. Отказ от выполнения условия  $p_{VV}^*(V, S) > 0$  приводит к дополнительным требованиям к ударному переходу, которые мы получим, пользуясь методом вязкости. Этот вопрос рассмотрен в работах И. Я. Галина [1958], А. Д. Сидоренко [1968], Б. Вендрофа [1972], Т. Лю [1975]. Ударный переход  $u_0, V_0, p_0; u_1, V_1, p_1$  будем называть *допустимым*, если существует решение системы

уравнений (5.1.12) для вязкого и теплопроводного газа с положительными коэффициентами вязкости  $\mu > 0$  и теплопроводности  $\kappa \geq 0$ , соединяющее точки  $(u_0, V_0, p_0)$  и  $(u_1, V_1, p_1)$ . Разрыв, который может быть представлен как последовательность нескольких допустимых в указанном выше смысле разрывов, движущихся относительно среды с одной и той же скоростью, также будем считать допустимым.

Прежде всего отметим, что для любого допустимого разрыва и любой среды, удовлетворяющей лишь условию  $T = \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S} > 0$ , всегда выполнено неравенство

$$S_1 \geq S_0, \quad (1)$$

где  $S_0$  — энтропия перед фронтом ударной волны, а  $S_1$  — энтропия за фронтом.

В самом деле, записывая уравнение (5.1.7) для энтропии в виде

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} \right),$$

получим аналогично уравнениям (5.1.9) — (5.1.12) уравнение для энтропии в ударном переходе

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho u S - \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} \right] = \frac{\mu}{T} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2. \quad (2)$$

Если считать, что ударная волна движется относительно среды влево ( $C_1 > 0$ ), то тогда  $S_0$  — значение энтропии при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $S_1$  — при  $x \rightarrow +\infty$ .

Интегрируя уравнение (2) от точки  $x = -\infty$  ( $S = S_0$ ;  $\frac{d \ln T}{dx} = 0$ ), получим

$$\rho u S = \rho_0 u_0 S_0 + \kappa \frac{d \ln T}{dx} + \int_{-\infty}^x \left[ \frac{\mu}{T} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Но  $\rho u = C_1 > 0$ ,  $\frac{d \ln T}{dx} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , поэтому условие (1) всегда выполнено, так как интеграл в правой части равенства (3) неотрицателен.

Мы уже указывали в п. 8 § 4, что условие (1) недостаточно для выделения допустимых ударных переходов в случае знакопеременности  $p''_{VV}(V, S)$ . Получим дополнительные условия, считая, что для ударного перехода  $(u_0, V_0, p_0)$ ,  $(u_1, V_1, p_1)$  существует решение системы (5.1.12) при  $\mu > 0$ ,  $\kappa = 0$ .

Тогда из уравнения (5.1.14) получаем

$$\mathcal{L} = \varepsilon - \frac{1}{2} C_1^2 \left( V - \frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{C_3}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{C_1^2} = 0 \quad (4)$$

и задача определения кривой ударного перехода сводится к интегрированию одного уравнения (5.1.13)

$$\mu \frac{dV}{dx} = \frac{1}{C_1} \left[ C_1^2 \left( V - \frac{C_2}{C_1} \right) + p \right] = \mathcal{M}. \quad (5)$$

Будем рассматривать зависимости (4) и (5) в плоскости переменных  $V, p$ . Как во всех точках рассматриваемого ударного перехода ( $x = 0$ ),  $\mathcal{L} = 0$  в точке  $V_0, p_0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, p) &= \mathcal{L}(V, p) - \mathcal{L}(V_0, p_0) = \\ &= \varepsilon - \varepsilon_0 - \frac{1}{2} \cdot C_1^2 \left[ V - \frac{C_2}{C_1} \right]^2 + \frac{1}{2} C_1^2 \left[ V_0 - \frac{C_2}{C_1} \right]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

В точке  $(V_0, p_0)$  величина  $\mathcal{M}$  равна нулю, поэтому мы можем выразить из этого условия величину  $C_2$ :

$$C_2 = p_0 + C_1^2 V_0. \quad (7)$$

Это выражение для  $C_2$  подставляем в формулу (6) для  $\mathcal{L}(V, p)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, p) &= \varepsilon - \varepsilon_0 + p_0(V - V_0) - \frac{1}{2} C_1^2 (V - V_0)^2 = \\ &= \varepsilon - \varepsilon_0 + p_0(V - V_0) - \frac{1}{2} m^2 (V - V_0)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие существования интегральной кривой уравнения (5), соединяющей точки  $(V_0, p_0)$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $(V_1, p_1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , имеет вид

$$\begin{aligned} C_1(V - V_0) \mathcal{M}(V; p) &= C_1(V - V_0) [\mathcal{M}(V, p) - \mathcal{M}(V_0, p_0)] = \\ &= [C_1^2(V - V_0) + (p - p_0)](V_1 - V_0) > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

при  $(V - V_0)(V - V_1) < 0$ .

Это условие должно быть выполнено во всех точках кривой  $\mathcal{L}(V, p) = 0$ , где  $\mathcal{L}(V, p)$  задано формулой (8). Деля неравенство (9) на положительную величину  $(V - V_0)(V_1 - V_0)$ , получаем

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} > -C_1^2 = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}; \quad (V - V_0)(V - V_1) < 0. \quad (10)$$

Выполнение условия (10) вдоль кривой  $\mathcal{L}(V, p) = 0$  гарантирует существование интегральной кривой для ударного перехода. Таким образом, это и есть условие допустимости ударного перехода, которое мы искали. Если на кривой  $\mathcal{L} = 0$  между точками

$(V_0, p_0)$  и  $(V_1, p_1)$  есть точки  $(V^*, p^*)$ , в которых

$$\frac{p^* - p_0}{V^* - V_0} = -m^2; \quad \mathcal{L}(V^*, p^*) = 0; \quad (V^* - V_0)(V^* - V_1) < 0, \quad (11)$$

то, очевидно, интегральной кривой  $V = V(x)$ , соединяющей точки  $(V_0, p_0)$  и  $(V_1, p_1)$ , не существует. Это связано с тем, что на интегральной кривой, выходящей из  $(V_0, p_0)$ , при приближении к ближайшей к ней точке  $(V^*, p^*)$  кривой  $\mathcal{L} = 0$ , в которой выполнено (11), координата  $x \rightarrow +\infty$ , так как интеграл

$$\Delta x = \int_V^{V^*} \frac{dV}{\mathcal{M}(V, p)}$$

расходится (мы считаем здесь  $\varepsilon(V, p)$  дифференцируемой функцией). Тем более, если на некотором отрезке кривой  $\mathcal{L} = 0$  выполнено равенство (11), то на этом отрезке уравнение (5) вообще не определяет зависимости  $V = V(x)$ , так как  $\mathcal{M} = 0$  и  $V = \text{const}$ . Тем не менее разрыв  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$ , для которого выполняется обобщение условия (10),

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} \geq -C_1^2 = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}; \quad (12)$$

$$\mathcal{L}(V, p) = 0; \quad (V - V_0)(V - V_1) < 0,$$

следует также признать допустимым. Это связано с тем, что в случае изолированных точек кривой  $\mathcal{L}(V, p) = 0$ , в которых выполнено равенство (11), разрыв  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$  можно рассматривать как последовательность разрывов, каждый из которых является допустимым, и все они движутся относительно среды с одной и той же скоростью, как это следует из условий (11). Наконец, отрезки кривой  $\mathcal{L} = 0$ , в которых выполнено равенство (11), следует рассматривать как множество допустимых ударных переходов.

В данном случае отсутствие интегральной кривой для задачи (4), (5) связано с отсутствием автомодельного решения  $V = V(x - Ut)$  в задаче о структуре ударного перехода, а отнюдь не с провалом метода вязкости для отбора допустимых решений.

Дело в том, что на целом отрезке адиабаты Гюгонио лагранжева скорость распространения ударной волны оказывается постоянной\*) и равной  $m = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}}$ . В связи с этим в задаче о структуре ударного перехода отсутствует свободный параметр — скорость ударной волны и эта задача не имеет решения.

\*) Очевидно, отрезок кривой  $\mathcal{L} = 0$ , удовлетворяющий условию (10), является одновременно отрезком адиабаты Гюгонио.

Ситуация похожа на случай линейных гиперболических уравнений (например, уравнений акустики), когда введение вязкости не приводит к размазанной стационарной волне, а приводит к прогрессивному увеличению зоны размазывания ударного перехода. Так, например, линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}, \mu > 0),$$

не имеет автомодельного решения  $u = u(x - Ut)$ , принимающего различные значения при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$ . Тем не менее, решая задачу Коши для этого уравнения и устремляя затем  $\mu \rightarrow 0$ , мы можем получить в пределе произвольный разрыв (ударный переход), распространяющийся вдоль линии  $x = at + x_0$ . По-видимому ситуация аналогична в случае выполнения равенств (11) на отрезках адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$ .

Ограничившись этими краткими замечаниями по поводу метода вязкости, рассмотрим подробнее условие допустимости ударного перехода (12).

Мы считаем переход  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$  допустимым, если выполнены условия (12). Сразу же заметим, что из (12) следует, что  $S_1 \geq S_0$ ; при этом равенство  $S_1 = S_0$  имеет место только в том случае, если прямая (11) есть адиабата Гюгонио, т. е. все точки луча  $\frac{p - p_0}{V - V_0} = -m^2$  при  $V_1 \leq V \leq V_0$  являются точками адиабаты Гюгонио. Как отсюда видно, в данном ударном переходе мы имеем дело со средой, уравнение состояния которой дается формулой

$$p = -m^2 V + (p_0 + m^2 V_0) = -\frac{m^2}{\rho} + C,$$

т. е. с газом Чаплыгина.

Переформулируем теперь условия допустимости (12) так, чтобы они выглядели как условия на адиабату Гюгонио  $H(V, p, V_0, p_0) = 0$ . Будем предполагать, что среда такова, что выполнены условия

$$T = \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S} > 0; \quad p'_V(V, S) < 0, \quad p'_S(V, S) > 0. \quad (13)$$

Для определенности будем считать, что адиабата Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  в некоторой окрестности точки  $(V_0, p_0)$  удовлетворяет условию  $S(V, p) > S(V_0, p_0)$  при  $V < V_0$ , т. е. ударная адиабата начинается как ударная волна сжатия. Это имеет место, например, при  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$ . На прямой

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}, \quad (14)$$

очевидно,  $\mathcal{M} = 0$ . Отсюда следует, что все точки пересечения адиабаты  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  с прямой (14) являются одновременно нулями функции  $\mathcal{L}(V, p)$ , т. е. точками пересечения кривой  $\mathcal{L}(V, p) = 0$  с прямой (14).

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(V, p, K)}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left[ \varepsilon - \varepsilon_0 + p_0(V - V_0) - \frac{1}{2} K(V - V_0)^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2}(V - V_0)^2 < 0 \quad \text{при } V \neq V_0. \end{aligned} \quad (15)$$

а

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V, p, K)}{\partial p} = \frac{\partial \varepsilon(V, p)}{\partial p} = \frac{\varepsilon'_s(V, S)}{p'_s(V, S)} > 0. \quad (16)$$

Учет этих обстоятельств приводит к выводу, что кривая  $\mathcal{L}(V, p, m^2) = 0$  расположена между прямой (14) и адиабатой

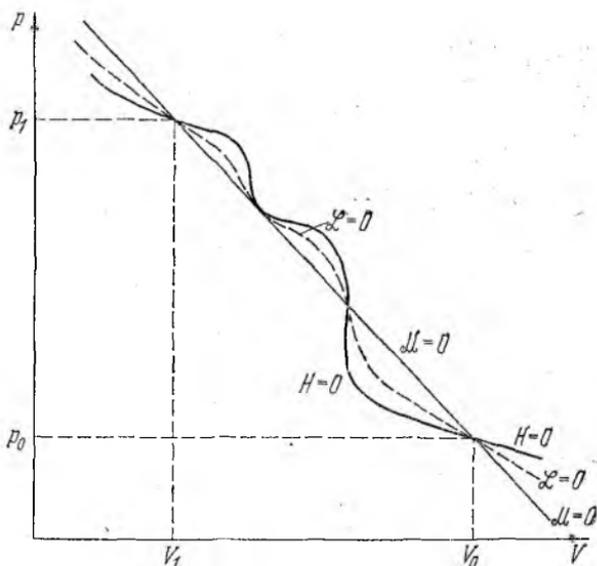


Рис. 2.43.

Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  и они имеют общие точки пересечения либо касания. На рис. 2.43 показано взаимное расположение прямой  $\mathcal{M} = 0$ , адиабаты Гюгонио  $H = 0$  и кривой  $\mathcal{L} = 0$  в случае  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$ .

Становится ясным, что условие (12) допустимости ударного перехода при выполнении неравенств (13) формулируется также

следующим образом: ударный переход  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$  допустим, если адиабата Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  при  $V_1 \leq V \leq V_0$  лежит в плоскости  $V, p$  не правее луча (14) (см. рис. 2.43). Это же можно выразить формулой, аналогичной (12):

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} \geq -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} \text{ при } H(V, p; V_0, p_0) = 0; \quad V_1 \leq V \leq V_0. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь возможность ударного перехода из точки  $V_0, p_0$  в точку  $V_1, p_1$  при  $V_1 > V_0$ , т. е. случая, когда разрыв представляет собой волну разрежения. И в этом случае условие существования интегральной кривой уравнения (5) записывается в виде (9) или (10). Заметим лишь, что при  $V_1 > V_0$  условие (10) требует, чтобы кривая  $\mathcal{L} = 0$  лежала правее луча (14), как это показано на рис. 2.44, где  $AB$  — касательная к кривой  $H = 0$  в точке  $A(V_0, p_0)$ . Согласно изложенному выше это одновременно означает, что адиабата Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  при  $V_0 < V < V_1$  лежит справа от прямой (14).

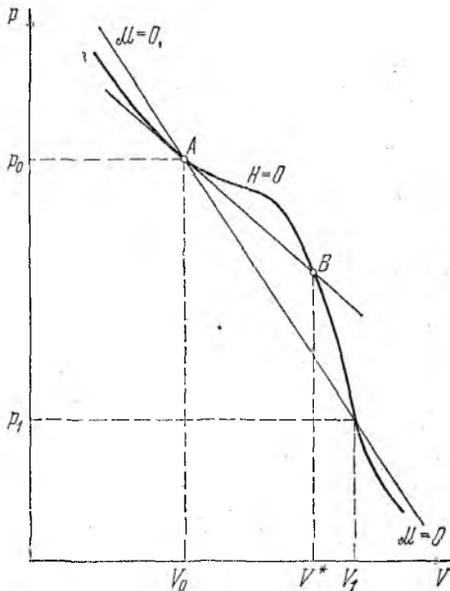


Рис. 2.44.

Однако при  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$  это возможно лишь при условии, что функция  $p''_{VV}(V, S)$  знакопеременна и величина  $(V_1 - V_0)$  достаточно велика. В самом деле, согласно п. 3 § 4, в некоторой окрестности точки  $(V_0, p_0)$  адиабата Гюгонио  $H = 0$ , пересекаясь с прямой (14) в двух точках  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$ , остается слева от нее при  $(V - V_0)(V - V_1) < 0$ . Поэтому при  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$  ударная волна разрежения возможна лишь при достаточно большой величине  $V_1 - V_0 > 0$ .

Отметим теперь, что при  $p''_{VV}(V_0, S_0) < 0$  условия (10), (12) по-прежнему дают условия допустимости ударного перехода. Отличие в этом случае состоит в том, что при  $V_1 > V_0$  возможны ударные волны разрежения малой амплитуды, а ударные волны сжатия ( $V_1 < V_0$ ) возможны лишь при достаточно большой амплитуде и знакопеременности  $p''_{VV}(V, S)$ . Случай

$p''_{VV}(V_0, S_0) = 0$  является промежуточным и требует специального несложного рассмотрения.

Суммируем наши выводы в случае знакопеременности  $p''_{VV}(V, S)$ . Мы установили, что множество значений  $(V_1, p_1)$  за фронтом ударного перехода из точки  $(V_0, p_0)$  перед фронтом расположено на адиабате Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  и должно

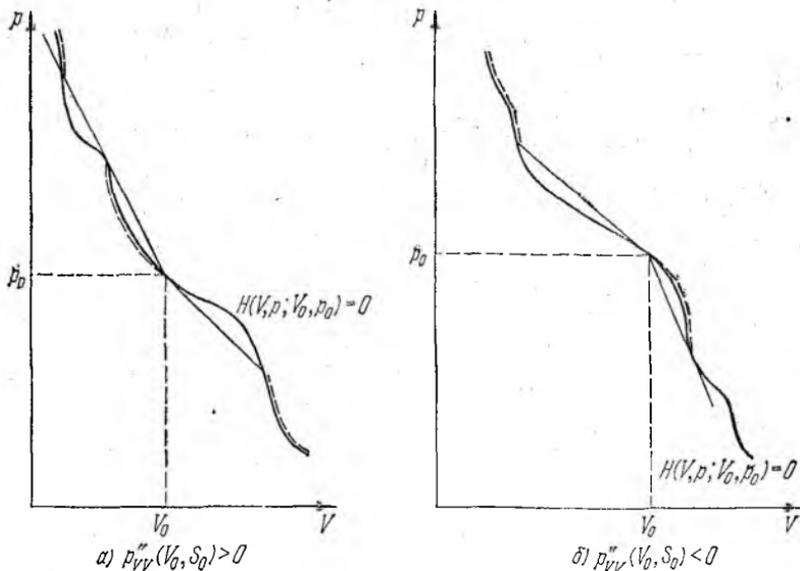


Рис. 2.45.

удовлетворять требованию (12). Оно означает, что при  $V_1 < V_0$  весь отрезок  $V_1 \leq V \leq V_0$  адиабаты  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  должен быть расположен слева от прямой (14) или частично совпадать с ней; при  $V_1 > V_0$  весь отрезок адиабаты  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$ , заключенный между точками  $(V_0, p_0)$ ,  $(V_1, p_1)$  должен быть расположен справа от прямой (12). Таким образом, требование (12) выделяет участки адиабаты Гюгонио, которые образованы физически допустимыми ударными переходами.

На рис. 2.45 показаны допустимые участки адиабаты Гюгонио (они показаны двойной линией) для двух случаев.

Итак, применяя метод вязкости, мы получили критерий допустимости (12) ударного перехода. Мы полагали в этом исследовании теплопроводность среды равной нулю. Рассмотрение ударного перехода в вязком и теплопроводящем газе не изменяет критерия (12) допустимости ударной волны.

## § 6. Задача о распаде произвольного разрыва

1. Общие свойства решения задачи о распаде разрыва. В этом параграфе мы детально рассмотрим задачу о распаде начального разрыва. В случае изотермического газа эта задача была поставлена и решена Риманом [1876]. Качественное исследование задачи о распаде разрыва для политропных газов было проведено Н. Е. Кочиним [1925], для нормальных газов Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [1954].

Произвольным разрывом называют начальное состояние двух бесконечных масс газа, характеризуемых постоянными параметрами  $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1, T_1$ ;  $u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0, T_0$  и граничащих в начальный момент  $t = 0$  вдоль плоскости  $x = 0$ . При этом величины слева и справа от разрыва произвольны и подчиняются лишь уравнениям состояния газов, которые могут быть различными для граничащих газов.

Определение течения, возникающего при  $t > 0$  при этих начальных условиях, называют задачей о распаде произвольного разрыва.

Таким образом, задача о распаде разрыва есть задача определения одномерного течения с плоской симметрией ( $v = 0$ ), удовлетворяющего интегральным законам сохранения:

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \rho dx - \rho u dt = 0, \quad \oint_C \rho u dt - [p + \rho u^2] dx = 0, \\ \oint_C \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dt - \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и кусочно постоянным начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } t = 0 \\ u = u_1, \quad V = V_1, \quad p = p_1, \quad T = T_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 &\text{ при } x < 0; \\ u = u_0, \quad V = V_0, \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 &\text{ при } x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В § 4 мы видели, что на устойчивом разрыве должны соблюдаться условия динамической совместности (условия Гюгоню). В случае ударной волны на разрыве должно также выполняться условие устойчивости (возрастание энтропии); на контактном разрыве (границе двух газов) давление и скорость непрерывны.

Поэтому, если произвольный разрыв не является контактными или ударной волной, то он распадается, образуя какую-нибудь конфигурацию устойчивых разрывов и непрерывных газодинамических течений.

Легко заметить, что если совершить преобразование подобия независимых переменных

$$t' = kt, \quad x' = kx \quad (k > 0),$$

то и в новых переменных  $x'$ ,  $t'$  отыскание решения задачи о распаде сводится к нахождению решения законов сохранения (1), удовлетворяющего начальным условиям (2), если только под  $x$  и  $t$  понимать теперь  $x'$ ,  $t'$ .

Если предполагать единственность решения задачи (1), (2), то отсюда следует, что

$$z(x, t) = \bar{z}(x', t') = \bar{z}(kx, kt). \quad (3)$$

Здесь вектором  $z$  мы обозначаем совокупность гидродинамических величин  $z = \{\rho, u, p, \varepsilon, \dots\}$ , буквой  $\bar{z}$  — те же величины в переменных  $x'$ ,  $t'$ .

Полагая в тождестве (3)  $k = \frac{1}{t} > 0$ , получим

$$z(x, t) = \bar{z}\left(\frac{x}{t}, 1\right) = z_0\left(\frac{x}{t}\right), \quad (4)$$

Таким образом, из предположения о единственности решения вытекает *автомодельность* решения задачи о распаде произвольного разрыва, т. е. зависимость всех гидродинамических переменных лишь от одного переменного  $y = \frac{x}{t}$ . В частности, отсюда следует, что линии разрыва — ударные волны и контактный разрыв — суть прямые линии в плоскости переменных  $x$ ,  $t$ , т. е. скорости ударных волн и контактного разрыва постоянны\*).

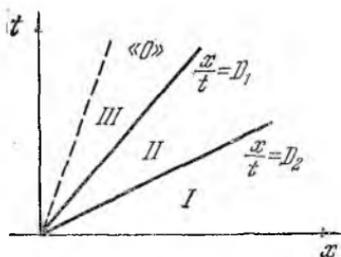


Рис 2.46.

В п. 2 § 3 мы видели, что непрерывное при  $t > 0$  автомодельное течение есть центрированная волна разрежения Римана, характеризующаяся постоянством энтропии  $S$  и одного из инвариантов Римана ( $r$  либо  $s$ ).

Таким образом, автомодельное решение задачи о распаде разрыва содержит в качестве элементов ударные волны, волны разрежения и контактный разрыв.

Установим некоторые общие свойства автомодельного решения задачи о распаде, справедливые для нормальных газов.

1. В каждом из газов «1» (левый) и «0» (правый) распространяется не более одной ударной волны.

Действительно, под ударной волной мы понимаем лишь устойчивую ударную волну. Как мы видели в п. 4 § 4, отсюда следует теорема Цемплена. Предположим, например, что в

\*). Следует, однако, иметь в виду, что общие теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнений (1) с разрывными начальными условиями до сих пор не доказаны.

газе «0» распространяются две ударные волны  $\frac{x}{t} = D_1$ ,  $\frac{x}{t} = D_2$ ;  $D_2 > D_1$  (рис. 2.46), а течения в зонах I, II, III постоянны. Обозначая скорость звука  $c$  в зонах I, II, III соответственно  $c_I$ ,  $c_{II}$ ,  $c_{III}$ , скорость  $u$  —  $u_I$ ,  $u_{II}$ ,  $u_{III}$ , будем иметь

$$c_I < c_{II} < c_{III}, \quad u_I < u_{II} < u_{III}. \quad (5)$$

Однако теорема Цемплена требует, чтобы

$$c_I < D_2 - u_I, \quad D_2 - u_{II} < c_{II}, \quad (6)$$

$$c_{II} < D_1 - u_{II}. \quad (7)$$

Неравенство (7), очевидно, несовместно с (6) при условии  $D_1 < D_2$ , что и доказывает наше утверждение.

2. В каждом из газов распространяется не более одной центрированной волны разрежения; в газе «0» (правом) в волне разрежения  $s = \text{const}$ ; в газе «1» (левом)  $r = \text{const}$ .

Утверждение легко следует из равенств

$$u + c = y = \frac{x}{t} \quad (s = \text{const}), \quad u - c = y = \frac{x}{t} \quad (r = \text{const}), \quad (8)$$

справедливых в центрированных волнах разрежения.

3. Присутствие в одном из газов ударной волны исключает возможность распространения в этом же газе волны разрежения, и, наоборот, распространение в одном из газов центрированной волны разрежения исключает возможность распространения в нем ударной волны.

Утверждение легко следует из теоремы Цемплена, равенства  $D = y = \frac{x}{t}$  и условий (8).

Как следствие этих свойств мы получаем, что автомодельное решение задачи о распаде разрыва содержит контактный разрыв, разделяющий газы («0» и «1»); в каждом из газов распространяется не более одной волны (бегущей или ударной), граничащей с зонами постоянного течения.

Таким образом, построение автомодельного решения задачи о распаде разрыва состоит в «склеивании» элементарных решений (постоянные течения, центрированные волны) и определении параметров, характеризующих эти решения и разрывы. Поскольку разрывы и элементарные решения определяются конечным числом параметров, эта задача становится чисто алгебраической. Мы покажем ниже, что для нормальных газов автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва существует и единственно, т. е. однозначно определяется начальными данными (2).

Наше рассмотрение мы начнем со случая политропных газов. Показатель адиабаты Пуассона  $\gamma$  для газа «0», лежащего

справа от точки  $x = 0$ , будем обозначать буквой  $\gamma_0$ , для газа «1» — буквой  $\gamma_1$ .

Примем следующий способ рассмотрения задачи о распаде: отправляясь от конкретного случая условий (2), в котором расположение ударных волн и волн разрежения (конфигурация) очевидно, мы, непрерывно меняя параметры задачи (2), будем непрерывно менять решение, переходя при этом через критические значения параметров, разделяющие одну конфигурацию от другой.

**2. Конфигурация А.** Поскольку ясно, что решение задачи (6.1.1), (6.1.2) существенно зависит лишь от разности  $u_1 - u_0$ , будем полагать  $u_0 = 0$ . Достаточно рассмотреть лишь случай, когда

$$p_1 \geq p_0. \quad (1)$$

Мы начнем рассмотрение задачи о распаде разрыва, образованного двумя покоящимися массами политропных газов. Задача ставится следующим образом.

В точке  $x = 0$  имеется перегородка, разделяющая две массы газа, характеризуемые параметрами  $\gamma_1, S_1, \rho_1, p_1, T_1, u_1 = 0$  слева и соответственно  $\gamma_0, S_0, \rho_0, p_0, T_0, u_0 = 0$  справа, причем выполнено условие

$$p_1 > p_0. \quad (2)$$

В момент  $t = 0$  перегородка убирается, и газы приходят в движение. Предполагая автомодельность движения (либо, что то же, единственность решения задачи о распаде), рассчитаем его.

Так как через контактную границу (граница между газами «0» и «1») вещество не протекает, то для каждой массы газа контактную границу можно рассматривать как поршень. В силу условия (2) поршень будет двигаться в сторону газа «0» и выдвигаться по отношению к газу «1». Если задаться постоянной (вследствие автомодельности) скоростью  $U$  поршня, то задача однозначно решается для каждого из газов в отдельности. Чтобы получить решение задачи о распаде разрыва, мы должны «сшить» решения этих двух задач о поршне, потребовав, чтобы на контактной границе давление  $p_-$  слева равнялось давлению  $p_+$  справа. Из этого условия определится скорость  $U$  контактной границы и все параметры, определяющие движение.

Решения задач о поршне нам известны (см. § 3, п. 4 и § 4, п. 8); поэтому расположение разрывов будет иметь вид, указанный на рис. 2.47 (конфигурация А).

Четыре луча:  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  — разбивают верхнюю полуплоскость на 5 областей. В областях I, II, III, V имеем постоянные течения, в области IV — центрированную волну разрежения. Луч  $\Gamma_3$  — ударная волна,  $\Gamma_2$  — контактный разрыв,  $\Gamma_1, \Gamma_0$  — ли-

нии слабого разрыва, на которых решение непрерывно. На линии  $\Gamma_3$  должны соблюдаться условия Гюгонио для ударной волны и условие устойчивости, на  $\Gamma_2$  — непрерывность давления и скорости, на  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_0$  — непрерывность всех гидродинамических величин.

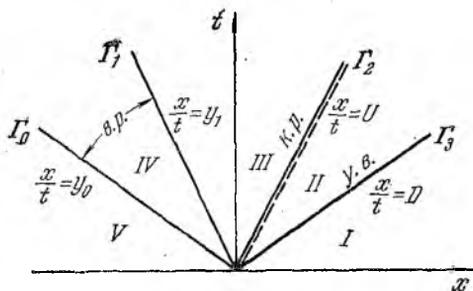


Рис. 2.47.

В области  $IV$   $p$ ,  $u$  связаны соотношением, вытекающим из постоянства инварианта Римана  $r$  (см. формулы (3.2.10) и (3.2.11)):

$$p = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \quad (u_1 = 0). \quad (3)$$

Так как зона  $III$  есть зона постоянного течения, то скорость  $u$  на характеристике  $\Gamma_1$  равна скорости  $U$  контактной границы  $\Gamma_2$ . Поэтому, если обозначить давление  $p$  в зоне  $III$  через  $p_-$ , то, согласно (3), имеем

$$p_- = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}}. \quad (4)$$

На ударной волне  $\Gamma_3$  имеем (см. формулы (4.5.13) — (4.5.16)):

$$p = p_0 [(1 + h_0) M_0^2 - h_0], \quad M_0 = \frac{|D - u_0|}{c_0} = \frac{D}{c_0}, \quad h_0 = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}, \quad (5)$$

$$u = u_0 + c_0 (1 - h_0) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) = c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) (1 - h_0). \quad (6)$$

Учитывая, что зона  $II$  — зона постоянства течения и что на контактной границе  $\Gamma_2$  давление и скорость непрерывны, приходим к уравнению

$$p_-(M_0) = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{(1 - h_0) c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right)}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = p_+(M_0) = p_0 [(1 + h_0) M_0^2 - h_0] \quad (7)$$

для определения  $M_0$ .

Функция  $p_-(M_0)$ , стоящая в левой части уравнения (7), — монотонно убывающая функция  $M_0$ ,  $p_+(M_0)$  — монотонно возрастающая до  $+\infty$  функция  $M_0$ . Так как при  $M_0 = 1$

$$p_-(1) = p_1 > p_+(1) = p_0, \quad (8)$$

в силу предположения (2), то отсюда следует, что уравнение (7) имеет один и только один корень  $M_0 > 1$ .

Определим величины  $y_0, y_1, U, D$  как функции от  $M_0$  и покажем, что условия конфигурации А:

$$y_0 < y_1 < U < D, \quad (9)$$

удовлетворяются.

Неравенства (9) всегда выполнены при  $U > 0, U - u_1 = U > 0$ .

В самом деле, неравенство  $U = c_0(1 - h_0) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) < D = c_0 M_0$  очевидно. Для  $y_0, y_1$  имеем

$$y_0 = u_1 - c_- = -c_1, \quad y_1 = U - c_-, \quad (10)$$

где  $c_-$  — скорость звука в зоне III,  $c_- > 0$ . Отсюда следует, что  $y_1 < U$ . Наконец,  $r_1 = (r_1)_-$ ; поэтому

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= U - c_- + c_1 = U + \frac{\gamma_1 - 1}{2} (U - u_1) = \\ &= U + \frac{\gamma_1 - 1}{2} U = \frac{\gamma_1 + 1}{2} U > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, все условия (9) выполнены, и конфигурация А совместна.

Будем теперь варьировать параметры задачи. Зафиксируем  $p_1, p_0$  ( $p_1 > p_0$ ) и будем изменять скорость  $u_1$  газа «1». Тогда, полагая в (3), (4)  $u_1 \neq 0$ , придем к уравнению

$$\begin{aligned} p_-(M_0) &= p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = \\ &= p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{c_0(1 - h_0) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = \\ &= p_+(M_0) = p_0 [(1 + h_0) M_0^2 - h_0] \end{aligned} \quad (12)$$

вместо уравнения (7). По-прежнему  $p_-(M_0), p_+(M_0)$  — монотонные функции от  $M_0$ .

Проследим изменение корня  $M_0$  в зависимости от изменения параметра  $u_1$ . Справедливо утверждение: корень  $M_0$  уравнения (12) есть монотонно возрастающая функция  $u_1$ . В самом деле,  $p_-(M_0)$  — монотонная функция  $u_1$ . В частности, значение

$$p_-(1) = p_1 \left[ 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}},$$

которому соответствует точка  $B$  на рис. 2.48, также монотонно возрастает с ростом  $u_1$ . С ростом  $u_1$  точка  $B$ , а вместе с ней и вся кривая  $p = p_-(M_0, u_1)$  монотонно поднимаются (рис. 2.48). Так как кривая  $p = p_+(M_0)$  фиксирована, то точка  $C$  пересечения кривых  $p = p_-(M_0, u_1)$  и  $p = p_+(M_0)$  удаляется направо с ростом  $u_1$ , т. е. корень  $M_0$  уравнения (12) растет с ростом  $u_1$ , что и требовалось доказать.

Обозначим через  $u_B < 0$  значение  $u_1$ , при котором  $p_-(1, u_1) = p_+$ , т. е.

$$1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u_B}{c_1} = \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}},$$

или

$$u_B = \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1 \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} - 1 \right] < 0. \quad (13)$$

Тогда в соответствии с рис. 2.48, очевидно, что при

$$u_B < u_1 \leq 0 \quad (14)$$

уравнение (12) всегда имеет единственный корень  $M_0 > 1$ . При  $M_0 > 1$  ударная волна  $\Gamma_3$  (рис. 2.47) удовлетворяет условию устойчивости; при  $M_0 < 1$  ударная волна  $\Gamma_3$  является неустойчивой и поэтому конфигурация  $A$  невозможна. Однако для возможности конфигурации  $A$  (рис. 2.47) необходимо выполнение всей цепочки неравенств (9).

Поэтому рассмотрим выполнение этих неравенств при  $u_1 > 0$ . С ростом  $u_1$  величины  $U, D$  растут до бесконечности так, что сохраняется неравенство  $U < D$ . Неравенство  $y_1 < U$  также сохраняется. Остается только исследовать разность

$$y_1 - y_0 = (U - c_-) - (u_1 - c_1) = (U - u_1) - (c_- - c_1). \quad (15)$$

В силу постоянства инварианта  $r$  в зоне  $IV$  имеем

$$r = u_1 + \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1 = U + \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_-, \quad U - u_1 = \frac{2}{\gamma_1 - 1} (c_1 - c_-). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$y_1 - y_0 = \frac{\gamma_1 + 1}{2} (U - u_1). \quad (17)$$

Мы показали, что с ростом  $u_1$  растет  $M_0$ . Но из уравнения (12) следует, что с ростом  $M_0$  разность  $U - u_1$  уменьшается. Следовательно, из (17) следует, что с ростом  $u_1$  уменьшается  $y_1 - y_0$ .

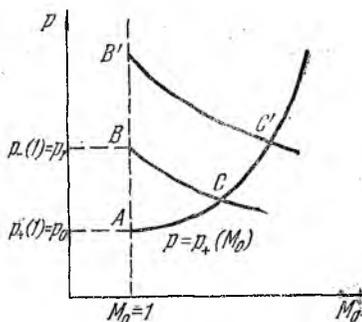


Рис. 2.48.

Пока  $U - u_1 > 0$ ,  $y_1 - y_0 > 0$ . При  $U - u_1 = 0$   $y_1 - y_0 = 0$ . Последнее выполняется при условии одновременного выполнения равенств

$$p_1 = p_0 [(1 + h_0) M_{0 \text{ кр}}^2 - h_0], \quad (18)$$

$$u_1 = U = (1 - h_0) c_0 \left( M_{0 \text{ кр}} - \frac{1}{M_{0 \text{ кр}}} \right) = u_B, \quad (19)$$

в которых  $M_{0 \text{ кр}}$  выступает как параметр.

Нетрудно явно выразить  $u_B$ :

$$u_B = (1 - h_0) c_0 \left[ \sqrt{\frac{\frac{p_1}{p_0} + h_0}{1 + h_0}} - \sqrt{\frac{1 + h_0}{\frac{p_1}{p_0} + h_0}} \right] > 0. \quad (20)$$

Итак, если выполнены условия

$$u_B < u_1 < u_B, \quad (21)$$

то выполнены условия (9) совместности конфигурации А. Поэтому при выполнении неравенств (21) картина разрывов имеет вид, изображенный на рис. 2.47, а полученные выше формулы

позволяют полностью рассчитать течение в условиях конфигурации А.

**3. Конфигурация Б.** При  $u_1 = u_B$   $y_1 - y_0 = 0$ , т. е. зона волны разрежения исчезает, и решение строится из одной ударной волны и контактного разрыва (рис. 2.49). При дальнейшем увеличении  $u_1$  разность  $u_1 - U$  становится отрицательной. Поэтому при  $u_1 > u_B$  кон-

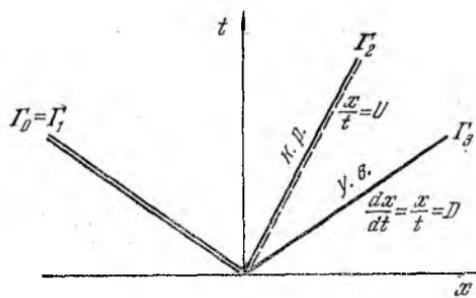


Рис. 2.49.

тактную границу  $\frac{dx}{dt} = U$  следует рассматривать как поршень, одновременно вдвигающийся как в газ «0», так и в газ «1». Таким образом, в соответствии с решением задачи о поршне (см. § 4, п. 8), решение задачи о распаде разрыва при  $u_1 > u_B$  следует искать в виде двух ударных волн, распространяющихся одна в газе «0», другая — в газе «1» (рис. 2.50). Этот случай мы будем называть *конфигурацией Б*.

В случае конфигурации Б имеем 4 зоны I—IV постоянного течения, разделяемые ударными волнами  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  и контактным

разрывом  $\Gamma_2$ . Докажем совместность конфигурации Б при условии  $u_1 > u_B$ . Выпишем условия на ударных волнах  $\Gamma_1, \Gamma_3$ :

$$p_- = p_1 [(1 + h_1) M_1^2 - h_1]; \quad (1)$$

$$u_- = u_1 - c_1 (1 - h_1) \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right), \quad M_1 = \frac{|D_1 - u_1|}{c_1}; \quad (2)$$

$$p_+ = p_0 [(1 + h_0) M_0^2 - h_0], \quad M_0 = \frac{D_0}{c_0}; \quad (3)$$

$$u_+ = c_0 (1 - h_0) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right). \quad (4)$$

Приравнявая на контактной границе  $\Gamma_2$  давления  $p_-, p_+$ , получим

$$M_1^2 = \alpha M_0^2 + \beta, \quad \alpha = \frac{p_0 (1 + h_0)}{p_1 (1 + h_1)}, \quad \beta = \frac{h_1 p_1 - h_0 p_0}{p_1 (1 + h_1)}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что  $M_1$  есть монотонно возрастающая функция  $M_0$ . Для определения  $M_0$  записываем условие непрерывности скорости на контактной границе  $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned} u_- &= u_-(M_1) = \\ &= u_1 - c_1 (1 - h_1) \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right) = \\ &= u_+ = u_+(M_0) = \\ &= c_0 (1 - h_0) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

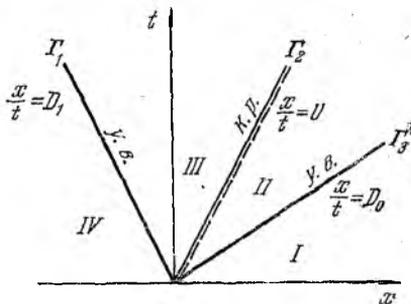


Рис. 2.50.

Левая часть этого равенства — монотонно убывающая функция  $M_1$  и, в силу (5),  $M_0$ ; правая часть — монотонно возрастающая до  $\infty$  функция  $M_0$ . Рассмотрим значения  $u_-(M_1), u_+(M_0)$  при  $M_0 = M_{0\text{кр}}$ , где  $M_{0\text{кр}}$  определяется из равенств (6.2.18), (6.2.19). Так как

$$M_{0\text{кр}}^2 = \left( \frac{p_1}{p_0} + h_0 \right) \frac{1}{1 + h_0} = \frac{p_1 + p_0 h_0}{p_0 (1 + h_0)}, \quad (7)$$

то

$$\left. \begin{aligned} M_1(M_{0\text{кр}}) &= 1, \quad u_-(M_1(M_{0\text{кр}})) = u_1, \\ u_+(M_{0\text{кр}}) &= c_0 (1 - h_0) \left( M_{0\text{кр}} - \frac{1}{M_{0\text{кр}}} \right) = u_B. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Но, согласно предположению,  $u_1 > u_B$ , поэтому из (8) имеем

$$u_-(M_1(M_{0\text{кр}})) > u_+(M_{0\text{кр}}). \quad (9)$$

Поэтому уравнение (6) при  $u_1 > u_B$  всегда имеет, и притом только один, корень  $M_0 > M_{0\text{кр}} > 1$ .

После определения  $M_0$  по формуле (5) определяем  $M_1$  и все параметры течения в зонах II, III. Условия совместности конфигурации Б

$$D_1 < u_1 - c_1, \quad D_1 < U < D_0, \quad c_0 < D_0, \quad (10)$$

легко проверяются и всегда выполнены при  $u_1 > u_B$ , если учесть, что если  $M_1 > 1$ , то и  $M_0 > M_{0\text{кр}} > 1$ . Итак, при любых  $u_1$ , удовлетворяющих условию  $u_1 > u_B$ , мы имеем конфигурацию Б.

**4. Конфигурация В.** При  $u_1 = u_B < 0$  (см. формулу (6.2.13))  $M_0 = 1$ ,  $U = 0$ , т. е. контактная граница является неподвижным поршнем для газа «0». При  $u_1 = u_B$  имеем поэтому решение,

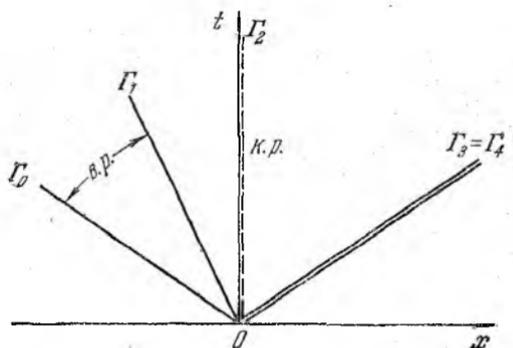


Рис. 2.51.

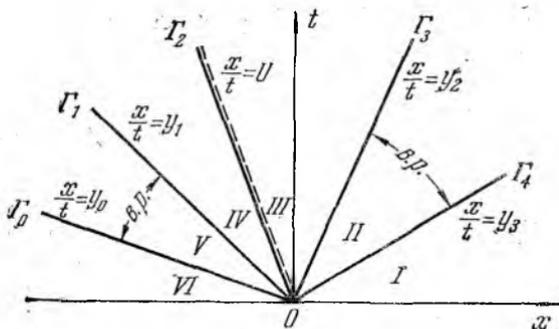


Рис. 2.52.

когда в газе «0» ударная волна исчезает и он остается неподвижным, сохраняя свои начальные параметры, в газе «1» распространяется волна разрежения  $\Gamma_0 O \Gamma_1$  (рис. 2.51).

При дальнейшем уменьшении  $u_1$  ( $u_1 < u_B < 0$ ) контактная граница начинает двигаться влево относительно газа «0»

( $U < 0$ ), так что ее можно рассматривать как поршень, одновременно выдвигаемый из газов «0» и «1». В соответствии с решением задачи о поршне (§ 3, п. 4) в этом случае решение задачи о распаде состоит из двух центрированных волн разрежения, распространяющихся в газах «1» и «0» (рис. 2.52). Этот случай будем называть *конфигурацией В*. Верхняя полуплоскость разбивается на 6 областей I—VI, разделяемых четырьмя линиями слабых разрывов  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$  и контактной границей  $\Gamma_2$ . Зоны I, III, IV, VI—области постоянного течения, зоны II, V—области волн разрежения; в зоне II постоянна инвариант  $s$ , в зоне V—инвариант  $r$ .

Покажем, что при условии

$$u_1 < u_B \quad (1)$$

конфигурация В совместна.

В зонах II, V имеем

$$p_+ = p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{u - u_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} = p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{u}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \quad (2)$$

$$(s = \text{const}),$$

$$p_- = p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \quad (r = \text{const}). \quad (3)$$

В частности, на контактной границе  $\Gamma_2$  при  $u = u_- = u_+ = U$  должны получить  $p_- = p_+$ , т. е. приходим к уравнению

$$\begin{aligned} p_- = p_-(U) &= p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = p_+ = p_+(U) = \\ &= p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{U}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \end{aligned} \quad (4)$$

для определения  $U$ . При этом

$$1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \geq 0, \quad 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{U}{c_0} \geq 0. \quad (5)$$

Условие (5) означает неотрицательность давления на границе. Заметим, что знаки равенства в формуле (5) могут иметь место лишь одновременно и соответствуют отрыву газов. Как мы видим, в уравнении (4)  $p_-(U)$ —монотонно убывающая функция  $U$ ,  $p_+(U)$ —монотонно возрастающая функция  $U$ . При  $U = 0$

$$p_-(0) = p_1 \left[ 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}}, \quad p_+(0) = p_0. \quad (6)$$

Из условия (1) поэтому следует

$$p_-(0) < p_+(0). \quad (7)$$

При уменьшении  $U$   $p_-(U)$  будет возрастать,  $p_+(U)$  — убывать. Таким образом, если только  $p_+(U)$  не обратится в нуль, существует единственный корень  $U < 0$  уравнения (4), удовлетворяющий условию

$$U > -\frac{2}{\gamma_0 - 1} c_0. \quad (8)$$

Тогда уравнения (5) приводят нас к неравенству

$$u_1 > -\left(\frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1 + \frac{2}{\gamma_0 - 1} c_0\right). \quad (9)$$

Итак, при выполнении условия (9) существует корень  $U < 0$  уравнения (4). Покажем, что при  $u_1 < u_B$  конфигурация В всегда совместна, т. е. выполнены условия

$$y_0 < y_1 \leq U \leq y_2 < y_3. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} y_3 - y_2 &= (u_0 + c_0) - (u_+ + c_+) = \\ &= -U - (c_+ - c_0) = -\frac{\gamma_0 + 1}{2} U > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Неравенства

$$\begin{aligned} y_2 - U &= (U + c_+) - U = c_+ \geq 0; \\ U - y_1 &= U - (U - c_-) = c_- \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

очевидны. Наконец,

$$y_1 - y_0 = U - u_1 + (c_1 - c_-) = \frac{\gamma_1 + 1}{2} (U - u_1). \quad (13)$$

Но из уравнения (4) и условий  $p_1 > p_0$ ,  $U < 0$  следует, что  $U - u_1 > 0$ . Отсюда  $y_1 - y_0 > 0$ . Итак, конфигурация В совместна при  $u_1 < u_B$  и выполнении условия (9).

Если же нарушено условие (9), то уравнение (4) не имеет корня  $U$ . В этом случае происходит отрыв газов друг от друга, и уравнение (4) заменяется на два уравнения свободной границы:

$$\left. \begin{aligned} p_- = p_-(U_1) &= p_1 \left[ 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{U_1 - u_1}{c_1} \right]^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = 0, \\ \text{т. е. } U_1 &= u_1 + \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} p_+ = p_+(U_0) &= p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{U_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} = 0, \\ \text{т. е. } U_0 &= -\frac{2}{\gamma_0 - 1} c_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Так как из невыполнения условия (9) следует, что  $U_1 < U_0$ , то происходит отрыв газов друг от друга и решение имеет вид, изображенный на рис. 2.53. Области  $\Gamma_0\Gamma_1$  и  $\Gamma_2\Gamma_3$  — области волн разрежения соответственно  $r = \text{const}$  и  $s = \text{const}$ , область  $\Gamma_1\Gamma_2$  — область вакуума, в которой мы полагаем  $\rho = 0$ ,  $p = 0$ ,  $c = 0$ .

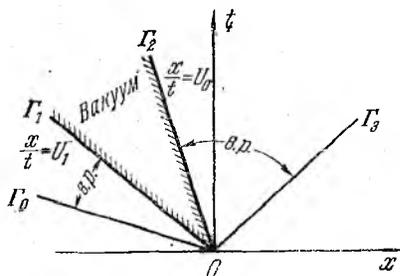


Рис. 2.53.

**5. Обзор конфигураций.**

**Газы с равным давлением.** Выпишем теперь условия осуществления конфигураций А, Б, В в предположении  $p_1 > p_0$ ,  $u_0 = 0$ . Конфигурация А возможна при выполнении условий

$$u_B < u_1 < u_B, \tag{1}$$

конфигурация Б при

$$u_1 \geq u_B, \tag{2}$$

и конфигурация В при

$$u_1 \leq u_B, \tag{3}$$

где

$$u_B = \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_1 \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} - 1 \right] < 0. \tag{4}$$

$$u_B = (1 - h_0) c_0 \sqrt{\frac{\frac{p_1}{p_0} + h_0}{1 + h_0} + \frac{1 + h_0}{\frac{p_1}{p_0} + h_0} - 2} > 0. \tag{5}$$

В случае  $p_1 = p_0$  имеем

$$u_B = u_B = 0. \tag{6}$$

Следовательно, в этом случае при  $u_1 > 0$  имеем конфигурацию Б, а при  $u_1 < 0$  — конфигурацию В.

Заметим теперь, что любому произвольному разрыву (набору величин  $\gamma_1, p_1, \rho_1, c_1, u_1; \gamma_0, p_0, \rho_0, c_0, u_0$ ) условия (1) — (6) ставят в соответствие одну и только одну конфигурацию, параметры течения в которой рассчитываются однозначно, а на ударных волнах при этом выполняются условия устойчивости.

Поэтому наше рассмотрение задачи о распаде произвольного разрыва показывает, что она всегда имеет одно и только одно устойчивое автомодельное решение. Тем самым мы доказали теорему существования и единственности решения задачи о распаде разрыва в классе автомодельных решений для политропных газов.

Возникает, однако, вопрос: может ли задача о распаде разрыва иметь устойчивое, но не автомодельное решение?

Отрицательный ответ на этот вопрос может быть получен двумя способами:

1) доказательством теоремы единственности разрывных решений уравнений газовой динамики, т. е. решений с ударными волнами и центрированными волнами разрежения;

2) непосредственным доказательством автомодельности любого устойчивого решения задачи о распаде разрыва.

Что касается первого способа, то мы должны сказать, что в настоящее время еще не получены достаточно общие теоремы единственности разрывных решений уравнений газовой динамики, а их получение связано, видимо, с большими трудностями, хотя для политропных (и нормальных) газов никто в единственности решения, по-видимому, не сомневается.

Следуя второму способу, можно действительно доказать автомодельность решения задачи о распаде разрыва, используя некоторые конкретные свойства всякого устойчивого решения этой задачи с кусочно-постоянными начальными данными.

Однако мы не будем здесь заниматься подобным доказательством, а в качестве примера отошлем читателя к п. 5 § 3 главы 4, где подобная задача решается для системы двух квазилинейных уравнений довольно общего вида.

**6. Задача о распаде разрыва для изотермического идеального газа.** Будем понимать здесь под газами «1» и «0» два изотермических идеальных газа, уравнения состояния которых заданы в виде

$$p_1 = c_1^2 \rho_1, \quad p_0 = c_0^2 \rho_0, \quad c_1^2 = R_1 T, \quad c_0^2 = R_0 T. \quad (1)$$

Изотермический идеальный газ можно рассматривать формально как политропный газ с показателем  $\gamma = 1$ . Разница в рассмотрении заключается в том, что отбрасываем уравнение сохранения энергии и третье условие Гюгоню, заменяя его условием  $T = \text{const}$ .

Поскольку анализ критических конфигураций был связан только с двумя первыми условиями Гюгоню, то все результаты предыдущих пунктов могут быть прямо применены к изотермическому случаю. В формулах пп. 2—4 следует положить  $h_0 = h_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_0 = 1$ , раскрывая, где это требуется, неопределенность. Рассмотрим выражения для  $u_B$ ,  $u_B$ . Раскрывая неопределенность в формуле (6.5.4) при  $\gamma_1 \rightarrow 1$ , имеем

$$u_B = c_1 \ln \frac{p_0}{p_1} < 0 \quad (p_1 > p_0). \quad (2)$$

Для  $u_B$  имеем

$$u_B = c_0 \sqrt{\frac{p_1}{p_0} + \frac{p_0}{p_1} - 2} = c_0 \left[ \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} - \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \right]. \quad (3)$$

Условия конфигураций А, Б, В будут прежними. Отметим также, что при  $\gamma_1 = \gamma_0 = 1$  условия (6.4.9) всегда выполнены, так что для изотермических газов отрыв газов и образование вакуума невозможны.

Расчетные формулы после предельного перехода имеют вид:

Конфигурация А:

$$p_-(M_0) = p_1 \exp \left\{ \frac{u_1 - c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right)}{c_1} \right\} = p_+(M_0) = p_0 M_0^2. \quad (4)$$

Формула (4) соответствует (6.2.12).

Конфигурация Б:

$$u_-(M_1) = u_1 - c_1 \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right) = u_+(M_0) = c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \quad (5)$$

и

$$M_1 = \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} M_0, \quad (6)$$

так что окончательно:

$$u_1 - c_1 \left[ \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} M_0 - \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} \frac{1}{M_0} \right] = c_0 \left[ M_0 - \frac{1}{M_0} \right]. \quad (7)$$

Формулы (5), (6) соответствуют (6.3.6) и (6.3.5).

Наконец, в случае конфигурации В

$$p_1 \exp \left\{ -\frac{U - u_1}{c_1} \right\} = p_0 \exp \frac{U}{c_0}. \quad (8)$$

Формула (8) соответствует уравнению (6.4.4).

Заметим, что все эти расчетные формулы можно легко получить, если пользоваться инвариантами Римана. Мы предоставляем читателю проделать при желании соответствующие выкладки.

**7. Задача о распаде разрыва для нормальных газов.** При исследовании задачи о распаде разрыва для нормальных газов мы, кроме обычных требований I—V (см. п. 3 § 4), будем требовать дополнительно выполнения следующего свойства адиабаты *H* Гюгонио: на верхней ее ветви величина  $(p - p_0)(V_0 - V)$  должна монотонно возрастать до  $\infty$  одновременно с ростом энтропии *S*.

Тогда из соотношений (см. п. 2 § 4)

$$m^2 = \frac{p - p_0}{V_0 - V} > 0, \quad (1)$$

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(V_0 - V), \quad (2)$$

где  $u_0, p_0, V_0$  означают параметры течения перед фронтом ударной волны,  $u, p, V$  — параметры течения за фронтом, следует,

что  $p$ ,  $|u|$  являются монотонно возрастающими функциями\*) параметра  $|m|$ , или, что то же,  $M_0 = \frac{|m|}{\rho_0 c_0}$ . Напомним также (см. п. 2 § 3, а также п. 7 § 2), что в бегущих волнах  $u$ ,  $p$  связаны соотношениями

$$S = \text{const}, \quad u - \Phi(S, p) = \text{const} \quad (s = \text{const}), \quad (3)$$

$$S = \text{const}, \quad u + \Phi(S, p) = \text{const} \quad (r = \text{const}), \quad (4)$$

где  $\Phi(S, p)$  определяется формулой

$$\Phi(S, p) = \int_{\bar{p}}^p \frac{dp}{a_m(S, p)}, \quad (5)$$

где  $\bar{p}$  есть фиксированный предел интегрирования, а

$$a_m(S, p) = \rho c > 0 \quad (6)$$

может считаться функцией давления  $p$  и энтропии  $S$ . Из (5), (6) следует, что  $\Phi(S, p)$  есть монотонно возрастающая функция давления  $p$ .

Функция  $\Phi(S, p)$  зависит от уравнения состояния, поэтому функции  $\Phi_0(S, p)$  и  $\Phi_1(S, p)$ , для газов «0» и «1» соответственно, вообще говоря, различны.

Начнем рассмотрение задачи о распаде с конфигурации А, полагая

$$u_0 = u_1 = 0, \quad p_1 > p_0, \quad (7)$$

считая, что уравнения состояния газов «1» и «0» различны и для каждого из них выполнены условия I—V и условие монотонного роста  $u(M)$  (см. (1), (2)).

Из предположения (7) следует конфигурация А (рис. 2.47). В области IV постоянен инвариант  $r$ , поэтому

$$u_1 + \Phi_1(S_1, p_1) = u_- + \Phi_1(S_1, p_-). \quad (8)$$

В области II

$$p_+ = p_0(M_0), \quad u_+ = u_0(M_0), \quad (9)$$

где  $p_0(M_0)$ ,  $u_0(M_0)$  означают состояние за фронтом ударной волны в газе «0» при заданном  $M_0$  и возрастают до  $\infty$  при возрастании  $M_0$ .

Условия непрерывности скорости и давления на контактной границе  $\Gamma_2$  приводят к уравнению для определения  $M_0$ :

$$u_-(M_0) = u_1 + \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_0(M_0)) = u_+(M_0) = u_0(M_0). \quad (10)$$

\*) Монотонный рост  $p(M_0)$ , как показано в п. 3 § 4, есть следствие условий I—V.

Левая часть (10) монотонно убывает, правая монотонно возрастает до  $\infty$  при увеличении  $M_0$ . При  $M_0 = 1$ , согласно (5), (7), имеем

$$\left. \begin{aligned} u_-(1) &= \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_0) > 0 & (u_1 = 0), \\ u_+(1) &= u_0(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отсюда, как и раньше, следует, что уравнение (10) имеет один и только один корень  $M_0 > 1$ .

Фиксировав  $p_1, p_0$ , будем изменять  $u_1$ . Функция

$$u_- = u_-(M_0, u_1) = u_1 + \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_0(M_0))$$

есть монотонно возрастающая функция  $u_1$ . Следовательно, корень  $M_0$  уравнения (10) есть монотонно возрастающая функция  $u_1$ .

Рассмотрим, как меняются неравенства

$$y_0 < y_1 < U < D \quad (12)$$

при изменении  $u_1$ . Неравенство  $D - U > 0$  очевидно в силу соотношения (4.2.8):

$$(U - D)(u_0 - D) = D(D - U) = \frac{p_0(M_0) - p_0}{p_0(M_0) - p_0} > 0. \quad (13)$$

Неравенство  $U - y_1 = U - (U - c_-) = c_- > 0$  также очевидно.

Рассмотрим разность

$$y_1 - y_0 = (U - c_-) - (u_1 - c_1) = (U - u_1) - (c_- - c_1). \quad (14)$$

Так как  $u_- = U$ , то из (8) следует

$$U - u_1 - (c_- - c_1) = \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_-) + (c_1 - c_-). \quad (15)$$

С ростом  $u_1$  растут  $p_- = p_0(M_0)$  и  $c_- = c_-(S_1, p_-)$ ; таким образом, разности  $\Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_-)$ ,  $c_1 - c_-$  уменьшаются. Итак, разность  $y_1 - y_0$  уменьшается с ростом  $u_1$  и при некотором значении  $u_1 = u_B$  станет равной 0. Область волны разрежения исчезнет, и решение будет иметь конфигурацию АБ (рис. 2.49). При  $u_1 = u_B$

$$p_- = p_1, \quad c_- = c_1, \quad u_- = u_1, \quad (16)$$

поэтому  $u_B$  определяется из уравнений

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_0(M_{0\text{кр}}), \\ u_B &= u_0(M_{0\text{кр}}), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

в которых  $M_{0\text{кр}}$  выступает как параметр.

Если же уменьшать  $u_1$ , то, как мы видели,  $M_0$  будет уменьшаться и при  $u_1 = u_B$  станет равным 1. При  $u_1 = u_B$  ударная волна исчезает и решение принимает конфигурацию АВ (рис. 2.51).

Значение  $u_B$  находится из уравнения

$$u_B = \Phi_1(S_1, p_0) - \Phi_1(S_1, p_1) < 0, \quad (18)$$

которое следует из (10) при  $M_0 = 1$ .

При

$$u_1 > u_B \quad (19)$$

всегда совместна конфигурация Б (рис. 2.50).

На контактной границе  $\Gamma_2$  записываем условия непрерывности давления и скорости:

$$p_-(M_1) = p_+(M_0), \quad (20)$$

$$u_-(M_1) = u_+(M_0). \quad (21)$$

Функция  $p_-(M_1)$  — монотонно возрастающая функция параметра  $M_1$ , поэтому из уравнения (20)  $M_1$  определяется как монотонно возрастающая функция  $M_0$ , а уравнение (21) можно рассматривать как уравнение для определения  $M_0$ .

Замечая теперь, что левая часть (21) — монотонно убывающая, а правая — монотонно возрастающая функции  $M_0$  и что

$$M_1(M_{0\text{кр}}) = 1,$$

$$u_+(M_{0\text{кр}}) = u_B, \quad u_-(1) = u_1 > u_B,$$

закключаем, что уравнения (20), (21) имеют один и только один корень  $M_0 > M_{0\text{кр}} > 1$ ;  $M_1 > 1$ .

Таким образом, условия совместности конфигурации Б ( $M_0 > 1$ ,  $M_1 > 1$ ) всегда выполнены при  $u_1 > u_B$ .

Наконец, при

$$u_1 < u_B \quad (22)$$

имеем конфигурацию В (рис. 2.52).

Условие непрерывности скорости и давления на контактной границе  $\Gamma_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_- = u_1 + \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p) = \\ = u_+ = \Phi_0(S_0, p) - \Phi_0(S_0, p_0) = U \end{aligned} \quad (23)$$

( $p$  означает давление в зонах III, IV,  $p_- = p_+ = p$ ). Из него определяются  $p$  и  $U$ .

Левая часть уравнения (23) монотонно убывает, правая монотонно возрастает с ростом  $p$ ; при  $p = p_0$

$$u_+ = u_+(p_0) = 0;$$

$$u_- = u_-(p_0) = u_1 + \Phi_1(S_1, p_1) - \Phi_1(S_1, p_0) = u_1 - u_B < 0,$$

Отсюда следует, что уравнение (23) имеет один и только один корень  $p = p_- = p_+ < p_0 < p_1$ . Условия совместности конфигурации В следуют из того, что  $0 > U > u_1$ . При дальнейшем уменьшении  $u_1$  возможен отрыв газов.

**8. Решение задачи о распаде разрыва в плоскости переменных  $p$ ,  $u$  ( $p$ ,  $u$ -диаграмма).** Во всех случаях конфигураций А, В, С состояние  $u_+$ ,  $p_+$ ,  $S_+$  справа от контактной границы было связано с состоянием  $u_0 = 0$ ,  $p_0$ ,  $S_0$  в газе «0» в начальный момент либо соотношением волны разрежения

$$S_+ = S_0, \quad u_+ - \Phi_0(S_0, p_+) = u_0 - \Phi_0(S_0, p_0) = -\Phi_0(S_0, p_0), \quad (1)$$

либо соотношениями Гюгонио, из которых следует

$$p_+ = p_0(S_0, M_0), \quad u_+ = u_0(S_0, M_0), \quad (2)$$

где  $p_0(S_0, M_0)$ ,  $u_0(S_0, M_0)$  монотонно растут с ростом  $M_0$ , при этом  $p_0(S_0, M_0) \rightarrow \infty$ ,  $u_0(S_0, M_0) \rightarrow \infty$  при  $M_0 \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что из зависимостей (2) можно исключить параметр  $M_0$  и получить новую зависимость:

$$u_+ = \Psi_0(S_0, p_+); \quad (3)$$

при этом  $\Psi_0(S_0, p_+)$ , так же как  $\Phi_0(S_0, p_+)$ , является монотонно возрастающей функцией переменного  $p_+$ .

Обязательным условием волны разрежения ( $y_3 - y_2 \geq 0$ ) является требование

$$p_+ \leq p_0, \quad (4)$$

откуда следует, что для определения  $u_+$  мы можем пользоваться лишь половиной кривой (1):

$$u_+ = \Phi_0(S_0, p_+) - \Phi_0(S_0, p_0), \quad (5)$$

заданной условием  $p_+ \leq p_0$ .

Условие устойчивости ударной волны ( $M_0 \geq 1$ ), напротив, требует, чтобы давление  $p_+$  было больше  $p_0$  ( $p_+ > p_0$ ); поэтому для определения  $u_+$  мы можем также пользоваться лишь половиной кривой (3), заданной условием  $p_+ \geq p_0$ . Поэтому кривая

$$u_+ = \begin{cases} \Phi_0(S_0, p_+) - \Phi_0(S_0, p_0) & \text{при } p_+ \leq p_0, \\ \Psi_0(S_0, p_+) & \text{при } p_+ \geq p_0 \end{cases} \quad (6)$$

определяет скорость  $u_+$  на контактной границе по заданному давлению  $p_+$ . Кривая

$$u = g_0(S_0, p) = \begin{cases} \Phi_0(S_0, p) - \Phi_0(S_0, p_0) & \text{при } p \leq p_0, \\ \Psi_0(S_0, p) & \text{при } p \geq p_0. \end{cases} \quad (7)$$

описывает в плоскости переменных  $p, u$  множество состояний, которые могут быть связаны с правым состоянием  $p_0, S_0, u_0 = 0$  с помощью централизованной волны разрежения либо устойчивой ( $M_0 \geq 1$ ) ударной волны.

Мы говорим, что на кривой (7) определено «состояние», хотя в каждой ее точке известны лишь два из трех гидродинамических параметров —  $p, u$ .

Однако легко видеть, что в волне разрежения ( $p \leq p_0$ )  $S = S_0$ , а при  $p \geq p_0$  энтропия  $S$  однозначно определяется в каждой точке этой кривой из условий Гюгонио.

Короче говоря, кривая (7) есть проекция на плоскость переменных  $p, u$  кривой, расположенной в пространстве трех переменных  $(p, u, S)$  и описывающей множество состояний  $(p, u, S)$ , которые могут быть связаны с правым состоянием  $p_0, u_0 = 0, S_0$  волной разрежения либо ударной волной.

Легко видеть, что кривая (7) проходит через точку  $(p_0, u_0 = 0)$ , а из свойства касания второго порядка в точке  $(p_0, S_0)$

адиабат Гюгонио  $H$  и Пуассона  $A$  следует, что кривая (7) обладает в точке  $(p_0, u_0 = 0)$  и, следовательно, всюду непрерывно дифференцируемой касательной.

На рис. 2.54 приведен примерный вид кривой (7); верхняя ее часть отвечает ударной волне (зависимость (3)), нижняя — волне разрежения (зависимость (5)).

Совершенно аналогично кривая

$$u = u_1 - g_1(S_1, p), \quad (8)$$

где

$$g_1(S_1, p) = \begin{cases} \Phi_1(S_1, p) - \Phi_1(S_1, p_1), & p \leq p_1, \\ \Psi_1(S_1, p), & p \geq p_1, \end{cases} \quad (9)$$

описывает в плоскости  $p, u$  семейство состояний, которые могут быть связаны с состоянием  $u_1, p_1, S_1$ , как с левым состоянием, либо волной разрежения ( $r = \text{const}$ ), либо ударной волной ( $m > 0, M_1 \geq 1$ ). Легко видеть, что  $g_1(S, p)$  — монотонно возрастающая функция  $p$ , что кривая (8) проходит через точку  $(p_1, u_1)$  и имеет две непрерывные производные. На рис. 2.54 приведен примерный вид кривой (8). На рис. 2.54 указано также, каким частям кривых (7), (8) отвечают волны разрежения (в. р.) и ударные волны (у. в.) соответственно в газах «0» и «1».

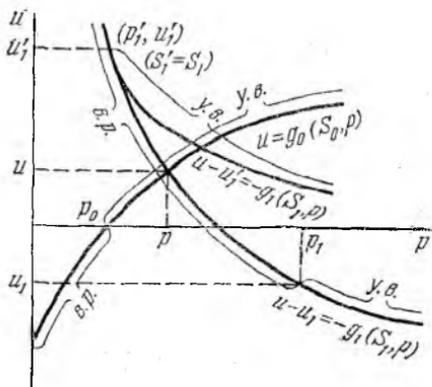


Рис. 2.54.

Поскольку на контактном разрыве всегда (за исключением случая отрыва газов) требуется непрерывность скорости  $u_- = u_+$  и давления  $p_- = p_+$ , то решение задачи о распаде разрыва сводится к определению точки  $(p, u)$  ( $p = p_- = p_+$ ,  $u = u_- = u_+$ ) пересечения кривых (7) и (8).

Если точка пересечения  $(p, u)$  этих двух кривых лежит в верхней половине ( $p > p_0$ ) кривой (7), то в газе «0» распространяется ударная волна; если же  $p < p_0$ , то в газе «0» распространяется волна разрежения. Аналогично, если точка  $(p, u)$  пересечения этих двух кривых лежит в верхней половине ( $p < p_1$ ) кривой (8), то в газе «1» распространяется волна разрежения; если же  $p > p_1$ , то в газе «1» распространяется ударная волна. В соответствии с этим на рис. 2.55 приведены возможные случаи пересечения этих кривых. Задаваясь, как всегда, условием  $p_1 > p_0$  и замечая, что кривые (8) при различных  $u_1$  отличаются друг от друга лишь сдвигом, приводим на рис. 2.55 сводку возможных конфигураций в зависимости от  $u_1$ , а также графический способ определения величин  $u_B$ ,  $u_B$ ,  $u_{отр}$ . Из рис. 2.54 и 2.55 также следует графический способ решения задачи о распаде произвольного разрыва\*).

Аналогичное рассмотрение задачи о распаде разрыва можно производить и в проекции на плоскость  $(s, r)$  — инвариантов Римана. В плоскости  $(s, r)$  части кривых (7), (8), отвечающие волнам разрежения, будут лучами, параллельными осям координат, другая их часть будет некоторой гладкой кривой, плавно

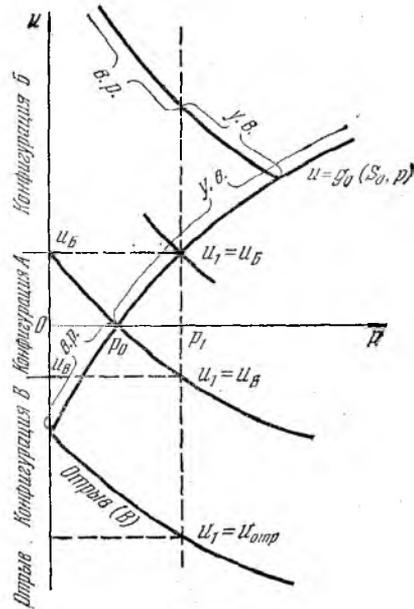


Рис. 2.55.

\* Следует иметь в виду, что кривая (8), так же как и (7), параметрически зависит от энтропии  $S_1(S_0)$ , поэтому задание лишь точки  $(p_1, u_1)$  ее еще не определяет. Если, однако, считать, что для всех  $u_1, p_1 \geq p_0$  энтропия  $S_1$  фиксирована, то кривые  $u - u_1 = -g_1(S_1, p)$  и  $u - u_1 = -g_1(S_1, p)$  совпадают при  $u'_1 - u_1 = g_1(p'_1, S_1)$ ,  $p \leq \min(p_1, p'_1)$ . Исходя из этого на рис. 2.55 указаны области значений  $p_1, u_1$  при  $S = S_1 = \text{const}$ , в которых сохраняется конфигурация решения задачи о распаде разрыва.

(с двумя производными) согласованной с этими лучами (рис. 2.56). Особенно удобно применять  $s, r$ -диаграмму при решении задачи о распаде для одинаковых изотермических газов.

В заключение этого пункта определим функцию  $g_0(S_0, p)$  для случая политропных газов.

Для политропного газа

$$p = \frac{A^2(S) \rho^\gamma}{\gamma}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(S_0, p) - \Phi_0(S_0, p_0) &= \\ &= \frac{2}{\gamma_0 - 1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} - 1 \right] c_0(S_0, p_0). \end{aligned} \quad (11)$$

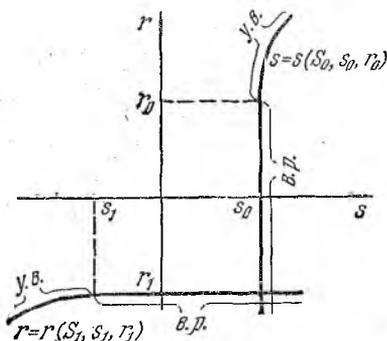


Рис. 2.56.

В случае ударной волны ( $p > p_0$ ) выражаем  $M_0$  из (4.5.13):

$$M_0 = \sqrt{\frac{p + h_0 p_0}{p_0 (1 + h_0)}}, \quad (12)$$

после чего из формулы (4.5.16) находим  $\Psi_0(S_0, p)$ :

$$\Psi_0(S_0, p) = (1 - h_0) c_0(S_0, p_0) \left[ \sqrt{\frac{p + h_0 p_0}{p_0 (1 + h_0)}} - \sqrt{\frac{p_0 (1 + h_0)}{p + h_0 p_0}} \right]. \quad (13)$$

Итак, для политропного газа уравнение (7) задается в виде  $u = g_0(S_0, p) =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\gamma_0 - 1} c_0(S_0, p_0) \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} - 1 \right] & \text{при } p \leq p_0, \\ (1 - h_0) c_0(S_0, p_0) \left[ \sqrt{\frac{p + h_0 p_0}{p_0 (1 + h_0)}} - \sqrt{\frac{p_0 (1 + h_0)}{p + h_0 p_0}} \right] & \text{при } p \geq p_0. \end{cases} \quad (14)$$

**9. Задача о распаде разрыва в средах с аномальными термодинамическими свойствами.** Отказ от условий  $p''_{VV}(V, S) > 0$  в средах, которые соседствуют в задаче о распаде разрыва, существенно осложняет эту задачу и делает картину течения более разнообразной. Осложняется вопрос об единственности решения задачи о распаде разрыва; единственность решения доказана при некоторых ограничениях на уравнения состояния, которые не диктуются требованиями термодинамики. Более сложно формулируются условия устойчивости (допустимости) ударной волны (см. § 4, п. 8 и § 5, п. 7). Ряд вопросов, связанных с этой задачей для сред с аномальными термодинамиче-

скими свойствами, рассмотрен в работах Г. Я. Галина [1958], Л. Д. Сидоренко [1968], Б. Вендрофа [1972], Т. Лю [1975].

В рассматриваемом случае нарушаются свойства 1, 2, 3 решения задачи о распаде, установленные в п. 1; в среде с аномальными свойствами может распространяться несколько ударных переходов, а также центрированных волн Римана, следующих друг за другом в одном и том же направлении относительно газа.

Мы будем предполагать, что в рассматриваемых средах выполнены условия (5.7.13)

$$T = \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S} > 0; \quad p'_V(V, S) < 0, \quad p'_S(V, S) > 0, \quad (1)$$

и будем считать допустимыми лишь те разрывы, связывающие состояния  $(u_0, V_0, p_0)$  перед фронтом и  $(u_1, V_1, p_1)$  за фронтом, для которых выполнено условие допустимости (5.7.17): для произвольной точки  $(V, p)$  адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  с центром в точке  $(V_0, p_0)$ , расположенной между точками  $(V_0, p_0)$  и  $(V_1, p_1)$ , выполнено неравенство

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} \geq -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}. \quad (2)$$

Как видно из условий (2), при знакопеременности  $p''_{VV}(V, S)$  возможны разрывы, для которых выполнены равенства

$$\frac{\partial p}{\partial V}(V_1, S_1) = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial V}(V_0, S_0) = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial V}(V_1, S_1) = \frac{\partial p}{\partial V}(V_0, S_0) = -m^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}. \quad (5)$$

Равенства (3), (4) означают, что скорость разрыва  $D$  совпадает со скоростью характеристики  $\xi_1$  (при  $m > 0$ ) или  $\xi_3$  (при  $m < 0$ ) по одну сторону разрыва. Поэтому взаимное расположение линии разрыва (штриховая линия) и  $r$ -характеристик (сплошные линии) в окрестности разрыва имеет вид, показанный на рис. 2.57, а, б, для случая  $m < 0$ . Одновременное выполнение равенств (3) и (4) означает, что слева и справа от разрыва скорость характеристик ( $\xi_1$  при  $m > 0$  или  $\xi_3$  при  $m < 0$ ) совпадает со скоростью  $D$  разрыва, так что линия разрыва совпадает с характеристиками (рис. 2.57, в).

В ряде работ такие разрывы называются контактными. Однако, на наш взгляд, это название не совсем удачно, так как

контактный разрыв в механике жидкости и газа означает границу между двумя различными газами, движущимися с одинаковыми скоростями  $u_0 = u_1 = D$ , т. е. при  $m = 0$ . Поэтому разрывы, удовлетворяющие условиям (5), следует называть по-прежнему ударными волнами.

Пусть  $u_+$ ,  $V_+$ ,  $p_+$  по-прежнему означают параметры течения на правой стороне контактной границы в решении задачи о распаде разрыва, и пусть  $u_0 = 0$ ,  $V_0$ ,  $p_0$  — заданные начальные значения в газе «0». Изучим множество  $W(V_0, p_0)$  возможных значений  $V_+$ ,  $p_+$ ,  $u_+$ .

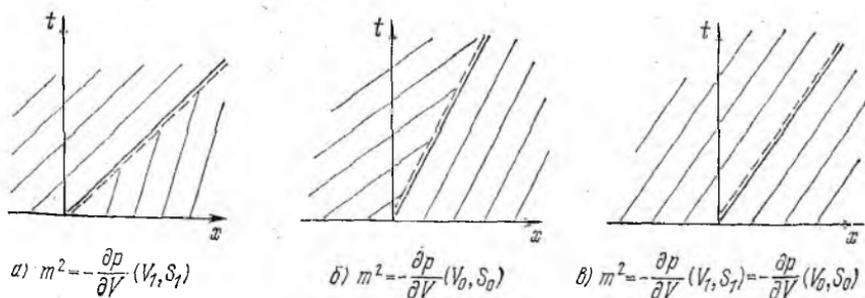


Рис. 2.57.

Очевидно, что множество  $W(V_0, p_0)$  содержит все физические (допустимые) участки адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$ , имеющей центром точку  $(V_0, p_0)$ , которые мы ввели в п. 7 § 5. Рассмотрим лишь случай  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$ , тогда допустимые участки адиабаты Гюгонио показаны двойной линией на рис. 2.58. Мы видим, что допустимые участки адиабаты Гюгонио образуют лишь часть множества  $W(V_0, p_0)$ , так как по своему смыслу это множество должно быть непрерывной кривой. В дальнейшем кривую  $V, p \in W(V_0, p_0)$  будем называть *волновой адиабатой*. Допустимые участки адиабаты Гюгонио дают лишь те значения  $V_+$ ,  $p_+$ , которые могут быть связаны с  $V_0$ ,  $p_0$  устойчивой ударной волной сжатия или разрежения. Кроме этого, мы видели, что  $V_+$ ,  $p_+$  могут быть связаны с  $V_0$ ,  $p_0$  волной разрежения Римана. Если  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$ , то волне разрежения Римана отвечает участок адиабаты Пуассона  $S = S_0$ , заданный условием  $V \geq V_0$  и требованием монотонного уменьшения величины  $\xi = \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}(V, S_0)}$  с ростом  $V$ .

Последнее требование есть условие центрированной волны разрежения, в которой переходу от правого состояния  $u_0$ ,  $V_0$ ,  $p_0$  к левому  $u_+$ ,  $V_+$ ,  $p_+$  соответствует монотонное уменьшение скорости характеристики  $\xi_3$ .

Поэтому на допустимых участках адиабаты Пуассона  $S = S_0$  должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[ - \frac{\partial p}{\partial V} (V, S_0) \right] = - \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} (V, S_0) < 0. \quad (6)$$

Если на адиабате Пуассона нет участков, где нарушено условие (6), то тогда любые ее точки при  $V > V_0$  дают возможные значения  $V_+, p_+$ .

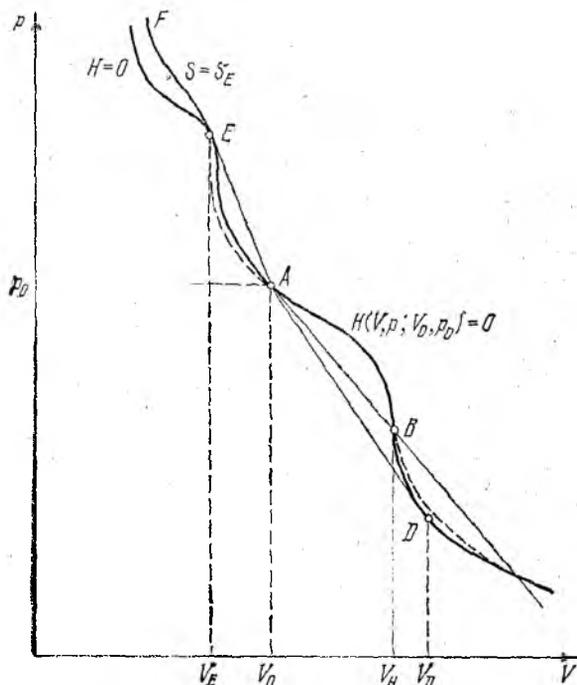


Рис. 2.58.

Однако в интересующем нас случае и, в частности, изображенном на рис. 2.58 такие участки есть. В самом деле, мы видели в п. 7 § 5, что на допустимых участках адиабаты Гюгонио  $S > S_0$ , поэтому значение энтропии в точке B (см. рис. 2.58) превосходит  $S_0$ . Отсюда следует, что адиабата Пуассона  $S = S_0$  пересечет адиабату Гюгонио внутри отрезка  $[V_0, V_H]$ .

Адиабата Гюгонио на отрезке  $[V_0, V_H]$  меняет выпуклость, поэтому с учетом условий (1) делаем заключение, что адиабата  $S = S_0$  также меняет выпуклость внутри этого отрезка. Взаимное расположение адиабаты Пуассона  $S = S_0$  и адиабаты

Гюгонио приведено на рис. 2.59. Здесь прямая  $AB$  — касательная к кривым  $H=0$ ,  $S=S_0$  в точке  $A$ ,  $AD$  — касательная к адиабате Гюгонио  $H=0$  в точке  $D$  и

$$p''_{VV}(V_R, S_0) = 0, \quad p''_{VV}(V_0, S_0) > 0.$$

Мы видим, что производная  $p''_{VV}(V, S_0)$  меняет свой знак в точке  $V = V_R$  ( $p''_{VV}(V, S_0) < 0$  при  $V > V_R$ ). Тем самым переход из точки  $(V_0, p_0)$  по волне разрежения ( $S = S_0$ ) возможен

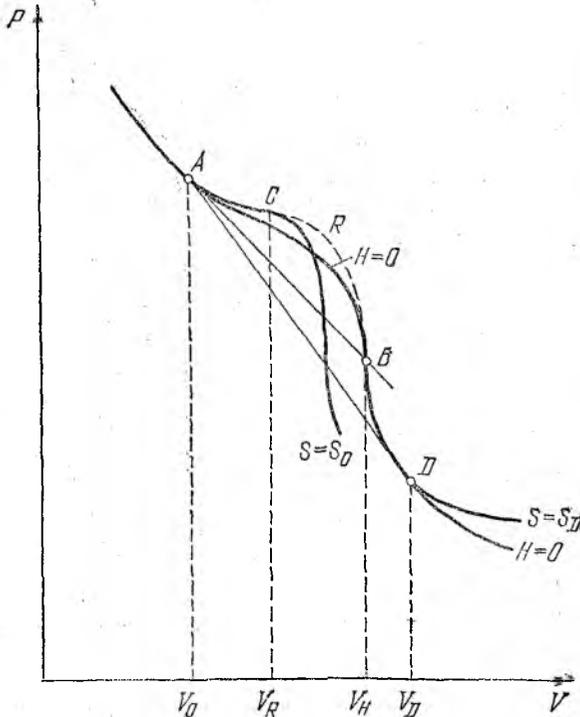


Рис. 2.59.

только до точки  $C$ , а ударный переход из точки  $A$  возможен лишь при  $V > V_H$ , т. е. начиная с точки  $B$  адиабаты Гюгонио. Мы имеем незаполненный участок  $[V_R, V_H]$  волновой адиабаты  $W(V_0, p_0)$ .

Здесь следует рассмотреть возможность появления ударных волн типа указанных на рис. 2.57, б, когда  $r$ -волна разрежения заканчивается допустимым ударным переходом, как это показано на рис. 2.60.

Это возможно, если на адиабате Пуассона  $AC$  (рис. 2.59) найдется точка  $(\tilde{V}, \tilde{p})$ , заключенная между точками  $A$  и  $C$ , и точка  $(V_1, p_1)$  такие, что

$$\begin{aligned} H(V_1, p_1; \tilde{V}, \tilde{p}) &= 0; & S(\tilde{V}, \tilde{p}) &= S_0, \\ \frac{p_1 - \tilde{p}}{V_1 - \tilde{V}} &= \frac{\partial p}{\partial V}(\tilde{V}, \tilde{S}), & V_0 &\leq \tilde{V} \leq V_R. \end{aligned} \quad (7)$$

Если при этом весь участок адиабаты Гюгонио  $H(V, p; \tilde{V}, \tilde{p})$  при  $\tilde{V} < V < V_1$  лежит справа от прямой  $p - \tilde{p} = m^2(\tilde{V} - V)$ , то тогда переход (7) является допустимым: значения  $V_1, p_1$  являются возможными значениями  $V^+, p^+$  и они должны быть включены в волновую адиабату  $W(V_0, p_0)$ .

Один из подобных переходов есть переход из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 2.59 и 2.58); в этом случае  $\tilde{V} = V_0, \tilde{p} = p_0$  и волна разрежения (рис. 2.60) отсутствует.

Необходимым условием выполнения равенств (7) является знакопеременность величины  $p''_{VV}(V, S)$  на

адиабате  $H(V, p; \tilde{V}, \tilde{p})$  при  $\tilde{V} \leq V \leq V_1$ . Именно этот случай мы и рассматриваем сейчас, так как в точке  $C$   $p''_{VV}(V, S_0)$  меняет знак.

Подробное рассмотрение приводит к выводу, что множество значений  $V_1, p_1$ , удовлетворяющих условиям (7), образует непрерывную кривую (мы будем обозначать ее буквой  $R$ ), которая соединяет точки  $C$  и  $B$  (рис. 2.59). При этом передвижению точки  $(\tilde{V}, \tilde{p})$  вдоль адиабаты  $S = S_0$  в направлении от точки  $C$  к точке  $A$  соответствует движение точки  $(V_1, p_1)$  вдоль кривой  $R$  от точки  $C$  к точке  $B$ .

Итак, мы приходим к заключению, что справа от точки  $A$  волновая адиабата  $W(V_0, p_0)$  состоит из отрезка  $AC$  адиабаты Пуассона  $S = S_0$ , отрезка  $CB$  кривой  $R$ , состоящего из значений  $V_1, p_1$ , удовлетворяющих (7), и части  $BD$  адиабаты Гюгонио  $H(V, p; \tilde{V}, \tilde{p}) = 0$ . Таким образом, мы построили непрерывную кривую  $W(V_0, p_0)$  — волновую адиабату — справа от точки  $A$ .

Отметим, что если на адиабате Гюгонио  $BD$  при ее продолжении вправо нарушится условие допустимости, то волновая адиабата будет содержать еще новые участки, состоящие из адиабат Пуассона  $S = \text{const}$  и кривых  $R$ , построенных для них. Это соответствует картине  $r$ -характеристик, показанной на рис. 2.61, когда распространяются несколько центрированных

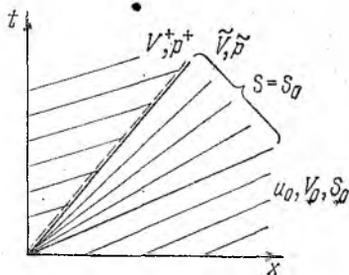


Рис. 2.60.

волн разрежения, разделенных допустимыми ударными переходами.

Вкратце рассмотрим вопрос о построении волновой адиабаты  $W(V_0, p_0)$  при  $V \leq V_0$ , имея в виду, что в основном оно производится с учетом тех же самых соображений, которые использовались выше.

Как мы видели выше, в рассматриваемом нами случае  $p''_{VV}(V_0, S_0) > 0$  отрезок  $AE$  адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0)$  (см. рис. 2.58) является допустимым, он состоит из возможных значений  $V^+$ ,  $p^+$ , и поэтому он естественно включается в волновую адиабату  $W(V_0, p_0)$ . Ударный переход из точки  $A$  в точку  $E$

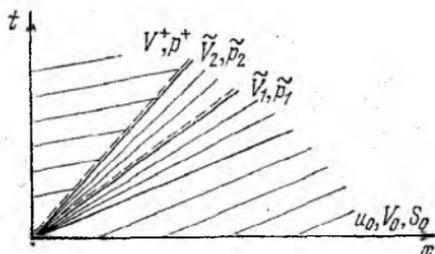


Рис. 2.61.

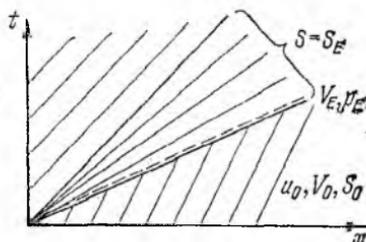


Рис. 2.62.

имеет картину  $r$ -характеристик, изображенную на рис. 2.57, *в*. Далее (в сторону уменьшения  $V = V^+$ ) волновая адиабата может быть продолжена с помощью  $r$ -волны разрежения  $S = S_E$ , где  $S_E$  — энтропия в точке  $E$ . Теперь точка  $E$  отвечает правому состоянию в волне разрежения  $S = S_E$ , поэтому переход в точку  $F$ , соответствующую значениям  $V^+ < V_E$ ,  $p^+$ , возможен лишь при условии, что  $p''_{VV}(V, S_E) < 0$  при  $V^+ < V < V_E$  (это следует из того, что скорость  $r$ -характеристик убывает при переходе из точки  $E$  в точку  $F$ ).

В случае, изображенном на рис. 2.58, это условие ( $p''_{VV}(V, S_E) < 0$ ) выполнено в точке  $V = V_E$ , и поэтому в некоторой полукрестности  $V < V_E$  адиабата Пуассона  $S = S_E$  дает возможные значения  $V^+$ ,  $p^+$  и должна быть включена в волновую адиабату.

На рис. 2.62 показана картина  $r$ -характеристик для случая, когда точка  $(V^+, p^+)$  лежит на адиабате Пуассона  $S = S_E$ .

Пусть в точке  $F$  адиабаты  $S = S_E$  знак величины  $p''_{VV}(V, S_E)$  меняется с минуса при  $V > V_F$  на плюс при  $V < V_F$ . В этом случае переход по адиабате  $S = S_E$  возможен только до точки  $F$ . Для продолжения волновой адиабаты теперь следует рассмотреть ударные переходы из точек  $(\tilde{V}, \tilde{p})$  адиабаты  $S = S_E$  в точки

$(V_1, p_1)$  при условиях

$$\begin{aligned} H(V_1, p_1; \tilde{V}, \tilde{p}) &= 0; & S(\tilde{V}, \tilde{p}) &= S_E \\ \frac{p_1 - \tilde{p}}{V_1 - \tilde{V}} &= \frac{\partial p}{\partial V}(\tilde{V}, \tilde{S}); & V_F &\leq \tilde{V} \leq V_E, \end{aligned} \quad (8)$$

аналогичных условиям (7).

Совокупность точек  $(V_1, p_1)$ , заданных условиями (8), снова будем называть кривой  $R$ . Эта кривая определена при  $p > p_F$ , она непрерывно примыкает к отрезку  $EF$  адиабаты Пуассона  $S = S_E$  (при  $\tilde{V} = V_F, \tilde{p} = p_F$ ) и она оканчивается при пересечении ее с новым допустимым участком исходной адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$ . Этот отрезок кривой  $R$  также включается в волновую адиабату  $W(V_0, p_0)$ .

Таким образом, строится волновая адиабата. Как мы видим, она включает все допустимые участки адиабаты Гюгонио  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$ , отрезки адиабат Пуассона  $S = S_i$  и определяемые ими кривые  $R_i$ . Здесь  $S_i$  — значения энтропии на правых концах допустимых участков — адиабаты Гюгонио при  $V \geq V_0$  и на левых концах допустимых участков при  $V < V_0$ .

Отметим, что эта кривая пересекается любой прямой  $p = \text{const}$  не более чем в одной точке, т. е. давление  $p$  монотонно изменяется вдоль этой кривой.

Мы ограничимся этими замечаниями о построении волновой адиабаты, имея в виду, что в конкретных случаях читатель сможет выяснить необходимые детали поведения волновой адиабаты, опираясь на изложенное выше.

Каждой точке волновой адиабаты  $W(V_0, p_0)$  соответствует значение скорости  $u = u^+$ , которая вычисляется из условий Гюгонио на допустимых участках адиабаты  $H(V, p; V_0, p_0) = 0$  и на кривых  $R$  и из постоянства инварианта Римана на отрезках адиабат Пуассона  $S = S_i$ .

В результате мы имеем непрерывную кривую в пространстве переменных  $u, V, p$ , которая задает множество возможных значений  $u^+, V^+, p^+$  при фиксированных  $u_0, V_0, p_0$ .

Проекция этой кривой на плоскость  $V = 0$  дает кривую

$$u = u_0 + g_0(S_0, p), \quad (9)$$

которую мы ввели в п. 8 при решении задачи о распаде разрыва методом  $p, u$ -диаграммы. Аналогично для газа «1» следует построить зависимость

$$u = u_1 - g_1(S_1, p), \quad (10)$$

где  $g_1(S_1, p)$  — проекция на плоскость  $V = 0$  волновой адиабаты, построенной для газа «1».

Задача о распаде разрыва, так же как и в п. 8, решается определением точки пересечения ( $u^+ = u^-$ ;  $p^+ = p^-$ ) кривых (9) и (10).

Для единственности решения задачи о распаде разрыва приходится накладывать дополнительные ограничения на уравнения состояния.

Например, в работах Б. Вендрофа [1972], Т. Лю [1975] накладывается еще одно требование:

$$\bar{p}'_V(V, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial V} [p(V, S(V, \epsilon))] < 0, \quad (11)$$

при выполнении которого устанавливается единственность решения задачи о распаде разрыва (для случая, когда газы «0» и «1» описываются одними и теми же уравнениями состояния).

Для существования решения задачи о распаде произвольного разрыва дополнительные ограничения на уравнения состояния требуются даже для нормальных газов (рост величины  $(p - p_0)(V_0 - V)$  вдоль адиабаты Гюгонио до бесконечности). Естественно, что для сред с аномальными термодинамическими свойствами тем более требуются дополнительные ограничения, обеспечивающие существование решения задачи о распаде произвольного разрыва.

**10. Линеаризованные формулы распада разрыва в случае политропного газа.** Легко видеть, что величины  $\Psi_0(S_0, p)$  и  $\Phi_0(S_0, p) - \Phi_0(S_0, p_0)$  при  $\frac{p}{p_0} = 1 + \epsilon$  совпадают с точностью до членов порядка  $\epsilon^3$ . Это же следует из анализа слабых ударных волн, проведенного в п. 7 § 4. Поэтому, проводя в формуле (6.8.14) разложение по степеням малой величины  $\frac{p - p_0}{p_0}$  и ограничиваясь лишь членами первого порядка, получим

$$u = g_0(S_0, p) = \frac{c_0}{\gamma_0} \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0}. \quad (1)$$

Аналогично для слабых волн

$$u_1 - u = g_1(S_1, p) = \frac{c_1}{\gamma_1} \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{p - p_1}{\rho_1 c_1}. \quad (2)$$

Поэтому для распада разрыва с малыми амплитудами получаем, что значения давления  $p$  и скорости  $u$  на контактном разрыве независимо от конфигурации выражаются одними и теми же формулами:

$$p = \frac{u_1 - u_0}{\frac{1}{\rho_1 c_1} + \frac{1}{\rho_0 c_0}} + \frac{\frac{p_1}{\rho_1 c_1} + \frac{p_0}{\rho_0 c_0}}{\frac{1}{\rho_1 c_1} + \frac{1}{\rho_0 c_0}}, \quad (3)$$

$$u = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 c_0 + \rho_1 c_1} + \frac{\rho_0 c_0 u_0 + \rho_1 c_1 u_1}{\rho_0 c_0 + \rho_1 c_1}, \quad (4)$$

где величину  $u_1$  мы заменили на разность  $u_1 - u_0$ . Формулы (3), (4) описывают решение задачи о распаде разрыва в акустическом приближении, т. е. для бесконечно слабых волн.

**11. Распад разрыва в канале переменного сечения.** Рассмотрим две полубесконечные цилиндрические трубы с площадями поперечного сечения  $A_1, A_2$ , стыкующиеся в плоскости  $x = 0$  (рис. 2.63) и заполненные газами, характеризующимися на момент времени  $t = 0$  параметрами  $u_1, \rho_1, p_1, S_1$ , соответственно  $u_2, \rho_2, p_2, S_2$ .

Возникающее при  $t > 0$  движение газа является двумерным; однако можно считать, что волны, распространяющиеся в каждой трубе, при  $t \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$  становятся близкими к одномерным. Приближенная картина течения (мы будем называть это течение распадом разрыва на скачке сечения) основана на предположении, что асимптотика устанавливается мгновенно и течение распадается на два одномерных, разделенных бесконечно тонкой зоной перехода, заключенной между плоскостями  $x = -\varepsilon, x = +\varepsilon$ . Движение в области перехода является стационарным потоком, так что величины  $f = (u, \rho, p)$  слева и справа от зоны перехода (мы будем их обозначать  $f^-, f^+$  соответственно) связаны соотношениями

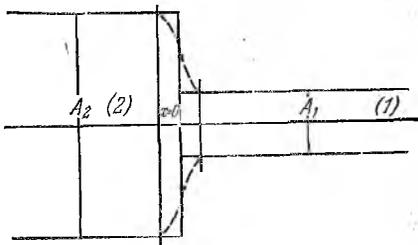


Рис. 2.63.

$$A_2(\rho u)^- = A_1(\rho u)^+, \tag{1}$$

$$\left[ \varepsilon \left( p, \rho \right) + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right]^- = \left[ \varepsilon \left( p, \rho \right) + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right]^+. \tag{2}$$

Первое выражает закон сохранения массы, второе — закон Бернулли. К этому присоединяется третье соотношение, которое в разных моделях распада выглядит по-разному. Мы ограничимся адиабатической моделью, в которой предполагается сохранение энтропии в зоне перехода \*). Для политропного газа, следовательно, имеем

$$\left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)^- = \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)^+. \tag{3}$$

Рассмотрим простейший случай распада разрыва — набегание ударной волны, идущей по покоящемуся газу с параметрами  $\rho_1, p_1, u_1$  и выходящей из широкой части трубы в узкую. Мы

\*) Полный анализ задачи о распаде разрыва на скачке сечения имеется в работах В. Г. Дулова [1958] и И. К. Яушева [1967].

будем предполагать, что скачок сечения невелик, т. е. выполняется условие

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \delta \ll 1. \quad (4)$$

Тогда можно считать возмущение ударной волны малым и линеаризовать расчетные формулы. После прохождения ударной волны через скачок сечения мы будем иметь следующую конфигурацию разрывов: направо идет ударная волна  $D_1$ , за ней в точке  $x = 0$  имеет место разрыв, подчиняющийся соотношениям

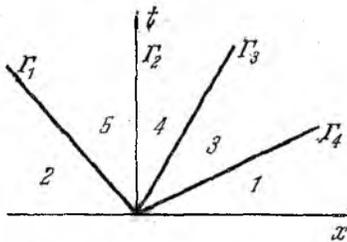


Рис. 2.64.

(1) — (3), назад идет отраженная волна; между прошедшей ударной волной и сечением  $x = 0$  находится контактная граница. На рис. 2.64 изображена конфигурация разрывов в плоскости  $x, t$ . Линия  $G_4$  есть траектория ударной волны, вошедшей в узкую трубу,  $G_1$  — траектория отраженной ударной волны,  $G_2$  — переходная зона,  $G_3$  — траектория контактной границы. На линиях

$G_1, G_2, G_3$  параметры течения испытывают скачки небольшой амплитуды, и соответствующие условия примыкания можно линеаризовать. Обозначим через  $\Delta p, \Delta u$  полные изменения  $p, u$  при переходе от состояния (2) к состоянию (3), через  $\Delta_i p, \Delta_i u$  изменения  $p, u$  при переходе через  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Справедливы линеаризованные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad & \text{на } G_1: \frac{\Delta_1 p}{p_2} + \frac{1+h}{1-h} \frac{\Delta_1 u}{c_2} = 0, \\ \text{б)} \quad & \text{на } G_2: -\delta + \frac{\Delta_2 u}{u_2} + \frac{\Delta_2 p}{\gamma p_2} = 0, \\ \text{в)} \quad & \frac{\Delta_2 p}{p_2} + u_2 \Delta_2 u = 0, \\ \text{г)} \quad & \text{на } G_3: \Delta_3 p = \Delta_3 u = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Полные изменения  $\Delta u, \Delta p$  вызваны изменением силы  $M$  ударной волны при переходе из широкой части трубы в узкую. Пользуясь условиями Гюгонио для политропного газа

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{p_2}{p_1} = (1+h)M^2 - h, \\ \text{б)} \quad & \frac{u_2}{c_1} = (1-h) \left( M - \frac{1}{M} \right), \\ \text{в)} \quad & \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\left[ (1+h) - \frac{h}{M^2} \right] \left[ (1-h) + hM^2 \right]}, \\ \text{г)} \quad & \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M^2}{1-h+hM^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad \frac{\Delta p}{p_1} &= \frac{\Delta_1 p + \Delta_2 p}{p_1} = 2(1+h)M\Delta M, \\ \text{б)} \quad \frac{\Delta u}{c_1} &= \frac{\Delta_1 u + \Delta_2 u}{c_1} = (1-h)\left(1 + \frac{1}{M^2}\right)\Delta M. \end{aligned} \right\} (7)$$

Соотношения (6) позволяют выразить величины с индексом 2 через величины с индексом 1 и известные функции от  $M$ , и тогда коэффициенты уравнений (5а), (5б), (5в) будут выражаться через  $M$  и величины с индексом 1. Уравнения (5а), (5б), (5в), (7а), (7б) дают систему пяти уравнений относительно четырех величин:  $\Delta_1 u$ ,  $\Delta_2 u$ ,  $\Delta_1 p$ ,  $\Delta_2 p$ . Условие алгебраической совместности уравнений (7) приводит к уравнению, впервые полученному Б. Честером [1953]:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{2M dM}{(M^2 - 1)k(M)}, \quad (8)$$

где

$$k(M) = 2\left[\left(1 + (1-h)\frac{1-g^2}{g}\right)\left(2g + 1 + \frac{1}{M^2}\right)\right]^{-1}. \quad (9)$$

$$g^2(M) = \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}. \quad (10)$$

Уравнение (8) дает связь между изменениями силы ударной волны и сечения трубы. Р. Чиснелл [1957] предложил использовать формулу (8) для распада нестационарного ударного фронта, движущегося в канале с непрерывно меняющимся сечением. В теории Чиснелла канал с непрерывно меняющимся сечением аппроксимируется последовательностью цилиндрических каналов (рис. 2.65), примыкающих друг к другу, а переход ударной волны из одного цилиндрического участка в другой описывается формулой (8).

Интегрируя уравнение (8), находим

$$Af(M) = \text{const}, \quad (11)$$

где

$$f = z^{\frac{1}{\gamma}}(z-1)(z+h)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1+R}{1-R} \right]^{\sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}} \left[ \frac{R - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{R + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left[ \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{arctg} \left\{ \frac{\frac{1}{2\gamma^{\frac{1}{2}}} R}{\gamma-1} \right\} \right], \quad (12)$$

$$R = \left(1 + \frac{1}{hz}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - h. \quad (14)$$

Величина  $k(M)$  есть медленно меняющаяся функция  $M$ . Так, для  $\gamma = \frac{7}{5}$   $k(1) = \frac{1}{2}$ ,  $k(\infty) \simeq 0,394$ . Если считать  $k$  постоянной, интеграл (11) упрощается и приводится к виду

$$A^k (M^2 - 1) = \text{const.} \quad (15)$$

Для слабых ударных волн при произвольном  $\gamma$   $k(M) \rightarrow \frac{1}{2}$  и формула (15) принимает вид

$$M - 1 \sim A^{-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Для сильных ударных волн

$$k(M) \rightarrow k(\infty) = \frac{2}{(1+k_1)(1+k_2)}. \quad (17)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}}.$$

Тогда из уравнения (15) имеем

$$M \sim A^{-\frac{k_\infty}{2}}. \quad (18)$$

Оценка (18) была применена Чиселлом для установления асимптотики сильной ударной волны в случае цилиндрической и сферической симметрии.

Из (18) следует

$$M \sim x^{-n}, \quad n = \frac{k_\infty}{2}, \quad (19)$$

для цилиндрической ударной волны и

$$M \sim x^{-n}, \quad n = k_\infty, \quad (20)$$

для сферической ударной волны ( $x$  — расстояния до оси или, соответственно, точки симметрии).

Сравнение оценки (19), (20) с автомодельным решением Гудерлей для сходящейся ударной волны (см. § 9, п. 5) показывает прекрасное совпадение. Так, для  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{5}$  имеем следующее сопоставление показателей  $n$ :

	Цилиндрическая волна		Сферическая волна	
	Чиселл	Гудерлей	Чиселл	Гудерлей
$\gamma = 5/3$	0,2254	0,2260	0,4508	0,4527
$\gamma = 7/5$	0,1971	0,1973	0,3941	0,3944

Изложенная теория Чиснелла не учитывает дополнительного воздействия вторичных волн, отраженных от стенок канала и догоняющих ударную волну. В работах Р. Чиснелла [1955, 1957] в формулу (18) были внесены поправки, оказавшиеся, впрочем, несущественными.

Г. Уитэм [1958] дал простое истолкование уравнению (8). Как известно (см. К. П. Станюкович [1955]), течение в канале в одномерном приближении описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $A(x)$  — площадь поперечного сечения канала.

Уравнения (21) могут быть переписаны в характеристической форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt_1} - \frac{du}{dt_1} + \frac{cu}{u-c} \frac{d \ln A}{dt_1} &= 0, \\ \text{б)} \quad \frac{d}{dt_2} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \\ \text{в)} \quad \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt_3} + \frac{du}{dt_3} + \frac{cu}{u+c} \frac{d \ln A}{dt_3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt_2} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt_3} = \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (23)$$

Предполагая для определенности, что ударная волна движется слева направо и что разница наклонов траекторий ударной волны и догоняющей характеристики невелика, можно приближенно считать, что соотношение

$$d\bar{r} = \frac{1}{\rho c} dp + du + \frac{cu}{u+c} d \ln A = dr + \frac{cu}{u+c} d \ln A = 0 \quad (24)$$

выполняется не только вдоль  $r$ -характеристики, но и на траектории ударной волны. Из (6а), (6б) имеем

$$dr = du + \frac{1}{\rho_2 c_2} dp = c_1 \left[ (1-h) \left( 1 + \frac{1}{M^2} \right) + \frac{2p_1}{\rho_2 c_2 c_1} (1+h) M \right] dM. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), приходим к соотношению

$$\left[ (1-h) \left( 1 + \frac{1}{M^2} \right) + \frac{2p_1}{\rho_2 c_2 c_1} (1+h) M \right] dM + \frac{c_2 u_2}{c_1 (u_1 + c_1)} d \ln A = 0. \quad (26)$$

которое в силу соотношений (6) эквивалентно (8).

Так как предположение (24) справедливо не только на слабых волнах, но и на сильных, входящих в центр, это объясняет хорошее совпадение теории Чиснелла с автомодельным решением для задачи о сходящейся ударной волне.

Для течений, обладающих тем свойством, что наклон характеристики, догоняющей ударный фронт, близок к наклону ударного фронта, разработаны различные приближения, хорошо описывающие поведение течения вблизи фронта (метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го (см. С. Цзянь [1959]), метод коротких волн (см. С. А. Христианович, О. С. Рыжов [1958])).

## § 7. Взаимодействие сильных разрывов

Опираясь на анализ задачи о распаде произвольного разрыва, в этом параграфе мы рассмотрим несколько задач о взаимодействии сильных разрывов, каковыми являются ударные волны и контактные границы.

При соединении сильных разрывов возникают кусочно-постоянные течения, параметры которых можно принять за начальные данные для решения задачи о распаде произвольного разрыва. Поэтому задача о взаимодействии сильных разрывов сводится к задаче о распаде разрыва.

Мы рассмотрим в этом параграфе взаимодействия сильных разрывов в следующем порядке:

1. Набегание ударной волны на контактную границу.
2. Соединение ударных волн, движущихся относительно газа навстречу друг другу.
3. Соединение ударных волн, движущихся в газе в одном направлении.

Этими тремя комбинациями исчерпываются все возможные взаимодействия сильных разрывов. Основной задачей будет установление конфигурации образующегося течения в зависимости от параметров, характеризующих взаимодействующие разрывы.

Мы проведем сначала общее исследование методом  $p, u$ -диаграммы, а затем рассмотрим случай политропного газа.

**1. Набегание ударной волны на границу двух сред.** Пусть на границу  $x = 0$  двух сред, характеризуемых параметрами  $\bar{p}_0 = p_0$ ,  $S_0$ ,  $\bar{u}_0 = 0$  (слева от  $x = 0$ ) и  $p_0$ ,  $S_0$ ,  $u_0 = 0$  (справа), в момент  $t = 0$  набегают ударная волна, идущая в среде  $x < 0$  в направлении слева направо. Таким образом, в момент  $t = 0$  образуется начальный разрыв с параметрами  $p_1$ ,  $S_1$ ,  $u_1$  (газ «1», слева) и  $p_0$ ,  $S_0$ ,  $u_0 = 0$  (газ «0», справа). При этом точка  $(p_1, u_1)$  должна лежать в верхней части кривой (6.8.7), вычисленной для газа, первоначально расположенного при  $x < 0$ , и проходящей через

точку  $(p_0, 0)$ , т. е.

$$u_1 = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_1), \quad p_1 > p_0, \quad u_1 > 0. \quad (1)$$

Таким образом, множество возможных состояний  $(p, u)$  газа «1» изобразится в плоскости  $(p, u)$  кривой с уравнением (1) (рис. 2.66).

Пусть задана исходная ударная волна. Тем самым задана точка  $(p_1, u_1)$ , лежащая на кривой (1) (рис. 2.66). В соответствии с п. 8 § 6 решение задачи о взаимодействии ударной волны с контактной границей сводится к определению точки  $(p, u)$  пересечения кривой (6.8.7)

$$u = g_0(S_0, p) \quad (2)$$

для газа «0», проходящей через точку  $(p_0, u_0)$ , и кривой (6.8.8)

$$u = u_1 - g_1(S_1, p) \quad (3)$$

для газа «1», проходящей через точку  $(p_1, u_1)$ .

Очевидно, что кривая (2) может пересечь кривую (3) лишь верхней своей ветвью, т. е. при  $p > p_0$ . Следовательно, возникающее течение имеет либо конфигурацию А (соответствует точке А пересечения кривой (2) (СА) и кривой (3) (АВ) на рис. 2.66), либо конфигурацию Б (соответствует точке Б пересечения кривой (2) (BC) и кривой (3) (АВ)).

Таким образом, всегда в газ «0» распространяется ударная волна, в газ «1» распространяется волна разрежения либо ударная волна, в зависимости от взаимного расположения кривых (1) и (2).

Рассмотрим случай политропных газов. Согласно (6.8.13)

$$\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) = (1 - h_1) \bar{c}_0 \left[ \sqrt{\frac{p + h_1 p_0}{p_0(1 + h_1)}} - \sqrt{\frac{p_0(1 + h_1)}{p + h_1 p_0}} \right], \quad (4)$$

$$\Psi_0(S_0, p) = (1 - h_0) \bar{c}_0 \left[ \sqrt{\frac{p + h_0 p_0}{p_0(1 + h_0)}} - \sqrt{\frac{p_0(1 + h_0)}{p + h_0 p_0}} \right]. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \frac{\bar{\Psi}_0^2(\bar{S}_0, p)}{\Psi_0^2(S_0, p)} = \frac{(1 - h_1)^2}{(1 - h_0)^2} \frac{\bar{c}_0^2}{c_0^2} \frac{1 + h_0}{1 + h_1} \frac{\theta + h_0}{\theta + h_1} \frac{(\theta - 1)^2}{(\theta - 1)^2} = \\ &= \frac{(1 - h_1)^2}{(1 - h_0)^2} \frac{(1 + h_0)}{(1 + h_1)} \frac{\theta + h_0}{\theta + h_1} \left(\frac{\bar{c}_0}{c_0}\right)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

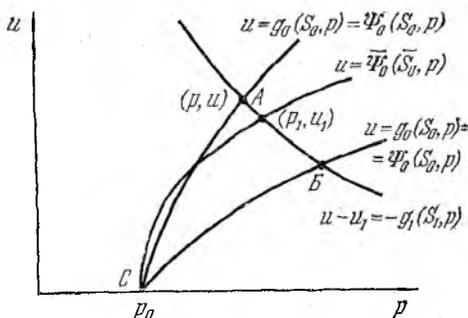


Рис. 2.66.

где

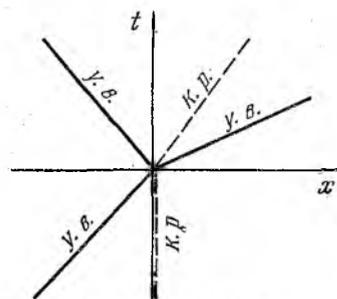
$$\theta = p/p_0. \quad (7)$$

Отсюда имеем

$$K(1) = \frac{(1+h_0)^2}{(1-h_0)^2} \frac{(1-h_1)^2}{(1+h_1)^2} \left(\frac{\bar{c}_0}{c_0}\right)^2 = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)^2 \left(\frac{\bar{c}_0}{c_0}\right)^2, \quad (8)$$

$$K(\infty) = \frac{(1-h_1)^2}{(1-h_0)^2} \frac{(1+h_0)^2}{(1+h_1)^2} \left(\frac{\bar{c}_0}{c_0}\right)^2 = \frac{1+h_1}{1+h_0} K(1). \quad (9)$$

Если  $h_0 < h_1$  ( $\gamma_0 < \gamma_1$ ), то  $K(\infty) > K(1)$  и  $K(\theta)$  — монотонно возрастающая функция  $\theta$ . Если же  $h_0 > h_1$  ( $\gamma_0 > \gamma_1$ ), то  $K(\infty) < K(1)$  и  $K(\theta)$  — монотонно убывающая функция при  $0 < \theta < \infty$ .



$$K(t) \geq 1, K(\infty) \geq 1$$

Рис. 2.67.

Рассмотрим следующие случаи:

1.  $K(1) \geq 1, K(\infty) \geq 1$ . Тогда

$K(\theta) \geq 1$  и  $\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) \geq \Psi_0(S_0, p)$  при всех  $p \geq p_0$ . В этом случае кривая  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  лежит ниже кривой  $u = \Psi_0(S_0, p)$  (рис. 2.66) и при любой силе ударной волны в результате взаимодействия с контактной границей возникает конфигурация Б, т. е. при  $t > 0$  от контактной границы распространяются в разные стороны две ударные волны (рис. 2.67).

2.  $K(1) \leq 1, K(\infty) \leq 1$ . Тогда  $\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) \leq \Psi_0(S_0, p)$  и при любой силе ударной волны течение при  $t > 0$  имеет конфигурацию А, т. е. в газе «0» распространяется ударная волна (как, впрочем, и всегда), а в газе «1» распространяется центрированная волна разрежения.

3. Если  $K(1) > 1, K(\infty) < 1$  ( $\gamma_0 > \gamma_1$ ), то при некотором  $p = P$  кривые  $u = \Psi_0(S_0, p)$  и  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  пересекаются. При  $p_0 \leq p_1 \leq P$  имеет место конфигурация Б; при  $p_1 > P$ , т. е. для достаточно сильных ударных волн, имеет место конфигурация А.

4.  $K(1) < 1, K(\infty) > 1$  ( $\gamma_0 < \gamma_1$ ). Тогда кривые  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  и  $u = \Psi_0(S_0, p)$  пересекаются при  $p = P$ ; в области  $p_0 \leq p_1 \leq P$  течение имеет конфигурацию А, при  $p_1 > P$  — конфигурацию Б.

Рассмотрим частный случай одинаковых газов ( $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$ ). Тогда

$$K(1) = K(\infty) = \left(\frac{\bar{c}_0}{c_0}\right)^2. \quad (10)$$

Учитывая соотношение  $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ , запишем (10) в виде

$$K(1) = K(\infty) = \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что когда ударная волна идет из менее плотного

газа в более плотный газ ( $K > 1$ ), то в менее плотный газ отражается ударная волна (имеем конфигурацию Б). Если же ударная волна идет из более плотного газа в менее плотный ( $K < 1$ ), то отражается волна разрежения (конфигурация А).

Этот результат может быть сравнен с выводами п. 5 § 3, где изучалось преломление бегущей волны на контактной границе. Там мы получили, что от более плотной среды отражается волна того же типа, что и падающая. Так как слабую ударную волну можно рассматривать как слабую волну сжатия Римана, то мы видим, что качественно преломление ударных волн и волн Римана на контактных границах носит одинаковый характер.

**2. Встреча двух ударных волн.** По веществу с параметрами  $\bar{u}_0 = 0$ ,  $\bar{p}_0$ ,  $\bar{S}_0$  идут навстречу друг другу две ударные волны, оставляющие за собой состояния  $u_1 = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_1)$ ,  $p_1$ ,  $S_1$  за левой волной и  $u_0 =$

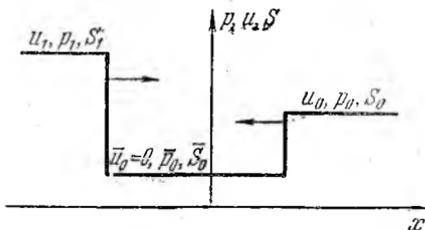


Рис. 2.68.

$= -\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_0)$ ,  $p_0$ ,  $S_0$  за правой (рис. 2.68). В момент  $t = 0$  ударные волны встречаются в точке  $x = 0$ , образуя начальный разрыв с параметрами  $u_1 = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_1)$ ,  $p_1$ ,  $S_1$  (слева) и  $u_0 =$

$= -\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_0)$ ,  $p_0$ ,  $S_0$  (справа). Для определенности полагаем, что

$$p_1 \geq p_0. \quad (1)$$

Здесь возможны два случая:

а) Кривая  $u - u_0 = \Psi_0(S_0, p)$  всегда ниже кривой  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  (рис. 2.69, а).

б) Кривая  $u - u_0 = \Psi_0(S_0, p)$  пересекает кривую  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  в некоторой точке  $(P, U)$  (рис. 2.69, б).

В первом случае возможна только конфигурация Б, во втором — как Б, так и А, однако в любом случае в газе «0» будет распространяться ударная волна.

Поболее рассмотрим случай политропного газа, для которого пересечение кривых  $u = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  и  $u = u_0 + \Psi_0(S_0, p) = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) - \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p)$  невозможно. Тем самым мы должны доказать неравенство

$$\bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) + \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p_0) > \Psi_0(S_0, p) \quad \text{при} \quad p \geq p_0 > \bar{p}_0. \quad (2)$$

Учитывая формулу (6.8.13) для  $\Psi_0(S_0, p)$  и формулу (6.8.12), приводим неравенство (2) к виду

$$\frac{M_1^2 - 1}{M_1} + \frac{M_0^2 - 1}{M_0} > \frac{c_0}{\bar{c}_0} \frac{M^2 - 1}{M}. \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\frac{D_0}{\bar{c}_0} = \sqrt{\frac{p_0 + h\bar{p}_0}{\bar{p}_0(1+h)}} > 1 & (p_0 > \bar{p}_0), \\
 M_1 &= \frac{D_1}{\bar{c}_0} = \sqrt{\frac{p + h\bar{p}_0}{\bar{p}_0(1+h)}} \geq M_0 > 1 & (p \geq p_0 > \bar{p}_0), \\
 M &= \frac{|D - u_0|}{c_0} = \sqrt{\frac{p + h\rho_0}{\rho_0(1+h)}} > 1 & (p > \rho_0).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

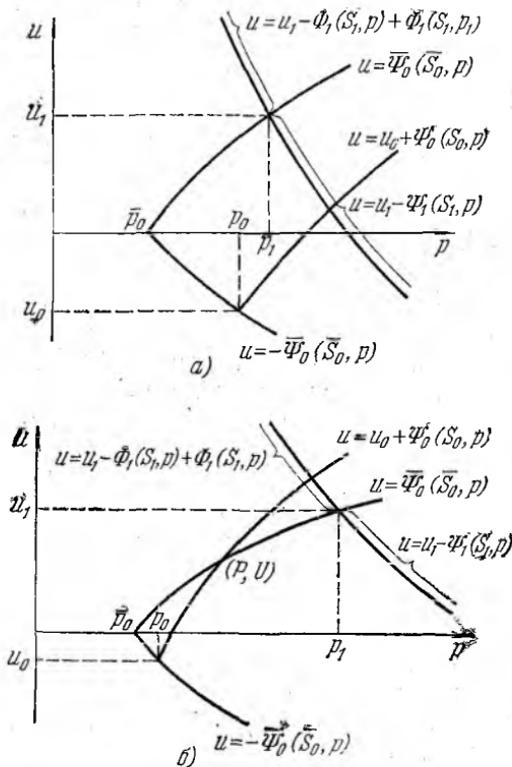


Рис. 2.69

Отсюда следует равенство

$$(1+h)M^2 - h = \frac{(1+h)M_1^2 - h}{(1+h)M_0^2 - h}. \tag{5}$$

Учитывая соотношение (4.5.15):

$$\frac{c_0^2}{\bar{c}_0^2} = \frac{[(1+h)M_0^2 - h][(i-h) + hM_0^2]}{M_0^2}, \tag{6}$$

а также следствие (5):

$$M^2 - 1 = \frac{M_1^2 - M_0^2}{(1+h)M_0^2 - h}, \quad (7)$$

преобразуем неравенство (3) к виду

$$\frac{(M_1 M_0 - 1)^2}{M_1^2} > \frac{1}{M^2} \frac{(M_1 - M_0)^2 (1 - h + h M_0^2)}{(1+h)M_0^2 - h}. \quad (8)$$

Исключая из неравенства (8) величину  $M$  с помощью (5), приходим к неравенству

$$\frac{(M_1 M_0 - 1)^2}{M_1^2} > \frac{(M_1 - M_0)^2 [1 - h + h M_0^2]}{M_1^2 - h + h M_0^2}. \quad (9)$$

При  $M_1 = M_0$  неравенство (9), очевидно, выполнено (этот случай соответствует встрече ударных волн одинаковой силы). Покажем, что неравенство (9) выполняется при любых  $M_1 \geq M_0$ . Для этого преобразовываем его к виду

$$(M_1^2 - 1)(M_0^2 - 1)[(1-h)M_1^2 + 2hM_0M_1 - h] > 0,$$

откуда легко следует, что оно всегда выполнено при  $M_1 \geq M_0 > 1$ . Таким образом, в политропном газе при встрече двух ударных волн возникает лишь конфигурация Б, т. е. при встрече двух ударных волн каждая из них как бы «проходит» сквозь другую.

### 3. Соединение ударных волн, идущих в одном направлении.

В газе с параметрами  $p_0$ ,  $S_0$ ,  $u_0 = 0$  движется слева направо с постоянной скоростью  $D_0 > 0$  ударная волна, оставляя за собой состояние  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{p}_0$ ,  $\bar{S}_0$ , расположенное на кривой

$$u = \Psi_0(S_0, p). \quad (1)$$

За первой ударной волной также с постоянной скоростью  $D_1$ ,  $D_1 > D_0 > \bar{u}_0$ , движется вторая ударная волна, оставляя за собой состояние  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $S_1$ , расположенное на кривой

$$u - \bar{u}_0 = \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p), \quad (2)$$

проходящей через точку  $(\bar{p}_0, \Psi_0(S_0, \bar{p}_0))$  (рис. 2.70). В момент соединения ударных волн возникает начальный разрыв, который, распадаясь, дает течение с конфигурацией Б, если точка  $(p_1, \bar{u}_0 + \bar{\Psi}_0(S_0, p_1))$  лежит выше кривой (1) (на рис. 2.70 этот случай показан точкой Б), и течение с конфигурацией А, если точка  $(p_1, \bar{u}_0 + \bar{\Psi}_0(S_0, p_1))$  лежит ниже кривой (1) (точками Б' и А' отмечены на рисунке соответствующие решения). Всегда, однако, при этом в сторону газа «0» будет распространяться ударная волна.

Вновь более подробно рассмотрим случай политропного газа. Взаимное расположение кривых (1) и (2) определяется знаком разности

$$\Delta = \Psi_0(S_0, \bar{p}_0) + \bar{\Psi}_0(\bar{S}_0, p) - \Psi_0(S_0, p) \quad (3)$$

при заданных ограничениях

$$p_0 < \bar{p}_0 < p. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\frac{D_0}{c_0} = M_0, \quad \frac{D_1 - \bar{u}_0}{\bar{c}_0} = \bar{M}, \quad \frac{D}{c_0} = M. \quad (5)$$

Здесь  $M_0$  соответствует первой ударной волне, идущей по фону  $(0, p_0)$  и оставляющей за собой состояние  $(\bar{u}_0, \bar{p}_0)$ ;  $\bar{M}$  — второй

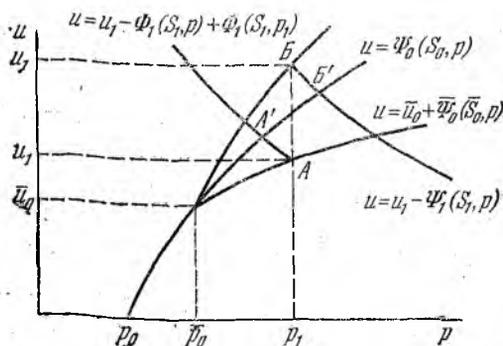


Рис. 2.70.

ударной волне, идущей по фону  $(\bar{u}_0, \bar{p}_0)$  и оставляющей за собой состояние  $(u_1, p_1)$ ;  $M$  — возможной ударной волне, идущей по фону  $(0, p_0)$  и оставляющей за собой состояние  $(u, p)$ . Тогда разность (3) представляется в виде

$$\Delta = (1-h)c_0 \frac{M_0^2 - 1}{M_0} + (1-h)\bar{c}_0 \frac{\bar{M}^2 - 1}{\bar{M}} - (1-h)c_0 \frac{M^2 - 1}{M}. \quad (6)$$

Из соотношений

$$\frac{\bar{p}_0}{p_0} = (1+h)M_0^2 - h, \quad \frac{p_1}{\bar{p}_0} = (1+h)\bar{M}^2 - h, \quad \frac{p_1}{p_0} = (1+h)M^2 - h \quad (7)$$

следует

$$(1+h)\bar{M}^2 - h = \frac{(1+h)M^2 - h}{(1+h)M_0^2 - h}, \quad \text{или} \quad \bar{M}^2 = \frac{M^2 + hM_0^2 - h}{(1+h)M_0^2 - h}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-h)c_0 \left[ \frac{M_0^2 - 1}{M_0} - \frac{M^2 - 1}{M} + \frac{\bar{c}_0}{c_0} \frac{M^2 - M_0^2}{(1+h)M_0^2 - h} \frac{1}{\bar{M}} \right] = \\ &= (1-h)c_0 \left[ \frac{(M_0 - M)(MM_0 + 1)}{MM_0} + \frac{\bar{c}_0}{c_0} \frac{M^2 - M_0^2}{(1+h)M_0^2 - h} \frac{1}{\bar{M}} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя соотношение (4.5.15) (см. также (7.2.6)), которое в данном случае записывается в виде

$$\frac{\bar{c}_0^2}{c_0^2} = \frac{[(1+h)M_0^2 - h][(1-h) + hM_0^2]}{M_0^2}, \quad (10)$$

получаем из (9)

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-h)c_0 \left[ \frac{(M_0 - M)(MM_0 + 1)}{MM_0} + \frac{\sqrt{(1-h) + hM_0^2} (M^2 - M_0^2)}{M_0 \sqrt{(1+h)M_0^2 - h}} \frac{1}{\bar{M}} \right] = \\ &= (1-h)c_0 (M - M_0) \left[ \frac{\sqrt{1-h + hM_0^2} (M + M_0)}{M_0 \bar{M} \sqrt{(1+h)M_0^2 - h}} - \frac{(MM_0 + 1)}{MM_0} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как, согласно (4),  $M > M_0 > 1$ , то мы видим, что знак  $\Delta$  совпадает со знаком выражения

$$\frac{(1-h + hM_0^2)(M + M_0)^2}{M_0^2 \bar{M}^2 [(1+h)M_0^2 - h]} - \frac{(MM_0 + 1)^2}{M^2 M_0^2}. \quad (12)$$

Наконец, подставляя сюда  $\bar{M}^2$  из формулы (8), получим

$$\begin{aligned} \text{sign } \Delta &= \text{sign} \left\{ \frac{[1-h + hM_0^2](M + M_0)^2}{M^2 + hM_0^2 - h} \frac{1}{M_0^2} - \frac{(MM_0 + 1)^2}{M^2 M_0^2} \right\} = \\ &= \text{sign} \{ M^2 (M + M_0)^2 [1 + h(M_0^2 - 1)] - \\ &\quad - (MM_0 + 1)^2 [M^2 + h(M_0^2 - 1)] \} = \\ &= -\text{sign} (M^2 - 1)(M_0^2 - 1)[(1-h)M^2 - 2hMM_0 - h]. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, если

$$(1-h)M^2 - 2hMM_0 - h > 0, \quad (14)$$

то  $\Delta < 0$ , и мы имеем конфигурацию А; если же

$$(1-h)M^2 - 2hMM_0 - h < 0, \quad (15)$$

то имеет место конфигурация Б.

Нетрудно видеть, что когда вторая ударная волна достаточно сильная ( $\bar{M} \gg 1$ ,  $M \gg 1$ ), то неравенство (14) выполняется

и мы имеем конфигурацию А. Для того чтобы уравнение

$$(1-h)M^2 - 2hMM_0 - h = 0 \quad (16)$$

имело корень  $M$  ( $M > M_0 > 1$ ), необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$1 < M_0^2 < \frac{h}{1-3h} \quad (17)$$

либо

$$h \geq \frac{1}{3}, \text{ т. е. } \gamma \geq 2.$$

Если

$$(1-3h) \geq h, \text{ т. е. } h \leq \frac{1}{4}, \gamma \leq \frac{5}{3}, \quad (18)$$

то условие (15) не может выполняться ни при каких  $M_0 > 1$ , и мы всегда будем иметь конфигурацию А. Если же

$$\gamma > \frac{5}{3},$$

то может иметь место также и конфигурация Б. Более точно, при  $M \leq M_{кр}$ , где  $M_{кр}$  — больший, чем  $M_0$ , корень уравнения (16), или, что то же, при

$$\bar{M}^2 \leq \frac{M_{кр}^2 + hM_0^2 - h}{(1+h)M_0^2 - h}$$

имеет место конфигурация Б, в противном случае — А.

#### 4. Взаимодействие сильных разрывов в изотермическом газе.

В случае изотермического газа анализ взаимодействия разрывов упрощается. Действительно, изотермический газ можно рассматривать как политропный газ при  $\gamma = 1$ .

Для изотермического газа имеем

$$\Psi_0(p) = c_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{p_0}} - \sqrt{\frac{p_0}{p}} \right], \quad (1)$$

$$\Phi_0(p) = c_0 \ln \frac{p}{p_0}. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу о набегаии ударной волны на контактный разрыв (см. рис. 2.66). Как показано в п. 1, выбор между конфигурациями А и Б определяется знаком разности  $\Delta = \bar{\Psi}_0(p) - \Psi_0(p)$  при условии  $p > p_0$ . При  $\Delta < 0$  имеем конфигурацию А, при  $\Delta > 0$  — конфигурацию Б.

Учитывая (1), имеем

$$\Delta = (\bar{c}_0 - c_0) \left[ \sqrt{\frac{p}{p_0}} - \sqrt{\frac{p_0}{p}} \right]. \quad (3)$$

Так как  $\frac{p}{p_0} > 1$ , то конфигурация А имеет место при  $\bar{c}_0 < c_0$ , конфигурация Б — при  $\bar{c}_0 > c_0$ .

Учитывая соотношение

$$p_0 = c_0^2 \rho_0 = \bar{c}_0^2 \bar{\rho}_0, \quad (4)$$

получаем, что имеет место конфигурация А при  $\bar{\rho}_0 < \rho_0$ , конфигурация Б — при  $\bar{\rho}_0 > \rho_0$ . Этот результат следует также непосредственно из результатов п. 1.

При решении задач о взаимодействии ударных волн следует принимать во внимание, что  $\bar{c}_0 = c_0$ .

Рассмотрим сначала взаимодействие ударных волн, движущихся навстречу друг другу (см. рис. 2.68, 2.69). Пользуясь обозначениями п. 2, полагая  $h = 0$ , имеем

$$\frac{p_0}{\bar{p}_0} = M_0^2, \quad \frac{p_1}{\bar{p}_0} = M_1^2, \quad \frac{p_1}{p_0} = M^2, \quad (5)$$

$$M^2 = \frac{M_1^2}{M_0^2}, \quad M = \frac{M_1}{M_0}. \quad (6)$$

Условие конфигурации Б имеет вид (см. (7.2.3))

$$\frac{M_1^2 - 1}{M_1} + \frac{M_0^2 - 1}{M_0} > \frac{\left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{M_1}{M_0}\right)} = \frac{M_1}{M_0} - \frac{M_0}{M_1}, \quad (7)$$

откуда имеем

$$(M_1 + M_0)(M_1 + 1)(M_0 - 1) > 0. \quad (8)$$

Таким образом, всегда имеем конфигурацию Б.

Из соотношений

$$\frac{p_1}{\bar{p}_0} = M_1^2, \quad \frac{p_0}{\bar{p}_0} = M_0^2, \quad \frac{p}{p_1} = \bar{M}_0^2, \quad \frac{p}{p_0} = \bar{M}_1^2 \quad (9)$$

имеем

$$M_1 \bar{M}_0 = M_0 \bar{M}_1, \quad \frac{\bar{M}_0}{M_0} = \frac{\bar{M}_1}{M_1} = K. \quad (10)$$

Из соотношений

$$u = \bar{c} \left[ M_1 - \frac{1}{M_1} - \left( \bar{M}_0 - \frac{1}{\bar{M}_0} \right) \right], \quad (11)$$

$$u = \bar{c} \left[ \bar{M}_1 - \frac{1}{\bar{M}_1} - \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \right]. \quad (12)$$

учитывая (10), имеем

$$(M_0 + M_1)(1 - K) \left[ 1 + \frac{1}{KM_0 M_1} \right] = 0. \quad (13)$$

Отсюда следует, что

$$K = 1. \quad (14)$$

Равенство (14) означает, что после встречи волн каждая из них сохраняет свою силу:

$$\bar{M}_0 = M_0 \quad \bar{M}_1 = M_1; \quad (15)$$

соответственно сохраняются относительные скорости ударных волн:

$$D_1 = D_{\text{п}} - \bar{u}_0 = D + |u_0|, \quad D_0 = D_{\text{л}} - u_1, \quad (16)$$

где  $D_{\text{п}}$  — скорость ударной волны, идущей после встречи вправо,  $D_{\text{л}}$  — скорость ударной волны, идущей после встречи влево.

Таким образом, расчетные формулы взаимодействия встречающихся волн имеют вид

$$p = M_0^2 M_1^2 \bar{p}_0, \quad u = \bar{c}_0 \left[ \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right) - \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \right], \quad (17)$$

где  $p$ ,  $u$  — давление и скорость между фронтами расходящихся волн. Их скорости определяются формулами (16).

Рассмотрим в заключение задачу о соединении волн, идущих в одном направлении. Условие (7.3.14) выполняется при  $h = 0$ . Следовательно, в случае изотермического газа при соединении ударных волн, идущих в одном направлении, всегда имеет место конфигурация А.

## § 8. Взаимодействие ударных волн с бегущими волнами

Если ударная волна, движущаяся с постоянной скоростью по постоянному фону, входит в бегущую волну, то сила ее меняется.

В случае политропного газа энтропия за фронтом волны становится переменной, что усложняет аналитическое исследование. Поэтому мы ограничимся рассмотрением баротропных политропных газов, в частности изотермического газа. Сделаем сначала одно замечание, справедливое для всех баротропных политропных газов. Пусть по постоянному фону  $(p_0, \rho_0, u_0)$  движется слева направо с постоянной скоростью  $D_0$  ударная волна, остав-

ляющая за собой постоянный фон  $(p_1, \rho_1, u_1)$ , связанный с  $(p_0, \rho_0, u_0)$  условиями Гюгонио. В некоторый момент  $t_0$  ударная волна входит в область возмущенного движения, которая может быть или бегущей волной, или областью интерференции бегущих волн. Тогда движение, которое образуется за ударной волной,

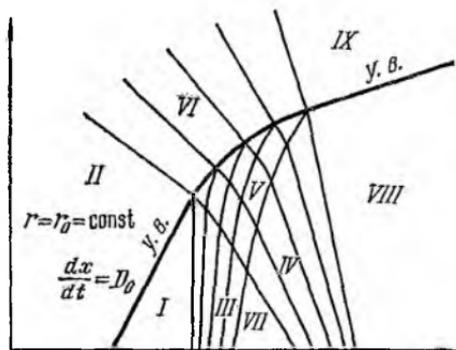


Рис. 2.71.

является бегущей волной до тех пор, пока в нем не образуется новая ударная волна (рис. 2.71).

**1. Взаимодействие ударной волны с бегущей волной в изотермическом газе.** Пусть постоянное течение ( $p_0, u_0 = 0$ ) граничит с  $s$ -волной разрежения

$$r = r_0 = u + c \ln p = \text{const.} \quad (1)$$

По постоянному фону ( $p_0, u_0 = 0$ ) движется слева направо с постоянной скоростью:  $D_0$  ударная волна, оставляющая за собой состояние

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= c^2 \rho_1, \\ \rho_1 &= \rho_0 M_0^2, \\ M_0 &= \frac{D_0}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В момент  $t = t_0$  ударная волна входит в область III бегущей волны (рис. 2.72), где давление и скорость возрастают в противоположных направлениях, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} < 0.$$

В области III бегущей волны условия Гюгонио имеют вид (см. § 4, формулы (4.6.13), (4.6.14))

$$r^- - r^+ = \varphi(M), \quad s^- - s^+ = \psi(M), \quad (3)$$

$$M = \frac{D - u^+}{c}, \quad \varphi(x) = c \left( x - \frac{1}{x} + \ln x^2 \right), \quad (4)$$

$$\psi(x) = c \left( x - \frac{1}{x} - \ln x^2 \right),$$

где  $D$  — скорость ударной волны; величины со значком «+» означают величины в волне III перед фронтом ударной волны, со значком «-» — за фронтом ударной волны (область IV).

В рассматриваемом случае  $s$ -волны

$$r^- = r_1, \quad r^+ = r_0. \quad (5)$$

Из уравнений (3), (5) следует, что  $M$  постоянно и равно  $M_0$ . Таким образом, амплитуда ударной волны неизменна и величины

$$\frac{p_+}{p_-}, \quad \frac{\rho_+}{\rho_-}, \quad u^+ - u^- \quad (6)$$

сохраняют постоянное значение на фронте волны.

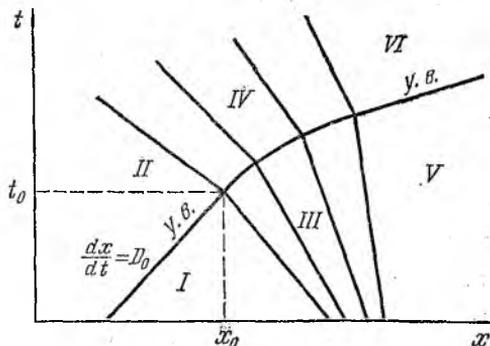


Рис. 2.72.

В области  $IV$  мы имеем  $s$ -волну разрежения (сжатия), если в области  $III$  волна Римана — волна разрежения (сжатия). Действительно, так как  $u^- - u^+$  на фронте волны постоянно, то

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} + D \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{\partial u^+}{\partial t} + D \frac{\partial u^+}{\partial x}, \quad (7)$$

или

$$\left(1 - \frac{u^- - c}{D}\right) \frac{\partial u^-}{\partial x} = \left(1 - \frac{u^+ - c}{D}\right) \frac{\partial u^+}{\partial x},$$

так что производные  $\frac{\partial u^-}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u^+}{\partial x}$  (в областях  $III$  и  $IV$ ) одного знака. Так как в  $s$ -волне с постоянным инвариантом  $r$  (в зоне  $III$ ) справедливо соотношение Римана

$$x - (u - c)t = f(u), \quad (8)$$

где  $f(u)$  — некоторая функция  $u$ , а на ударной волне справедливо соотношение

$$\frac{dx}{dt} = D = u + cM_0 = u^+ + D_0, \quad (9)$$

то, сопоставляя (8), (9), получаем дифференциальное уравнение для траектории ударной волны:

$$x - \left[\frac{dx}{dt} - c(M_0 + 1)\right]t = f\left(\frac{dx}{dt} - cM_0\right). \quad (10)$$

В частном случае центрированной волны разрежения, когда справедливо соотношение

$$\frac{x - x_1}{t - t_1} = u - c, \quad (11)$$

где  $(x_1, t_1)$  — центр волны, получаем легко интегрируемое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x_1}{t - t_1} + D_0 + c. \quad (12)$$

Ясно, что аналогичный анализ будет иметь место и для случая ударной волны, идущей справа налево и набегающей на  $r$ -волну Римана.

В случае волны разрежения  $\left(\frac{\partial u}{\partial x} > 0, \frac{\partial p}{\partial x} < 0\right)$  ударная волна идет «под гору», ускоряясь; в случае волны сжатия  $\left(\frac{\partial u}{\partial x} < 0, \frac{\partial p}{\partial x} > 0\right)$  ударная волна идет «в гору», замедляясь. Указанную картину взаимодействия можно реализовать в задаче с двумя поршнями; сначала правый поршень выдвигается из газа, образуя волну разрежения ( $r = \text{const}$ ), а затем левый поршень вдвигается в газ, образуя ударную волну, двигающуюся в волну разрежения.

Рассмотрим теперь задачу о взаимодействии ударной волны, идущей вправо, с  $r$ -волной Римана ( $s = s_0 = \text{const}$ ) (рис. 2.73). В этом случае давление и скорость перед ударной волной возрастают в одном направлении ( $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ).

В формулах (3) следует положить

$$r^- = r = \text{const}, \quad s^+ = s_0. \tag{13}$$

Тогда в случае волны разрежения (сжатия) в области III имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial x} > 0 & \quad \left( \frac{\partial u^+}{\partial x} < 0 \right), \\ \frac{\partial r^+}{\partial x} > 0 & \quad \left( \frac{\partial r^+}{\partial x} < 0 \right) \end{aligned} \right\} t \tag{14}$$

и из соотношений (3) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} < 0 & \quad \left( \frac{\partial M}{\partial x} > 0 \right), \\ \frac{\partial s^-}{\partial x} < 0 & \quad \left( \frac{\partial s^-}{\partial x} > 0 \right), \\ \frac{\partial u^-}{\partial x} < 0 & \quad \left( \frac{\partial u^-}{\partial x} > 0 \right). \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

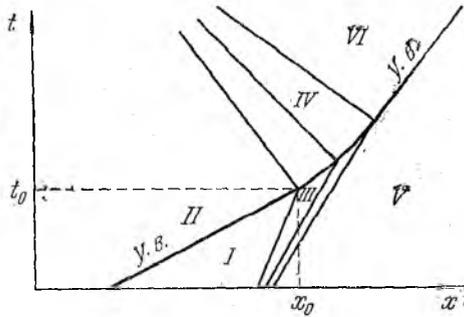


Рис. 2.73.

Это означает, что для волны разрежения III преломленная волна IV есть волна сжатия, для волны сжатия III волна IV есть волна разрежения. В первом случае сила  $M$  волны уменьшается, во втором — увеличивается.

Траектория ударной волны находится аналогично предыдущему. Указанную картину можно реализовать в задаче с одним поршнем: поршень сначала, выдвигаясь, образует волну разрежения, а затем, двигаясь в газ, образует волну сжатия (ударную волну).

**2. Асимптотика взаимодействия ударной волны и централизованной волны разрежения.** В результате взаимодействия ударной волны с волной разрежения III после выхода из нее на постоянный фон V ударная волна вместо начальной скорости  $D_0$  приобретает скорость  $D_1$ . Ясно, что скачок скорости  $D_1 - D_0$  ударной волны не зависит от точки входа  $(x_1, t_1)$ , если в области IV имеем гладкое течение. Пусть точка входа  $(x_1, t_1)$  приближается к центру  $(x_0, t_0)$  волны.

Тогда разность  $D_1 - D_0$  остается неизменной. Если  $x_1 = x_0$ ,  $t_1 = t_0$ , то можно говорить о мгновенном взаимодействии ударной волны с сосредоточенной волной разрежения. В этом случае мы имеем произвольный разрыв, характеризуемый состояниями

(II, V). Можно поставить вопрос: будет ли совпадать скорость  $D_1$  ударной волны в задаче о распаде разрыва и скорость  $D_1$  после выхода ударной волны из волны разрежения III? Рассмотрим сначала случай

центрированной  $s$ -волны разрежения (рис. 2.74, а).

Состояния II, V определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_1 + c \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right), \\ p_2 &= p_1 M_0^2, \\ u_2 - u_1 &= \\ &= c \left[ \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right], \end{aligned} \right\} (1)$$

$$u_5 = u_1 + c \ln \frac{p_1}{p_5}. \quad (2)$$

Рассчитаем распад разрыва  $(p_2, u_2)$ ,  $(p_5, u_5)$ , пользуясь  $(p, u)$ -диаграммой (рис. 2.75). В рассматриваемом случае имеем конфигурацию А. Величины  $u, p$  находятся в результате решения уравнения

$$\begin{aligned} M - \frac{1}{M} - \ln \frac{p_5}{p_1} &= \\ &= M_0 - \frac{1}{M_0} - \ln \frac{p_2}{p_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где положено

$$M^2 = \frac{p}{p_5}, \quad M_0^2 = \frac{p_2}{p_1}. \quad (4)$$

После несложного преобразования из формулы (3) имеем

$$\frac{\varphi(M)}{c} = M - \frac{1}{M} + \ln M^2 = \frac{\varphi(M_0)}{c} = M_0 - \frac{1}{M_0} + \ln M_0^2. \quad (5)$$

Отсюда

$$M = M_0. \quad (6)$$

Итак, после взаимодействия ударной волны, идущей вправо, с  $s$ -волной она приобретает ту же скорость, что и в результате мгновенного взаимодействия ударной волны и сосредоточенной волны разрежения, рассчитанного по формулам распада разрыва. Это совпадение связано с тем, что преломленная волна IV

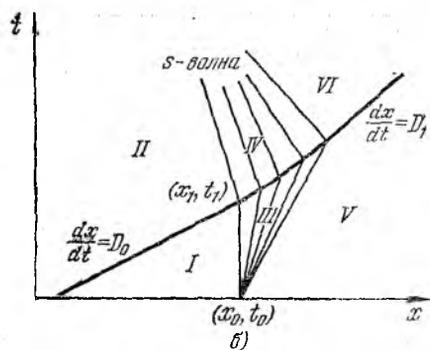
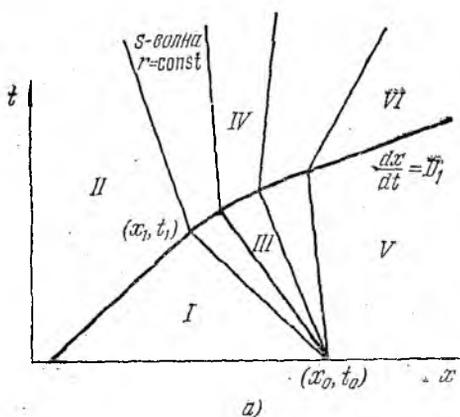


Рис. 2.74.

есть волна разрежения и при  $t \rightarrow \infty$  в движении за фронтом волны не возникает особенностей. Аналогичная картина имеет место при взаимодействии ударной волны, идущей влево, с  $r$ -волной разрежения.

Рассмотрим теперь (В. Я. Арсенин, Н. Н. Яненко [1956]) взаимодействие ударной волны, идущей вправо, с  $r$ -волной (рис. 2.74, б).

В этом случае ударная волна, пройдя через область III, приобретает скорость иную, чем в результате мгновенного взаимодействия ударной волны и сосредоточенной  $r$ -волны разрежения, рассматриваемого как распад произвольного разрыва. Причиной этого является возникновение ударной волны, идущей влево, из волны сжатия IV и затем волны разрежения, идущей вправо и догоняющей ударную волну, идущую вправо.

Появившаяся ударная волна, изменяя свою скорость, меняет инвариант  $r$ . Эти изменения переносятся по  $r$ -характеристикам и, доходя до фронта ударной волны, идущей вправо, меняют скорость последней, вызывая изменения инварианта  $s$ .

Изменения инварианта  $s$  на правой волне по  $s$ -характеристикам переносятся на левую ударную волну, вызывая изменение инварианта  $r$ . В результате взаимодействия задних фронтов правой и левой ударных волн вырабатывается некоторый асимптотический режим. Предельные конфигурации и течение, полученным в результате распада разрыва II, V (рис. 2.76).

Рассмотрим подробно взаимодействие фронтов. Введем обозначения:

- $r_I, s_I$  — значения инвариантов в I;
- $r_{III}, s_{III}$  — значения инвариантов на переднем фронте волны в III;
- $r_V, s_V$  — значения инвариантов в V;

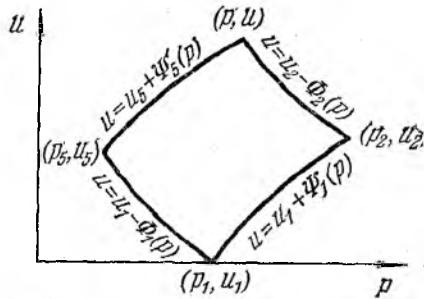


Рис. 2.75.

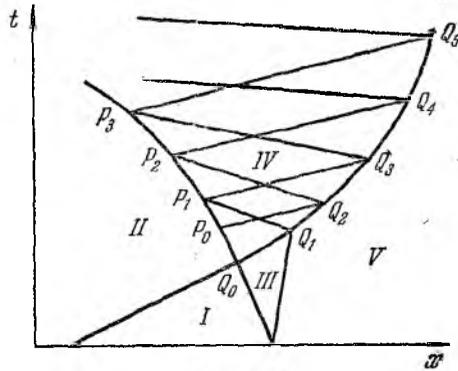


Рис. 2.76.

$r_{II}, s_{II}$  — значения инвариантов в  $II$ ;

$r, s$  — значения инвариантов на заднем фронте правой волны;

$R, S$  — значения инвариантов на заднем фронте левой волны;

$D$  — скорость волны, идущей вправо;

$\bar{D}$  — скорость волны, идущей влево;

$$M = \frac{D - u_0}{c_0} > 1, \quad \bar{M} = \left| \frac{\bar{D} - \bar{u}}{c} \right| > 1;$$

$u_0, c_0$  — величины перед фронтом правой волны;

$\bar{u}, \bar{c}$  — величины перед фронтом левой волны;

$r_i, s_i, M_i$  — значения  $r, s, M$  в точках  $Q_i$ ;

$R_i, S_i, \bar{M}_i$  — значения  $R, S, \bar{M}$  в точках  $P_i$ .

На фронтах  $(Q_0, Q_1, Q_2, \dots), (P_1, P_2, P_3, P_4, \dots)$  справедливы соотношения

$$s - s_V = \psi(M), \quad r - r_{III} = \varphi(M), \quad s - s_{III} = \psi(M), \quad r - r_V = \varphi(M), \quad (7)$$

соответственно

$$R - r_{II} = -\psi(\bar{M}), \quad S - s_{II} = -\varphi(\bar{M}).$$

Дуги  $(P_1, P_2), (P_3, P_4), \dots, (P_{2i-1}, P_{2i}), (Q_1, Q_2), (Q_3, Q_4), \dots, (Q_{2i-1}, Q_{2i})$  соответствуют участкам траекторий ударных волн, когда они движутся с постоянной скоростью; дуги  $(P_0, P_1), (P_2, P_3), \dots, (P_{2i}, P_{2i+1}), (Q_0, Q_1), (Q_2, Q_3), \dots, (Q_{2i}, Q_{2i+1})$  соответствуют участкам переменной скорости.

Справедливы соотношения

$$S_i = s_i, \quad r_{i+2} = R_i. \quad (8)$$

На участке  $Q_0Q_1$  имеем

$$M_1 < M_0, \quad s_1 < s_0. \quad (9)$$

Принимая во внимание (7), (8), (9), имеем

$$S_1 < s_0, \quad \bar{M}_1 > \bar{M}_0, \quad R_1 < R_0. \quad (10)$$

Таким образом, на участке  $P_0P_1$  левая волна усиливается,  $R, S$  уменьшаются. В силу (8) на участке  $Q_2Q_3$  имеем

$$r_3 < r_2, \quad M_3 < M_2, \quad s_3 < s_2, \quad (11)$$

т. е. на участке  $Q_2Q_3$  правая волна становится слабее. В дальнейшем картина повторяется: волна, идущая влево, усиливается, идущая вправо — ослабевает,  $M_i$  монотонно убывает,  $\bar{M}_i$  монотонно возрастает.

Обозначим через  $M_\infty$ ,  $\bar{M}_\infty$  пределы  $M_i$ , соответственно  $\bar{M}_i$  при  $i \rightarrow \infty$ . Тогда в силу (7), (8) справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} r - r_V &= \varphi(M_\infty), & s - s_V &= \psi(M_\infty), \\ R - r_{II} &= -\varphi(\bar{M}_\infty), & S - s_{II} &= -\psi(M_\infty). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Формулы (12) являются формулами распада разрыва для состояний (II, V). Таким образом, доказано совпадение асимптотического режима взаимодействия ударной волны с волной разрежения и течения, получающегося из распада разрыва (II, V).

Заметим, что при достаточно большой амплитуде волны разрежения III ударная волна, вошедшая в нее, может превратиться в волну разрежения, а конфигурация Б — замениться конфигурацией А.

**3. Взаимодействие ударных волн с бегущими в баротропных политропных газах.** В случае баротропных политропных газов третье условие Гюгоню заменяется условием постоянства энтропии.

Условия Гюгоню для ударной волны, идущей вправо, примут вид

$$u_1 - u_0 = (1 - h) c_0 \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right), \quad M_0 = \frac{D - u_0}{c_0}, \quad (1)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = (1 + h) M_0^2 - h, \quad (2)$$

$$\frac{\rho_1^\gamma}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_1}{p_0} = (1 + h) M_0^2 - h, \quad (3)$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \left( \frac{p_1}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{1/2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = [(1 + h) M_0^2 - h]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала набежание ударной волны, идущей слева направо, на  $s$ -волну разрежения. Из условий (1) — (4) имеем

$$r_1 - r_0 = c_0 \left[ (1 - h) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) + \frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{c_1}{c_0} - 1 \right) \right] = c_0 F(M_0), \quad (5)$$

$$s_1 - s_0 = c_0 \left[ (1 - h) \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) - \frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{c_1}{c_0} - 1 \right) \right] = c_0 G(M_0). \quad (6)$$

Так как  $F(M_0)$  в формуле (5) есть монотонно возрастающая функция  $M_0$ , а  $c_0$  удовлетворяет условию

$$\frac{\partial c_0}{\partial x} = -\frac{\gamma - 1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} < 0 \quad (r = r_0 = \text{const}) \quad (7)$$

и

$$F(M_0) \frac{\partial c_0}{\partial x} + F'(M_0) c_0 \frac{\partial M_0}{\partial x} = 0,$$

то

$$\frac{\partial M_0}{\partial x} > 0. \quad (8)$$

т. е. сила ударной волны возрастает.

Ясно, что за фронтом ударной волны имеем  $s$ -волну Римана ( $r = r_0$ ). Установим знак  $\frac{\partial u}{\partial x}$  или, что то же,  $\frac{\partial s}{\partial x}$  за фронтом ударной волны.

Из соотношений (1), (5), (7) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \left[ 1 + h \left( 1 + \frac{1}{M_0^2} \right) \frac{F(M_0)}{F'(M_0)} - h \left( M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \right] \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (9)$$

Так как приближение баротропного газа справедливо при  $M_0$ , близких к 1, то выражение в квадратных скобках близко к 1. Отсюда имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} > 0. \quad (10)$$

Таким образом, волна  $IV$  есть волна разрежения (рис. 2.74, а).

Рассмотрим теперь набегание ударной волны на  $r$ -волну разрежения. Тогда в (5), (6)  $r_1 = \text{const}$ ,  $s_0 = \text{const}$ . Из (5) имеем

$$r_1 = r_0 + c_0 F(M_0) = s_0 + c_0 \left[ \frac{4}{\gamma - 1} + F(M_0) \right]. \quad (11)$$

Так как  $\frac{\partial c_0}{\partial x} > 0$ , то из (11) следует

$$\frac{\partial M_0}{\partial x} < 0, \quad (12)$$

т. е. амплитуда ударной волны убывает. Определим знак  $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial s_1}{\partial x}$  за фронтом ударной волны.

При достаточно малом  $|M_0 - 1|$   $G(M_0)$  есть монотонно возрастающая функция  $M_0$ . Из (11) следует, что

$$\frac{\partial s_1}{\partial x} < 0,$$

т. е. преломленная волна  $IV$  есть волна сжатия.

Таким образом, мы видим, что в баротропном приближении, т. е. при достаточно малом  $|M_0 - 1|$ , качественная картина взаимодействия та же, что и для изотермического газа.

## § 9. Аналитические решения одномерной газовой динамики

**1. Общий интеграл изоэнтропического одномерного плоско-течения.** Одномерное плоское изоэнтропическое течение описывается, как известно, уравнениями в инвариантах (см. § 2, п. 7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + \left[ \frac{r+s}{2} + K(r-s) \right] \frac{\partial r}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \left[ \frac{r+s}{2} - K(r-s) \right] \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$r = u + \int c d \ln \rho, \quad s = u - \int c d \ln \rho, \quad (2)$$

$x$  — эйлерова координата.

Функция  $K(r-s) = c$  связана с уравнением состояния

$$p = p(S, \rho) = F(\rho) \quad (3)$$

соотношением

$$K(r-s) = g[h^{-1}(r-s)], \quad (4)$$

где

$$g = \sqrt{F'(\rho)}, \quad h = 2 \int \sqrt{F'(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (5)$$

Преобразованием годографа система (1) сводится к линейной:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} - \left[ \frac{r+s}{2} + K(r-s) \right] \frac{\partial t}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial r} - \left[ \frac{r+s}{2} - K(r-s) \right] \frac{\partial t}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Перепишем систему (6) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[ x - \left( \frac{r+s}{2} + K \right) t \right] &= -t \left( \frac{1}{2} - K' \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ x - \left( \frac{r+s}{2} - K \right) t \right] &= -t \left( \frac{1}{2} - K' \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует, что выражение

$$dW = \left[ x - \left( \frac{r+s}{2} + K \right) t \right] dr + \left[ x - \left( \frac{r+s}{2} - K \right) t \right] ds \quad (8)$$

есть полный дифференциал некоторой функции  $W(r, s)$ , которую мы будем называть *потенциальной*. Из выражения полного дифференциала имеем

$$\left. \begin{aligned} x - \left( \frac{r+s}{2} + K \right) t &= \frac{\partial W}{\partial r}, \\ x - \left( \frac{r+s}{2} - K \right) t &= \frac{\partial W}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из уравнений (9)  $x, t$  могут быть выражены через  $W_r, W_s$ :

$$t = -\frac{\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial s}}{2K(r-s)}, \quad x = -\frac{\left( \frac{r+s}{2} - K \right) \frac{\partial W}{\partial r} - \left( \frac{r+s}{2} + K \right) \frac{\partial W}{\partial s}}{2K(r-s)}. \quad (10)$$

В силу соотношений (7), (10),  $W$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial s} = \frac{\left( \frac{1}{2} - K' \right)}{2K(r-s)} \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial s} \right). \quad (11)$$

Таким образом, потенциальная функция удовлетворяет специальному уравнению Дарбу

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - f(x_1 + x_2) \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (12)$$

где положено

$$x_1 = r, \quad x_2 = -s, \quad f = \frac{K' - \frac{1}{2}}{2K}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) подстановкой

$$W = \varphi v, \quad \varphi = ce^{\int f^{(0)} d\theta}, \quad \theta = x_1 + x_2, \quad (14)$$

может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = F(x_1 + x_2) v, \quad F = f^2 - f'. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь те уравнения состояния, для которых общий интеграл и функция Римана представляются в замкнутой форме. Начнем с политропных газов, для которых  $p$  есть степенная функция  $\rho$ :

$$p = a^2 \rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1. \quad (16)$$

В этом случае

$$K(r - s) = c = \frac{\gamma - 1}{4} (r - s). \quad (17)$$

Отсюда

$$f = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}}{2 \cdot \frac{\gamma - 1}{4} (r - s)} = \frac{1 - \frac{\gamma - 1}{2}}{\gamma - 1} = \frac{\gamma - 3}{2(\gamma - 1)} \frac{1}{x_1 + x_2} = -\frac{m}{x_1 + x_2}. \quad (18)$$

Для уравнения (12) с функцией  $f = -\frac{m}{x_1 + x_2}$  справедливо следующее свойство редукции, установленное Дарбу и позволяющее переходить от одного значения  $m$  к другому.

Если  $W$  есть решение уравнения (12) при  $f = -\frac{m}{x_1 + x_2}$ , то

$$W' = LW, \quad L = \frac{1}{x_1 + x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (19)$$

есть решение уравнения (12) при

$$f = -\frac{m'}{x_1 + x_2}, \quad m' = m + 1. \quad (20)$$

При  $\gamma = +3$  имеем  $m = 0$  и  $W$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (21)$$

которое имеет известный общий интеграл (интеграл Даламбера)

$$W = F(x_1) + G(x_2). \quad (22)$$

Целым положительным значениям  $m$  отвечают следующие значения  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{2m+3}{2m+1}; \quad (23)$$

при  $m=1$   $\gamma = \frac{5}{3}$  (одноатомный газ), при  $m=2$   $\gamma = \frac{7}{5}$  (двухатомный газ) и т. д. В силу свойства редукции таким значениям  $m$  и  $\gamma$  соответствует общий интеграл

$$W(x_1, x_2) = L^m [F(x_1) + G(x_2)], \quad (24)$$

где оператор  $L$  дается равенством (19).

Покажем, что выражение (24) для общего интеграла можно преобразовать к виду

$$W(x_1, x_2) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} \frac{F'(x_1)}{(x_1+x_2)^m} + \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_2^{m-1}} \frac{G'(x_2)}{(x_1+x_2)^m}. \quad (25)$$

Положим в дальнейшем

$$F'(x_1) = \Phi(x_1), \quad G'(x_2) = \Psi(x_2). \quad (26)$$

Представление (25), очевидно, следует из (24) при  $m=1$ . По индукции докажем эквивалентность (24), (25) при любом  $m$ . Пусть

$$L^m F(x_1) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1+x_2)^m}. \quad (27)$$

Докажем, что

$$L^{m+1} F(x_1) = \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1+x_2)^{m+1}}. \quad (28)$$

Используя предположение (27), имеем

$$\begin{aligned} L^{m+1} F(x_1) &= LL^m F(x_1) = L \left[ \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1+x_2)^m} \right] = \\ &= \frac{1}{x_1+x_2} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1+x_2)^m} - \frac{m}{x_1+x_2} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1+x_2)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

После этого нетрудно видеть, что равенство (28) эквивалентно следующему:

$$(\theta H)^{(m)} = \theta H^{(m)} + mH^{(m-1)}, \quad (30)$$

где положено, при фиксированном  $x_2$ ,

$$\theta = x_1 + x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{d\theta}, \quad f^{(m)} = \frac{d^m}{d\theta^m} f, \quad H = \frac{\Phi}{\theta^{m+1}}. \quad (31)$$

Итак, мы доказали, что общий интеграл уравнения (12) при  $f = -\frac{m}{x_1 + x_2}$  имеет вид

$$W(x_1 + x_2) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} \left[ \frac{\Phi(x_1)}{(x_1 + x_2)^m} \right] + \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_2^{m-1}} \left[ \frac{\Psi(x_2)}{(x_1 + x_2)^m} \right]. \quad (32)$$

Если считать  $x_1, x_2$  комплексными числами, а  $W, \Phi, \Psi$  — аналитическими функциями своих переменных, то, применяя известное представление Коши для производной аналитической функции, формулу (32) можно представить в виде (см. Е. Копсон [1953])

$$W(x_1, x_2) = D_1^{m-1} \frac{\Phi(x_1)}{(x_1 + x_2)^m} + D_2^{m-1} \frac{\Psi(x_2)}{(x_1 + x_2)^m} = \\ = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{\Phi(t)}{(t+x_2)^m (t-x_1)^m} dt + \oint_{C_2} \frac{\Psi(t)}{(x_1+t)^m (t-x_2)^m} dt \right]. \quad (33)$$

В формуле (33)  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ; контур  $C_1$  берется в плоскости комплексного переменного  $x_1$ ;  $x_2$  рассматривается как комплексный параметр; контур  $C_2$  берется в плоскости  $x_2$ ;  $x_1$  является параметром.

Формула (33) имеет смысл и для дробных  $m$ , если в ней заменить  $(m-1)!$  на  $\Gamma(m)$ ; тогда операторы  $D_1^{m-1}, D_2^{m-1}$  имеют смысл дробных производных, введенных впервые Риманом и Лиувиллем.

Перейдем теперь к задаче определения функции Римана для уравнения (12) при  $f = -\frac{m}{x_1 + x_2}$ .

Мы будем пользоваться уравнением (15), которое при этом значении  $f$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{a}{\theta^2} v, \quad \theta = x_1 + x_2, \quad a = m(m-1). \quad (34)$$

Для функции Римана  $R(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)$  уравнения (34) справедливо представление (см. гл. 1, § 13, п. 4)

$$R(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) = (1 - \xi)^m F(m, m, 1, \xi), \quad (35)$$

где

$$\xi = \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 + \xi_2)}{(x_1 - \xi_2)(x_2 + \xi_1)} \quad (36)$$

и

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)} x^k + \dots \quad (37)$$

есть известный гипергеометрический ряд Гаусса.

Заметим, что при целом  $m$  ряд (37) становится полиномом. Можно показать, что при целом  $m$  уравнение (34) допускает дифференциальную связь  $m$ -го порядка и, наоборот, если уравнение вида (15) допускает дифференциальную связь  $m$ -го порядка, то  $F(x_1 + x_2)$  удовлетворяет уравнению, среди решений которого имеются функции  $\frac{m(m-1)}{(x_1 + x_2)^2}$ . Поясним это утверждение примером. Рассмотрим уравнение (15), допускающее связь второго порядка. Тогда, как было показано в главе 1, § 12,  $F(x_1 + x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \ln F}{\partial x_1 \partial x_2} = F, \quad (38)$$

которое в нашем случае принимает вид

$$FF'' - F'^2 = F^3, \quad (39)$$

где штрих означает производную по  $\theta = x_1 + x_2$ .

Уравнению (39) удовлетворяет функция

$$F(\theta) = \frac{m(m-1)}{\theta^2}$$

при  $m=2$ . Общий интеграл уравнения (38) имеет вид

$$\theta + C_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \frac{\sqrt{C_1 + 2F} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1 + 2F} + \sqrt{C_1}}, & C_1 > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{-C_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_1 + 2F}{-C_1}}, & C_1 < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Пользуясь произвольными постоянными  $C_1, C_2$ , с помощью функции (40) можно аппроксимировать функции  $F(\theta)$  и получать хорошие приближения. Таким образом Г. А. Домбровский [1964] получил аппроксимации уравнения Дарбу.

В следующем пункте мы покажем, как знание общего интеграла уравнения Дарбу позволяет решать некоторые задачи газовой динамики, приводящие к интерференции простых волн.

**2. Задачи о взаимодействии элементарных решений.** Мы рассмотрим две задачи:

- а) о взаимодействии двух волн Римана;
- б) о набегании волны Римана на границу двух сред.

Пусть в момент  $t = t_0$  из точки  $x = x_0$  начинается распространяющаяся центрированная  $r$ -волна, а в момент  $t = t_1$  из точки  $x = x_1$  — центрированная  $s$ -волна. Мы можем предположить, что центрированные волны получаются в результате выдвигания поршней из газа с постоянной скоростью (рис. 2.77).

В зонах I—V решение имеет вид:

$$I: r = r_1, \quad s = s_0, \quad r_1 < r_0; \quad (1)$$

$$II: r = r_0, \quad s = s_1, \quad s_1 > s_0; \quad (2)$$

$$III: u = u_0 = 0, \quad c = c_0, \quad r = r_0 = \frac{2}{\gamma-1} c_0, \quad s = s_0 = -\frac{2}{\gamma-1} c_0; \quad (3)$$

$$IV: \frac{dx}{dt} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x + h}{t + \tau} = ar + \beta s_0; \quad (4)$$

$$V: \frac{dx}{dt} = \frac{x - x_1}{t - t_1} = \frac{x - h}{t - \tau} = as + \beta r_0. \quad (5)$$

В зоне VI, которой является зоной интерференции и отображается в прямоугольник PQTR плоскости  $r, s$  (рис. 2.78),

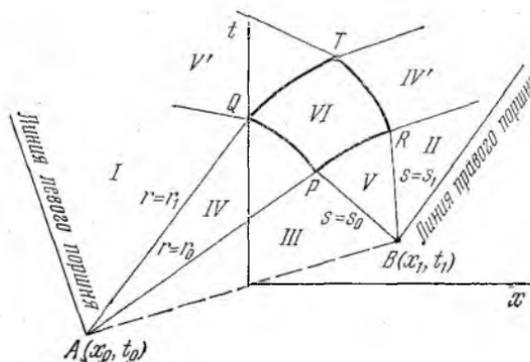


Рис. 2.77.

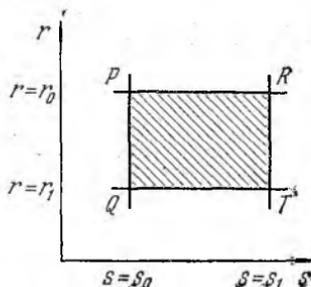


Рис. 2.78.

справедливо представление

$$\left. \begin{aligned} x - (ar + \beta s)t &= \frac{\partial W}{\partial r}, \\ x - (as + \beta r)t &= \frac{\partial W}{\partial s}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $W$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial s} = \frac{m}{r-s} \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial s} \right), \quad m = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}. \quad (7)$$

Пользуясь (4) и (5), для  $W$  в прямоугольнике PQTR на сторонах PR, PQ можно поставить краевые условия, составляющие задачу Гурса:

$$\left. \begin{aligned} PR: \quad r = r_0, \quad \frac{\partial W}{\partial s} &= h - \tau(as + \beta r_0); \\ PQ: \quad s = s_0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} &= -h + \tau(ar + \beta s_0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решим эту задачу для  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Общий интеграл уравнения (7) примет вид

$$W = \frac{f(r) + g(s)}{r - s}. \quad (9)$$

Краевые условия (8) приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{(r_0 - s) g'(s) + g(s) + f(r_0)}{(r_0 - s)^2} &= h - \tau(\alpha s + \beta r_0), \\ \frac{(r - s_0) f'(r) - f(r) - g(s_0)}{(r - s_0)^2} &= -h + \tau(\alpha r + \beta s_0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Предположим для простоты, что  $\tau = 0$ , т. е. выдвигение поршней происходит одновременно. Тогда соотношения (10) примут вид

$$\left. \begin{aligned} (r_0 - s) g'(s) + g(s) + f(r_0) &= h(r_0 - s)^2, \\ (r - s_0) f'(r) - f(r) - g(s_0) &= -h(r - s_0)^2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

т. е.  $f(r)$ ,  $g(s)$  являются полиномами второй степени от своих переменных. Таким образом, учитывая, что  $W$  определяется с точностью до аддитивной константы, можно положить

$$W = \frac{Ar^2 + Bs^2 + C(r + s) + D}{r - s}. \quad (12)$$

Удовлетворяя краевым условиям (8), находим  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , получая для  $W$  окончательное выражение

$$W = \frac{-h(r^2 + s^2) + 18hc_0^2}{r - s}. \quad (13)$$

Формулы (6), (13) определяют решение в зоне VI. В зонах IV', V' мы имеем бегущие волны Римана, уже нецентрированные, которые нетрудно рассчитать.

Рассмотрим теперь взаимодействие бегущей волны с контактной границей. Из точки  $x = 0$ ,  $t = 0$  распространяется центрированная  $s$ -волна Римана, которая набегаёт на контактную границу, находящуюся при  $t = 0$  в точке  $x = -h$  (рис. 2.79). Мы вновь рассмотрим случай, когда обе среды являются политропными газами с  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Картина движения описывается формулами:

область I:  $r = r_0$ ,  $s = s_0 = -r_0$ ,  $c = c_0$ ,  $S = S_0$ ,  
 $u = u_0 = 0$ ; (14)

область II:  $r = r_0$ ,  $\alpha s + \beta r_0 = \xi = \frac{x}{t}$ ; (15)

область III:  $r = r_0$ ,  $s = s_2$ ; (16)

область VIII:  $r = r_1$ ,  $s = s_1 = -r_1$ ,  $c = c_1$ ,  $S = S_1$ . (17)

*IV* есть область интерференции падающей и отраженной волн, области *II*, *V* — бегущие волны, области *VI*, *VII*, *VIII* — области постоянного течения.

Определим прежде всего течение в области *IV* (рис. 2.80).

Пользуясь формулами (6), можно поставить для функции  $W(r, s)$  краевые условия на линии *AC*:

$$r = r_0, \quad x - (as + \beta r_0)t = W_s(r, s) = 0. \quad (18)$$

Отсюда, пользуясь формулой общего интеграла (9), получаем

$$g'(s)(r_0 - s) + f(r_0) + g(s) = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что  $g(s)$  есть линейная функция от  $s$ . Так как  $W$  определяется с точностью до аддитивной

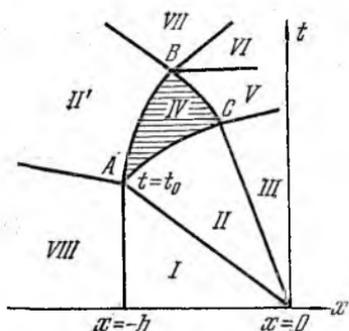


Рис. 2.79.

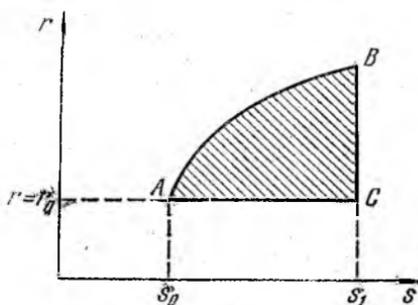


Рис. 2.80.

константы, то сумма  $f(r) + g(s)$  может содержать слагаемое  $C(r - s)$  с произвольной константой  $C$ .

За счет выбора константы  $C$  можно положить  $g(s) = \text{const} = B$ . Перебрасывая  $B$  в  $f(r)$ , получаем окончательно

$$W(r, s) = \frac{f(r)}{r - s}, \quad f(r_0) = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь краевое условие на контактной границе *AB*. Определим сначала линию *AB* в плоскости годографа. Принимая во внимание постоянство инварианта  $r = r_1$  слева от границы, из условий на контактной границе находим, что величины  $r$ ,  $s$  на правой стороне границы связаны линейным соотношением

$$s = \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} r - \frac{2\kappa}{1 - \kappa} r_1, \quad \kappa = \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (21)$$

где  $A_0$ ,  $A_1$  — энтропийные константы газов справа, соответственно слева от границы.

Краевое условие на  $AB$  в плоскости  $x, t$  имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r+s}{2}. \quad (22)$$

Пользуясь формулами (6), (21), получаем

$$\begin{aligned} & [(\beta - \alpha)(r - s)(W_{rr} + W_{rs}) + W_r - W_s] dr + \\ & + [(\beta - \alpha)(r - s)(W_{rs} + W_{ss}) + W_r - W_s] ds = 0, \quad (23) \\ & ds = \frac{1+\kappa}{1-\kappa} dr. \quad (24) \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что из (21) следует

$$r - s = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}(r - r_1), \quad (25)$$

получаем уравнение для  $f(r)$

$$\kappa^2(r - r_1)^2 f'' + \kappa(3 - \kappa)(r - r_1) f' + 3(1 - \kappa)f = 0, \quad (26)$$

общий интеграл которого имеет вид

$$f(r) = C_1(r - r_1)^{\lambda_1} + C_2(r - r_1)^{\lambda_2}, \quad (27)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные константы,  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$\kappa^2 \lambda^2 + \kappa(3 - 2\kappa)\lambda + 3(1 - \kappa) = 0. \quad (28)$$

Константы  $C_1, C_2$  определяются из условий

$$f(r_0) = C_1(r_0 - r_1)^{\lambda_1} + C_2(r_0 - r_1)^{\lambda_2} = 0, \quad (29)$$

$$f'(r_0) = C_1 \lambda_1 (r_0 - r_1)^{\lambda_1 - 1} + C_2 \lambda_2 (r_0 - r_1)^{\lambda_2 - 1} = -2r_0(h_0 + c_0 t_0). \quad (30)$$

Заметим в заключение, что прошедшая волна  $II'$  является бегущей волной разрежения, волна  $V$  может быть как волной разрежения, так и волной сжатия.

В случае  $r_B < r_C$  мы имеем волну разрежения, в случае  $r_B > r_C$  — волну сжатия.

Как показывают исследования в § 3, п. 5, отраженная волна  $V$  будет волной разрежения при  $\kappa > 1$ , волной сжатия при  $\kappa < 1$ . В случае  $\kappa > 1$  области  $II', V$  будут двумя волнами разрежения и полученное решение при  $h \rightarrow 0$  будет стремиться к решению соответствующей задачи о распаде разрыва (см. § 8, п. 2).

Приведенное решение указано нам Н. Н. Анучиной.

Общее решение задачи о набегании волны Римана на границу двух сред имеется в работе А. Тауба [1946].

**3. Плоские одномерные течения с переменной энтропией. Метод Мартина.** М. Мартину [1953б] удалось свести уравнения газовой динамики к уравнению Монжа — Ампера, а затем

применить метод промежуточного интеграла (см. гл. 1, § 12) и получить таким образом обобщение инвариантов Римана на случай течения с переменной энтропией

Дальнейшие исследования М. Мартина [1953а], Г. Ладфорда [1955], Ю. С. Завьялова [1955] позволили полностью определить класс уравнений состояния и функций распределения энтропии, для которых применим метод промежуточного интеграла.

Будем исходить из уравнений в лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первым двум уравнениям (1) соответствуют потенциалы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  (см. гл. 1, § 5, п. 3):

$$V dq + u dt = d\varphi_1, \quad (2)$$

$$u dq - p dt = d\varphi_2. \quad (3)$$

Мартин вводит потенциальную функцию  $\xi$  с помощью равенства

$$d\xi = u dq + t dp = d\varphi_2 + d(pt). \quad (4)$$

Из равенства (4) имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = u, \quad \frac{\partial \xi}{\partial p} = t; \quad (5)$$

$$du = \xi_{qp} dp + \xi_{qq} dq, \quad dt = \xi_{pp} dp + \xi_{pq} dq; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \xi_{qp}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \xi_{qq}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \xi_{pp}, \quad \frac{\partial t}{\partial q} = \xi_{pq}. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (2), находим

$$d\varphi_1 = (V + u\xi_{qp}) dq + u\xi_{pp} dp. \quad (9)$$

Условие полного дифференциала для уравнения (9) с учетом (7) приводит к уравнению Монжа — Ампера для функции  $\xi$ :

$$\xi_{qq}\xi_{pp} - \xi_{pq}^2 = \frac{\partial V(p, S)}{\partial p}. \quad (10)$$

Для определенного уравнения состояния  $V = V(p, S)$  и заданного распределения энтропии  $S = S(q)$  в правой части уравнения (10) мы имеем определенную функцию

$$-f^2(p, q) = \frac{\partial V[p, S(q)]}{\partial p}, \quad (11)$$

и уравнение (10) принимает вид уравнения

$$\xi_{pp}\xi_{qq} - \xi_{pq}^2 + f^2(p, q) = 0, \quad (12)$$

изученного нами в главе 1, § 12.

Заметим, что выбор  $p, q$  в качестве независимых переменных означает, что  $p$  не является функцией  $q$  или, что то же,  $S$ , т. е. термодинамические параметры течения составляют двумерное многообразие.

Исключительный случай, когда  $p = p(S)$ , будет нами рассмотрен позднее.

Метод Мартина заключается в отыскании семейства решений уравнения (12) с однофункциональным произволом, удовлетворяющих дополнительному соотношению

$$\varphi(p, q, \xi, \xi_p, \xi_q) = \varphi(p, q, \xi, t, u) = \text{const}. \quad (13)$$

Соотношение (13) есть промежуточный интеграл уравнения Монжа — Ампера (12).

Ясно, что уравнения (12), (13) совместны только для определенной функции  $f(p, q)$ . Полный анализ совместности, проведенный М. Мартином, Г. Ладфордом и независимо Ю. С. Завьяловым, показал, что промежуточный интеграл существует для следующих функций  $f(p, q)$ :

$$f(p, q) = \sqrt{F'(a_1 p + a_2 q)}, \quad (14)$$

$$f(p, q) = \frac{1}{(q + a_2)^2} \sqrt{F' \left( \frac{p + a_1}{q + a_2} \right)}. \quad (15)$$

В первом случае

$$\varphi = a_2 t - a_1 u \pm g(a_1 p + a_2 q). \quad (16)$$

Во втором случае

$$\varphi = \xi - t(p + a_1) - u(q + a_2) \pm g \left( \frac{p + a_1}{q + a_2} \right). \quad (17)$$

В обоих случаях  $g(\theta)$  связано с  $F(\theta)$  соотношением

$$g'(\theta) = \sqrt{F'(\theta)}. \quad (18)$$

Рассмотрим случай политропного газа, когда

$$V = A^{\frac{2}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad A^2 = A^2(S), \quad (19)$$

$$f = \sqrt{-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \quad (20)$$

Если энтропия  $S$  постоянна,  $f$  есть функция только от  $p$ , и мы можем пользоваться представлением (14) при  $\alpha_2 = 0$ . Сопоставляя (14) и (20), находим:

$$\alpha_1 = 1, \quad F = A^{\frac{2}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad g = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{2}{\gamma-1} c. \quad (21)$$

Тогда имеем

$$\varphi = -u \pm \frac{2}{\gamma-1} c, \quad (22)$$

т. е. промежуточный интеграл есть не что иное, как инвариант Римана. Это оправдывает термин «обобщенный инвариант Римана», введенный Мартином и Ладфордом для промежуточного интеграла (13) уравнения (10).

Рассмотрим теперь случай переменной энтропии. Покажем, что среди течений с постоянным обобщенным инвариантом Римана имеются течения, примыкающие к области покоя через ударную волну. Воспользуемся для этого представлением (15), (17). Будем предполагать, что ударная волна движется по нулевому фону ( $\rho_0 = 1, u_0 = 0$ ) и является сильной, т. е. для величин за фронтом волны справедливы формулы (4.7.1) — (4.7.4):

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 D^2 = \frac{2}{\gamma+1} D^2, \\ \rho_1 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ u &= \frac{2}{\gamma+1} D, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$D = \frac{dx}{dt} = \frac{dq}{dt}. \quad (24)$$

Пользуясь (18), (19), для  $A(S)$ ,  $g(\theta)$  получаем выражения

$$A^{\frac{2}{\gamma}} = c^2 \gamma q^{\frac{1-3\gamma}{\gamma}}, \quad (25)$$

$$g = \frac{2\gamma}{\gamma-1} c \left( \frac{p}{q} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (26)$$

где  $c$  — некоторая константа,  $\alpha_1, \alpha_2$  положены равными нулю. Пусть в момент  $t = 0$  в покоящейся газе начинает распространяться ударная волна, движущаяся по степенному закону

$$q = Ct^\alpha. \quad (27)$$

Найдем показатель  $\alpha$ , которому соответствует постоянное значение функции  $\varphi$  из (17) на фронте волны. Тогда  $\varphi$  будет тождественно постоянна за фронтом волны и также будет иметь постоянный обобщенный инвариант Римана.

Из (17), принимая во внимание (3), находим

$$d\varphi_2 = u dq - p dt = d(uq) \mp dg \left( \frac{p}{q} \right), \quad (28)$$

откуда следует

$$q du + p dt \mp dg \left( \frac{p}{q} \right) = 0. \quad (29)$$

В силу предположения (27) соотношение (29) на заднем фронте волны после деления на  $dt$  принимает вид

$$\left( \frac{2}{\gamma+1} \alpha(\alpha-1)C^2 + \frac{2}{\gamma+1} C^2 \alpha^2 \right) t^{2\alpha-2} + B t^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}(\alpha-2)-1} = 0, \quad (30)$$

где

$$B = \mp c \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} (C\alpha^2)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} (\alpha-2). \quad (31)$$

Отсюда следует

$$\alpha = \frac{2}{3\gamma+1}. \quad (32)$$

Обобщенные волны Римана могут рассматриваться как решения с дифференциальной связью (гл. 1, § 12)

$$\Phi(q, t, \varphi_1, \varphi_2, u, p, S(q)) = 0, \quad (33)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — потенциалы системы (1).

Как было показано, определение функции  $\Phi$  сводится к интегрированию линейной однородной системы. Так как при этом независимыми переменными являются  $q, t$ , то дифференциальная связь (33) уравнения (1) дает также и случай, исключенный из рассмотрения Мартином, когда  $p = p(S)$ . Этот случай будет рассмотрен в следующем пункте.

**4. Уравнение гидродинамической поверхности.** В случае идеального газа уравнения (9.3.1) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \psi p^{-\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{\gamma+1}{\gamma}, \quad \psi = \frac{1}{\gamma} A^{\frac{2}{\gamma}}. \quad (2)$$

Для системы (1) получим уравнение в пространстве годографа  $u, p, \psi$ . Применяя алгоритм, указанный в § 12 главы 1 для поверхности

$$\psi = \psi(p, u), \quad (3)$$

приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial p} &= \frac{\partial \psi}{\partial p} \mu, & \frac{\partial q}{\partial u} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \mu, \\ \frac{\partial t}{\partial p} &= -\psi p^{-\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial u} \mu, & \frac{\partial t}{\partial u} &= -\frac{\partial \psi}{\partial p} \mu, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\mu$  — неопределенный множитель.

Условия интегрируемости уравнений (4) приводят к уравнениям для  $\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi p^{-\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \ln \mu}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial \ln \mu}{\partial p} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial \left( \psi p^{-\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)}{\partial u} = -\Phi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial \ln \mu}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \ln \mu}{\partial p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решая (5) относительно  $\frac{\partial \ln \mu}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \ln \mu}{\partial p}$ , находим

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \Phi, \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \Phi, \quad (6)$$

где

$$\Phi = \frac{\Phi}{\Delta}, \quad \Delta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 - \psi p^{-\kappa} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2. \quad (7)$$

Наконец, условия интегрируемости уравнений (6) дают следующее уравнение третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (8), приходим к уравнению второго порядка

$$\Phi = \frac{\frac{\partial \left( \psi p^{-\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)}{\partial u} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}}{\left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 - \psi p^{-\kappa} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2} = f(\psi), \quad (9)$$

где  $f(\psi)$  — произвольная функция  $\psi$ .

Нетрудно видеть, что уравнение (9) допускает следующие интегралы:

$$\psi = g(p), \quad (10)$$

$$u = h(\psi), \quad (11)$$

где  $g$ ,  $h$  — произвольные функции своих аргументов. Соответствующие им решения имеют вид

$$u = Ct + C_1, \quad p = -Cq + C_2, \quad \psi = g(p), \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{1}{\psi} h'(\psi) d\psi &= Cq + C_1, \\ \frac{1}{1-\kappa} p^{1-\kappa} &= -Ct + C_2, \quad u = h(\psi). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Соотношение (10) дает как раз исключительный случай, когда невозможно преобразование к уравнению Монжа — Ампера.

Решения вида (12), (13) были получены К. П. Станюковичем [1955]. Если  $\psi = \psi(u, p)$  есть решение уравнения (9), решение исходного уравнения получается путем последовательного интегрирования вполне интегрируемых систем (6), (4).

Формулы, восстанавливающие решение, имеют вид

$$\ln \mu = \int f(\psi) d\psi, \quad \mu = e^{\int f(\psi) d\psi} = F(\psi), \quad (14)$$

$$q = \int \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial u} du \right) = \int \mu d\psi = \int F(\psi) d\psi, \quad (15)$$

$$t = - \int F(\psi) \left[ (\psi p^{-\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial u}) dp + \frac{\partial \psi}{\partial p} du \right]. \quad (16)$$

Данной поверхности  $\Phi(\psi, p, u) = 0$  отвечает, в силу формул (14)–(16), однозначно с точностью до констант решение уравнений (1). Однозначность нарушается в случае зависимости  $\psi = \text{const}$ , которой отвечает семейство решений, зависящее от двух произвольных функций одного аргумента.

**5. Решения уравнений газовой динамики, характеризуемые дифференциальными связями.** Уравнения (9.3.1) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + M(p, V) \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

$$M(p, V) = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)^{-1}.$$

Можно доказать, что в общем случае дифференциальные связи первого порядка, совместные с системой (1), являются квазилинейными. В результате полного анализа устанавливаем, что в случае одной дифференциальной связи, присоединяемой к системе (1), переопределенная система совместна с двухфункциональным произволом в решении, если связь имеет один из двух видов (В. Е. Располов, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко [1977]):

$$a) \quad \frac{\partial V}{\partial q} + M^{-1} \frac{\partial p}{\partial q} = f(V, p, q), \quad (2)$$

$$b) \quad \frac{\partial u}{\partial q} \mp M^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial p}{\partial q} = f(u, p, q, t). \quad (3)$$

В первом случае  $f$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial V} - M \frac{\partial f}{\partial p} + M^{-1} \frac{\partial M}{\partial V} f = 0.$$

Во втором случае  $f$  определяется из системы двух уравнений, при этом  $M$  может зависеть только от  $p$ . Если  $f \neq 0$ , то функция  $M$  определяется однозначно, иначе  $M = M(p)$  — произвольная функция.

дифференциальными связями, содержит в себе решения Мартина, Ладфорда и Завьялова, так как данный метод является более общим, чем метод промежуточного интеграла. В той же работе указанные решения применяются к задаче о движении ударной волны. Это точное решение оказалось удобным тестом для численных методов (Е. В. Ворожцов [1977]).

Рассмотрим задачу: контактная полоса  $u = 0$ ,  $p = p_0 = \text{const}$ ,  $S = S_1(q)$  ограничена слева поршнем  $q = q_0$ , который движется по закону  $u = U(t)$ ,  $U(0) = 0$ . Определить параметры движущегося газа. Решение (4) запишем в виде

$$u = \frac{2p_0^{1-n/2}}{a(n-2)} - \frac{2p^{1-n/2}}{a(n-2)}, \quad (13)$$

$$V = \frac{p^{1-n}}{a^2(n-1)} + g_1(q), \quad (14)$$

$$ap^{n/2}t - q = g_2(p). \quad (15)$$

Из (13) и условия задачи находим на поршне

$$t = U^{-1} \left( \frac{2p_0^{1-n/2}}{a(n-2)} - \frac{2p^{1-n/2}}{a(n-2)} \right),$$

где  $U^{-1}$  обозначает функцию, обратную к  $U$ . Давление  $p$  как функция от  $q$ ,  $t$  определяется, согласно (15), из соотношения

$$ap^{n/2}t - q = ap^{n/2}U^{-1} \left( \frac{2p_0^{1-n/2}}{a(n-2)} - \frac{2p^{1-n/2}}{a(n-2)} \right) - q_0.$$

Для отыскания  $u(q, t)$  следует подставить в (13) найденное  $p(q, t)$ . Из (14) определяется  $V(q, t)$ , где  $g_1(q) = S_1(q)$ . Краевое условие на движущемся поршне удовлетворено по построению. Область покоя от области движения отделяет прямолинейная характеристика  $ap_0^{n/2}t - q = -q_0$ . Задача решена.

**6. Решение одномерных уравнений газовой динамики с константным произволом.** Мы воспользуемся общими уравнениями одномерных течений

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu \rho u}{x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где параметр  $\nu$  равен 0 в плоском, 1 в цилиндрическом, 2 в сферическом случаях.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что уравнение состояния имеет вид

$$p = a^2(S) \rho^\gamma. \quad (2)$$

В этом случае система (1) может быть преобразована к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \ln p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{vu}{x} &= 0, \\ \frac{\partial \ln p}{\partial t} + u \frac{\partial \ln p}{\partial x} + \gamma \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{vu}{x} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В плоском случае ( $v = 0$ ) системы (1), (3) имеют коэффициенты, зависящие только от неизвестных функций, и допускают преобразования подобия и сдвига по независимым переменным  $x$ ,  $t$ . В цилиндрическом и сферическом случаях возможно только преобразование подобия по  $x$ ,  $t$ . Переходя к логарифмическим масштабам по  $x$ ,  $t$  и безразмерным скоростям

$$\tau = \ln t, \quad \lambda = \ln x, \quad u = \frac{x}{t} U, \quad c = \frac{x}{t} C, \quad (4)$$

систему (1) можно записать в виде\*)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \lambda} + C^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + C^2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + U^2 - U = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial U}{\partial \lambda} + (v + 1)U = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad (7)$$

где

$$\varphi = \ln \rho, \quad \psi = \frac{1}{\gamma} \ln a^2.$$

В системе (5)—(7) при любом  $v$  коэффициенты не зависят от аргументов  $\tau$ ,  $\lambda$ , и, следовательно, как показывает анализ, проведенный в главе 1, § 12, она имеет простые волны

$$\begin{aligned} U &= U(\theta), \quad \varphi = \varphi(\theta), \quad \psi = \psi(\theta), \\ \theta &= \theta_0 + a_1 \lambda + a_2 \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как коэффициенты системы (5)—(7) не зависят от  $\varphi$ ,  $\psi$ , то возможны решения вида

$$U = U(\theta), \quad \varphi = \varphi(\theta) + l\tau, \quad \psi = \psi(\theta) - \frac{\gamma-1}{\gamma} l\tau, \quad (9)$$

где  $l$  — произвольная постоянная.

\*) В таком виде уравнения газовой динамики рассматривались К. П. Станюковичем [1955].

Переходя к переменным  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ , получаем представления

$$u = \frac{x}{t} U(\xi) = t^{-\left(\frac{a_2}{a_1} + 1\right)} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} U(\xi), \quad p = \rho_0 \left(\frac{x}{t}\right)^2 t^l P(\xi) = \\ = \rho_0 t^{l-2} \left(\frac{a_2}{a_1} + 1\right) \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\frac{2}{a_1}} P(\xi), \quad \rho = \rho_0 t^l R(\xi), \quad (10)$$

где

$$\xi = e^\theta = \xi_0 x^{a_1} t^{a_2}, \quad \xi_0 = e^{\theta_0}. \quad (11)$$

Решения вида (10) называется *автомодельными* \*).

Ясно, что показатели  $a_1$ ,  $a_2$  определены с точностью до множителя, так что существенным параметром является только их отношение  $\frac{a_1}{a_2} = -k$ .

Система уравнений для  $U(\xi)$ ,  $R(\xi)$ ,  $P(\xi)$ , соответствующая системе (3), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } (a_1 U + a_2) \frac{dU}{d\theta} + \frac{C^2}{\gamma} a_1 \frac{d \ln P}{d\theta} &= U - U^2 - 2 \frac{C^2}{\gamma}, \\ \text{б) } (a_1 U + a_2) \frac{d \ln R}{d\theta} + a_1 \frac{dU}{d\theta} &= -(\nu + 1) U - l, \\ \text{в) } (a_1 U + a_2) \frac{d \ln P}{d\theta} + \gamma a_1 \frac{dU}{d\theta} &= -[(\nu + 1) \gamma + 2] U - l + 2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Линейная комбинация уравнений (12б), (12в) приводит к интегралу (так называемому интегралу адиабатичности)

$$\ln P - \kappa \ln R + (\gamma - \kappa) \ln \left( \frac{1}{k} - U \right) + [(\nu + 1)(\gamma - \kappa) + 2] \frac{\theta}{a_1} = \ln C_1, \quad (13) \\ \kappa = \frac{(\nu + 1) \gamma + 2 + k(l - 2)}{kl + (\nu + 1)},$$

который позволяет при любых  $k$ ,  $l$  свести число уравнений (12) к двум.

Покажем, что при некоторых  $k$ ,  $l$  система (12) допускает еще один интеграл.

Уравнения (1) имеют в качестве закона сохранения соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho x^\nu \left( \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho x^\nu u \left( \frac{\nu}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] = 0, \quad (14)$$

выражающее закон сохранения энергии. Ему соответствует автомодельное уравнение

$$\frac{dA}{d\xi} + [\nu + 3 + k(l - 3)] B - k\xi \frac{dB}{d\xi} = 0, \quad (15)$$

\* Впервые автомодельные решения одномерной газовой динамики как решения, инвариантные относительно некоторых групп преобразований, были рассмотрены К. Бехертом [1941].

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \xi^{l-2} \left[ \frac{P}{\gamma-1} + \frac{PU^2}{2} \right], \\ B &= \xi^{l-3} U \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} P + \frac{PU^2}{2} \right], \quad \xi = \xi_0 t x^{-k}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При условии

$$k = \frac{\gamma+3}{2-l} \quad (17)$$

уравнение (15) допускает интеграл (интеграл энергии)

$$A - k(\xi B) = \text{const}. \quad (18)$$

При наличии интеграла энергии система (12) сводится к одному уравнению.

Мы дадим краткий обзор некоторых задач, приводящих к автомодельным решениям. В основном эти решения описывают течения, примыкающие к области покоя через ударную волну или слабый разрыв. При этом характерным обстоятельством является равенство нулю давления в области покоя. Тогда ударная волна может рассматриваться как бесконечно сильная, условия Гюгонио приобретают однородный вид, что и позволяет искать решение в автомодельном виде.

Как известно (см. § 4, п. 7) условия Гюгонио на сильной ударной волне имеют вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad u = \frac{2}{\gamma+1} D, \quad p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 D^2, \quad (19)$$

где  $D = \frac{dx}{dt}$  есть скорость ударной волны.

Будем предполагать, что траектория ударной волны есть  $\xi$ -линия (т. е. линия, уравнение которой есть  $\xi = \text{const}$ ). Тогда из (11) следует

$$D = \frac{dx}{dt} = -\frac{a_2}{a_1} \frac{x}{t} = \frac{l}{k} \frac{x}{t}. \quad (20)$$

Условия Гюгонио (19) для безразмерных величин  $U, R, P$  принимают вид

$$U(\xi) = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{k}, \quad R(\xi) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} t^{-l}, \quad P(\xi) = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{k^2} t^{-l}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что  $l = 0$ . После этих предварительных замечаний рассмотрим ряд автомодельных решений.

1. Сходящаяся ударная волна. Задача была поставлена и решена Г. Гудерлеем [1942] и независимо К. П. Станюковичем для случая  $\gamma = 7/5$  и детально исследована для всех  $\gamma$  группой советских математиков (см. К. В. Брушлинский, Я. М. Каждан [1963]). Задача может быть сформулирована

следующим образом. В покоящемся газе с параметрами  $\rho_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0 = 0$  движется, ускоряясь к центру  $x = 0$ , сферическая ( $\nu = 2$ ) ударная волна. В момент  $t = 0$  она входит с бесконечной скоростью в центр, который является особой точкой системы уравнений (1) (рис. 2.81). Аналитический характер особенности решения в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  весьма сложен. Существует предположение, что решение в окрестности центра представляется аналитическими функциями от дробно-степенного аргумента  $\xi = \xi_0 x^{a_1} t^{a_2}$  и носит, следовательно, автомодельный характер. Для удобства постановки краевых условий положим в (11)

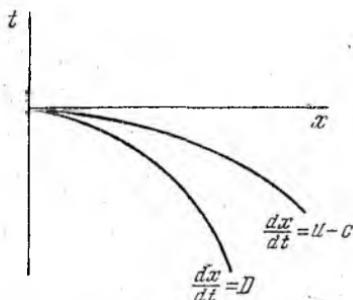


Рис. 2.81.

$$a_2 = 1, \quad a_1 = -k. \quad (22)$$

Так как ударная волна является бесконечно сильной, то справедливы условия (19), (21). Подберем  $\xi_0$  так, чтобы на ударной волне  $\xi = 1$ . Тогда условия (21) принимают вид

$$U(1) = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{k}, \quad R(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad P(1) = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{k^2}. \quad (23)$$

Константа  $C_1$  в интеграле (13) определяется из условий (23). Используя интеграл (13) и вводя новые переменные

$$y = 1 - kU, \quad z = \frac{k^2 C^2}{1 - kU} = \frac{k^2 \gamma P}{R(1 - kU)}, \quad (24)$$

систему (12) можно свести к двум уравнениям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а)} \quad k\xi \frac{dy}{d\xi} = \frac{q(y, z)}{z-y}, \\ \text{б)} \quad k\xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{z}{y} \frac{p(y, z)}{z-y}, \end{array} \right\} \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} p(y, z) = (3-y)z - (2\gamma-1)y^2 + \\ \quad + [2\gamma-3 + (k-1)(\gamma-2)]y - \gamma(k-1), \\ q(y, z) = (1-y)(y-3z) - (1-k) \left( \frac{2}{\gamma} z + 1 - y \right). \end{array} \right\} \quad (26)$$

Из условий (23) находим

$$y(1) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad z(1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (27)$$

При  $t = 0$  решение  $u(x, t)$ ,  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$  должно быть ограниченным. Отсюда следует

$$U(0) = 0, \quad P(0) = 0, \quad (28)$$

что в переменных  $y, z$  означает

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \quad (29)$$

Таким образом, мы свели задачу отыскания автомодельного решения к краевой задаче (27), (29) для системы (25).

Деля уравнение (25б) на (25а), находим

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \frac{p}{q}. \quad (30)$$

Мы пришли к эквивалентной формулировке: найти решение уравнения (30), проходящее через точки  $M_1\left(\frac{y-1}{y+1}, \frac{2y}{y+1}\right)$ ,  $M_2(1, 0)$  в плоскости  $y, z$ .

Поставленная задача является переопределенной и разрешима только при некоторых значениях  $k$ . Нетрудно убедиться, что характеристика

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad (31)$$

входящая в центр, является  $\xi$ -линией и изображается в плоскости  $y, z$  прямой (рис. 2.82)

$$y - z = 0. \quad (32)$$

Точки  $M_1, M_2$  лежат по разные стороны от прямой  $z - y = 0$ , и, следовательно, искомая интегральная кривая  $y = y(\xi), z = z(\xi)$  должна пересечь эту прямую в некоторой точке  $M$ , соответствующей некоторому значению параметра  $\xi_M$ .

Если при прохождении кривой  $y(\xi), z(\xi)$  через точку  $M: \{y = y(\xi_M), z = z(\xi_M)\}$  функции  $p(y, z), q(y, z)$  не меняют знака, то правые части уравнений (25) меняют знак и функции  $y(\xi), z(\xi)$  становятся неоднозначными, что невозможно. Отсюда следует, что в точке  $M: \{y(\xi_M), z(\xi_M)\}$  величины  $p(y, z), q(y, z)$  также обращаются в нуль, и она является особой точкой. Условия  $y - z = 0, p = 0$  приводят к уравнению

$$y^2 - \left[1 - \frac{y-2}{2y}(1-k)\right]y - \frac{1-k}{2} = 0. \quad (33)$$

Таким образом, имеются две особые точки  $N_1, N_2$  на прямой  $y - z = 0$ . Положение этих точек, а также характер особенно-

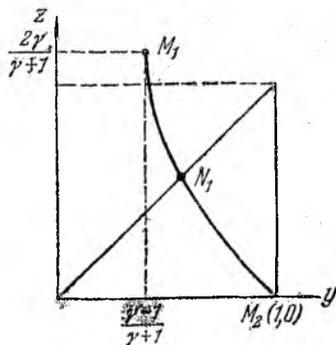


Рис. 2.82.

стей зависят от двух параметров  $\gamma, k$ . В случае  $\gamma = \frac{7}{5}$  (исследован Гудерлеем) точка  $N_1$  является седлом и существует единственная интегральная кривая, соединяющая точки  $M_1, M_2$ . При этом она проходит через точку  $N_1$  (см. рис. 2.82). Мы отсылаем читателя за детальным анализом к обзору К. В. Брушлинского, Я. М. Каждана [1963]. Укажем только, что имеются области параметров  $\gamma, k$ , для которых задача однозначно разрешима.

2. Аналогичным образом исследуется задача о схлопывании сферической полости. Масса изоэнтропического газа истекает в вакуум, так что граница газа с вакуумом движется с ускорением к центру и в момент  $t = 0$  входит с бесконечной скоростью в центр  $x = 0$ .

Для безразмерных инвариантов

$$r = k \left( u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right), \quad s = k \left( u - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) \quad (34)$$

получаем систему уравнений

$$k\xi \frac{dr}{d\xi} = \frac{p(r, s)}{q(r, s)}, \quad k\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{p(r, s)}{q(s, r)}, \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p(r, s) &= \frac{4}{\gamma - 1} ks - 2 \left( \frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) s^2 - \left( \frac{2}{\gamma - 1} - 1 \right) rs + r^2, \\ q(r, s) &= \frac{4}{\gamma - 1} r - \left( \frac{2}{\gamma - 1} + 1 \right) r - \left( \frac{2}{\gamma - 1} - 1 \right) s. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Граница с вакуумом есть  $\xi$ -линия.  $\xi_0$  подбирается так, чтобы  $\xi = 1$ . Тогда краевые условия для системы (35) имеют вид

$$r(1) = s(1) = 1, \quad (37)$$

$$r(0) = s(0) = 0. \quad (38)$$

В плоскости  $r, s$  вновь приходим к краевой задаче.

Найти интегральную кривую уравнения

$$\frac{ds}{dr} = \frac{p(r, s) q(r, s)}{p(s, r) q(s, r)}, \quad (39)$$

проходящую через точки  $M_1(1, 1), M_2(0, 0)$ .

Аналогично доказывается, что искомая интегральная кривая должна проходить через особые точки уравнения (39). Детальный анализ показывает отсутствие единственного аналитического решения.

3. Задача о точечном взрыве решена Л. И. Седовым [1946] и Д. И. Тейлором (см., например, Р. Курант, К. Фридрихс [1950]).

В точке  $x = 0$  в момент  $t = 0$  мгновенно выделяется конечное количество энергии  $E$ , которая переходит в энергию движущее-

гося газа, отделенного от покоящейся среды ударной волной. Так как при малых  $t$  концентрация энергии и давление велики, то давлением  $p_0$  покоящегося газа можно пренебречь, что делает возможным автомодельное приближение. Для удобства постановки краевых условий положим в (11)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{k}$  и подберем  $\xi_0$  так, чтобы на ударной волне было  $\xi = 1$ . Тогда течение, возникающее в результате точечного взрыва, описывается тем решением системы (12), которое удовлетворяет условиям (23) и, кроме того, условию симметрии

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi U(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0, \quad (40)$$

которое означает, что  $u(0, t) = 0$ .

Покажем, что кроме интеграла адиабатичности (13) имеет место также интеграл энергии. В силу предположения  $p_0 = 0$  поток энергии через ударную волну равен нулю, и энергия движущегося газа тождественно равна  $E$ :

$$E = \int_0^x \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) x^\nu dx. \quad (41)$$

Переходя к величинам  $P$ ,  $R$ ,  $U$ , получаем соотношение

$$E = \frac{\rho_0}{\xi_0^{\nu+3}} t^{\frac{\nu+3}{k}-2} \int_0^1 \left( \frac{1}{\gamma-1} P + \frac{1}{2} R U^2 \right) \xi^{\nu+2} d\xi. \quad (42)$$

Отсюда следует, что  $k = \frac{\nu+3}{2}$ . А это при условии  $l = 0$  необходимо и достаточно для существования интеграла энергии. Из условий на ударной волне следует, что константа интегрирования в (18) равна 0, и интеграл энергии принимает вид

$$kU \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} P + \frac{1}{2} R U^2 \right) = \frac{1}{\gamma-1} P + \frac{1}{2} R U^2. \quad (43)$$

Учитывая, что  $l = 0$ , интеграл (13) запишем так:

$$\ln P - (\gamma - 1) \ln R + \ln \left( \frac{1}{k} - U \right) + (\nu + 3) \theta = \ln C_1. \quad (44)$$

Константа  $C_1$  в (44) определяется из условий на ударной волне:

$$C_1 = \frac{2a^3(\gamma-1)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}, \quad a = \frac{1}{k}. \quad (45)$$

Уравнение (43) преобразуем к виду

$$\ln P - \ln R + \ln \left( \gamma U - \frac{1}{k} \right) - \ln \left( \frac{1}{k} - U \right) - 2 \ln U = \ln \frac{\gamma-1}{2}. \quad (46)$$

Дифференцируя (44), (46) по  $\theta$  и исключая из уравнений (44), (46), (126) величины  $\frac{d \ln P}{d\theta}$ ,  $\frac{d \ln R}{d\theta}$ , приходим к уравнению для  $U$ :

$$\frac{dU}{d\theta} = U \frac{(2 - bU)(\gamma U - a)}{\gamma(1 + \gamma)U^2 - 2a(\gamma + 1)U + 2a^2}, \quad (47)$$

где

$$b = (\nu + 3) - (2 - \gamma)(\nu + 1) > 0. \quad (48)$$

Интегрируя (47), находим

$$C\xi = U^{-\alpha} (\alpha_1 - U)^{-\beta_1} (U - \alpha_2)^{\beta_2}, \quad (49)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{b}, \quad \alpha_2 = \frac{a}{\gamma}, \\ \beta_1 &= \frac{a^2 b^2 + 2(\gamma + 1)(\gamma - ab)}{b(2\gamma - ab)}, \quad \beta_2 = \frac{(\gamma - 1)a}{2\gamma - ab}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Заметим, что величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\beta_2$  положительны при любых  $\gamma$ ,  $\nu$ , величина  $\beta_1$  положительна для всех  $\gamma > 1$  и всех  $\nu$ .

Постоянная  $C$  в (49) определяется из условий на ударной волне ( $\xi = 1$ ) и равна

$$C = \left(\frac{2}{\gamma + 1} a\right)^{-\alpha} \left(\alpha_1 - \frac{2}{\gamma + 1} a\right)^{-\beta_1} \left(\frac{2}{\gamma + 1} a - \alpha_2\right)^{\beta_2}. \quad (51)$$

Если после этого воспользоваться интегралом энергии (43) и интегралом (44), (45), то получим следующие выражения для  $R$ ,  $P$ :

$$R = \left[ 4a^3 \frac{(\gamma - 1)^{\gamma - 1}}{(\gamma + 1)^{\gamma + 1}} \right]^{\frac{1}{2 - \gamma}} \left[ \frac{\gamma U - a}{(a - U)^2 U^2} \right]^{\frac{1}{2 - \gamma}} \xi^{\frac{\nu + 3}{\gamma - 2}}, \quad (52)$$

$$P = \frac{\gamma - 1}{2} R U^2 \frac{a - U}{\gamma U - a}. \quad (53)$$

Из формулы (49) следует, что при  $\xi \rightarrow 0$   $U \rightarrow \alpha_2$ , откуда следует, что условие симметрии (40) выполняется.

Детальный анализ формул этого решения показывает, что  $U$  достигает значения  $\alpha_2$  при  $\xi \rightarrow 0$ , для  $\gamma < 7$  при  $\nu = 2$  и для всех  $\gamma$  при  $\nu = 0, 1$ .

Для  $\gamma > 7$ ,  $\nu = 2$  точечный взрыв сопровождается образованием каверны, граница которой в плоскости  $x$ ,  $t$  изображается  $\xi$ -линией.

Задача о точечном взрыве рассматривалась нами в адиабатическом приближении без учета теплопроводности. Ясно, что при достаточно малых  $t$  концентрация энергии высока и следует учитывать процесс теплопроводности.

Вспомогательная задача о точечном взрыве с учетом теплопроводности рассмотрена в работах В. П. Коробейникова [1961], В. Е. Неуважина [1962].

Весьма близка по постановке к задаче о точечном взрыве задача о движении, возникающем под действием поршня, имеющего сферическую (цилиндрическую, плоскую) поверхность.

Если предполагать, что скорость поршня меняется по степенному закону

$$u_n = \text{const } t^\alpha, \quad (54)$$

то возникающее течение описывается автомодельными уравнениями (12). В отличие от задачи о точечном взрыве, здесь имеется только один интеграл адиабатичности (13) и отсутствует интеграл энергии. Поэтому система (12), из которой  $\rho$  исключается с помощью интеграла (13), сводится к двум уравнениям для  $u(\xi)$ ,  $R(\xi)$ .

Рассматриваемое течение ограничено двумя  $\xi$ -линиями: линией ударной волны и линией поршня (рис. 2.83). Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad l = 0. \quad (55)$$

Для  $u(\xi)$ ,  $R(\xi)$  ставятся следующие краевые условия: на ударной волне, когда  $\xi = \eta_1$ .

$$u(\eta_1) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{k}, \quad R(\eta_1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \quad (56)$$

на линии поршня, когда  $\xi = \eta_0$ ,

$$u(\eta_0) = \frac{1}{k}. \quad (57)$$

Интегрирование системы для  $u(\xi)$ ,  $R(\xi)$  ведется от значения  $\xi = \eta_1$  до значения  $\xi = \eta_0$ , при котором выполняется условие (57). Так как интеграл энергии отсутствует, то показатель  $k$  является произвольным.

Задача о поршне подробно исследована в работах Н. Л. Крашенинникова, Н. С. Мельниковой и Н. Н. Кочиной.

Мы отсылаем читателя к монографии В. П. Коробейникова [1961], в которой даны подробный анализ задачи о поршне и точечном взрыве и ссылки.

Весьма интересное решение еще одной автомодельной задачи — задачи о мгновенном ударе было дано Я. Б. Зельдовичем

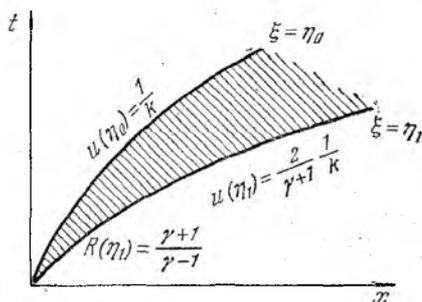


Рис. 2.83.

[1956] и исследовано в дальнейшем В. Б. Адамским [1956], А. И. Жуковым и Я. М. Кажданом [1956].

7. Автомодельные решения в лагранжевых координатах. Уравнения (9.6.1) после перехода к массовой лагранжевой координате

$$q(x, t) = \int_0^x \rho(x, t) x^v dx \quad (1)$$

принимают вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} + x^v \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \\ \text{б) } \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial (u x^v)}{\partial q} = 0, \\ \text{в) } \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \\ \text{г) } \frac{\partial x}{\partial t} = u. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Пользуясь представлением (9.6.10), из (1) находим

$$q = \frac{\rho_0 t^{l + \frac{v+1}{k}}}{\xi_0^{v+1}} \int_0^{\xi} R(\xi) \xi^v d\xi. \quad (3)$$

Отсюда следует, что величина

$$\eta = \eta_0 q t^{-\left[l + \frac{v+1}{k}\right]} = \frac{\xi_0^{v+1}}{\rho_0} q t^{-\left[l + \frac{v+1}{k}\right]} \quad (4)$$

есть функция  $\xi$ .

Учитывая (9.6.10), находим, что величины  $f$ : ( $u$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $x$ ) представляются в виде

$$f = f_0 t^\beta F(\eta), \quad (5)$$

что и доказывает автомодельность в лагранжевых координатах.

8. Течения с линейным профилем скорости. Весьма интересный класс решений, обладающий функциональным произволом, был рассмотрен Л. И. Седовым [1954]. Этот класс полностью определяется наличием линейного профиля скорости \*).

$$u = A(t) x. \quad (1)$$

Дифференцируя равенство (1) по  $t$  и принимая во внимание (9.7.2г), находим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\dot{A}}{A} + A \right) u, \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt}. \quad (2)$$

\*) Случай неоднородной связи  $u = A(t)x + B(t)$  противоречит условию симметрии  $u(0, t) = 0$ . Такого рода течения рассматривались также А. И. Жуковым (частное сообщение), Хефеле [1954], Хорнером [1955], Келлером [1954].

Интегрируя (2) по  $t$ , получаем

$$u = B(t) U(q), \quad B(t) = e^{\int \left(\frac{\dot{A}}{A} + A\right) dt}, \quad (3)$$

где  $U(q)$  — произвольная функция  $q$ .

Интегрируя по  $t$  уравнение (9.7.2г), имеем

$$x = C(t) U(q), \quad C(t) = \int B(t) dt. \quad (4)$$

Равенства (1), (3), (4) непротиворечивы, так как без труда можно убедиться, что  $B = AC$ . Из уравнения (9.7.2б) определяется  $V$ :

$$V = \frac{C^{\nu+1}(t)}{\nu+1} \cdot \frac{dU^{\nu+1}(q)}{dq}. \quad (5)$$

Отсюда, пользуясь уравнением состояния (9.6.2), получаем выражение для  $p$

$$p = \psi(q) V^{-\nu} = (\nu+1)^{\nu} C(t)^{-(\nu+1)\nu} \psi(q) \left[ \frac{dU^{\nu+1}(q)}{dq} \right]^{-\nu}, \quad (6)$$

где

$$\psi(q) = \psi[S(q)]. \quad (7)$$

Уравнение (9.7.2а) позволит определить функции  $C(t)$  и согласовать произвольные функции  $U(q)$ ,  $\psi(q)$ . Подставляя (3), (6) в (9.7.2а), находим после разделения переменных

$$C^{\nu(\nu+1)-\nu} \ddot{C}(t) = -(\nu+1)^{\nu} \mu, \quad (8)$$

$$U^{\nu-1} \frac{d}{dq} \left\{ \psi(q) \left[ \frac{dU^{\nu+1}}{dq} \right]^{-\nu} \right\} = \mu, \quad (9)$$

где  $\mu$  — постоянная.

Если  $C(t)$  удовлетворяет уравнению (8), а функции  $U(q)$ ,  $\psi(q)$  согласованы с помощью уравнения (9), то равенства (3)–(6) определяют решение, зависящее от одной произвольной функции. Решение (3)–(6) может быть реализовано как истечение в вакуум сферического объема газа и течение газа за сходящейся сферической волной. Подробное исследование этих течений проведено в монографии Л. И. Седова [1957].

## Разностные методы решения уравнений газовой динамики

В этой главе мы излагаем основные понятия и факты из теории разностных схем, методы построения вычислительных алгоритмов, которые находят применение при численном решении задач газовой динамики. Мы рассматриваем здесь лишь основные вопросы этой теории, отсылая читателя за подробностями к монографиям и журнальным статьям. В последние годы появилось несколько монографий и учебных пособий, посвященных рассматриваемым нами вопросам (см., например, С. К. Годунов, В. С. Рябенкий [1973], Г. И. Марчук [1973], Р. Рихтмайер, К. Мортон [1967], А. А. Самарский [1971], А. А. Самарский, А. В. Гулин [1973] и др.).

Отметим главную особенность, связанную с численным решением задач газовой динамики. Она состоит в том, что большинство рассматриваемых здесь задач нелинейны, а теория разностных методов развита в основном для линейных задач. Поэтому утверждения и построения, строгие лишь для линейных задач, применяются также и для задач газовой динамики. Необходимо иметь в виду, что этот перенос на нелинейные задачи методов, применимых для линейных задач, не всегда обоснован, хотя и необходим.

Теория разностных методов имеет два основных аспекта:

- 1) методы построения разностных схем;
- 2) обоснование выбранной разностной схемы, т. е. исследование сходимости вычислительного алгоритма или, лучше, оценка точности решения поставленной задачи. В практическом плане очень важно исследование экономичности алгоритма по затратам машинного времени для достижения необходимой точности.

Предварительно мы напомним ряд сведений из теории дифференциальных уравнений с частными производными и функционального анализа, необходимых при дальнейшем изложении.

### § 1. Задача Коши в банаховом пространстве для систем линейных дифференциальных уравнений

1. **Линейные операторы в нормированных пространствах.** Конечномерным унитарным пространством  $U_N$  называется комплексное пространство  $X_N$  векторов  $x$ , в котором для каждого

элемента  $x = (x_1, \dots, x_N) \in X_N$  введена норма  $\|x\|$  по правилу

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N x_i \bar{x}_i, \quad (1)$$

где  $x_i$  — компоненты вектора  $x$ , а  $\bar{x}_i$  комплексно сопряжены  $x_i$ .

Пусть  $A$  — линейный оператор в  $U_N$ . Эрмитовой нормой  $\|A\|$  оператора  $A$  называется верхняя грань величины

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

где  $x \neq 0$  — элемент  $U_N$ , а  $\|x\|$ ,  $\|Ax\|$  понимаются в смысле (1).

Линейное функциональное пространство  $X = \{u\}$  называется *нормированным*, если для каждого элемента (функции)  $u \in X$  определено некоторое неотрицательное число  $\|u\|$ , называемое нормой  $u$ , так что выполняются требования:

1)  $\|u\| > 0$  для любого элемента  $u \in X$ , не являющегося нулевым; норма нулевого элемента равна 0;

2)  $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$  (неравенство треугольника);

3)  $\|cu\| = |c| \|u\|$ .

Введение нормы позволяет определить предельный переход в пространстве  $X$ . По определению  $u = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ , если

$$\|u - u_i\| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad u_i \in X, \quad u \in X.$$

Последовательность  $\{u_i\}$  называется *фундаментальной*, если при  $i, j \geq N$

$$\|u_i - u_j\| \leq \varepsilon(N)$$

и  $\varepsilon(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Нормированное пространство  $X$  называется *полным* или *банаховым*, если любая фундаментальная последовательность  $\{u_i\}$  сходится к некоторому элементу  $u \in X$ . В дальнейшем, если не указана конкретная норма, полные нормированные пространства будем обозначать буквой  $B$ .

Пусть  $U \subset B$  есть некоторый класс функций. Образует множество  $\bar{U}$  (замыкание  $U$ ) следующим образом:  $u \in \bar{U}$ , если  $u$  есть предел последовательности  $\{u_i\}$ ,  $u_i \in U$ . Ясно, что  $U \subseteq \bar{U}$ , и  $\bar{U}$  можно определить как *пополнение*  $U$  предельными элементами.

Класс  $U \subset B$  называется *плотным* в  $B$ , если  $\bar{U} = B$ .

Рассмотрим примеры некоторых функциональных пространств. Линейное пространство функций  $u(x)$ , непрерывных на сегменте  $[a, b]$  вместе со всеми производными до порядка  $p$  включительно, становится банаховым пространством, если ввести норму

$$\|u\| = \max_x \{ |u(x)|, |u'(x)|, \dots, |u^{(p)}(x)| \}, \quad x \in [a, b].$$

Это пространство мы будем обозначать  $C_p(a, b)$ . В частности, пространство непрерывных функций  $u(x)$  с нормой  $\|u\| = \max_x |u(x)|$  будем обозначать  $C_0(a, b)$  или просто  $C(a, b)$ .

Пространство функций, суммируемых с квадратом на отрезке  $[a, b]$ , в котором введена норма

$$\|u\|^2 = \int_a^b |u(x)|^2 dx,$$

будем обозначать  $L_2(a, b)$ .

Для нормы в  $L_2$  справедливо соотношение (неравенство Буняковского — Шварца)

$$\|w\|^2 \leq \|u\| \|v\|,$$

где

$$w(x) = |u(x)v(x)|^{1/2}.$$

Совокупность полиномов  $P_n(x) = a_\alpha x^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, n$ ) плотна в  $C(a, b)$  (теорема Вейерштрасса). Совокупность тригонометрических полиномов  $T_n(x) = a_\alpha e^{i\alpha x}$  ( $\alpha = -n, \dots, 0, \dots, n$ ) плотна в пространстве  $C(a, b)$  непрерывных периодических функций при  $b - a \leq 2\pi$ .  $C(a, b)$  плотно в  $L_2(a, b)$ .

Пусть  $A$  — линейный оператор, определенный на некотором плотном классе  $U \subset B$  и переводящий функцию  $u \in U$  в функцию  $v \in B$ .

Нормой  $\|A\|$  оператора  $A$  будем называть величину

$$\|A\| = \sup \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \quad u \in U, \quad \|u\| \neq 0.$$

Оператор  $A$  будем называть *ограниченным*, если  $\|A\| < \infty$ , и *неограниченным* в противном случае. Ограниченный оператор  $A$  обладает свойствами:

а)  $Au = \lim_{i \rightarrow \infty} Au_i$ , если  $u = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ ,  $u, u_i \in U$ ;

б) если  $\{u_i\}$  — фундаментальная последовательность, то  $Au_i$  — также фундаментальная последовательность.

Если  $A$  — ограниченный оператор, то область  $U$  его определения можно расширить на все пространство  $B$  (*расширение оператора  $A$* )\*. Обозначим расширенный оператор через  $\bar{A}$ . По определению,

$$\bar{A}u = \lim_{i \rightarrow \infty} Au_i, \quad u = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i.$$

\* См. по поводу расширения оператора, например, В. И. Смирнов [1959], Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1951], Л. В. Канторович, Г. П. Акилов [1959].

Нетрудно показать, что

$$\bar{A}u = Au, \quad u \in U, \quad \|\bar{A}\| = \|A\|.$$

Пример расширения оператора (нелинейного) приведен в § 8 главы 1. Будем рассматривать пространство  $B$  липшиц-непрерывных функций  $u(x)$  с нормой

$$\|u\| = \sup_{x, x'} \max \left\{ |u(x)|, \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|} \right\}.$$

Дифференцируемые функции  $u \in C_1$  образуют в этом пространстве плотный класс. Оператор  $S$  решения задачи Коши для квазилинейных уравнений мы определили в § 8 главы 1 в пространстве  $C_1$ , при этом решение  $u = Su_0$  ограничено в норме  $B$ . Поэтому оператор  $S$  можно расширить на класс  $B$  липшиц-непрерывных функций. Расширенный оператор  $\bar{S}$  ставит в соответствие каждой  $u_0 \in B$  решение  $u = \bar{S}u_0$ , ограниченное в  $B$  и являющееся обобщенным решением системы уравнений.

Совокупность операторов  $A$ , определенных в  $B$ , образует линейное пространство  $X_A$ . Это пространство становится нормированным, если в качестве нормы оператора  $A$ , рассматриваемого как элемент  $X_A$ , ввести его норму, как норму оператора в  $B$  (*индуцированная норма*).

Тогда можно определить близость ограниченных операторов, и мы будем говорить, что семейство ограниченных операторов  $A(\tau)$ , зависящих от параметра  $\tau$ , сходится к  $A$  в смысле *равномерной топологии*, если

$$\|A(\tau) - A\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Можно говорить о сходимости операторов  $A(\tau)$  к  $A$  в смысле *сильной топологии*, если  $\|[A(\tau) - A]u\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$  для произвольного  $u \in B$ .

Наконец, если семейство операторов  $A(\tau)$  является в совокупности неограниченным, то близость операторов  $A(\tau)$  может оцениваться на некотором функциональном классе  $U \subset B$ . В этом случае, если  $\|[A(\tau) - A]u\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$  для произвольного  $u \in U$ , то мы будем говорить, что семейство  $A(\tau)$  *аппроксимирует* оператор  $A$  в классе  $U$ , и обозначать это так:  $A(\tau) \sim A$ .

В дальнейшем мы будем кратко говорить, что оператор  $A(\tau)$ , зависящий от параметра  $\tau$ , аппроксимирует оператор  $A$ .

Рассмотрим теперь некоторые пространства, связанные с разностными схемами.

Коротко говоря, разностные методы интегрирования систем дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений математической физики заключаются в переходе от производных к разностным отношениям и от интегралов к суммам.

В практическом плане это означает переход от бесконечномерного пространства функций непрерывного аргумента к конечномерному пространству сеточных функций и сведение уравнений для функций непрерывного аргумента к алгебраическим соотношениям. Такое рассмотрение, удобное на практике, вызывает трудности при доказательстве сходимости, так как сеточная функция и аппроксимируемая ею функция непрерывного аргумента определены в разных пространствах с разными нормами. Кроме того, норма сеточной функции зависит от параметров сетки и меняется вместе с ними.

Поэтому в теоретическом исследовании более удобно рассматривать разностные операторы в том же функциональном пространстве, что и аппроксимируемые ими операторы. При этом способе рассмотрения мы считаем, что разностные уравнения удовлетворяются функциями непрерывного аргумента в каждой точке рассматриваемой области. Как мы увидим, такое рассмотрение не всегда возможно.

Проиллюстрируем на простом примере оба способа рассмотрения. Поставим для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}, \quad (2)$$

смешанную задачу Коши:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l; \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (4)$$

Введем сетку в плоскости  $x, t$ , положив

$$\left. \begin{aligned} x_i &= ih \quad (i=0, 1, \dots, N+1), \quad N+1 = \frac{l}{h}, \\ t_m &= m\tau \quad (m=0, 1, \dots, M), \quad M = \frac{t_0}{\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Определим сеточную функцию  $u_i^m$  в точках сетки (5), обозначив через  $u_i^m$  значение функции в точке  $x_i = ih, t_m = m\tau$ . Заменяем соотношения (2) — (4) алгебраическими соотношениями

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{h^2},$$

$$u_i^0 = u_0(ih), \quad u_0^m = 0, \quad u_{N+1}^m = 0.$$

При фиксированном  $m$  величины  $u_i^m$  ( $i=1, \dots, N$ ) будем считать компонентами  $N$ -мерного вектора  $u^m$ , для которого можно определить ту или иную норму, например:

$$\|u^m\| = \max_i |u_i^m| \quad (i=1, \dots, N)$$

ИЛИ

$$\|u^m\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^N (u_i^m)^2}.$$

Обычно сеточную функцию  $u_i^m$  распространяют каким-либо образом, например с помощью интерполяции, на всю рассматриваемую область

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Доказательство сходимости  $u_i^m$  к  $u(x, t)$  можно получить, доказав сходимость полученной интерполяцией функции  $\tilde{u}(x, t)$  к  $u(x, t)$ , либо доказав, что  $\{u_i^m\} \rightarrow \{u(ih, m\tau)\}$  при всех

$$0 \leq i \leq \frac{l}{h}, \quad 0 \leq m \leq \frac{t_0}{\tau} \quad \text{и } \tau, h \rightarrow 0.$$

Легко видеть, что решение смешанной задачи (2)–(4) сводится к решению задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (6)$$

поставленным на всей прямой  $t = 0$ , если функция  $u_0(x)$  периодична с периодом  $2l$  и нечетна на отрезке  $[-l, l]$ . Действительно, в этом случае начальная функция  $u_0(x)$  и решение  $u(x, t)$  задачи (2), (6) представляются рядами:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad a_k(0) = a_k,$$

и, следовательно, начальные данные (3) и краевые условия (4) выполняются.

При этом решение  $u(x, t)$  задачи (2), (6) будет периодической функцией переменного  $x$  с периодом  $2l$ , которая в полосе  $0 \leq x \leq l$  совпадает с решением смешанной задачи (2)–(4).

Задачу Коши (2), (6) с периодической функцией  $u_0(x)$  заменим следующей разностной задачей:

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \tau) - \tilde{u}(x, t)}{\tau} = a^2 \frac{\tilde{u}(x + h, t) - 2\tilde{u}(x, t) + \tilde{u}(x - h, t)}{h^2}, \quad (7)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (8)$$

для функции  $\tilde{u}(x, t)$ .

При этом рассмотрении краевые условия исчезли, и начальное условие (8) в сочетании с разностным уравнением (7) позволяет определить функцию  $\tilde{u}(x, t)$  на прямых  $t = k\tau$  ( $k=1, 2, \dots$ ).

Таким образом, при фиксированном  $t = k\tau$  функции  $u(x, t)$  и  $\tilde{u}(x, t)$  определены на всей прямой  $-\infty < x < \infty$ . Доказательство сходимости  $\tilde{u}(x, t)$  к  $u(x, t)$  сводится к доказательству

сходимости функций одного переменного на прямых  $t = \text{const}$ . Ясно, что такое рассмотрение возможно не при любых краевых условиях (4).

В тех случаях, когда следует рассмотреть вопросы, связанные с краевыми условиями, мы будем переходить к сеточным функциям. В последующих пунктах мы дадим сравнительный анализ задач Коши для разностных и дифференциальных уравнений.

В заключение этого пункта условимся о следующих обозначениях. Если функция  $u(x, t)$  при произвольно фиксированном  $t$  принадлежит, как функция от  $x$ , банахову пространству  $B$ , то мы можем рассматривать ее как однопараметрическое семейство элементов этого пространства и обозначать  $u(t) \in B$ . В частности,  $u(t) \in C_q(a, b)$  означает, что  $u(x, t)$  при фиксированном  $t$  имеет на отрезке  $[a, b]$   $q$  непрерывных производных по  $x$ ;  $u(t) \in L_2(-l, l)$  означает, что

$$\int_{-l}^l u^2(x, t) dx < \infty.$$

Иногда для краткости мы будем опускать область определения функций и писать просто  $C_q, L_2$  и т. д.

**2. Корректность задачи Коши в банаховом пространстве для систем линейных дифференциальных уравнений.** Теория обобщенных решений дифференциальных уравнений начала развиваться сравнительно недавно, с 40-х годов настоящего столетия. Отсылая читателя, желающего ознакомиться с этим вопросом более глубоко, к монографиям С. Л. Соболева [1950], Л. Шварца [1950], И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1958], Л. Хермандера [1963], мы изложим вкратце более специальную теорию, не требующую понятия обобщенной функции и производной\*). В полосе  $G: |x| < \infty, 0 \leq t \leq \bar{t}$  рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u, \quad (1)$$

где  $u = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$  — вектор-функция от  $x, t$ ;  $L(D)$  — дифференциально-матричный оператор, коэффициенты которого зависят от  $x, t$ :

$$L(D) = A_\alpha(x, t) D^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2)$$

$$A_\alpha(x, t) = \|a_{ij}^\alpha(x, t)\| \quad (i, j = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, p). \quad (3)$$

Решением системы (1) называется функция  $u(x, t)$ , имеющая непрерывные производные, встречающиеся в (1), и удовлетворяющая уравнениям (1). От решения  $u(x, t)$  требуется, таким

\*) См. Э. Хилле [1957], Р. Рихтмайер, К. Мортон [1967].

образом, дифференцируемость по  $t$  и наличие непрерывной производной  $\frac{\partial^p u(x, t)}{\partial x^p}$  при любом  $t$ , т. е.  $u(t) \in C_p$ . Для системы (1) могут быть поставлены начальные условия

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad 0 \leq t_0 \leq \bar{t}. \quad (4)$$

Мы будем предполагать периодичность коэффициентов системы (1) и начальной функции  $u_0(x)$  по  $x$  с периодом  $2l$ . Относительно системы (1) предположим, далее, что для произвольного  $t_0 \in [0, \bar{t}]$  и произвольной функции  $u_0(x) \in C_q$  ( $q \geq p$ ) существует единственное решение  $u(x, t)$ , определенное в полосе  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ .

Очевидно, это решение  $u(x, t)$  будет периодической функцией переменного  $x$  с тем же периодом  $2l$ . Таким образом, рассмотрение периодической по  $x$  задачи (1), (4) позволяет нам не рассматривать на первой стадии изучения этой задачи сложные вопросы о корректной постановке краевых условий. Точнее говоря, мы рассматриваем вполне определенные краевые условия, именно, условия периодичности

$$u(x + 2l, t) \equiv u(x, t),$$

для которых корректность постановки задачи (1), (4) изучается сравнительно просто, в частности, с помощью метода Фурье.

Аналогичный подход мы применим и при изучении разностного аналога задачи (1), (4) в § 2. Поставив условие периодичности по переменному  $x$ , мы опять отложим рассмотрение вопроса о краевых условиях других типов, который для разностной краевой задачи также весьма сложен.

Соответствие  $u(t_0) \rightarrow u(t)$  ( $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ ), которое можно записать в виде

$$u(t) = S(t, t_0) u_0(x) = S(t, t_0) u(t_0), \quad (5)$$

определяет оператор перехода  $S(t, t_0)$ . Если при любой  $u_0(x) \in C_q$   $u(t) \in C_q$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , то будем говорить о системе (1), что она обладает свойством продолжаемости в  $C_q$ . В этом случае семейство операторов  $S(t, t_0)$  обладает свойством композиции в  $C_q$ , т. е.

$$S(t_2, t_0) = S(t_2, t_1) S(t_1, t_0), \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \bar{t}, \quad (6)$$

и также свойством непрерывности

$$\| [S(t + \tau, t) - E] u(t) \|_B \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0. \quad (6a)$$

Равенство (6) означает, что многократное применение оператора перехода не выводит функцию  $u(t)$  из пространства  $C_q$ . Если при этом

$$\| S(t_2, t_1) \|_{C_q} \leq M(\bar{t}), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \bar{t}, \quad (7)$$

то будем называть задачу Коши (1), (4) *корректной* в  $C_q$ . Если

$$\|S(t + \tau, t)\|_{C_q} \leq 1 + C(\bar{t})\tau, \quad 0 \leq t < t + \tau \leq \bar{t}, \quad (8)$$

то задачу (1), (4) будем называть *равномерно корректной* в  $C_q$ . Мы будем называть также оператор  $S(t_2, t_1)$  *оператором решения* задачи Коши, оператор  $S(t + \tau, t)$  — *оператором шага*.

Если начальные данные не принадлежат  $C_q$  или система (1) не обладает свойством продолжаемости в  $C_q$ , возникает необходимость в определении *обобщенного решения*, т. е. решения, принадлежащего более широкому пространству, нежели пространство  $C_q$ .

Мы будем предполагать, что существует банахово пространство  $B$ , содержащее  $C_q$  как плотный класс и такое, что оператор  $S(t_2, t_1)$  ограничен в норме  $B$  на классе  $u(t) \in C_q$ . Тогда оператор  $S(t_2, t_1)$  может быть расширен в  $B$  с сохранением нормы. Равенство (5), где под  $S(t, t_0)$  понимается расширенный оператор, а под  $u(t_0)$ ,  $u(t)$  — функции из  $B$ , определяет *обобщенное решение*  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (4), *корректной* в  $B$  при выполнении (7) и *равномерно корректной* в  $B$  при выполнении (8). При этом, естественно, норма пространства  $C_q$  в (7) и (8) заменяется на норму пространства  $B$ .

Если задача Коши допускает введение нормы, в которой оператор перехода  $S(t_2, t_1)$  удовлетворяет свойствам (6), (6а), (7) или (8), будем говорить, что совокупность операторов перехода  $S(t_2, t_1)$  образует непрерывную полугруппу.

Свойство полугруппы очень важно. Действительно, практически решение  $u(t)$  на момент времени  $t$  получают, исходя из начальных данных  $u(t_0)$  не сразу, а по этапам, с помощью переходов  $u(t_0) \rightarrow u(t_1) \rightarrow \dots \rightarrow u(t_m) = u(t)$ . В этом случае должна существовать уверенность в том, что эта последовательность переходов эквивалентна одному переходу  $u(t_0) \rightarrow u(t)$ , независимо от выбора промежуточных моментов.

В особенности свойство полугруппы важно для разностных решений задачи Коши, которые получают пошаговым продвижением во времени, с неизбежным внесением ошибок округления на каждом шаге. Свойство полугруппы означает возможность рекуррентного метода получения решения. Основная тенденция современных численных алгоритмов заключается в сведении произвольного алгоритма к совокупности рекуррентных.

Поясним примерами введенные нами понятия.

Определим оператор сдвига  $T(h)$  посредством равенства

$$T(h)u(x) = u(x + h). \quad (9)$$

Легко видеть, что в пространствах  $C_q$ ,  $L_p$  периодических функций

$$\|T(h)\| = 1. \quad (10)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad (11)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (12)$$

Если  $u_0 \in C_1$ , то задача Коши (11), (12) имеет решение. Оператор перехода представляется в виде

$$S(t_2, t_1) = T[-a(t_2 - t_1)]. \quad (13)$$

Пусть  $u_0 \in L_2$ ,  $u_0 \in C_1$ . Тогда решение задачи (11), (12) не существует в  $C_1$ , но равенство

$$u(t) = T(-at)u_0 \quad (14)$$

имеет смысл и определяет обобщенное решение задачи Коши (11), (12) в  $L_2$ . Аналогичный подход возможен и для уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \quad (16)$$

Если  $u_0 \in C_1$ ,  $v_0 \in C_1$ , то  $u(t) \in C_1$ ,  $v(t) \in C_1$  и уравнения (15) эквивалентны системе в инвариантах

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

где  $r = u - av$ ,  $s = u + av$  — инварианты Римана. Если же  $u_0 \in L_2$ ,  $v_0 \in L_2$ , то  $r_0 \in L_2$ ,  $s_0 \in L_2$  и равенства

$$r(t) = T(-at)r_0, \quad s(t) = T(at)s_0 \quad (18)$$

определяют в пространстве  $L_2$  обобщенное решение. При этом в норме  $L_2$  имеем

$$\|r(t)\| = \|r_0\|, \quad \|s(t)\| = \|s_0\|, \quad (19)$$

если начальные функции  $r_0, s_0$  ( $u_0, v_0$ ) периодичны с периодом  $2l$ . Если определить норму векторной функции  $f = \{u, v\}$  с помощью равенства

$$\|f\|^2 = \int_{-l}^l (u^2 + a^2 v^2) dx, \quad (20)$$

то из равенств (18), (19) следует

$$\begin{aligned} \|f(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l [r^2(x, t) + s^2(x, t)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l [r^2(x, 0) + s^2(x, 0)] dx = \|f(0)\|^2, \end{aligned} \quad (21)$$

т. е. обобщенное решение продолжаемо в норме (20). Из равенств (18) следует, что задача Коши (15), (16) равномерно корректна при  $0 < t < \infty$  в классе  $C_1$ , из равенства (21) — что она равномерно корректна также и в классе  $L_2$ .

Не всегда возможно ввести (или по крайней мере найти) норму, в которой операторы перехода задачи Коши образуют полугруппу. В этом случае следует ввести более широкое понятие корректности и соответственно определить обобщенное решение.

Пусть оператор  $S(t_2, t_1)$  обладает тем свойством, что для  $u(t_1) \in B_1$  справедливо соотношение

$$u(t_2) = S(t_2, t_1) u(t_1), \quad u(t_2) \in B_2$$

и

$$\|S(t_2, t_1)\| = \sup \frac{\|u(t_2)\|_{B_2}}{\|u(t_1)\|_{B_1}} = C(t_2, t_1) \leq C(\bar{t}) < \infty.$$

Тогда мы будем говорить, что задача Коши корректна по И. Г. Петровскому. Более подробно это понятие будет рассмотрено в следующем пункте.

**3. Метод Фурье.** Для системы (1.2.1) с коэффициентами  $A_\alpha(t)$ , зависящими только от времени, с помощью метода Фурье можно эффективно построить оператор решения\*). Пусть  $u_0 \in C_q$  есть периодическая вектор-функция с периодом  $2\pi$ . Вектор-функция  $u_0(x)$  представляется рядом Фурье

$$u_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_0(k) e^{ikx}, \quad (1)$$

где

$$C_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) e^{-ikx} dx, \quad (2)$$

который при  $q \geq 1$  сходится к  $u_0(x)$  абсолютно и равномерно. Предполагая  $q$  достаточно большим, будем искать решение задачи (1.2.1), (1.2.4) в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k, t) e^{ikx}, \quad (3)$$

т. е. как суперпозицию функций

$$v(x, t) = C(k, t) e^{ikx}. \quad (4)$$

Такие функции мы будем называть *гармониками*.

\*) По поводу теории рядов Фурье см. монографии Н. К. Бари [1961], А. Зигмунда [1965], Г. Харди, В. Рогозинского [1959].

Установим условие, при котором гармоника является решением (1.2.1). Подставляя (4) в (1.2.1), находим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - L(D) \right] v = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} - L(ik, t) C \right] e^{ikx}, \quad (5)$$

где  $L(ik, t)$  есть матрица

$$L(ik, t) = A_\alpha(t) (ik)^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (6)$$

Из (5) следует, что гармоника (4) является решением (1.2.1), если вектор  $C(k, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial C(k, t)}{\partial t} - L(ik, t) C(k, t) = 0. \quad (7)$$

Следовательно, для того чтобы ряд (3) представлял решение задачи Коши (1.2.1), (1.2.4), необходимо, чтобы  $C(k, t)$  удовлетворяли при  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  уравнению (7) и начальным условиям

$$C(k, t_0) = C_0(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8)$$

так как при  $t = t_0$  ряд (3) должен переходить в (1). Если ряд (3) принадлежит  $C_r$ ,  $r \geq p$ , то он представляет собой решение задачи Коши (1.2.1), (1.2.4).

Оценим гладкость решения (3) в зависимости от гладкости начальных данных.

Как известно, не существует необходимых и достаточных критериев принадлежности ряда Фурье (3) пространству  $C_q$ , что затрудняет анализ продолжаемости решения в классе  $C_q$ . Поэтому удобнее пользоваться понятием обобщенной производной, которое мы рассмотрим в частном случае рядов Фурье от одного переменного  $x$ . Если

$$u = u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikx}, \quad \lambda_{-k} = \lambda_k^* \quad (9)$$

и выполняются условия

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 k^{2q} < \infty, \quad (10)$$

то, как известно,

$$u \in W_{\frac{1}{2}}^q(-\pi, \pi),$$

и мы будем говорить, что ряд  $u(x)$  имеет обобщенную производную порядка  $q$

$$u^{(q)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k (ik)^q e^{ikx},$$

которая получается формальным дифференцированием ряда (9).  
При этом

$$u^{(q)} \in W_2^0(-\pi, \pi).$$

Для функции  $u \in W_2^q$  можно определить норму следующим образом:

$$\begin{aligned} \|u\|_q^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [u^2 + (u^{(1)})^2 + \dots + (u^{(q)})^2] dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 [1 + k^2 + \dots + k^{2q}] \leq \text{const} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 (1 + |k|^q)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $S(k, t_2, t_1)$  есть оператор перехода системы (7), соответствующий произвольно фиксированному  $k$ . Оператор  $S(k, t_2, t_1)$  будем называть *спектральным образом* или *фурье-образом* оператора  $S(t_2, t_1)$ . По определению  $S(k, t_2, t_1)$ , имеем

$$C(k, t_2) = S(k, t_2, t_1) C(k, t_1). \quad (11)$$

Будем предполагать, что в интервале  $[0, \bar{t}]$  система (7) обыкновенных дифференциальных уравнений является равномерно устойчивой по  $k$ , т. е.

$$\sup_k \|S(k, t_2, t_1)\| = N(t_2, t_1) < \infty, \quad (12)$$

где  $\|S(k, t_2, t_1)\|$  есть эрмитова норма оператора  $S(k, t_2, t_1)$  в пространстве  $U_n$  компонент  $C(k, t)$ . Если  $u(t_0) \in W_2^q$ , то в силу (11), (12) справедлива оценка

$$|C(k, t)| \leq N |C(k, 0)|,$$

из которой следует, что  $u(t) \in W_2^q$ . Следовательно, существует обобщенное решение задачи (1.2.1), (1.2.4) в  $W_2^q$  для любого  $q$ . В частности, при  $q=0$   $W_2^0 = L_2$  и

$$\|u(t)\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C(k, t)|^2.$$

Отсюда, принимая во внимание (11), имеем

$$\|S(t_2, t_1)\|_{L_2} = \sup_k \|S(k, t_2, t_1)\|_{U_n} = N(t_2, t_1) < \infty. \quad (13)$$

Следовательно, в  $L_2$  существует обобщенное решение. Условие (13), таким образом, представляет собой условие корректности

задачи Коши (1.2.1), (1.2.4) в  $L_2(-\pi, \pi)$ . Дадим явное выражение для оператора перехода  $S(t_2, t_1)$  через  $S(k, t_2, t_1)$ . Из равенств (3), (2) имеем

$$\begin{aligned} u(x, t_2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k, t_2, t_1) C(k, t_1) e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k, t_2, t_1) \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(s, t_1) e^{-iks} ds \right) e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t_2, t_1, x-s) u(s, t_1) ds, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$K(t_2, t_1, x-s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k, t_2, t_1) e^{ik(x-s)}. \quad (15)$$

При изменении порядка интегрирования и суммирования мы пользовались теоремой о возможности почленного интегрирования ряда Фурье.

Таким образом, в рассматриваемом случае оператор перехода  $S(t_2, t_1)$  есть интегральный оператор типа свертки. Рассмотрим частный случай, когда уравнение (1.2.1) есть уравнение с постоянными коэффициентами. Тогда матрица  $L(ik, t) = L(ik)$  не зависит от  $t$ , и решение задачи (7), (8) имеет вид

$$C(k, t) = e^{L(ik)(t-t_0)} C_0(k). \quad (16)$$

Здесь  $e^{L(ik)t}$  есть матрица (экспоненциал), которая представляется рядом

$$e^{L(ik)t} = E + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L^m(ik) t^m}{m!}.$$

Из (16) следует

$$\begin{aligned} S(k, t_2, t_1) &= e^{L(ik)(t_2-t_1)}, \\ S(k, t_2, t_1) &= S(k, t_2-t_1, 0). \end{aligned}$$

Для оператора перехода  $S(t_2, t_1)$  получаем оценку

$$\|S(t_2, t_1)\| = \sup_k \|e^{L(ik)(t_2-t_1)}\|_{U_n} \leq \sup_k e^{\|L(ik)(t_2-t_1)\|_{U_n}}.$$

Таким образом, задача Коши с постоянными коэффициентами корректна в  $L_2$ , если

$$\sup_k \|e^{L(ik)(t_2-t_1)}\|_{U_n} \leq N(\bar{t}), \quad t_1 \leq t_2 \leq \bar{t}. \quad (17)$$

Условие (17) мы можем истолковать следующим образом.

Рассмотрим решение системы (1.2.1) вида

$$u(x, t) = u_0 e^{\omega t + ikx}, \quad (18)$$

где  $u_0$  — постоянный вектор. Если (18) — решение (1.2.1), то

$$\text{Det} \|\omega E - L(ik)\| = 0. \quad (19)$$

Ясно, что для корректности задачи Коши для системы (1.2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Re } \omega \leq \mu, \quad (20)$$

где  $\mu$  — константа, не зависящая от  $k$ .

Условие (20) означает, что любое гармоническое решение растёт по амплитуде не сильнее, чем  $e^{\mu t}$ .

Определим теперь корректность по И. Г. Петровскому, ограничившись частным случаем, когда пространства  $B$  суть пространства  $W_2^q$ .

Пусть вместо (12) имеет место более слабая оценка

$$\sup_k \|S(k, t_2, t_1)\| \leq N(T) (1 + |k|^q) \quad (21)$$

и  $q$  — наименьший целый показатель, обладающий этим свойством. Тогда справедлива оценка

$$|C(k, t_2)| \leq N(T) (1 + |k|^q) |C(k, t_1)|. \quad (22)$$

Пусть

$$u(t_1) \in W_2^q. \quad (23)$$

Тогда из оценки (22) следует

$$\|u(t_2)\|_{L_2} \leq N(T) < \infty, \quad u(t_2) \in W_2^0. \quad (24)$$

Наоборот, из (23), (24) следуют (21), (22). Таким образом, (21) есть необходимое и достаточное условие того, что система (1.2.1) корректна по Петровскому с отображением  $B_1 \rightarrow B_2$ , где

$$B_1 = W_2^q, \quad B_2 = W_2^0.$$

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu \geq 0, \quad (25)$$

с постоянной матрицей  $A$ . Если система (25) при  $\mu = 0$  является гиперболической, то линейным преобразованием в пространстве компонент  $u_1, \dots, u_n$  ее можно привести к каноническому виду

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial r_j}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 r_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Преобразование Фурье системы (26) приводит к системе уравнений для коэффициентов Фурье  $C_j(k, t)$  функций  $r_j(x, t)$ :

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} + (i\xi_j k + \mu k^2) C_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (27)$$

Отсюда

$$C_j(k, t) = e^{-(\mu k^2 + i\xi_j k)t} C_j(k, 0), \quad (28)$$

$$S(k, t_2, t_1) = \| e^{-(\mu k^2 + i\xi_j k)(t_2 - t_1)} \delta_{jl} \| \quad (j, l = 1, \dots, n), \quad (29)$$

$$\| S(t_2, t_1) \|_{L_k} = \sup_k \| S(k, t_2, t_1) \| = \sup_k | e^{-(\mu k^2 + i\xi_j k)(t_2 - t_1)} | = 1. \quad (30)$$

Система (25) корректна в  $L_2$  при  $\mu \geq 0$ .

Метод Фурье является эффективным методом оценки норм операторов и анализа свойств решений в  $L_2$ . Он прямо переносится в теорию разностных уравнений с коэффициентами, зависящими от  $t$ .

Для уравнений с коэффициентами, зависящими от  $x, t$ , исследование корректности сильно усложняется.

На примере уравнений акустики с переменной скоростью звука

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1 < \infty, \quad (31)$$

мы покажем применение другого метода изучения корректности — метода энергетических неравенств, или метода интеграла энергии. Умножая первое уравнение (31) на  $2u$ , второе на  $2a^2v$  и складывая, получаем

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial (a^2 v^2)}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 uv) + \frac{\partial a^2}{\partial t} v^2 - 2 \frac{\partial a^2}{\partial x} uv. \quad (32)$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^2 + a^2 v^2) \leq 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 uv) + b(u^2 + a^2 v^2), \quad (33)$$

где

$$b = \max \left| \frac{\partial \ln a^2}{\partial t} \right| + \max \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a^2}{\partial x} \right|. \quad (34)$$

Пусть функции  $a(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  периодичны по  $x$  с периодом  $2\pi$ . Тогда, интегрируя (33) по  $x$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \| f \|^2 \leq b \| f \|^2, \quad (35)$$

где

$$f(t) = \{u(t), v(t)\}, \quad \| f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (u^2 + a^2 v^2) dx. \quad (36)$$

Из (35) следует

$$\|f(t)\|^2 \leq e^{bt} \|f(0)\|^2. \quad (37)$$

Итак, задача Коши для уравнений (31) корректна в  $L_2$ .

Зависимость нормы (36) от  $t$  несущественна: решение  $f(t) = \{u(t), v(t)\}$  системы (31) с переменным коэффициентом  $a(x, t)$  корректно в норме (36) с постоянным  $a$ ,  $a_0 \leq a \leq a_1$ .

В заключение этого пункта мы остановимся на *локальном анализе* корректности уравнений с переменными коэффициентами, который называется также методом «замораживания» коэффициентов. Ассоциируем с каждой точкой  $P = (\bar{x}, \bar{t})$  систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(P, D)u, \quad L(P, D) = A_\alpha(\bar{x}, \bar{t})D^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p), \quad (38)$$

где  $\bar{x}, \bar{t}$  рассматриваются как параметры.

Гармоническое решение (18) системы (38), соответствующей некоторой точке  $P = (\bar{x}, \bar{t})$ , при достаточно большом  $k$  является сильно осциллирующей функцией переменного  $x$ . В достаточно малой области  $G_\varepsilon: \bar{x} - \varepsilon \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon, \bar{t} - \varepsilon \leq t \leq \bar{t} + \varepsilon$  коэффициенты  $A_i(x, t)$  системы (1.2.1), которые мы полагаем непрерывными и гладкими, можно приближенно считать постоянными, в то время как гармоническое решение (18) меняется достаточно сильно. Ясно, что гармоника (18), являясь решением системы (38) с постоянными коэффициентами, является в то же время с большой точностью приближенным решением системы (1.2.1) в области  $G_\varepsilon$ . Поэтому поведение (18) в области  $G_\varepsilon$  дает представление о свойствах корректности системы (1.2.1).

Существует гипотеза, справедливая для многих уравнений, о том, что необходимым и достаточным условием корректности системы (1.2.1) в  $L_2$  является корректность локальной системы (38) в  $L_2$  для любой точки  $P = (\bar{x}, \bar{t})$  (гипотеза *локальной корректности*).

Указанное рассмотрение становится тем точнее, чем больше  $k$  (высокочастотные гармоники); поэтому данный признак корректности мы будем называть также признаком *асимптотической корректности*.

Локальный анализ исследования корректности задачи Коши применяется также и для систем нелинейных дифференциальных уравнений. Однако для нелинейных уравнений гипотезы, о которых мы говорили выше, еще более проблематичны.

Ввиду неприменимости в этом случае принципа суперпозиции, да и вообще ввиду отсутствия достаточно широкого класса частных решений, из которых можно строить более общие решения, исследование корректности различных задач для систем нелинейных уравнений существенно осложняется. По существу

установление корректности задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений сводится к доказательствам основных теорем: единственности и существования решения и его непрерывной зависимости от входных данных задачи, в частности от начальных значений. В главе 1 мы изучали задачу Коши для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа и установили, что корректность этой задачи в классе  $C_1$  имеет место только в узкой полосе  $0 \leq t \leq t^*$ , а величина  $t^*$  зависит от  $\|u'_0(x)\|$  и  $t^* \rightarrow 0$ , если  $\|u'_0(x)\| \rightarrow \infty$ . Мы имеем, таким образом, некорректность задачи Коши для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа в классе  $C_1$  в целом, т. е. при любых  $t > 0$ .

Некорректность задачи в классе  $C_1$  связана с тем, что она не обладает свойством продолжаемости в  $C_1$ : при  $t \geq t^*$  решение  $u(x, t) \notin C_1$ .

Классом корректности задачи Коши для некоторых видов систем квазилинейных уравнений оказывается более широкий класс — обобщенных решений этих систем. Подробно постановка и изучение задачи Коши в этом классе обсуждается в главе 4.

Таким образом, исследование корректности на базе принципа «замораживания» коэффициентов и гипотезы «локальной корректности» может привести и часто приводит к неверным выводам в случае нелинейных дифференциальных уравнений. Например, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

«замораживание» коэффициентов и изучение локальной устойчивости приводит к неверному выводу о корректности задачи Коши для этого уравнения в  $C_q$  ( $q \geq 1$ ).

Тем не менее на практике широко применяется метод исследования устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений относительно малых возмущений. Поясним это на примере системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (39)$$

Пусть  $u(x, t)$  — решение системы (39),  $\bar{u}(x, t)$  — другое решение, мало отличающееся от  $u(x, t)$  в момент времени  $t_0$ . Их разность  $v = \bar{u} - u$  удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u) \frac{\partial v}{\partial x} + [A(\bar{u}) - A(u)] \frac{\partial u}{\partial x} + [A(\bar{u}) - A(u)] \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (40)$$

которую представим в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u) \frac{\partial v}{\partial x} + \left( B(u, \bar{u}) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v + (B(u, \bar{u}) v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (41)$$

Здесь  $B(u, \bar{u})$  — трехиндексная матрица, удовлетворяющая условию

$$A(\bar{u}) - A(u) = B(u, \bar{u})(\bar{u} - u),$$

или в индексах

$$a_{ij}(\bar{u}) - a_{ij}(u) = b_{ij}^{\alpha}(\bar{u}_{\alpha} - u_{\alpha}), \quad i, j = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, n.$$

Известно, что если матрица  $A(u)$  непрерывно дифференцируема, то

$$B(u, \bar{u}) \rightarrow \dot{A}(u) = \left( \left( \frac{\partial a_{ij}(u)}{\partial u_{\alpha}} \right) \right) = \left( (b_{ij}^{\alpha}(u, u)) \right)$$

при  $|\bar{u} - u| \rightarrow 0$ . Таким образом, при малых  $\|v\|$  имеем для разности  $v = \bar{u} - u$  систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u) \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \dot{A}(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v + \left( \dot{A}(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) v = 0, \quad (42)$$

если пренебрегать членами порядка  $v^2$ .

Рассматривая малые возмущения такие, что  $\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| \ll \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|$ , и отбрасывая в (42) нелинейные члены, получаем для  $v$  линейную систему уравнений в вариациях:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u) \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \dot{A}(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v = 0. \quad (43)$$

При достаточно малых  $v(x, t_0)$ ,  $v'_x(x, t_0)$  система (43) приближенно описывает в некоторой полосе  $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$  развитие возмущений с течением времени. На основании изучения линейной системы (43) мы можем составить представление об устойчивости решения  $u(x, t)$  исходной нелинейной системы (39). Отметим еще раз, что система (43) плохо или совсем неверно описывает развитие быстро осциллирующих малых возмущений, так как мы отбросили в (42) члены порядка  $|v| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|$ . Поэтому, если, например,

$$v(x, t_0) = \varepsilon v_0 \sin kx,$$

то даже при  $\varepsilon v_0 \ll |u|$  система уравнений (43) применима лишь при  $|k| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot 1/\varepsilon v_0$ . Если  $|k\varepsilon v_0| \sim 1$ , то мы снова имеем дело с нелинейной системой (42) и почти нет выигрыша от замены системы (39) для  $u(x, t)$  приближенной системой (42) для  $v(x, t)$ .

Несмотря на все эти несовершенства метода линеаризации нелинейных уравнений, он фактически является почти единственным алгоритмическим методом, позволяющим составить представление о свойствах корректности нелинейных задач, об устойчивости их решений. По этой причине он широко применяется в

нелинейных задачах, например при изучении возникновения турбулентности в течениях вязкой жидкости.

Есть еще одна область, где изучение устойчивости методом линеаризации вполне оправдано и необходимо. При решении нелинейных задач на ЭВМ разностными методами за счет ошибок округления постоянно вносятся весьма малые возмущения, частота пульсаций которых обычно удовлетворяет требованию  $|k\tau v_0| \ll 1$ . Поэтому развитие этих возмущений можно описывать линейными системами типа (43) (или их разностными аналогами). Если система (43) указывает на невозрастание или слабый рост возмущений, то это может свидетельствовать об устойчивости применяемого метода расчета задачи.

## § 2. Основные понятия теории разностных схем

1. Разностная задача Коши. Рассмотренной в § 1 задаче Коши (1.2.1), (1.2.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad (2)$$

где  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $D = \frac{\partial}{\partial x}$ ,

$$L(D) = A_\alpha D^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

$$A_\alpha = \|a_{ij}^\alpha(x, t)\| \quad (i, j = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, p),$$

поставим в соответствие разностную задачу Коши:

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau_{m+1}} = \Lambda_1 u^{m+1}(x) + \Lambda_0 u^m(x), \quad (3)$$

$$u^0(x) = u_0(x). \quad (4)$$

Здесь  $\Lambda_1, \Lambda_0$  — определенные в  $B$  операторы, зависящие от  $t_m = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m$ ,  $\tau_{m+1} > 0$ , а также и от других параметров. Система уравнений (3), связывающая функции  $u^{m+1}$ ,  $u^m$  на двух слоях по времени  $t = t_{m+1}$  и  $t = t_m$ , называется обычно *двухслойной разностной схемой*. Так же, как и в § 1, будем предполагать, что оператор  $L(D)$  и вектор-функция  $u_0(x)$  периодичны по переменному  $x$  с периодом  $2l$ . От операторов  $\Lambda_1, \Lambda_0$  потребуем периодической с периодом  $2l$  зависимости от переменного  $x$ ; тогда мы можем рассматривать периодические решения задачи (3), (4), для которых

$$u^m(x + 2l) = u^m(x), \quad m = 0, 1, \dots$$

Будем предполагать, что уравнение (3) однозначно разрешимо в  $B$  относительно  $u^{m+1}(x)$ , т. е. что оператор

$$B_m = E - \tau_{m+1} \Lambda_1$$

обратим в  $B$  при всех рассматриваемых значениях параметров. Тогда система уравнений (3) записывается в виде

$$u^{m+1} = C_{m+1}u^m, \quad C_{m+1} = B_m^{-1}(E + \tau_{m+1}\Lambda_0). \quad (5)$$

Из формул (5) следует

$$u^m = C_{m,k}u^k, \quad (6)$$

где  $C_{m,k} = C_m C_{m-1} \dots C_{k+1}$ .

Оператор  $C_{m,k}$  будем называть *оператором перехода*, оператор  $C_m = C_{m,m-1}$  — *оператором шага*, оператор  $C_{m,0}$  — *оператором решения задачи* (3), (4).

Определение. Задача (3), (4) *корректна* в  $B$ , если существует число  $M(\bar{t}) > 0$  такое, что

$$\|C_{m,k}\|_B \leq M(\bar{t}) \quad (7)$$

для всех  $0 \leq k \leq m-1$ ,  $t_m \leq \bar{t}$  и любых достаточно малых  $\{\tau_k\}$ ; *равномерно корректна* в  $B$ , если существует  $N > 0$  такое, что

$$\|C_m\|_B = \|C_{m,m-1}\|_B \leq 1 + N\tau_m \quad (8)$$

для всех  $m$  и достаточно малых  $\tau_m$ .

Если задача Коши (3), (4) является корректной, разностную схему (3) будем называть *устойчивой*.

Определение. Задача (3), (4) *аппроксимирует* задачу (1), (2) в пространстве  $B$ , если

$$\|(S_m - C_m)u(t_{m-1})\|_B = \tau_m \varepsilon_m(\tau_m), \quad (9)$$

где  $S_m = S(t_m, t_{m-1})$  — оператор перехода системы (1),  $u_0(x)$  — произвольный элемент  $B$  и  $u(t) = S(t, 0)u_0(x)$  — обобщенное решение задачи (1), (2), а  $\varepsilon_m(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$  равномерно по  $m$ , т. е.  $\varepsilon_m(\tau) \leq \varepsilon(\tau)$  и  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

Определение. Разностную схему (3), (4) будем называть *сходящейся* в  $B$  к задаче Коши (1), (2), если для произвольной начальной функции  $u_0 \in B$  соответствующее решение  $u^m(x)$  задачи (3), (4) *сходится* к решению  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) в норме  $B$ , т. е.

$$\max_m \|u^m(x) - u(x, t_m)\|_B = \max_m \| [C_{m,0} - S(t_m, 0)] u_0(x) \|_B \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$0 \leq t_m \leq \bar{t},$$

при  $\tau = \max \tau_m \rightarrow 0$ .

Подчеркнем, что из сходимости (10) следует, что при любом  $t$ ,  $0 \leq t \leq \bar{t}$ ,

$$\|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)\|_B \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0$ . Здесь  $\tilde{u}(x, t) = u^m(x)$ , где  $t_m$  — ближайшая к  $t$  точка последовательности  $\{t_k\}$ .

Первая теорема сходимости. Если

1) задачи (1), (2) и (3), (4) корректны в  $B$ ,

2) задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2),

то решение  $u^m(x)$  задачи (3), (4) сходится в  $B$  к решению  $u(x, t)$  задачи (1), (2).

Доказательство. Для оценки величины (10) воспользуемся представлением

$$S(t_m, 0) = S_m S_{m-1} \dots S_1, \quad C_{m0} = C_m C_{m-1} \dots C_1. \quad (11)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} C_{m0} - S(t_m, 0) &= \sum_{k=1}^{m-1} C_m \dots C_{k+1} (C_k - S_k) S_{k-1} \dots S_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} C_{m, k} (C_k - S_k) S_{k-1, 0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь (12), получаем

$$\begin{aligned} \|u^m - u(t_m)\|_B &= \|C_{m, 0} - S(t_m, 0)\| u_0 \|_B \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \|C_{m, k}\|_B \|C_k - S_k\| S(t_{k-1}, 0) u_0 \|_B = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \|C_{m, k}\|_B \|C_k - S_k\| u(t_{k-1}) \|_B. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя оценку корректности (7) и оценку аппроксимации (9), находим

$$\|u^m - u(t_m)\|_B \leq M(\bar{t}) \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k \varepsilon_k(\tau_k) \leq M(\bar{t}) t_m \max_k \varepsilon_k(\tau_k). \quad (14)$$

Отсюда следует сходимость

$$\|u^m - u(t_m)\|_B \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0, \quad (15)$$

и теорема доказана.

Теоремы сходимости указанного типа формулировались в работах В. С. Рябенского [1952], Н. Н. Меймана [1954], П. Лакса, Р. Рихтмайера [1956]. Приведенная нами схема доказательства принадлежит Лаксу и Рихтмайеру.

Мы определили аппроксимацию в терминах ограниченных операторов  $S_m, C_m$ . Практически удобнее определять аппроксимацию через неограниченные операторы  $L, \Lambda_1, \Lambda_0^*$ ). В этом случае оценка близости производится не на обобщенных решениях  $u(t) \in B$ , а на решениях  $u(t) \in C_q$  задачи (1), (2).

\* Оператор  $L$ , как правило, неограничен, операторы  $\Lambda_1, \Lambda_0$ , как правило, ограничены при фиксированных  $\tau, h$ , но неограничены при  $\tau, h \rightarrow 0$ .

Определение. Задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) на классе  $C_q$  в норме  $B$ , если для произвольного решения  $u(t) \in C_q$  задачи (1), (2)

$$\max_m \|R_{m+1}u(t_m)\|_B = \max \left\| \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\tau_{m+1}} - \Lambda_1 u(t_{m+1}) - \Lambda_0 u(t_m) \right\|_B \rightarrow 0 \quad (16)$$

при  $\tau = \max \tau_m \rightarrow 0$ . Оператор

$$R_{m+1} = \frac{T_0(\tau_{m+1}) - E}{\tau_{m+1}} - \Lambda_1 T_0(\tau_{m+1}) - \Lambda_0,$$

где  $T_0(\tau_{m+1})u(t_m) = u(t_m + \tau_{m+1}) = u(t_{m+1})$ , и его значение на решении задачи (1), (2) называются остатком разностной схемы (3).

Вторая теорема сходимости. Если

1) задачи (1), (2) и (3), (4) корректны в  $B$ ,

2)  $\|B_m^{-1}\|_B = \|(E - \tau_{m+1}\Lambda_1)^{-1}\|_B \leq N(\bar{t})$ ,

3) разностная схема (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) в смысле (16),

то решение задачи (3), (4) сходится к решению  $u(t)$  задачи Коши (1), (2) в норме  $B$ , если последнее принадлежит классу  $C_q$ .

Доказательство. Разность  $v^m = u^m - u(t_m)$  удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{v^{m+1} - v^m}{\tau_{m+1}} = \Lambda_1 v^{m+1} + \Lambda_0 v^m - R_{m+1}u(t_m)$$

и в силу обратимости оператора  $B_m$  — уравнению

$$v^{m+1} = C_{m+1}v^m + f_{m+1},$$

где

$$f_{m+1} = -\tau_{m+1}B_m^{-1}R_{m+1}u(t_m).$$

Решение этого разностного уравнения имеет вид

$$v^{m+1} = C_{m+1,0}v^0 + C_{m+1,\alpha}f_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m+1). \quad (17)$$

Это без труда проверяется по индукции.

Пользуясь условием 2) теоремы и условием аппроксимации (16), получаем равномерную оценку для  $f_{m+1}$ :

$$\|f_{m+1}\|_B \leq \tau_{m+1}N(\bar{t})\beta(\tau), \quad (18)$$

где  $\beta(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau = \max \tau_m \rightarrow 0$ .

Теперь из равенства (17), оценок (18), условия корректности (7) разностной задачи (3), (4) и из равенства  $v^0 = 0$  получаем

оценку для  $v^{m+1}$

$$\|v^{m+1}\|_{B^*} = \|C_{m+1, \alpha} f_{\alpha}\|_B \leq \left( \sum_{k=1}^{m+1} \tau_k \right) M(\bar{t}) N(\bar{t}) \beta(\tau) = \\ = t_{m+1} M(\bar{t}) N(\bar{t}) \beta(\tau). \quad (19)$$

Для оценка означает сходимость решения разностной задачи к решению задачи Коши (1), (2), так как  $\|v^{m+1}\|_B \rightarrow 0$  при любом  $m$  ( $t_m \leq \bar{t}$ ) и  $\tau \rightarrow 0$ . Одновременно это означает сходимость разностной схемы (3), (4) к задаче Коши (1), (2). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим подробнее структуру остаточного члена разностной схемы (3). Учитывая, что решение  $u(t) \in C_q$  задачи (1), (2) дифференцируемо по  $t$ , запишем

$$R_{m+1} u(t_m) = \left[ \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\tau_{m+1}} - \frac{\partial u(t_m)}{\partial t} \right] + \\ + [L(D)u(t_m) - \Lambda_1 u(t_{m+1}) - \Lambda_0 u(t_m)]. \quad (20)$$

Ввиду очевидных оценок

$$\left. \begin{aligned} \left\| \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\tau_{m+1}} - \frac{\partial u(t_m)}{\partial t} \right\|_B &= \alpha_1(\tau_{m+1}), \\ \|\Lambda_1 u(t_{m+1}) - \Lambda_1 u(t_m)\|_B &= \alpha_2(\tau_{m+1}), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $\alpha_i(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , мы видим, что условие (16) может быть записано в виде

$$\|(L(D) - \Lambda_1 - \Lambda_0)u(t_m)\|_B \rightarrow 0 \quad (22)$$

при  $\tau_{m+1} \rightarrow 0$ .

Если условие (22) выполнено для любых функций  $u(t) \in C_q$ , то мы говорим, что оператор  $\Lambda_1 + \Lambda_0$  аппроксимирует в классе  $C_q$  оператор  $L(D)$  в норме  $B$  при  $\tau = \max \tau_m \rightarrow 0$ . Аппроксимацию операторов будем обозначать символом

$$\Lambda_1 + \Lambda_0 \underset{B}{\sim} L(D). \quad (23)$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Третья теорема сходимости. Если:

- 1) задачи (1), (2) и (3), (4) корректны в  $B$ ,
- 2)  $\|B_m^{-1}\|_B = \|(E - \tau_{m+1}\Lambda_1)^{-1}\|_B \leq N(\bar{t})$ ,
- 3)  $\Lambda_1 + \Lambda_0 \underset{B}{\sim} L(D)$ ,

то решение разностной задачи (3), (4) сходится по норме  $B$  к решению  $u(x, t) \in C_q$  задачи (1), (2).

Сравним теперь эти три определения аппроксимации. Как мы только что видели, третье определение (23) эквивалентно второму определению (16), и именно поэтому третья теорема сходимости не нуждается в отдельном доказательстве.

При условии, что оператор  $B_m$  обратим в  $B$ , из второго определения аппроксимации (16) следует первое определение (формула (9)) в классе  $C_q \subset B$ , в котором имеет место (16). В самом деле, пусть  $\|B_m^{-1}\|_B \leq N(\bar{t})$ , тогда из (16) имеем для  $u(t) \in C_q$ :

$$\begin{aligned} \tau_{m+1} R_{m+1} u(t_m) &= B_m [u(t_{m+1}) - B_m^{-1}(E + \tau_{m+1} \Lambda_0) u(t_m)] = \\ &= B_m [(S_{m+1} - C_{m+1}) u(t_m)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(S_{m+1} - C_{m+1}) u(t_m) = \tau_{m+1} B_m^{-1} R_{m+1} u(t_m),$$

$$\|(S_{m+1} - C_{m+1}) u(t_m)\|_B \leq \tau_{m+1} N(\bar{t}) \|R_{m+1} u(t_m)\|_B$$

и формула (9) имеет место, так как  $\|R_{m+1} u(t_m)\|_B \rightarrow 0$  равномерно по  $m$  при  $\tau = \max \tau_{m+1} \rightarrow 0$ .

Мы видим, что при условии обратимости в  $B$  оператора  $B_m$  все три определения аппроксимации разностной схемой (3) системы дифференциальных уравнений (1) достаточны для сходимости, однако наиболее проста и формализована проверка аппроксимации согласно определениям (16) и (23), так как она требует проверки локальной аппроксимации оператора  $L(D)$ .

Однако практическую ценность аппроксимация оператора  $L(D)$ , согласно определениям (16) и (23), приобретает лишь после установления ограниченности семейства операторов  $B_m^{-1}$ , так как без этого не имеют места вторая и третья теоремы сходимости. Поэтому для основной задачи в теории разностных методов решения дифференциальных уравнений — установления сходимости разностной схемы и оценки ее точности — все три определения аппроксимации полезны в равной мере.

Тем не менее в практической работе исследование аппроксимации часто заканчивается лишь установлением ее в смысле второго (16) или, что то же самое, третьего определения (23). Это связано с тем, что проверка обратимости операторов  $B_m$  и, главное, равномерная оценка нормы  $\|B_m^{-1}\|_B$  — задача значительно более сложная. Однако если это не сделано, то нет полной уверенности в сходимости разностной схемы.

В этом смысле большая часть задач решается разностными методами без полной уверенности в сходимости разностной схемы. Частично этот недостаток восполняется проведением нескольких расчетов с уменьшающимся шагом  $\tau$  и сравнением результатов, иногда сравнением с экспериментом.

Выше мы рассмотрели случай разностной схемы (3) с переменным шагом  $\tau_{m+1}$  по времени. Хотя такие схемы используются в практических расчетах, в целях простоты исследуют разностные схемы с постоянным шагом  $\tau$ . Далее мы будем рассматривать почти исключительно разностные схемы с постоянным шагом  $\tau$ .

До сих пор мы рассматривали операторы  $\Lambda_1, \Lambda_0$  произвольной структуры, определенные в  $B$ , и теоремы сходимости представляли собой по существу теоремы функционального анализа.

Теперь мы рассмотрим теоретически более частный, но практически, пожалуй, наиболее важный случай, когда  $\Lambda_1, \Lambda_0$  — конечно-разностные операторы.

Введем линейное пространство  $B_1$  периодических по переменному  $x$  с периодом  $2l$  функций  $u(x, t)$ , определенных при  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , которые при любом  $t \in [0, \bar{t}]$  принадлежат пространству  $B$ , т. е.  $u(t) = u(x, t) \in B$ . В этом пространстве определим норму  $B_1$ :

$$\|u(x, t)\|_{B_1} = \sup_t \|u(t)\|_B. \quad (24)$$

Определим в  $B_1$  оператор сдвига  $T(h, \tau)$ . Равенство

$$T(h, \tau)u(x, t) = u(x + h, t + \tau) \quad (25)$$

определяет  $T(h, \tau)$  при  $0 \leq t \leq \bar{t} - \tau$ ,  $x$  — любое.

Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} T(h, 0) &= T_1, & T(-h, 0) &= T_{-1} = T_1^{-1}, \\ T(0, \tau) &= T_0, & T(0, -\tau) &= T_{-0} = T_0^{-1}, \quad h, \tau > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Оператор

$$\Lambda(\tau, h, T) = B_{\beta_0 \beta_1} T_0^{\beta_0} T_1^{\beta_1}, \quad (27)$$

$$\beta_0 = -q_0, -q_0 + 1, \dots, q_0; \quad \beta_1 = -q_1, -q_1 + 1, \dots, q_1,$$

где  $B_{\beta_0 \beta_1}$  — матрицы в  $n$ -мерном пространстве компонент вектор-функций  $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$ , будем называть *разностным оператором*. Очевидно, оператор  $\Lambda$  определен в  $B_1$  при  $q_0 \tau \leq t \leq \bar{t} - q_0 \tau$  и любом  $x$ .

Семейство (27) операторов  $\Lambda$ , зависящих от  $\tau$  и  $h$ , будем называть *семейством финитных операторов*, если  $q_0, q_1 < Q$ , где  $Q$  не зависит от  $\tau, h$ . Ясно, что сумма и произведение финитных операторов есть снова финитный оператор. Однако оператор, обратный финитному, вообще говоря, не является финитным.

Пусть

$$\Omega = A_{\alpha_0 \alpha_1} D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1}, \quad \alpha_0 = 0, 1, \dots, p_0; \quad \alpha_1 = 0, 1, \dots, p_1, \quad (28)$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

есть дифференциально-матричный оператор. Определим аппроксимацию  $\Lambda \sim \Omega$  оператором (27) оператора (28).

Рассмотрим функцию

$$R(\tau, h)u = [\Lambda(\tau, h, T) - \Omega(D)]u(x, t), \quad (29)$$

где  $u(x, t) \in C_{q_0, q_1} \subset B_1$  и операторы  $\Lambda, \Omega, R$  рассматриваются в  $B_1$ . Здесь  $C_{q_0, q_1}$  — пространство функций  $u(x, t)$ , дифференцируемых  $q_0$  раз по переменному  $t$  и  $q_1$  раз по переменному  $x$ ,  $q_0 \geq p_0, q_1 \geq p_1$ . Для краткости ниже будем писать  $C_q$  вместо  $C_{q_0, q_1}$ .

Если для любой функции  $u(x, t) \in C_q \subset B_1$  при  $\tau, h \rightarrow 0$

$$\|R(\tau, h)u(x, t)\|_{B_1} = O(\tau^\alpha) + O(h^\beta), \quad \alpha, \beta > 0, \quad (30)$$

то будем говорить, что оператор  $\Lambda$  абсолютно аппроксимирует оператор  $\Omega$  в норме  $B_1$  на классе  $C_q$  с порядками аппроксимации  $\alpha$  по  $\tau$  и  $\beta$  по  $h$ . Из равенства (30) следует, что для достаточно малой окрестности  $0 < \tau^2 + h^2 < \rho_0^2, \tau > 0, h > 0$ , точки  $\tau = 0, h = 0$  и любой функции  $u(x, t) \in C_q$  найдется  $C > 0$  такое, что

$$\|R(\tau, h)u(x, t)\|_{B_1} \leq C(\tau^\alpha + h^\beta). \quad (31)$$

Если, однако, оценки (30), (31) не имеют места при произвольных  $\tau, h$  из окрестности точки  $\tau = 0, h = 0$ , но при некотором законе предельного перехода  $h = h(\tau)$

$$\|R(\tau, h)u(x, t)\|_{B_1} = O(\tau^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad (32)$$

то будем говорить, что оператор  $\Lambda$  условно аппроксимирует оператор  $\Omega$  с порядком условной аппроксимации  $\alpha$  по  $\tau$  при законе предельного перехода  $h = h(\tau)$ . Заметим, что порядок условной аппроксимации  $\alpha$  зависит от закона предельного перехода  $h = h(\tau)$ . Как правило, для условно аппроксимирующего оператора имеют место оценки вида

$$\|R(\tau, h)u(x, t)\|_{B_1} = O(\tau^\alpha) + O(h^\beta) + O(\tau^\gamma h^\delta),$$

где одна из величин  $\gamma, \delta$  может быть отрицательной.

Для аналитических функций  $u(x, t)$  справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} u(x+h, t) &= T_1 u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \frac{h^k}{k!} = e^{hD_1} u(x, t), \\ u(x, t+\tau) &= T_0 u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) \frac{\tau^k}{k!} = e^{\tau D_0} u(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

т. е.

$$T_1 = e^{hD_1}, \quad T_0 = e^{\tau D_0}, \quad T_1^{\beta_1} = e^{\beta_1 h D_1}, \quad T_0^{\beta_0} = e^{\beta_0 \tau D_0}, \quad T(h, \tau) = e^{hD_1 + \tau D_0}. \quad (34)$$

Мы будем пользоваться формулами (33), (34) и для неаналитических функций; в этом случае ряды (33) обрываются на соот-

ответствующих членах, а остаток ряда оценивается. Тогда проверка аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  может быть проведена следующим образом.

Формулы (34) подставляются в выражение

$$R = \Lambda - \Omega = B_{\beta, \beta} T_0^\beta T_1^\beta - A_{\alpha, \alpha} D_0^\alpha D_1^\alpha, \quad (35)$$

после чего экспоненты (34) раскладываются в степенные ряды по параметрам  $\tau, h$ . Мы получаем степенной ряд по  $\tau, h$ , который начинается с членов порядка  $\tau^\alpha$  и  $h^\beta$ , все остальные члены имеют более высокий порядок малости в окрестности  $\tau = 0, h = 0$ . Очевидно, в этом случае  $\alpha, \beta$  — целые числа, они определяют порядок аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$ . Аппроксимация имеет место для класса  $C_{q_0, q_1}$ , в котором функция  $u(x, t)$  имеет производные, встречающиеся в коэффициентах при степенях  $\tau^\alpha, h^\beta$ , а также все производные, которые входили в (35) в коэффициенты при младших степенях  $\tau, h$  до приведения подобных членов.

Если известен закон предельного перехода  $h = C\tau^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ), то это выражение для  $h$  подставляется в ряд (35), после чего  $R$  принимает вид

$$R = \Lambda - \Omega = P(\tau, D_0, D_1). \quad (36)$$

Здесь  $P(\tau, D_0, D_1)$  — матричный ряд, дробно-степенной по параметру  $\tau$  и степенной по операторам  $D_0, D_1$ . Наименьшая степень  $\alpha$ , в которой параметр  $\tau$  входит в (36), является порядком условной аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  при законе предельного перехода  $h = C\tau^\gamma$ .

Отметим, что порядок аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  зависит от класса  $C_q$  функций сравнения. Если  $C_{\bar{q}} \subset C_q$ , то порядок аппроксимации в классе  $C_{\bar{q}}$  не меньше, чем в классе  $C_q$ .

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих понятия порядка аппроксимации, абсолютной и условной аппроксимации.

Определим порядок аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  для операторов

$$\Omega = D_0 + aD_1, \quad \Lambda = \frac{T_0 - E}{\tau} + a \frac{E - T_{-1}}{h}, \quad a = \text{const.} \quad (37)$$

Следуя общему правилу, изложенному выше, находим

$$R = \Lambda - \Omega = \frac{1}{2!} \tau D_0^2 + \frac{1}{3!} \tau^2 D_0^3 + \dots - \frac{a}{2!} h D_1^2 + \frac{a}{3!} h^2 D_1^3 - \dots \quad (38)$$

Из (38) следует, что на классе  $C_{q_1, q_2}$  ( $q_1, q_2 \geq 2$ ) аппроксимация является абсолютной и имеет первый порядок как по  $\tau$ , так и по  $h$ .

Рассмотрим аппроксимацию  $\Lambda \sim \Omega$  на классе  $U$  аналитических решений уравнения  $\Omega u = 0$ . Здесь следует формально

положить в (38)  $D_0 = -aD_1$ , после чего будем иметь

$$R = \Lambda - \Omega = ah \left[ \frac{D_1^2}{2!} (\varkappa - 1) - h \frac{D_1^3}{3!} (\varkappa^2 - 1) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^m h^{m-2} \frac{D_1^m}{m!} (\varkappa^{m-1} - 1) + \dots \right], \quad (39)$$

где  $\varkappa = \frac{a\tau}{h}$ .

При  $\varkappa = 1$  ( $h = a\tau$ ) условная аппроксимация  $\Lambda \sim \Omega$  на аналитических решениях уравнения  $\Omega u = 0$  имеет бесконечный порядок.

Заметим, что это возможно лишь при  $a \geq 0$ , так как в противном случае получаем  $h < 0$ , хотя мы всегда считали  $h > 0$ . Это, впрочем, в данном случае означает лишь, что условную аппроксимацию бесконечного порядка при  $a < 0$  имеет другой разностный оператор  $\Lambda$ , именно

$$\Lambda = \frac{T_0 - E}{\tau} + a \frac{T_1 - E}{h}, \quad a < 0$$

при  $\varkappa = -\frac{a\tau}{h} = 1$ .

Для уравнений с постоянными коэффициентами аппроксимацию удобно устанавливать в норме  $L_2$  на тригонометрических полиномах

$$P_N = \sum_{k=-N}^N C_k e^{\omega t + ikx}. \quad (40)$$

В этом случае удобно перейти к спектральным образам  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Omega}$  операторов  $\Lambda$ ,  $\Omega$ , которые определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(C_k e^{\omega t + ikx}) &= (\bar{\Lambda} C_k) e^{\omega t + ikx}, \\ \Omega(C_k e^{\omega t + ikx}) &= (\bar{\Omega} C_k) e^{\omega t + ikx}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Матрицы  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Omega}$  определены так же, как и  $\Lambda$ ,  $\Omega$  в  $n$ -мерном пространстве компонент  $C_k = \{C_k^1, \dots, C_k^n\}$ , и получаются из операторов-матриц  $\Lambda(\tau, h, T)$ ,  $\Omega(D_0, D_1)$  формальной заменой

$$T_0 \rightarrow e^{\omega\tau}, \quad T_1 \rightarrow e^{ikh}, \quad D_0 \rightarrow \omega, \quad D_1 \rightarrow ik. \quad (42)$$

Тогда равенству (35) соответствует равенство

$$\bar{R}(\tau, h, \omega, k) = \bar{\Lambda}(\tau, h, \omega, k) - \bar{\Omega}(\omega, k) = \\ = \Lambda(\tau, h, e^{\omega\tau}, e^{ikh}) - \Omega(\omega, ik) = B_{\beta_0 \beta_1} e^{\beta_0 \omega \tau + i\beta_1 kh} - A_{\alpha_0 \alpha_1} \omega^{\alpha_0} (ik)^{\alpha_1}. \quad (43)$$

Уравнение (43) применимо для класса функций, разлагающихся в ряд Фурье.

Возвращаясь к примеру (37), видим, что бесконечный порядок аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  имеет место при  $\kappa = 1$  и в классе разрывных решений уравнения  $\Omega = 0$ , представимых рядом Фурье. Нетрудно видеть, что это связано с совпадением операторов решения уравнений

$$\Lambda u = 0 \quad \text{и} \quad \Omega u = 0.$$

Действительно, при  $\kappa = 1$

$$S(t + \tau, t) = C_{m+1, m} = T_1(-\alpha\tau), \quad t = m\tau.$$

Теперь приведем пример схемы с условной аппроксимацией. Уравнению

$$\Omega u = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = (D_0 + aD_1)u = 0, \quad a = \text{const}, \quad (44)$$

поставим в соответствие разностное уравнение (схема Лакса)

$$\Lambda u = \left[ \frac{2T_0 - (T_1 + T_{-1})}{2\tau} + a \frac{T_1 - T_{-1}}{2h} \right] u = 0. \quad (45)$$

Представим оператор  $\Lambda$  в виде

$$\Lambda = \frac{T_0 - E}{\tau} + a \frac{T_1 - T_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{T_1 - 2E + T_{-1}}{h^2}. \quad (46)$$

Проверяя аппроксимацию  $\Lambda \sim \Omega$ , находим, что уравнение (45) при законе предельного перехода  $h = \text{const } \tau$  аппроксимирует уравнение (44), а при законе предельного перехода  $h = \mu \sqrt{2\tau}$  аппроксимирует параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu = \text{const}. \quad (47)$$

Этот пример показывает, что в случае условной аппроксимации разностный оператор может аппроксимировать различные дифференциальные операторы при различных законах предельного перехода.

Рис. 3.1 поясняет аппроксимационные свойства схемы Лакса. Когда точка  $(\tau, h) \rightarrow (0, 0)$ , двигаясь вдоль нижней параболы  $\tau = \frac{1}{2\mu_2^2} h^2$ , схема (46) аппроксимирует уравнение теплопроводности (47) с  $\mu = \mu_2$ . Соответственно при движении  $(\tau, h)$  вдоль

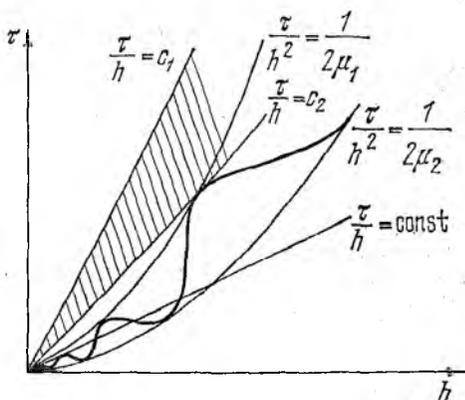


Рис. 3.1.

верхней параболы схема (46) аппроксимирует уравнение (47) с  $\mu = \mu_1$ . Если  $(\tau, h) \rightarrow (0, 0)$ , двигаясь вдоль кривой, попеременно касающейся этих парабол, схема (46) не аппроксимирует никакого дифференциального уравнения. С другой стороны, при любом стремлении  $(\tau, h)$  к  $(0, 0)$  в секторе, ограниченном прямыми  $\frac{\tau}{h} = C_1$ ,  $\frac{\tau}{h} = C_2$ ,  $0 < C_1 < C_2 < \infty$ , схема (46) аппроксимирует гиперболическое уравнение (44).

В случае конечно-разностных финитных операторов  $\Lambda_1, \Lambda_0$ , которые представляются матричными полиномами от операторов сдвига  $T_1, T_{-1}$ , можно ввести понятие явной и неявной схем. Двухслойная разностная схема (3) называется *явной*, если оператор шага  $S_{m+1}$ , определенный в (5), является финитным, и *неявной* в противном случае.

Явные и неявные схемы существенно различаются по методам их реализации, а также по их предельным свойствам при  $\tau, h \rightarrow 0$ .

**2. Дисперсионный анализ разностной схемы.** В предыдущем пункте для дифференциального

$$\Omega = A_{\alpha_0 \alpha_1} D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1}, \quad \alpha_0 = 0, 1, \dots, p_0, \quad \alpha_1 = 0, 1, \dots, p_1, \quad (1)$$

и разностного

$$\Lambda = B_{\beta_0 \beta_1} T_0^{\beta_0} T_1^{\beta_1}, \quad \beta_0 = -q_0, \dots, q_0, \quad \beta_1 = -q_1, \dots, q_1, \quad (2)$$

операторов с постоянными матрицами  $A_{\alpha_0 \alpha_1}, B_{\beta_0 \beta_1}$ , мы ввели их спектральные образы — матрицы  $\bar{\Omega}, \bar{\Lambda}$ :

$$\bar{\Omega} = A_{\alpha_0 \alpha_1} \omega^{\alpha_0} (ik)^{\alpha_1}, \quad \bar{\Lambda} = B_{\beta_0 \beta_1} e^{\beta_0 \omega \tau + ik \beta_1 h}. \quad (3)$$

Для того чтобы гармоника  $u = u_0 e^{\omega t + ikx}$  была решением уравнений

$$\Omega u = 0 \quad (4)$$

или

$$\Lambda u = 0, \quad (5)$$

величины  $\omega, k$  должны удовлетворять условию

$$\det \|\bar{\Omega}(\omega, k)\| = 0 \quad (6)$$

или

$$\det \|\bar{\Lambda}(\tau, h, \omega, k)\| = 0 \quad (7)$$

соответственно.

Уравнения (6), (7) называются *дисперсионными соотношениями уравнений* (4), (5) соответственно; решения  $\omega = \omega(k)$  и  $\omega = \omega(\tau, h, k)$  этих уравнений также называют дисперсионными соотношениями.

Зависимости  $\omega = \omega(k)$  и  $\omega = \omega(\tau, h, k)$  дают полную информацию о свойствах периодических решений уравнений (4) и (5) соответственно.

Так, условие аппроксимации  $\Lambda \sim \Omega$  разностным оператором дифференциального имеет вид

$$\omega(\tau, h, k) \rightarrow \omega(k) \quad (8)$$

при  $\tau, h \rightarrow 0$  для произвольного фиксированного значения  $k$ .

Если предельный переход (8) имеет место при независимом стремлении  $\tau, h$  к нулю, то аппроксимация является абсолютной, если же при этом требуется предполагать связь  $h = h(\tau)$ , то — условной\*).

Вопросы корректности для уравнений (4), (5), естественно, зависят от постановки дополнительных условий, однозначно определяющих их решения. Например, это могут быть начальные условия при  $t = 0$ , согласованные с операторами (1), (2). Если не рассматривать эти сложные вопросы о корректной постановке начальных условий, считая, что все сделано правильно, то можно лишь сказать, что для устойчивого поведения решений уравнений (4), (5) нужно требовать, чтобы

$$\operatorname{Re} \omega(k) \leq \mu_1, \quad \operatorname{Re} \omega(\tau, h, k) \leq \mu_2, \quad (9)$$

где константы  $\mu_1, \mu_2$  не зависят от  $k, \tau, h$ .

Поэтому вопрос о применении спектральных образов операторов к исследованию корректности и устойчивости дифференциальной и разностной задач целесообразно рассмотреть для более частного случая задачи Коши (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.3), (2.1.4); в этом случае

$$\Omega = ED_0 - L(D_1) = ED_0 - A_\alpha D_1^\alpha, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau\Lambda &= [ET_0 - \tau T_0 \Lambda_1(T_1)] - [E + \tau\Lambda_0(T_1)] = \\ &= [ET_0 - \tau B_\beta^1 T_0 T_1^\beta] - [E + \tau B_\beta^0 T_1^\beta], \quad (11) \end{aligned}$$

где  $E$  — единичная матрица,  $A_\alpha, B_\beta^1, B_\beta^0$  — постоянные  $(n \times n)$ -матрицы;  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ .

В этой связи заметим, что многие хорошо поставленные задачи математической физики для уравнений (4), (5) с операторами типа (1), (2) сводятся к задаче Коши для операторов вида (10), (11) путем повышения размерности  $n$  пространства решений. Мы имеем в виду сведение систем уравнений с производными по  $t$  старшего порядка к системе уравнений первого порядка по  $t$  путем введения новых переменных. Например, уравнение колебаний

$$u_{tt} = u_{xx}$$

\* Сходимость (8) должна быть выполнена, естественно, для всех корней уравнения (6). Поэтому должно быть установлено соответствие между корнями уравнений (6), (7). В частности, здесь возникает вопрос о «лишних» корнях уравнения (7). Нужно требовать, чтобы для «лишних» корней  $\operatorname{Re} \omega(\tau, h, k) \rightarrow -\infty$  при  $\tau, h \rightarrow 0$ .

путем введения новых переменных  $\bar{u} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$  сводится к системе уравнений

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x},$$

первого порядка по переменному  $t$ .

В случае операторов (10) и (11) рассматриваем задачу Коши и пользуемся определениями корректности и устойчивости, которые приведены в § 1 и п. 1 данного параграфа. При такой специализации операторов  $\Omega$ ,  $\Lambda$  нет вопроса о «лишних» корнях  $\omega(\tau, h, k)$ : порядок характеристических уравнений (6), (7) относительно  $\omega$  и  $\exp(\omega\tau)$  один и тот же и равен  $n$ .

Необходимым условием корректности задачи Коши для уравнения (4) с оператором  $\Omega$  вида (10) является выполнение первого условия (9) при всех  $k$ ; точно так же необходимым условием корректности (устойчивости) разностной задачи (5) с оператором  $\Lambda$  вида (11) является второе условие (9), которое должно выполняться при всех  $k$  с константой  $\mu_2$ , не зависящей от  $\tau$ ,  $h$  в случае безусловной устойчивости и зависящей от закона предельного перехода  $h = h(\tau)$ , но ограниченной при  $\tau \rightarrow 0$  в случае условной устойчивости.

Рассмотрим вопрос о применении дисперсионных соотношений к исследованию устойчивости разностной задачи Коши для уравнения (5) при условии (11) подробнее.

Оператору шага  $(E - \tau\Lambda_1)^{-1}(E + \tau\Lambda_0)$  разностного уравнения (5) преобразование Фурье ставит в соответствие оператор шага  $(E - \tau\bar{\Lambda}_1)^{-1}(E + \tau\bar{\Lambda}_0)$  следующей разностной схемы для коэффициентов Фурье  $\bar{u}^{m+1}(k)$ :

$$\frac{\bar{u}^{m+1}(k) - \bar{u}^m(k)}{\tau} = \bar{\Lambda}_1 \bar{u}^{m+1}(k) + \bar{\Lambda}_0 \bar{u}^m(k). \quad (12)$$

Здесь  $\bar{\Lambda}_1$ ,  $\bar{\Lambda}_0$  — спектральные образы операторов  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_0$ :

$$\bar{\Lambda}_1(\tau, h, k) = B_\beta^1 e^{ik\beta h}, \quad \bar{\Lambda}_0(\tau, h, k) = B_\beta^0 e^{ik\beta h}, \quad (13)$$

$B_\beta^1$ ,  $B_\beta^0$  могут зависеть от  $\tau$ ,  $h$ , а  $\bar{u}^{m+1}(k)$  — коэффициенты Фурье решения  $u^{m+1}(x)$ , периодического по  $x$ :

$$u^{m+1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{u}^{m+1}(k) e^{ikx}. \quad (14)$$

Аналогично (1.3.13) имеем

$$\|C_{m,l}\|_{L_2} = \sup_k \|\bar{C}_{m,l}(k)\|_{U_n}. \quad (15)$$

В формуле (15)  $C_{m,l}$  оператор перехода со слоя  $l$  ( $t = t_l$ ) на слой  $m$  ( $t = t_m$ ) разностной задачи Коши (5),  $\bar{C}_{m,l}$  — оператор

перехода для тех же слоев системы разностных уравнений (12).

Если для оператора шага  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$  системы (12) имеет место оценка

$$\sup_k \|\bar{C}_{m+1, m}(k)\|_{U_n} \leq 1 + C(\bar{t})\tau, \quad (16)$$

то в силу соотношения (15) разностная схема (5), (11) является устойчивой в  $L_2$ .

Таким образом, равенство (15) сводит определение устойчивости рассматриваемой разностной схемы к чисто алгебраической задаче определения нормы матрицы  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$ .

Известно, что *спектральный радиус матрицы*, т. е. максимум модуля ее характеристических корней, не превосходит нормы матрицы. Отсюда получается необходимый критерий устойчивости (*критерий Неймана*) разностной схемы (5), (11):

Для того чтобы схема (5), (11) была равномерно устойчивой, необходимо, чтобы спектральный радиус  $R_\lambda$  матрицы перехода  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$  системы (12) допускал оценку

$$R_\lambda(\bar{C}_{m+1, m}(k)) \leq 1 + M(\bar{t})\tau, \quad (17)$$

справедливую при всех  $k$ ,  $\tau \leq \tau_0$  и других параметрах (например  $h$ ) схемы.

В случае, когда  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$  является нормальной матрицей, т. е. перестановочна со своей сопряженной, ее норма совпадает со спектральным радиусом, и критерий (17) выражает необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости схемы (5), (11). Подробный анализ различных оценок норм матриц можно найти в книге Р. Рихтмайера и К. Мортонa [1967].

Если, однако  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$  не является нормальной матрицей, то условие (17) недостаточно и хорошо известны примеры (см., например, С. К. Годунов, В. С. Рябенский [1973]), когда при выполнении условия (17) схема неустойчива.

Рассмотрим применение дисперсионных соотношений в случае, когда матрица  $\bar{C}_{m+1, m}(k)$  является нормальной.

Будем исследовать лишь наиболее употребительные разностные схемы следующего типа:

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = \gamma \Lambda_0 u^{m+1}(x) + (1 - \gamma) \Lambda_0 u^m(x), \quad (18)$$

где

$$\Lambda_0 = B_\beta^0 T_1^\beta \quad (19)$$

оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор  $L(D_1) = A_\alpha D^\alpha$ . В этом случае очевидно, что  $\Lambda(\tau, h) \sim \Omega$ . Для схемы (18) дисперсионное соотношение дает

$$e^{i\omega_i \tau} = \frac{1 + (1 - \gamma)\tau\lambda_i(h, kh)}{1 - \gamma\tau\lambda_i(h, kh)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

где  $\omega_i = \omega_i(\tau, h, k)$ ;  $\lambda_i = \lambda_i(h, kh)$  — собственные значения матрицы

$$\bar{B}(h, kh) = B_{\beta}^0 e^{i\beta kh} = \sum_{\beta=-q_1}^{q_1} B_{\beta}^0 e^{i\beta kh}. \quad (21)$$

(Мы предполагаем для простоты, что матрицы  $B_{\beta}^0$  зависят только от  $h$  и не зависят от  $\tau$ .)

Для хорошо поставленных задач математической физики, называемых *эволюционными*, оператор  $L(D_1)$  таков, что собственные значения  $\lambda_i(k)$  его спектральной матрицы  $\bar{L}(ik)$  удовлетворяют оценке

$$\operatorname{Re} \lambda_i(k) \leq \rho < \infty, \quad (22)$$

выполненной при  $i = 1, 2, \dots, n$  и любых действительных  $k$ . Можно показать, что условие (22) справедливо не только для систем, корректных в  $B$ , но и корректных по И. Г. Петровскому.

Оценка (22) означает, что любые гармоники (любое  $k$ ) имеют ограниченный рост во времени, даже высокочастотные при  $k \rightarrow \infty$  растут не сильно (в большинстве задач они сильно затухают, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda_i(k) \rightarrow -\infty$  при  $|k| \rightarrow \infty$ ).

Так как оператор  $\gamma \Lambda_0 + (1 - \gamma) \Lambda_0 \sim L(D_0)$ , то, в частности, выполнено соотношение (8). Поэтому естественно требовать, чтобы аналогичное свойство имел и оператор  $\Lambda_0$ ; собственные значения  $\lambda_i(h, kh)$  соответствующей ему матрицы  $\bar{\Lambda}_0(h, kh) = \bar{B}(h, kh)$  (последняя задана формулой (21)) должны иметь ограниченную сверху действительную часть

$$\operatorname{Re} \lambda_i(h, kh) \leq \rho_1 < \infty. \quad (23)$$

При сделанных нами предположениях матрица

$$\bar{C}_{m+1, m}(\tau, h, k) = [E - \gamma \tau \bar{B}(h, kh)]^{-1} [E + (1 - \gamma) \tau \bar{B}(h, kh)] \quad (24)$$

имеет своими собственными значениями величины  $e^{\omega_i \tau}$ , заданные формулой (20).

Поэтому, если матрица  $\bar{B}(h, kh)$  — нормальная, то необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости разностной схемы (18) записывается в виде

$$\sup_k \max_i \left| \frac{1 + (1 - \gamma) \tau \lambda_i(h, kh)}{1 - \gamma \tau \lambda_i(h, kh)} \right| \leq 1 + M(\bar{\tau}) \tau, \quad (25)$$

где константа  $M(\bar{\tau})$  не зависит от  $\tau$ . Если это требует определенного закона предельного перехода  $h = h(\tau)$ , то равномерная устойчивость схемы (18) имеет условный характер; в противном случае — безусловный.

Если рассмотреть частный, но весьма распространенный случай, когда  $\lambda_i(h, kh) \leq 0$ , то из (25) следует, что неявная схема

абсолютно устойчива при  $\gamma \geq 1/2$ , чего нельзя сказать, вообще говоря, в случае  $\gamma = 0$  (явная схема). В п. 3 будут сопоставлены свойства аппроксимации и устойчивости явных и неявных схем.

Заметим, что волновое число  $k$  входит в матрицу  $\bar{B}(h, kh)$  лишь в виде целых степеней экспоненты  $e^{ikh}$ . Отсюда следует, что матрица  $B(h, kh)$  периодична по параметру  $k$  с периодом  $2\pi/h$ . По этой причине супремум в оценке (25) достаточно определить по отрезку  $|k| \leq \pi/h$  волновых чисел  $k$ .

Периодичность матрицы  $\bar{B}(h, kh)$  имеет очень простое объяснение: разностная схема (18) с оператором  $\Lambda_0$  вида (19) «не различает» гармоники с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k < h$ . На сетке с шагом  $h$  по переменному  $x$  функция  $e^{ikx}$  при  $|k| > 2\pi/h$  совпадает с функцией  $e^{i\bar{k}x}$ , где  $|\bar{k}| = \left| k \pm \frac{2\pi}{h} n \right| \leq \frac{\pi}{h}$ ,  $n$  — целое число. Поэтому говорят, что разностный оператор  $\Lambda_0$  «разрешает» максимальное волновое число  $2k_0 = 2\pi/h$ . В случае действительных матриц  $B_{\beta}^0$ , который мы рассматриваем как основной,  $B(h, -kh) = [B(h, kh)]^*$ . Поэтому  $\lambda(h, -kh) = \lambda^*(h, kh)$ ,  $\omega(\tau, h, -k) = \omega^*(\tau, h, k)$ . Следовательно, поведение гармоник  $u_0 e^{\omega t + ikx}$  при любых  $k$  вполне характеризуется в этом случае их поведением при  $k \in [0, k_0]$ ,  $k_0 = \pi/h$ . Отрезок  $[0, k_0]$  волновых чисел будем называть *спектром разностного оператора*  $\Lambda$ .

Заметим при этом, что если для дифференциальной и разностной задач ставятся условия периодичности  $u(x-l) = u(x+l)$ , то спектр разностной краевой задачи будет состоять из точек  $k_n = \pi n/l \in [0, k_0]$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ . Если же рассматривается разностная задача Коши на бесконечной прямой  $-\infty < x < \infty$  с условием ограниченности решения на бесконечности, то гармоника  $u_0 e^{\omega t + ikx}$  является ее решением при любом действительном  $k$ . Поэтому спектр этой разностной задачи Коши совпадает со спектром оператора  $\Lambda_0$ ; он непрерывен и состоит из отрезка  $[0, k_0]$  волновых чисел.

Заметим также, что, говоря о спектре разностной задачи, часто подразумевают не только допустимое множество волновых чисел  $k$ , но также и дисперсионное соотношение  $\omega = \omega(\tau, h, k)$ .

Отрезок  $[0, k_0]$  спектра разностного оператора имеет три характерных участка: участок малых  $k$ :  $0 \leq k \leq k_1$ , участок промежуточных  $k$ :  $k_1 \leq k \leq k_2$  и край спектра — участок  $k_2 \leq k \leq k_0$ . Хотя описание будет носить качественный характер, можно приблизительно представлять себе, что  $k_1 = k_0/3$ ,  $k_2 = 2k_0/3$ .

Участок малых  $k$  соответствует малым производным от гармоник  $e^{\omega t + ikx}$  по переменному  $x$  и соответственно он описывает свойства разностной схемы на решениях с малыми производными  $u_x, u_{xx}, u_{xxx}$  и т. д. На этом участке спектральный образ  $\bar{B}(\tau, h, k)$  остатка  $\Lambda_0 - L(D_1)$  обычно мал, что свидетельствует о

хорошей аппроксимации разностным оператором  $\Lambda_0$  дифференциального  $L(D_1)$  на слабо меняющихся функциях. Именно в этой области имеет место сходимость \*)

$$\lambda_i(h, kh) \rightarrow \lambda_i(k) \quad (26)$$

при  $h \rightarrow 0$ ; точнее говоря, в этой части спектра соотношения (26) нарушаются с приемлемой точностью. По этим причинам естественно называть этот участок спектра *участком аппроксимации*.

В области  $k_1 \leq k \leq k_2$  промежуточных волновых чисел производные грамоник (и соответственно описываемых ими решений разностных и дифференциальных уравнений) становятся значительными. По этой причине остаток  $\Lambda_0 - LD$  уже не мал и нельзя говорить о хорошей аппроксимации  $\Lambda_0 \sim L(D_1)$  для такого рода колебаний. Предельное соотношение (26) не выполняется, ошибки в нем велики. Однако чаще всего в практически важных случаях спектральная функция  $\lambda_i = \lambda_i(h, kh)$  разностной задачи все еще следует качественно поведению спектральной функции  $\lambda_i(k)$  дифференциальной задачи, например убыванию  $\text{Re } \lambda_i(k)$  с ростом  $k$ .

Наконец, на краю спектра  $[k_2, k_0]$  производные описываемых этим участком решений столь велики, что ни о какой аппроксимации  $\Lambda_0 \sim L(D_1)$  не может быть и речи, соотношение (26) здесь не имеет места. В принципе этот участок спектра описывает разностный оператор  $\Lambda_0$ , который здесь может не иметь ничего общего с дифференциальным оператором  $L(D_1)$ .

Интересно отметить, что на краю спектра могут нарушаться даже основные качественные черты поведения спектральной функции  $\lambda_i(k)$  дифференциальной задачи. Например, возможно, что  $\text{Re } \lambda_i(h, kh)$  в этой части спектра может стать возрастающей функцией  $k$ , превзойти  $\text{Re } \lambda_i(h, kh)$  в области аппроксимации, т. е. при  $k \sim 0$ ; величина  $\text{Re } \lambda_i(h, kh)$  может стать положительной при  $k \sim k_0$  и даже может стремиться к  $+\infty$  при  $h \rightarrow 0$ .

В последнем случае разностная схема (18) становится абсолютно (при сколь угодно малом шаге  $\tau$ ) неустойчивой и непригодна даже для грубых расчетов, что легко следует из внимательного рассмотрения формулы (20).

В этом пункте мы приведем простейший пример разностного оператора, аппроксимирующего дифференциальный оператор  $D_1^2$ , который имеет аномальное поведение на краю спектра.

Пример аномального поведения спектра в более реальных случаях приведен в работе Дж. Гари и Р. Хелгасона [1970]; корни  $\lambda_i = \lambda_i(h, kh)$ , для которых  $\text{Re } \lambda_i \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow 0$ , на-

\*) Строго говоря, сходимость (26) не имеет места ни в какой конечной части спектра  $[0, k_0]$ . Сходимость (26) имеет место в любом фиксированном отрезке  $[0, \bar{k}]$ , где  $\bar{k}$  не зависит от  $h$ .

званы там «spurious»-корнями\*). В работе Б. Л. Рождественского, Е. И. Ермаковой, В. Г. Приймака [1977] приведены новые примеры подобного поведения спектра разностного оператора, там же построены элементы теории ложных корней.

Надо заметить, что подобное аномальное поведение спектра разностной задачи, в которой не допущены грубые ошибки, возникает не всегда. До сего времени оно наблюдалось лишь в не-самосопряженных задачах с переменными коэффициентами; иногда причина этих аномалий — разностная аппроксимация кривых условий высокого порядка.

Таким образом, мы видим, что условие (23), обеспечивающее при  $\gamma \geq 0,5$  равномерную устойчивость разностной схемы (18), отнюдь не вытекает из аппроксимации  $\Lambda_0 \sim L(D)$ , а должно быть обеспечено подбором соответствующего оператора  $\Lambda_0$  из семейства аппроксимирующих  $L(D_1)$ .

Вычислитель обычно стремится повысить точность аппроксимации на участке  $[0, k_1]$  спектра и сохранить качественное поведение спектральной функции  $\lambda_i(h, kh)$  в остальной его части. В ряде простых задач это удается сделать, однако для указанных выше сложных случаев эти два стремления вступают в противоречие. Повышая точность аппроксимации при малых  $k$ , мы применяем многоточечные пространственные аппроксимации, при которых поведение спектра на краю становится более сложным и может стать нежелательным в указанном смысле.

Отметим, что обнаружение аномалий на краю спектра осложняется тем, что при больших  $k \sim 1/h$  нельзя пользоваться оценками собственных значений матрицы  $\bar{B}$ , обычно справедливыми при малых  $k$ . Поэтому установление оценки (23) требует знания всего спектра разностного оператора, и мы должны решать *полную проблему собственных значений* для спектральной матрицы  $\bar{B}(h, kh)$ .

Поясним введенные понятия на простом примере разностной аппроксимации уравнения теплопроводности.

В этом случае

$$L(D_1) = D_1^2, \quad \Omega = D_0 - D_1^2. \quad (27)$$

Рассмотрим простейшую аппроксимацию

$$\Lambda_0(h) = [T_1(-h) - 2E + T_1(h)] \frac{1}{h^2} \sim D_1^2. \quad (28)$$

Это отвечает разностной схеме

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = \gamma \frac{u^{m+1}(x-h) - 2u^{m+1}(x) + u^{m+1}(x+h)}{h^2} + (1-\gamma) \frac{u^m(x-h) - 2u^m(x) + u^m(x+h)}{h^2}. \quad (29)$$

\*) Spurious-false — ложный, фальшивый.

Оператор  $\Lambda_0(h)$  имеет следующую спектральную функцию:

$$\lambda(h, kh) = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}, \quad (30)$$

которую следует сравнить со спектральной функцией

$$\lambda(k) = -k^2$$

оператора  $D_1^2$ . Проводя разложение  $\lambda(h, kh)$  в ряд по степеням  $h$ , найдем

$$\lambda(h, kh) = -k^2 + O(k^4 h^2) = \lambda(k) + O(k^4 h^2).$$

При малых  $k$  в области аппроксимации имеем близость  $\lambda(h, kh)$  и  $\lambda(k)$  и близкое поведение во времени гармоник  $e^{\omega t + ikx}$ . При  $k = \pi/3h = k_0/3 = k_1$  имеем

$$\lambda(h, k_1 h) = -\frac{1}{h^2}, \quad \lambda(k_1) = -\frac{\pi^2}{9h^2} \approx -1,0966 \frac{1}{h^2}.$$

Совпадение совсем неплохое.

Функция  $\lambda(h, kh)$ , однако, монотонно убывает с ростом  $k$ , периодически по  $k$  с периодом  $2\pi/h$  и сохраняет главное свойство  $\lambda(k)$  — отрицательность и монотонное убывание с ростом  $k$ . На краю спектра при  $k = k_0 = \pi/h$

$$\lambda(h, k_0 h) = -\frac{4}{h^2}, \quad \lambda(k_0) = -\frac{\pi^2}{h^2} \approx \frac{-9,87}{h^2},$$

$|\lambda(h, k_0 h)|$  почти в 2,5 раза меньше  $|\lambda(k_0)|$ .

Мы видим, что для аппроксимации (29) нет никаких ложных корней; для самосопряженного оператора  $L(D_1)$  мы построили самосопряженный разностный оператор  $\Lambda_0^*$ , который хорошо отражает качественные особенности всего спектра оператора  $L(D_1)$  и очень хорошо (со вторым порядком по  $h$ ) аппроксимирует спектр  $L(D_1)$  на участке аппроксимации.

Так как  $\lambda(h, kh) < 0$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ , то из формулы (20) заключаем, что при  $\gamma \geq 1/2$  и любых  $\tau, h$

$$0 < e^{\omega \tau} \leq 1,$$

а при  $\gamma = 0$

$$-1 \leq e^{\omega \tau} \leq 1,$$

если

$$\frac{2\tau}{h^2} = \frac{\tau}{2} |\lambda(h, k_0 h)| \leq 1.$$

\*) Имеется в виду самосопряженность операторов  $L(D_1)$  и  $\Lambda_0$  при условии периодичности по переменному  $x$ .

Так как для аппроксимации (29) матрица  $\bar{B}(h, kh)$  нормальная, то из полученных оценок следуют оценки нормы матрицы перехода  $C_{m+1, m}$  разностной схемы (29):

$$\|C_{m, m+1}\|_{L_2} \leq 1 \quad \text{при } \gamma \geq 0,5 \quad \text{и любых } \tau, h;$$

$$\|C_{m, m+1}\|_{L_2} \leq 1 \quad \text{при } \gamma = 0 \quad \text{и } \tau \leq h^2/2.$$

В первом случае мы имеем безусловную устойчивость неявной ( $\gamma \geq 1/2$ ) разностной схемы (29); во втором — условную устойчивость при  $\tau \leq h^2/2$  явной схемы (29).

Подобным же образом из формулы (20) выводятся оценки устойчивости разностной схемы и в более общих случаях, если при этом матрица  $\bar{B}(h, kh)$  — нормальная.

Рассмотрим теперь другую аппроксимацию оператора  $D_1^2$ :

$$\Lambda_0(h) = [E - 2T_1(h) + T_1(2h)] \frac{1}{h^2} \sim D_1^2,$$

или

$$\Lambda_0(h) u(x) = \frac{u(x) - 2u(x+h) + u(x+2h)}{h^2}. \quad (31)$$

Для этого оператора

$$\lambda(h, kh) = -\frac{4e^{ikh}}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} =$$

$$\frac{4}{h^2} \left[ \cos kh \sin^2 \frac{kh}{2} + i \sin kh \sin^2 \frac{kh}{2} \right] = -k^2 - ik^3h + O(k^4h^2).$$

Разностный оператор (31), как легко видеть, имеет аномальное поведение на краю спектра, в частности  $\text{Re } \lambda(h, kh) > 0$  при  $kh > \pi/2$  и  $\text{Re } \lambda(h, k_0h) = \text{Re } \lambda(h, \pi) = 4/h^2 \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow 0$  (рис. 3.2).

Конечно, ясно, что аппроксимация (31) плоха; она несимметрична, имеет лишь первый порядок точности по  $h$ , неудобна в постановке граничных условий. Поэтому неудивительно, что разностная схема (18) с использованием оператора (31) является неустойчивой.

Мы привели этот пример лишь для того, чтобы в простейшей форме продемонстрировать аномалии на краю спектра разностного оператора. В сложных задачах с переменными коэффициентами и сложными граничными условиями аномалии на краю спектра могут возникнуть при самых, казалось бы, естественных аппроксимациях задачи. Эта естественность может привести к тому, что вычислитель может даже не подозревать, что он решает поставленную задачу по абсолютно неустойчивой разностной схеме (см. по этому поводу Б. Л. Рождественский и др. [1977], А. Р. Хачатуров [1977]).

Рассмотрим применение дисперсионных соотношений к изучению свойств трехслойной явной разностной схемы типа Дюфорта — Франкела (см. Р. Рихтмайер, К. Мортон [1967]). Эта схема позволит нам проиллюстрировать влияние «лишних» корней дисперсионного уравнения, а также явления на краю спектра, напоминающие действие ложных корней.

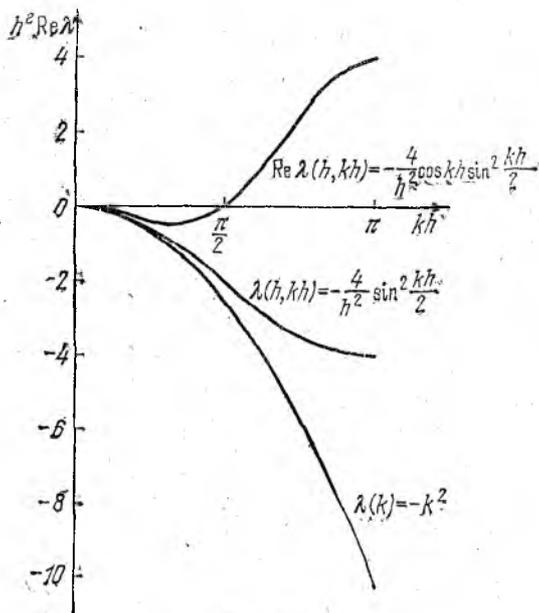


Рис. 3.2.

Для уравнения теплопроводности рассмотрим схему Дюфорта — Франкела

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1}(x) - u^{m-1}(x)}{2\tau} &= \frac{u^m(x+h) - u^{m+1}(x) - u^{m-1}(x) + u^m(x-h)}{h^2} = \\ &= \frac{u^m(x+h) - 2u^m(x) + u^m(x-h)}{h^2} - \frac{\tau^2 u^{m+1}(x) - 2u^m(x) + u^{m-1}(x)}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1}(x) - u^{m-1}(x)}{2\tau} &= \\ &= \Lambda_0(h) u^m(x) - \frac{\tau^2 u^{m+1}(x) - 2u^m(x) + u^{m-1}(x)}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\Lambda_0(h)$  — оператор (28), аппроксимирующий оператор  $D_1^2$ .

Дисперсионное уравнение схемы (33) имеет вид

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} = \lambda_0(h, kh)\rho - \frac{(\rho - 1)^2}{h^2}, \quad \rho = e^{\tau\omega(\tau, h, k)}, \quad (34)$$

где  $\lambda_0(h, kh)$  — спектральная функция оператора  $\Lambda_0(h)$ . Уравнение (34) — квадратное относительно  $\rho$ ; оно имеет два корня  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и соответственно два дисперсионных соотношения  $\omega = \omega_1(\tau, h, k)$ ,  $\omega = \omega_2(\tau, h, k)$ . Заметим, что для дифференциального уравнения  $D_0 u = D^2 u$  мы имеем только один корень  $\omega = \pm k^2$  \*).

Выпишем формулы для  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ :

$$\rho_{1,2} = \frac{\kappa + \tau\lambda_0 \pm \sqrt{1 + 2\kappa\tau\lambda_0 + \tau^2\lambda_0^2}}{1 + \kappa}, \quad (35)$$

$$\kappa = 2\tau/h^2, \quad \lambda_0 = \lambda_0(h, kh). \quad (36)$$

Из формул (35), (36), (30) следует, что схема Дюфорта — Франкела (33) имеет условную аппроксимацию уравнения теплопроводности, так как требует для аппроксимации закона предельного перехода, при котором

$$\kappa\tau = \frac{2\tau^2}{h^2} \rightarrow 0 \quad (37)$$

при  $\tau, h \rightarrow 0$ . Из формулы

$$\rho_{1,2} = \frac{\kappa \cos kh \pm \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 kh}}{1 + \kappa} \quad (38)$$

следует, что  $|\rho_1| \leq 1$ ,  $|\rho_2| \leq 1$  при любых  $k$  и  $\kappa > 0$ , что означает абсолютную устойчивость разностной схемы (32). При малых  $kh$  и выполнении (37)

$$\rho_2 = \frac{\kappa + \tau\lambda_0 - \sqrt{1 + 2\kappa\tau\lambda_0 + \tau^2\lambda_0^2}}{1 + \kappa} \simeq -\frac{(1 - \kappa)}{1 + \kappa} (1 + \tau\lambda_0).$$

Мы видим, что этот корень не имеет ничего общего с  $e^{\lambda\tau}$ , но  $|\rho_2| < 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  при достаточно малых  $\tau$ , и поэтому

$$\operatorname{Re} \omega_2(\tau, h, k) \rightarrow -\infty \quad (39)$$

при  $\tau, h \rightarrow 0$  с соблюдением (37).

Асимптотическое поведение (39) лишнего корня  $\omega_2$  свидетельствует о том, что соответствующие ему гармоники очень быстро затухают во времени при малом шаге  $\tau$  и могут не приниматься во внимание, так как точно такие же гармоники соответствуют корню  $\omega_1$  и они затухают умеренно. Этот пример

\* Мы видим, что схема (32) имеет «лишний» корень дисперсионного уравнения. Вопрос о лишних корнях возникает, очевидно, всегда, когда порядок  $2q_0$  разностного уравнения по переменному  $t$  больше порядка по  $t$  аппроксимируемого им дифференциального уравнения.

показывает, что для лишних корней дисперсионного уравнения достаточно требовать выполнения условия типа (39).

Отметим, однако, одно неприятное обстоятельство, которое снижает ценность устойчивости схемы (33) при любом  $\kappa$ . Оно состоит в том, что при любом  $\kappa$  и  $kh = \pi$  по формуле (38) имеем  $\rho_2 = -1$ . Это означает, что на краю спектра при  $k = k_0 = \pi/h$ ,  $\text{Re } \omega_2 = 0$ , т. е. гармоники  $e^{i\pi x/h}$  не затухают во времени, а лишь меняют знак на каждом шаге. Особенно неприятно то, что это обстоятельство не зависит от шага  $\tau$ ; уменьшение  $\tau$  не устраняет этих пульсаций. Это означает, что схема Дюфорта — Франкела (33) при  $k \sim k_0$ , т. е. на краю спектра, находится на пределе устойчивости, и достаточно малых возмущений, связанных, например, с граничными условиями или переменными коэффициентами, чтобы сделать ее абсолютно неустойчивой.

В самом деле, если оператор  $\Lambda_0$  имеет при каком-либо  $k \in [0, k_0]$  собственное значение такое, что

$$\lambda_0(h, kh) < -4/h^2, \quad (40)$$

то по формуле (35) имеем

$$\rho_2(\tau, h, k) = \frac{\tau(2/h^2 + \lambda_0) - \sqrt{1 + \tau^2 \lambda_0(4/h^2 + \lambda_0)}}{1 + \kappa} < -1.$$

В самом деле,  $\tau(2/h^2 + \lambda_0) < -2\tau/h^2 < -\kappa$ ,  $\lambda_0(4/h^2 + \lambda_0) > 0$ ,  $\sqrt{1 + \tau^2 \lambda_0(4/h^2 + \lambda_0)} > 1$  и т. д. Об этом же свидетельствует разложение  $\rho_2$  при малых  $\tau$ :

$$\rho_2(\tau, h, k) \simeq \frac{-1 - \tau \left[ -\lambda_0 - \frac{2}{h^2} \right] - \frac{\tau^2 \lambda_0}{2} \left( \frac{4}{h^2} + \lambda_0 \right)}{1 + \kappa},$$

из которого следует

$$\omega_2(\tau, h, k) \simeq \frac{i\pi}{\tau} + \left[ -\lambda_0(h, kh) - \frac{4}{h^2} \right], \quad (41)$$

т. е.

$$\text{Re } \omega_2(\tau, h, k) > 0.$$

Таким образом, при выполнении условия (40) появляются возрастающие со скоростью  $e^{\alpha t}$ , где

$$\alpha = -[\lambda_0(h, kh) + 4/h^2] > 0,$$

гармоники  $e^{ikh + \omega_2 t}$ , которые меняют знак на каждом шаге по времени\*). Иногда величина  $\alpha$  может быть порядка  $1/h$ , т. е. очень большой, и схема становится абсолютно неустойчивой.

Мы получаем следующий вывод: если оператор  $\Lambda_0$  становится чрезмерно диссипативным (выполнено условие (40)), то

\*) То же самое происходит и в случае комплексных  $\lambda_0(h, kh)$ , если выполнено обобщение  $\text{Re } \lambda_0(h, kh) < -4/h^2$  условия (40).

схемы Дюфорты — Франкела становится абсолютно неустойчивой.

Трудно построить пример (см. А. Р. Хачатуров [1977]), когда некоторая аппроксимация корректной краевой задачи для уравнения теплопроводности приводит к выполнению условия (10) на краю спектра оператора  $\Lambda_0$ .

**3. Аппроксимационная вязкость и первое дифференциальное приближение разностной схемы.** Дисперсионные соотношения для разностных схем помогают понять свойства этих схем и вносимые ими специфические эффекты. Можно провести классификацию разностных схем, основываясь на дисперсионных соотношениях.

Рассмотрим систему линейных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

с постоянной действительной матрицей  $A$ , имеющей различные действительные собственные значения  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Дисперсионное уравнение системы (1) имеет вид

$$(\omega + i\xi_1 k)(\omega + i\xi_2 k) \dots (\omega + i\xi_n k) = 0, \quad (2)$$

откуда мы заключаем, что гармоники  $u_0 e^{\omega t + ikx}$ , соответствующие корням  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , не затухают с течением времени, так как

$$\operatorname{Re} \omega_i(k) = 0, \quad |\rho_i| = 1, \quad \rho_i = e^{\omega_i \tau}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Рассмотрим для системы (1) разностную схему

$$\Lambda u = \left( \frac{T_0 - E}{\tau} + \Lambda_1 T_0 + \Lambda_0 \right) u = 0. \quad (4)$$

Будем говорить, что схема (4) обладает *аппроксимационной вязкостью*, если

$$\left. \begin{aligned} |\rho| < 1 & \text{ при } k \neq 0, \\ |\rho| = 1 & \text{ при } k = 0, \rho = e^{\omega(\tau, h, k)\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\omega(\tau, h, k)$  — решение дисперсионного уравнения для схемы (4), введенного в предыдущем пункте.

Мы видим, что для схем, обладающих аппроксимационной вязкостью, амплитуда гармоник затухает с течением времени. Аналогичным свойством обладают решения дифференциальных уравнений параболического типа, например уравнений теплопроводности и диффузии.

Возможна дальнейшая классификация разностных схем для систем уравнений гиперболического типа, основанная на дисперсионных соотношениях. Так, например, разностная схема (4) называется *диссипативной порядка  $2d$* , если при всех  $k \in [0, k_0]$

и достаточно малых  $\tau \leq \tau_0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$|\rho| \leq 1 - \delta |kh|^{2d}.$$

Для одного линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0, \quad (6)$$

рассмотрим разностную схему бегущего счета

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + a \frac{\Delta_{-1} u^m}{h} = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta_{-1} = E - T_{-1}, \quad \Delta_1 = T_1 - E.$$

Дисперсионное уравнение схемы (7) имеет вид

$$\rho - 1 + \frac{a\tau}{h} (1 - e^{-ikh}) = 0. \quad (8)$$

При выполнении условия Куранта  $\kappa = a\tau/h \leq 1$  из (8) следует, что  $|\rho| \leq 1$  для всех  $k$ .

Таким образом, схема (7) условно устойчива при  $\kappa \leq 1$ . При  $\kappa < 1$  выполнены условия (5) и, следовательно, схема (7) обладает аппроксимационной вязкостью. Однако при  $\kappa = 1$  из (8) следует  $\rho = e^{-ikh}$ ,  $\omega = -ika$  и, следовательно, схема (7) в этом случае не обладает аппроксимационной вязкостью. Можно вспомнить (см. п. 1), что схема (7) обладает при  $\kappa = 1$  бесконечным порядком аппроксимации. Это, впрочем, следует и из дисперсионного уравнения, так как  $\omega(\tau, h, k) = -ika$  (при  $|k| \leq \pi/h$ ).

Схема (7) обладает свойством монотонности (см. С. К. Годунов [1959]) при  $\kappa \leq 1$ , означающим, что монотонный профиль  $u^m(x)$  переходит снова в монотонный профиль  $u^{m+1}(x)$ . Действительно, если  $\Delta_{-1} u^m(x) \leq 0$  при всех  $x$ , то из (7) имеем

$$\begin{aligned} u^{m+1}(x) &= (1 - \kappa) u^m(x) + \kappa u^m(x - h), \\ \Delta_{-1} u^{m+1}(x) &= (1 - \kappa) \Delta_{-1} u^m(x) + \kappa \Delta_{-1} u^m(x - h) \leq 0. \end{aligned}$$

Наличие аппроксимационной вязкости у схемы (7) выражается в том, что с ростом времени (увеличением  $m$ ) профиль решения  $u^m(x)$  сглаживается, в отличие от профиля решения  $u(x, t) = u_0(x - at)$  дифференциального уравнения (6), который, двигаясь направо, остается неизменным по своей форме. Это объясняется тем, что высокочастотные гармоники, отвечающие большим значениям  $k$ , затухают быстрее, чем низкочастотные при  $\kappa < 1$ .

Можно рассмотреть «размазывание» схемой (7) разрыва в начальных данных

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Задача (7), (9) может быть решена аналитически. Из равенства (7) имеем

$$u^{m+1} = Cu^m, \quad C = \alpha E + \beta T_{-1}, \quad \alpha = 1 - \kappa, \quad \beta = \kappa, \\ u^m = C^m u^0 = (\alpha E + \beta T_{-1})^m u^0 = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k} \beta^k T_{-k} u^0. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что  $u^m(x) = 1$  при  $x \leq 0$ ,  $1 \geq u^m(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq mh$ ,  $u^m(x) = 0$  при  $x \geq mh$ .

Интересная деталь состоит в том, что функция  $u^m(x)$  будет разрывной функцией переменного  $x$ ; именно:  $u^m(x)$  постоянна

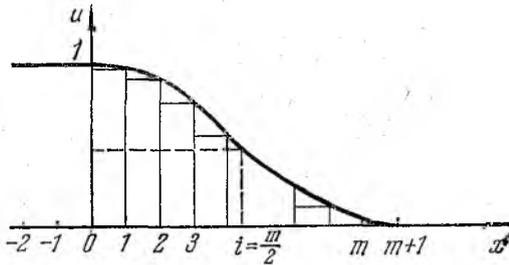


Рис. 3.3.

при  $(k-1)h \leq x \leq kh$  и каждая точка  $x = kh$  при  $k \geq 0$  есть точка разрыва  $u^m(x)$ . Это связано с тем, что мы рассматривали задачу Коши (7), (9) для разностной схемы (7) при всех  $x$ , а начальная функция разрывна. Можно рассматривать задачу (7), (9) лишь для точек  $x = kh$ , тогда мы будем иметь дискретный набор значений  $u_k^m$ , который дает представление о плавном изменении  $u_k^m$ . На рис. 3.3 мы приводим график  $u^m(x)$  (тонкой линией) и сглаженный профиль  $u_k^m$  (жирной линией).

Между прочим, наличие разрывов (хотя и уменьшающихся по амплитуде с ростом  $m$ ) у функции  $u^m(x)$  означает, что понятие аппроксимационной вязкости отражает лишь общие черты поведения решений разностных уравнений.

Отметим, что, например, при  $\kappa = 1/2$ ,  $\alpha = \beta = 1/2$  и при четном числе шагов  $m = 2n$  среднее значение  $u = 1/2$  будет находиться в точке  $x = mh/2$  и профиль симметричен относительно точки  $x = mh/2$ ,  $u = 1/2$ .

Мы видим из рис. 3.3, что среднее значение  $u = 1/2$  движется по сетке со скоростью  $a$ , в то время как профиль сглаживается симметрично относительно средней точки. Мы имеем здесь аналогию со сглаживанием начального разрыва в задаче Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Еще более наглядный пример действия аппроксимационной вязкости схемы (7) мы получим, рассмотрев для (7) задачу Коши:

$$w^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } |x| \leq \frac{h}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{h}{2} \end{cases} \quad (11)$$

(см. С. К. Годунов [1959], Л. Коллатц [1951], где эта задача используется для анализа распространения ошибок в решениях разностных уравнений).

По формуле (10) вычислим значение решения  $u_i^m = u^m(ih)$  в точках  $x = ih$ . Мы имеем

$$u_i^m = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k} \beta^k \delta_{i-k}^0 = \frac{1}{h} \binom{m}{i} \alpha^{m-i} \beta^i. \quad (12)$$

Профиль  $u_i^m$  имеет вид биномиального закона распределения, максимум профиля перемещается со скоростью  $a$ .

Пользуясь аналогией с теорией вероятностей\*), можно изучить предельное поведение решения разностной задачи (7), (11) при  $m \rightarrow \infty$ . Применяя формулу Стирлинга, получим

$$\binom{m}{i} \alpha^i \beta^{m-i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \alpha \beta}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{i-m\alpha}{\sqrt{m\alpha\beta}} \right)^2} + \theta \frac{C_1}{m}, \quad (13)$$

где  $C_1$  — величина, зависящая от  $\alpha$ , но не зависящая от  $i$ , а  $|\theta| < 1$ .

При больших  $m$

$$u_i^m \approx \frac{1}{h \sqrt{2\pi m \alpha \beta}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m-i-m\alpha}{\sqrt{m\alpha\beta}} \right)^2} = \frac{1}{h \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{m\alpha\beta}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m\beta-i}{\sqrt{m\alpha\beta}} \right)^2}. \quad (14)$$

Введем величины

$$U_i^m = u_i^m \sqrt{m\alpha\beta}, \quad y = \frac{i-m\alpha}{\sqrt{m\alpha\beta}},$$

\*) На аналогию асимптотических свойств разностных решений с предельными теоремами теории вероятностей указал А. И. Жуков [1959]. Наш анализ в основном следует его работе.

Тогда

$$U^m(y) \rightarrow \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

если  $m \rightarrow \infty$ , а  $i$  меняется так, что  $y$  конечно.

Покажем, что асимптотическое поведение  $u^m$  определяется спектральными свойствами оператора шага  $C = \alpha E + \beta T_{-1}$  разностной схемы (7). Обозначим  $S = T_1(-a\tau)$  — оператор шага для задачи Коши (6), (11),  $u^m(x)$  — решение (10) задачи Коши (7), (11) и  $\bar{u}^m(x) = \bar{u}(m\tau, x)$  — решение задачи (6), (11). Тогда

$$\begin{aligned} u^m &= C^m u^0, & \bar{u}^m &= S^m u^0, \\ u^m &= C^m S^{-m} \bar{u}^m = (CS^{-1})^m \bar{u}^m. \end{aligned}$$

Оператор  $CS^{-1}$  характеризует отклонение на одном шаге разностного решения от точного.

Перейдем к спектральным образам операторов  $C$ ,  $S$ ,  $CS^{-1}$ . Соответствующие этим операторам коэффициенты умножения  $\rho = e^{i\omega\tau}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_C &= (1 - \kappa) + \kappa e^{-ikh}, & \rho_S &= e^{-ia\tau k}, \\ \rho_{CS^{-1}} &= \rho_C \rho_S^{-1} = (1 - \kappa + \kappa e^{-ikh}) e^{ia\tau k} = \\ &= 1 - \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{a^2 \tau^2}{2} k^2 + O(k^3 \tau^3). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим теперь асимптотические свойства оператора отклонения  $(CS^{-1})^m$ . Если зафиксировать  $k$ , то при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,  $m\tau = t$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_{(CS^{-1})^m} &= \left[ 1 - \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{a^2 \tau^2}{2} k^2 + O(\tau^3 k^3) \right]^m \rightarrow e^{-b^2 k^2 t}, & (16) \\ b^2 &= \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{a^2 \tau}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор решения  $\Sigma(t)$  разностного уравнения (7) асимптотически представляется в виде

$$\Sigma(t) = \Omega(t) S(t),$$

где  $S(t)$  — оператор решения уравнения (6), очевидно, равный  $T_1(-at)$ , а  $\Omega(t)$  — оператор отклонения, спектральный образ которого соответствует формуле (16), т. е.

$$e^{\omega(k)t} = e^{-b^2 k^2 t} \quad \text{и} \quad \omega(k) = -b^2 k^2. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для оператора  $\Sigma$  спектральная функция имеет вид

$$\omega_\Sigma(k) = -iak - b^2 k^2. \quad (18)$$

Из выражения (18) видно, что оператор  $\Sigma(t)$  совпадает с оператором решения параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (19)$$

И действительно, решение уравнения (19) с начальным условием (11) дается выражением

$$u(x, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi b^2 t}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4b^2 t}}. \quad (20)$$

При  $h \rightarrow 0$  формула (20) становится точной.

Полагая  $i = x/h$ ,  $m = t/\tau$ , видим, что выражения (14) и (20) совпадают.

Таким образом, мы еще раз убедились, что уравнение (20) описывает асимптотическое поведение решений разностного уравнения (7) при  $\tau, h \rightarrow 0$ ,  $\kappa \ll 1$ .

Укажем формальный способ получения уравнения (19) из разностной схемы (7). Раскладывая разностное уравнение (7)

$$\left( \frac{T_0 - E}{\tau} + a \frac{E - T_{-1}}{h} \right) u = \left( \frac{e^{\tau D_0} - E}{\tau} + a \frac{E - e^{-h D_1}}{h} \right) u = 0$$

в ряд по степеням параметров  $\tau, h$ , получаем

$$\left( D_0 + a D_1 + \frac{1}{2} \tau D_0^2 - \frac{1}{2} a h D_1^2 + \dots \right) u = 0. \quad (21)$$

Отбрасывая в (21) старшие члены и подставляя затем  $D_0^2 = a^2 D_1^2$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} a h (1 - \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (22)$$

которое совпадает с уравнением (19).

Уравнение (22) будем называть *первым дифференциальным приближением* разностного уравнения (7).

Легко видеть, что разностное уравнение (7) аппроксимирует уравнение (22) на его решениях  $u \in C_3$  с точностью до величин порядка  $\tau^2, h^2$ . Поэтому с точностью до величин второго порядка можно говорить, что разностная схема (7) «добавляет» к уравнению (6) вязкость  $b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Указанный прием получения первого дифференциального приближения разностной схемы принадлежит А. И. Жукову.

В последние годы понятие первого дифференциального приближения разностной схемы подробно изучалось, и оно нашло ряд применений при изучении свойств разностных схем, в основном для случая гиперболических систем уравнений (см., например, Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин [1968], Ю. И. Шокин [1973, 1976], Н. Н. Кузнецов [1972]).

Кратко рассмотрим здесь способы изучения и применения первого и следующих дифференциальных приближений явной разностной схемы

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = \Lambda_0 u^m(x). \quad (23)$$

Пусть оператор  $\Lambda_0$  не зависит от  $x$  и является некоторой аналитической функцией параметра  $\tau > 0$ ,  $\Lambda_0 = \Lambda_0(\tau)$ . Для системы (23) поставим начальное условие

$$u^0(x) = u_0(x). \quad (24)$$

Решение задачи Коши (23), (24) имеет вид

$$u^m(x) = \tilde{u}(t, x) = (E + \tau \Lambda_0)^{t/\tau} u_0(x); \quad (25)$$

при этом  $t = m\tau$ .

Представление разностного решения  $\tilde{u}(t, x)$  в виде (25) аналитически продолжим для любых  $t$  и  $\tau > 0$ ; это означает, что мы будем применять его и при  $t$ , не кратных  $\tau$ .

Дифференцируя (25) по переменному  $t$ , получаем

$$\frac{d\tilde{u}(t, x)}{dt} = \frac{\ln[E + \tau \Lambda_0]}{\tau} \tilde{u}(t, x) \quad (26)$$

систему дифференциальных уравнений, которые описывают поведение решения разностной схемы (23) через функцию  $\tilde{u}(t, x)$  непрерывного аргумента  $t$ . Заметим, что функция  $\tilde{u}(t, x)$ , определенная как решение системы (26) с начальным условием  $\tilde{u}(0, x) = u_0(x)$ , следующим из (24), совпадает с  $u^m(x)$  в точках  $t = m\tau$ , т. е. решения  $u_\tau^m(x)$  задачи (23), (24) и  $\tilde{u}_\tau(t, x)$  системы (26) связаны условиями

$$u_\tau^m(x) = \tilde{u}_\tau(m\tau, x). \quad (27)$$

Отметим, что формальная запись системы уравнений (26) в виде

$$\frac{d\tilde{u}(t, x)}{dt} = \left[ \Lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^n}{n+1} \Lambda_0^{n+1} \right] \tilde{u}, \quad (28)$$

следующем из разложения правой части (26) по степеням параметра  $\tau$ , является одним из возможных формальных представлений разностной схемы (23). Уравнение (26) или (28) иногда называют  $\Pi$ -формой дифференциального представления разностной схемы (23).

Оставляя в правой части системы (28) несколько старших членов относительно  $\tau \rightarrow 0$ , мы получаем дифференциальные приближения разностной схемы (23) различного порядка. При этом мы должны учесть зависимость  $\Lambda_0$  от параметра  $\tau$ .

Для того чтобы эти дифференциальные приближения описывали поведение разностного решения  $\bar{u}(t, x)$  при  $\tau \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы ряд в правой части (28) сходиллся в некоторой окрестности  $\tau = 0$ .

На нескольких примерах поясним получение дифференциальных приближений.

Пусть оператор  $\Lambda_0$  ограничен и не зависит от  $\tau$ . Тогда ряд (28) сходится при

$$\tau \|\Lambda_0\| < 1$$

и расходится при

$$\tau \|\Lambda_0\| > 1.$$

Здесь имеется в виду эрмитова норма оператора  $\Lambda_0$  в пространстве компонент вектора  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  в точках  $\{x_k\}$ , связанных в разностной схеме (23). В этом случае схема (23) аппроксимирует систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{u}(t, x)}{dt} = \Lambda_0 \bar{u}(t, x), \quad (29)$$

которая в общем случае представляет собой бесконечную систему уравнений. В случае периодических граничных условий она сводится к конечной системе.

Уравнения (29) являются дифференциальным приближением разностной схемы нулевого порядка; оставляя в правой части (28) все члены до  $k$ -го порядка по  $\tau$ , получаем дифференциальное приближение разностной схемы (23)  $k$ -го порядка.

Очевидно, при любом  $\tau$  таком, что  $\tau \|\Lambda_0\| < 1$ , дифференциальные приближения тем точнее описывают поведение решений разностной схемы, чем выше их порядок. Например, система (23) в случае  $\Lambda_0 = \alpha E$  имеет первое дифференциальное приближение

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right) \bar{u},$$

из которого видно, что аппроксимация (23) уравнения  $u_t = \alpha u$  занижает скорость роста  $|u|$  при  $\alpha > 0$  и завышает скорость убывания  $|u|$  при  $\alpha < 0$ .

Пусть теперь  $\Lambda_0$  зависит от  $\tau$ . Для удобства интерпретации эту зависимость запишем в виде  $\Lambda_0 = \Lambda_0(h(\tau))$ . Тогда при выполнении условия

$$\tau \|\Lambda_0(h(\tau))\| < 1 \quad (30)$$

справедливо то, что сказано выше об описании разностных решений с помощью решений дифференциальных приближений  $k$ -го порядка

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \left[ \Lambda_0 + \sum_{n=1}^k (-1)^n \frac{\tau^n}{n+1} \Lambda_0^{n+1}(h(\tau)) \right] \bar{u}, \quad (31)$$

чем выше порядок  $k$  дифференциального приближения, тем точнее его решения описывают решения разностной схемы (23). Обратим внимание, что мы не проводили разложения  $\Lambda_0(h(\tau))$  по параметру  $\tau$ .

Отметим, что условие (30) сходно с обычными условиями устойчивости разностной схемы (23) и тем не менее не совпадает с ними. Например, для схемы (23) с  $\Lambda_0(h) = \frac{1}{h^2} [T_1(h) - 2E + T_{-1}(h)]$ , аппроксимирующей уравнение теплопроводности, (30) приводит к ограничению на шаг  $\tau < h^2/4$ , тогда как условие устойчивости явной схемы допускает вдвое больший шаг  $\tau < h^2/2$ .

Однако никакого парадокса в этом нет. Просто при  $h^2/2 \geq \tau > h^2/4$  существуют решения разностного уравнения (23), поведение которых не может быть описано никаким дифференциальным уравнением конечного порядка. Эти решения соответствуют пульсирующим на каждом шаге по  $t$  гармоникам, которые затухают с ростом времени  $t$ .

Рассмотрим еще один пример — разностную схему

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = a \frac{T_{-1}(h) - E}{h} u^m, \quad a > 0. \quad (32)$$

Здесь

$$\Lambda_0 = a \frac{T_{-1}(h) - E}{h}, \quad \|\Lambda_0\| = \frac{2a}{h}$$

и условие (30) приводит к  $2\tau a/h = 2\kappa < 1$ . Это снова в два раза более жесткое ограничение на шаг  $\tau$ , чем требует условие устойчивости ( $\kappa \leq 1$ ), и это опять объясняется тем, что уравнение первого порядка (31) не может описывать знакопеременные на каждом шаге по  $t$  решения разностной схемы (32), какие она имеет при  $\kappa > 1/2$ .

Приведенные примеры показывают, что дифференциальные приближения (31) разностной схемы могут не описывать поведение всех решений разностной схемы (23) и по этой причине могут создать неверное представление о свойствах устойчивости разностной схемы — свойствах, присущих именно разностной схеме и связанных со всем спектром разностной схемы.

Заметим, что тем не менее решения уравнения (31) могут неплохо отражать поведение решений разностной схемы (23) и при нарушении условия (30), если  $\tau \|\Lambda_0(h(\tau)) u_0(x)\| < 1$  и разностная схема (23) устойчива.

Аналогично строятся дифференциальные приближения и для неявной разностной схемы

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = \Lambda_0 u^{m+1}(x).$$

В этом случае (26) заменяется на

$$\frac{d\bar{u}(t, x)}{dt} = -\frac{\ln(E - \tau\Lambda_0)}{\tau} \bar{u}(t, x)$$

и уравнение (28) на

$$\frac{d\bar{u}(t, x)}{dt} = \left( \Lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n+1} \Lambda_0^{n+1} \right) \bar{u}.$$

Можно далее использовать свойство аппроксимации  $\Lambda_0(h) \sim L(D)$  для преобразования уравнения (28). Если

$$\Lambda_0(h) = L(D) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n L_n(D), \quad (33)$$

то мы можем подставить это представление  $\Lambda_0(h)$  в правую часть (28) и получить новое представление разностной схемы (23) в виде дифференциального уравнения (28), в правой части которого стоит операторный ряд по степеням шагов  $\tau$  и  $h$ .

Это уравнение есть формальная запись схемы (23), справедливая, однако, при выполнении условия (30). Условие (30) фактически ограничивает закон предельного перехода, так как из него мы имеем ограничение  $\tau < 1/\|\Lambda_0(h)\|$  — условие, при котором разностная схема (23) асимптотически по  $\tau \rightarrow 0$  эквивалентна уравнению бесконечного порядка (по  $x$ ) (28). Из условия (30) вытекает, какие члены в (33) следует учитывать при подстановке (33) в (31), если мы ограничиваемся степенями  $\tau^k$ .

Таким образом, мы получаем первое дифференциальное приближение в виде уравнения в частных производных, когда в (31) полагаем  $k=1$  и учитываем соответствующие, согласно (33), члены по  $h$ .

Для схемы (32) имеем первое дифференциальное приближение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} ah(1 - \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \kappa = \frac{a\tau}{h}, \quad (34)$$

которое совпадает с уравнением (22).

Как ясно из изложенного, дифференциальные приближения разностной схемы, вообще говоря, не могут определять условия ее устойчивости или неустойчивости.

Тем не менее для ряда схем, аппроксимирующих уравнения гиперболического типа, показано совпадение условий устойчивости разностной схемы с условием корректности задачи Коши для ее первого дифференциального приближения (см. Ю. И. Шокин [1973]).

Так, для системы уравнений (1) с симметричной матрицей  $A$  рассмотрим простую разностную схему

$$u^{m+1}(x) = \sum_{\alpha=1}^2 B_{\alpha} u^m(x + \tau \lambda_{\alpha}), \quad (35)$$

первое дифференциальное приближение которой имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (36)$$

где

$$C_2 = \frac{\tau}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha}^2 B_{\alpha} - A^2 \right],$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 B_{\alpha} = E, \quad \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha} B_{\alpha} = -A.$$

*Теорема. Для устойчивости разностной схемы (35) необходимо и достаточно, чтобы задача Коши для ее первого дифференциального приближения была корректна.*

*Доказательство.* Если разностная схема устойчива, то выполнено условие Неймана, т. е.

$$|\rho_j|^2 = 1 - 4\mu_j(1 - \mu_j) \sin^2 \frac{k\tau}{2} (\lambda_1 - \lambda_2) \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (37)$$

где  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — собственные значения матрицы перехода схемы

$$G = B_1 e^{ik\tau\lambda_1} + (E - B_1) e^{ik\tau\lambda_2},$$

$\mu_j$  — собственные значения матрицы  $B_1$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Тогда из (37) вытекает, что  $0 \leq \mu_j \leq 1$  и, следовательно, собственные значения матрицы  $B_2 = E - B_1$  также заключены между 0 и 1. В рассматриваемом случае

$$C_2 = \frac{\tau}{2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 B_1 B_2 = \frac{\tau}{2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 B_1 (E - B_1). \quad (38)$$

Поэтому собственные значения матрицы  $C_2$  неотрицательны и задача Коши для системы уравнений (36) корректна в  $L_2$ .

Обратно, если  $C_2 \geq 0$ , то из (38) следует, что  $B_{\alpha} \geq 0$  ( $\alpha = 1, 2$ ) и схема (35) устойчива в силу теоремы К. О. Фридриха [1954] (см. § 3).

Рассмотрим для системы уравнений (1) мажорантную схему

$$u^{m+1}(x) = \sum_{\alpha=-1}^1 B_{\alpha} u^m(x + \alpha h), \quad (39)$$

где

$$B_1 = +\kappa A^+, \quad B_{-1} = -\kappa A^-, \quad A^+ + A^- = -A, \\ A^+ \geq 0, \quad A^- \leq 0, \quad B_0 = E - \kappa(A^+ - A^-).$$

Ее первое дифференциальное приближение имеет вид (36), где

$$C_2 = \frac{h^2}{2\tau} (E - B_0) B_0.$$

В этом случае имеет место аналогичная теорема.

**Теорема.** *Для устойчивости мажорантной схемы (39) необходимо и достаточно, чтобы задача Коши для ее первого дифференциального приближения была корректна.*

Доказательство проводится подобно доказательству предыдущей теоремы.

В общем случае двухслойной разностной схемы для уравнения (6) имеет место следующее утверждение: *из устойчивости двухслойной разностной схемы для уравнения (6) следует корректность задачи Коши для ее первого дифференциального приближения в случае нечетного порядка аппроксимации и для ее второго дифференциального приближения в случае четного порядка аппроксимации.*

Обратное, в общем случае, не имеет места, что и показывает пример следующей схемы:

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = \Lambda_0 u^m(x) = \frac{u^m(x - 2h) - u^m(x - h)}{h}.$$

Из условия корректности задачи Коши для первого дифференциального приближения следует  $\kappa = \tau/h \leq 3$ , тогда как эта схема неустойчива при любом  $\kappa > 0$ .

Теперь рассмотрим применение дисперсионного анализа к исследованию устойчивости явных и неявных разностных схем. Две следующие теоремы (А. М. Ильин, [1965]) устанавливают существование условно устойчивой явной и абсолютно устойчивой неявной схем для корректных систем уравнений с постоянными коэффициентами.

**Теорема 1.** *Пусть система уравнений*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u = \sum_{\alpha=0}^p A_\alpha D^\alpha u \quad (40)$$

*имеет постоянные коэффициенты (т. е. матрицы  $A_\alpha$ ) и корректна по Петровскому. Тогда явная схема*

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = L\left(\frac{\Delta}{h}\right)u^m, \quad \Delta = \frac{T_1 - T_{-1}}{2}, \quad (41)$$

*абсолютно аппроксимирует систему (40) и устойчива по Петровскому при условии*

$$\tau/h^{2p} \leq c, \quad (42)$$

*где  $p$  — порядок системы (40),  $c$  — некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Спектральный образ оператора решения разностной схемы (41) имеет вид

$$\bar{C}_{m,0}(is) = \bar{C}_{m,0}(k, \tau) = [E + \tau L(is)]^m,$$

где  $s = \sin kh/h$ , а спектральный образ оператора решения системы (40), соответственно

$$\bar{S}(k, t, 0) = e^{tL(ik)}.$$

Ввиду корректности системы (40) по Петровскому справедлива оценка (см. (1.3.21))

$$\|e^{tL(ik)}\| \leq \text{const} \cdot (1 + |\lambda|^r) \quad (43)$$

с некоторым целым  $r$ , для всех действительных  $\lambda$ . Оценим норму оператора

$$\Phi_m(s) = [E + \tau L(is)]^m e^{-tL(is)}.$$

Так как

$$\|L(is)\| \leq \text{const} \cdot h^{-p}, \quad (44)$$

где  $\text{const}$  не зависит от  $k$ , то, ввиду условия (42) при достаточно малых  $h$  будем иметь  $\|\tau L(is)\| < 1/2$  и тогда

$$\begin{aligned} \Phi_m(s) &= \exp[m \ln(E + \tau L(is)) - tL(is)] = \\ &= \exp\left\{m \left[\tau L(is) - \frac{\tau^2}{2} L^2(is) (1 + O(\tau \|L(is)\|))\right] - tL(is)\right\} = \\ &= \exp\left\{-m \frac{\tau^2}{2} L^2(is) (1 + O(\tau \|L(is)\|))\right\}. \end{aligned}$$

Из неравенств (42) и (44) следует

$$\|\Phi_m(s)\| \leq \text{const}$$

равномерно для всех  $k, m, \tau$  при  $0 \leq m\tau = t \leq \bar{t}$ . Теперь, учитывая (43), получаем

$$\|C_{m,0}(is)\| \leq \|\Phi_m(s)\| \|e^{tL(is)}\| \leq \text{const} (1 + |s|^r) \leq \text{const} (1 + |k|^r),$$

т. е. схема (41) устойчива по Петровскому.

**Теорема 2.** Пусть система уравнений (40) является корректной по Петровскому. Тогда неявная разностная схема

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = L\left(\frac{\Delta}{h}\right) u^{m+1} \quad (45)$$

абсолютно аппроксимирует систему (40) и абсолютно устойчива по Петровскому.

Доказательство. Спектральный образ оператора шага схемы (45) имеет вид

$$\bar{C}(is) = \bar{C}(k, \tau) = [E - \tau L(is)]^{-1},$$

а спектральный радиус соответственно равен

$$\rho_\lambda = \max_j \left\| \frac{1}{1 - \tau \lambda_j(is)} \right\|,$$

где  $\lambda_j(is)$  — характеристические корни матрицы  $L(is)$ . Как известно, для систем, корректных по Петровскому, собственные числа  $\lambda_j(is)$  имеют конечную вещественную часть

$$\operatorname{Re} \lambda_j(is) \leq \mu < \infty,$$

следовательно,

$$|\rho_\lambda| \leq 1 + \operatorname{const} \cdot \tau. \quad (46)$$

Заметим, что если матрица  $L(is)$  нормальна, то отсюда сразу следует корректность схемы в  $L_2$ . В общем случае мы применим более точные оценки для матрицы  $\bar{C}(is)$ .

Поскольку произвольная функция от матрицы  $f(A)$  полностью определяется значениями  $f$  на спектре матрицы  $A$ , мы можем представить  $f(A)$  в виде интерполяционного полинома Ньютона

$$f(A) = b_0 E + b_1 (A - \lambda_1 E) + \\ + b_2 (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) + \dots + b_{n-1} (A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{n-1} E),$$

где

$$|b_k| \leq \max_{\lambda \in \Pi} |f^{(k)}(\lambda)|,$$

$\Pi$  — наименьший выпуклый многоугольник на комплексной плоскости, содержащий все собственные числа матрицы  $A$ :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Отсюда следует оценка

$$\|f(A)\| \leq C_1 \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|A^\alpha\| \max_{z \in \Pi} |f^{(\alpha)}(z)|, \quad (47)$$

где  $C_1$  зависит только от  $n$  ( $n$  — порядок матрицы  $A$ ). Положим  $A = L(is)$ ,  $f(A) = (E - \tau A)^{-m} = (E - \tau L(is))^{-m}$ . Оценка (47) принимает вид

$$\| [E - \tau L(is)]^{-m} \| \leq C_1 \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tau^\alpha \|L(is)\|^\alpha \max_{z \in \Pi} \frac{m(m+1) \dots (m+\alpha-1)}{|1-z|^{m+\alpha}} \leq \\ \leq \operatorname{const} \cdot (1 + |k|^q) \max_{z \in \Pi} \frac{1}{|1-z|^{m+\alpha}}, \quad (48)$$

где  $q = p(n-1)$ , а  $\operatorname{const}$  не зависит от  $k, m, \tau$ , и принято во внимание соотношение

$$\|L(is)\| \leq \operatorname{const} (1 + |k|^p)$$

корректности системы (40) по Петровскому (см. (1.3.21)). Но

$$\operatorname{Re} \lambda(A) = \operatorname{Re} \lambda(\tau L(is)) \leq \tau \mu$$

и при  $\tau$  столь малом, что  $\tau \mu < 1$ , имеем

$$\begin{aligned} |1 - z|^{-m-\alpha} &\leq |1 - \operatorname{Re} z|^{-m-\alpha} \leq |1 - \mu\tau|^{-m-\alpha} = |1 - \mu\tau|^{-\frac{t}{\tau}-\alpha} \leq \\ &\leq |1 - \mu\tau|^{-\frac{t}{\tau}-n+1} \leq \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя оценку (49) в (48), имеем

$$\| [E - \tau L(is)]^{-m} \| \leq \operatorname{const} (1 + |k|^q),$$

т. е. разностная схема корректна по Петровскому с  $q = p(n-1)$ .

Следующая теорема устанавливает связь между типом разностной аппроксимации и устойчивостью соответствующей разностной схемы (Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов [1971]).

*Теорема.* Пусть система с постоянными коэффициентами (40) имеет оператор  $L(D)$  с неограниченным спектром, и двухсторонний финитный разностный оператор

$$\frac{T_0 - E}{\tau} - \Lambda_0(T_1)$$

абсолютно аппроксимирует дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} - L(D).$$

Тогда явная схема

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} - \Lambda_0(T_1) u^m = 0 \quad (50)$$

не может быть абсолютно устойчива.

Доказательство. Абсолютно аппроксимирующий  $L(D)$  разностный оператор  $\Lambda_0(T_1)$  можно представить в виде

$$\Lambda_0(T_1) = a_{\alpha\beta} \left(\frac{\Delta_1}{h}\right)^\alpha T_{-1}^\beta,$$

где

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} = a_\alpha = \{a_{j\alpha}^i\}, \quad L(D) = \{a_{j\alpha}^i D^\alpha\},$$

Спектральный образ оператора шага схемы имеет вид

$$\bar{C}(k, \tau) = E + \tau a_{\alpha\beta} (ik)^\alpha e^{-ik\beta h} = E + \tau A.$$

Допустим, что схема (50) абсолютно устойчива. Тогда мы должны иметь

$$\|A\| \leq \frac{\operatorname{const}}{\tau}$$

для всех  $h$ , где  $\text{const}$  не зависит от  $\tau$ ,  $k$ ,  $h$ . Фиксируя здесь  $\tau$  и устремляя  $h$  к нулю, находим

$$|a_a(ik)^n| \leq \frac{\text{const}}{\tau}$$

для всех  $k$ . А это противоречит предположению о неограниченности спектра оператора  $L(D)$ . Теорема доказана.

Отметим также результат Крайса [1958], устанавливающий для корректной в  $L_2$  системы (40) с постоянными коэффициентами существование аппроксимирующей явной схемы, устойчивой при условии  $\tau/h^p \leq \text{const}$  ( $p$  — порядок системы), т. е. менее жестком, чем соответствующее условие теоремы А. М. Ильина.

### § 3. Исследование устойчивости разностных схем

Сформулированные в § 2 теоремы позволяют доказать сходимость разностной схемы, как только будут установлены аппроксимация и устойчивость.

Критерии аппроксимации сравнительно просты, носят локальный характер и большей частью требуют лишь разложения схемы в ряд Тейлора. Значительно сложнее исследование устойчивости, поскольку оно требует установления равномерной ограниченности по параметрам  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  нормы оператора решения разностной задачи.

Во многих случаях свойства оператора решения разностной задачи практически неизвестны, поэтому приходится прибегать к различного рода признакам устойчивости, основанным на ряде упрощающих гипотез и на опыте практических расчетов.

В этом параграфе мы дадим краткий обзор методов исследования, критериев и признаков устойчивости разностных схем. Отметим, что в последние годы появились монографии и учебники, в которых вопросы устойчивости разностных схем рассматриваются с достаточной полнотой. Отметим обстоятельную монографию А. А. Самарского, А. В. Гулина [1973], книги С. К. Годунова, В. С. Рябенского [1973], Р. Рихтмайера, К. Мортон [1967], В. С. Рябенского, А. Ф. Филиппова [1956].

**1. Спектральный метод исследования.** Если схема равномерно устойчива, то, конечно, она является и устойчивой. Это позволяет в большинстве случаев сводить исследование устойчивости к оценке нормы оператора шага разностной схемы.

В п. 2 § 2 мы уже рассматривали применение преобразования Фурье к получению дисперсионных соотношений и исследованию устойчивости простейшей разностной схемы

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = \Lambda_1 u^{m+1}(x) + \Lambda_0 u^m(x) \quad (1)$$

или случая, когда операторы  $\Lambda_1, \Lambda_0$  не зависят от переменных  $x, t$ , а для решения  $u^m(x)$  ставится условие периодичности по переменному  $x$ .

Аналогично исследуется случай разностной схемы (1) при условии периодичности  $u^m(x)$ , когда операторы  $\Lambda_1, \Lambda_0$  зависят от переменного  $t$ , но не зависят от  $x$ .

Преобразование Фурье

$$u^m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{u}^m(k) e^{ikx} \quad (2)$$

сводит разностную схему (1) к системе уравнений для коэффициентов Фурье  $\bar{u}^m(k)$

$$\frac{\bar{u}^{m+1}(k) - \bar{u}^m(k)}{\tau} = \bar{\Lambda}_1^{m+1} \bar{u}^{m+1}(k) + \bar{\Lambda}_0^m \bar{u}^m(k). \quad (3)$$

Здесь матрицы  $\bar{\Lambda}_1^{m+1}, \bar{\Lambda}_0^m$  — спектральные образы операторов  $\Lambda_1^{m+1}, \Lambda_0^m$ , которые зависят от  $t$ . Оператор шага системы уравнений (3) — матрица

$$\bar{C}_{m+1,m}(k) = (E - \tau \bar{\Lambda}_1^{m+1})^{-1} (E + \tau \bar{\Lambda}_0^m). \quad (4)$$

В силу соотношения

$$\|C_{m+1,m}\|_{L_2} = \sup_k \|\bar{C}_{m+1,m}(k)\|_{U_n}$$

мы видим, что оценка нормы оператора шага  $C_{m+1,m}$  схемы (1) сводится к оценке нормы матрицы (4). Если имеет место оценка

$$\|\bar{C}_{m+1,m}(k)\| \leq 1 + C(\bar{t})\tau,$$

с константой  $C(\bar{t})$ , не зависящей от  $\tau, h, k, t \leq \bar{t}$ , то разностная схема (1) равномерно устойчива.

Если операторы  $\Lambda_1^{m+1}, \Lambda_0^m$  гладким образом зависят от переменного  $t$ , то также гладко зависят от  $t$  матрицы  $\bar{\Lambda}_1^{m+1}, \bar{\Lambda}_0^m$ . Поэтому и в этом случае необходимое условие равномерной устойчивости схемы (1) записывается в виде

$$R_\lambda(\bar{C}_{m+1,m}(k)) \leq 1 + M(\bar{t})\tau, \quad (5)$$

где  $R_\lambda(\bar{C})$  — спектральный радиус матрицы  $\bar{C}$ , а константа  $M(\bar{t})$  не зависит от  $\tau, m, k$ . Если матрица  $\bar{C}_{m+1,m}(k)$  нормальная, то условие (5) является также и достаточным для равномерной устойчивости схемы (1).

Некоторые авторы изучали необходимые и достаточные условия ограниченности нормы оператора решения  $\bar{C}_{m,0} = \bar{C}_{m,m-1} \bar{C}_{m-1,m-2} \dots \bar{C}_{1,0}$  системы (3) без предположения о нормальности матриц  $\bar{C}_{m,m-1}$ . Обзор работ этого направления помещен в книге Р. Рихтмайера, К. Мортонa [1967] (см. также

обзор работ по устойчивости разностных схем в книге А. А. Самарского, А. В. Гулина [1973]).

Теперь рассмотрим случай разностной схемы с коэффициентами, зависящими от  $x$ , но не зависящими от  $t$ . В этом случае можно рассматривать также и разностные краевые условия довольно общего типа.

Обозначим  $C = C_{m+1, m}$  — оператор шага для этой разностной краевой задачи. Матрица  $C$  зависит от  $\tau$  и сетки по переменному  $x$  (зависит от  $h$ ). Формула

$$u^{m+1} = C^{m+1} u^0 \quad (6)$$

выражает значения  $u^{m+1}$  в точках сетки через значения  $u^0$ .

Мы видим, что устойчивость разностной схемы (6) требует равномерной ограниченности нормы степеней оператора  $C$

$$\|C^m\| \leq N, \quad \tau m = t \leq \bar{t}, \quad (7)$$

при этом константа  $N$  не зависит от  $\tau$ ,  $h$ ,  $t < \bar{t}$ .

Если известен спектр оператора  $C$ , т. е. совокупность собственных значений  $\{q_k\}$  и соответствующих собственных функций матрицы  $u_k$ , т. е.

$$C u_k = q_k u_k, \quad (8)$$

необходимое условие устойчивости схемы (6) запишется в виде

$$|q_k| \leq 1 + M\tau, \quad (9)$$

где  $M$  не зависит от  $\tau$ ,  $k$ . Это следует из того, что

$$\|C\| \geq \max |q_k|.$$

Таким образом, необходимое условие устойчивости состоит в том, что все собственные значения (коэффициенты умножения)  $q_k$  матрицы перехода  $C = C_{m+1, m}$  лежат внутри круга радиуса  $1 + M\tau$  на комплексной плоскости.

Однако это условие еще далеко от достаточного и для несамосопряженных матриц  $C$  может завышать область устойчивости разностной краевой задачи. С. К. Годунов и В. С. Рябенький ввели понятие спектра семейства операторов  $C(\tau, h)$ . Это понятие вводится для однопараметрического семейства операторов перехода  $C$ , которое мы получим, полагая  $h = h(\tau)$ , тогда  $C = C(\tau) = C_\tau$ .

Комплексное число  $\lambda$  называется *точкой спектра семейства разностных операторов*  $\{C_\tau\}$ , если для любого  $\tau_0 > 0$  и  $\epsilon > 0$  найдется  $\tau < \tau_0$  такое, что неравенство

$$\|C_\tau u - \lambda u\| \leq \epsilon \|u\|$$

имеет некоторое нетривиальное решение.

С. К. Годунов и В. С. Рябенький показали, что для устойчивости разностной краевой задачи необходимо, чтобы весь

спектр семейства операторов  $\{C_\tau\}$  лежал внутри или на границе единичного круга  $|\lambda| \leq 1$ . Они же показали, что это условие не только необходимо, но и близко в определенном смысле к достаточному условию устойчивости.

Итак, мы видим, что спектральный метод позволяет исследовать устойчивость разностной краевой задачи в простой форме лишь для случая нормальной матрицы  $C$ , если же это не так, то в общем случае надо проверять выполнение условия (7) — непосредственного следствия определения устойчивости.

Сделаем несколько общих замечаний относительно спектрального метода исследования устойчивости разностной краевой задачи.

В общем случае он требует определения всего спектра матрицы перехода  $C$ , число строк (и столбцов) которой равно  $nN$ , где  $n$  — размерность вектора  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $N(h)$  — число точек по переменному  $x$ , связанных разностной схемой.

Мы видим, что во многих практически важных случаях  $nN$  — очень большое число и определение всего спектра матрицы  $C$  — задача очень трудная даже при использовании современных ЭВМ. Поэтому приходится прибегать к различного рода упрощающим гипотезам, позволяющим оценить расположение спектра разностного оператора.

В ряде задач неоднородность в коэффициенты разностной схемы вносится лишь аппроксимацией краевых условий. В этом случае целесообразно исследовать корректность разностной задачи Коши с постоянными коэффициентами, т. е. сравнительно простой задачи. После этого можно изучить отдельно влияние разностных краевых условий, рассматривая две разностные задачи на полубесконечной прямой и требуя устойчивости этих задач.

Устойчивость разностной краевой задачи ожидается при объединении требований, обеспечивающих устойчивость указанных выше разностных задач. Указанный подход был предложен К. И. Бабенко и И. М. Гельфандом (см. признак Бабенко — Гельфанда в книге С. К. Годунова, В. С. Рябенского [1973]). Он основан на том простом обстоятельстве, что для многих эволюционных задач влияние краевых условий затухает вдали от границ области и поэтому для достаточно мелкого шага  $h$  то же самое имеет место и для разностной краевой задачи.

Другие упрощающие гипотезы связаны с принципом «замораживания» коэффициентов и требованием корректности задачи Коши или краевой задачи для разностного оператора с «замороженными» коэффициентами.

**2. Принцип замороженных коэффициентов и локальный алгебраический метод.** При изучении свойств устойчивости разностных схем широко применяется метод замораживания

переменных коэффициентов, аналогичный методу, примененному в § 1 к дифференциальным уравнениям.

Схематически этот прием состоит в том, что в разностной схеме

$$u^{m+1} = C(x, t, \tau) u^m \quad (1)$$

фиксируются значения переменных  $x = x_0$ ,  $t = t_0$ . После этого исследуется постоянный оператор перехода  $C(x_0, t_0, \tau)$ , в частности, спектральным методом.

Если выполнены условия, при которых

$$\|C(x_0, t_0, \tau)\| \leq 1 + M(\bar{t}) \tau \quad (2)$$

для любых рассматриваемых значений  $x_0$ ,  $t_0$ , с константой  $M(\bar{t})$ , не зависящей от  $x_0$ ,  $t_0$ ,  $\tau$ , то есть основание надеяться, что и разностная схема (1) устойчива.

Тем не менее известны примеры, когда условие (2) не является ни необходимым, ни достаточным условием устойчивости задачи Коши (1) с переменными коэффициентами.

Однако для некоторых классов разностных задач можно показать, что условие (2) является достаточным для устойчивости разностной схемы (1).

Рассмотрим обоснование локального алгебраического метода на примере простейшей разностной схемы (схема «крест») для уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

с переменной скоростью звука  $a = a(x)$ . Эта схема на сетке  $x = jh$  ( $j = 0, 1, \dots, N+1$ ),  $t_m = m\tau$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ),  $(N+1)h = 1$ ,  $M\tau = \bar{t}$  записывается в виде

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} = a_{j-\frac{1}{2}}^2 \frac{v_j^m - v_{j-1}^m}{h}, \quad (4)$$

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\tau} = \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_j^{m+1}}{h}, \quad a_{j-\frac{1}{2}}^2 = a^2 \left( x_{j-\frac{1}{2}} \right).$$

Исключая из системы (4) величины  $u^m$ ,  $u^{m+1}$ , приходим к трехслойной схеме для  $v$ :

$$\frac{v_j^{m+1} - 2v_j^m + v_j^{m-1}}{\tau^2} = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^2 (v_{j+1}^m - v_j^m) - a_{j-\frac{1}{2}}^2 (v_j^m - v_{j-1}^m)}{h^2}. \quad (5)$$

Поставим для уравнений (5) краевые условия

$$v_0^m = v_{N+1}^m = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Обозначая буквой  $w^m$  вектор

$$w^m = \{0, v_1^m, \dots, v_N^m, 0\}, \quad (7)$$

мы видим, что общее решение разностной системы (5), (6) задается в виде

$$w^m = \sum_{k=1}^N \rho_k^m w^k, \quad (8)$$

где  $w^k = \{0, v_1^k, \dots, v_N^k, 0\}$  — собственная функция разностной краевой задачи

$$a_{j+\frac{1}{2}}^2 (v_{j+1}^k - v_j^k) - a_{j-\frac{1}{2}}^2 (v_j^k - v_{j-1}^k) = \lambda_k h^2 v_j^k, \quad (9)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad v_0^k = v_{N+1}^k = 0,$$

и  $\lambda_k$  — соответствующее собственное значение.

Задача на собственные значения (9) является разностным аналогом задачи Штурма — Лиувилля для самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Это одна из разностных краевых задач на собственные значения, которые мы рассматривали в предыдущем пункте.

Матрица системы уравнений (9) является симметричной трехдиагональной якобиевой матрицей. Как известно (см., например, Ф. Р. Гантмахер [1967]), такая матрица имеет простую структуру и при  $a(x) > 0$  ее собственные значения  $\lambda_k$  вещественны и отрицательны.

Система уравнений (9) имеет  $N$  различных собственных значений, которым соответствует  $N$  собственных векторов  $w^1, \dots, w^N$ , образующих ортонормированный базис в пространстве  $E_N$ . Отсюда и из формулы (8) сразу следует, что норма оператора решения  $S^m$  схемы (5) или (4) не превосходит (и совпадает) с  $\max_k |\rho_k^m|$ .

Для  $\rho_k^m$  из (5) и (9) имеем уравнение

$$\frac{\rho_k^{m+1} - 2\rho_k^m + \rho_k^{m-1}}{\tau^2} = \lambda_k \rho_k^m,$$

откуда следует, что

$$\rho_k^m = A_k (z_{k1})^m + B_k (z_{k2})^m, \quad (10)$$

где коэффициенты умножения  $z_{k1}$  и  $z_{k2}$  — корни характеристического уравнения

$$\frac{z_k^2 - 2z_k + 1}{\tau^2} = \lambda_k z_k. \quad (11)$$

Из формулы (10) следует, что критерий равномерной устойчивости рассматриваемой схемы имеет вид

$$|z_{ki}| \leq 1 + M\tau \quad (k = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2),$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $\tau$ ,  $h$ ,  $k^*$ .

Однако в таком виде указанный критерий недостаточно эффективен, так как для произвольной  $a(x)$  собственные значения  $\lambda_k$  неизвестны. Мы сформулируем сейчас, а затем докажем следующий эффективный критерий устойчивости.

Пусть  $\lambda_k(x)$  — собственные значения локального разностного оператора (5), соответствующего значениям  $a_{j+\frac{1}{2}} = a(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $z_{ki}(x)$  — соответствующие  $\lambda_k(x)$  по формуле (11) коэффициенты умножения. Тогда, если оценки

$$|z_{ki}(x)| \leq 1 + M\tau \quad (k = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2) \quad (12)$$

имеют место для любых  $x \in [0, 1]$  и  $M$  не зависит от  $x$ ,  $\tau$ ,  $h$ ,  $k$ , то разностная схема (5) (или (4)) равномерно корректна.

Указанный локальный критерий сводит задачу определения корректности разностной схемы с переменными коэффициентами к существенно более простой алгебраической задаче определения устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами.

Для постоянного  $a_{j+\frac{1}{2}} = a(x)$  система (9) имеет решения

$$\begin{aligned} v_j &= \sin \pi k x_j = \sin \pi k j h, \\ \lambda_k &= -\frac{4a^2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнения (11) мы видим, что  $z_{k1}z_{k2} = 1$ , следовательно, если  $\tau^2\lambda_k \geq -4$ , то  $|z_{k1}| = |z_{k2}| = 1$ . Поэтому если выполнено условие

$$\kappa(x) = a(x) \frac{\tau}{h} \leq 1 \quad (14)$$

при любом  $x \in [0, 1]$ , то  $\tau^2\lambda_k(x) \geq -4$  и выполняется локальный критерий устойчивости (12). Условие (14) есть локальный критерий Куранта \*\*).

Докажем, следуя работе Ю. Е. Бояринцева [1966], достаточность сформулированного выше критерия (12) для равномерной устойчивости разностной схемы (4) или (5). Доказательство

\*) Подобным образом проводились исследования устойчивости в работах В. С. Рябенского, А. Ф. Филиппова [1956], Дж. Дугласа [1956].

\*\*\*) Впервые критерий (14) как условие сходимости разностной схемы «крест» был сформулирован для волнового уравнения с постоянной скоростью звука  $a$  в работе Р. Куранта, К. Фридрихса, Г. Леви [1928].

оправдано на свойстве монотонности характеристических чисел трехдиагональных матриц.

Будем рассматривать якобиевы симметричные трехдиагональные матрицы  $B_s = (b_{ij}^s)$ ,  $s = 1, 2$ . Матрица  $B_1$  построена из функции  $a_1(x)$ ;  $B_2$  — из функции  $a_2(x)$  по правилу

$$b_{ij}^s = \left(a_{i-\frac{1}{2}}^s\right)^2 \delta_{i-1}^j - \left[\left(a_{i-\frac{1}{2}}^s\right)^2 + \left(a_{i+\frac{1}{2}}^s\right)^2\right] \delta_i^j + \left(a_{i+\frac{1}{2}}^s\right)^2 \delta_{i+1}^j, \\ i, j = 1, 2, \dots, N; \quad a_1^2(x), \quad a_2^2(x) > 0.$$

Рассмотрим пучок матриц

$$B(\alpha) = B_1 + \alpha(B_2 - B_1).$$

Обозначим через  $\omega(\alpha)$  и  $\lambda(\alpha)$  нормированный собственный вектор и собственное значение матрицы  $B(\alpha)$ ; тогда имеем равенства

$$B(\alpha)\omega(\alpha) = \lambda(\alpha)\omega(\alpha), \quad B'(\alpha) = B_2 - B_1, \\ B'(\alpha)\omega(\alpha) + B(\alpha)\omega'(\alpha) = \lambda'(\alpha)\omega(\alpha) + \lambda\omega'(\alpha). \quad (15)$$

Умножая скалярно (15) на  $\omega(\alpha)$ , учитывая ортогональность  $\omega(\alpha)$  и  $\omega'(\alpha)$  (в силу условия  $|\omega(\alpha)| = 1$ ), получаем

$$([B_2 - B_1]\omega(\alpha), \omega(\alpha)) = \lambda'(\alpha). \quad (16)$$

Если  $a_2^2(x) \geq a_1^2(x)$ , то  $([B_2 - B_1]\omega, \omega) \leq 0$  и из равенства (16) следует

$$\lambda'(\alpha) \leq 0, \quad \lambda_k^2 \leq \lambda_k < 0, \quad |\lambda_k^2| \geq |\lambda_k|,$$

где  $\lambda_k^s$  — собственные значения матрицы  $B_s$ .

Таким образом, мы доказали монотонную зависимость корней  $\lambda_k$  от функции  $a^2(x)$ .

Далее рассмотрим зависимость корней  $z_k$  уравнения (11) от  $\lambda_k$ . Если корни  $z_{k1}$ ,  $z_{k2}$  уравнения (11) сопряженные, то они оба равны по модулю 1. Если же они вещественны, то

$$\max\{|z_{k1}|, |z_{k2}|\} = \frac{\tau^2}{2} |\lambda_k| (1 + \sqrt{1 - 4/\tau^2 |\lambda_k|}) - 1. \quad (17)$$

Отсюда следует, что увеличению  $|\lambda_k|$  соответствует неубывание  $\max\{|z_{k1}|, |z_{k2}|\}$ .

Эти свойства монотонности  $\lambda_k$  и  $\max_s |z_{ks}|$  позволяют доказать локальный критерий устойчивости. Действительно, если все локальные схемы устойчивы, то, в частности, устойчива схема с  $a_0^2 = \max_x a^2(x)$ . Но тогда по свойству монотонности для схемы с  $a^2 = a^2(x) \leq a_0^2$ ,  $\lambda_k$  (при  $a^2 = a^2(x)$ ) меньше по модулю собственного числа схемы с  $a^2 = a_0^2$ . По свойству моно-

тонности  $\max |z_{ks}|$  при  $a^2 = a^2(x)$  будет меньше соответствующей величины при  $a^2 = a_0^2$ . Отсюда следует устойчивость схемы с переменным коэффициентом  $a^2(x)$ , что и требовалось доказать.

Ю. Е. Бояринцев [1966] доказал локальный критерий устойчивости и для неявной схемы

$$\frac{v^{m+1} - 2v^m + v^{m-1}}{\tau^2} = \frac{\Delta_{-1}}{h} \sum_{\alpha=-1}^1 \gamma_{\alpha} (a^2)^{m+\alpha} \frac{\Delta_1}{h} v^{m+\alpha} \quad (18)$$

с весами  $\gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1$  ( $\gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 = 1$ ) и произвольной гладкой функции  $a^2 = a^2(x, t) > 0$ . Тогда локальные разностные операторы  $\Lambda$  зависят от  $x, t$  и они некоммутативны. Локальный критерий в этом случае основан на следующей теореме сравнения:

*Если разностная схема (18) устойчива для  $a^2(x, t) = a_2^2(x, t)$ , то она устойчива и для  $a^2(x, t) = a_1^2(x, t) \leq a_2^2(x, t)$ . Если разностная схема (18) неустойчива для  $a^2 = a_1^2(x, t)$ , то она неустойчива и для  $a^2 = a_2^2(x, t) \geq a_1^2(x, t)$ .*

Отсюда сразу следует локальный критерий устойчивости для схемы (18): если все локальные схемы (18) устойчивы (неустойчивы), то устойчива (неустойчива) и схема (18).

П. Лакс [1960] доказал справедливость локального критерия Неймана для явных разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

с переменной матрицей  $A$ .

Приведем еще одну теорему (Г. Крайс [1964]), обосновывающую критерий локальной устойчивости для явной схемы

$$u^{m+1} = C(\tau, x) u^m, \quad (20)$$

аппроксимирующей гиперболическую систему (19) с матрицей  $A = A(x)$ :

*Пусть матрицы  $A(x)$  и  $C(\tau, x)$  эрмитовы, равномерно ограничены и равномерно липшиц-непрерывны по  $x$ . Пусть схема (20) является диссипативной порядка  $2r$  (см. § 1, п. 3) и аппроксимирует систему (19) с порядком аппроксимации  $2r - 1$  ( $r$  — натуральное число). Тогда разностная схема (20) устойчива.*

В этой теореме диссипативность предполагается *равномерной по переменному  $x$* ; для спектрального образа  $\bar{C}(\tau, x, k)$  локального оператора  $C(\tau, x)$  ( $x$  — фиксировано) и его соб-

и определенных значений  $q = q_i(\tau, x, k)$  при  $|k| \leq \pi/h$  выполнены условия

$$|q_i(\tau, x, k)| \leq 1 - \delta |kh|^{2r},$$

где  $\delta$  не зависит от  $i = 1, \dots, n, x, k$ .

В заключение отметим, что имеются работы, в которых обосновывается критерий локальной устойчивости и для разностных схем, аппроксимирующих уравнения и системы уравнений параболического типа (см., например, Н. Н. Яненко, И. Е. Бояринцев [1961], И. В. Коновальцев [1968], Г. Стрэнг [1966]).

**3. Метод мажорантных или априорных оценок.** Этот метод исследования устойчивости разностных схем широко применяется в практике численного решения задач математической физики. Для многих задач с переменными коэффициентами он является практически единственным, позволяющим оценить временной шаг  $\tau$ , при котором соблюдается устойчивость. Еще одно достоинство этого метода состоит в том, что во многих физических задачах он имеет прямую аналогию с так называемым *методом энергетических неравенств* или *методом интеграла энергии* в теории дифференциальных уравнений, который, как известно, имеет простой физический смысл — выполнения закона сохранения энергии.

Простейшей мажорантной оценкой является оценка для схем с положительными коэффициентами. Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \xi(x, t) \frac{\partial r}{\partial x} = g(x, t) r, \quad \xi(x, t) \geq 0 \quad (1)$$

разностную схему

$$\frac{r^{m+1}(x) - r^m(x)}{\tau} + \xi^m(x) \frac{r^m(x) - r^m(x-h)}{h} = g^m(x) r^m(x) \quad (2)$$

или

$$r^{m+1}(x) = [1 - \kappa^m(x)] r^m(x) + \kappa^m(x) r^m(x-h) + \tau g^m(x) r^m(x), \quad (3)$$

где

$$\kappa^m(x) = \xi^m(x) \frac{\tau}{h}, \quad \xi^m(x) = \xi(x, m\tau).$$

При условии

$$0 \leq 1 - \kappa^m(x) \leq 1 \quad (4)$$

справедлива оценка

$$|r^{m+1}(x)| \leq [1 - \kappa^m(x)] |r^m(x)| + \kappa^m(x) |r^m(x-h)| + \tau |g^m(x)| |r^m(x)|. \quad (5)$$

Выбирая в качестве нормы решения  $r^m(x)$  величину  $\|r^m\| = \max_x |r^m(x)|$ , находим из оценки (5)

$$\|r^{m+1}\| \leq (1 + g\tau) \|r^m\|, \quad (6)$$

где  $g = \max_{m, x} |g^m(x)| \leq \max_{x, t} |g(x, t)|$ .

Отсюда следует равномерная устойчивость схемы (2) в пространстве  $C(-l, l)$  ( $l$  — любое) при выполнении условия устойчивости (4)

$$0 \leq \kappa^m(x) = \xi^m(x) \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (7)$$

Заметим, что при  $\xi^m(x) < 0$  схема (2) неустойчива.

Покажем равномерную устойчивость схемы (2) при условиях периодичности в  $L_2(-l, l)$ , в предположении периодичности коэффициентов  $\xi(x, t)$  и  $g(x, t)$  и липшиц-непрерывности  $\xi(x, t)$  по переменному  $x$ .

Умножая равенство (3) на  $r^{m+1}(x)$  и учитывая (4), имеем

$$\begin{aligned} [r^{m+1}(x)]^2 &= [1 - \kappa^m(x)] r^m(x) r^{m+1}(x) + \kappa^m(x) r^m(x - h) r^{m+1}(x) + \\ &+ \tau g^m(x) r^m(x) r^{m+1}(x) \leq \frac{1 - \kappa^m(x)}{2} [r^m(x)]^2 + \\ &+ \frac{1 - \kappa^m(x)}{2} [r^{m+1}(x)]^2 + \frac{\kappa^m(x)}{2} [r^m(x - h)]^2 + \frac{\kappa^m(x)}{2} [r^{m+1}(x)]^2 + \\ &+ \tau g \frac{[r^m(x)]^2 + [r^{m+1}(x)]^2}{2} = \frac{1}{2} [r^{m+1}(x)]^2 + \frac{1 - \kappa^m(x)}{2} [r^m(x)]^2 + \\ &+ \frac{\kappa^m(x)}{2} [r^m(x - h)]^2 + \tau g \frac{[r^m(x)]^2 + [r^{m+1}(x)]^2}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - g \frac{\tau}{2}\right) [r^{m+1}(x)]^2 &\leq \\ &\leq \frac{1 - \kappa^m(x)}{2} [r^m(x)]^2 + \frac{\kappa^m(x)}{2} [r^m(x - h)]^2 + \frac{g\tau}{2} [r^m(x)]^2 = \\ &= \frac{1 - \kappa^m(x)}{2} [r^m(x)]^2 + \frac{\kappa^m(x - h)}{2} [r^m(x - h)]^2 + \frac{g\tau}{2} [r^m(x)]^2 + \\ &+ \frac{\kappa^m(x) - \kappa^m(x - h)}{2} [r^m(x - h)]^2. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по  $x$  в пределах от  $-l$  до  $l$ , имеем

$$\|r^{m+1}\| \leq \frac{1 + g\tau + C\tau}{1 - g\tau} \|r^m\|^2 = [1 + O(\tau)] \|r^m\|^2, \quad (8)$$

где положено

$$C = \sup_{h, x, m} \left| \frac{\xi^m(x) - \xi^m(x - h)}{h} \right|, \quad \|r^m\|^2 = \int_{-l}^l |r^m(x)|^2 dx.$$

Из этого следует равномерная устойчивость схемы (2) в  $L_2$ , если выполнится условие (7) и  $\xi^m(x)$  липшиц-непрерывна.

Указанные оценки переносятся без больших изменений на схемы, аппроксимирующие системы уравнений в инвариантах

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k^k r_k, \quad \alpha, k = 1, \dots, n.$$

В (9) Фридрихс [1954] ввел общее понятие положительных схем разностных схем с положительными матрицами — и установил для них достаточный критерий корректности в  $L_2$ . Мы сформулируем критерий Фридрихса, ограничившись случаем одного пространственного переменного.

Пусть линейная система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

аппроксимируется явной разностной схемой

$$u^{m+1}(x) = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha(x, t, \tau, h) u^m(x + \alpha h). \quad (10)$$

Здесь  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $B_\alpha = \|b_{ij}^\alpha\|$  — действительные матрицы в  $E_n$ . Пусть схема (10) удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha = E, \quad (11)$$

которое означает, что постоянный вектор  $u^m(x) \equiv \text{const}$  является решением (10). Тогда схема (10) аппроксимирует уравнение (9) при условии

$$\frac{h}{\tau} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} \alpha B_\alpha = A + O(\tau). \quad (12)$$

Критерий Фридрихса формулируется следующим образом.

Схема (10) корректна в  $L_2$ , если матрицы  $B_\alpha$  симметричны, положительны и липшиц-непрерывны по  $x$ , так что выполняется условие

$$\frac{h}{\tau} \left\| \frac{B_\alpha(x+h) - B_\alpha(x)}{h} \right\| \leq b. \quad (13)$$

Умножая равенство (10) скалярно \*) на  $u^{m+1}$ , принимая во внимание условие (11) и неравенства

$$(B_\alpha u, v) \leq \sqrt{(B_\alpha u, u)} \sqrt{(B_\alpha v, v)} \leq \frac{(B_\alpha u, u) + (B_\alpha v, v)}{2},$$

\*) Имеется в виду скалярное произведение в пространстве действительных векторов  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,

$$(u, v) = u_\alpha v_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

имеем

$$\begin{aligned}
 (u^{m+1}, u^{m+1}) &= \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha(x) u^m(x + \alpha h), u^{m+1}(x)) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha(x) u^{m+1}(x), u^{m+1}(x) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha(x) u^m(x + \alpha h), u^m(x + \alpha h)) = \\
 &= \frac{1}{2} (u^{m+1}(x), u^{m+1}(x)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha(x + \alpha h) u^m(x + \alpha h), u^m(x + \alpha h)) - \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} ((B_\alpha(x + \alpha h) - B_\alpha(x)) u^m(x + \alpha h), u^m(x + \alpha h)). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Интегрируя неравенство (14) в пределах от  $-l$  до  $l$ , находим

$$\begin{aligned}
 \|u^{m+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u^{m+1}\|^2 + \frac{1}{2} b\tau \|u^m\|^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha(x + \alpha h) u^m(x + \alpha h), u^m(x + \alpha h)) dx,
 \end{aligned}$$

где положено

$$\|u\|^2 = \int_{-l}^l (u(x), u(x)) dx.$$

Учитывая периодичность функции  $u(x)$  и условие (11), пределаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^l \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha(x + \alpha h) u^m(x + \alpha h), u^m(x + \alpha h)) dx &= \\
 &= \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} \int_{-l}^l (B_\alpha(x) u^m(x), u^m(x)) dx = \int_{-l}^l \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha u^m(x), u^m(x)) dx = \\
 &= \int_{-l}^l \left( \left( \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha \right) u^m(x), u^m(x) \right) dx = \|u^m\|^2.
 \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\|u^{m+1}\|^2 \leq (1 + b\tau) \|u^m\|^2. \quad (15)$$

Утверждение доказано.

Отметим, что для положительных разностных схем (10) справедлив также локальный критерий устойчивости.

Схемы с положительными коэффициентами и матрицами составляют ограниченный, хотя и весьма важный класс разностных схем. Как правило, это схемы первого порядка точности, и которых производные аппроксимируются односторонними разностными отношениями. При аппроксимациях более высокого порядка точности, когда берутся центрированные разности, мы, как правило, не получаем положительных коэффициентов. В этом случае мажорантные оценки устойчивости усложняются. Любого рода оценки носят название *априорных оценок*.

Метод априорных оценок для разностных схем аналогичен соответствующему методу для дифференциальных уравнений, однако в разностном случае его реализация встречает большие трудности. Это связано, конечно, со спецификой разностного анализа, в котором многие соотношения обычного анализа или не имеют места, или принимают более громоздкий вид.

Рассмотрим метод априорных оценок на примере уравнений акустики (3.2.3), для интегрирования которых используем неиную схему:

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = (a^2)^{m+1} \frac{\Delta_1}{h} v^{m+1}, \quad (16)$$

$$\frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} = \frac{\Delta_{-1}}{h} u^{m+1}, \quad (17)$$

$$\Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1}.$$

Априорная оценка для этой схемы аналогична энергетическому неравенству для системы (3.2.3), установленному в п. 3. Умножая (16) на  $2u^{m+1}$ , (17) — на  $2(a^2)^{m+1}v^{m+1}$  и складывая, получим после несложного преобразования

$$\begin{aligned} & [(u^{m+1})^2 + (a^{m+1}v^{m+1})^2] - [(u^m)^2 + (a^m v^m)^2] = \\ & - (u^{m+1} - u^m)^2 - [a^{m+1}(v^{m+1} - v^m)]^2 + [(a^{m+1})^2 - (a^m)^2](v^m)^2 + \\ & + \frac{2\tau}{h} (a^{m+1})^2 (u^{m+1}\Delta_1 v^{m+1} + v^{m+1}\Delta_{-1}u^{m+1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Принимая во внимание формулы разностного дифференцирования произведения

$$\Delta_1(fg) = (\Delta_1 f)g + (T_1 f)\Delta_1 g = (\Delta_1 f)T_1 g + f\Delta_1 g,$$

$$\Delta_{-1}(fg) = (\Delta_{-1} f)g + (T_{-1} f)\Delta_{-1} g = (\Delta_{-1} f)T_{-1} g + f\Delta_{-1} g,$$

преобразуем выражение

$$(a^{m+1})^2 (u^{m+1}\Delta_1 v^{m+1} + v^{m+1}\Delta_{-1}u^{m+1}) = d(u^{m+1}, v^{m+1})$$

к следующему виду:

$$d(u^{m+1}, v^{m+1}) = \Delta_1 [(a^{m+1})^2 v^{m+1} T_{-1} u^{m+1}] - u^{m+1} T_1 v^{m+1} \Delta_1 (a^{m+1})^2.$$

Тогда из (18) следует

$$\begin{aligned} & [(u^{m+1})^2 + (a^{m+1}v^{m+1})^2] - [(u^m)^2 + (a^m v^m)^2] \leq \\ & \leq \frac{2\tau}{h} \Delta_1 [(a^{m+1})^2 v^{m+1} T_{-1} u^{m+1} + b_1 \tau [(u^m)^2 + (a^m v^m)^2] + \\ & + b_2 \tau [(u^{m+1})^2 + T_1 (a^{m+1} v^{m+1})^2], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$b_1 = \sup_{x, m, \tau} \left| \frac{(a^{m+1})^2 - (a^m)^2}{\tau (a^m)^2} \right|, \quad b_2 = \sup_{x, m, h} \left| \frac{1}{\sqrt{T_1 (a^{m+1})^2}} \frac{\Delta_1 (a^{m+1})^2}{h} \right|. \quad (20)$$

Интегрируя (19) по  $x$ , получаем

$$\|\Phi^{m+1}\|^2 - \|\Phi^m\|^2 \leq b_1 \tau \|\Phi^m\|^2 + b_2 \tau \|\Phi^{m+1}\|^2,$$

где

$$\|\Phi\|^2 = \int_{-l}^l (u^2 + a^2 v^2) dx.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\Phi^{m+1}\|^2 \leq \frac{1 + b_1 \tau}{1 - b_2 \tau} \|\Phi^m\|^2,$$

доказывающая безусловную равномерную корректность схемы (16), (17) в случае липшиц-непрерывной функции  $a(x, t)$ .

Аналогичные оценки устанавливаются для схемы, в которой величины на верхнем слое входят с весом  $\alpha$ , на нижнем — с весом  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} &= \alpha_1 (a^{m+1})^2 \frac{\Delta_1}{h} v^{m+1} + \beta_1 (a^m)^2 \frac{\Delta_1}{h} v^m, \\ \frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} &= \frac{\Delta_{-1}}{h} [\alpha_2 u^{m+1} + \beta_2 u^m], \\ \alpha_i + \beta_i &= 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

В заключение этого пункта отметим, что метод априорных оценок и энергетических неравенств применяется очень часто для оценки устойчивости разностных схем с переменными коэффициентами, в том числе с переменным шагом  $h_i$  по пространственной координате  $x$ . В монографии А. А. Самарского и А. В. Гулина [1973] приведено значительное число разностных схем, для которых применим этот метод.

**4. Практический подход к проблеме устойчивости вычислений. Применение метода Пикара для подавления неустойчивости.** Понятие устойчивости и неустойчивости разностной схемы, обсуждавшееся в предыдущих пунктах, имеет асимптотический характер, т. е. неустойчивость схемы проявляется при

$\tau > 0$  или в другом плане при  $t \rightarrow \infty$  ( $\tau = \text{const}$ ). Тем не менее неустойчивость разностной схемы возникает в практических вычислениях и при конечном шаге  $\tau$  и притом очень быстро. Она проявляется в быстром росте осциллирующих по пространству и времени решений, соответствующих краю спектра, и приводит к переполнению и «авосту» ЭВМ.

Поэтому имеет смысл обсудить вопрос о практических методах решения дифференциальных уравнений с конечными шагами  $\tau, h > 0$ , которые избавляют от эффектов неустойчивости. Мы рассмотрим их на примере эволюционной задачи для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x)u, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

с периодическими с периодом  $2l$  по переменному  $x$  начальной функцией  $u_0(x)$  и матрицей-оператором  $L(x)$ . Под  $L(x)$  можно подразумевать дифференциальный оператор, хотя рассмотрение возможно и для случая интегрального или интегро-дифференциального оператора.

Предположим, что на отрезке  $[0, 2l]$  мы ввели сетку  $x_j = jh, j = 0, 1, \dots, N; h = \frac{2l}{N}$ , которую мы считаем достаточно мелкой для приемлемого описания  $u(x, t)$  через ее значения в точках  $u(x_j, t)$ .

Аппроксимируя на этой сетке оператор  $L(x)$ , мы заменяем его матричным оператором  $\Lambda(h)$ . Представление об ошибке такой аппроксимации получим, оценивая

$$\|(\Lambda(h) - L(x))u\|$$

на решениях (а чаще просто на достаточно гладких функциях)  $u(x, t)$  задачи (1), (2). Очень удобное представление этой *погрешности пространственной аппроксимации* дает сравнение спектров разностного оператора  $\Lambda(h)$  и исходного  $L(x)$ .

После того, как выбрана аппроксимация  $\Lambda(h) \sim L(x)$ , предстоит выбрать разностную схему для численного решения задачи (1), (2) по времени. Мы сравним и обсудим здесь три схемы приближенного решения задачи (1), (2):

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} = \Lambda(h)u_i^m, \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad (3)$$

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} = \Lambda(h)u_i^{m+1}, \quad u_i^0 = u_0(x_i) \quad (4)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \Lambda(h)u_i, \quad u_i(0) = u_0(x_i), \quad (5)$$

Схема (3), очевидно, — явная схема первого порядка точности по  $\tau$ , схема (4) — неявная схема того же порядка точности по  $\tau$ , наконец, (5) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно рассматривать как предел схемы (3) или (4) при  $\tau \rightarrow 0$  (или же считать ее схемой бесконечного порядка точности по  $\tau$ ).

Чтобы обсуждение было более предметным, мы будем считать, что оператор  $L(x)$  имеет собственные значения  $\{\lambda_k\}$ , для которых

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq a, \quad \operatorname{Re} \lambda_{k+1} \leq \operatorname{Re} \lambda_k, \quad \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Условия (6) типичны для многих задач математической физики.

Спектр разностного оператора  $\Lambda(h)$ , как мы знаем из § 2, конечен; он состоит из  $nN = \bar{N}$  собственных значений  $\lambda_k(h)$  и соответствующих им собственных векторов. Будем считать, что собственные значения  $\lambda_k(h)$  также подчинены условиям (6) (при больших  $\bar{N}$ ) и они неплохо аппроксимируют первые собственные значения  $\lambda_k$  и сохраняют качественное поведение  $\lambda_k$  в остальной части спектра. Никаких ложных корней  $\lambda_k(h)$  на краю спектра (при  $k \sim \bar{N}$ ) нет, иначе все три схемы окажутся неприемлемыми для расчета задачи (1), (2).

Ограничение на шаг  $\tau$  для явной схемы (3) вытекает из дисперсионного соотношения

$$\max_k |\rho_k| = \max_k |e^{0_k \tau}| = \max_k |1 + \lambda_k(h) \tau| < 1. \quad (7)$$

Для неявной схемы при выполнении (6) обычно нет ограничений на шаг  $\tau$  (например, при  $a = 0$ ); это ограничение может возникнуть, однако, если нет хороших способов решения системы линейных уравнений (4) относительно  $u_i^{m+1}$  и применяется метод последовательных приближений, например,

$$u_i^{(s+1)} = u_i^m + \tau \Lambda(h) u_i^{(s)}. \quad (8)$$

В этом случае для сходимости при  $s \rightarrow \infty$  итераций (8) нужно потребовать  $\tau \|\Lambda(h)\| < 1$  и

$$\tau \max_k |\lambda_k(h)| < 1. \quad (9)$$

Наконец, система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) при выполнении (6) представляет собой «устойчивую» на любом конечном интервале  $[0, \bar{t}]$  систему.

Вопрос о том, как решать систему (5), с каким шагом  $\tau$  и не очень ли это трудоемко, имеет много аспектов. Конечно, можно пользоваться готовыми программами интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, например, использующими методику Рунге — Кутта высокого порядка точности,

автоматическим выбором шага и т. п. При этом может произойти увеличение времени работы ЭВМ, так как эти программы не учитывают специфики систем вида (5), характерной для уравнений математической физики. Чтобы иметь возможность обсудить схему (5), мы предложим конкретный способ решения этой системы — метод последовательных приближений Пикара. Этот метод, как известно, применим для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных и зависящих от  $t$  (см., например, Ф. Хартман [1964]). Он превращается в особенно удобный вычислительный процесс для линейных систем (5) с постоянными (не зависящими от  $t$ ) матрицами  $\Lambda(h)$ . Очевидно, что этот процесс обобщается на случай переменных матриц  $\Lambda(h)$  и нелинейных систем (5); столь же очевидно, что при этом возникнут некоторые усложнения в трудности.

В работе Б. Л. Рождественского [1974] описаны некоторые вопросы применения метода Пикара для численного решения задач математической физики. Здесь мы очень кратко остановимся лишь на основных моментах.

Решение системы (5) на одном шаге от  $t_m$  до  $t_{m+1} = t_m + \tau$  сводится формулами

$$u^{m+1} = e^{\tau \Lambda(h)} u^m = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\tau^s}{s!} \Lambda^s(h) u^m, \quad (10)$$

где  $u^m = \{u_j^m\} = \{u_j(t_m)\}$ .

Ряд (10), как известно, *сходится при любом  $\tau$* . Это обстоятельство является очень важным, если мы заинтересованы в счете с большим шагом  $\tau$ . Второе важное обстоятельство состоит в том, что при увеличении шага  $\tau$  не происходит уменьшения точности решения задачи (1), (2), так как мы имеем возможность вести вычисления суммы ряда (10) с заданной точностью.

Таким образом, при решении системы (5) мы не вносим дополнительной погрешности, *погрешности временной аппроксимации*, которая присуща схемам (3) и (4). Следует, однако, иметь в виду, что иногда погрешность временной аппроксимации уменьшает или даже уничтожает погрешность пространственной аппроксимации, как в случае явной схемы для уравнения  $u_t + au_x = 0$  при  $\kappa = a\tau/h = 1$ .

Вычисление конечной суммы ряда (10) может быть организовано в виде удобного вычислительного процесса, в котором вычисление каждого следующего члена ряда эквивалентно по своему работному времени одному шагу явной схемы (3); каждый следующий член ряда (10) увеличивает на единицу порядок точности по  $\tau$  схемы (5).

Таким образом, в принципе можно задавать столь высокую точность вычисления суммы ряда (10), варьируя число учитываемых членов ряда, что соотношение (10)

$$u^{m+1} = e^{\tau\Lambda(h)} u^m$$

будет выполнено с заданной точностью.

Отсюда следует, что норма оператора шага схемы (5) ограничена

$$\|e^{\tau\Lambda(h)}\| \leq e^{\tau\Lambda}$$

(при отсутствии вырождения).

Однако при практическом вычислении на ЭВМ суммы ряда (10) возникает ограничение на величину  $\tau$  сверху. Понять причину этого ограничения очень легко. Представим себе, что мы вычисляем с помощью ряда (10) величину  $e^{-\lambda\tau}$ ,  $\lambda > 0$ , где  $\lambda\tau$  — значительная величина. Тогда  $e^{-\lambda\tau}$  близка к нулю, однако многие члены ряда (10) велики и, чтобы вычислить сумму ряда (10) с определенной точностью, скажем с пятью десятичными знаками, нужно вести вычисления членов и конечных сумм ряда (10) со значительно большим числом знаков.

Однако вычисления в ЭВМ ведутся хотя и с большим, но ограниченным числом знаков, и это ставит ограничение на величину  $\tau$ . Конкретная граница для  $\tau$  зависит от представления чисел в ЭВМ, на которой проводятся вычисления: длины мантисы числа, длины порядка числа и некоторых других деталей.

Для отечественных ЭВМ с 48-разрядным двоичным представлением числа эта граница задается неравенством

$$\tau \|\Lambda(h)\| \leq c \sim 20 \div 30. \quad (11)$$

Если мы вспомним, что для явной схемы ограничение на шаг имеет вид

$$\tau \|\Lambda(h)\| \leq d \simeq 2,$$

то приходим к выводу, что метод Пикара позволяет вести устойчивый счет по схеме (5) с шагом  $\tau$  значительно большим, чем допускает явная схема. Это возможно потому, что мы решаем эволюционную задачу (5) достаточно точно, а для эволюционных задач высокочастотные гармоники быстро затухают. Задаваясь определенной точностью вычисления ряда (10), мы автоматически подавляем увеличением числа членов ряда (и более точным вычислением  $e^{\tau\Lambda}$ ) эти высокочастотные гармоники, которым отвечает большое затухание.

Чтобы глубже понять сущность метода Пикара, следует представить систему (5) в базисе собственных векторов матрицы  $\Lambda(h)$ . Тогда система (5) будет иметь тот же самый вид, но с диагональной матрицей  $\Lambda'(h) = \text{diag} \{\lambda_k(h)\}$ . Поэтому становится ясным, что вычисление по формуле (10) дает высокую

точность решения системы (5), а чем выше точность решения (5), тем выше свойство устойчивости результатов решения, так как система (5) обладает свойством эволюционности.

Вопрос о целесообразности применения метода Пикара вместо явной (3) и неявной (4) схем зависит от нескольких факторов и в первую очередь от соотношения погрешности временной и пространственной аппроксимаций, вносимых схемами (3), (4). Если оператор  $\Lambda(h)$  аппроксимирует  $L(x)$  с высокой точностью, то целесообразно применение схем высокого порядка точности по  $\tau$ , что автоматически обеспечивается применением метода Пикара. При этом можно применять шаг  $\tau$ , приблизительно в 10 раз больший, чем следует из условия Куранта, без потери устойчивости. Потеря устойчивости в методе Пикара имеет специфический характер, о котором мы говорили: либо происходит переполнение АУ ЭВМ, либо результаты становятся весьма неточными и носят спорадический характер.

Наоборот, для разностных схем (3), (4), у которых условие устойчивости (или сходимость итераций) допускает шаг  $\tau$  значительно больший, чем он требуется из соображений точности временной аппроксимации, сравнимой с точностью пространственной аппроксимации, то вполне возможно, что явная схема в этом случае более целесообразна, чем метод Пикара.

Отметим также, что для линейных задач (1), (2) можно добиться весьма высокой эффективности, вычисляя не одно решение системы (5), а фундаментальную матрицу  $e^{\tau\Lambda(h)}$  этой системы с помощью ряда по  $\tau$ . Тогда для эволюционных задач можно получать решение системы (5) практически без потери точности для очень больших  $t > 0$ , пользуясь формулами

$$e^{2\tau\Lambda(h)} = [e^{\tau\Lambda(h)}]^2, \quad e^{4\tau\Lambda(h)} = [e^{2\tau\Lambda(h)}]^2 \dots$$

В настоящее время проведено несколько расчетов различных задач математической физики, использующих метод Пикара, показавших его эффективность (см., например, Б. Л. Рождественский [1974], А. Р. Пинский, А. И. Рузанов [1976]).

Сделаем также еще одно замечание о возможностях применения методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений к решению задачи (1), (2) с помощью схемы (5).

В последние годы были развиты эффективные методы численного интегрирования так называемых «жестких систем» обыкновенных дифференциальных уравнений (stiff equations), которые характеризуются большим разбросом характеристических показателей  $\lambda_k$  системы (5) (в общем случае нелинейной). В частности, в этих методах также предполагается выполнение свойств (6), и, более того, при этом считается, что  $-\operatorname{Re} \lambda_k$  очень

велико для больших  $k$ . Идея метода, развитого Гиром и Нордзиком, состоит в применении схем интегрирования высокого порядка точности, которые в области умеренных по модулю  $\lambda_k$  обеспечивают высокую точность, а при  $\operatorname{Re} \lambda_k < -b$ , где  $b$  достаточно велико, — лишь устойчивость счета. Последнее означает, что, например, для линейной системы (5) в области аппроксимации спектра  $[0, k_1]$  обеспечивается хорошая точность воспроизведения  $\lambda_k$  в счете по времени; промежуточная часть и край спектра существенно искажаются схемой интегрирования по времени, однако при этом обеспечивается затухание соответствующих этой части спектра собственных функций, т. е. здесь обеспечивается лишь устойчивость. Методы интегрирования «жестких систем» описаны, например, К. Гиром [1967, 1969], А. Нордзиком [1962], см. также Б. В. Павлов и А. Я. Повзнер [1973].

Конечно, эти методы интегрирования могут быть применены и к решению задачи Коши для системы (5). Однако для наиболее характерных задач математической физики типа (1), (2) они оказываются, как правило, менее эффективными, чем метод Пикара. Причина этого состоит в том, что в большинстве задач математической физики стремятся сделать пространственную аппроксимацию  $\Lambda(h) \sim L(x)$  сравнительно неплохой даже на краю спектра  $k \sim k_0$ . Например, мы видели в п. 5 § 2, что в области аппроксимации оператором  $\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2}$  оператора  $D^2$ , при  $k \sim k_0/3$ ,  $\lambda(h, kh) = -1/h^2$ , а на краю спектра при  $k = k_0 = \pi/h$ ,  $\lambda_0(h, \pi) = -4/h^2$ . Таким образом, различие  $\lambda_0(h, kh)$  в области аппроксимации и на краю невелико. Как говорят в подобных случаях, показатель «жесткости» системы невелик.

Именно по этой причине методы для жестких систем, рассчитанные на отличие  $\operatorname{Re} \lambda_0(h, kh)$  в области аппроксимации и на краю спектра в несколько десятичных порядков, оказываются не всегда эффективными даже по сравнению с обычными разностными схемами.

Тем не менее для ряда задач математической физики, характеризующихся несколькими процессами, протекающими с существенно различными скоростями, методы интегрирования «жестких» систем могут оказаться эффективными и при решении этих задач с помощью схем типа (5).

#### § 4. Анализ простейших разностных схем

В этом параграфе мы рассмотрим ряд простейших разностных схем для линейных уравнений гиперболического типа (одного уравнения и системы уравнений акустики) и применим для их изучения понятия, развитые выше.

1. Схемы для одного уравнения  $u_t + au_x = 0$ . Для этого уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $a(x, t) > 0$ ,  $a(x, t) \in C_1$ , рассмотрим задачу Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |x| < \infty \quad (2)$$

или смешанную задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = \varphi(t) \quad (3)$$

краевым условием при  $x = 0$ .

Простейшая разностная схема для уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + a^m \frac{\Delta_{-1} u^m}{h} &= \\ &= \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \\ + a_i^m \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h} &= 0, \quad (4) \\ a^m = a_i^m = a(ih, m\tau). \end{aligned}$$

Уравнение (4) разрешим относительно  $u_i^{m+1}$ :

$$\begin{aligned} u_i^{m+1} &= (1 - \kappa_i^m) u_i^m + \\ &+ \kappa_i^m u_{i-1}^m, \quad \kappa_i^m = a_i^m \frac{\tau}{h} \quad (5) \end{aligned}$$

и дадим формуле (5) следующее геометрическое истолкование.

Согласно уравнению (5)  $u_i^{m+1} = u^{m+1}(x_i) = u^m(x_i^*)$ , где точка  $x_i^*$  на прямой  $t = m\tau$  есть точка пересечения ее с прямой

$$x - ih = a_i^m [t - (m+1)\tau], \quad (6)$$

т. е.  $x_i^* = ih - \kappa_i^m h$ , а значение функции  $u^m(x_i^*)$  в точке  $x_i^*$  получается путем линейной интерполяции ( $\kappa_i^m \leq 1$ ) либо экстраполяции ( $\kappa_i^m > 1$ ) по значениям  $u_i^m, u_{i-1}^m$  (рис. 3.4)

Отрезок прямой (6) при  $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$  приблизительно с точностью до величин порядка  $\tau^2$  совпадает с характеристикой уравнения (1), проведенной через точку  $(ih, (m+1)\tau)$ . Поэтому схему (5) можно интерпретировать как интерполяцию (экстраполяцию при  $\kappa_i^m > 1$ ) функций  $u^m(x)$  и последующий перенос значений до следующего слоя  $t = (m+1)\tau$ .

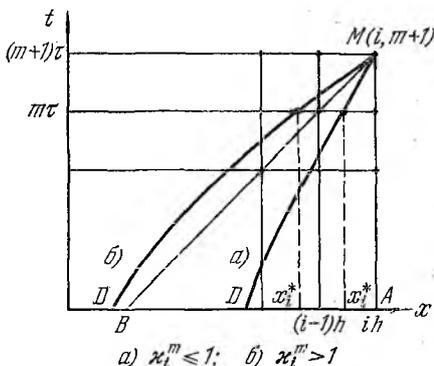


Рис. 3.4.

Если для всех  $i, m$   $\kappa_i^m \leq 1$ , то схема (5) удовлетворяет принципу максимума. Действительно, согласно (5)

$$\max_i |u_i^{m+1}| \leq \max_i \{ (1 - \kappa_i^m) |u_i^m| + \kappa_i^m |u_{i-1}^m| \} \leq \max_i |u_i^m|. \quad (7)$$

Из принципа максимума (7) следует устойчивость схемы (5) в  $C(-\infty, \infty)$  для задачи Коши и в  $C(0, \infty)$  для смешанной задачи. Если же  $\kappa_i^m > 1$  для некоторых  $i, m$ , то принцип максимума места не имеет, так как из (5) в этом случае следует лишь оценка

$$\max_i |u_i^{m+1}| \leq \max_i (2\kappa_i^m - 1) \max_i |u_i^m|, \quad (8)$$

где  $\max_i (2\kappa_i^m - 1) > 1$ .

Более того, можно показать, что если в некоторой конечной области переменных  $x, t$  величины  $\kappa_i^m$  остаются большими 1 при  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , то схема (5) является неустойчивой в  $L_2$  и в  $C$ .

Достаточно показать это в случае  $a(x, t) = a = \text{const}$ . Тогда  $\kappa_i^m = \kappa > 1$ .

Дисперсионное уравнение схемы (5) имеет вид

$$\rho = 1 - \kappa(1 - e^{ikh}).$$

Отсюда

$$|\rho| \leq 1, \quad \text{если } \kappa \leq 1,$$

$$|\rho| \geq 1 + \varepsilon(\kappa, kh), \quad \text{если } \kappa > 1,$$

где  $\varepsilon(\kappa, kh)$  — некоторая положительная при  $k \neq 0$  функция. Отсюда следует неустойчивость схемы (5) при  $\kappa > 1$ .

Итак, схема (4) (или (5)) аппроксимирует уравнение (1) и является устойчивой, если для всех  $i, m$

$$\kappa_i^m \leq 1. \quad (9)$$

Легко проверить, что значение  $u_i^m$  определяется лишь по значениям  $u_{i-m}^0, u_{i-m+1}^0, \dots, u_i^0$  начальной функции, т. е. область зависимости решения задачи Коши для разностного уравнения (5) состоит из точек сетки, расположенных между точками  $A$  и  $B$  (рис. 3.4), где  $MA$  — вертикаль,  $MB$  — диагональ сетки.

Если в некоторой области  $(x, t)$   $\kappa_i^m > 1$ , то характеристика  $MD$  уравнения (1), проведенная из точки  $M$ , лежит левее прямой  $MB$ .

Таким образом, при  $\kappa_i^m > 1$  область зависимости решения задачи Коши для дифференциального уравнения (1) (которая, между прочим, состоит из единственной точки  $D$ ) лежит вне об-

ласти зависимости для разностного уравнения. Это будет справедливо при любом измельчении сетки, если при этом

$$\kappa_i^m = \frac{a_i^m \tau}{h} \geq \kappa > 1.$$

Отсюда следует, что если в некоторой области  $(x, t)$   $\kappa_i^m > 1$ , то решение разностного уравнения (4) не сходится к решению (1).

В самом деле, если изменить начальную функцию  $u_0(x)$  в точке  $D$  и ее окрестности, то решение  $u(x, t)$  уравнения (1) соответственно изменится в точке  $M$ . В то же время решение  $u_i^m$  разностной задачи в этой же точке  $M$  не заметит этого изменения. Отсюда следует, что решение  $u^m(x)$  не сходится к решению  $u(x, t)$  ни в норме  $C$ , ни в  $L_2$ .

Напротив, если выполнен критерий Куранта (9), то точка  $D$  лежит в отрезке  $AB$  и изменения начальной функции в окрестности точки  $D$  передаются как в точном, так и в разностном решениях.

В соответствии с этим анализом ясно, что если  $a(x, t) < 0$ , то для уравнения (1) применима аппроксимация

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + a^m \frac{\Delta_i}{h} u^m = 0$$

и неприменима аппроксимация (4).

Теперь для уравнения (1) при  $a(x, t) > 0$  рассмотрим неявную аппроксимацию

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_i^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{h} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) переписывается в виде

$$u_i^{m+1} = \frac{1}{1 + \kappa_i^m} u_i^m + \frac{\kappa_i^m}{1 + \kappa_i^m} u_{i-1}^{m+1} = u^*, \quad (11)$$

где  $\kappa_i^m = \frac{a_i^m \tau}{h}$ .

Уравнения (10), (11) абсолютно аппроксимируют уравнение (1) с первым порядком аппроксимации как по  $\tau$ , так и по  $h$ . Из формулы (11) вытекает неравенство

$$\min \{u_i^m, u_{i-1}^{m+1}\} \leq u_i^{m+1} \leq \max \{u_i^m, u_{i-1}^{m+1}\}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что разностное решение  $u_i^m$  принимает минимальное и максимальное значение на границе  $t = 0$ ,  $x \geq 0$ ;  $x = 0$ ,  $t \geq 0$ , что означает устойчивость схемы (11) в  $C(0, \infty)$  при любых значениях  $\tau$ ,  $h$ .

Согласно формуле (11)  $u_i^{m+1} = u^*(N)$ , где  $u^*(N)$  есть значение функции  $u$  в точке  $N$  диагонали  $PR$  (рис. 3.5), проинтерполированное по значениям  $u_{i-1}^{m+1}$ ,  $u_i^m$ . При этом точка  $N$  определяется как пересечение прямой (6) (приближенная характеристика  $MQ$  уравнения (1)) с диагональю  $PR$ .

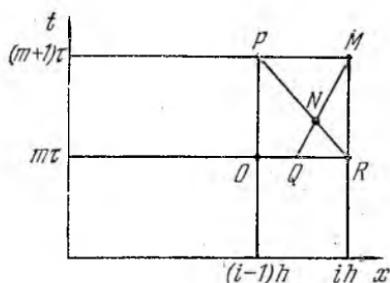


Рис. 3.5.

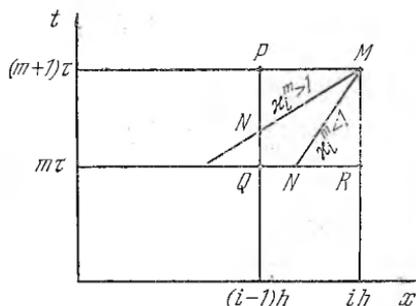


Рис. 3.6.

Отсюда следует, что область зависимости разностного решения смешанной задачи (11), (3) в точке  $x = x_i$ ,  $t = t_m$  есть часть границы

$$x = 0, \quad 0 \leq t \leq t_m; \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq x_i$$

и всегда содержит область зависимости точного решения задачи (1), (3).

Еще один вариант неявной схемы для уравнения (1)

$$\frac{u_{i-1}^{m+1} - u_{i-1}^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_i^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{h} = 0$$

или, в разрешенной относительно  $u_i^{m+1}$  форме,

$$u_i^{m+1} = \frac{\kappa_i^m - 1}{\kappa_i^m} u_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{\kappa_i^m} u_{i-1}^m = u_i^* \quad (13)$$

геометрически истолковывается как перенос в точку  $M$  значения  $u_i^*$  разностного решения в точке  $N$  вертикали  $PQ$ , где точка  $N$  есть пересечение характеристики (6) с прямой  $PQ$ , а значение в этой точке линейно интерполируется (при  $\kappa_i^m \geq 1$ ) по значениям  $u_{i-1}^{m+1}$ ,  $u_{i-1}^m$  (рис. 3.6). Схема (13) условно устойчива в  $C$  при  $\kappa_i^m \geq 1$ .

При  $\kappa_i^m < 1$  точка  $N$  выходит из отрезка  $PQ$ ; интерполяция заменяется экстраполяцией, что и приводит к неустойчивости.

Из условия (9) следует, что явная схема для уравнения (1) устойчива, если

$$\tau \leq \frac{h}{\max a(x, t)}, \quad (14a)$$

и неустойчива, если

$$\tau > \frac{h}{\min a(x, t)}. \quad (14б)$$

Особенно неблагоприятен для явной схемы случай, когда  $\frac{\max a(x, t)}{\min a(x, t)} \gg 1$ , а условие устойчивости  $\kappa_i^m < 1$  нарушается в большом числе точек. Тогда условие (14а) требует неоправданно малого шага  $\tau$ .

В этом случае можно применить неявную схему (10) или (11), которая абсолютно устойчива при любых  $\tau, h$ . Однако применение неявных схем сильно увеличивает область зависимости разностного решения (а для случая задачи Коши делает ее бесконечной). В практическом счете это обстоятельство выглядит как усиленное сглаживание разностных профилей  $u^m(x)$  и потеря характерных особенностей решения. Поэтому, если критерий устойчивости нарушается в небольшом числе точек, то имеет смысл применение явной схемы там, где критерий устойчивости выполняется, и неявной в остальных точках. Этой цели служит явно-неявная схема Карлсона

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h} = 0, \quad (15а)$$

$$\frac{u_{i-1}^{m+1} - u_{i-1}^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_i^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{h} = 0, \quad (15б)$$

в которой уравнение (15а) используется при  $\kappa_i^m \leq 1$ , уравнение (15б) — при  $\kappa_i^m > 1$ .

Геометрически схема (15) означает интерполяцию  $u_i^{m+1}$  по значениям  $u_i^m, u_{i-1}^m$ , если прямая (6) пересекает отрезок  $QR$  ( $\kappa_i^m \leq 1$ ), и по значениям  $u_{i-1}^{m+1}, u_{i-1}^m$ , если прямая (6) пересекает отрезок  $PQ$  ( $\kappa_i^m > 1$ ) (см. рис. 3.6).

Ясно, что в случае отрицательного коэффициента  $a(x, t)$  во всех применяемых аппроксимациях следует левую разность заменить на правую. Так, формула (10) примет при этом вид

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} = 0. \quad (16)$$

В этом случае, конечно, крайнее условие следует ставить не на левой, а на правой границе.

Рассмотрим теперь случай, когда  $a(x, t)$  меняет знак и для уравнения (1) ставится смешанная задача

$$u(-l, t) = f_1(t), \quad u(l, t) = f_2(t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (17)$$

Ясно, что при этом должно быть

$$a(-l, t) \geq 0, \quad a(l, t) \leq 0.$$

В случае неявной схемы здесь появляются логические трудности. Действительно, рекуррентная формула (10) при  $a_i^m \geq 0$  устойчива при счете слева направо и неустойчива при счете справа налево; напротив, рекуррентная формула (16) при  $a_i^m < 0$  устойчива при счете справа налево и неустойчива в обратном направлении.

Таким образом, при изменении знака  $a(x, t)$  нам придется менять не только выбор формул (10), (16), но одновременно

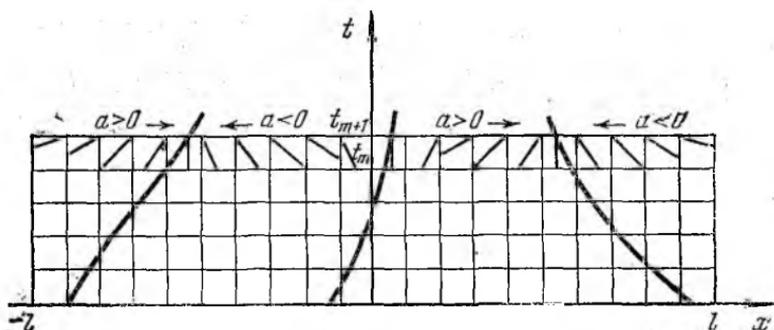


Рис. 3.7.

и направление рекуррентного счета. Это значит, что при каждом  $t = t_m$  мы должны разбить отрезок  $[-l, l]$  на отрезки постоянного знака функции  $a^m(x)$  и для каждого такого отрезка решать одностороннюю краевую задачу (рис. 3.7). Краевые условия при этом задаются на тех линиях  $a(x, t)$ , слева от которых  $a < 0$ , а справа  $a > 0$ .

Значения  $u^{m+1}(\xi)$  на этих линиях определяются с помощью явной схемы, применение которой возможно, так как критерий Куранта выполняется в окрестности линий  $a(x, t) = 0$ . При таком алгоритме на линиях  $a = 0$  получаются, вообще говоря, не совпадающие левые и правые значения, отличающиеся, впрочем, на величину порядка  $h^2$ . Если применять явно-неявную схему с учетом знака  $a$ , то значения  $u^{m+1}$  будут определяться однозначно во всех точках.

Есть еще другой способ решения смешанной задачи (17) для уравнения (1) с помощью неявной схемы. Применим неявную центральную аппроксимацию

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{2h} = 0, \quad (18)$$

Соотношения (18)

$$-\frac{\tau a_i^m}{2h} u_{i-1}^{m+1} + u_i^{m+1} + \frac{\tau a_i^m}{2h} u_{i+1}^{m+1} = u_i^m$$

вместе с краевыми условиями

$$u_{-N}^{m+1} = f_1[(m+1)\tau], \quad u_N^{m+1} = f_2[(m+1)\tau]$$

составляют замкнутую систему уравнений относительно  $u_i^{m+1}$ , которую можно решить известным методом прогонки (см., например, С. К. Годунов, В. С. Рябенский [1973], А. А. Самарский [1971]). При этом появляется ограничение на  $\tau$ , связанное с устойчивостью прогонки (указано Г. И. Марчуком).

**2. Схемы «бегущего» счета для уравнений акустики.** Для двух уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0 \quad (1)$$

построим *схему бегущего счета*. Для этого запишем систему (1) в инвариантах  $r, s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ r &= u - av, & s &= u + av. \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя к каждому из уравнений (2) явные устойчивые аппроксимации, получим

$$\frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + a \frac{r_i^m - r_{i-1}^m}{h} = 0, \quad \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} - a \frac{s_{i+1}^m - s_i^m}{h} = 0. \quad (3)$$

Схема бегущего счета (3) была предложена в работе Р. Куранта, Е. Изаксона и М. Риса [1952]. Эта схема является явной схемой и устойчива при  $\kappa = a\tau/h \leq 1$ .

Аналогично строятся неявные схемы бегущего счета

$$\frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + a \frac{r_i^{m+1} - r_{i-1}^{m+1}}{h} = 0, \quad \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} - a \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_i^{m+1}}{h} = 0. \quad (4)$$

Разностные схемы (3), (4) очевидным образом обобщаются на случай переменной скорости звука  $a = a(x, t)$ ; в этом случае в уравнениях (2) и (3), очевидно, появляются линейные относительно  $r, s$  правые части. В случае переменной скорости звука (или переменного шага  $h_i$  сетки) иногда применяют комбинированную явно-неявную схему, которая использует явную схему, подобную (3) в тех точках сетки, где  $\kappa_i^m = a_i^m \tau / h_i \leq 1$ , и неявную схему, подобную (4) в остальных точках сетки.

Возвращаясь к переменным  $u$ ,  $v$ , запишем явную схему (3) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} v^m &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^m, \\ \frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^m &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} v^m. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Аналогично представим в переменных  $u$ ,  $v$  неявную схему (4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} v^{m+1} &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^{m+1}, \\ \frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^{m+1} &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} v^{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Схема (5) является акустическим аналогом схемы С. К. Годунова (схема распада разрывов). На этом мы остановимся подробнее в § 8 п. 4.

**3. Схема «крест» и неявная схема с весами.** Схему «крест»

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} &= a^2 \frac{v_i^m - v_{i-1}^m}{h}, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} &= \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для уравнений акустики мы уже рассматривали довольно подробно в п. 2 § 3 в случае переменной скорости звука  $a = a(x)$ . Там было выяснено, что эта схема условно устойчива при выполнении условия

$$\kappa(x) = \frac{a(x)\tau}{h} \leq 1. \quad (2)$$

Продолжим рассмотрение этой схемы, положив для простоты  $a(x) = \text{const}$ .

Хотя внешне схема (1) выглядит как неявная (в правую часть (1) входит  $u^{m+1}$ ), вычисляя сначала  $u^{m+1}$  из первого уравнения (1), а затем  $v^{m+1}$  из второго, мы убеждаемся, что она эквивалентна явной схеме.

Из уравнений (1) следуют уравнения ( $a = \text{const}$ )

$$\frac{u_i^{m+1} - 2u_i^m + u_i^{m-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2}, \quad (3)$$

$$\frac{v_i^{m+1} - 2v_i^m + v_i^{m-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{v_{i+1}^m - 2v_i^m + v_{i-1}^m}{h^2}, \quad (4)$$

из которых становится очевидным, что схема «крест» (1) имеет второй порядок аппроксимации уравнений акустики как по  $\tau$ , так и по  $h$ .

Из формул (3), (4) становится ясным и название «крест» для схемы: точки сетки  $x = (i + \alpha)h$ ,  $t = m\tau$  и  $x = ih$ ,  $t = (m + \alpha)\tau$  при  $\alpha = -1, 0, 1$ , входящие в формулы (3), (4), образуют крест, располагаясь по три на горизонтали и вертикали, проходящих через точку  $x = ih$ ,  $t = m\tau$  (рис. 3.8).

Дисперсионное уравнение для схемы (1), или, что то же, для уравнений (3), (4) имеет вид

$$\rho^2 - 2 \left[ 1 - 2\kappa^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \right] \rho + 1 = 0, \quad (5)$$

$$\kappa = a\tau/h,$$

из которого следует, что при  $\kappa \leq 1$   $|\rho_{1,2}| = 1$ , а при  $\kappa > 1$  существуют столь большие  $kh$ , что  $\max\{|\rho_1|, |\rho_2|\} > 1$  и схема неустойчива.

Рассмотрим более общую схему с параметрами  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h} [\alpha_1 v^{m+1} + (1 - \alpha_1) v^m] &= 0, \\ \frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h} [\alpha_2 u^{m+1} + (1 - \alpha_2) u^m] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$  имеем схему «крест». При  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$  имеем схему второго порядка точности и абсолютно устойчивую. В этом легко убедиться, переходя к эквивалентному уравнению для  $u$ :

$$\frac{u^{m+1} - 2u^m + u^{m-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} \left[ \frac{u^{m-1} + 2u^m + u^{m+1}}{4} \right] = 0. \quad (7)$$

Дисперсионное уравнение

$$\rho^2 - 2\rho \frac{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + \kappa^2 \sin^2 \frac{kh}{2}} + 1 = 0, \quad \kappa = \frac{a\tau}{h}$$

схемы (7) при любом  $\kappa$  имеет комплексно-сопряженные корни, равные по модулю 1.

**4. Схема Лакса.** П. Лаксом [1954] была предложена схема, которая в случае уравнений акустики принимает вид

$$\frac{u_i^{m+1} - \bar{u}_i^m}{\tau} - a^2 \frac{v_{i+1}^m - v_{i-1}^m}{2h} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{v_i^{m+1} - \bar{v}_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} = 0, \quad (2)$$

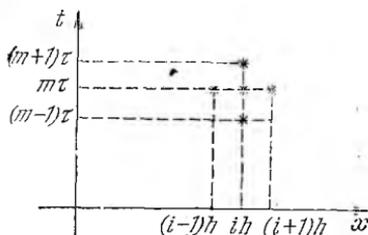


Рис. 3.8.

где

$$\bar{u}_i^m = \frac{u_{i-1}^m + u_{i+1}^m}{2}, \quad \bar{v}_i^m = \frac{v_{i-1}^m + v_{i+1}^m}{2}. \quad (3)$$

Исключая из (1), (2) величины  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  с помощью (3), приходим к схеме

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} - a^2 \frac{v_{i+1}^m - v_{i-1}^m}{2h} &= \frac{h^2}{2\tau} \frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{h^2}, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} &= \frac{h^2}{2\tau} \frac{v_{i-1}^m - 2v_i^m + v_{i+1}^m}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left( \frac{\rho - 1}{\tau} + \frac{2}{\tau} \sin^2 \frac{kh}{2} \right)^2 + a^2 \frac{\sin^2 kh}{h^2} = 0,$$

откуда

$$|\rho_1|^2 = |\rho_2|^2 = 1 - (1 - \kappa^2) \sin^2 kh.$$

Таким образом, схема (4) устойчива при условии  $\kappa \leq 1$ . Схема (4) аппроксимирует уравнения акустики (4.2.1) условно: при законе предельного перехода  $\tau/h = \text{const}$  схема (4) аппроксимирует с точностью  $O(\tau)$  систему (4.2.1); при законе предельного перехода  $\tau/h^2 = \text{const}$  схема (4) аппроксимирует параболическую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{h^2}{2\tau}. \end{aligned}$$

**5. Симметричная схема второго порядка точности (схема предиктор — корректор).** Схема (4.4.1), (4.4.2) может быть использована как составной элемент схемы второго порядка точности, в которой интегрирование происходит в два этапа: на первом этапе (предиктор) по схеме Лакса вычисляются вспомогательные величины, на втором (корректор) происходит уточнение по схеме типа «крест».

Рассмотрим схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} - a^2 \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= 0, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где величины  $u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$  вычисляются по схеме Лакса (4.4.1), (4.4.2) с шагом  $\tau/2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau/2} - a^2 \frac{v_{i+1}^m - v_i^m}{h} &= 0, \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau/2} - \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^m = \frac{u_i^m + u_{i+1}^m}{2}, \quad \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^m = \frac{v_i^m + v_{i+1}^m}{2}.$$

После исключения  $u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$  из (1), (2) приходим к однородной симметричной схеме, имеющей второй порядок точности по  $\tau$  и  $h$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} - a^2 \frac{v_{i+1}^m - v_{i-1}^m}{2h} &= \mu \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2}, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} &= \mu \frac{v_{i+1}^m - 2v_i^m + v_{i-1}^m}{h^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\mu = \frac{a^2 \tau}{2}$ .

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left( \rho - 1 + 2\kappa^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \right)^2 + \kappa^2 \sin^2 kh = 0.$$

При  $\kappa = \frac{a\tau}{h} \leq 1$ ,  $|\rho_1| = |\rho_2| \leq 1$  и схема устойчива.

## § 5. Методы построения разностных схем для уравнений газовой динамики

**1. Общие замечания.** Мы изложили в предыдущих параграфах элементы теории разностных схем, применимой исключительно к линейным задачам математической физики. Приступая к обсуждению методов решения задач газовой динамики, отметим, что эта теория дает понимание основных закономерностей и особенностей процесса численного решения не только линейных, но и нелинейных задач, каковыми почти всегда являются задачи газовой динамики.

Вместе с тем надо признать, что почти все основные понятия и выводы теории разностных схем, развитой для линейных задач, в точном понимании неприменимы к нелинейным разностным задачам, возникающим в газовой динамике.

Основные понятия теории разностных схем — понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости — нуждаются в пересмотре и обобщении, и этот пересмотр в настоящее время весьма далек еще от завершения.

Поскольку движение в средах, лишенных вязкости и теплопроводности (а такая модель применяется довольно широко), описывается разрывными функциями, то, вообще говоря, дифференциальные уравнения неприменимы для его описания. Как мы знаем из главы 2, движение в таких средах можно описывать с помощью систем интегральных или интегро-дифференциальных уравнений — законов сохранения массы, импульса, энергии.

Таким образом, в газовой динамике мы имеем дело, вообще говоря, с разрывными решениями систем интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому аппроксимация должна пониматься как аппроксимация интегральных законов сохранения в классе разрывных решений. В частности от точного решения нельзя требовать ограниченности производных, так как они не существуют. Поэтому представление о порядке аппроксимации должно быть получено с помощью других терминов, других норм близости решений.

Точно так же понятие сходимости разностной схемы существенно зависит от класса решений законов сохранения. Ясно, что норма близости двух обобщенных (разрывных) решений является слабой. В главе 4 обсуждается норма близости двух обобщенных решений; наиболее подходящей представляется норма пространства  $L_1$ .

Аналогично понятие устойчивости нелинейной разностной схемы, перенесенное из линейной теории, имеет весьма ограниченную ценность ввиду отсутствия принципа суперпозиции решений. Кратко говоря, вопрос о приближении с заданной точностью решения системы нелинейных законов сохранения с помощью решения системы нелинейных разностных уравнений не расчленяется на отдельные, более простые требования, а решается, как правило, целиком, притом для каждого узкого класса задач по-своему.

Вместе с тем нельзя недооценивать значения линейной теории разностных схем, тем более, что она пока является единственным инструментом исследования нелинейных схем. Решение системы законов сохранения, помимо линий разрыва, имеет области, в которых оно является классическим решением дифференциальных уравнений газовой динамики. Поэтому в этих областях

можно применять понятия аппроксимации, точности аппроксимации и другие понятия линейной теории. На заданном фоне, т. е. фиксируя какое-либо решение уравнений газовой динамики, можно изучать развитие малых отклонений решения с помощью понятия устойчивости из линейной теории.

Таким образом, наш общий вывод таков. Необходимо применять все понятия и методы линейной теории разностных схем и для случая схем нелинейных, однако, столь же необходимо помнить, что они не обоснованы и могут привести к неверным выводам.

**2. Способы описания газодинамических течений и построения разностных схем.** Характер применяемых схем интегрирования уравнений газовой динамики существенно зависит от способа описания течения. В предыдущих главах мы пользовались следующими тремя способами описания течения:

*1-й способ.* Область  $G$  плоскости  $x, t$ , в которой рассматривается движение, разбивается сильными и слабыми разрывами на области  $G_i$  гладкого течения, в которых удовлетворяются уравнения газовой динамики, в то время как на разрывах удовлетворяются условия совместности. В этом рассмотрении обобщенное решение есть совокупность гладких решений, определенных в областях  $G_i$  и примыкающих друг к другу через линии разрывов с соблюдением условий совместности. При таком описании возникает необходимость численного интегрирования уравнений газовой динамики в областях  $G_i$  с выполнением условий примыкания на линиях разрыва.

Наиболее известным разностным методом, соответствующим первому способу описания, является метод характеристик. Действительно, среди линий раздела мы имеем слабые разрывы и контактные границы, являющиеся характеристиками, что делает удобной характеристическую разностную схему.

Полная детальность описания течения, составляющая положительную черту метода характеристик, затрудняет одновременно его реализацию на ЭВМ из-за сложной логики расчета особенностей и построения фронта расчета.

Конечно, метод характеристик не является единственным разностным методом, который может быть применен в рамках детального описания течения.

*2-й способ.* Обобщенное решение определяется интегральными законами сохранения в эйлеровых или лагранжевых координатах. Такое описание является единообразным, поскольку как уравнения газовой динамики, так и условия совместности являются следствиями законов сохранения.

Разностные схемы, соответствующие второму способу описания, получаются единообразной аппроксимацией законов сохране-

ния независимо от характера течения и поэтому носят название однородных схем или схем сквозного счета \*).

*3-й способ.* Обобщенное решение определяется как предел классического решения некоторой системы квазилинейных параболических уравнений с малыми параметрами при старших производных.

Если

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = f(u) \quad (1)$$

есть исходная система уравнений газовой динамики, записанная в виде законов сохранения, то соответствующая параболическая система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = f(u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu B(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Здесь  $u = u(x, t)$  — вектор-функция, описывающая течение,  $f(u)$ ,  $\Phi(u)$  — векторные функции от векторного аргумента  $u$ ,  $B(u)$  — квадратная матрица,  $\mu$  — малый параметр \*\*).

Матрица  $B(u)$  должна быть подобрана таким образом, чтобы решение  $u(x, t)$  системы (2) обладало достаточной гладкостью и при  $\mu \rightarrow 0$  приближалось в каком-то смысле к решению системы (1).

Разностные схемы, основанные на третьем способе рассмотрения, также имеют характер схем сквозного счета. В некоторых случаях второй и третий подходы приводят к одинаковым схемам.

**3. Граничные условия в задачах газовой динамики.** Мы рассмотрим сначала краевые условия для случая газа, лишенного вязкости и теплопроводности, а затем сделаем замечания об учете этих диссипативных процессов в краевых условиях.

Постановка граничных условий зависит, естественно, от рассматриваемой задачи, однако их форма зависит также от способа описания течения и в первую очередь от принятой системы координат.

В большинстве газодинамических задач граничные условия наиболее просто и естественно записываются в лагранжевых координатах. Это находит отражение и в разностных методах решения: наиболее точно учитывают внутренние и внешние границы разностные схемы, использующие лагранжевы координаты.

\*) Понятие однородных схем введено и изучено в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (см., например, их работу 1961 г.).

\*\*) В некоторых схемах с искусственной вязкостью  $\mu$  становится функцией от  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

На внутренней границе  $q = \text{const}$  ( $q$  — лагранжева координата) ставятся условия непрерывности давления  $p$  и скорости  $u$ :

$$p(q+0, t) = p(q-0, t), \quad u(q+0, t) = u(q-0, t). \quad (1)$$

Условия (1) есть условия совместности *контактного разрыва*. Граница раздела  $q = \text{const}$  двух различных газов является контактным разрывом. Для того чтобы разностная схема допускала контактный разрыв (не размывала его), нужно, чтобы представление этой разностной схемы в лагранжевых координатах не содержало бы никаких других (независимых) пространственных градиентов, кроме градиентов давления и скорости. Так, например, разностная аппроксимация законов сохранения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial pu}{\partial q} = 0$$

будет удовлетворять этому требованию, так как по пространству дифференцируются лишь непрерывные на контактной границе величины. В случае наличия вязкости и теплопроводности на контактных границах обычно ставятся естественные условия непрерывности напряжения трения и потока тепла.

Постановка граничных условий на внешних границах имеет некоторое разнообразие, отвечающее сравнительно большому количеству практически интересных задач. Отметим, что в лагранжевых координатах очень удобно рассматривать задачи с фиксированными массами газов, подлежащих рассмотрению. Наоборот, внешние краевые условия, поставленные на сечениях, через которые протекают газы, сравнительно неудобны для описания в лагранжевых координатах и порой более естественно записываются и аппроксимируются в эйлеровых координатах.

С другой стороны, внутренние граничные условия (1) на контактных границах весьма неудобны для аппроксимации на сетках с постоянными эйлеровыми координатами (эйлеровы сетки), так как контактные границы движутся относительно этих сеток, переходя из одного счетного интервала в другой. Это приводит к необходимости подбирать специальные разностные схемы в эйлеровых координатах, которые обладали бы тем свойством, что они не размывают или размывают, но слабо, контактные границы ( $K$  — свойство разностной схемы).

Пожалуй, наиболее универсален в смысле аппроксимации граничных условий метод характеристик. Однако он имеет свои собственные недостатки: применимость лишь к уравнениям гиперболического типа, что в случае газовой динамики означает отсутствие диссипативных процессов, и переменный шаг по пространству в зависимости от решения, что не всегда удобно.

Уже одно перечисление удобств и недостатков аппроксимации лишь граничных условий в различных системах координат

показывает, что универсального и наилучшего способа разностного решения задач газовой динамики нет и что в реальных расчетах приходится применять различные способы.

Наконец, отметим еще, что ударные волны в газах также можно рассматривать как подвижные внутренние граничные условия. Эти условия фигурируют явно лишь в методе характеристик; в других разностных методах они отсутствуют, так как ударные волны рассматриваются в этих схемах в другом смысле, как узкая, но конечная зона плавного ударного перехода.

## § 6. Метод характеристик

Метод характеристик является одним из наиболее распространенных методов интегрирования систем гиперболических уравнений. Его характерной особенностью сравнительно с другими разностными методами является минимальное использование операторов интерполирования и связанная с этим максимальная близость области зависимости разностной схемы к области зависимости системы дифференциальных уравнений. Сглаживание профилей, характерное для разностных схем с фиксированной сеткой, является минимальным в методе характеристик, так как применяемая в нем сетка строится с учетом области зависимости системы.

Метод характеристик подробно изложен в монографиях Д. Ю. Панова [1957], А. И. Жукова [1960], поэтому мы ограничимся кратким изложением особенностей этого метода и элементов разностного алгоритма.

Метод характеристик исходит из аппроксимации системы характеристических уравнений газовой динамики в характеристической сетке. При этом можно пользоваться как эйлеровыми, так и лагранжевыми координатами.

**1. Метод характеристик для гладких течений.** Мы рассмотрим сначала метод характеристик в применении к системе квазилинейных уравнений в инвариантах:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_1 &= \frac{\partial s}{\partial t} + \xi_1(r, s) \frac{\partial s}{\partial x} = F_1(r, s, x, t), \\ \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 &= \frac{\partial r}{\partial t} + \xi_2(r, s) \frac{\partial r}{\partial x} = F_2(r, s, x, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Как известно, к системе уравнений типа (1) приводятся уравнения газовой динамики в случае плоской, цилиндрической, сферической симметрии и постоянной энтропии (эйлеровы координаты) и в случае плоской симметрии и переменной энтропии (лагранжевы координаты) (см. гл. 2).

Пусть для системы (1) поставлена задача с начальными данными

$$r(x, 0) = r_0(x), \quad s(x, 0) = s_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

имеющая гладкое решение в некоторой области  $G$ , содержащей отрезок  $[a, b]$  оси  $x$  (рис. 3.9).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на интервалы  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_{N+1} = b$ . Точки  $(x_i, 0)$  образуют первый ряд расчетных точек (ряд I). Следующий ряд расчетных точек (ряд II) содержит точки пересечения  $r$ - и  $s$ -характеристик, выпущенных из точек ряда I. Если определен  $m$ -й ряд расчетных точек  $(x_i^m, t_i^m)$ , то следующий ряд  $(x_i^{m+1}, t_i^{m+1})$  определяется по формулам (первое приближение)

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_i^{m+1} - x_i^m}{t_i^{m+1} - t_i^m} &= \xi_{2i}^m, \\ \frac{x_i^{m+1} - x_{i+1}^m}{t_i^{m+1} - t_{i+1}^m} &= \xi_{i+1}^m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\xi_{ai}^m = \xi_a(r_i^m, s_i^m, x_i^m, t_i^m), \quad a = 1, 2,$$

а  $r_i^m, s_i^m$  — значения инвариантов в точках  $x_i^m, t_i^m$ .

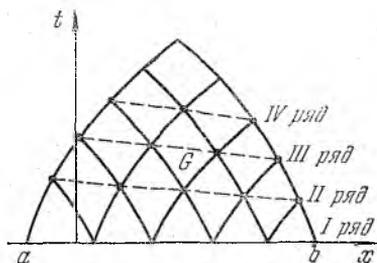


Рис. 3.9.

После этого в точку  $(x_i^{m+1}, t_i^{m+1})$  переносятся инварианты  $r_i^m, s_{i+1}^m$  с соответствующими приращениями

$$\left. \begin{aligned} r_i^{m+1} &= r_i^m + \Delta r_i^m = r_i^m + F_{2i}^m (t_i^{m+1} - t_i^m), \\ s_i^{m+1} &= s_{i+1}^m + \Delta s_{i+1}^m = s_{i+1}^m + F_{i+1}^m (t_i^{m+1} - t_{i+1}^m), \\ F_{ai}^m &= F_a(r_i^m, s_i^m, x_i^m, t_i^m), \quad a = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Схема первого порядка точности означает замену характеристик, проходящих через точки нижнего ряда  $x_i^m, t_i^m$ , прямыми (3) и приближенное интегрирование уравнений (1) вдоль характеристик по методу Эйлера.

Для уточнения формул (3), (4) применяется пересчет как точек ряда  $(x_i^{m+1}, t_i^{m+1})$ , так и значений  $r_i^{m+1}, s_i^{m+1}$ . В формулах (3) правые части  $\xi_{ai}^m$  (наклон прямых, аппроксимирующих характеристики) заменяются на полусуммы

$$\frac{x_i^{m+1} - x_i^m}{t_i^{m+1} - t_i^m} = \frac{\xi_{2i}^m + \xi_{2i}^{m+1}}{2}; \quad \frac{x_i^{m+1} - x_{i+1}^m}{t_i^{m+1} - t_{i+1}^m} = \frac{\xi_{i+1}^m + \xi_{i+1}^{m+1}}{2}, \quad (5)$$

где

$$\xi_{\alpha i}^{m+1} = \xi_{\alpha} (r_i^{m+1}, s_i^{m+1}, x_i^{m+1}, t_i^{m+1}), \quad (6)$$

а  $x_i^{m+1}$ ,  $t_i^{m+1}$ ,  $r_i^{m+1}$ ,  $s_i^{m+1}$  в формуле (6) вычисляются по формулам (3), (4).

В точки  $(x_i^{m+1}, t_i^{m+1})$ , вычисленные указанным образом, переносятся инварианты  $r_i^m$ ,  $s_i^m$  с приращениями, уточненными по формуле трапеций:

$$\left. \begin{aligned} r_i^{m+1} &= r_i^m + \Delta r_i^m = r_i^m + \frac{F_{2i}^m + F_{2i}^{m+1}}{2} (t_i^{m+1} - t_i^m), \\ s_i^{m+1} &= s_{i+1}^m + \Delta s_{i+1}^m = s_{i+1}^m + \frac{F_{1i+1}^m + F_{1i}^{m+1}}{2} (t_i^{m+1} - t_{i+1}^m). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В (7)  $F_{1i}^m$ ,  $F_{2i}^m$  сохраняют прежние значения из (4), а  $F_{1i}^{m+1}$ ,  $F_{2i}^{m+1}$  определяются формулами

$$F_{\alpha i}^{m+1} = F_{\alpha} (r_i^{m+1}, s_i^{m+1}, x_i^{m+1}, t_i^{m+1}) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (8)$$

где  $r_i^{m+1}$ ,  $s_i^{m+1}$  сосчитаны по (4),  $x_i^{m+1}$ ,  $t_i^{m+1}$  — по (5).

Пересчет по формулам (5)–(8) повышает порядок точности схемы, но дополнительный пересчет не приводит к дальнейшему повышению порядка точности, и поэтому достаточно ограничиться одним.

Для политропного газа с  $\gamma = 3$ , плоской симметрией и постоянной энтропией уравнения (1) принимают вид (см. гл. 2, § 2, п. 9)

$$\frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

В этом случае уже формулы (3), (4) без пересчета дают точное решение задачи Коши для (9), так как характеристики (9) прямые.

Схема (3), (4), имеющая первый порядок точности на гладких функциях, в данном случае обладает бесконечно большим порядком точности на классе гладких решений системы (9).

В то же время схема любого порядка точности с постоянной сеткой дает только приближенное решение задачи (9).

Этот пример хорошо поясняет преимущества характеристической сетки, которая минимизирует разность областей зависимости схемы и уравнения и тем самым величину остаточного члена.

Построение фронта расчета может проводиться в регулярном случае также и иным образом, не по пространственноподобным рядам, как указано на рис. 3.8, а по характеристическим линиям.

Указанный алгоритм расчета переносится на более общие системы уравнений. Пусть

$$l_{\alpha}^k \left( \frac{du_{\alpha}}{dt} \right)_k = l_{\alpha}^k \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right) = f_k \quad (k, \alpha = 1, \dots, n) \quad (10)$$

есть гиперболическая система в характеристической форме, для которой существуют инварианты.

Уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(x, t, u)$$

определяют  $n$  однопараметрических семейств характеристик. В общем случае любая пара семейств образует характеристическую сеть, не совпадающую с сетью, соответствующей другой паре. Пусть для определенности выбрана пара характеристик,

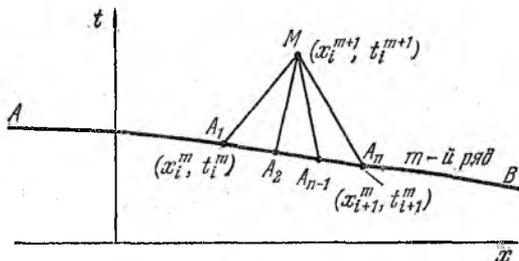


Рис. 3.10.

соответствующая индексам  $k = 1, k = n$ ,  $M$  — рассчитываемая точка сетки (рис. 3.10),  $A_k$  — основание  $k$ -й характеристики, опущенной из  $M$  на линию  $AB$ . Точки  $A_1, A_n$  являются узлами сетки, точки  $A_2, \dots, A_{n-1}$  расположены между ними, и для определения  $u$  в точках  $A_2, \dots, A_{n-1}$  требуется интерполяция по значениям  $u(A_1)$  и  $u(A_n)$ . Таким образом, кроме переноса по характеристике появляется оператор интерполяции, что приводит к эффектам сглаживания, присущим обычным разностным методам.

В общем случае уравнения (10) не имеют инвариантов, и необходимо перейти к более сложной продолженной системе (см. гл. 1, § 5). Тем не менее метод характеристик и в этом случае сохраняет с большой точностью область зависимости гиперболической системы.

Указанный регулярный алгоритм построения характеристической разностной сетки и приближенного интегрирования уравнений в инвариантах возможен в области гладкого решения. Если в окрестности расчетной точки содержится какая-либо особенность (ударная волна, контактная граница, произвольный

разрыв, место возникновения ударной волны, центрированная волна разрежения), то формулы видоизменяются в соответствии с характером особенности и конфигурацией сетки.

Рассмотрим ряд типичных конфигураций.

**2. Метод характеристик в окрестности контактной границы.** Проиллюстрируем особенности алгоритма на примере плоско-симметричного кусочно-изоэнтропического течения и лагранжевой системы координат.

Теперь расчетные точки должны располагаться не только на  $r$ -,  $s$ -характеристиках, но и на контактной границе, которая является координатной линией  $q = \text{const}$  (рис. 3.11). Неоднородность расчета, связанная с границей, приводит к двум фронтам расчета.

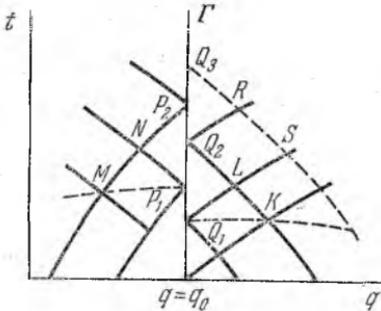


Рис. 3.11.

Пусть  $P_1, Q_1$  — последние расчетные точки на контактной границе  $\Gamma$ , расположенные на левой, соответственно правой, стороне ее;  $M, K$  — соседние к ним точки фронтов расчета. Точки  $N, L$  вычисляются регулярным образом. В первом приближении, исходя из точки  $N$ , можно рас-

считать точку  $P_2$  пересечения  $r$ -характеристики  $MN$  с границей  $\Gamma$  и определить в ней значение инварианта  $r_l$ . Аналогично, исходя из точки  $L$ , можно определить точку  $Q_2$  и инвариант  $s_n$  в ней. По точкам  $P_1, P_2$  в  $Q_2$  интерполируется значение  $r_l$ .

Условия непрерывности  $p, u$  на контактной границе, взятые в точке  $Q_2$ , приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} p &= P_l(S_l, r_l - s_l) = P_n(S_n, r_n - s_n), \\ u &= \frac{r_l + s_l}{2} = \frac{r_n + s_n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из (1) определяются  $r_n, s_n$  в  $Q_2$ . Таким образом, фронт расчета справа продвигается на один шаг, и мы сможем в первом приближении найти точки  $R, Q_3$  и инвариант  $s_n$  в последней. Это дает возможность рассчитать аналогично прежнему точку  $P_2$ , после чего цикл расчета завершён в первом приближении. Можно построить и формулы второго приближения, довольно сложные.

**3. Метод характеристик в окрестности ударной волны.** Вновь наличие разрыва приводит к двум фронтам расчета, однако, в отличие от предыдущего случая, линия разрыва уже не является временно-подобной линией. Как следует из теоремы Цемпле-

на, линия ударной волны будет пространственноподобной на переднем фронте и временно-подобной на заднем (рис. 3.12).

Линия ударной волны «срезает» сетку характеристик перед собой, и все значения величин на переднем фронте известны, так как они приносятся характеристиками снизу.

В то же время на задний фронт переносится по характеристике только инвариант  $r$  (в случае волны, идущей вправо), инвариант  $s$  уносится от линии ударной волны, определяясь на

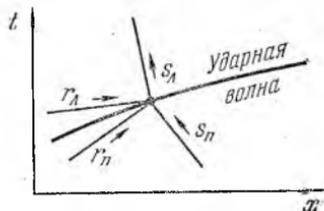


Рис. 3.12.

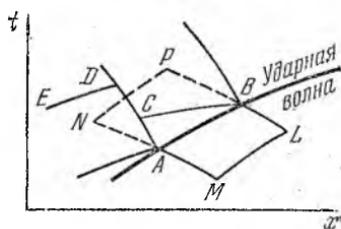


Рис. 3.13.

ней из условий Гюгонио. Для простоты рассмотрения ограничимся случаем изотермического газа, когда условия Гюгонио записываются в инвариантах (см. гл. 2, § 4, п. 6):

$$r_l - r_n = a\varphi(M), \quad (1)$$

$$s_l - s_n = a\psi(M), \quad (2)$$

$$M = \frac{D - u_n}{a}, \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{M} + \ln M^2, \quad \psi(M) = M - \frac{1}{M} - \ln M^2, \quad (3)$$

где через  $a$  обозначена изотермическая скорость звука.

Зная  $r_l$ ,  $r_n$ ,  $u_n$ , из (1), (3) определим скорость ударной волны  $D$ , а из (2) определим  $s_l$ .

Пусть линия ударной волны (рис. 3.13) пересекает в точках  $A$ ,  $B$  элемент (ячейку)  $LMNP$  характеристической сетки, уже рассчитанный, и пусть в точке  $A$  известны величины  $r_l$ ,  $s_l$ ,  $r_n$ ,  $s_n$ , следовательно,  $D$ .

Тогда характеристический треугольник  $EAD$  слева от линии ударной волны полностью рассчитывается. Из точки  $A$  проводится отрезок прямой  $AB$

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = D_A,$$

аппроксимирующий траекторию ударной волны в окрестности  $A$ . На характеристике  $PL$  можно проинтерполировать в точку  $B$  значения  $r_n$ ,  $s_n$  по их значениям в точках  $P$ ,  $L$ .

Так как отрезок  $AD$  полностью сосчитан, то на нем можно найти точку  $C$  такую, что в первом приближении  $r$ -характеристика, проведенная через нее, проходит через точку  $B$ . Эта задача решается линейной интерполяцией инвариантов  $r_D, s_D, r_A, s_A$  в точку  $C$  при условии, что отрезок прямой

$$\frac{x - x_C}{t - t_C} = \frac{r_C + s_C}{2} + a$$

пройдет через точку  $B$ .

Если обозначить параметр линейной интерполяции вдоль  $AD$  через  $\theta$ , то расчетные формулы для определения  $\theta$  имеют вид

$$\frac{x_B - x_C}{t_B - t_C} = \frac{x_B - [x_A + \theta(x_D - x_A)]}{t_B - [t_A + \theta(t_D - t_A)]} = (u_A)_л + \theta[u_D - (u_A)_л] + a.$$

После этого определяются все величины. Определив  $(r_B)_л$ , можно рассчитать  $D_B$ , после чего точка  $B$  пересчитывается по формуле трапеции

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{D_A + D_B}{2}.$$

Это позволяет пересчитать точку  $C$ , а также инварианты  $(r_B)_л, (s_B)_л, (r_B)_п$ , после чего точка  $B$  является сосчитанной, и фронт расчета слева от ударной волны может продвигнуться еще на один шаг.

Аналогично, с некоторым усложнением, проводится расчет в случае течения с переменной энтропией, когда нужно вводить в рассмотрение траектории.

Конечно, возможны и другие формулы расчета и другие конфигурации взаимного расположения линии ударной волны и характеристической сетки.

Аналогичные трудности возникают при рассмотрении особенностей типа:

- 3) центрированная волна разрежения;
- 4) распад разрыва;
- 5) пересечение характеристик одного семейства с последующим образованием ударной волны;
- 6) граница с вакуумом, когда происходит вырождение элемента сетки.

В каждой конкретной ситуации задача продвижения фронта расчета на один шаг в окрестности заданной особенности сводится к интерполяции и решению задач аналитической геометрии.

Трудности метода характеристик заключаются в построении фронта расчета при наличии большого количества особенностей

различного типа. Тогда расчет становится нерегулярным и определение возможной конфигурации и выбор формул расчета становится основной задачей. К этому присоединяются трудности распределения памяти, вызванные срезанием ударной волной характеристической сетки.

Несмотря на большие логические трудности реализации метода характеристик на ЭВМ, в СССР созданы программы, позволяющие рассчитывать с большой точностью течения, содержащие большое количество особенностей (см. А. И. Жуков [1960]).

## § 7. Явные схемы бегущего счета

Ближайшими к методу характеристик являются схемы бегущего счета. Как и метод характеристик, они исходят из уравнений в инвариантах или в характеристической форме, но разностная сетка не является уже характеристической.

Мы начнем с рассмотрения явных схем бегущего счета для одномерного плоского кусочно-изоэнтропического течения газа, не содержащего ударных волн. Как известно, такое течение описывается в лагранжевых координатах системой уравнений в инвариантах (см. гл. 2, § 3)

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a(S, r - s) \frac{\partial r}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} - a(S, r - s) \frac{\partial s}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

где  $a = cr$  есть массовая скорость звука, энтропия  $S$  является кусочно-постоянной функцией, местами разрыва которой являются контактные границы.

Для системы (1) поставим задачу с начальными и краевыми условиями

$$r(q, 0) = r_0(q), \quad s(q, 0) = s_0(q), \quad 0 \leq q \leq Q, \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad p(Q, t) = g(t). \quad (3)$$

Краевые условия (3) означают, что заданы скорость левой границы и давление на правой.

Конечно, можно выбрать другую комбинацию краевых условий (например, на обеих границах заданы скорости или давления). Уравнение состояния задано формулой\*)

$$p = P(S, r - s). \quad (4)$$

При отсутствии в течении ударных волн энтропия постоянна на каждой линии  $q = \text{const}$ , в том числе на границах  $q = 0$ ,

\*) Мы считаем для простоты, что контактные границы разделяют газы с одним и тем же уравнением состояния (4), но с разными значениями энтропии. Задача несущественно усложняется, если газы считать различными.

$q = Q$ . Поэтому краевые условия (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r(0, t) + s(0, t) &= 2f(t), \\ r(Q, t) - s(Q, t) &= k(t) = P^{-1}(p, S) = P^{-1}(g(t), S). \end{aligned} \quad (5)$$

На внутренних контактных границах  $q = q_i$  ставятся обычные условия

$$p_i^+ = p_i^-, \quad u_i^+ = u_i^-, \quad (6)$$

которые в терминах инвариантов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P(S_i^+, r_i^+ - s_i^+) &= P(S_i^-, r_i^- - s_i^-), \\ r_i^+ + s_i^+ &= r_i^- + s_i^-. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь знаком «+» обозначены величины справа, знаком «-» величины слева от  $i$ -й границы.

В случае политропного газа, когда

$$P(S, r - s) = \mathcal{F}(S)(r - s)^\alpha, \quad (8)$$

где  $\alpha = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}$ , условия (7) становятся линейными:

$$r_i^+ - s_i^+ = \kappa_i(r_i^- - s_i^-), \quad \kappa_i = \left( \frac{\mathcal{F}_i^-}{\mathcal{F}_i^+} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (9)$$

Переходя к разностным уравнениям и предполагая сначала отсутствие внутренних границ, построим сетку, равномерную по массе, так что

$$\left. \begin{aligned} h = \Delta q_i = q_{i+1} - q_i &= \text{const} = \frac{Q}{N+1}, \\ q_0 = 0, \quad q_1 = h, \dots, \quad q_{N+1} &= (N+1)h = Q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для решения поставленной задачи может быть предложена явная схема бегущего счета:

$$r_i^{m+1} = (1 - \kappa_i^m) r_i^m + \kappa_i^m r_{i-1}^m, \quad (11)$$

$$s_i^{m+1} = (1 - \kappa_i^m) s_i^m + \kappa_i^m s_{i+1}^m \quad (i = 1, \dots, N), \quad (12)$$

$$\kappa_i^m = a_i^m \cdot \frac{\tau}{h},$$

к которой присоединяются начальные данные

$$r_i^0 = r_{0i}, \quad s_i^0 = s_{0i}$$

и краевые условия

$$r_0^m + s_0^m = 2f^m, \quad (13)$$

$$r_{N+1}^m - s_{N+1}^m = k^m, \quad (14)$$

С помощью соотношений (11)  $r_i^{m+1}$  определяются последовательно от  $i=1$  до  $i=N+1$ , а из (14) определяется  $s_{N+1}^{m+1}$ .

Аналогично из (12) определяются  $s_i^{m+1}$  ( $i=N, \dots, 0$ ), а из (13) определяется  $r_0^{m+1}$ . После этого  $(m+1)$ -й слой сосчитан, и для определения  $(m+2)$ -го слоя процедура полностью повторяется. При условии

$$\kappa_i^m \leq 1 \quad (15)$$

схема (11), (12) является схемой с положительными коэффициентами, что обеспечивает, как было показано в п. 3 § 3, ее устойчивость. Докажем сходимость решения задачи (11)—(14) к решению задачи (1), (3).

Предположим, что задача (1)—(3) имеет решение  $r(q, t)$ ,  $s(q, t)$ , обладающее непрерывными вторыми производными по  $q, t$ .

Обозначим через  $\delta r_i^m$ ,  $\delta s_i^m$  разности

$$\delta r_i^m = r_i^m - r(ih, m\tau), \quad \delta s_i^m = s_i^m - s(ih, m\tau),$$

где  $r(ih, m\tau)$ ,  $s(ih, m\tau)$  — точное решение задачи (1) — (3) в точках сетки  $q = ih$ ,  $t = m\tau$ .

Величины  $\delta r_i^m$ ,  $\delta s_i^m$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \delta r_i^{m+1} &= (1 - \kappa_i^m) \delta r_i^m + \kappa_i^m \delta r_{i-1}^m - \tau \left\{ a(r_i^m - s_i^m) - \right. \\ &\quad \left. a[r(ih, m\tau) - s(ih, m\tau)] \right\} \frac{r(ih, m\tau) - r((i-1)h, m\tau)}{h} + R_{1i}^m, \\ \delta s_i^{m+1} &= (1 - \kappa_i^m) \delta s_i^m + \kappa_i^m \delta s_{i+1}^m + \tau \left\{ a(r_i^m - s_i^m) - \right. \\ &\quad \left. a[r(ih, m\tau) - s(ih, m\tau)] \right\} \frac{s((i+1)h, m\tau) - s(ih, m\tau)}{h} + R_{2i}^m \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} \delta r_i^0 &= 0, & \delta s_i^0 &= 0, \\ \delta r_0^m + \delta s_0^m &= 0, & \delta r_{N+1}^m - \delta s_{N+1}^m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Остаточные члены  $R_{1i}^m$ ,  $R_{2i}^m$  имеют порядок  $O(\tau^2)$ .

Учитывая гладкость решения  $r(q, t)$ ,  $s(q, t)$ , систему (16) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta r_i^{m+1} &= (1 - \kappa_i^m) \delta r_i^m + \kappa_i^m \delta r_{i-1}^m - \tau \alpha_i^m (\delta r_i^m - \delta s_i^m) + R_{1i}^m, \\ \delta s_i^{m+1} &= (1 - \kappa_i^m) \delta s_i^m + \kappa_i^m \delta s_{i+1}^m + \tau \beta_i^m (\delta r_i^m - \delta s_i^m) + R_{2i}^m, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i^m &= a'(\theta^*) \frac{r(ih, m\tau) - r((i-1)h, m\tau)}{h}, \\ \beta_i^m &= a'(\theta^*) \frac{s((i+1)h, m\tau) - s(ih, m\tau)}{h} \end{aligned}$$

являются ограниченными величинами,  $\theta = r - s$ ,  $\theta^*$  — промежуточное значение  $\theta$  в формуле конечного приращения.

Нетрудно видеть, что при условии (15) для оператора шага  $C_{m+1}$  задачи (17), (18) справедлива оценка

$$\|C_{m+1}\| \leq 1 + 2A\tau,$$

где  $A = \max \max \{ |\alpha_i^m|, |\beta_i^m| \}$ , и норма вектора  $\{\delta r^m, \delta s^m\} = \{\delta r_i^m, \delta s_i^m\}$  определяется как

$$\max_i \max \{ |\delta r_i^m|, |\delta s_i^m| \}.$$

Следовательно, справедлива оценка (см. § 2, п. 1)

$$|\delta r_i^m|, |\delta s_i^m| \leq Ce^{2At} \max_{i,m} \max \left\{ \left| \frac{R_{1i}^m}{\tau} \right|, \left| \frac{R_{2i}^m}{\tau} \right| \right\} = O(\tau),$$

из которой следует сходимость

$$|\delta r_i^m| \rightarrow 0, |\delta s_i^m| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0$$

равномерно по  $i, m$  в области существования решения  $r(q, t)$ ,  $s(q, t)$ .

Если имеются контактные границы, то в разностные уравнения войдут также соотношения (7) на границах. Для простоты рассмотрения предположим, что имеется одна контактная граница, расположенная в точке  $q = jh$  сетки. Тогда инварианты  $r, s$  разрывны в точке  $q = jh$ . Для левых значений  $(r_j^{m+1})_-$  и правых  $(s_j^{m+1})_+$  справедливы уравнения (11), (12), которые принимают вид

$$\begin{aligned} (r_j^{m+1})_- &= (1 - \kappa_j^m)_- (r_j^m)_- + (\kappa_j^m)_- r_{j-1}^m, \\ (s_j^{m+1})_+ &= (1 - \kappa_j^m)_+ (s_j^m)_+ + (\kappa_j^m)_+ s_{j+1}^m. \end{aligned}$$

К ним следует присоединить соотношения (7):

$$\begin{aligned} P[(S_j)_-, (r_j^{m+1})_- - (s_j^{m+1})_-] &= P[(S_j)_+, (r_j^{m+1})_+ - (s_j^{m+1})_+], \\ (r_j^{m+1})_+ + (s_j^{m+1})_+ &= (r_j^{m+1})_- + (s_j^{m+1})_-, \end{aligned}$$

которые при известных  $(r_j^{m+1})_-$ ,  $(s_j^{m+1})_+$  позволят определить  $(r_j^{m+1})_+$ ,  $(s_j^{m+1})_-$ , после чего весь счет продолжается, как обычно

При наличии нескольких контактных границ каждая из них рассчитывается по указанному алгоритму.

Если в течении отсутствуют ударные волны, но энтропия внутри каждого слоя переменна, то уравнения, описывающие движение, становятся неоднородными:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} - a(q, r - s) \frac{\partial s}{\partial q} &= F_1(q, r - s), \\ \frac{\partial r}{\partial t} + a(q, r - s) \frac{\partial r}{\partial q} &= F_2(q, r - s).\end{aligned}$$

Тогда левые части уравнения аппроксимируются, как и в однородном случае, правые части берутся с  $m$ -го слоя и сходимость доказывается аналогично, при том же условии (15).

В общем случае система квазилинейных уравнений, в том числе и уравнения гидродинамики, не приводится к инвариантам. Однако и в этом случае возможен бегущий счет. Такая схема была предложена в работе Р. Куранта, Е. Изаксона, М. Риса [1952].

Пусть для гиперболической системы

$$l_\alpha^k(u_1, \dots, u_n) \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \xi_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right] = f_k(u_1, \dots, u_n) \quad (19)$$

$$(k, \alpha = 1, \dots, n)$$

поставлены начальные данные

$$u_\alpha(x, 0) = u_{\alpha 0}(x). \quad (20)$$

Аппроксимируем задачу Коши (19), (20) разностной задачей Коши

$$l_\alpha^k(u_1^m, \dots, u_n^m) \left[ \frac{u_\alpha^{m+1} - u_\alpha^m}{\tau} + \xi_k(u_1^m, \dots, u_n^m) \frac{\Delta u_\alpha^m}{h} \right] = f_k(u_1^m, \dots, u_n^m), \quad (21)$$

$$u_\alpha^0(x) = u_{\alpha 0}(x), \quad (22)$$

где  $u_\alpha^m(x)$  есть решение (21), (22), определенное на момент  $t = m\tau$ , и

$$\left. \begin{aligned}\Delta &= \Delta_{-1} \quad \text{при} \quad \xi_k(u_1^m, \dots, u_n^m) \geq 0, \\ \Delta &= \Delta_1 \quad \text{при} \quad \xi_k(u_1^m, \dots, u_n^m) < 0.\end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Разностную схему (21) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned}l_\alpha^{km} u_\alpha^{m+1} &= l_\alpha^{km} [(1 - \kappa_k^m) E + \kappa_k^m T_{-1}] u_\alpha^m + f_k^m \tau, \quad \kappa_k^m \geq 0, \\ l_\alpha^{km} u_\alpha^{m+1} &= l_\alpha^{km} [(1 + \kappa_k^m) E - \kappa_k^m T_1] u_\alpha^m + f_k^m \tau, \quad \kappa_k^m < 0,\end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где положено

$$l_\alpha^{km} = l_\alpha^k(u_1^m, \dots, u_n^m), \quad \kappa_k^m = \frac{\xi_k^m \tau}{h}, \quad \xi_k^m = \xi_k(u_1^m, \dots, u_n^m). \quad (25)$$

При  $|\kappa_k^m| \leq 1$  разностные операторы

$$(1 - \kappa_k^m)E + \kappa_k^m T_{-1} \quad (\kappa_k^m \geq 0), \quad (1 + \kappa_k^m)E - \kappa_k^m T_1 \quad (\kappa_k^m < 0)$$

становятся положительными, а схема (24) аналогична положительным по Фридрихсу схемам. В вышеупомянутой работе показано, что при выполнении условия  $|\kappa_k^m| \leq 1$  решение  $u^m(x)$  разностной задачи (21), (22) сходится в  $C$  к решению задачи (19), (20).

Мы рассмотрели два варианта бегущего счета: а) в инвариантах, б) для характеристической системы. По постановке краевых условий и по простоте алгоритма предпочтительным является счет в инвариантах. В общем случае приведение к инвариантам возможно только для продолженной системы (см. гл. 1, § 4, п. 3), после чего становится применимой схема бегущего счета.

## § 8. Однородные разностные схемы. Схемы с псевдовязкостью

Рассмотренные нами характеристические схемы и схемы бегущего счета отличались той особенностью, что регулярный и единообразный счет для них возможен только в областях гладкости течения.

Наличие разрывов приводит к сильному усложнению этих методик. Поэтому возникает необходимость в единообразной схеме, формулы которой были бы однотипными в различных точках сетки независимо от наличия и характера особенностей решения в окрестности точки. Такие схемы расчета получили название *однородных*.

Такая постановка задачи, естественно, предъявляет дополнительные требования к вычислительному алгоритму, так как он теперь должен хотя бы в принципе «одинаково хорошо» описывать как гладкие, так и разрывные течения. Поэтому мы кратко обсудим эти требования.

**1. Способы единообразного описания газодинамических течений.** Если рассматривать течения сжимаемых газов и жидкостей в отсутствие вязкого трения и теплопроводности, то они, как это следует из содержания глав 1, 2, описываются разрывными величинами. Поэтому не существует систем дифференциальных уравнений, применимых для описания разрывных течений по той простой причине, что параметры разрывных течений недифференцируемы.

Особенности, возникающие в параметрах течения, таковы: слабый разрыв (разрыв производных), контактный разрыв (граница раздела между газами с различными термодинамическими параметрами) и, наконец, сильный разрыв (ударная волна).

Множество всех течений с указанными особенностями описывается единообразно — должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии для любой выделенной части газа или пространства. Как мы видели в § 2 гл. 2, это приводит к выполнению интегральных законов сохранения, которые мы снова выпишем в случае одномерных течений с различного рода симметрией ( $v = 0, 1, 2$ ). В эйлеровых координатах они имеют вид

$$\oint_C \rho x^v dx - \rho u x^v dt = 0, \quad (1)$$

$$\oint_C \rho u x^v dx - (p + \rho u^2) x^v dt = - \int \int_{G_C} v p x^{v-1} dx dt, \quad (2)$$

$$\oint_C \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) x^v dx - \rho u \left( \varepsilon + \frac{p}{2} + \frac{u^2}{2} \right) x^v dt = 0 \quad (3)$$

(см. формулы (2.3.13) — (2.3.15) гл. 2).

В лагранжевых координатах ( $q$  — массовая координата) эти законы сохранения таковы:

$$\oint_C V dq + x^v u dt = 0, \quad (4)$$

$$\oint_C u dq - p x^v dt = - \int \int_{G_C} \frac{v p V}{x} dq dt, \quad (5)$$

$$\oint_C \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dq - u p x^v dt = 0, \quad (6)$$

где  $x = x(q, t)$  — эйлерова координата точки  $(q, t)$ , заданная уравнением

$$\frac{\partial x(q, t)}{\partial t} = u(q, t) \quad (7)$$

(см. формулы (2.4.10) — (2.4.12) гл. 2).

В этих формулах  $C$  — любой кусочно-гладкий замкнутый контур и  $G_C$  — ограниченная им область на плоскости переменных  $x, t$  и  $q, t$  соответственно.

Вообще говоря, этих законов сохранения недостаточно для полного описания течения: необходимо дополнить их требованием неубывания энтропии любой фиксированной массы газа. Это требование исключает появление неустойчивых разрывов.

Интегральные законы сохранения (1) — (3) или (4) — (6) с условием неубывания энтропии есть *консервативная система уравнений газовой динамики*, применимая к любым течениям, в том числе с разрывными параметрами.

Система интегральных законов сохранения чрезвычайно неудобна для разностной аппроксимации ее на фиксированной сетке в случае наличия разрывов решения, так как она требует явного выделения линий разрыва, аппроксимации дифференциальных уравнений вне линий разрыва и удовлетворения интегральных законов сохранения на линиях разрыва (условий Гюгонио). Мы приходим к выводу, что именно так описывает течение метод характеристик. Ясно поэтому, что метод характеристик есть один из наиболее точных методов решения интегральных законов сохранения (1), (2), (3) и в случае разрывных решений, если, конечно, в нем учитываются и достаточно точно все возникающие особенности решения.

Игнорирование разрывов, которые возникают в течении, и прямая аппроксимация интегральных законов сохранения на фиксированных ячейках сетки такая же, как и на гладких течениях, как правило, приводит к неустойчивой вычислительной процедуре, в которой ударная волна заменяется колебаниями большой амплитуды.

Прямая аппроксимация интегральных законов сохранения может привести к устойчивому приближенному описанию параметров течения лишь в том случае, если возникающая при этом разностная схема вносит диссипацию, «вязкость аппроксимации». Аппроксимируя недиссипативные члены уравнений, разностная аппроксимация вносит малые, а на разрывных решениях — большие добавки, которые могут дестабилизировать или стабилизировать численное решение. Хорошая разностная аппроксимация законов сохранения должна вносить «положительную» вязкость, которую затем стремятся минимизировать. Устойчивыми схемами, аппроксимирующими интегральные законы сохранения без явного введения в них псевдовязкости являются схемы Лакса, Лакса — Вендрофа, С. К. Годунова.

Характерной чертой прямой аппроксимации интегральных законов сохранения является так называемое свойство *консервативности* или *дивергентности* получающихся при этом разностных схем \*).

Это свойство состоит в том, что уравнения разностной схемы могут быть интерпретированы как запись интегральных законов сохранения (1), (2), (3) или (4), (5), (6) для ячейки сетки, образованной пересечением прямых  $t = m\tau$ ,  $t = (m + 1)\tau$  с прямыми  $x = x_i$ ,  $x = x_{i+1}$  ( $q = q_i$ ,  $q = q_{i+1}$ ) при некоторой аппроксимации (или интерполяции) величин, входящих в законы сохранения на границах ячейки. Эта аппроксимация остается

---

\*) На необходимость применения таких схем для задач с разрывными коэффициентами и решениями указывали еще в 1951 г. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский (см., например, их работу 1959 г.).

постоянной на данной границе ячейки, т. е. одинакова при записи законов сохранения в соседних ячейках.

Это обеспечивает свойство *аддитивности консервативной разностной схемы*, которое состоит в том, что при суммировании разностных уравнений по соседним ячейкам, мы получаем новое уравнение, которое также может рассматриваться как запись законов сохранения для внешней границы области, составленной из объединения этих ячеек. Короче говоря, разностные уравнения обладают теми же свойствами, что и криволинейные интегралы (1), (2), (3).

Это свойство дает следующее преимущество консервативным разностным схемам.

Для консервативной разностной схемы можно применить произвольные аппроксимации (интерполяции) величин на границах ячейки. Если при этом разностная схема сходится, т. е. семейство разностных решений имеет предел при  $\tau, h(\tau) \rightarrow 0$  (в некоторой слабой норме), то этот предел удовлетворяет именно пущным законам сохранения (1), (2), (3), а не каким-либо другим.

Распоряжаясь правильно имеющимся произволом в интерполяции величин на границах ячейки, можно получить дополнительные преимущества консервативных разностных схем.

Указанное свойство консервативных разностных схем схоже со свойством системы дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u_\mu, x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( B(u_\mu, x, t) \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right), \quad (8)$$

в которой «вязкость» — правая часть (8) — входит консервативным или дивергентным образом, как производная от выражения  $B \frac{\partial u_\mu}{\partial x}$ , где  $B$  — довольно произвольная матрица.

Для системы (8) также имеем похожее свойство. Если при  $\mu \rightarrow 0$  решение  $u_\mu(x, t)$  имеет предел  $u(x, t)$ , то этот предел удовлетворяет законам сохранения

$$\oint_C u \, dx - \varphi(u, x, t) \, dt = 0, \quad (9)$$

т. е. является обобщенным решением системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

(Подробнее об этом см. главу 4.) Эта схожесть устойчивых аппроксимаций интегральных законов сохранения и «метода исчезающей вязкости» построения разрывных решений систем квазилинейных уравнений имеют не только внешний, но и глубо-

кий характер. Мы уже говорили выше, что для обеспечения устойчивости разностного метода в случае разрывных решений схема обязательно должна вносить «вязкость аппроксимации».

Перейдем теперь ко второму, наиболее распространенному методу единообразного описания газодинамических течений — методу вязкости или «псевдовязкости».

В этом методе мы сразу отказываемся от детального рассмотрения ударных волн\*) и рассматриваем течения газов, обладающих некоторой вязкостью (и теплопроводностью), иногда, довольно непохожей на физическую вязкость. В этом случае ее называют «псевдовязкостью». Вводя в уравнения газовой динамики эту вязкость, мы приближенно описываем ударные волны как плавный ударный переход, который был довольно подробно рассмотрен в § 5 главы 2.

Введение вязкости в законы сохранения газовой динамики достигается заменой давления  $p$  в уравнениях (1)—(3) или (4)—(6) величиной  $\bar{p}$ :

$$\bar{p} = p + \omega, \quad \omega = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \rho \frac{\partial u}{\partial q} = -\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial q}, \quad (11)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости.

Обратим внимание, что введение вязкости повышает порядок дифференциальных уравнений по  $x(q)$ ; это требует постановки дополнительных условий на внутренних и внешних границах. На внутренних (контактных) границах это условие вытекает из требования непрерывности векторов потока импульса и энергии

$$[\omega] = \omega(x+0, t) - \omega(x-0, t) = -\left[\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\left[\mu \rho \frac{\partial u}{\partial q}\right] = 0. \quad (12)$$

На внешних границах обычно ставится условие  $\omega = 0$ . «Физическая» вязкость (11) допускает контактные разрывы, она их «не размывает». Это достоинство физической вязкости всегда стремятся сохранить, вводя другие виды «вязкости», так называемую «псевдовязкость».

Как было показано в п. 6 § 5 главы 2, в случае постоянного коэффициента вязкости  $\mu$  и политропного газа для эффективной ширины  $l$  ударного перехода в лагранжевых координатах получается выражение

$$l = \Delta q = \frac{8\mu}{(\gamma + 1)|\Delta u|}, \quad (13)$$

где  $\Delta u$  — скачок скорости на ударной волне.

Для реальных газов коэффициент вязкости довольно мал, соответствующая реальной физической вязкости ширина  $l$  ударной

\*) Как, впрочем, и в большинстве других методов. Исключение составляет метод характеристик, явно выделяющий все разрывы.

волны имеет порядок длины свободного пробега молекулы. Столь малая реальная вязкость недостаточна для численного расчета, поэтому обычно полагают

$$\mu = \mu_0 h, \quad (14)$$

где величина  $\mu_0$  подбирается так, чтобы ширина  $l$ , вычисленная по формуле (13) для характерных условий  $|\Delta u| \sim c$  ( $c$  — скорость звука), была приемлемой. Формула (13) правильно передает ширину ударной волны в разностном счете лишь при условии, что  $l \gg h$ ; практически достигаются случаи  $l \sim 5h \div 10h$ .

Недостатком вязкости (14) является то, что она действует во всем течении, так что сильное сглаживание ударной волны, соответствующее большому  $\mu_0$ , всегда связано с уменьшением точности расчета в областях гладкости течения.

Исходя из этих соображений, Дж. Нейман и Р. Рихтмайер [1950] предложили нелинейную вязкость

$$\mu = \mu_0 h^2 \rho \left| \frac{\partial u}{\partial q} \right|. \quad (15)$$

В п. 6 § 5 главы 2 изучались стационарные решения уравнений газовой динамики с вязкостью (15).

Согласно этому исследованию, ширина ударного перехода для вязкости (15) равна  $l = \pi \sqrt{\frac{2\mu_0}{\gamma+1}} h$ , т. е. имеет порядок  $O(h)$  и не зависит от силы ударной волны. Вязкий член  $\omega$  имеет в гладкой части течения порядок  $O(h^2)$  и, следовательно, не влияет сильно на точность расчета. Таковы плюсы искусственной вязкости (псевдовязкости), введенной Нейманом и Рихтмайером.

Отметим еще одну особенность вязкости Неймана — Рихтмайера. В отличие от линейной вязкости, когда примыкание переходного профиля  $v(q)$  к асимптотическим значениям  $v_0, v_1$  происходит аналитически, в случае вязкости Неймана — Рихтмайера примыкание происходит не аналитически, в точках сопряжения  $q_0, q_1$  терпит разрыв вторая производная.

Так как в области ударной волны градиенты велики, этот разрыв производных приводит к постоянному источнику возмущений, вызывающих сильные осцилляции гидродинамических величин в окрестности фронта.

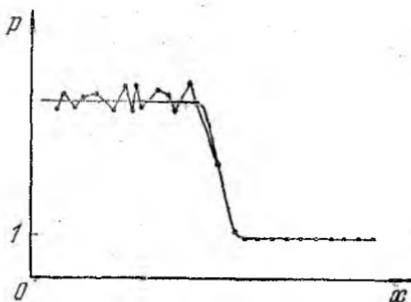


Рис. 3.14.

Профиль ударной волны в разностном расчете имеет примерно следующий вид (рис. 3.14). При этом амплитуда осцилляций возрастает при уменьшении коэффициента вязкости.

Сильная зависимость профиля разностной ударной волны от  $\mu_0$  составляет характерную особенность схемы Неймана — Рихтмайера, которая в некоторых случаях затрудняет интерпретацию результатов.

**2. Разностная схема «крест» для системы уравнений с вязкостью.** При наличии вязкости единственным видом разрывов, допускаемых законами сохранения, является контактный разрыв. Поэтому с учетом наших замечаний о лагранжевом способе описания течение описывается системой дифференциальных уравнений ( $v = 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial \bar{p}u}{\partial q} = 0,$$

$$\bar{p} = p + \omega, \quad \omega = -\mu_0 \frac{\partial u}{\partial q},$$

где  $\mu$  задано формулой (8.1.14) или (8.1.15) в зависимости от выбора вида вязкости.

В случае течений без ударных волн преимущества и достоинства консервативных разностных схем становятся менее очевидными. Если, однако, учесть, что ударный переход «размазывается» всего на несколько счетных интервалов, то можно понять, что это свойство остается полезным.

Первой опубликованной в печати разностной схемой, использующей псевдовязкость, была схема Неймана — Рихтмайера из цитированной нами работы 1949 г. Это схема типа «крест».

Схема «крест» построена на аппроксимации первых двух законов сохранения (8.1.4), (8.1.5) на прямоугольных ячейках разностной сетки в плоскости лагранжевых переменных  $q, t$ . При этом для достижения точности второго порядка и во избежание интерполяций термодинамические величины  $p, \bar{p}, v$  и скорость  $u$  разнесены по разным точкам сетки — полущелым и целым соответственно. Третье уравнение используется в недивергентном виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

связывающем только термодинамические величины.

Разностная схема имеет вид

$$\frac{u_i^{m+\frac{1}{2}} - u_i^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^m}{h} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - u_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m}{2} \cdot \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} = 0, \quad (5)$$

где

$$\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m = p_{i+\frac{1}{2}}^m + \omega_{i+\frac{1}{2}}^m, \quad (6)$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^m = -\mu_0 h^2 \rho_{i+\frac{1}{2}}^m \frac{\left| \frac{u_{i+1}^{m-\frac{1}{2}} - u_i^{m-\frac{1}{2}}}{h} \right|}{h} \cdot \frac{u_{i+1}^{m-\frac{1}{2}} - u_i^{m-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^m = \varepsilon \left( p_{i+\frac{1}{2}}^m, v_{i+\frac{1}{2}}^m \right). \quad (8)$$

В области гладкого течения схема имеет второй порядок точности, поскольку формулы (3), (4) аппроксимируют законы сохранения формулой интегрирования с центрированными точками, а вязкий член  $\omega$  имеет порядок  $O(h^2)$ . Формула (5) также имеет второй порядок точности.

На рис. 3.15 показаны ячейки интегрирования для законов сохранения.

В практическом счете избегаются от обозначений дробных шагов по времени, применяя сдвиг по временному индексу:

$$u_i^{m+\frac{1}{2}} \rightarrow u_i^{m+1}. \quad (9)$$

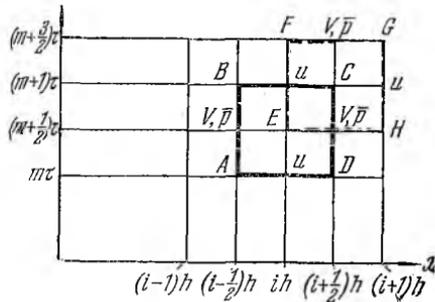
Рис. 3.15.

Тогда формулы (3), (4), (7) принимают вид

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^m}{h} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} = 0, \quad (11)$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^m = -\mu_0 h^2 \rho_{i+\frac{1}{2}}^m \frac{|u_{i+1}^m - u_i^m|}{h} \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h}. \quad (12)$$



При произвольном уравнении состояния (8) формула (5) требует итераций для определения  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ . В случае идеального газа

формула (5) допускает явное разрешение относительно  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ .

Если аппроксимировать не уравнение (2), а закон сохранения энергии

$$\oint \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dq - (\bar{p}u) dt = 0,$$

то при сохранении расположения точек сетки, в которых вычисляются  $p$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  и скорость  $u$ , приходится пользоваться интерполяцией  $u^*$ .

Рассмотрим ряд других схем с вязкостью.

Р. Лэттер [1955] предложил следующую модификацию метода Неймана — Рихтмайера. Поскольку вязкость вводится для того, чтобы сглаживать существующие и возникающие из волн сжатия ударные волны, а в волнах разрежения градиенты уменьшаются и при отсутствии вязкости, то в разностном расчете целесообразно для повышения точности исключать действие вязкости в области волн разрежения, т. е. «занулять» коэффициент вязкости.

В плоском случае в волнах сжатия и ударных волнах выполняется неравенство (см. гл. 2, § 4)

$$\frac{\Delta u}{\Delta q} < 0,$$

в то время как для волн разрежения

$$\frac{\Delta u}{\Delta q} \geq 0.$$

Поэтому Лэттер дает следующее выражение для вязкого члена:

$$\omega = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0, \\ -\mu_0 h^2 \rho \left| \frac{\Delta u}{\Delta q} \right| \frac{\Delta u}{\Delta q} = \mu_0 \rho (\Delta u)^2, & \Delta u < 0. \end{cases}$$

Указанный прием становится особенно эффективным, если применять в разностном расчете линейную вязкость (8.1.14). Тогда профиль ударной волны является аналитическим, осцилляционные эффекты становятся значительно меньше и в то же время точность в области волн разрежения является достаточной.

\*) Схемы такого рода применялись И. М. Гельфандом.

Схемы (10), (11) с условием  $\omega = 0$  на волнах разрежения и с линейным коэффициентом вязкости

$$\omega = -\mu_0 a h \frac{\partial u}{\partial q} \quad (a - \text{скорость звука})$$

исследовались А. А. Самарским, В. Я. Арсениным [1961].

Устойчивость решений системы (1) уравнений газовой динамики с вязкостью проверяется в соответствии с гипотезой локальной устойчивости методом «замораживания» коэффициентов. В этом приближении мы дадим сравнительный дисперсионный анализ исходной системы (1) и разностной схемы (3) — (5). Это позволит нам выяснить ряд характерных особенностей схемы Неймана — Рихтмайера. Перепишем сначала уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{a}^2 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{a}^2 \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

где положено

$$\bar{a}^2 = \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + \bar{p}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}} > 0.$$

В случае, когда  $\mu = 0$ ,  $\bar{p} = p$ ,  $\bar{a} = a$ , где  $a$  — массовая скорость звука. Если  $\mu \neq 0$ , то на ударной волне, где  $\frac{\partial u}{\partial q} < 0$ ,

$$\bar{p} > p, \quad \bar{a}^2 > a^2.$$

Исследуем устойчивость решений системы уравнений гидродинамики

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial q} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{a}^2 \frac{\partial u}{\partial q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

в приближении «замороженных» коэффициентов, полагая

$$\bar{\mu} = \text{const}, \quad \bar{a}^2 = \text{const}.$$

В этом приближении уравнения для вариации решения  $(\delta u, \delta v, \delta p)$  совпадают с уравнениями (13).

Представляя вариацию  $(\delta u, \delta v, \delta p)$  в виде гармоники

$$\delta u = \delta u_0 e^{\omega t + ikq}, \quad \delta v = \delta v_0 e^{\omega t + ikq}, \quad \delta p = \delta p_0 e^{\omega t + ikq} \quad (14)$$

и подставляя (14) в (13), получаем уравнения для  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta p_0$ :

$$\begin{aligned}(\omega + \bar{\mu}k^2)\delta u_0 + 0\delta v_0 + ik\delta p_0 &= 0, \\ -ik\delta u_0 + \omega\delta v_0 + 0\delta p_0 &= 0, \\ \bar{a}^2 ik\delta u_0 + 0\delta v_0 + \omega\delta p_0 &= 0.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \omega + \bar{\mu}k^2 & 0 & ik \\ -ik & \omega & 0 \\ \bar{a}^2 ik & 0 & \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Отсюда получаем выражения для корней:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = -\frac{\bar{\mu}k^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\mu}k^2}{2}\right)^2 - \bar{a}^2 k^2}. \quad (16)$$

Мы видим, что локальная система (13) удовлетворяет условию корректности

$$\operatorname{Re} \omega \leq 0$$

для всех  $k$ .

Из (16) виден характер дисперсии гармоник. При больших  $k$  оба корня  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  вещественны и отрицательны, при  $k$  достаточно малых  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  являются комплексно сопряженными, гармоники затухают с осцилляцией.

Аналогично проводится анализ устойчивости для разностной схемы «крест», аппроксимирующей систему (13). При этом мы произведем сдвиг индексов  $i + \frac{1}{2} \rightarrow i$ ,  $m + \frac{1}{2} \rightarrow m + 1$ . Тогда схема «крест» примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{p_i^m - p_{i-1}^m}{h} &= \bar{\mu} \frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{h^2}, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} &= 0, \\ \frac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\tau} + \bar{a}^2 \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Считая постоянными коэффициенты  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{a}^2$ , проведем гармонический анализ разностной схемы (17). Для этого положим

$$\delta u_j^m = \delta u_0 \rho^{mj} \xi^j, \quad \delta v_j^m = \delta v_0 \rho^{mj} \xi^j, \quad \delta p_j^m = \delta p_0 \rho^{mj} \xi^j, \quad (18)$$

где

$$\xi = e^{ikh}, \quad \rho = e^{\omega\tau}, \quad k - \text{вещественное.}$$

После подстановки (18) в уравнения (17), получаем уравнения для  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta p_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\rho-1}{\tau} + \frac{4\bar{\mu}}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \right) \delta u_0 + 0 \delta v_0 + \frac{1-e^{-ikh}}{h} \delta p_0 &= 0, \\ - \frac{e^{ikh}-1}{h} \rho \delta u_0 + \frac{\rho-1}{\tau} \delta v_0 + 0 \delta p_0 &= 0, \\ \bar{a}^2 \frac{e^{ikh}-1}{h} \rho \delta u_0 + 0 \delta v_0 + \frac{\rho-1}{\tau} \delta p_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Отсюда приходим к характеристическому уравнению

$$\frac{\rho-1}{\tau} \left[ \left( \frac{\rho-1}{\tau} \right)^2 + \frac{4\bar{\mu}}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \frac{\rho-1}{\tau} + 4\bar{a}^2 \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{h^2} \rho \right] = 0, \quad (20)$$

корни которого имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 1, \quad \rho_{2,3} = 1 - 2b(r + \bar{\kappa}^2) \pm 2\sqrt{b[b(r + \bar{\kappa}^2)^2 - \bar{\kappa}^2]}, \\ b &= \sin^2 \frac{kh}{2}, \quad r = \frac{\bar{\mu}\tau}{h^2}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\bar{a}\tau}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из (21) получаем вывод:

Если

$$\max_k b(r + \bar{\kappa}^2)^2 = (r + \bar{\kappa}^2)^2 \leq \bar{\kappa}^2, \quad (22)$$

то корни  $\rho_{2,3}$  являются комплексно сопряженными и схема «крест» с вязкостью устойчива в приближении замороженных коэффициентов.

При  $\mu = 0$  необходимым и достаточным условием устойчивости является критерий Куранта  $\bar{\kappa} \leq 1$ .

При  $\mu < 0$  условие устойчивости является более ограничительным для  $\tau$ . Действительно, неустойчивость может наступить только при вещественных корнях. Тогда простой анализ показывает, что необходимым условием устойчивости является

$$\bar{\kappa}^2 \leq 1 - 2r.$$

Отсюда получаем

$$\bar{\kappa} = \frac{a\tau}{h} \leq \sqrt{(1-2r)\frac{a^2}{\bar{a}^2}} = \sqrt{(1-2r)\frac{\rho}{\bar{\rho}}}. \quad (23)$$

На ударной волне  $\frac{\rho}{\bar{\rho}} < 1$ , и ограничение (23) приводит иногда к сильному уменьшению шага сравнительно с обычным критерием Куранта.

Рассмотрим теперь дисперсию гармоник в разностной схеме. В случае  $\mu = 0$  при выполнении условия корректности имеем  $|\rho_i| = 1$ , т. е. все корни  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) характеристического

уравнения лежат на единичном круге. Хотя дисперсия имеет место, амплитуда любой гармоники не убывает: осцилляции, раз возникнув, не затухают.

Если  $\mu > 0$ , то при выполнении условия устойчивости (22) амплитуда любой гармоники, соответствующей корням  $\rho_2, \rho_3$ , затухает. Действительно, в этом случае корни комплексно сопряженные и их модуль равен  $\sqrt{1 - 4br} < 1$ . Затухание каждой гармоники имеет место и при вещественных корнях.

Ясно, что чем больше  $r$ , тем сильнее затухание. Рассмотрим с этой точки зрения линейную и квадратичную вязкости.

В случае линейной вязкости имеем

$$r = \frac{\bar{\mu}\tau}{h^2} = \mu_0\lambda.$$

Таким образом,  $r$  конечно и гармоники с большим  $k$  затухают сильно.

В случае квадратичной вязкости имеем

$$r = \frac{\mu_0 \left| \frac{\Delta u}{\Delta q} \right| h^2}{h^2} \tau = \mu_0 \left| \frac{\Delta u}{\Delta q} \right| \tau.$$

На фронте ударной волны, где  $\left| \frac{\Delta u}{\Delta q} \right| h$  конечно, затухание сильное, при удалении от ударной волны  $r$  имеет порядок  $O(\tau)$  и затухание слабее.

Гармоники, соответствующие корням  $\rho_2, \rho_3$ , являются бегущими волнами, распространяющимися в плоскости  $q, t$  со скоростью

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\omega}{ik}.$$

Гармоники, соответствующие корню  $\rho_1 = 1$ , являются стоячими волнами.

Затухание бегущих гармонических волн означает действие аппроксимационной вязкости на ударных фронтах, приводящей к сглаживанию последних.

Незатухание стоячих гармонических волн означает, что аппроксимационная вязкость не действует на контактных границах, контактная граница не сглаживается и возникающие вблизи границы неравномерности плотности и энтропии сохраняются (*энтропийный след*). Действительно, в стоячей волне

$$\rho = \rho_1 = 1,$$

и из уравнений (19) следует, что  $\delta u_0 = \delta p_0 = 0$ . Это означает, что вариации  $\delta u$ ,  $\delta p$  давления и скорости в стоячей гармонической волне равны нулю.

Анализ устойчивости, предполагающий замораживание коэффициентов  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{a}^2$ , дает только качественную оценку устойчивости.

По существу, такой анализ означает линейризацию уравнений в окрестности течения с постоянными параметрами или во всяком случае с малыми градиентами.

При учете градиентов течения анализ сильно усложняется. Тем не менее качественные выводы, которые получаются из такого упрощенного анализа (ограничения шага в районе ударной волны, наличие энтропийных следов), подтверждаются практическими расчетами.

Рассмотренная выше схема «крест» не является консервативной разностной схемой, так как она аппроксимирует одно из уравнений газовой динамики (уравнение (2)) в недивергентной форме. При наличии вязкости это, конечно, допустимо. Однако можно построить консервативные разностные схемы, аппроксимирующие законы сохранения для вязкого газа как в лагранжевых, так и в эйлеровых координатах. Одно из преимуществ таких схем состоит также в том, что они более точно передают интегральные характеристики течения при достаточно грубых сетках, чем неконсервативные схемы. Ю. П. Попов и А. А. Самарский [1969, 1970] рассмотрели неявную разностную схему с весами, которую мы выпишем в случае лагранжевых переменных:

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{1}{h} \left[ \left( \alpha_1 \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + (1 - \alpha_1) \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m \right) - \left( \alpha_1 \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} + (1 - \alpha_1) \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^m \right) \right] = 0, \quad (24)$$

$$\frac{x_i^{m+1} - x_i^m}{\tau} = \alpha_2 u_i^{m+1} + (1 - \alpha_2) u_i^m, \quad (25)$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{1}{h} \left[ \left( \alpha_3 u_{i+1}^{m+1} + (1 - \alpha_3) u_{i+1}^m \right) - \left( \alpha_3 u_i^{m+1} + (1 - \alpha_3) u_i^m \right) \right] = 0, \quad (26)$$

$$\frac{e_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - e_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{1}{h} \left[ \alpha_5 \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + (1 - \alpha_5) \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m \right] \times \\ \times \left[ \alpha_4 (u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}) + (1 - \alpha_4) (u_{i+1}^m - u_i^m) \right] = 0. \quad (27)$$

Уравнения (24), (25) могут рассматриваться как аппроксимация законов сохранения импульса и объема на разностной ячейке, поэтому они консервативны. Распоряжаясь параметрами  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), можно добиться, чтобы уравнение (27) в сочетании с (24)–(26) было эквивалентно аппроксимации на ячейке разностной схемы интегрального закона сохранения энергии.

Это достигается при

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha, \quad \alpha_5 = 0,5, \quad (28)$$

где  $\alpha$  — свободный параметр. Распоряжаясь свободными параметрами, можно менять характер интерполяции по времени. При  $\alpha_3 = \alpha_5 = 0,5$  уравнение (27) можно преобразовать к такому виду, что оно будет иметь вид аппроксимации уравнения  $\epsilon_t + \bar{p}v_t = 0$ . При выполнении этих условий ( $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha$ ;  $\alpha_3 = \alpha_5 = 0,5$ ) авторы называют схему (24)–(27) *полностью консервативной*; при этом имеется в виду, что, помимо дивергентной аппроксимации дивергентного уравнения сохранения полной энергии, схема аппроксимирует с хорошей точностью и другие (недивергентные) формы уравнений газовой динамики.

При  $\alpha_k = 0,5$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) схема (24)–(27) имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^2) + O(h^2)$ . Все остальные схемы этого класса имеют порядок аппроксимации  $O(\tau) + O(h^2)$ . При  $\alpha \geq 0,5$  разностная схема абсолютно устойчива (в смысле локальной устойчивости), при  $\alpha < 0,5$  — условно устойчива.

В. Я. Гольдин, Н. И. Ионкин и Н. Н. Калиткин [1969] также построили полностью консервативную разностную схему с аппроксимацией  $O(\tau^2) + O(h^2)$  для уравнений в лагранжевых координатах с учетом вязкости и теплопроводности, исходя из других соображений. В. Е. Трощев [1970] построил полностью консервативную разностную схему с аппроксимацией второго порядка, которая является явной. В случае плоской симметрии ( $v = 0$ ) схема В. Е. Трощикова совпадает со схемой «крест» (3)–(5).

Псевдовязкость Неймана — Рихтмайера вводилась в уравнения и разностную схему по аналогии с физической вязкостью в уравнениях газовой динамики. Возникает вопрос: можно ли построить схему, не опирающуюся на аналогию с физической вязкостью, но обеспечивающую затухание гармоник и связанное с ней сглаживание профилей? Пример такой схемы был дан П. Лаксом [1954].

**3. Разностные схемы Лакса, Лакса — Вендрофа, предиктор-корректор.** Для системы уравнений (8.2.1), которую запишем в виде (8.2.13) и положим  $\bar{\mu} = 0$ ,  $\bar{p} = p$ ,  $\bar{a} = a$ , аппроксимация Лакса имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - \bar{u}_i^m}{\tau} + \frac{p_{i+1}^m - p_{i-1}^m}{2h} &= 0, \\ \frac{v_i^{m+1} - \bar{v}_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} &= 0, \\ \frac{p_i^{m+1} - \bar{p}_i^m}{\tau} + (a^2)_i^m \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где через  $\bar{f}_i^m$  обозначены величины

$$\bar{f}_i^m = \frac{f_{i+1}^m + f_{i-1}^m}{2}.$$

Уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_0 u^m}{\tau} + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} p^m &= \mu \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^m, \\ \frac{\Delta_0 v^m}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^m &= \mu \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} v^m, \\ \frac{\Delta_0 p^m}{\tau} + (\alpha^2)^m \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^m &= \mu \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} p^m, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\mu = \frac{h^2}{2\tau}.$$

Члены в правых частях аппроксимируют выражения вида  $\mu \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ , поэтому схемы (1), (2) абсолютно аппроксимируют систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}, & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial q^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial q} &= \mu \frac{\partial^2 p}{\partial q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует, что аппроксимация (1) системы (8.2.13) является условной: при  $\frac{h^2}{2\tau} = \mu = \text{const}$  схема (1) аппроксимирует параболическую систему (3), при  $\frac{\tau}{h} = \text{const}$  схема (1) аппроксимирует исходную гиперболическую систему (8.2.13). Для уравнений газовой динамики типичным является предельный переход  $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ . Однако при  $\frac{a_{\max}^2}{a_{\min}^2} \gg 1$  в практическом

счете критерий Куранта  $\frac{\tau}{h} a_{\max} \leq 1$  в точках, в которых  $a \ll \ll a_{\max}$ , уводит аппроксимацию (1) от уравнений (8.2.13) к уравнениям (3).

Установим условие устойчивости схемы Лакса. Напишем дисперсионное уравнение для схемы (2), «замораживая» величину  $a^2$ . Корнями  $\rho_1, 2, 3$  этого уравнения являются

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 1 - 4br, & \rho_{2,3} &= 1 - 4br \pm i\kappa \sin kh, \\ r &= \frac{\mu\tau}{h^2}, & b &= \sin^2 \frac{kh}{2}, & \kappa &= \frac{a\tau}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Устойчивость схемы имеет место при  $\kappa \leq 1$ .

Из (4) следует, что все гармоники затухают.

Отметим, что в схеме (2) вязкие члены входят во все три уравнения, в частности в уравнение для  $v$ . Отсюда следует, что разностная схема (2), в отличие от системы уравнений газовой динамики и в отличие от схемы Неймана — Рихтмайера, не допускает контактной границы. Это означает, что разрыв плотности будет «размазываться». Эффект размазывания становится еще более заметным при малом  $\tau$ , так как коэффициент  $\mu$  аппроксимационной вязкости растет с уменьшением  $\tau$ .

П. Лакс и Б. Вендроф [1960] построили схему, в которой вязкость аппроксимации не приводит к размазыванию контактных границ. Схема, построенная ими, аналогична симметричной схеме второго порядка точности с дополнительно введенной искусственной вязкостью.

Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

есть консервативная система квазилинейных уравнений, которой соответствует недивергентная форма записи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad A = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|. \quad (6)$$

Применим к системе (5) аппроксимацию типа предиктор — корректор.

Формулы вспомогательного шага (предиктор) имеют вид

$$\frac{u_i^* - \bar{u}_i^m}{\tau^*} = A(u_i^m) \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^m - u_{i-\frac{1}{2}}^m}{h}, \quad \bar{u}_i^m = \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^m + u_{i+\frac{1}{2}}^m}{2}. \quad (7)$$

Вспомогательные величины  $u_i^*$  относятся к моменту времени  $t^* = t_m + \tau^*$ .

Последующий шаг (корректор)

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{\varphi(u_{i+1}^*) - \varphi(u_i^*)}{h} = 0 \quad (8)$$

есть аппроксимация законов сохранения системы (5) для ячейки сетки

$$\left(i - \frac{1}{2}\right)h \leq x \leq \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad m\tau \leq t \leq (m+1)\tau.$$

Нетрудно видеть, что при  $\tau^* = \frac{\tau}{2}$  схема (7), (8) эквивалентна с точностью до членов второго порядка малости следующей

схеме:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} = \frac{g_{i+1}^m - g_i^m}{h}, \quad (9)$$

где вектор  $g_i^m$  задан равенством

$$g_i^m = \frac{\varphi\left(u_{i-\frac{1}{2}}^m\right) + \varphi\left(u_{i+\frac{1}{2}}^m\right)}{2} + \frac{\tau}{2h} A^2(u_i^m) \left(u_{i+\frac{1}{2}}^m - u_{i-\frac{1}{2}}^m\right). \quad (10)$$

Схема (9), (10) обладает точностью порядка  $O(\tau^2) + O(h^2)$ , корни ее локального дисперсионного уравнения лежат на единичной окружности, и гармонические решения локальной системы не затухают.

Для затухания гармоник и сглаживания осцилляций в функцию  $g_i^m$  вводится дополнительный член вида

$$\omega = h \frac{B_{i+\frac{1}{2}}^m - B_{i-\frac{1}{2}}^m}{h} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^m - u_{i-\frac{1}{2}}^m}{h}, \quad (11)$$

где  $B_{i+\frac{1}{2}}^m = B(u_{i+1}^m, u_i^m)$  — некоторая неотрицательная симметричная матрица, удовлетворяющая условию  $B(u, u) = 0$ . Величина  $\omega$  из (11) является псевдовязким членом и обуславливает аппроксимационную вязкость схемы (9), (10).

В применении к уравнениям гидродинамики в лагранжевых координатах при  $\mu = 0$ , когда в качестве неизвестной векторной функции  $u$  выбрана совокупность величин  $\left\{u, v, E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}\right\}$ , имеем

$$A = \begin{vmatrix} u \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & -\frac{\partial p}{\partial v} & -\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 1 & 0 & 0 \\ u^2 \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} - p & -u \frac{\partial p}{\partial v} & -u \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Матрица  $B$  определяется следующим образом:

$$B(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \mu \frac{|u_1 - u_2|}{a^2} A^2,$$

где  $a$  — массовая скорость звука,  $\mu$  — коэффициент вязкости.

Заметим, что тот же эффект затухания гармоник, означающий наличие аппроксимационной вязкости, можно получить иным способом, не вводя дополнительного члена, а меняя уровень промежуточного слоя  $t^*$ .

Проведем соответствующий анализ в акустическом приближении. Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v = Au, \quad u = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad v = \{v_1, \dots, v_n\} \quad (13)$$

есть гиперболическая система с постоянной матрицей

$$A = \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Формулы предиктора запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^*(x) - \bar{u}^m(x)}{\tau^*} &= \frac{v^m\left(x + \frac{h}{2}\right) - v^m\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= A \frac{u^m\left(x + \frac{h}{2}\right) - u^m\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}, \\ \bar{u}^m(x) &= \frac{u^m\left(x - \frac{h}{2}\right) + u^m\left(x + \frac{h}{2}\right)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы корректора примут вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} &= \frac{v^*\left(x + \frac{h}{2}\right) - v^*\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= A \frac{u^*\left(x + \frac{h}{2}\right) - u^*\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражения  $u^*\left(x + \frac{h}{2}\right)$ ,  $u^*\left(x - \frac{h}{2}\right)$ , получающиеся из (14) при  $x = x + \frac{h}{2}$ ,  $x = x - \frac{h}{2}$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} &= \frac{\bar{v}^m\left(x + \frac{h}{2}\right) - \bar{v}^m\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} + \\ &+ \tau^* A \frac{v^m(x+h) - 2v^m(x) + v^m(x-h)}{h^2} = A \frac{u^m(x+h) - u^m(x-h)}{2h} + \\ &+ \tau^* A^2 \frac{u^m(x+h) - 2u^m(x) + u^m(x-h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим теперь структуру аппроксимационной вязкости в первом дифференциальном приближении (см. п. 3 § 2).

Первое дифференциальное приближение схемы (16) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\tau^* - \frac{1}{2}\tau\right) A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Система (17) — параболического типа при  $\tau^* > \frac{1}{2} \tau$ . Сопоставляя (16), (11), (13), нетрудно убедиться, что в акустическом приближении схема Лакса — Вендрофа будет аналогична схеме (16).

Сравним теперь схему (16) предиктор — корректор со схемой Лакса

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^m(x)}{\tau} = A \frac{u^m(x+h) - u^m(x-h)}{2h} = \\ = \mu \frac{u^m(x+h) - 2u^m(x) + u^m(x-h)}{h^2}, \quad \mu = \frac{h^2}{2\tau}. \quad (18)$$

Первое дифференциальное приближение схемы Лакса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \mu E - \frac{1}{2} \tau A^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{h^2}{2\tau}. \quad (19)$$

Выясним различие в дисперсии гармоник между схемой Лакса и схемой предиктор — корректор. Для простоты проведем этот анализ в первом дифференциальном приближении.

Нетрудно видеть, что если  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы  $A$ ,  $r_i$  — инварианты Римана системы (6) с постоянной матрицей  $A$ , то после перехода к инвариантам  $r_i$  уравнения (17), (19) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = \left( \tau^* - \frac{1}{2} \tau \right) \lambda_i^2 \frac{\partial^2 r_i}{\partial x^2}, \quad (20)$$

соответственно

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = \left( \mu - \frac{1}{2} \tau \lambda_i^2 \right) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{h^2}{2\tau}. \quad (21)$$

Теперь видно существенное различие между схемой Лакса и схемой предиктор — корректор.

Если для некоторого  $i$   $\lambda_i = 0$ , то в схеме предиктор — корректор соответствующий инвариант Римана не подвергается действию вязкости и переносится без изменения (стоячая волна), в то время как в схеме Лакса действию вязкости подвергаются все инварианты. При переходе к уравнениям гидродинамики в лагранжевых координатах это означает, что в схеме предиктор — корректор энтропия (инвариант, сохраняющийся вдоль контактной характеристики — контактной границы) не подвергается действию вязкости, контактный разрыв не сглаживается. В то же время, как было показано, вязкость Лакса сглаживает контактные разрывы.

Вязкость Лакса — Вендрофа обладает аналогичным свойством сохранения контактной границы.

Р. Мак-Кормак [1969] предложил двухшаговую схему второго порядка точности, которая в применении к системе (5) имеет вид

$$\tilde{u}^{m+1}(x) = u^m(x) + \frac{\tau}{h} [\varphi(u(x+h)) - \varphi(u(x))], \quad (22)$$

$$u^{m+1}(x) = \frac{1}{2} \{u^m(x) + \tilde{u}^{m+1}(x) + \frac{\tau}{h} [\varphi(\tilde{u}^{m+1}(x)) - \varphi(\tilde{u}^{m+1}(x-h))]\}. \quad (23)$$

Другой вариант этой схемы получается из (22), (23), если в правых частях (22), (23) поменять местами разностные формулы дифференцирования вперед и назад. В работе Д. Андерсона [1974] эта схема рассматривается как нецентральный вариант схемы Лакса — Вендрофа. В работах П. Катлера и Г. Ломакса [1971], П. Катлера и др. [1975] предложено добавить в правую часть уравнения (23) член, аппроксимирующий величину  $\delta h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ,  $\delta = \text{const}$  с целью сглаживания численного решения. Отметим, что схема Мак-Кормака широко применяется в аэродинамических расчетах.

В работах Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина [1968], Ю. И. Шокина [1973] рассмотрен вопрос о схемах вида

$$u^{m+1}(x) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} u^m(x + \alpha h), \quad (24)$$

аппроксимирующих гиперболическую систему (13) с постоянной матрицей  $A$ , допускающих контактные разрывы (свойство  $K$ ). Матрицы  $B_{\alpha}$  постоянны и удовлетворяют условиям

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} = E, \quad \sum_{\alpha} \alpha B_{\alpha} = \kappa A, \quad \kappa = \frac{\tau}{h}.$$

Рассмотрение ведется на базе первого дифференциального приближения схемы (24), которое имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где

$$C = \frac{h^2}{2\tau} \left[ \sum_{\alpha} \alpha^2 B_{\alpha} - \kappa^2 A^2 \right].$$

Пусть матрица  $A$  имеет различные собственные значения,  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Зафиксируем одно из них  $\xi_j = \xi$  и определим соответствующий левый собственный вектор  $l$ :  $lA = \xi l$ .

Будем говорить, что разностная схема (24) обладает свойством  $K$ , если  $lC = 0$ .

В работах Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина [1968], Ю. И. Шокина [1973] для ряда классов разностных схем найдены необходимые и достаточные условия наличия у разностных схем свойства  $K$ .

В качестве примера сформулируем одно такое утверждение.

**Теорема.** *Для того чтобы трехточечная разностная схема вида (24) ( $\alpha = -1, 0, 1$ ) обладала свойством  $K$ , необходимо и достаточно выполнение условия  $lB_0 = (1 - \kappa^2 \xi^2) l$ .*

В частности, из указанного утверждения вытекает, что разностная схема Лакса ( $C = \frac{h^2}{2\tau} (1 - \kappa^2 A^2)$ ,  $lC = \frac{h^2}{2\tau} (1 - \kappa^2 \xi^2) l$ ) не обладает свойством  $K$  (исключая случай  $\kappa \xi = 1$ ) и что мажорантная схема ( $\alpha = -1, 0, 1$ ,  $B_1 = \kappa A^+$ ,  $B_{-1} = -\kappa A^-$ ,  $A^+ \geq 0$ ,  $A^- \leq 0$ ,  $A = A^+ + A^-$ ) обладает свойством  $K$ , если  $\xi = 0$  (аналог системы уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах), либо  $\xi \kappa = 1$ .

Нетрудно видеть, что наличие у разностной схемы для уравнений газовой динамики свойства  $K$  для собственного числа  $\xi = 0$  в случае лагранжевых координат и для  $\xi = -u$  в случае эйлеровых координат означает, что в системе уравнений первого дифференциального приближения на энтропию аппроксимационная вязкость не действует, и, следовательно, контактные границы не размазываются.

**4. Схемы С. К. Годунова и В. Ф. Куропатенко.** Рассмотренные в предыдущем пункте схемы исходили из аппроксимации уравнений газовой динамики с искусственной вязкостью, обеспечивающей сглаживание ударного фронта. В настоящем пункте мы рассмотрим схемы, основанные на другом подходе, который можно сформулировать следующим образом.

Расчетные формулы должны в основном носить единообразный характер и аппроксимировать законы сохранения, так что получающаяся схема аппроксимирует обобщенные решения как в области гладкого течения, где она аппроксимирует уравнения газовой динамики, так и на разрывах, где она аппроксимирует условия Гюгоню. В силу единообразности расчетных формул течение в гладкой области при этом рассчитывается так же, как и течение в окрестности разрыва, что приводит к появлению аппроксимационной вязкости.

Таким образом, схема предполагает наличие разрывов в каждом счетном интервале и построение расчетных формул с учетом возможных разрывов.

Первой схемой такого рода явилась *схема распада разрыва*, предложенная С. К. Годуновым [1959].

В каждый рассчитываемый момент  $t_m$  функции  $\rho^m(q)$ ,  $p^m(q)$ ,  $e^m(q)$ ,  $u^m(q)$ , описывающие течение, аппроксимируются кусочно-постоянными функциями, которые характеризуют средние зна-

чения величин  $\rho^m$ ,  $p^m$ ,  $\varepsilon^m$ ,  $u^m$  в счетном интервале. Взаимодействие масс газа, заключенных в счетных интервалах и характеризующихся осредненными параметрами  $\rho^m$ ,  $p^m$ ,  $\varepsilon^m$ ,  $u^m$ , описывается с помощью формул распада разрыва на каждой границе двух интервалов. Считая скорость контактной границы между интервалами  $(q_{i-1}, q_i)$ ,  $(q_i, q_{i+1})$  постоянной в промежутке времени  $(t_m, t_{m+1})$ , можно рассчитать состояние газа в интервалах на следующий момент времени  $t_{m+1}$ , осреднить параметры в интервалах, после чего расчет повторяется.

Аппроксимируем законы сохранения

$$\left. \begin{aligned} \oint u dq - p dt &= 0, & \oint v dq + u dt &= 0, \\ \oint E dq - pu dt &= 0, & E &= \varepsilon + \frac{u^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{p_{i+1}^m - p_i^m}{h} &= 0, \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} &= 0, \\ \frac{E_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - E_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{p_{i+1}^m U_{i+1}^m - p_i^m U_i^m}{h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где величины  $u_{i+\frac{1}{2}}^m$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^m$ ,  $p_{i+\frac{1}{2}}^m$ ,  $E_{i+\frac{1}{2}}^m$  суть средние значения соответствующих функций на интервале  $(q_i, q_{i+1})$  в момент времени  $t_m$ .

Так как взаимодействие интервалов  $(q_{i-1}, q_i)$ ,  $(q_i, q_{i+1})$  рассматривается на основе распада разрыва, то  $U_i^m$ ,  $P_i^m$  суть величины скорости и давления, образующиеся на границе  $q = q_i$  вследствие распада разрыва, характеризуемого величинами

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}}^m, & \quad v_{i-\frac{1}{2}}^m, & \quad E_{i-\frac{1}{2}}^m, & \quad q < q_i, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^m, & \quad v_{i+\frac{1}{2}}^m, & \quad E_{i+\frac{1}{2}}^m, & \quad q > q_i. \end{aligned}$$

Для определения  $U_i^m$ ,  $P_i^m$  могут быть использованы известные формулы распада разрыва (см. гл. 2, § 6, п. 8).

Если разрывы величин  $u$ ,  $p$  невелики, например, по относительным амплитудам

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{u_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{p_{i+\frac{1}{2}}},$$

то можно применять линеаризованные формулы распада.

Линеаризованные формулы распада разрыва для политропного газа имеют вид (см. гл. 2, § 6, п. 10)

$$\left. \begin{aligned} u_1 - U &= \frac{P - p_1}{\rho_1 c_1} = \frac{c_1}{\gamma_1} \frac{P - p_1}{p_1}, \\ U - u_0 &= \frac{P - p_0}{\rho_0 c_0} = \frac{c_0}{\gamma_0} \frac{P - p_0}{p_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $U$ ,  $P$  означают скорость и давление, образуемые на контактной границе двух сред, из которых левая обозначена индексом 1, правая — 0,  $c_1$ ,  $c_0$  — скорости звука в средах 1 и 0, соответственно.

Отсюда получаются выражения для  $P$ ,  $U$ :

$$\left. \begin{aligned} P = p_k &= \frac{u_1 - u_0}{\frac{1}{\rho_1 c_1} + \frac{1}{\rho_0 c_0}} + \frac{\frac{p_1}{\rho_1 c_1} + \frac{p_0}{\rho_0 c_0}}{\frac{1}{\rho_1 c_1} + \frac{1}{\rho_0 c_0}}, \\ U = u_k &= \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 c_0 + \rho_1 c_1} + \frac{\rho_0 c_0 u_0 + \rho_1 c_1 u_1}{\rho_0 c_0 + \rho_1 c_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

которыми можно пользоваться в расчетных формулах схемы распада разрыва, когда величины  $\Delta u$ ,  $\Delta p$  малы.

Рассмотрим, например, изотермический газ. Тогда

$$c_1 = c_0 = c, \quad \gamma_0 = \gamma_1 = 1, \quad pv = c^2.$$

Кроме того, в формулах (3), где  $u_1 - u_0$ ,  $P - p_1$ ,  $P - p_0$  являются малыми первого порядка, можно в знаменателях полагать  $\rho_1 = \rho_0 = \rho$ ,  $p_1 = p_0 = p$ . Тогда формулы (3) примут вид

$$u_1 - U = \frac{P - p_1}{\rho c} = \frac{c(P - p_1)}{p}; \quad U - u_0 = \frac{P - p_0}{\rho c} = \frac{c(P - p_0)}{p}.$$

Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{p}{2c} (u_1 - u_0) + \frac{p_1 + p_0}{2}, \\ U &= \frac{c}{2p} (p_1 - p_0) + \frac{u_1 + u_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Учитывая соотношение

$$\frac{\Delta p}{p} = - \frac{\Delta v}{v},$$

верное с точностью до малых второго порядка, формулы (5) можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{c}{2v} (u_1 - u_0) + \frac{p_1 + p_0}{2}, \\ U &= -\frac{c}{2v} (v_1 - v_0) + \frac{u_1 + u_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Применяя формулы (6), получаем

$$\left. \begin{aligned} P_i^m &= \frac{c}{2v_{i+\frac{1}{2}}^m} \left( u_{i-\frac{1}{2}}^m - u_{i+\frac{1}{2}}^m \right) + \frac{p_{i-\frac{1}{2}}^m + p_{i+\frac{1}{2}}^m}{2}, \\ U_i^m &= -\frac{c}{2v_{i+\frac{1}{2}}^m} \left( v_{i-\frac{1}{2}}^m - v_{i+\frac{1}{2}}^m \right) + \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^m + u_{i+\frac{1}{2}}^m}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (7) в первые два уравнения разностной схемы (2), получаем разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{3}{2}}^m - p_{i-\frac{1}{2}}^m}{2h} &= \\ &= \frac{ch}{2} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{u_{i+\frac{3}{2}}^m - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{3}{2}}^m} - \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^m - u_{i-\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{1}{2}}^m} \right], \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{u_{i+\frac{3}{2}}^m - u_{i-\frac{1}{2}}^m}{2h} &= \\ &= \frac{ch}{2} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{v_{i+\frac{3}{2}}^m - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{3}{2}}^m} - \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^m - v_{i-\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{1}{2}}^m} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для линеаризованного уравнения состояния

$$p = p_0 - a^2 v \quad (a - \text{массовая скорость звука})$$

формулы (7), (8) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} P_i^m &= a \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^m - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{2} + \frac{p_{i-\frac{1}{2}}^m + p_{i+\frac{1}{2}}^m}{2}, \\ U_i^m &= \frac{p_{i-\frac{1}{2}}^m - p_{i+\frac{1}{2}}^m}{2a} + \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^m + u_{i-\frac{1}{2}}^m}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

соответственно

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{m+1}_{i+\frac{1}{2}} - u^m_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{p^m_{i+\frac{3}{2}} - p^m_{i-\frac{1}{2}}}{2h} &= \mu \frac{u^m_{i+\frac{3}{2}} - 2u^m_{i+\frac{1}{2}} + u^m_{i-\frac{1}{2}}}{h^2}, \\ \frac{v^{m+1}_{i+\frac{1}{2}} - v^m_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} - \frac{u^m_{i+\frac{3}{2}} - u^m_{i-\frac{1}{2}}}{2h} &= \mu \frac{v^m_{i+\frac{3}{2}} - 2v^m_{i+\frac{1}{2}} + v^m_{i-\frac{1}{2}}}{h^2}, \\ \mu &= \frac{ah}{2}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Если считать  $\mu$  в формулах (10) произвольным параметром, то видим, что при  $\mu = \frac{ah}{2}$  они дают схемы распада разрыва и бегущего счета, при  $\mu = \frac{h^2}{2\tau}$  — схему Лакса, при  $\mu = \frac{a^2\tau}{2}$  — симметрическую схему второго порядка точности.

При  $\kappa = \frac{a\tau}{h} = 1$  все указанные схемы совпадают.

Схема, предложенная В. Ф. Куропатенко [1962, 1966], основана на аппроксимации волны сжатия или ударной волны конечной интенсивности последовательностью («цугом») ударных волн меньшей интенсивности.

В отличие от схемы распада разрыва, в ней применяется разнородная аппроксимация на волнах сжатия и ударных волнах, с одной стороны, и волнах разрежения, с другой.

Для различения волн сжатия и разрежения по-прежнему служит условие

$$\Delta u < 0 \text{ (волны сжатия)}, \quad \Delta u \geq 0 \text{ (волны разрежения)}. \quad (11)$$

Возможны различные реализации схем такого рода. Мы рассмотрим только одну схему, где размещение величин в сетке аналогично схеме Неймана — Рихтмайера: термодинамические величины относятся к полущелым, скорость — к целым точкам.

Система разностных уравнений имеет вид

$$\frac{u^{m+1}_i - u^m_i}{\tau} + \frac{\bar{p}^m_{i+\frac{1}{2}} - \bar{p}^m_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{v^{m+1}_{i+\frac{1}{2}} - v^m_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} - \frac{u^{m+1}_i - u^m_i}{h} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{e^{m+1}_{i+\frac{1}{2}} - e^m_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{\bar{p}^m_{i+\frac{1}{2}} + \bar{p}^{m+1}_{i+\frac{1}{2}}}{2\tau} \left( v^{m+1}_{i+\frac{1}{2}} - v^m_{i+\frac{1}{2}} \right) = 0, \quad (14)$$

где

$$\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + \omega_{i+\frac{1}{2}}^m, \quad (15)$$

$$\bar{e}_{i+\frac{1}{2}}^m = e \left( p_{i+\frac{1}{2}}^m, v_{i+\frac{1}{2}}^m \right). \quad (16)$$

«Вязкий» добавок  $\omega_{i+\frac{1}{2}}^m$  равен 0 в случае волны разрежения и вычисляется по особым формулам в случае волны сжатия (ударной волны).

Таким образом, на волне разрежения схема (12) — (16) аналогична схеме «крест» и имеет второй порядок точности.

Уравнение (14) требует итераций в силу нелинейности уравнения состояния (16). Порядок расчета в этом случае таков: из уравнения (13) определяется  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ , из уравнения (14) с использованием (15) итерационно определяется  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ , после этого из уравнения (12) определяется  $u_i^{m+1}$ .

В случае волны сжатия (ударной волны)  $\omega \neq 0$ . Член  $\omega$  в (15) учитывает наличие ударной волны в интервале  $(q_i, q_{i+1})$  (рис. 3.16).

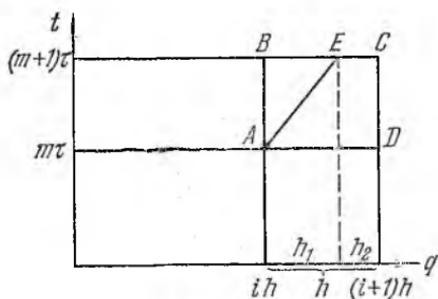


Рис. 3.16.

Для определения  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  привлекаются уравнения

$$\left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - p_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \left( \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m \right) = -\Delta u^2 = - (u_{i+1}^m - u_i^m)^2, \quad (17)$$

$$\bar{e}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = e_{i+\frac{1}{2}}^m + \frac{1}{2} \Delta u^2 - p_{i+\frac{1}{2}}^m \left( \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m \right), \quad (18)$$

где  $e^{m+1}$ ,  $p^{m+1}$ ,  $v^{m+1}$  по-прежнему связаны соотношением (16). Из соотношений (16) — (18) находится  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ , после чего  $e_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  определяется из (14).

Соотношения (17), (18) являются условиями Гюгонио (см. гл. 2, § 4, п. 1), если считать, что величины  $u_{i+1}^m$ ,  $p_{i+\frac{1}{2}}^m$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^m$  характеризуют течение по одну сторону фронта,  $u_i^m$ ,  $\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m$ ,  $\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^m$  — по другую сторону фронта.

Определим теперь вязкий добавок  $\omega_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ . Для этого  $p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  находим по формуле осреднения (см. рис. 3.16)

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} h_1 + p_{i+\frac{1}{2}}^m h_2}{h_1 + h_2} = \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} D\tau + (h - D\tau) p_{i+\frac{1}{2}}^m}{h}, \quad (19)$$

где  $D$  — массовая скорость ударной волны, вычисляемая по формуле

$$D = \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m - p_{i+\frac{1}{2}}^m}{u_{i+1}^m - u_i^m} = \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}. \quad (20)$$

Отсюда

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left(1 - D \frac{\tau}{h}\right) \left(\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - p_{i+\frac{1}{2}}^m\right). \quad (21)$$

В случае идеального газа из соотношений (17), (18) имеем

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left(1 - D \frac{\tau}{h}\right) \left[ \frac{\gamma+1}{4v_{i+\frac{1}{2}}^m} \Delta u^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4v_{i+\frac{1}{2}}^m} \Delta u^2\right)^2 + \frac{\gamma p_{i+\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{1}{2}}^m} \Delta u^2} \right]. \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что полученная вязкость  $\omega$  является линейной:

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left(1 - D \frac{\tau}{h}\right) \sqrt{\frac{\gamma p_{i+\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{1}{2}}^m}} h \frac{\Delta u}{h},$$

если

$$\left(\frac{\gamma+1}{4v_{i+\frac{1}{2}}^m} \Delta u\right)^2 \ll \frac{\gamma p_{i+\frac{1}{2}}^m}{v_{i+\frac{1}{2}}^m},$$

и квадратичной:

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left(1 - D \frac{\tau}{h}\right) \frac{\gamma+1}{2v_{i+\frac{1}{2}}^m} \Delta u^2,$$

если

$$\left( \frac{\gamma + 1}{4v^{m_{i+\frac{1}{2}}}} \Delta u \right)^2 \gg \frac{v p^m_{i+\frac{1}{2}}}{v^m_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, вязкий член  $\omega$  является линейным в случае слабых волн и квадратичным в случае сильных.

Это свойство вязкости обеспечивает достаточную монотонность профиля разностной ударной волны, так как осцилляции сильно затухают как на самой ударной волне, так и при удалении от нее.

Свойство монотонности разностного ударного фронта и затухание осцилляций позволяют применить так называемый «дифференциальный анализатор», предложенный В. Ф. Куропатенко (частное сообщение).

Поскольку действие вязкого члена  $\omega$  всего сильнее в центре фронта ударной волны и ослабевает при удалении от него, за центр разностной ударной волны удобно принять точку, где  $\omega$  достигает максимума. За границы разностного перехода можно, например, принять ближайšie к центру точки, где  $\omega = 0$  (переход волны сжатия в волну разрежения). Тогда по значениям в крайних точках ударного перехода можно определить все параметры ударной волны: ее скорость и скачки величин.

Дифференциальный анализатор был успешно применен в расчетах и позволил достаточно точно локализовать ударные волны.

В работах Н. Н. Яненко, Е. В. Ворожцова, В. М. Фомина [1976 а, б, в] построена теория дифференциальных анализаторов ударных волн, в основу которой положено понятие *центра сглаженных ударных волн*, получающихся при численном решении задач газовой динамики. Под центром понимается координата  $x(h)$  точки, в которой разностное решение  $u, v, p$  слабо зависит от  $\tau, h$  (или вообще не зависит). Поэтому для определения центра волны следует произвести два расчета с разными шагами  $\tau, h$ . Несмотря на то, что из такого понимания центра ударной волны вовсе не следует, что он существует и определен однозначно, развитая теория на базе первого дифференциального приближения подтверждает существование и единственность центра. Многочисленные расчеты задач с ударными волнами также подтвердили эффективность такого понятия центра. Практический критерий определения центра ударной волны состоит, так же как и выше, в нахождении  $\max |\omega|$ , а для ряда схем центр совпадает с точкой, где  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$  достигает максимума.

Определение центра ударной волны позволяет существенно повысить точность разностного решения, а также облегчить интерпретацию результатов.

На рис. 3.17 изображены графики плотности и скорости в окрестности ударной волны, полученные по двухшаговой схеме Лакса — Вендрофа с искусственной вязкостью  $\eta = 3h^2\rho \left[ \min\left(\frac{\partial u}{\partial x}, 0\right) \right]^2$ , введенной аддитивно в давление, на трех различных сетках:  $h_1 = 1/40$ ,  $h_2 = 2h_1$ ,  $h_3 = 0,5h_1$ , когда ударная волна уже прошла расстояние  $\approx 23h_1$ . Из рис. 3.17 видно, что центр конечно-разностной ударной волны существует и инвариантен относительно  $h$ , несмотря на наличие в численном решении паразитических осцилляций за фронтом размазанной ударной волны. Абсцисса точки пересечения кривых  $u(x, t)$  или  $\rho(x, t)$  для различных  $h$  совпадает с точным положением ударного фронта.

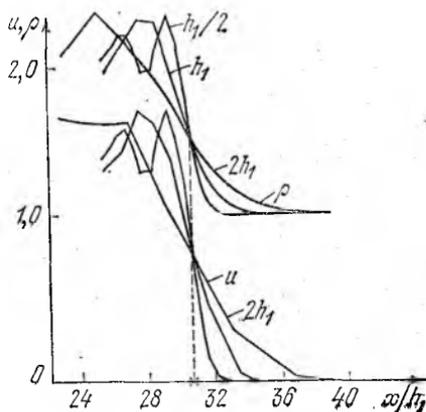


Рис. 3.17.

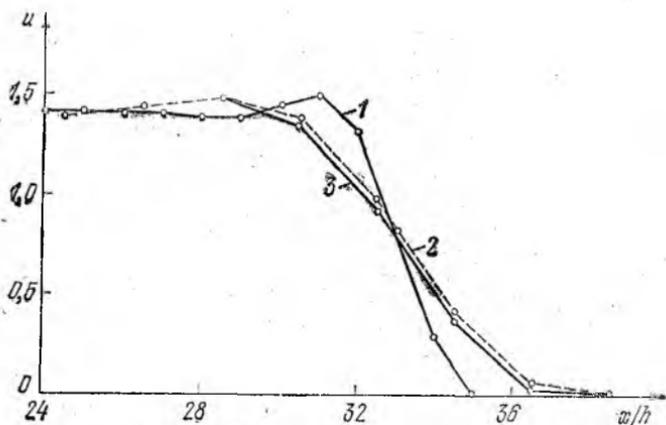


Рис. 3.18.

На рис. 3.18 приведены результаты расчетов по модифицированному методу частиц в ячейках (см. Ф. Х. Харлоу [1967], В. Е. Петренко и Е. В. Ворожцов [1973]) при различных значениях числа Куранта. Эти результаты подтверждают факт отсут-

ствия центра конечно-разностной ударной волны при различных  $\kappa = \tau/h$  ( $\tau$  — временной шаг). Кривой 1 соответствуют  $h = 0, 1$  и число Куранта  $\kappa = 0,5$ , для кривой 2  $h = 0, 2$ ;  $\kappa = 0,25$ , а для кривой 3  $h = 0,2$ ;  $\kappa = 0,375$ . На рис. 3.19 изображены профили скорости, полученные по указанному методу на тот же момент времени, что и на рис. 3.18, при фиксированном  $\kappa$  на трех различных сетках ( $h_1 = 1/10$ ).

Схемы, получаемые методом элементарных решений, также обладают аппроксимационной вязкостью, как и схемы с искусственной вязкостью, рассмотренные в пп. 2, 3. Они обладают рядом особенностей по сравнению с последними.

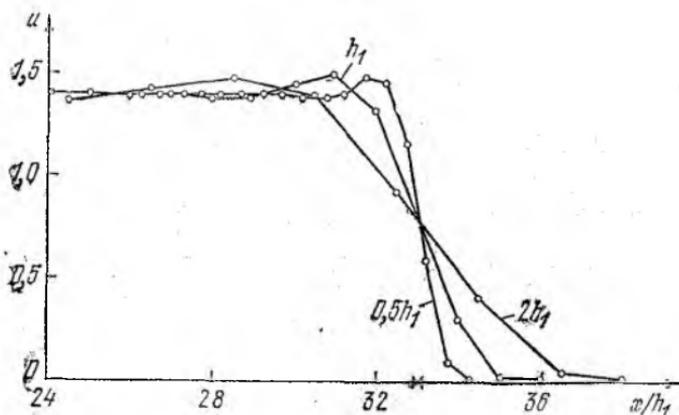


Рис. 3.19.

Коэффициент искусственной вязкости в схеме Неймана — Рихтмайера содержит произвольную константу  $\mu_0$ , которая определяет ширину фронта и в то же время сильно влияет на качественный характер решения. Поэтому интерпретация результатов зависит от нормировки произвольного коэффициента  $\mu_0$ .

В методе распада разрыва и цуга волн аппроксимационная вязкость нормирована схемой и не содержит произвольных параметров, что облегчает интерпретацию результатов.

Аппроксимационная вязкость в схеме Лакса также не содержит при фиксированной сетке произвольных параметров. Однако схема Лакса не абсолютно аппроксимирует уравнения и вводит вязкость в уравнение неразрывности. При малых  $\tau$  это дает сильное размазывание контактных границ.

В области, где течение содержит ударные волны, схемы, основанные на методе элементарных решений, по-видимому, являются предпочтительными, так как они обеспечивают наилучшую аппроксимацию условий Гюгонио.

Схема распада разрыва, особенно хорошо учитывающая взаимодействие разрывов, обладает точностью первого порядка во всех уравнениях, в том числе и в уравнении энергии, что приводит к искусственному изменению энтропии — искусственному нагреву или охлаждению газа.

Схема цуга волн обладает точностью второго порядка на волнах разрежения и в то же время достаточно монотонно сглаживает ударные фронты.

**5. Схемы повышенной точности.** Читатель, наверное, уже заметил, что понятие точности разностной схемы для расчетов разрывных решений газовой динамики практически не было определено. В самом деле, разумное введение понятия точности в этом классе течений встречает большие трудности. Под точностью разностной схемы обычно понимают и в этом случае (разрывных течений) точность, которую она имеет на гладких решениях уравнений газовой динамики. Совершенно неочевидно, а скорее всего это даже и неверно, что повышение точности разностной схемы в этом понимании приведет к повышению точности расчета параметров разрывных течений.

Тем более интересно, что ряд схем повышенной точности показал хорошие результаты и при применении их к расчетам разрывных течений.

Первая разностная схема для уравнений газовой динамики третьего порядка точности была построена В. В. Русановым [1968]. Затем этот метод был применен С. Бурштейном и А. Мириным [1970] для построения однопараметрического семейства разностных схем третьего порядка точности. В работе В. Б. Балакина [1970] указанный метод был распространен для получения схем более высоких, чем третий, порядков точности. В частности, в этой работе построена новая разностная схема третьего порядка точности, не принадлежащая указанному выше однопараметрическому семейству.

Алгоритм построения разностных схем высокого порядка точности аналогичен итерационному методу Рунге — Кутты, применяемому для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Записав систему уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial F(w)}{\partial x}, \quad w = \left\{ u, v, E = \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right\}, \quad F(w) = \{-p, u, -up\}, \quad (1)$$

будем искать решение  $w^{m+1}$  с помощью представления

$$w^{m+1} = w^m + \tau \sum_{s=0}^{r-1} \alpha_{rs} \frac{\partial F}{\partial x} \left( w^{m+\frac{s}{r}} \right). \quad (2)$$

Величины  $w^{m+\frac{k}{r}}$  при  $k=1, 2, \dots, r-1$  определяются последовательно по формулам

$$w^{m+\frac{k}{r}} = w^m + \tau \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \frac{\partial F}{\partial x} \left( w^{m+\frac{s}{r}} \right). \quad (3)$$

Коэффициенты  $\alpha_{rs}$  определяются из требования, чтобы разложение  $w^{m+1}$  по степеням  $\tau$  совпадало с разложением

$$w^{m+1} = w^m + \tau \frac{\partial w^m}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 w^m}{\partial t^2} + \dots + O(\tau^{p+1}), \quad (4)$$

где  $p$  — желаемый порядок точности.

Таким образом, при  $r=2$ ,  $p=3$  строится разностная схема В. В. Русанова и семейство разностных схем Бурштейна и Мирина. Эти схемы строятся для обычной прямоугольной сетки; пространственная аппроксимация связывает пять точек на каждом слое. Между каждыми двумя слоями  $t^m$ ,  $t^{m+1}$  вводится два вспомогательных слоя с шахматным расположением узлов по отношению друг к другу. Можно ввести параметр  $\alpha$  — расстояние между слоем  $t=t^m$  и первым вспомогательным слоем  $t=t^{m+\frac{1}{2}}$ , причем  $\tau/3 \leq \alpha \leq 2\tau/3$ . При  $\alpha = \tau/3$  получаем схему В. В. Русанова.

При решении задач с разрывами в правую часть системы (1) вводится искусственная вязкость.

Схемы высокого порядка точности развивались далее в работах В. Уорминга и Р. Катлера [1973], С. Абарбанеля, Д. Готлиба [1973]. Этот метод в случае, когда система уравнений (1) линейна и имеет постоянные коэффициенты, приводит к схемам Г. Стрэнга [1962] — разностным схемам максимального порядка аппроксимации при заданном числе точек, связанных пространственной и временной аппроксимацией.

При численном решении уравнений газовой динамики, ввиду их нелинейности, возникают определенные трудности, которые приводят к необходимости введения специальных аппроксимаций. Дело в том, что коэффициенты вязкости, рассматриваемые

уравнений состоит в том, что необходимо подвергать анализу и сопоставлению порядки малости этих величин, а в оценки обычно входят рациональные выражения от этих параметров, и, следовательно, мы не имеем равномерной оценки сходимости.

Поясним сказанное на примере решения одной модельной задачи, где есть пограничный слой и в которой требуется аппроксимация особого типа. На последнее обстоятельство обратил внимание А. М. Ильин, хотя при интегрировании уравнений Навье—Стокса такие аппроксимации использовались и ранее (Д. Аллен, Р. Саусвелл [1955]). Но наиболее четко идея выражена в работе А. М. Ильина [1969].

Для краевой задачи

$$\nu u'' + u' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

где  $\nu > 0$  — малый параметр, точное решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1 - e^{-x/\nu}}{1 - e^{-1/\nu}}.$$

При  $x \rightarrow 0$  производная  $u'(x)$  для малых  $\nu$  имеет порядок  $1/\nu$  и при  $\nu \rightarrow 0$  область больших градиентов будет сужаться. Таким образом, мы имеем иллюстрацию явления пограничного слоя, возникающего в задачах обтекания.

Для этой задачи рассмотрим разностную схему

$$\nu \frac{T_1 - 2E + T_{-1}}{h^2} u + \frac{T_1 - T_{-1}}{2h} u = 0. \quad (5)$$

Точное решение этой разностной задачи таково:

$$u(x) = u(kh) = \frac{1 - \left( \frac{1 - \frac{h}{2\nu}}{1 + \frac{h}{2\nu}} \right)^k}{1 - \left( \frac{1 - \frac{h}{2\nu}}{1 + \frac{h}{2\nu}} \right)^N},$$

где  $k = 1, \dots, N$ ;  $Nh = 1$ ; нетрудно видеть, что при  $\nu \ll h$  оно

разностного уравнения не стремится равномерно относительно  $v$  к решению исходной задачи при  $h \rightarrow 0$ .

А. М. Ильин предложил заменить коэффициенты разностной схемы (5) так, чтобы точные решения дифференциального уравнения были решениями и разностного. Такая схема имеет вид

$$\lambda \frac{T_{-1} - 2E + T_1}{h^2} u + \frac{T_1 - T_{-1}}{2h} u = 0,$$

где  $\lambda = \frac{h}{2} \operatorname{cth} \frac{h}{2v}$ . Нетрудно видеть, что при  $h \ll v$  выполняется условие аппроксимации дифференциального уравнения (так как в этом случае  $\lambda$  близко к  $v$ ). Доказано, что решение этой разностной схемы сходится при  $h \rightarrow 0$  к решению исходной задачи равномерно относительно  $v$ .

В упомянутой работе А. М. Ильина, а также в работах К. В. Емельянова [1970, 1973], В. А. Титова и Г. И. Шишкина [1976] описанная методика получения схем равномерной аппроксимации распространяется на многомерные эллиптические уравнения с переменными коэффициентами, параболические уравнения, а также на случай наличия нескольких малых параметров.

Необходимо отметить, что эквивалентный подход при построении разностных схем для задач диффузии использовал Г. И. Марчук [1961]. Фактически это метод исключения конвективного члена.

## § 9. Схемы в эйлеровых координатах и неявные схемы

**1. Схемы в эйлеровых координатах.** Выбор системы координат — лагранжевой или эйлеровой — для расчета течения газа определяется постановкой задачи.

Если нас интересуют параметры потока в заданной наперед пространственной области (например, течение газа в газопроводе, воды в русле), то естественно выбрать эйлеровы координаты.

Если нам нужно детально исследовать гидродинамические процессы в некотором материально фиксированном объеме, то целесообразно применение лагранжевых координат.

Рассмотрим, например, истечение в вакуум некоторой массы газа. Покоящийся газ удерживается в цилиндрической трубке перегородками, находящимися в сечениях трубы  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ . В момент  $t = 0$  одна из перегородок, например  $x = x_2$ , убирается, и газ начинает вытекать вправо в вакуум.

Если для расчета используется эйлерова сетка, то правая граница будет захватывать все новые точки, и число рассчитываемых точек будет расти, что не связано с требуемой точностью расчета (рис. 3.20, а).

Пусть, наоборот, в момент  $t = 0$  поршень, находящийся в точке  $x = x_2$ , начинает двигаться влево. Тогда применение эйлеровой сетки приводит к затруднению иного рода: число точек и вместе с ним точность расчета уменьшаются. При сильном сжатии весь рассчитываемый объем может попасть в один счетный интервал, что говорит о полной потере точности (рис. 3.20, б).

И в этом и в другом случае применение лагранжевой сетки целесообразно (рис. 3.20, в).

Детальность расчета материально фиксированного объема можно сохранить и в эйлеровых координатах, если сделать их подвижными (предложено С. К. Годуновым).

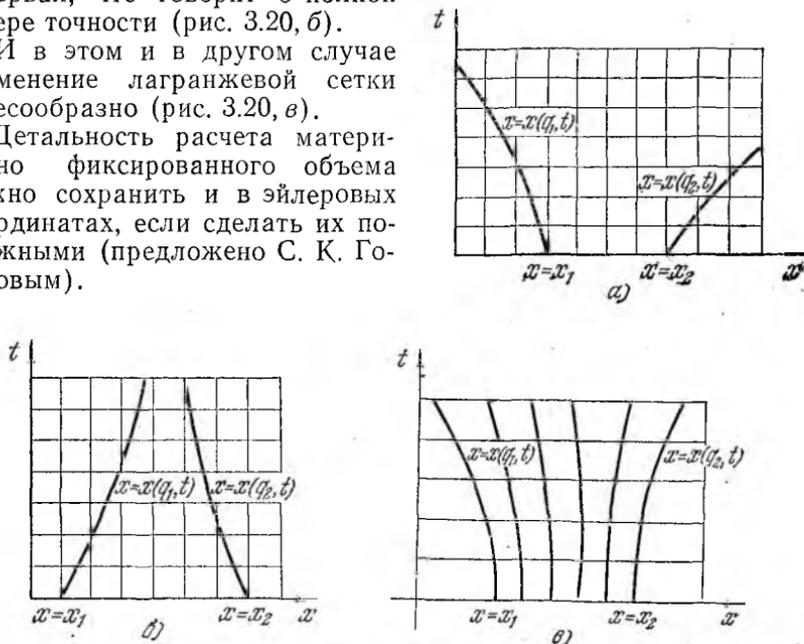
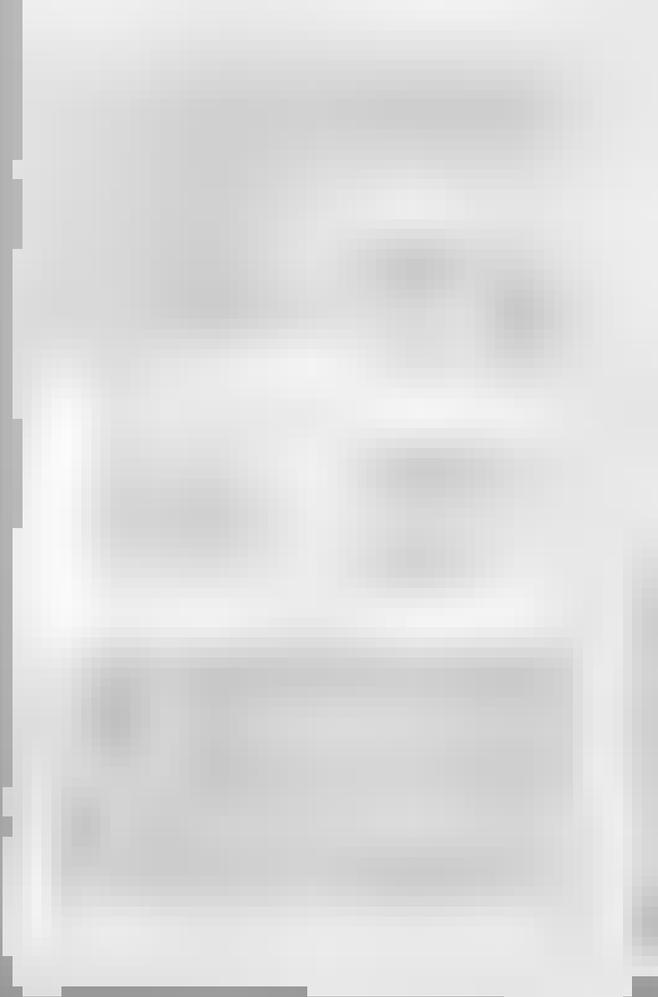


Рис. 3.20.

В случае подвижной эйлеровой сетки точки сетки, связанные с контактными границами, движутся вместе с последними. Промежуточные точки сетки получаются по произвольному закону с сохранением определенного минимума или максимума точек. В простейшем случае число точек между контактными границами остается неизменным.

Выбор того или иного варианта подвижной сетки определяется реально необходимой точностью расчета. На рис. 3.20 представлены возможные варианты сетки для случая подвижных контактных границ  $x = x(q_1, t)$ ,  $x = x(q_2, t)$ .

При переходе от лагранжевой системы координат к эйлеровой, помимо указанных особенностей сетки, меняется характер аппроксимации уравнений газовой динамики. Это связано в основном с тем, что выражение  $\frac{\partial}{\partial t}$  в лагранжевых координатах



заменяется двучленным выражением  $\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$  в эйлеровых координатах.

Рассмотрим уравнения изэнтропического течения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \varphi &= \ln \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, & c^2 &= \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Явная аппроксимация с помощью центральных разностей выражений  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  приводит к неустойчивым схемам. Поэтому следует применять аппроксимацию пространственных градиентов с учетом знака  $u$ . Примером схемы такого типа является схема Лелевье

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi^{m+1} - \varphi^m}{\tau} + u^m \frac{\Delta}{h} \varphi^m + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^m &= 0, \\ \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + u^m \frac{\Delta}{h} u^m + (c^m)^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \varphi^{m+1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\Delta = \Delta_{-1}$  при  $u > 0$ ,  $\Delta = \Delta_1$  при  $u < 0$ . Аппроксимация типа «крест» здесь невозможна.

Если перейти от (1) к дивергентной системе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) = 0, \quad (3)$$

то полный аналог схемы «крест» невозможен, так как величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  нельзя разнести по разным точкам, как это имело место в лагранжевых координатах. Относя величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  к одним и тем же точкам, получаем следующую симметричную схему второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho^{m+1} - \rho^{m-1}}{2\tau} + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \rho^m u^m &= 0, \\ \frac{\rho^{m+1} u^{m+1} - \rho^{m-1} u^{m-1}}{2\tau} + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} [p^m + \rho^m (u^m)^2] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

которая является неустойчивой.

По-видимому, устойчивые схемы второго порядка точности в эйлеровых координатах могут быть получены только за счет усложнения аппроксимации, например с помощью неявной аппроксимации или метода предиктор — корректор.

Наряду с указанными схемами допустима также схема пересчета, позволяющая вести счет фактически в лагранжевых координатах с последующей интерполяцией на эйлеровы (предложено Куропатенко В. Ф.).

Пусть  $\{x_i\}$  есть эйлерова сетка. На шаге  $t_m \leq t \leq t_m + \tau = t_{m+1}$  будем рассматривать ее как лагранжеву, т. е. будем следить за движением материальных элементов, заключенных в момент  $t = t_m$  в интервалах  $(x_i, x_{i+1})$  (рис. 3.21). Введем в момент  $t = t_m$  массовую лагранжеву координату, положив

$$q_{i+1} - q_i = (x_{i+1} - x_i) \rho_{i+\frac{1}{2}}^m. \quad (5)$$

Применяя схему «крест» к расчету материальных элементов  $(q_i, q_{i+1})$ ,  $(q_{i-\frac{1}{2}}, q_{i+\frac{1}{2}})$ , получим

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^m - p_{i-\frac{1}{2}}^m}{\bar{h}_i} = 0, \quad \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h_i} = 0, \quad (6)$$

где положено

$$h_i = q_{i+1} - q_i, \quad \bar{h}_i = q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}, \quad q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}. \quad (7)$$

Величины  $u_i^{m+1}$  относятся к точкам  $x'_i$ , величины  $v_{i+\frac{1}{2}}^m$  — к центрам интервалов  $(x'_i, x'_{i+1})$ , линия  $AB$  есть траектория точки  $x = x(q_i, t)$ .

Таким образом, рассчитаны все величины, относящиеся к интервалам  $(x'_i, x'_{i+1})$ . После этого совершается интерполяция, с соблюдением законов сохранения, на сетку  $\{x_i\}$ .

Другой вариант сочетания лагранжевых и эйлеровых координат в разностном алгоритме реализован в оригинальном методе «частиц в ячейках» Ф. Харлоу [1967]\*).

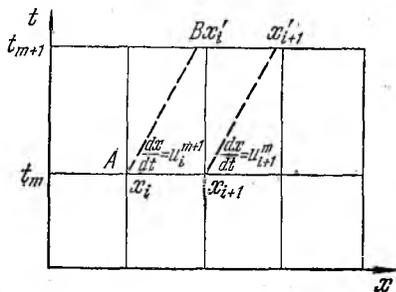


Рис. 3.21.

Опишем кратко этот метод, рассматривая его как разновидность метода расщепления по физическим процессам.

Будем рассматривать движение политропного газа с уравнением состояния  $p = p(\rho)$ , описываемое уравнениями (3).

\*) Метод Харлоу чаще всего применяется в двумерных и трехмерных задачах газовой динамики. Мы рассматриваем его здесь в одномерном варианте, чтобы продемонстрировать идею «расщепления» процессов, имеющую общий характер.

В методе Харлоу вводятся вспомогательные, «дробные» шаги. На первом дробном шаге решается система уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

и на втором дробном шаге — система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Система (8) отвечает модели медленного течения несжимаемого газа, когда пренебрегается инерциальными силами и сжимаемостью. Она интегрируется на первом полушаге с помощью симметричной разностной схемы в эйлеровой сетке. Система (9) отвечает модели свободного движения невзаимодействующих частиц жидкости по инерции, она интегрируется фактически с применением лагранжевой сетки. Объединение этих двух процессов происходит на полном шаге в результате осреднения плотности и давления по интервалам эйлеровой сетки.

Характерным для схемы метода частиц в ячейках является наличие флуктуаций и автоосцилляций.

Заметим, что неявные абсолютно устойчивые схемы в эйлеровой сетке с расщеплением типа (8), (9) применялись в задачах метеорологии (см., например, Г. И. Марчук [1967]). Метод частиц в ячейках особенно эффективен при численном решении задач газовой динамики со свободными поверхностями, поверхностями скопления, областями сильного разрежения.

Как метод Харлоу, так и некоторые другие схемы неинвариантны относительно всей группы точечных преобразований в пространстве независимых и зависимых переменных, которые допускает система уравнений газовой динамики (см. Л. В. Овсянников [1962]). Любая разностная схема реализуется на конкретной сетке, которая сама по себе вносит неинвариантность в алгоритм расчета. Эта неинвариантность может сказываться, например, в расчетах особенностей потока, которые движутся под различными углами к линиям сетки. Так, например, неинвариантность метода Харлоу относительно преобразования Галилея приводит к появлению автоосцилляций в расчетах. Переход к разностной схеме затрудняет групповой анализ, поскольку разностные операторы обладают иными групповыми свойствами, нежели дифференциальные. Оказалось целесообразным проводить групповую классификацию разностных схем на основе их первых дифференциальных приближений. В работах Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокина [1973], Э. И. Федотовой и Ю. И. Шокина [1975] исследовались свойства инвариантности разностных схем газовой динамики, групповые свойства разностных схем с помощью первого дифференциального приближения.

Будем говорить, что разностная схема инвариантна относительно некоторой группы преобразований, если ее первое дифференциальное приближение инвариантно относительно этой группы преобразований. В соответствии с этим все разностные схемы могут быть подразделены на два класса: схемы, сохраняющие групповые свойства, и схемы, не сохраняющие групповые свойства. В работе Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина [1973] сформулированы условия, при которых система уравнений первого дифференциального приближения допускает группы преобразований, которые допускает исходная система уравнений газовой динамики. Сформулируем эти условия для разностной схемы

$$\frac{W^{m+1}(x) - W^m(x)}{\tau} = \frac{f^m(x+h) - f^m(x-h)}{2h} + \frac{1}{h^2} \left[ \Omega \left( x + \frac{h}{2} \right) (W^m(x+h) - W^m(x)) - \Omega \left( x - \frac{h}{2} \right) (W^m(x) - W^m(x-h)) \right], \quad (10)$$

аппроксимирующей систему уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (11)$$

Здесь  $\Omega = \|\Omega_{ij}\|_1^3$ ,  $\Omega_{ij} = O(\tau)$ ,

$$W = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -p - \rho u^2 \\ -\rho u \\ -\rho u E - up \end{pmatrix}, \quad E = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2, \quad \varepsilon = \varepsilon(p, \rho).$$

Первое дифференциальное приближение разностной схемы (10) имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( C \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

где

$$C = \Omega - \frac{\tau}{2} A^2, \quad A = \frac{\partial f}{\partial W}.$$

*Теорема. Если в разностной схеме (10) элементы матрицы  $\Omega$  удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial N_{1x}}{\partial u} = N_{2x}, \quad \frac{\partial N_{2x}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial N_{3x}}{\partial u} = 0,$$

$$\left( u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + 2u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + 2\rho_{xx} \frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + 2p_{xx} \frac{\partial}{\partial p_{xx}} \right) N_{ix} = N_{ix},$$

где

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = CW_x,$$

то разностная схема (10) допускает ту же группу преобразований, что и система уравнений (11).

Заметим, что если  $N_2 = 0$ , в системе уравнений первого дифференциального приближения разностной схемы выполнен закон сохранения массы.

В работе З. И. Федотовой и Ю. И. Шокина [1975] показано, что если

$$C = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2,$$

то разностная схема (10) инвариантна, если матрицу  $C$  можно представить в виде

$$C = \beta_0 E + \beta_1 (A - uE) + \beta_2 (A - uE)^2,$$

где

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = \frac{\partial \beta_i}{\partial x} = \frac{\partial \beta_i}{\partial u} = 0 \quad (i = 0, 1, 2).$$

Заметим, что случай, когда матрица  $C$  (и, следовательно, матрица  $\Omega$ ) зависит от старших степеней матрицы  $A$ , сводится к предыдущему, так как имеют место соотношения

$$(A - uE)^{2k+1} = c^{2k} (A - uE), \quad (A - uE)^{2k+2} = c^{2k} (A - uE)^2 \quad (12) \\ (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $c$  — скорость звука.

В случае лагранжевых координат соотношения (12) имеют вид ( $a$  — массовая скорость звука)

$$A^{2k+1} = a^{2k} A, \quad A^{2k+2} = a^{2k} A^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

На рис. 3.22 и 3.23 приведены профили скорости стационарной ударной волны в трех различных эйлеровых системах координат, получающихся одна из другой с помощью преобразования Галилея. Кривые на рис. 3.22 получены при расчете по явной инвариантной разностной схеме, кривые на рис. 3.23 получены по схеме Лакса — Вендрофа, которая не является инвариантной.

**2. Неявные схемы.** Представляется довольно очевидным, что при прочих равных условиях разностное решение воспроизводит решение дифференциального уравнения тем точнее, чем ближе область зависимости разностного уравнения и область зависимости дифференциального уравнения. Из этого общего соображения, казалось бы, следует вывод о том, что для гиперболических уравнений нужно применять явные, для параболических уравнений неявные схемы. И действительно, первые

схемы интегрирования гиперболических уравнений были явными, в то время как для параболического уравнения диффузии сразу же получила признание неявная схема прогонки.

Однако более конкретное и детальное рассмотрение приводит к выводу о целесообразности неявных схем для некоторых задач гидродинамики.

Мы приведем ряд соображений в пользу неявных схем.

1. При большой неоднородности гидродинамического потока местная скорость звука  $c$  в ряде точек может сильно превышать

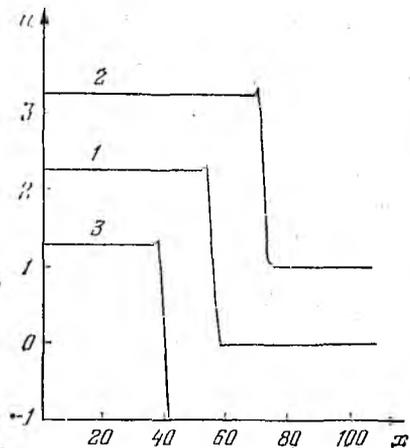


Рис. 3.22.

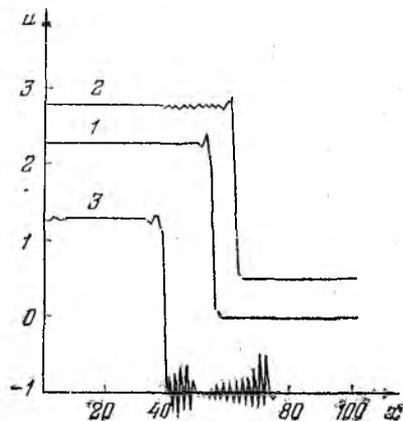


Рис. 3.23.

среднее значение скорости звука, характерное для данного потока. В этом случае локальный критерий устойчивости

$$\frac{c\tau}{h} \leq 1, \tag{1}$$

имеющий место для явных схем, может привести к неоправданно малому шагу, при котором область зависимости разностного уравнения становится значительно больше области зависимости дифференциального уравнения. Последнее обстоятельство уменьшает точность расчета и приводит к сглаживанию профилей.

2. Для точного счета ударной волны желательно, чтобы фронт волны переходил на каждом шаге из точки сетки в близлежащую точку.

По теореме Цемплена (см. гл. 2, § 3, п. 4) это означает, что в области за волной критерий устойчивости (1) нарушается. Следовательно, в этом случае нужна неявная схема.

3. Величина временного шага схемы определяется двумя требованиями: точности и устойчивости.

Требование точности определяется в основном величиной градиентов: чем больше градиенты, тем быстрее протекает гидродинамический процесс, тем меньше допустимый шаг, и наоборот.

Требование устойчивости схемы относительно локальных возмущений определяется, в силу критерия (1), величиной скорости звука, т. е. никак не связано с градиентами потока. Поэтому в случае гидродинамических потоков с малыми градиентами (длинноволновые профили) шаг, допустимый по точности, намного превышает шаг, допустимый по устойчивости (устойчивость схемы относительно коротковолновых возмущений). Такими, например, задачи метеорологии, русловых потоков, газопроводов и т. д. Ясно, что в этом случае является необходимой неявная схема. Заметим, что явные и неявные схемы не противопоставляются друг другу. Требование максимального сближения областей зависимости разностного и дифференциального уравнений означает, что явный и неявный методы счета должны входить как элементы в алгоритм расчета. На одних участках может применяться явная, на других — неявная схема.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных неявных схем.

Первое теоретическое рассмотрение неявных схем для уравнения колебаний с переменными коэффициентами методом априорных оценок принадлежит О. А. Ладыженской [1952].

Первая неявная схема интегрирования характеристических уравнений гидродинамики была опубликована Л. Д. Ландау, Н. Н. Мейманом, И. М. Халатниковым [1958]\*).

Для уравнений изэнтропического течения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial q} &= F_1, \\ \frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial q} &= F_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

поставим смешанную задачу Коши:

$$u = \frac{r+s}{2} = f(t), \quad q = 0, \quad r - s = g(t), \quad q = q_0, \quad (3)$$

$$r(q, 0) = r_0(q), \quad s(q, 0) = s_0(q), \quad 0 \leq q \leq q_0. \quad (4)$$

Простейшая неявная схема решения задачи (2) — (4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{s^{m+1} - s_i^m}{\tau} - a_i^m \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_i^{m+1}}{h} &= F_{1i}^m, \\ \frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{r_i^{m+1} - r_{i-1}^{m+1}}{h} &= F_{2i}^m, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$r_0^m + s_0^m = 2f^m, \quad (6)$$

$$r_{N+1}^m - s_{N+1}^m = g^m, \quad (7)$$

$$r_i^0 = r_{0i}, \quad s_i^0 = s_{0i}, \quad (N+1)h = q_0. \quad (8)$$

\*) Схема предложена и применена для расчетов в 1951 г.

Формулы (5) позволяют устойчиво считать  $r_i^{m+1}$  слева направо, пробегая последовательно индексы  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ . Аналогично устойчивый счет справа налево дают формулы (5) и для  $s_i^{m+1}$ ,  $i = N, \dots, 0$ .

Краевые условия рассчитываются следующим образом. Величина  $s_0^{m+1}$  определяется по формуле явного счета

$$s_0^{m+1} = (1 - \alpha_0^m) s_0^m + \alpha_0^m s_1^m + F_{10}^m, \tag{9}$$

после чего  $r_0^{m+1}$  определяется с помощью (6).

Из соотношений (5) рекуррентно — слева направо — определяются  $r_i^{m+1}$ . Из условия (7) определяется  $s_{N+1}^{m+1}$ , после чего из соотношений (5) рекуррентно — справа налево — определяются  $s_i^{m+1}$ .

Пришедшее в левую границу значение  $s_0^{m+1}$  не совпадает со значением, определенным из (9); поэтому необходимо уточнить значение  $s_0^{m+1}$ . Так как формулы (5) определяют  $r_{N+1}^{m+1}$  как линейную функцию от  $r_0^{m+1}$ , а  $s_0^{m+1}$  — как линейную функцию от  $s_{N+1}^{m+1}$ , то достаточно сделать один пересчет с последующей линейной интерполяцией.

Применение неявной схемы может привести к излишнему расширению области зависимости. Если критерий Куранта нарушается только на сравнительно небольшой области сетки, то в остальной части, где он соблюдается, следует применить явную аппроксимацию. Этой цели удовлетворяет схема явно-неявной аппроксимации

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} - a_i^m \frac{s_{i+1}^m - s_i^m}{h} &= F_{1i}^m, \\ \frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{r_i^m - r_{i-1}^m}{h} &= F_{2i}^m, \quad \alpha_i^m \leq 1, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} - a_i^m \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_i^{m+1}}{h} &= F_{1i}^m, \\ \frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + a_i^m \frac{r_i^{m+1} - r_{i-1}^{m+1}}{h} &= F_{2i}^m, \quad \alpha_i^m > 1. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

В тех случаях, когда на одной из границ выполняется условие  $\alpha \leq 1$ , явно-неявная аппроксимация позволяет простое решение граничных условий. Пусть для определенности такой границей является левая. Тогда формула (9) является устойчивой и позволяет начать рекуррентный счет  $r_i^{m+1}$  по формулам (10), (6). При обратном рекуррентном счете  $s_i^{m+1}$ , подходя к левой границе, мы вновь перейдем к явной схеме, которая не будет противоречить формуле (9).

Указанные схемы бегущего счета имеют первый порядок точности.

Схеме (5) соответствует схема второго порядка точности

$$\begin{aligned} \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} + \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_{i+1}^m}{\tau} - a_i^{m+\frac{1}{2}} \left[ \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_i^{m+1}}{h} + \frac{s_{i+1}^m - s_i^m}{h} \right] &= 2F_{1i}^{m+\frac{1}{2}}, \\ \frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + \frac{r_{i-1}^{m+1} - r_{i-1}^m}{\tau} + a_i^{m+\frac{1}{2}} \left[ \frac{r_i^{m+1} - r_{i-1}^{m+1}}{h} + \frac{r_i^m - r_{i-1}^m}{h} \right] &= \\ &= 2F_{2i}^{m+\frac{1}{2}}, \quad (12) \\ a_i^{m+\frac{1}{2}} &= \frac{a_i^{m+1} + a_i^m}{2}, \quad F_{\alpha i}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{F_{\alpha i}^{m+1} + F_{\alpha i}^m}{2} \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned}$$

которая требует линеаризации коэффициентов  $a_i^{m+1}$ ,  $F_{\alpha i}^{m+1}$  и последующих итераций (см. формулы (25)–(29) настоящего пункта). Можно указать также схему второго порядка точности, основанную на приеме предиктор — корректор. Сначала делается вспомогательный половинный шаг по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_i^{m+\frac{1}{2}} - s_i^m}{\tau/2} - a_i^m \frac{s_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - s_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= F_{1i}^m, \\ \frac{r_i^{m+\frac{1}{2}} - r_i^m}{\tau/2} + a_i^m \frac{r_i^{m+\frac{1}{2}} - r_{i-1}^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= F_{2i}^m. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

После этого делается поправочный целый шаг, улучшающий точность:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{s_i^{m+1} - s_i^m}{\tau} + \frac{s_{i+1}^{m+1} - s_{i+1}^m}{\tau} \right] - a_i^{m+\frac{1}{2}} \frac{s_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - s_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= F_{1i}^{m+\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\tau} + \frac{r_{i-1}^{m+1} - r_{i-1}^m}{\tau} \right] + a_i^{m+\frac{1}{2}} \frac{r_i^{m+\frac{1}{2}} - r_{i-1}^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= F_{2i}^{m+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $a_i^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $F_{\alpha i}^{m+\frac{1}{2}}$  вычисляются по  $r_i^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $s_i^{m+\frac{1}{2}}$  из (13). Схема (13) имеет точность первого порядка, но зато имеет запас устойчивости, который достаточен для того, чтобы была устойчивой схема (14), имеющая второй порядок точности.

На примере плоского изотермического течения с единственной ударной волной, распространяющейся слева направо, покажем применение неявной схемы для алгоритмов, явно выделяющих ударные волны.

Если формулы расчета явно зависят от положения относительно сетки ударной волны, то при переходе ударной волны из одного интервала в другой счетный интервал будет происходить смена одних расчетных формул другими.

Это приводит к скачку в параметрах ударной волны и гидродинамических величинах, который может быть погашен некоторыми операциями или применением формул высокой точности.

Удобным методом, позволяющим исключить такие скачки, является выбор сетки в зависимости от движения ударной волны. Будем считать\*), что на каждом шаге ударная волна переходит из одной точки сетки  $q_i$  в следующую  $q_{i+1}$  (рис. 3.24).

Как мы уже отмечали выше, в этом случае из теоремы Цемплена следует, что за фронтом ударной волны устойчивая схема не может быть явной. В то же время из той же теоремы Цемплена следует, что перед ударной волной выполняется критерий устойчивости Куранта. Поэтому оказывается удобной явно- неявная схема.

Пусть в точке  $q_i$  в момент времени  $t_m$  находится ударная волна, имеющая массовую скорость  $\tilde{D}_i^m$ . Тогда величины

$$h_i = q_{i+1} - q_i, \quad \tau_m = t_{m+1} - t_m$$

связаны соотношением

$$\tilde{D}_i^m = \frac{h_i}{\tau_m}.$$

Здесь возможны два варианта: или при фиксированной пространственной сетке  $\{q_i\}$  выбирается шаг  $\tau_m$ , или, наоборот, при фиксированном шаге  $\tau$  ударная волна сама размечает сетку.

В точках  $q_i, q_{i+1}$  расчетные формулы имеют вид

$$\frac{(r_{i+1}^{m+1})^+ - r_{i+1}^m}{\tau_m} + a_{i+1}^m \frac{r_{i+1}^m - (r_i^m)^+}{h_i} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{r_i^{m+1} - (r_i^m)^-}{\tau_m} + (a_i^m)^- \frac{(r_{i+1}^{m+1})^- - r_i^{m+1}}{h_i} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{(s_{i+1}^{m+1})^+ - s_{i+1}^m}{\tau_m} - a_{i+1}^m \frac{s_{i+2}^m - s_{i+1}^m}{h_{i+1}} = 0, \quad (17)$$

\*) Предложено М. В. Келдышем. Схемы такого рода были реализованы в работе Д. Е. Охочимского и др. [1957].

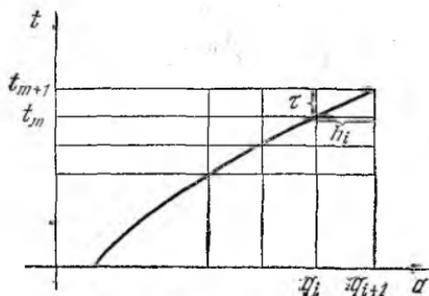


Рис. 3.24.

где значки  $\pm$  соответствуют величинам перед и за фронтом волны.

Формулы (15), (16) устойчивы и позволяют определить  $(r_{i+1}^{m+1})^+$ ,  $(r_{i+1}^{m+1})^-$ , т. е. инвариант  $r$  перед и за фронтом волны на момент времени  $t_{m+1}$ . Формула (17) определяет  $(s_{i+1}^{m+1})^+$ , следовательно, известно  $(u_{i+1}^{m+1})^+$ .

После этого из условий Гюгонио в точке  $(q_{i+1}, t_{m+1})$

$$\left. \begin{aligned} (r_{i+1}^{m+1})^+ - (r_{i+1}^{m+1})^- &= \varphi(\theta_{i+1}^{m+1}), \\ (s_{i+1}^{m+1})^+ - (s_{i+1}^{m+1})^- &= \psi(\theta_{i+1}^{m+1}), \\ \varphi(\theta) &= c \left( \theta - \frac{1}{\theta} + \ln \theta^2 \right), \quad \psi(\theta) = c \left( \theta - \frac{1}{\theta} - \ln \theta^2 \right), \\ \theta_{i+1}^{m+1} &= \frac{D_{i+1}^{m+1} - (u_{i+1}^{m+1})^+}{c} = \frac{1}{c} \frac{\tilde{D}_{i+1}^{m+1} - (u_{i+1}^{m+1})^+}{(\rho_{i+1}^{m+1})^-} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

можно определить  $\theta_{i+1}^{m+1}$ ,  $\tilde{D}_{i+1}^{m+1}$ ,  $(\rho_{i+1}^{m+1})^-$  и продолжить счет. Для уточнения траектории можно пересчитать точку  $q_{i+1}$  по формуле

$$q_{i+1} = q_i + \frac{\tilde{D}_i^m + \tilde{D}_{i+1}^{m+1}}{2} \tau_m.$$

Указанная схема была реализована в работе Н. Н. Яненко, И. К. Яушева [1960].

Неявные схемы счета являются почти неизбежными в случае, когда в уравнениях гидродинамики учитываются теплопроводность и вязкость. Приведем несколько примеров разностных схем для расчета течений с вязкостью и теплопроводностью.

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики с теплопроводностью и вязкостью (искусственной или физической) в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial q} \right), \quad (21)$$

$$\bar{p} = p + \omega, \quad \omega = -\mu \frac{\partial u}{\partial q}, \quad (22)$$

$$p = p(v, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(v, T), \quad (23)$$

$$\mu = \mu(v, T), \quad \kappa = \kappa(v, T). \quad (24)$$

Применим к уравнениям (19)–(21) неявную аппроксимацию, в которой градиенты по  $q$  берутся с весом  $\alpha$  на верхнем и весом  $\beta = 1 - \alpha$  на нижнем шагах.

В результате получим схему

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{m+1}}{\tau} + \frac{\alpha \left( p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - p_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right)}{h} - \\ - \alpha \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} (u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}) - \mu_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} (u_i^{m+1} - u_{i-1}^{m+1})}{h^2} = \\ = \frac{u_i^m}{\tau} - \beta \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^m - p_{i-\frac{1}{2}}^m}{h} + \\ + \beta \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}^m (u_{i+1}^m - u_i^m) - \mu_{i-\frac{1}{2}}^m (u_i^m - u_{i-1}^m)}{h^2} = F_{1i}^m, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}}{\tau} - \alpha \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} = \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \beta \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h} = F_{2i}^m, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}}{\tau} + \alpha \left( \alpha \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + \beta \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}}{h} + \\ + \beta \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h} \left( \alpha \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} + \beta \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^m \right) - \\ - \alpha \frac{\kappa_{i+1}^{m+1} \left( T_{i+\frac{3}{2}}^{m+1} - T_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} \right) - \kappa_i^{m+1} \left( T_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - T_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right)}{h^2} = \frac{e_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \\ + \beta \frac{\kappa_{i+1}^m \left( T_{i+\frac{3}{2}}^m - T_{i+\frac{1}{2}}^m \right) - \kappa_i^m \left( T_{i+\frac{1}{2}}^m - T_{i-\frac{1}{2}}^m \right)}{h^2} = F_{3i}^m. \end{aligned} \quad (27)$$

Система уравнений (25)–(27) представляет собой нелинейную алгебраическую систему относительно  $u_i^{m+1}$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ ,  $T_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  с известными правыми частями  $F_{si}^m$  ( $s = 1, 2, 3$ ).

Для нахождения  $u_i^{m+1}$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$ ,  $T_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  следует применить метод последовательных приближений, провести линеаризацию уравнений (25)–(27) и решить получающуюся систему линейных

уравнений методом векторной прогонки. Для этого положим

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = f_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} - v_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \left(T_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} - T_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}\right), \quad (28)$$

где под  $f$  можно понимать любую из функций  $\rho$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ ;  $k$  — номер итерации.

Подставив (28) в уравнения (25) — (27) и выразив с помощью (26)  $v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}$  через  $u_{i+1}^{(k+1)}$ ,  $u_i^{(k)}$  и известные величины на  $m$ -м слое, получим уравнения вида

$$A_{si-1}^{(k)} u_{i-1}^{(k+1)} + B_{si}^{(k)} u_i^{(k+1)} + C_{si+1}^{(k)} u_{i+1}^{(k+1)} + D_{si-1}^{(k)} T_{i-1}^{(k+1)} + E_{si}^{(k)} T_i^{(k+1)} + G_{si+1}^{(k)} T_{i+1}^{(k+1)} = H_{si}^{(k)}, \quad (29)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $H$  берутся с предыдущей итерации. В качестве нулевого приближения можно принять значения величин на  $m$ -м слое, т. е.  $f_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = f_{i+\frac{1}{2}}^m$ .

Линейные уравнения (29) с учетом краевых условий решаются методом векторной прогонки\*).

Неявная схема указанного типа была разработана И. М. Гельфандом, О. В. Локуциевским, В. Ф. Дьяченко.

Естественно, что эта схема применима и для расчета течений без теплопроводности.

Можно, понизив порядок точности схемы, перейти к неявной схеме, разрешаемой обычной трехточечной прогонкой (схема последовательной прогонки, см. В. Е. Неуважаев, Н. Н. Яненко [1966]). Для этого при аппроксимации уравнения (20) и дальнейшей линеаризации (28) полагаем

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = p \left( v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1}, T_{i+\frac{1}{2}}^m \right), \quad (30)$$

откуда следует

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} = p_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \left( v_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} - v_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \right). \quad (31)$$

В этом случае уравнения (29) решаются обычной трехточечной прогонкой.

Рассмотренные нами в предыдущем пункте неявные схемы были нелинейными. Для их решения требовалась предварительная линеаризация с последующей итерацией по нелинейности. Ясно, что это сильно усложняет алгоритм.

\*) См., например, С. К. Годунов, В. С. Рябенский [1973], Р. Рихтмайер, К. Мортон [1967].

Этих затруднений можно избежать, отказавшись от дивергентности схемы. Например, для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial q} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0$$

можно написать линейную неявную схему второго порядка точности

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} - (a^2)^{m+\frac{1}{2}} \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \frac{v^{m+1} + v^m}{2} - \mu \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} \frac{u^m + u^{m+1}}{2} = 0,$$

$$\frac{v^{m+1} - v^m}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \frac{u^m + u^{m+1}}{2} = 0,$$

где  $(a^2)^{m+\frac{1}{2}}$  определяется, например, экстраполированием по значениям  $a$  на  $(m-1)$ -м, и  $m$ -м шагах или с помощью одного пересчета.

Однако потеря дивергентности разностной схемы нежелательна.

Для преодоления этих затруднений можно применить метод «предиктор — корректор», известный еще в теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Например, для квазилинейного уравнения теплопроводности (см. Дж. Дуглас [1958])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \chi(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

схема, основанная на идее «предиктор — корректор», имеет следующий вид:

$$\frac{u^{m+\frac{1}{2}} - u^m}{\tau/2} = \frac{\Delta_1}{h} \left[ \chi(u^m) \frac{\Delta_{-1} u^{m+\frac{1}{2}}}{h} \right], \quad (32)$$

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = \frac{\Delta_1}{h} \left[ \chi \left( u^{m+\frac{1}{2}} \right) \frac{\Delta_{-1}}{h} u^{m+\frac{1}{2}} \right]. \quad (33)$$

Уравнение (32) дает линейризованную схему первого порядка точности, но зато максимально устойчивую; уравнение (33), используя запас устойчивости, созданный первым уравнением, уточняет расчет.

Схема (32), (33) является устойчивой, дивергентной, безитерационной и имеет точность второго порядка.

В работе С. К. Годунова, А. К. Семендяева [1962] для метода характеристик был предложен корректор, восстанавливающий разностные законы сохранения.

С. К. Годуновым предложена схема интегрирования уравнений газовой динамики, основанная на идее «предиктор — корректор». Поясним эту схему на примере уравнений газовой динамики (19) — (21) без вязкости и теплопроводности.

Первый полушаг рассчитывается по устойчивой линеаризованной неявной схеме

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{m+\frac{1}{2}} - u_i^m}{\tau/2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= 0, \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau/2} - \frac{u_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - u_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= 0, \\ \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau/2} + (c^2)_{i+\frac{1}{2}}^m \frac{u_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - u_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} &= 0, \quad c^2 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + p, \end{aligned} \quad (34)$$

которая решается методом векторной прогонки. После этого схема (34) уточняется дивергентными уравнениями второго порядка точности, использующими запас устойчивости схемы (34):

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - u_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{E_i^{m+1} - E_i^m}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad (37)$$

где  $\varepsilon_i^{m+1}$ ,  $\varepsilon_i^m$ ,  $u_{i+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$  получаются соответствующей интерполяцией.

Уравнение (37) может быть заменено уравнением

$$\frac{E_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - E_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{p_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} u_{i+1}^{m+\frac{1}{2}} - p_i^{m+\frac{1}{2}} u_i^{m+\frac{1}{2}}}{h} = 0,$$

где  $u_i^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $p_i^{m+\frac{1}{2}}$  получаются интерполяцией.

Ясно, что схемы «предиктор — корректор» могут быть использованы и для уравнений газовой динамики с теплопроводностью.

Рассмотренная схема «предиктор — корректор», являясь безытерационной, выгоднее неявной методики (25)—(27), требующей итераций по нелинейности. Однако алгоритм разрешения уравнений (35)—(37) с помощью векторной прогонки также довольно сложен.

Мы сформулируем метод «предиктор — корректор» в более общем виде.

Рассмотрим систему законов сохранения

$$\oint u_k dx - \varphi_k(u_1, \dots, u_n) dt = 0, \tag{38}$$

которой соответствует дивергентная система уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0. \tag{39}$$

Аппроксимируем соотношения (38) на разностной сетке

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{\varphi_{i+1}^* - \varphi_i^*}{h} = 0, \tag{40}$$

где величины  $\varphi_i^*$  относятся к некоторому промежуточному моменту времени  $t^* = t_m + \tau^*$  в интервале  $(t_m, t_{m+1})$  (рис. 3.25).

Задача интегрирования разбивается на два этапа.

На первом этапе вычисляются величины  $\varphi_k^*$  с помощью произвольной максимально устойчивой схемы, как правило, недивергентной.

На втором этапе применяются уравнения (40). При  $t^* = 0,5(t_m + t_{m+1})$  схема (40) будет иметь второй порядок точности, а осцилляционные эффекты будут велики. Перемещая  $t^*$  вверх, мы смещаем характеристические корни внутрь единичного круга, что приводит к затуханию осцилляций. При  $t^* = t_{m+1}$  схема (40) имеет первый порядок точности, но зато устойчивость схемы и затухание осцилляций становятся максимальными.

Мы рассмотрим в качестве иллюстрации неявную схему, получающуюся применением приема «предиктор — корректор» к схемам бегущего счета (см. Н. Н. Яненко, И. К. Яушев [1966]), ограничившись для простоты случаем изотермического газа. В качестве предиктора для вычисления  $u(t^*)$  может быть

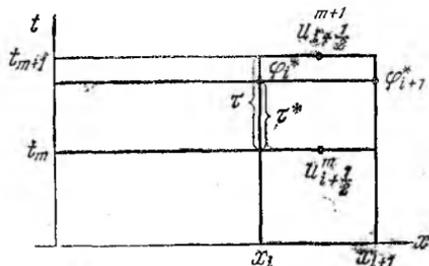


Рис. 3.25.

применена явная схема бегущего счета в инвариантах (2.3.11), (2.3.12) с шагом  $\tau^*$  либо, если нарушается критерий устойчивости Куранта, неявная схема (5) бегущего счета в инвариантах.

В качестве корректора, восстанавливающего законы сохранения уравнений газовой динамики, выбираем дивергентную схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{p_{i+1}^* - p_{i-1}^*}{2h} &= 0, \\ \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^* - u_{i-1}^*}{2h} &= 0, \quad p^* = c\rho^*, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где  $p_i^*$ ,  $u_i^*$  вычисляются по  $r^*$ ,  $s^*$ .

При  $\tau^* = \frac{\tau}{2}$  схема (41) имеет точность второго порядка и устойчива. При этом все характеристические корни лежат на единичном круге и осцилляции не затухают. При  $\tau^* > \frac{\tau}{2}$  точность схемы уменьшается, но зато имеет место затухание осцилляций, которое становится сильнее с ростом  $\tau^*$ .

Схема такого рода значительно проще в реализации, так как уравнения на вспомогательном шаге разрешаются не с помощью прогонок, а с помощью двухточечного бегущего счета. Кроме того, применяя явную или неявную схему в зависимости от выполнения критерия Куранта, мы сближаем области зависимости разностного и дифференциального уравнений.

Аналогичная схема расчета может быть применена и в эйлеровых координатах.

## § 10. Особенности разностного решения

**1. Поведение разностных решений вблизи разрыва.** Наличие разрыва в параметрах течения приводит к ряду особенностей в разностном решении.

Исследуем сначала особенности точного решения вблизи контактной границы. Предположим для простоты, что по обе стороны от контактной границы энтропия постоянна. На границе должны иметь место обычные условия непрерывности  $u$ ,  $p$ :

$$u_- = u_+ = u, \quad p_- = p_+ = p. \quad (1)$$

Из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

и условий (1) имеем

$$\left( \frac{\partial p}{\partial q} \right)_- = \left( \frac{\partial p}{\partial q} \right)_+, \quad (2)$$

т. е. функция  $p(q, t)$  в окрестности границы непрерывна вместе с первыми производными  $\frac{\partial p}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial q}$ . Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q}, \quad a^2 = -\frac{\partial p}{\partial v},$$

напротив, следует разрыв производной  $\frac{\partial u}{\partial q}$ :

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial q} \right] = \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)_+ - \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)_- = -\left[ \frac{1}{a^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = -\left[ \frac{1}{a_+^2} - \frac{1}{a_-^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = f. \quad (3)$$

Пусть к границе  $q = 0$  прилегают интервалы сетки  $(-h_0, 0)$ ;  $(0, h_1)$ , характеризуемые средними величинами  $p_{-1/2}$ ,  $u_{-1/2}$ ;  $p_{1/2}$ ,  $u_{1/2}$ .

Принимая во внимание соотношения (2), (3) для граничных значений  $u_0$ ,  $p_0$ , получаем следующие интерполяционные формулы (см. рис. 3.26):

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{h_1 p_{-1/2} + h_0 p_{1/2}}{h_0 + h_1}, & u_0 &= \frac{h_1 u_{-1/2} + h_0 u_{1/2}}{h_0 + h_1} - g, \\ g &= \frac{h_1 h_0}{2(h_0 + h_1)} f. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда

$$s_{\frac{1}{2}} - s_H = u_{\frac{1}{2}} - \frac{p_{\frac{1}{2}}}{a_1} - \left( u_0 - \frac{p_0}{a_1} \right) = O(h). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь схему распада разрыва.

В п. 4 § 8 было показано, что в однородной среде схема распада разрыва в акустическом приближении эквивалентна схеме бегущего счета. Оказывается, что при наличии контактной границы эквивалентность схем имеет место только при выполнении определенного ограничения на сетку.

Покажем сначала, как изменяются формулы бегущего счета при размещении величин в соответствии со схемой распада разрыва. Если в обычной схеме бегущего счета рассматриваемые величины относились к контактной границе (более точно, к ее левой и правой сторонам, см. § 7), то в схеме распада разрыва контактная граница находится между рассчитываемыми точками. В соответствии с этим формулы примыкания левых и правых величин на контактной границе усложняются. В полужелтых точках будем определять  $r$ ,  $s$ ; граница располагается в целой точке  $q = 0$  (рис. 3.26). Будем предполагать, что уравнения состояния имеют вид

$$p = -a_0^2 v, \quad q < 0, \quad p = -a_1^2 v, \quad q > 0, \quad a_1 > a_0. \quad (6)$$

Величины  $p$ ,  $u$ ,  $v$  связаны с  $r$ ,  $s$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} r = u - av = u + \frac{p}{a}, \quad s = u + av = u - \frac{p}{a}, \\ u = \frac{r+s}{2}, \quad v = \frac{s-r}{2a}, \quad p = \frac{a}{2}(r-s). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для простоты мы полагаем, что слева от границы соблюдается условие

$$\kappa_0 = \frac{a_0 \tau}{h_0} = 1. \quad (8)$$

Прямые  $AB$ ,  $EC$  суть  $r$ -характеристики с наклоном  $a_0$ ;  $BC$ ,  $DF$  —  $s$ -характеристики, первая с наклоном  $(-a_0)$ , вторая —

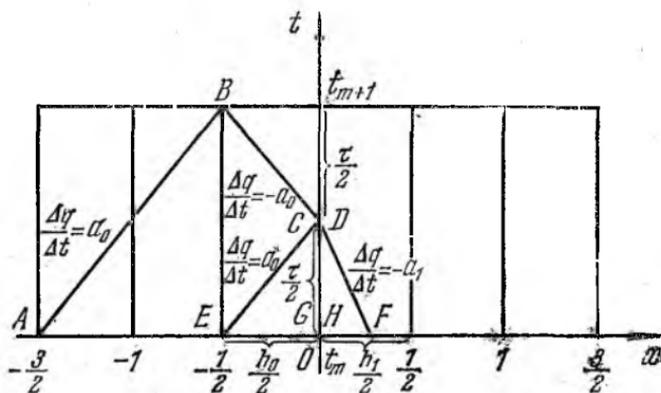


Рис. 3.26.

$(-a_1)$ . Точки  $C$ ,  $G$  границы относятся к ее левой стороне, точки  $D$ ,  $H$  — к правой.

Для точки  $-\frac{1}{2}$  формулы бегущего счета имеют вид

$$r_{-\frac{1}{2}}^{m+1} = r_{-\frac{3}{2}}^m, \quad s_{-\frac{1}{2}}^{m+1} = s_C. \quad (9)$$

Для определения величины  $s_C$  воспользуемся соотношениями на контактной границе, выражающими непрерывность  $u$ ,  $p$ :

$$r_C + s_C = r_D + s_D, \quad \theta(r_C - s_C) = r_D - s_D, \quad \theta = \frac{a_0}{a_1} < 1. \quad (10)$$

Из (10) имеем

$$s_C = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} r_C + \frac{2}{\theta + 1} s_D = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} r_{-\frac{1}{2}}^m + \frac{2}{\theta + 1} s_F. \quad (11)$$

Величина  $s_F$  определяется, как обычно, интерполированием между  $s_H$  и  $s_1^m$ :

$$s_F = (1 - \kappa_1) s_H + \kappa_1 s_1^m, \quad \kappa_1 = \frac{a_1 \tau}{h_1}. \quad (12)$$

Отсюда

$$s_{-\frac{1}{2}}^{m+1} = s_C = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} r_{-\frac{1}{2}}^m + \frac{2}{\theta + 1} s_1^m - \frac{2(1 - \kappa_1)}{\theta + 1} (s_1^m - s_H). \quad (13)$$

Определим теперь  $r_{-\frac{1}{2}}^{m+1}$ ,  $s_{-\frac{1}{2}}^{m+1}$  из формул распада разрыва (см.

п. 4, § 8):

$$\frac{u_{-\frac{1}{2}}^{m+1} - u_{-\frac{1}{2}}^m}{\tau} + \frac{P_0^m - P_{-1}^m}{h_0} = 0, \quad \frac{v_{-\frac{1}{2}}^{m+1} - v_{-\frac{1}{2}}^m}{\tau} - \frac{U_0^m - U_{-1}^m}{h_0} = 0,$$

$$P_0^m = \frac{u_{-\frac{1}{2}}^m - u_{\frac{1}{2}}^m + \frac{p_{-\frac{1}{2}}^m}{a_0} + \frac{p_{\frac{1}{2}}^m}{a_1}}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}} = \frac{r_{-\frac{1}{2}}^m - s_{\frac{1}{2}}^m}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}},$$

$$U_0^m = \frac{p_{-\frac{1}{2}}^m - p_{\frac{1}{2}}^m + a_0 u_{-\frac{1}{2}}^m + a_1 u_{\frac{1}{2}}^m}{a_0 + a_1} = \frac{a_0 r_{-\frac{1}{2}}^m + a_1 s_{\frac{1}{2}}^m}{a_0 + a_1},$$

$$P_{-1}^m = a_0 \frac{r_{-\frac{3}{2}}^m - s_{-\frac{1}{2}}^m}{2}, \quad U_{-1}^m = \frac{r_{-\frac{3}{2}}^m + s_{-\frac{1}{2}}^m}{2}.$$

Переходя к инвариантам  $r_{-\frac{1}{2}}^m$ ,  $s_{-\frac{1}{2}}^m$  и учитывая (10), (11), получаем

$$r_{-\frac{1}{2}}^{m+1} = r_{-\frac{3}{2}}^m, \quad s_{-\frac{1}{2}}^{m+1} = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} r_{-\frac{1}{2}}^m + \frac{2}{\theta + 1} s_{\frac{1}{2}}^m. \quad (14)$$

Сравнивая (9), (13) с (14) находим, что выражения для  $r_{-\frac{1}{2}}^{m+1}$  совпадают, для  $s_{-\frac{1}{2}}^{m+1}$  отличаются на величину

$$\frac{2(1 - \kappa_1)}{1 + \theta} (s_1^m - s_H). \quad (15)$$

Как следует из (5), «невязка» (15) имеет порядок  $O(h)$ , т. е. в точке  $(-1/2)$  аппроксимация нарушается. Аппроксимация имеет место только при условии  $\kappa_1 = 1$ .

Аналогичный анализ показывает, что при произвольном  $x_0$  условие аппроксимации имеет вид

$$x_1 = x_0, \quad \frac{h_1}{h_0} = \frac{a_1}{a_0} = \theta. \quad (16)$$

Этот критерий, полученный С. К. Годуновым [1959], можно истолковать как условие одновременности прихода акустических сигналов из точек  $(-1/2)$ ,  $(1/2)$  в точку 0.

В нелинейном случае критерий (16) не выполняется тождественно, так как отношение  $\frac{a_0}{a_1}$  меняется со временем. Это означает, что в практическом счете на границе всегда имеет место потеря точности.

Акустический критерий (16) легко получается из соображений размерности. Действительно, для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} \quad (17)$$

с разрывной скоростью звука

$$a = \begin{cases} a_1, & q > 0, \\ a_0, & q \leq 0, \end{cases}$$

можно применить преобразование

$$q = a\bar{q}.$$

После этого уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{q}^2}. \quad (18)$$

Ясно, что для уравнения (18) равномерная сетка является оптимальной:

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{a_0}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{a_1},$$

и мы приходим к критерию (16).

Рассмотрим теперь поведение разностного решения в окрестности ударного фронта.

Как показывает анализ п. 3 § 2, фронт акустической ударной волны в схеме явного бегущего счета сглаживается монотонно (см. рис. 3.3). Это объясняется свойством монотонности схемы бегущего счета, которая является схемой с положительными коэффициентами. Схема распада разрыва, которая в акустическом приближении совпадает с монотонной схемой бегущего счета, не является уже схемой с положительными коэффициентами и не обладает, строго говоря, свойствами монотонности. Поэтому достаточно сильные ударные волны воспроизводятся в схеме распада разрыва немонотонными профилями.

Схема Лакса, которая, аналогично схеме бегущего счета, является схемой с симметричной вязкостью, не обладает уже свойством монотонности. Тем не менее по своим асимптотическим свойствам она приближается к схеме бегущего счета, поэтому немонотонность ударного фронта в схеме Лакса не носит столь ярко выраженного характера, как в схеме Неймана — Рихтмайера. Эффекты разностной схемы, которые находят свое выражение в немонотонности профиля ударного перехода, особенно проявляются при взаимодействии разрывов: ударных волн между собой или ударных волн с контактными разрывами. В области взаимодействия возникают большие отклонения от истинных профилей. Эти отклонения ведут себя по-разному в зависимости от свойств схемы и параметров схемы и сетки. Разностные схемы здесь распадаются на два основных класса в зависимости от их дисперсионных свойств (см. п. 3 § 2, пп. 2, 3, § 8). К первому классу относятся схемы, допускающие контактные разрывы (как, например, схема Неймана — Рихтмайера). В этом случае существует семейство стоячих гармонических волн, на которые не действует аппроксимационная вязкость и которые, следовательно, не затухают. Этим стоячим волнам отвечает «энтропийный след», остающийся в окрестности границы и имеющий характер сильного немонотонного отклонения от истинных профилей  $\rho(q, t)$ ,  $s(q, t)$ . Ко второму классу относятся схемы, не допускающие контактных разрывов (как, например, схема Лакса). В этом случае аппроксимационная вязкость действует на всех семействах решений дисперсионных уравнений.

Разрыв в  $\rho$ ,  $S$  и любой немонотонный профиль  $\rho$ ,  $S$  сглаживаются. В таких схемах энтропийные следы исчезают, но исчезают («размазываются») также и контактные границы. Величина энтропийного следа зависит также от параметров схемы. В. Ф. Куропатенко [1962, 1966] для схемы цуга волн (см. п. 4, § 8) получил следующий критерий: при прохождении ударной волны через границу двух сред наибольшая точность достигается при условии

$$\frac{D_0}{h_0} = \frac{D_1}{h_1}. \quad (19)$$

Здесь  $D_0$  — скорость набегающей,  $D_1$  — скорость прошедшей ударной волны,  $h_0, h_1$  — длины прилегающих интервалов. При этом наблюдается минимум энтропийного следа на границе (см. рис. 3.27, на котором пунктирной линией нанесены графики точного, а сплошной — численного решения).

Теория возникновения энтропийного следа и других краевых эффектов в настоящее время еще слабо разработана.

2. **Замечания.** Проведенный нами анализ разностных схем показывает, что нет разностных схем сквозного счета, способных

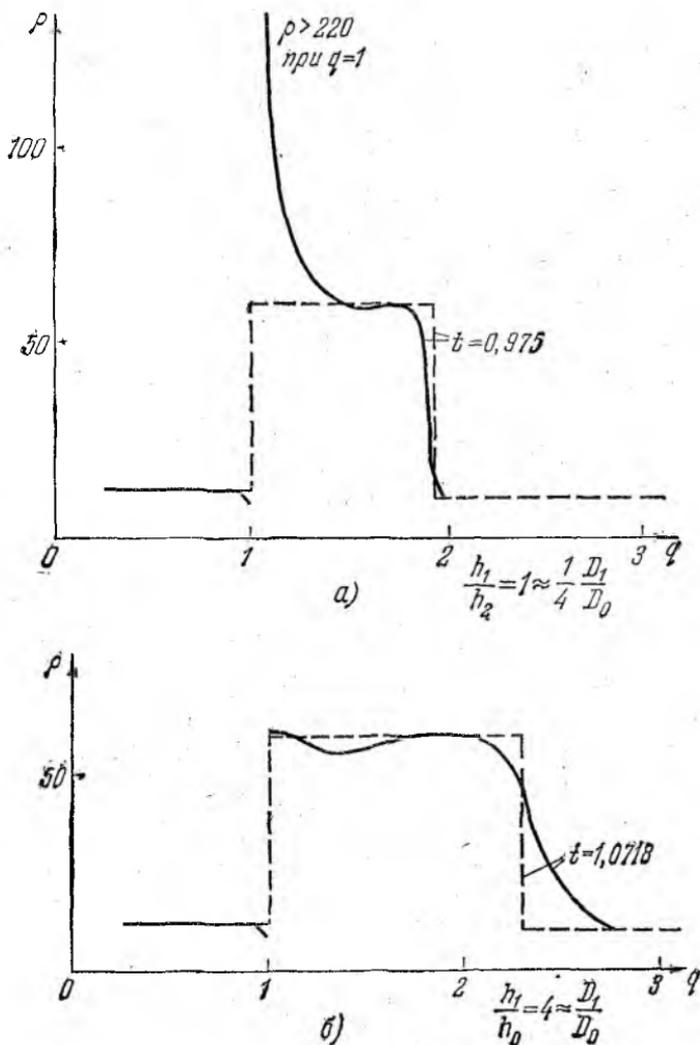


Рис. 3.27.

с высокой точностью воспроизводить всю картину гидродинамического течения, содержащего большое число особенностей.

Методы сквозного счета заменяют ударный фронт ударным переходом, контактную границу — контактной полосой. Эти переходные области практически достигают ширины нескольких

пространственных интервалов и имеют, как правило, немонотонные профили. При взаимодействии ударных переходов между собой или с контактной полосой возникает переходной процесс, который может длиться на протяжении нескольких временных интервалов. Пусть, например, ширина каждого из ударных переходов равна  $kh$ . Из локального условия устойчивости следует, что каждый фронт должен проходить за время  $\tau$  дробную часть интервала  $(1/r)h$  ( $r > 1$ ), причем  $r$  тем больше, чем больше сила ударной волны.

Отсюда следует, что период взаимодействия будет длиться  $rk$  временных интервалов и практически может достигать большой продолжительности. Во время переходного процесса гидродинамические величины могут сильно отходить от истинных значений. При большом количестве разрывов переходные области могут покрывать всю область расчета, что, конечно, сильно снижает точность расчета.

Так как источником появления переходных областей и процессов является сквозной счет разрывов, то в последнее время утвердилась компромиссная точка зрения, использующая схемы сквозного счета в рамках детального описания течения. Вся область  $G$  интегрирования в плоскости  $q, t$  разделяется линиями разрывов  $q = \xi_i(t)$  на подобласти  $G_i$ , в каждой из которых применяется какая-либо схема сквозного счета. При этом сетка может быть или фиксированной, и тогда в ней отмечаются линии

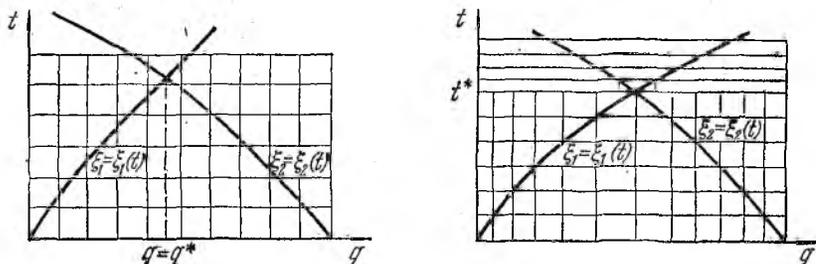


Рис. 3.28.

разрывов  $q = \xi_i(t)$ , которые не обязаны проходить через точки сетки, или подвижной, так что линии разрывов  $q = \xi_i(t)$  проходят через точки сетки (рис. 3.28). В обоих случаях точки располагаются на горизонтальных прямых, размещенных в плоскости  $q, t$ , вообще говоря, с переменным шагом  $\tau_m$ . В первом случае (фиксированная сетка) интервалы  $(q_i, q_{i+1})$  фиксированы, во втором случае (подвижная согласованная сетка) они зависят от времени и может меняться не только их длина и положение, но и их число.

Таким образом, во втором случае сетка определяется самим течением и его особенностями. Если вновь появляющиеся разрывы достаточно сильны, то они включаются в граничные линии областей  $G_i$ , и сетка перестраивается. Разрывы небольшой амплитуды учитываются схемой сквозного счета.

Ясно, что возможны различные варианты построения подвижной сетки. Расчетные алгоритмы такого рода достаточно сложны арифметически и логически, что сближает их с методом характеристик. В отличие от последнего фронт расчета всегда является горизонтальной прямой, что существенно упрощает логику программы.

## Обобщенные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа

### § 1. Постановка задачи Коши в классе разрывных функций

**1. Общие замечания.** В главе 2 мы видели, что дифференциальные уравнения газовой динамики являются следствиями более общих интегральных законов сохранения — массы, импульса и энергии.

Переход от интегральных законов сохранения к дифференциальным возможен лишь при некоторой гладкости течения. Если гладкого течения не существует, то для определения течения (разрывного либо не обладающего нужной гладкостью) следует обратиться к интегральным законам сохранения.

Такой же подход принят в теории разрывных (обобщенных) решений систем квазилинейных уравнений гиперболического типа, возникшей в последние десятилетия.

Консервативную систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t) \quad (1)$$

( $u, \varphi, f$  — векторы с  $n$  компонентами) будем рассматривать как следствие системы интегральных законов сохранения

$$\oint_C u \, dx - \varphi(u, x, t) \, dt + \iint_{\mathcal{G}_C} f(u, x, t) \, dx \, dt = 0, \quad (2)$$

которые должны выполняться для любого кусочно-гладкого замкнутого контура  $C$  и ограниченной им области  $\mathcal{G}_C$ .

Если функция  $u(x, t) \in C_1$  удовлетворяет интегральным законам сохранения (2) для любых замкнутых контуров  $C$  и областей  $\mathcal{G}_C$ , а  $\varphi \in C_1$ ,  $f \in C_0$ , то из этого следует, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1).

Очевидно также, что всякое решение  $u(x, t)$  системы (1) ( $u(x, t) \in C_1$ ) удовлетворяет интегральным законам сохранения (2). Интегральные соотношения (2) применяются для введения понятия обобщенного решения системы (1).

Мы ограничим наше рассмотрение классом  $K$  функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих следующим требованиям:

1° В любой конечной части полуплоскости  $t \geq 0$  имеется конечное число линий разрыва  $x = x(t)$  и конечное число точек разрыва; вне этих линий и точек функция  $u(x, t)$  непрерывна и обладает непрерывными первыми производными.

2° На линиях разрыва  $x = x(t)$  существуют левые  $u(x-0, t)$  и правые  $u(x+0, t)$  предельные значения; для определенности будем полагать, что  $u(x, t) = u(x+0, t)$ .

Вектор-функцию  $u(x, t) \in K$  будем называть *обобщенным решением системы уравнений* (1), если для произвольного кусочно-гладкого контура  $S$  и ограниченной им области  $\mathcal{G}_S$  удовлетворяются интегральные законы сохранения (2).

Применяют также и другие определения обобщенного решения системы (1).

Пусть  $g(x, t) \in C_1$  — финитная функция (обращается в нуль вне конечной части плоскости  $x, t$ ). Умножим каждое из уравнений системы (1) на  $g(x, t)$  и проинтегрируем результат по полуплоскости  $t \geq 0$ . Производя интегрирование по частям, получим

$$\int_{t \geq 0} \left[ u_i \frac{\partial g}{\partial t} + \varphi_i(u, x, t) \frac{\partial g}{\partial x} + f_i(u, x, t) g(x, t) \right] dx dt + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_i(x, 0) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Уравнения (3), так же как и (2), не содержат производных функции  $u(x, t)$  и не теряют смысла для разрывных  $u(x, t)$ . Функцию  $u(x, t) \in K$  будем называть *обобщенным решением системы* (1), если равенства (3) выполняются для любой финитной функции  $g(x, t) \in C_1$ .

Наконец, используя понятие потенциала (гл. 1, § 5), введем еще одно определение обобщенного решения системы (1).

Пусть вектор-функция  $\Phi(x, t) = \{\Phi_1(x, t), \dots, \Phi_n(x, t)\}$  непрерывна и обладает первыми производными  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \in K$ . Тогда, если во всех точках, в которых существуют производные  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , они удовлетворяют системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \varphi_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, x, t \right) = \int_0^x f_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \xi, t \right) d\xi \quad (i=1, \dots, n), \quad (4)$$

то функцию

$$u(x, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5)$$

будем называть *обобщенным решением системы* (1).

Легко заметить, что каждое из этих трех определений естественно обобщается на более широкие классы функций  $u(x, t)$ .

Тем не менее мы ограничиваемся классом  $K$ , так как более общие классы обобщенных решений еще недостаточно изучены.

Заметим теперь, что система квазилинейных уравнений допускает иногда несколько различных представлений в виде законов сохранения. Например, одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

можно представить как в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (7)$$

так и в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^3}{3} \right) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, любое решение уравнения (6) удовлетворяет одновременно следующим интегральным законам сохранения

$$\oint_C u \, dx - \frac{u^2}{2} \, dt = 0, \quad (9)$$

$$\oint_C \frac{u^2}{2} \, dx - \frac{u^3}{3} \, dt = 0. \quad (10)$$

Легко, однако, видеть, что разрывная функция  $u(x, t)$  может удовлетворять одному из уравнений (9), (10), но не удовлетворять другому.

Это обстоятельство отражает интересный факт, который может интерпретироваться следующим образом: различные процессы могут описываться одними и теми же дифференциальными уравнениями, но разными интегральными законами сохранения. Поэтому различие этих процессов проявляется лишь на разрывных решениях.

Вводя понятие обобщенного решения консервативной системы (1), мы однозначно фиксируем интегральные законы сохранения (2).

**2. Условия Гюгонио.** Пусть  $u(x, t) \in K$  и  $x = x(t)$  — уравнение одной из линий разрыва функции  $u(x, t)$ . Обозначим

$$\left. \begin{aligned} D &= x'(t), \quad u_n(t) = u(x(t) - 0, t), \quad u_p(t) = u(x(t) + 0, t), \\ [u] &= [u(x, t)] = u(x + 0, t) - u(x - 0, t), \\ [u(x(t), t)] &= u_p(t) - u_n(t), \\ [\varphi(u, x, t)] &= \varphi(u(x + 0, t), x, t) - \varphi(u(x - 0, t), x, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Аналогично тому, как из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии вытекают условия Гюгонио на линии разрыва течения (гл. 2, § 4, п. 1), так и из интегральных законов

сохранения (1.1.2) на линии  $x = x(t)$  разрыва решения  $u(x, t)$  следует выполнение соотношений

$$D[u] = [\varphi(u, x, t)] \quad (2)$$

или, в компонентах,

$$D[u_i] = [\varphi_i(u, x, t)].$$

Условия (2) связывают левые и правые предельные значения решения на линии разрыва \*).

По аналогии со случаем газовой динамики эти уравнения будем называть *условиями Гюгонио*.

Если функция  $u(x, t) \in K$  и всюду, кроме линий разрыва, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.1.1), а на линиях разрыва — условиям Гюгонио (2), то, очевидно, интегральные законы сохранения (1.1.2) выполняются для любого замкнутого контура  $C$ . Поэтому функция  $u(x, t)$  в этом случае будет обобщенным решением системы (1.1.1).

На простейших примерах рассмотрим следствия, к которым приводят условия Гюгонио.

Пусть система уравнений (1.1.1) полулинейна. Тогда

$$\frac{\partial \varphi_i(u, x, t)}{\partial u_j} = a_{ij}(x, t), \quad (3)$$

поэтому условия Гюгонио (2) преобразуются к виду

$$D[u_i] = [\varphi_i(u, x, t)] = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t) [u_j]$$

или

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x, t) - \delta_{ij} D) [u_j] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Если решение  $u(x, t)$  разрывно, то  $\sum_{j=1}^n [u_j]^2 \neq 0$  и

$$\text{Det}((a_{ij}(x, t) - D\delta_{ij})) = 0,$$

т. е. величина  $D = x'(t)$  должна совпадать с собственным значением матрицы  $A = \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right) \right)$ . Пусть

$$D = \xi_k(x, t), \quad (5)$$

тогда

$$[u] = U r^k(x, t) \quad (6)$$

\*) Эти же условия следуют для кусочно-непрерывных  $u(x, t)$  и кусочно-гладких линий разрыва также из определений обобщенного решения (1.1.3), либо (1.1.4), (1.1.5).

или, в компонентах,

$$[u_i] = Ur_i^k(x, t). \quad (7)$$

Через  $r^k(x, t) = \{r_i^k(x, t)\}$  обозначен правый собственный вектор матрицы  $A(x, t)$ , соответствующий собственному значению  $\xi_k(x, t)$ .

Итак, для полулинейной системы согласно (5)

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(x, t), \quad (8)$$

т. е. линии разрыва решения являются характеристиками системы уравнений (1.1.1).

Аналогично слабому разрыву, сильный разрыв решения полулинейной системы уравнений также распространяется вдоль характеристик системы.

Отметим, что аналогичное свойство имеют и решения слабо-нелинейной системы квазилинейных уравнений (гл. 1, § 10). Действительно, нетрудно проверить, что разрывы обобщенного решения слабо-нелинейной системы квазилинейных уравнений могут располагаться на характеристиках этой системы.

В случае одного квазилинейного уравнения ( $n = 1$ ) условия Гюнио (2) переписываются в виде

$$x'(t) = D = \frac{[\varphi(u, x, t)]}{[u]} = \frac{\varphi(u_n(t), x(t), t) - \varphi(u_l(t), x(t), t)}{u_n(t) - u_l(t)}. \quad (9)$$

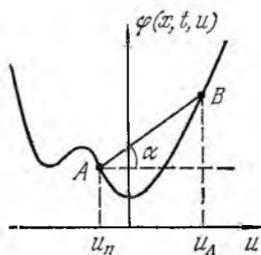


Рис. 4.1.

Равенство (9) может быть следующим образом интерпретировано геометрически.

Скорость  $D = x'(t)$  линии разрыва  $x = x(t)$  равна наклону (тангенсу угла  $\alpha$ ) хорды  $AB$  к оси  $u$  (рис. 4.1). Для случая, изображенного на рис. 4.1, выполнены неравенства

$$\varphi''_{uu}(u_n(t), x(t), t) < D < \varphi''_{uu}(u_l(t), x(t), t).$$

Если  $\varphi''_{uu}(u, x, t) \neq 0$ , то, согласно формуле (9), величина  $D$  отлична как от  $\varphi''_{uu}(u_n(t), x(t), t)$ , так и от  $\varphi''_{uu}(u_l(t), x(t), t)$ , если только  $u_n(t) \neq u_l(t)$ . Таким образом, для нелинейного уравнения линия разрыва  $x = x(t)$  уже не является характеристикой.

Отметим, что различным интегральным законам сохранения, отвечающим одной и той же системе квазилинейных уравнений, соответствуют различные условия Гюнио. Так, из интегрального закона (1.1.9) следует условие Гюнио

$$D = \frac{[u^2]}{2[u]} = \frac{u_n + u_l}{2}, \quad (10)$$

а из (1.1.10)

$$D = \frac{2}{3} \frac{[u^3]}{[u^2]} = \frac{2}{3} \frac{u_n^2 + u_n u_l + u_l^2}{u_n + u_l}. \quad (11)$$

Нетрудно привести пример разрывных функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих одному из условий Гюгонио (10), (11) и не удовлетворяющих другому.

**3. Устойчивые и неустойчивые разрывы. Условия устойчивости.** Решение (классическое) системы квазилинейных уравнений, как мы видели в главе 1, однозначно определяется в области определенности своими начальными значениями при  $t = 0$ . Оказывается, однако, что выполнение интегральных законов сохранения и начальных условий вовсе не гарантируют единственности разрывного решения; напротив, можно указать множество существенно различных разрывных функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих как интегральным законам сохранения, так и начальным условиям.

Подтвердим это простейшим примером. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (1)$$

поставлено начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем искать ограниченную кусочно-непрерывную функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую интегральному закону сохранения (1.1.9) и начальному условию (2).

На линиях разрыва должно выполняться условие Гюгонио (1.2.10), поэтому функция

$$u_1(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < D_1 t, \\ u^+ & \text{при } x > D_1 t, \end{cases} \quad D_1 = \frac{u^- + u^+}{2} \quad (3)$$

является искомым решением. Эта функция постоянна слева и справа от линии разрыва  $x = D_1 t$ , на которой выполняется условие Гюгонио (1.2.10), и принимает начальные значения (2).

Пусть  $u^- < u^+$ . Построим другое решение поставленной задачи (1), (2):

$$u_2(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x \leq tu^-, \\ \frac{x}{t} & \text{при } tu^- \leq x \leq tu^+, \\ u^+ & \text{при } x \geq tu^+. \end{cases} \quad (4)$$

Решение  $u = u_2(x, t)$  непрерывно при  $t > 0$ , непрерывно дифференцируемо всюду, кроме линий  $x = tu^-$ ,  $x = tu^+$ , и удовлетворяет в широком смысле уравнению (1) в полуплоскости  $t \geq 0$ .

Мы указали два решения  $u = u_1(x, t)$ ,  $u = u_2(x, t)$  задачи Коши (1), (2). Каждое из этих решений удовлетворяет интегральному закону сохранения (1.1.9) и начальному условию (2). Итак, мы встречаемся здесь с фактом неединственности решения. Однако представляется естественным, что разумная постановка задачи Коши в классе разрывных функций должна привести к единственности решения.

Для того чтобы выделить единственное решение нашей задачи, сделаем следующие предположения:

1° Всякое (классическое) решение системы квазилинейных уравнений, когда оно существует, является «истинным» решением этой системы и в классе обобщенных (разрывных) решений.

2° Пределы (классических) решений системы квазилинейных уравнений являются «истинными» решениями интегральных законов сохранения в классе разрывных функций.

Поясним это несколько подробнее.

Требование 1° является естественным предположением о том, что класс обобщенных решений задачи Коши для системы квазилинейных уравнений является расширением класса классических решений. Если бы мы от него отказались, то классические решения не имели бы никакого практического значения при рассмотрении задачи Коши в классе разрывных функций\*).

Требование 2° является естественным следствием требования 1° и предположения о непрерывной зависимости обобщенных решений от входных данных задачи Коши. Непрерывная же зависимость решений от входных данных задачи Коши есть одно из условий корректности задачи Коши.

Таким образом, обычное представление о корректной постановке задачи Коши приводит нас к требованиям 1°, 2°.

Более полная формулировка требований, предъявляемых к обобщенному решению, будет приведена ниже. Пока же мы лишь качественно применим требования 1°, 2° для дальнейшего изучения свойств разрывных решений систем квазилинейных уравнений и, в частности, для выделения единственного («истинного») решения  $u = u(x, t)$  задачи Коши (1), (2).

\*) Если отказаться от требования 1°, то задача Коши для уравнения (1) с начальным условием  $u(x, 0) \equiv 0$  имеет бесчисленное множество разрывных решений. Например,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x + t < 0, \\ -2 & \text{при } -t < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < t, \\ 0 & \text{при } x - t > 0 \end{cases}$$

будет решением этой задачи.

На рис. 4.2 и 4.3 изображено поведение характеристик  $x = x_0 + u(x, t)t$  для решений  $u = u_1(x, t)$  и  $u = u_2(x, t)$ .

Рассмотрим решение  $u = u_\delta(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u_\delta(x, 0) = u_\delta^0(x), \quad (5)$$

где  $u_\delta^0(x)$  — монотонно возрастающая непрерывная функция переменного  $x$ , совпадающая вне отрезка  $|x| \leq \delta$  с  $u_0(x)$  (рис. 4.4).

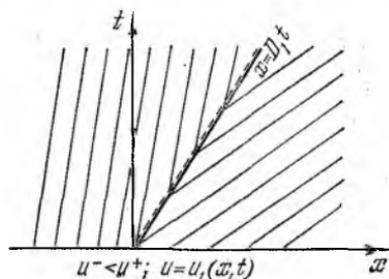


Рис. 4.2.

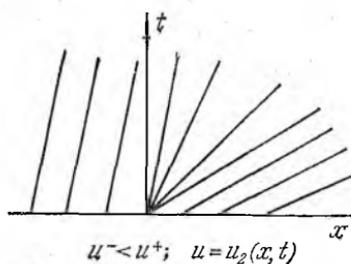


Рис. 4.3.

На рис. 4.5 изобразим картину характеристик для решения  $u_\delta(x, t)$ . Сравнивая рис. 4.3 и 4.5, замечаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x, t) = u_2(x, t), \quad (6)$$

причем равенство (6) имеет место для любых  $x, t$ , кроме точки  $(0, 0)$ , где предел  $u_\delta(x, t)$  при  $\delta \rightarrow 0$  не существует. Поэтому,

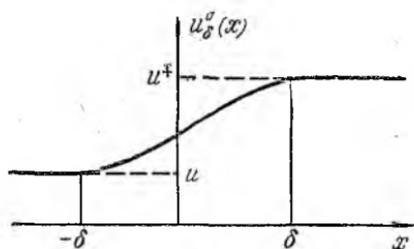


Рис. 4.4.

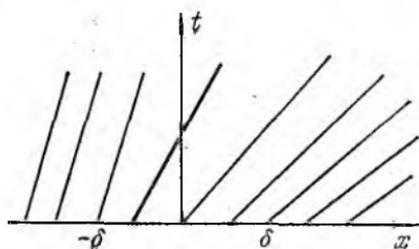


Рис. 4.5.

согласно требованию 2°, «истинным» решением задачи Коши (1), (2) следует признать  $u = u_2(x, t)$ . Решение  $u = u_1(x, t)$  мы будем называть *неустойчивым разрывным решением*, так как сглаживание начальной функции на сколь угодно малом участке приводит к классическому решению (истинному), далекому от  $u_1(x, t)$ .

Из сравнения рис. 4.2 и 4.3 заключаем, что причина неустойчивости решения  $u_1(x, t)$  состоит в том, что на линии разрыва  $x = D_1 t$  решения  $u_1(x, t)$  пересекаются не характеристики, выходящие из точек начальной оси  $t = 0$  (и, следовательно, несущие начальные данные), а характеристики, выходящие из точек линии разрыва  $x = D_1 t$ .

В этом смысле можно сказать, что разрыв решения, изображенный на рис. 4.2, «придуман», а не вызван пересечением характеристик, несущих начальные значения. Такой разрыв мы называем *неустойчивым разрывом*.

Если же в условиях задачи Коши (1), (2)  $u^- > u^+$ , то решение  $u_1(x, t)$ , заданное формулой (3), будет иметь характеристики, изображенные на рис. 4.6.

В этом случае на линии разрыва  $x = D_1 t$  пересекаются характеристики, несущие начальные значения (*приходящие характеристики*). В этом случае не существует непрерывного решения этой задачи Коши, а сглаженное решение  $u_\delta(x, t)$  также разрывно. Поэтому решение  $u = u_1(x, t)$  и разрыв на линии  $x = D_1 t$  при  $u^- > u^+$  будем называть *устойчивыми*.

Для уравнения (1) условие пересечения на линии разрыва приходящих характеристик записывается неравенствами

$$u_{\text{л}}(t) > D > u_{\text{п}}(t), \quad D = x'(t). \quad (7)$$

Для более общего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t) \quad (8)$$

скорость характеристик есть  $\Phi'_u(u, x, t)$ , поэтому условие пересечения на линии  $x = x(t)$  приходящих характеристик записывается аналогично (7):

$$\Phi'_u(u_{\text{л}}(t), x(t), t) > D > \Phi'_u(u_{\text{п}}(t), x(t), t); \quad D = x'(t). \quad (9)$$

Для полулинейного уравнения (8) ( $\Phi''_{uu}(u, x, t) \equiv 0$ ) линиями разрыва решений являются характеристики. Таким образом, если искать более общие условия устойчивости, справедливые также и для линейных уравнений, то их следует записывать в виде

$$\Phi'_u(u_{\text{л}}(t), x(t), t) \geq D \geq \Phi'_u(u_{\text{п}}(t), x(t), t). \quad (10)$$

Как мы убедимся ниже, условия (10) обеспечивают единственность и допускают существование обобщенного решения уравне-

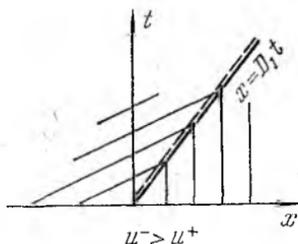


Рис. 4.6.

ния (8) для случая, когда  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  не меняет свой знак, т. е. для случая функции  $\varphi(u, x, t)$ , выпуклой по переменному  $u$ . Условия (10) мы будем называть условиями устойчивости обобщенного решения в случае знакопостоянства  $\varphi''_{uu}$ .

Если же  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  — знакопеременная функция, то условия (10) не гарантируют ни единственности, ни непрерывной зависимости решения от начальных данных, т. е. являются неправильными условиями.

В самом деле, пусть  $\varphi = \varphi(u)$ ,  $f \equiv 0$  и для уравнения (8) поставлено начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0. \\ u^+ & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Пусть график функции  $\varphi(u)$  и расположение точек  $u^-$ ,  $u^+$  таковы, как это изображено на рис. 4.7. Функция

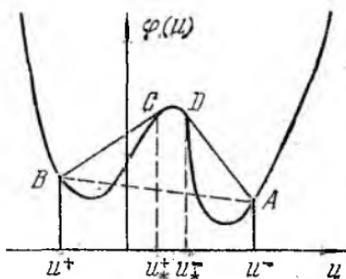


Рис. 4.7

$$u = u_1(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < Dt, \\ u^+ & \text{при } x > Dt, \end{cases} \quad (12)$$

$$D = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-},$$

удовлетворяет интегральному закону сохранения

$$\oint u \, dx - \varphi(u) \, dt = 0$$

уравнения (8), начальному условию и предполагаемому «условию устойчивости» (10). Последнее, очевидно, просматривается из рис. 4.7, так как  $\varphi'_u(u^-) > D > \varphi'_u(u^+)$ ;  $D$  — наклон хорды  $AB$  к оси  $u$ .

Построим, однако, второе решение  $u = u_2(x, t)$  нашей задачи Коши. Зададим функцию  $u_2(x, t)$  следующим образом:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < D_1^* t, \\ f\left(\frac{x}{t}\right) & \text{при } D_1^* t < x < D_2^* t, \\ u^+ & \text{при } x > D_2^* t, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$D_1^* = \frac{\varphi(u^-) - \varphi(u_*^-)}{u^- - u_*^-}, \quad D_2^* = \frac{\varphi(u_*^+) - \varphi(u^+)}{u_*^+ - u^+}; \quad (14)$$

$f(\xi)$  определяется из уравнения

$$\xi = \varphi'_u[f(\xi)], \quad (15)$$

и точки  $u^+$ ,  $u^-$  (абсциссы точек  $C$ ,  $D$ ) — из условия, что прямая  $BC$  касается графика функции  $\varphi(u)$  в точке  $C$ , а прямая  $AD$  — в точке  $D$ ; кроме того, предполагается, что  $\varphi''_{uu}(u) \neq 0$  при  $u_* \leq u \leq u^*$  (см. рис. 4.7).

Решение  $u = u_2(x, t)$ , заданное формулами (13) — (15), удовлетворяет интегральному закону сохранения для уравнения (8)

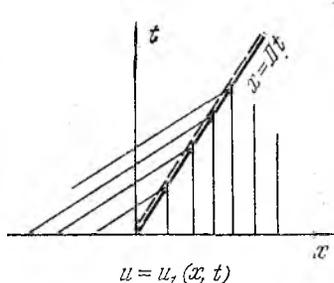


Рис. 4.8.

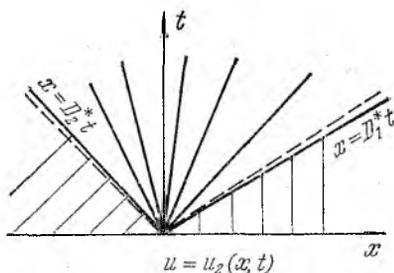


Рис. 4.9.

и условиям (10). Таким образом, если  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  — знакопеременная функция аргумента  $u$ , то «условия устойчивости» (10) удовлетворяются двумя решениями  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ .

На рис. 4.8 и 4.9 изображены поля характеристик для решений  $u = u_1(x, t)$  и  $u = u_2(x, t)$ .

Отметим попутно одно интересное свойство решения  $u_2(x, t)$ . Линия разрыва  $x = D_2^* t$  является характеристикой решения  $u_2(x, t)$ , вычисленной по правым предельным значениям решения  $u_n(t)$  на ней; аналогично линия разрыва  $x = D_1^* t$  является характеристикой, вычисленной по значениям  $u_n(t)$  на линии  $x = D_1^*(t)$ .

Для того чтобы отдать предпочтение одному из этих двух решений, снова применим метод проверки устойчивости этих решений с помощью сглаживания начальной функции.

Сгладим начальную функцию  $u_0(x)$  с помощью монотонной функции  $u_0^\delta(x)$ , которая изображена на рис. 4.10. Точки  $(x_*^-, u_*^-)$ ,  $(x_*^+, u_*^+)$  соответствуют точкам  $D$ ,  $C$  рис. 4.7, а точки  $u_1^-, u_1^+$  — точки перегиба графика функции  $\varphi(u)$ , т. е.  $\varphi''_{uu}(u_1^-) = \varphi''_{uu}(u_1^+) = 0$ .

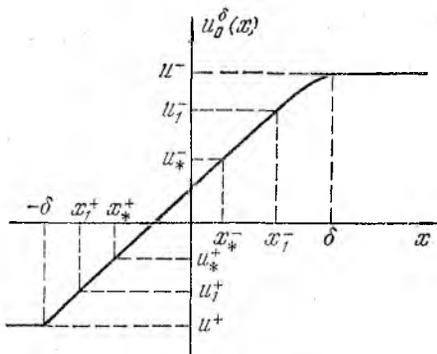


Рис. 4.10.

Изобразим на рис. 4.11 характеристики решения  $u = u_\delta(x, t)$ .

Как видно из рис. 4.7,  $\varphi'_u(u)$  на интервале  $[u^-, u_1^-]$  является монотонно возрастающей функцией переменного  $u$ , и, следовательно, наклон характеристики  $\varphi'_u(u_0^\delta(x))$  на начальной оси монотонно убывает на отрезке  $[-\delta, x_1^-]$ ; аналогично этому  $\varphi'_u(u_0^\delta(x))$  монотонно возрастает на отрезке  $[x_1^-, x_1^+]$  и убывает на отрезке  $[x_1^+, \delta]$ .

Внимательное рассмотрение картины характеристик (рис. 4.11) приводит нас к выводу, что разрыв решения, на котором

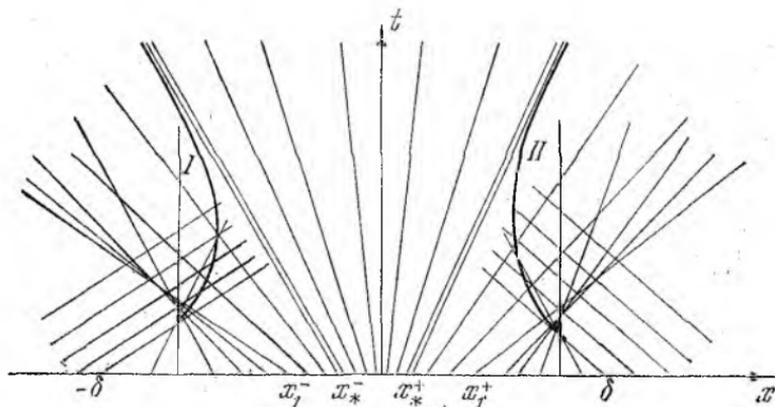


Рис. 4.11.

левым значением является величина  $u^-$ , а правым  $u^+$ , не может возникнуть при сглаженной начальной функции  $u_0^\delta(x)$ .

В самом деле, как видно из рис. 4.11, должны возникнуть два разрыва, из которых разрыв  $I$ , расположенный слева и соответствующий значениям  $u^-$ ,  $u_*^-$ , будет иметь скорость  $D_1^* = \varphi'_u(u_*^-) < \varphi'_u(u_*^+)$ , а разрыв  $II$ , соответствующий значениям  $u_*^+$ ,  $u^+$ , будет иметь скорость  $D_2^* = \varphi'_u(u_*^+)$ . Таким образом, линии разрывов, которые образуются при начальной функции  $u_0^\delta(x)$  (они изображены на рис. 4.11 жирными линиями и обозначены цифрами  $I$  и  $II$ ), будут вести себя следующим образом. Линия разрыва  $I$  никогда не пересечет характеристики, выходящей из точки  $x_1^-$  начальной оси и будет приближаться к ней асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ . Это, очевидно, вытекает из неравенства

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(u^-)}{u - u^-} < \varphi'_u(u_*^-) \quad \text{при} \quad u_*^- < u < u_1^-.$$

Совершенно аналогично заключаем, что линия разрыва  $II$  будет асимптотически приближаться к характеристике, выходящей из точки  $x^*$  начальной оси, и никогда не пересечет ее.

Теперь становится очевидным, что если стремить величину  $\delta$  к нулю, то решение  $u_\delta(x, t)$  будет стремиться к  $u_2(x, t)$ .

Таким образом, решение  $u_1(x, t)$  и линия разрыва  $x = Dt$  устойчивы.

Итак, условие (10) не гарантирует устойчивости обобщенного разрывного решения квазилинейного уравнения (8) для случая, когда  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  знакопеременна.

Правильное обобщение условий устойчивости разрывного решения уравнения (8) в случае, когда  $\varphi''_{uu}$  знакопеременна, может быть получено при внимательном рассмотрении решений, которые получаются при сглаживании разрывов. Так, решение типа  $u_1(x, t)$  (рис. 4.8) можно было бы считать устойчивым, если бы линии разрывов  $I$  и  $II$  (рис. 4.11) догоняли друг друга, т. е. картина движения разрывов  $I$  и  $II$  имела бы схематически следующий вид (рис. 4.12).

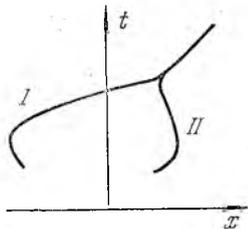


Рис. 4.12.

Эти соображения приводят нас к следующему условию устойчивости.

Пусть на линии разрыва  $x = x(t)$  решения уравнения (8)  $u_n(t) = u^-$ ,  $u_n(t) = u^+$ , и пусть  $x'(t) = D$ . Разрыв называется *устойчивым*, если неравенства

$$\frac{\varphi(u^*, x, t) - \varphi(u^-, x, t)}{u^* - u^-} \geq D \geq \frac{\varphi(u^*, x, t) - \varphi(u^+, x, t)}{u^* - u^+}, \quad (16)$$

$$u^* \in (u^-, u^+), \quad x = x(t),$$

выполнены для любого значения  $u^*$  из интервала  $(u^-, u^+)$ .

Легко заметить, что разрыв решения  $u_1(x, t)$  не удовлетворяет условию (16). Действительно, если выбрать, например, в качестве  $u^*$  любое число из интервала  $(u^+, u^-)$ , то неравенства (16) нарушаются. Разрывы же решения  $u_2(x, t)$ , очевидно, удовлетворяют этим неравенствам, что ясно из рис. 4.7.

Наконец, отметим, что условия устойчивости (9) автоматически вытекают из (16), если считать, что  $\varphi''_{uu}(u, x, t) \neq 0$ , т. е. для выпуклой  $\varphi(u, x, t)$ . Условия устойчивости (16) были введены впервые О. А. Олейник [1958].

Еще более сложен вопрос об устойчивости разрывных решений для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа. Дело в том, что для сложных систем мы фактически не имеем наглядных способов построения разрывных решений. По-

этому выяснение правильности тех или иных условий устойчивости решения весьма затруднительно.

При формулировке условий устойчивости мы будем опираться на аналогию со случаями одного квазилинейного уравнения и системы уравнений газовой динамики (гл. 2).

Ограничимся рассмотрением систем, гиперболических в узком смысле, т. е. будем считать, что

$$\xi_1(u, x, t) < \xi_2(u, x, t) < \dots < \xi_n(u, x, t). \quad (17)$$

Как и в случае одного уравнения, условия устойчивости должны требовать, чтобы на линии разрыва  $x = x(t)$  пересекались входящие характеристики одного семейства. Пусть, например, на

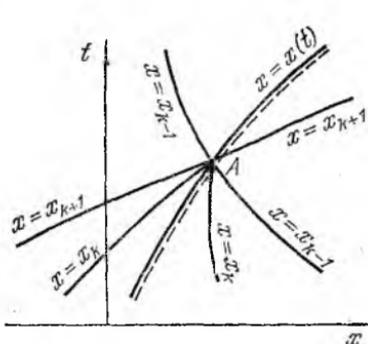


Рис. 4.13.

линии  $x = x(t)$  пересекаются входящие характеристики  $k$ -го семейства, тогда

$$\begin{aligned} \xi_k(u_n(t), x(t), t) &> D > \\ &> \xi_k(u_n(t), x(t), t), \quad D = x'(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Если ничего более не требовать, то возможно, что на линии разрыва  $x = x(t)$  будут пересекаться входящие характеристики и других семейств, а для некоторых семейств на линии разрыва будут отсутствовать входящие характеристики.

Поэтому к неравенствам (18) мы добавляем еще два неравенства:

$$\xi_{k-1}(u_n(t), x(t), t) < D < \xi_{k+1}(u_n(t), x(t), t), \quad (19)$$

которые с учетом (17) приводят в окрестности линии разрыва  $x = x(t)$  к картине характеристик, изображенной на рис. 4.13.

На рис. 4.13 через точку  $A$  линии разрыва проведены интегральные кривые уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(u(x_i, t), x_i, t) \quad (20)$$

для номеров  $i = k-1, k, k+1$ . Согласно условиям (17), (18), (19) в точку  $A$  приходит  $n+1$  входящая характеристика (по одной от каждого семейства и две от  $k$ -го) и из точки  $A$  выходит  $n-1$  уходящая характеристика (по одной от каждого семейства, кроме  $k$ -го).

Итак, мы будем говорить, что на линии разрыва  $x = x(t)$  кусочно-непрерывного решения  $u(x, t)$  системы квазилинейных уравнений, гиперболической в узком смысле, выполнены

условия устойчивости, если удовлетворены неравенства

$$\left. \begin{aligned} \xi_k(u_{II}(t), x(t), t) > D > \xi_k(u_I(t), x(t), t), \\ \xi_{k-1}(u_{II}(t), x(t), t) < D < \xi_{k+1}(u_I(t), x(t), t). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Условия (21) были опубликованы в работе П. Лакса [1957]. Номер  $k$ , для которого выполнены условия (21), называют *индексом линии разрыва*.

Из аналогии со случаем одного уравнения ясно, что условия устойчивости (21) могут обеспечить единственность и непрерывную зависимость решений от начальных данных лишь в некотором, возможно узком, классе систем квазилинейных уравнений. Однако этот класс до сих пор не найден. Возможно, что условия (21) гарантируют единственность разрывного решения для систем квазилинейных уравнений, удовлетворяющих требованию

$$r^k(u, x, t) \operatorname{grad}_u \xi_k(u, x, t) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

(ср. § 10 гл. 1), где  $r^k(u, x, t)$  — правый собственный вектор матрицы  $A = \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right) \right)$ .

**4. Необратимость процессов, описываемых разрывными решениями систем квазилинейных уравнений.** Пусть при  $0 \leq t \leq t_1$  построено решение  $u = u_1(x, t)$  задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Будем говорить, что решение  $u = u_1(x, t)$  описывает обратимый процесс, если решение обратной задачи Коши с начальным условием, поставленным при  $t = t_1$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t), \\ u(x, t_1) = u_1(x, t_1), \quad 0 \leq t \leq t_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

совпадает в полосе  $0 \leq t \leq t_1$  с  $u_1(x, t)$ ; если же решение задачи (2) отлично от  $u_1(x, t)$ , то будем говорить, что  $u_1(x, t)$  описывает необратимый процесс.

Если  $u_1(x, t)$  — классическое решение задачи (1), то, очевидно, оно описывает обратимый процесс. В самом деле, гладкая функция  $u_1(x, t)$  является единственным гладким решением как задачи (1), так и задачи (2), как это вытекает из теоремы единственности классического решения системы квазилинейных уравнений, доказанной в главе 1.

Переходя к вопросу об обратимости процесса, описываемого разрывным решением задачи (1), мы должны учесть, что решением этой задачи будем называть лишь устойчивые решения. Пусть  $u_1(x, t)$  — устойчивое разрывное решение задачи (1) и

$x = x(t)$  — его линия разрыва. На линии  $x = x(t)$  выполняются, следовательно, условия устойчивости

$$\xi_k(u_n(t), x(t), t) > D > \xi_k(u_n(t), x(t), t). \quad (3)$$

Решениями обратной задачи Коши (2) мы будем называть также лишь решения, устойчивые по отношению к изменению начальных данных. Легко, однако, видеть, что изменение направления отсчета времени  $t$  приводит к условиям устойчивости, обратным (3), т. е.

$$\xi_k(u_n(t), x(t), t) < D < \xi_k(u_n(t), x(t), t), \quad (4)$$

так как при этом меняются местами правое и левое положения.

Таким образом, если  $u_1(x, t)$  — устойчивое разрывное решение задачи (1), то  $u = u_1(x, t)$  не является устойчивым решением обратной задачи Коши (2), так как оно не удовлетворяет условиям (4). Значит, устойчивым решением обратной задачи Коши (2) будет функция  $u = u_2(x, t)$ , заведомо отличная от  $u_1(x, t)$ , и решение  $u_1(x, t)$  описывает необратимый процесс.

Поясним эти наши выводы простейшим примером. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (5)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (6)$$

как мы видели выше, в случае  $u^- > u^+$  устойчивым разрывным решением является функция

$$u_1(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < Dt, \\ u^+ & \text{при } x > Dt, \end{cases} \quad (7)$$

$$D = \frac{u^- + u^+}{2}.$$

Если же мы выберем какой-либо момент  $t = t_1 > 0$  и будем решать для уравнения (5) обратную задачу Коши, т. е. задачу, когда начальное условие

$$u(x, t_1) = u_1(x, t_1) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < x_1, \\ u^+ & \text{при } x > x_1, \end{cases} \quad x_1 = Dt_1, \quad (8)$$

задано при  $t = t_1$  и ищется решение при  $0 \leq t \leq t_1$ , то устойчивым решением этой задачи будет являться функция

$$u_2(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x - x_1 \leq u^-(t_1 - t), \\ \frac{x - x_1}{t - t_1} & \text{при } u^-(t_1 - t) \leq x - x_1 \leq u^+(t_1 - t), \\ u^+ & \text{при } x - x_1 \geq u^+(t_1 - t). \end{cases} \quad (9)$$

На рис. 4.14 приведена картина характеристик для решений  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Характеристики решения  $u_1(x, t)$  изображены сплошными линиями, решения  $u_2(x, t)$  — пунктирными. Таким образом, решения  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  различны в зоне I.

Итак, разрывное устойчивое решение системы квазилинейных уравнений гиперболического типа описывает необратимый процесс. Этот вывод верен лишь для гиперболических уравнений, так как для уравнений других типов обратная задача

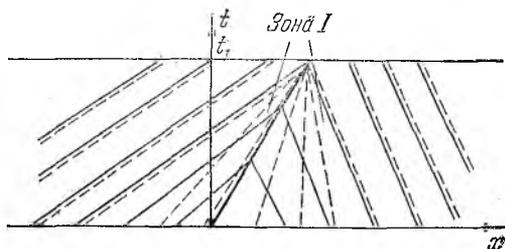


Рис. 4.14.

Коши может оказаться некорректной, т. е. необратимость процесса имеет там другой характер: в частности, и гладкие решения могут описывать необратимые процессы.

Наконец, мы хотим обратить внимание также и на то, что этот вывод верен лишь для существенно нелинейных систем квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Действительно, разрывные решения линейных, полулинейных и слабо-нелинейных систем уравнений гиперболического типа описывают обратимые процессы. Это вытекает из того, что теорема единственности разрывных решений для этих систем может быть доказана лишь на основании интегральных законов сохранения, т. е. для этих систем отсутствуют неустойчивые решения.

Изложим, наконец, некоторые соображения о характере непрерывной зависимости обобщенных решений системы квазилинейных уравнений от начальных значений.

Из рассмотренных выше примеров видно, что мерой близости обобщенных решений не может служить норма пространства  $C$ . Как мы увидим в этой главе, в случае одного квазилинейного уравнения устойчивые обобщенные решения обладают тем свойством, что

$$\sup_x |\Phi(x, t) - \bar{\Phi}(x, t)| \rightarrow 0, \tag{10}$$

если

$$\sup_x |\Phi(x, 0) - \bar{\Phi}(x, 0)| \rightarrow 0. \tag{11}$$

Здесь  $\Phi(x, t)$ ,  $\bar{\Phi}(x, t)$  — потенциалы обобщенных решений  $u(x, t)$ ,  $\bar{u}(x, t)$ . О решениях, обладающих этим свойством, мы будем говорить, что они непрерывно зависят от начальных данных «в потенциальной метрике».

Это свойство устойчивости решений одного уравнения позволяет предполагать, что и для систем квазилинейных уравнений устойчивость обобщенных решений означает их непрерывную зависимость от начальных условий «в потенциальной метрике».

## § 2. Одно квазилинейное уравнение

**1. Обзор результатов.** Одно квазилинейное уравнение представляет собой самый простой случай системы квазилинейных уравнений, в котором имеются существенные упрощающие детали. Естественно поэтому, что первые результаты по изучению разрывных решений задачи Коши были получены для одного квазилинейного уравнения.

В своей классической работе Э. Хопф [1950] построил разрывное решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Метод Э. Хопфа состоит в следующем.

Вместо задачи Коши (1) он рассматривает другую задачу Коши:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_\mu^2}{2} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad u_\mu(x, 0) = u_0(x), \quad \mu > 0, \quad (2)$$

решение которой выписывается явно. Обобщенное решение задачи Коши (1) определяется как предел  $u_\mu(x, t)$  при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$u(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x, t). \quad (3)$$

Явное выражение для  $u_\mu(x, t)$  и формула (3) для обобщенного решения  $u(x, t)$  задачи Коши (1) позволяют детально изучить свойства разрывного решения задачи (1).

Таким образом, построение Э. Хопфа можно считать первым результатом, устанавливающим существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения в достаточно широком классе начальных функций (для построения Э. Хопфа достаточно потребовать лишь ограниченности и измеримости начальной функции  $u_0(x)$ ).

Отметим, что задача Коши (2) рассматривалась также И. Бюргерсом [1940, 1948] и И. Коулом [1951]. Эта задача Коши широко известна в теории турбулентности, а само уравнение (2) для  $u_\mu(x, t)$  часто называют уравнением Бюргерса,

который на примере задачи Коши (2) (и близких задач) изучал некоторые аспекты теории турбулентности.

П. Жермен и Р. Баде [1953] установили, что решение задачи (1) единственно, если в точках разрыва  $u(x, t)$  выполнено условие устойчивости  $u_n > u_{пр}$ .

Однако строгое обоснование решения задачи Коши (1) было дано впервые Э. Хопфом. В частности, Э. Хопф первый указал, что заданная формулой (3) функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) в смысле выполнения интегрального равенства

$$\iint_{t \geq 0} \left( u(x, t) \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{u^2(x, t)}{2} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx = 0 \quad (4)$$

для произвольной гладкой финитной функции  $g(x, t)$ .

В 1954 г. О. А. Олейник рассмотрела задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (6)$$

в классе кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых решений  $u(x, t)$ , предполагая выполненным условие  $\varphi''_{uu}(u, x, t) > 0$  ( $\varphi''_{uu} < 0$ ), и доказала существование и единственность обобщенного решения (см. О. А. Олейник [1954а, б]). А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1954] рассмотрели задачу Коши для неоднородного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t) \quad (7)$$

в классе  $u(x, t) \in K$ , также предполагая выпуклость  $\varphi(u, x, t)$  ( $\varphi''_{uu} \neq 0$ ).

Затем О. А. Олейник [1956б, 1957б] распространила свои результаты на класс ограниченных и измеримых решений  $u(x, t)$  закона сохранения (5).

В ряде дальнейших работ уточнялись свойства решений задачи Коши для уравнений (5) и (7).

В работах И. М. Гельфанда [1959], О. А. Олейник [1958, 1959б], А. С. Калашникова [1959а] и др. была рассмотрена задача Коши (5), (6) в случае невыпуклой функции  $\varphi(u, x, t)$ , когда величина  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  знакопеременна.

Постановка задачи, как мы видели в § 1, в этом случае осложняется, а ее решения имеют более разнообразные свойства. Центральным моментом является правильное обобщение условий устойчивости обобщенного решения. Такими условиями являются требования (1.3.16), полученные в предыдущем параграфе из наглядных соображений.

Основное отличие в свойствах решений задачи Коши (5), (6) в случае невыпуклой функции  $\varphi(u, x, t)$  от случая выпуклой состоит в том, что теперь решение  $u(x, t)$  может иметь особенность типа  $u(x, t) = g\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) + \tilde{u}(x, t)$ , где  $g, \tilde{u}$  — гладкие функции не только при  $t_0 = 0$  (что имеет место и при  $\varphi''_{uu} \neq 0$ ), но и при  $t_0 > 0$ . Указанные особенности типа центрированной волны разрежения могут возникать при  $t > 0$  в точках пересечения двух линий разрыва. Эта возможность сближает случай одного уравнения с системами уравнений гиперболического типа ( $n > 2$ ), у решений которых особенности указанного типа имеются как правило. Однако, конечно, случай  $n = 1$  очень важен из-за сложности возникающих задач. Именно по этой причине многие методы, приведшие к успеху в случае одного закона сохранения, неприменимы или, чаще, трудно проверяются в случае системы законов сохранения. Тем не менее случай  $n = 1$  всегда служит «пробным камнем» любой новой методики изучения разрывных решений системы нелинейных законов сохранения.

Хотя в случае знакопеременности  $\varphi''_{uu}(u, x, t)$  задача Коши (5), (6) изучена значительно менее подробно, чем при  $\varphi''_{uu} > 0$ , тем не менее можно считать, что основные факты и теоремы уже установлены.

Отметим также, что одно квазилинейное уравнение — это единственный случай систем квазилинейных уравнений, для которого доказаны теоремы о сходимости решений разностных уравнений к обобщенному решению задачи Коши (см. по этому поводу Н. С. Бахвалов [1961], Н. Н. Кузнецов [1977], Н. Н. Кузнецов, С. А. Волошин [1976], Р. В. Разумейко [1973]).

Из сказанного выше следует, что теория обобщенных решений одного квазилинейного закона сохранения (5) или (7) в основных чертах была построена в пятидесятых годах нашего столетия.

Тем не менее и в последующие годы появилось много интересных работ, освещающих разные стороны этой теории. Были предложены несколько новых методов решения задачи Коши (5), (6), новые определения решения этой задачи.

Отметим «метод потенциала» и «метод потенциального сглаживания» решения задачи Коши (5), (6), обладающие большой общностью и наглядностью (см. Н. Н. Кузнецов, Б. Л. Рождественский [1959а], Б. Л. Рождественский [1961], А. Дуглис [1961, 1972]).

Ряд работ посвящен более общим и наглядным определениям обобщенных решений одного закона сохранения и их

свойств, понятию «энтропии» для одного квазилинейного уравнения (см. А. Дуглис [1959], А. И. Вольперт [1967], Э. Хопф [1969], П. Лакс [1971]).

Расширение этой задачи на случай нескольких пространственных переменных привело к построению в 1960—1975 гг. сравнительно законченной теории обобщенных решений одного квазилинейного уравнения (закона сохранения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i(u, x, t)}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

(см. работы Н. Н. Кузнецова, С. Н. Кружкова, А. И. Вольперта, П. М. Смирнова, Л. В. Далецкого и др.).

Таким образом, мы видим, что хотя основные контуры теории обобщенных решений одного квазилинейного закона сохранения уже созданы, тем не менее сама эта задача еще далеко не исчерпана.

Несколько слов о характере изложения в § 2. Здесь мы рассматриваем почти исключительно случай выпуклой функции  $\varphi(u, x, t)$  ( $\varphi''_{uu} > 0$ ); случай невыпуклой  $\varphi(u)$  разбирается лишь с целью демонстрации возникающих осложнений.

Для простоты изложения результатов мы будем ограничиваться, как правило, классом решений  $u(x, t) \in K$ , хотя большинство результатов переносится без заметных осложнений и на класс ограниченных измеримых решений.

**2. Построение Э. Хопфа.** Э. Хопф рассматривает решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

как предел при  $\mu \rightarrow 0$  решений  $u_\mu(x, t)$  другой задачи Коши:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_\mu^2}{2} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad \mu > 0, \quad (3)$$

$$u_\mu(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Будем считать функцию  $u_0(x)$  ограниченной на всей оси  $|x| < \infty$ , обладающей кусочно-непрерывной первой производной и имеющей точки разрыва первого рода.

Предположим, что нам известно решение  $u_\mu(x, t)$  задачи Коши (3), (4), непрерывно дифференцируемое при  $t > 0$ . Тогда,

согласно уравнению (3), криволинейный интеграл

$$\Phi_{\mu}(x, t) = \int_{(0, 0)}^{(x, t)} u_{\mu} dx + \left[ \mu \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} - \frac{u_{\mu}^2}{2} \right] dt \quad (5)$$

не зависит от пути интегрирования; при этом

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x} = u_{\mu}, \quad \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial t} = \mu \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} - \frac{u_{\mu}^2}{2}. \quad (6)$$

Исключая из (6) функцию  $u_{\mu}$ , получим уравнение, которому удовлетворяет  $\Phi_{\mu}(x, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x} \right)^2 = \mu \frac{\partial^2 \Phi_{\mu}}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Формулы (4) и (5) приводят к начальному условию для  $\Phi_{\mu}$ :

$$\Phi_{\mu}(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Согласно нашим предположениям,

$$u_0(x) = o(|x|) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (9)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_0(x) = o(x^2) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (10)$$

Очевидно, что  $\Phi_0(x)$  — непрерывная функция переменного  $x$ , имеющая кусочно-непрерывную первую производную.

Мы решим сейчас задачу Коши (7), (8) для  $\Phi_{\mu}$ : по формуле (6) найдем  $u_{\mu}(x, t)$ , а затем, устремляя  $\mu \rightarrow 0$ , получим в пределе функцию  $u(x, t)$ , которую назовем обобщенным решением задачи Коши (1), (2). Подстановка

$$\Phi_{\mu}(x, t) = -2\mu \ln \Psi_{\mu}(x, t) \quad (11)$$

сводит задачу Коши (7), (8) к задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Psi_{\mu}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \Psi_{\mu}}{\partial x^2} \quad (12)$$

с начальным условием

$$\Psi_{\mu}(x, 0) = \Psi_{\mu}^0(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \Phi_0(x) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right\}. \quad (13)$$

Согласно формуле (10)

$$\Psi_{\mu}^0(x) = o \left( e^{\frac{x^2}{2\mu}} \right) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (14)$$

поэтому задача Коши (12), (13) имеет единственное решение, которое задается формулой

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu}(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}\right\} \Psi_{\mu}^0(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\mu}\left[\Phi_0(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2t}\right]\right\} d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь из формул (11) и (6) получаем выражение для  $u_{\mu}(x, t)$ :

$$u_{\mu}(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\xi}{t}\right) \exp\left\{-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right\} d\xi}, \quad (16)$$

где

$$\lambda(t, x, \xi) = \Phi_0(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2t}. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что функция  $\lambda(t, x, \xi)$  — непрерывная функция всех своих аргументов при  $t < 0$ . На основании условия (10) мы можем утверждать, что при любых фиксированных  $x, t \geq 0$

$$\lambda(t, x, \xi) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (18)$$

Значит, непрерывная функция  $\lambda(t, x, \xi)$  принимает при фиксированных  $x, t > 0$  свое наименьшее значение  $\lambda_{\min}(x, t)$  на некотором ограниченном множестве значений переменного  $\xi$ . Обозначим это множество через  $m(x, t)$ .

Введем в рассмотрение функцию  $v(t, x, \xi)$ :

$$v(t, x, \xi) = \lambda(t, x, \xi) - \lambda_{\min}(x, t) = \Phi_0(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2t} - \lambda_{\min}(x, t). \quad (19)$$

Согласно определению величины  $\lambda_{\min}(x, t)$  как абсолютного минимума по переменному  $\xi$  функции  $\lambda(t, x, \xi)$ , мы с очевидностью заключаем, что

$$v(t, x, \xi) \geq 0; \quad (20)$$

при этом знак равенства в (20) имеет место лишь в случае, когда  $\xi$  принадлежит множеству  $m(x, t)$ . Умножая числитель и знаменатель формулы (16) на  $\exp\left\{+\frac{\lambda_{\min}(x, t)}{2\mu}\right\}$ , придадим ей

следующий вид:

$$u_{\mu}(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x - \xi}{t} \right) \exp \left\{ -\frac{v(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (21)$$

Пусть  $\xi^-(x, t)$  и  $\xi^+(x, t)$  — соответственно точная нижняя и точная верхняя грани множества  $m(x, t)$ :

$$\xi^-(x, t) = \inf m(x, t), \quad \xi^+(x, t) = \sup m(x, t), \quad \xi^-(x, t) \leq \xi^+(x, t). \quad (22)$$

Поясним графически определение множества  $m(x, t)$  и его граней  $\xi^-$ ,  $\xi^+$ . Для этого введем новую функцию  $\eta(t, x, \xi)$ :

$$\eta(t, x, \xi) = \lambda(t, x, \xi) - \frac{x^2}{2t} = \eta(t, 0, \xi) - \xi \frac{x}{t}. \quad (23)$$

Функции  $\lambda(t, x, \xi)$ ,  $v(t, x, \xi)$ ,  $\eta(t, x, \xi)$  принимают наименьшее значение при фиксированных  $x$ ,  $t > 0$  в одних и тех же точках  $\xi \in m(x, t)$ .

На рис. 4.15 в плоскости переменных  $\xi$ ,  $z$  изображены кривая  $z = \eta(t, 0, \xi)$  и некоторая прямая  $z = \frac{x}{t}\xi + c$ . Для

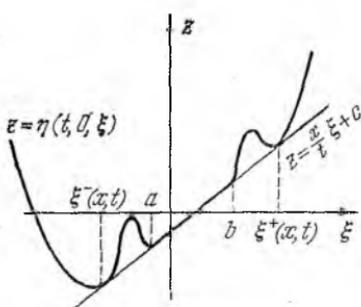


Рис. 4.15.

фиксированных  $x$ ,  $t > 0$  наклон этой прямой задан. Подберем такое число  $c$ , чтобы эта прямая коснулась снизу кривой  $z = \eta(t, 0, \xi)$ , нигде ее не пересекая. Тогда множество точек  $\xi$ , в которых  $\xi \frac{x}{t} + c = \eta(t, 0, \xi)$ , и составляет множество  $m(x, t)$ . В самом деле, если кривая  $z = \eta(t, 0, \xi)$  «опирается» на прямую  $z = \frac{x}{t}\xi + c$ , то это значит, что

$$\eta(t, 0, \xi) - \frac{x}{t}\xi = \eta(t, x, \xi) \text{ в точках,}$$

в которых  $\xi \frac{x}{t} + c = \eta(t, 0, \xi)$  принимает наименьшее значение.

Заметим, что число  $c$  совпадает с  $\eta_{\min}(x, t)$ .

На рис. 4.15 множество  $m(x, t)$  кроме граней  $\xi^-(x, t)$ ,  $\xi^+(x, t)$  содержит еще и отрезок  $a \leq \xi \leq b$ .

Установим теперь следующие свойства величин  $\xi^-$ ,  $\xi^+$ :

$$\xi^+(x, t) \leq \xi^-(x', t) \text{ при } x < x', \quad (24)$$

$$\xi^-(x - 0, t) = \xi^-(x, t), \quad \xi^+(x + 0, t) = \xi^+(x, t), \quad (25)$$

$$\xi^-(+\infty, t) = +\infty, \quad \xi^+(-\infty, t) = -\infty. \quad (26)$$

Для доказательства свойства (24) рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \eta(t, x + \Delta x, \xi) - \eta(t, x + \Delta x, \xi^+(x, t)) &= \\ &= \eta(t, x, \xi) - \eta(t, x, \xi^+(x, t)) - \frac{\Delta x}{t} [\xi - \xi^+(x, t)]. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу определения верхней грани

$$\eta(t, x, \xi) - \eta(t, x, \xi^+(x, t)) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \xi \leq \xi^+(x, t), \\ > 0 & \text{при } \xi > \xi^+(x, t). \end{cases} \quad (28)$$

Пусть  $\Delta x > 0$ . Из формул (27) и (28) следует, что

$$\eta(t, x + \Delta x, \xi) - \eta(t, x + \Delta x, \xi^+(x, t)) \begin{cases} > 0 & \text{при } \xi < \xi^+(x, t), \\ = 0 & \text{при } \xi = \xi^+(x, t). \end{cases} \quad (29)$$

Согласно определению  $\xi^-(x, t)$

$$\eta(t, x + \Delta x, \xi^-(x + \Delta x, t)) - \eta(t, x + \Delta x, \xi^+(x, t)) \leq 0 \quad (30)$$

$(\Delta x > 0).$

Сопоставляя формулу (30) с (29), видим, что  $\xi^-(x + \Delta x, t) \geq \xi^+(x, t)$ . Это и доказывает неравенство (24).

Доказательство неравенства (24) иллюстрируется геометрически. В самом деле, если  $x' > x$ , то наклон опорной прямой  $z = \xi \frac{x'}{t} + c'$  больше наклона прямой  $z = \xi \frac{x}{t} + c$  и из рис. 4.15 сразу следует неравенство (24).

Подобным же образом легко устанавливаются свойства (25) и (26).

Отметим, что, так как функция  $\lambda(t, x, \xi)$  является непрерывной функцией всех своих переменных при  $t > 0$ , то и ее абсолютный минимум  $\lambda_{\min}(x, t)$  по переменному  $\xi$  является непрерывной функцией переменных  $x, t$ .

Вернемся к формуле (21) и покажем, что для любых  $x, t > 0$

$$\frac{x - \xi^+(x, t)}{t} \leq \liminf_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ x' \rightarrow x \\ t' \rightarrow t}} u_\mu(x', t') \leq \limsup_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ x' \rightarrow x \\ t' \rightarrow t}} u_\mu(x', t') \leq \frac{x - \xi^-(x, t)}{t}. \quad (31)$$

Из формул (31), в частности, следует, что если в точке  $x, t (t > 0)$  выполнено условие  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ , то в этой точке существует предел

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ x' \rightarrow x \\ t' \rightarrow t}} u_\mu(x', t') = \frac{x - \xi^-(x, t)}{t} = \frac{x - \xi^+(x, t)}{t}. \quad (32)$$

переходя к доказательству формул (31), для краткости обозначим  $\xi^+(x, t) = \xi^+$ ,  $\xi^-(x, t) = \xi^-$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольно малое положительное число. Выберем положительные числа  $a, b$  столь малыми, чтобы для всех значений  $\xi, x', t'$ , удовлетворяющих условиям

$$|x' - x| + |t' - t| < a, \quad \xi^- - 2b < \xi < \xi^+ + 2b, \quad 0 < a < t, \quad (33)$$

выполнялись неравенства

$$l = \frac{x - \xi^+}{t} - \varepsilon < \frac{x' - \xi}{t'} < \frac{x - \xi^-}{t} + \varepsilon = L. \quad (34)$$

функции  $\xi^-(x, t)$  и  $\xi^+(x, t)$  полунепрерывны соответственно слева и справа, поэтому, если величина  $a$  достаточно мала, то при выполнении неравенств (33) и (34) можно считать выполненными также следующие:

$$\xi^- - b < \xi^-(x', t') \leq \xi^+(x', t') < \xi^+ + b. \quad (35)$$

Напишем формулу (21) в применении к точке  $x', t'$ :

$$u_\mu(x', t') = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' - \xi}{t'} \exp \left\{ -\frac{\nu(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\nu(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (36)$$

Вспомогательным образом оценим в формуле (36) числитель:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' - \xi}{t'} \exp \left\{ -\frac{\nu(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi = \\ & = l \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi > \\ & > l \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi + \int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi + \\ & \quad + \int_{\xi^+ + 2b}^{\infty} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' - \xi}{t'} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi - \int_{\xi^- - 2b}^{\xi^+ + 2b} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi. \quad (37) \end{aligned}$$

При получении (37) мы пользовались условием (34). Совершенно аналогично получаем для числителя оценку сверху

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' - \xi}{t'} \exp \left\{ -\frac{v(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi < \\ & < L \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi + \int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - L \right] \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi + \\ & \quad + \int_{\xi^+ + 2b}^{\infty} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - L \right] \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi. \quad (38) \end{aligned}$$

Разделив оценку, полученную в (37), на знаменатель в формуле (36), очевидно, получим

$$\begin{aligned} u_{\mu}(x', t') > l + \frac{\int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{v(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi} + \\ & \quad + \frac{\int_{\xi^+ + 2b}^{\infty} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (39) \end{aligned}$$

Покажем, что последние два слагаемых в неравенстве (39) стремятся к нулю при  $\mu \rightarrow 0$  равномерно по  $x', t'$ , если последние удовлетворяют ограничению (33). Замечая, что линейная функция  $\left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right]$  на полуинтервалах  $(-\infty, \xi^- - 2b)$  и  $(\xi^+ + 2b, +\infty)$  оценивается по модулю соответственно величинами  $\omega(\xi^- - \xi)$  и  $\omega(\xi - \xi^+)$ , а величина  $\omega$  может быть выбрана независимо от  $x', t'$ , если последние удовлетворяют (33), запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi} < \frac{\int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \omega(\xi^- - \xi) \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\xi^-(x', t')} \exp \left\{ -\frac{v}{2\mu} \right\} d\xi}, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\frac{\left| \int_{\xi^+ + 2b}^{\infty} \left[ \frac{x' - \xi}{t'} - l \right] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi} < \frac{\int_{\xi^+ + 2b}^{\infty} \omega [\xi - \xi^+] \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{\xi^+ (x', t')}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (41)$$

Для всех  $x', t'$ , удовлетворяющих (33),  $\nu(t', x', \xi) > 0$  при  $\xi < < \xi^- - 2b$  и  $\nu(t', x', \xi) = o\left(\frac{\xi^2}{2t'}\right)$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Поэтому существует число  $A > 0$  такое, что

$$\nu(t', x', \xi) > A(\xi - \xi^-)^2 \text{ при } \xi \leq \xi^- - 2b.$$

Используя эту оценку, напомним для числителя в формуле (40)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} \omega [\xi^- - \xi] \exp \left\{ -\frac{\nu(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi < \\ & < \omega \int_{-\infty}^{\xi^- - 2b} (\xi^- - \xi) \exp \left\{ -\frac{A}{2\mu} (\xi - \xi^-)^2 \right\} d\xi = \frac{\omega\mu}{A} \exp \left\{ -\frac{2Ab^2}{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

С другой стороны, так как  $\nu(t', x', \xi^-(t', x')) = 0$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что  $\nu(t', x', \xi) < 4Ab^2$  при всех  $\xi$  из интервала  $\xi^-(x', t') - \delta \leq \xi \leq \xi^-(x', t')$ . Поэтому знаменатель в формуле (40) может быть оценен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\xi^-(x', t')} \exp \left\{ -\frac{\nu(t', x', \xi)}{2\mu} \right\} d\xi > \int_{\xi^-(x', t') - \delta}^{\xi^-(x', t')} \exp \left\{ -\frac{2Ab^2}{\mu} \right\} d\xi = \\ & = \delta \exp \left\{ -\frac{2Ab^2}{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Правая часть неравенства (40) не превосходит отношения правой части (42) к (43), т. е. не превосходит величины

$$\frac{\omega\mu}{A\delta},$$

причем эта оценка имеет место равномерно для всех  $x', t'$ , удовлетворяющих (33). Так как аналогичная оценка легко получается и для второго члена в (39), то можно записать:

$$u_{\mu}(x', t') > l + O(\mu). \quad (44)$$

Аналогичные выкладки для (38) приводят к неравенству

$$u_{\mu}(x', t') < L + O(\mu). \quad (45)$$

Оценки (44), (45) имеют место равномерно для  $x', t'$ , удовлетворяющих (33). Из определения чисел  $l$  и  $L$  (34) и произвольности величины  $\varepsilon$  следует, что оценки (44), (45) доказывают формулы (31) и (32).

Определим обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с помощью формулы

$$u(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{\mu}(x, t) \quad (46)$$

по всех точках  $x, t$ , в которых существует этот предел, т. е.  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ . Функция  $u(x, t)$  в этих точках непрерывна по совокупности аргументов  $x, t$ .

В точках, в которых  $\xi^+(x, t) \neq \xi^-(x, t)$ , для определенности положим

$$u(x, t) = u(x - 0, t) = \frac{x - \xi^-(x, t)}{t}.$$

Пусть  $\xi^-(x, t) \neq \xi^+(x, t)$  в какой-либо точке  $(x, t)$ . Тогда из формул (31) и (24) следует, что

$$u(x - 0, t) > u(x + 0, t), \quad (47)$$

так как

$$u(x - 0, t) = \frac{x - \xi^-(x, t)}{t}, \quad u(x + 0, t) = \frac{x - \xi^+(x, t)}{t}. \quad (48)$$

Неравенство (47) показывает, что обобщенное решение  $u(x, t)$ , заданное формулой (46), удовлетворяет условию устойчивости, которое было введено в § 1.

Пусть теперь  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t) = \xi(x, t)$ . Если  $\xi = \xi(x, t)$  — точка непрерывности начальной функции  $u_0(\xi)$ , то так как  $\lambda(t, x, \xi)$  принимает в этой точке минимальное значение, то

$$u_0(\xi(x, t)) = \frac{x - \xi(x, t)}{t}, \quad (49)$$

$$u'_0(\xi(x, t) - 0) \geq -\frac{1}{t}, \quad u'_0(\xi(x, t) + 0) \geq -\frac{1}{t} \quad (50)$$

(мы считаем, что точка  $\xi = \xi(x, t)$  может быть точкой разрыва производной функции  $u_0(\xi)$ ). Если же точка  $\xi = \xi(x, t) = \xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$  — точка разрыва начальной функции  $u_0(\xi)$ , то

$$u_0(\xi(x, t) - 0) < u_0(\xi(x, t) + 0). \quad (51)$$

Пусть теперь  $\xi^-(x, t) \neq \xi^+(x, t)$ . Тогда

$$u_0(\xi^-(x, t) - 0) = u(x - 0, t) \leq u_0(\xi^-(x, t) + 0), \quad (52)$$

$$u_0(\xi^+(x, t) - 0) \leq u(x + 0, t) = u_0(\xi^+(x, t) + 0). \quad (53)$$

Наконец, отметим еще одно свойство решения  $u(x, t)$ . Пусть  $x = x(t)$  — линия разрыва  $u(x, t)$ . Тогда

$$\lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ t'' \rightarrow t+0}} \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'} = \frac{1}{2} [u(x(t) - 0, t) + u(x(t) + 0, t)]. \quad (54)$$

Это свойство показывает, что кусочно-гладкие решения  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) удовлетворяют условию Гюгонио для уравнения (1).

Теперь перейдем к выяснению вопроса о том, в каком смысле функция  $u(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_\mu(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\ln 2 \sqrt{\pi \mu t}}{1/2\mu} - \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\ln \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{1/2\mu}.$$

Применяя в этом равенстве правило Лопиталья, получим

$$\Phi(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t, x, \xi) \exp \left\{ -\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (55)$$

Из формулы (55) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \lambda_{\min}(x, t) = \lambda(t, x, \xi^-(x, t)) = \lambda(t, x, \xi^+(x, t)) = \\ &= \inf_{\xi} \left[ \Phi_0(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2t} \right] = \inf_{\xi} \mathcal{G}(t, x, \xi), \quad (56) \\ \mathcal{G}(t, x, \xi) &= \Phi_0(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2t}. \end{aligned}$$

Доказательство (56) аналогично доказательству неравенств (31). Отсюда следует, что  $\Phi(x, t)$  — непрерывная в полуплоскости  $t > 0$  функция переменных  $x, t$ . Так как при  $t \rightarrow 0$   $\xi^-(x, t) \rightarrow x$ ,  $\xi^+(x, t) \rightarrow x$ , то из (56) следует, что  $\Phi(x, t)$  непрерывна также и при  $t = 0$ , т. е. непрерывна при  $t \geq 0$ .

Рассмотрим произвольную точку  $(x, t)$  полуплоскости  $t > 0$ , в которой  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ . Очевидно, что существует окрестность точки  $(x, t)$ , в которой  $\xi^-(x', t') = \xi^+(x', t')$  для всех ее точек  $(x', t')$ . Согласно (6)

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} = u_\mu, \quad \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} - \frac{u_\mu^2}{2}. \quad (57)$$

Так как последовательность  $u_\mu$  равномерно сходится в этой окрестности к  $u(x, t)$ , а  $\Phi_\mu(x, t) \Rightarrow \Phi(x, t)$  по доказанному выше, то, очевидно,  $\Phi(x, t)$  дифференцируема в точке  $(x, t)$ ; при этом

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} = u(x, t). \quad (58)$$

Дифференцируя формулу (16) по переменному  $x$ , находим

$$\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \frac{1}{2} [u_\mu^2 - \overline{u_\mu^2}] + \frac{\mu}{t}, \quad (59)$$

где через  $\overline{u_\mu^2}$  обозначена величина

$$\overline{u_\mu^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x - \xi}{t} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu} \right\} d\xi}. \quad (60)$$

В точках  $(x, t)$ , в которых  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ , имеем

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu^2 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \overline{u_\mu^2} = \left[ \frac{x - \xi(x, t)}{t} \right]^2. \quad (61)$$

Поэтому в рассматриваемой окрестности точки  $(x, t)$ , согласно (57), последовательность  $\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t}$  равномерно сходится при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( -\frac{u_\mu^2}{2} \right) = -\frac{u^2(x, t)}{2}. \quad (62)$$

Следовательно, функция  $\Phi(x, t)$  дифференцируема в рассматриваемой точке  $(x, t)$  по переменному  $t$ , при этом

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{u^2(x, t)}{2}. \quad (63)$$

Итак, во всех точках  $(x, t)$ , для которых  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ , функция  $\Phi(x, t)$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (64)$$

Согласно формулам (25) функции  $\xi^-(x, t)$ ,  $\xi^+(x, t)$  — монотонно возрастающие функции переменного  $x$  — полунепрерывны по переменному  $x$  и ограничены при конечных  $x, t$ . Отсюда следует, что на любом отрезке прямой  $t = \text{const}$  множество точек, в которых  $\xi^-(x, t) \neq \xi^+(x, t)$ , не более чем счетно. Отсюда, далее, следует, что в любой области  $G$  переменных  $(x, t)$  существует не более счетного числа линий, вне которых  $\Phi(x, t)$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (64).

Так как  $\xi^-(x, t) \rightarrow x$ ,  $\xi^+(x, t) \rightarrow x$  при  $t \rightarrow 0$ , то

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi.$$

В силу непрерывности  $\Phi(x, t)$  заключаем, что

$$\int_0^x u(\xi, t) d\xi \rightarrow \int_0^x u_0(\xi) d\xi \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (65)$$

Соотношения (64), (65) показывают, что функция  $u(x, t)$ , заданная формулой (46), является обобщенным решением задачи Коши (1), (2).

Покажем еще одним способом, что заданная формулой (46) функция  $u(x, t)$  является обобщенным решением задачи Коши (1), (2). Интегрируя уравнение (3) по области  $G$  полуплоскости  $t > 0$ , ограниченной замкнутым контуром  $C$ , очевидно, получим

$$\oint_C u_\mu dx - \frac{u_\mu^2}{2} dt = - \oint_C \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} dt. \quad (66)$$

Согласно (59)  $\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \rightarrow 0$  в точках, в которых  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ .

Поэтому, если мы предположим, что на контуре  $C$  мера множества точек  $(x, t)$ , в которых  $\xi^-(x, t) \neq \xi^+(x, t)$ , равна нулю, то при  $\mu \rightarrow 0$  интеграл  $\oint_C \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} dt$ , стоящий в правой части (66), стремится к нулю.

При этом же предположении интеграл в левой части (66) при  $\mu \rightarrow 0$  сохраняет смысл, так как на контуре  $C$  почти всюду  $u_\mu(x, t) \rightarrow u(x, t)$ . Поэтому, переходя в (66) к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , получим

$$\oint_C u(x, t) dx - \frac{u^2(x, t)}{2} dt = 0. \quad (67)$$

Итак, для произвольного замкнутого контура  $C$ , на котором мера множества точек разрыва  $u(x, t)$  равна нулю, функция  $u(x, t)$  удовлетворяет интегральному закону сохранения (67) для уравнения (1).

Так как функция  $u(x, t)$  принимает в смысле (65) начальные значения (2), то  $u(x, t)$  является устойчивым обобщенным решением задачи Коши (1), (2) также и в смысле интегрального закона сохранения (67).

Теперь заметим, что если в точках разрыва функции  $u(x, t)$  приписано определенное значение, например

$$u(x, t) = u(x - 0, t), \quad (68)$$

то равенство (67) справедливо вообще для любого замкнутого контура  $C$ , лежащего в полуплоскости  $t \geq 0$ .

В самом деле, контур  $C$  можно рассматривать как предел контуров  $C'$ , на которых мера множества точек разрыва функции  $u(x, t)$  равна нулю.

Для каждого такого контура  $C'$  равенство (67) выполнено согласно предыдущему. Если к каждой точке разрыва  $(x, t)$  функции  $u(x, t)$  соответствующая точка  $(x', t')$  контура  $C'$  стремится слева, т. е.  $x' < x$ ,  $x' \rightarrow x$ , то  $u(x', t') \rightarrow u(x, t)$  согласно (68) и, переходя к пределу в равенстве (67), мы приходим к выводу, что оно выполнено для произвольного контура  $C$ .

Умножая уравнение (3) на произвольную гладкую финитную функцию  $g(x, t)$  и интегрируя результат по полуплоскости  $t \geq 0$ , получим

$$\iint_{t \geq 0} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} u_\mu + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{u_\mu^2}{2} \right] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx = \\ = \iint_{t \geq 0} \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} dx dt. \quad (69)$$

Так как почти всюду  $u_\mu \rightarrow u(x, t)$ ,  $u_\mu^2 \rightarrow u^2(x, t)$  и, согласно (64),  $\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \rightarrow 0$ , то, переходя в (69) к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , получаем

$$\iint_{t \geq 0} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{u^2(x, t)}{2} \right] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx = 0. \quad (70)$$

Равенство (70) показывает, что построенная функция  $u(x, t)$  является обобщенным решением задачи Коши (1), (2) также и в смысле последнего из трех определений, которые вводились в § 1. Впервые подобное определение обобщенного решения квазилинейных уравнений было предложено Э. Хопфом.

### 3. Задача Коши для уравнения $u_t + \varphi_x = 0$ при условии $\varphi''_{uu} > 0$ .

Пусть функция  $\varphi(u, x, t)$  обладает двумя первыми непрерывными производными по всем своим переменным при  $t \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  и любых ограниченных  $u$ . Будем считать, что  $\varphi''_{uu}(u, x, t) > 0$  в этой области переменных  $x, t, u$  (случай  $\varphi''_{uu}(u, x, t) < 0$  рассматривается совершенно аналогично).

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

поставим начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

предполагая функцию  $u_0(x)$  кусочно-непрерывной и обладающей кусочно-непрерывной первой производной при любых ограниченных значениях переменного  $x$ .

Задача Коши (1), (2) была рассмотрена и решена впервые О. А. Олейник, причем даже в более широком классе начальных функций — ограниченных и измеримых функций  $u_0(x)$ . Наше рассмотрение задачи Коши (1), (2) будет менее детальным и несколько отличным от рассмотрения О. А. Олейник.

Для характеристической системы уравнения (1)

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'_u(u, x, t), \quad \frac{du}{dt} = -\varphi'_x(u, x, t) \quad (3)$$

рассмотрим задачу Коши с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0. \quad (4)$$

Решение этой задачи Коши обозначим буквами

$$x(t) = X(t, x_0, u_0), \quad u(t) = U(t, x_0, u_0). \quad (5)$$

Эти функции, согласно их определению, удовлетворяют условиям (4), которые мы перепишем теперь в виде

$$X(0, x_0, u_0) \equiv x_0, \quad U(0, x_0, u_0) \equiv u_0. \quad (6)$$

Будем предполагать, что функции  $X$ ,  $U$  остаются ограниченными при любых конечных  $x_0$ ,  $u_0$  и  $t > 0$ . Условия, при которых это имеет место, носят сравнительно сложный характер, и мы не будем их приводить.

Если  $X(t, x_0, u_0)$ ,  $U(t, x_0, u_0)$  ограничены, то они имеют непрерывные первые производные по всем своим переменным. Это следует из непрерывной дифференцируемости правых частей характеристической системы (3).

Наконец, мы предположим еще, что

$$X(t, x_0, u_0) \rightarrow \pm \infty \quad \text{при} \quad x_0 \rightarrow \pm \infty. \quad (7)$$

Вторая задача, которую мы рассмотрим для характеристической системы (3), есть краевая задача со следующими условиями.

Требуется найти решение  $x(t) = \bar{X}(t, \tau, \xi, x_0)$ ,  $u(t) = \bar{U}(t, \tau, \xi, x_0)$  характеристической системы (3), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$x(0) = \bar{X}(0, \tau, \xi, x_0) \equiv x_0, \quad x(\tau) = \bar{X}(\tau, \tau, \xi, x_0) \equiv \xi, \quad (8)$$

где  $x_0$ ,  $\xi$  — произвольные числа, а  $\tau > 0$ .

Будем по-прежнему предполагать, что эта задача имеет единственное ограниченное решение при произвольных  $x_0$ ,  $\xi$ ,  $\tau > 0$ , не выписывая сложных достаточных условий, при которых это имеет место. Однако если это предположено, то функции  $\bar{X}$ ,  $\bar{U}$  непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Перечислим следующие очевидные соотношения:

$$\bar{X}(0, \tau, \xi, x_0) \equiv x_0, \quad \bar{X}(\tau, \tau, \xi, x_0) \equiv \xi, \quad (9)$$

$$X(t, x_0, \bar{U}(0, \tau, \xi, x_0)) \equiv \bar{X}(t, \tau, \xi, x_0), \quad (10)$$

$$U(t, x_0, \bar{U}(0, \tau, \xi, x_0)) \equiv \bar{U}(t, \tau, \xi, x_0). \quad (11)$$

Для уравнения Э. Хопфа, рассмотренного в предыдущем пункте,

$$\varphi(u, x, t) = \frac{u^2}{2}$$

и

$$X(t, x_0, u_0) = x_0 + u_0 t, \quad U(t, x_0, u_0) = u_0, \quad (12)$$

$$\bar{X}(t, \tau, \xi, x_0) = x_0 + \frac{\xi - x_0}{\tau} t, \quad \bar{U}(t, \tau, \xi, x_0) = \frac{\xi - x_0}{\tau}. \quad (13)$$

Из формул (13) легко можем заметить, что решение  $u(x, t)$  задачи Коши (2.2.1), (2.2.2), заданное формулами (2.2.48), может быть также записано в виде

$$\left. \begin{aligned} u(x-0, t) &= \bar{U}(t, t, x, \xi^-(x, t)), \\ u(x+0, t) &= \bar{U}(t, t, x, \xi^+(x, t)), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где величины  $\xi^-(x, t)$  и  $\xi^+(x, t)$  определены (см. п. 2) как точные нижняя и верхняя грани множества значений  $\xi$ , на котором функция

$$\lambda(t, x, \xi) = \Phi_0(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2t} = \int_0^{\xi} u_0(\eta) d\eta + \frac{(x - \xi)^2}{2t}$$

принимает минимальное значение при фиксированных  $x, t$ . Заметив, что для уравнения Э. Хопфа

$$\begin{aligned} I(t, x, \xi) &= \lambda(t, x, \xi) - \frac{x^2}{2t} = \int_0^{\xi} [u_0(\eta) - \bar{U}(0, t, x, \eta)] d\eta = \\ &= \int_0^{\xi} \left[ u_0(\eta) + \frac{\eta - x}{t} \right] d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

можем утверждать, что в этом частном случае величины  $\xi^-(x, t)$  и  $\xi^+(x, t)$  могут быть определены также как точная нижняя и точная верхняя грани множества значений  $\xi$ , на котором функция

$$I(t, x, \xi) = \int_0^{\xi} [u_0(\eta) - \bar{U}(0, t, x, \eta)] d\eta \quad (16)$$

принимает наименьшее значение при фиксированных значениях переменных  $x, t > 0$ .

Как показала О. А. Олейник, формулы (14) дают решение задачи Коши (1), (2) при требованиях, которые мы наложили выше на функцию  $\varphi(u, x, t)$ , если под  $\xi^-(x, t)$  и  $\xi^+(x, t)$  понимать теперь точную верхнюю и точную нижнюю грани множества значений  $\xi$ , на котором  $I(t, x, \xi)$  принимает наименьшее значение.

Из требований, наложенных на  $\varphi(u, x, t)$ , вытекает, что

$$\bar{U}(0, t, x, \xi) \rightarrow \mp \infty \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm \infty, \quad (17)$$

а так как мы предполагаем начальную функцию  $u_0(x)$  ограниченной, то

$$I(t, x, \xi) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Значит, непрерывная функция  $I(t, x, \xi)$  при фиксированных значениях  $x, t > 0$  принимает наименьшее значение  $I_{\min}(x, t)$  на некотором ограниченном множестве  $m(x, t)$  значений переменного  $\xi$ . Точную нижнюю и точную верхнюю грани этого множества обозначим соответственно  $\xi^-(x, t)$ ,  $\xi^+(x, t)$ . Величины  $\xi^-(x, t)$ ,  $\xi^+(x, t)$  удовлетворяют соотношениям (2.2.24), (2.2.25) и (2.2.26). Доказательство проводится аналогично п. 2 и здесь опускается. Обобщенное решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2), определенное формулами (14), удовлетворяет неравенству (2.2.47).

Введем в рассмотрение функцию

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \int_0^\xi u_0(\eta) d\eta + \int_0^t [\bar{U}\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) - \varphi(\bar{U}, \bar{X}, \tau)] d\tau, \quad (19)$$

где для краткости опущены аргументы у функций  $\bar{U} = \bar{U}(\tau, t, x, \xi)$ ,  $\bar{X} = \bar{X}(\tau, t, x, \xi)$ . Продифференцируем подинтегральное выражение во втором члене формулы (19) по переменному  $\xi$ . Мы получим

$$\begin{aligned} [\bar{U}\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) - \varphi(\bar{U}, \bar{X}, \tau)]'_\xi &= \bar{U}'_\xi \varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) + \bar{U} [\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau)]'_\xi - \\ &- \varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) \bar{U}'_\xi - \varphi'_x(\bar{U}, \bar{X}, \tau) \bar{X}'_\xi = \\ &= \bar{U} [\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau)]'_\xi - \varphi'_x(\bar{U}, \bar{X}, \tau) \bar{X}'_\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Но  $\bar{U}, \bar{X}$  — решение характеристической системы (3), поэтому

$$\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) = \bar{X}'_\tau, \quad -\varphi'_x(\bar{U}, \bar{X}, \tau) = \bar{U}'_\tau. \quad (21)$$

Подставляя формулы (21) в (20), получим

$$[\bar{U}\varphi'_u - \varphi]'_\xi = \bar{U}\bar{X}''_{\tau\xi} + \bar{U}'_\tau \bar{X}'_\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{U}(\tau, t, x, \xi) \bar{X}'_\xi(\tau, t, x, \xi)].$$

Подставляя это выражение в формулу (19), найдем

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \int_0^{\xi} u_0(\eta) d\eta + \int_0^t \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{U}(\tau, t, x, \eta) \bar{X}'_{\eta}(\tau, t, x, \eta)] d\tau d\eta + \\ + \int_0^t [\bar{U}_0 \Phi'_u(\bar{U}_0, \bar{X}_0, \tau) - \Phi(\bar{U}_0, \bar{X}_0, \tau)] d\tau, \quad (22)$$

где

$$\bar{U}_0 = \bar{U}(\tau, t, x, 0), \quad \bar{X}_0 = \bar{X}(\tau, t, x, 0).$$

Рассмотрим второй член в формуле (22):

$$\int_0^t \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{U}(\tau, t, x, \eta) \bar{X}'_{\eta}(\tau, t, x, \eta)] d\tau d\eta = \\ = \int_0^{\xi} \{ \bar{U}(t, t, x, \eta) \bar{X}'_{\eta}(t, t, x, \eta) - \bar{U}(0, t, x, \eta) \bar{X}'_{\eta}(0, t, x, \eta) \} d\eta.$$

Но согласно формулам (8)  $\bar{X}'_{\eta}(0, t, x, \eta) = 1$ ,  $\bar{X}_{\eta}(t, t, x, \eta) = 0$ . Поэтому

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \int_0^{\xi} [u_0(\eta) - \bar{U}(0, t, x, \eta)] d\eta + F(x, t), \quad (23)$$

где

$$F(x, t) = \int_0^t [\bar{U}_0 \Phi'_u(\bar{U}_0, \bar{X}, \tau) - \Phi(\bar{U}_0, \bar{X}, \tau)] d\tau. \quad (24)$$

Формулы (23), (19) дают новое представление для  $I(t, x, \xi)$ , из которого мы заключаем, что при фиксированных  $x, t > 0$  непрерывная функция  $\mathcal{G}(t, x, \xi)$  принимает наименьшее значение на том же множестве  $m(x, t)$  переменного  $\xi$ , что и функция  $I(t, x, \xi)$ . Значит, функция

$$\Phi(x, t) = \mathcal{G}(t, x, \xi^-(x, t)) = \mathcal{G}(t, x, \xi^+(x, t)) = \inf_{\xi} \mathcal{G}(t, x, \xi) \quad (25)$$

является однозначной и непрерывной функцией переменных  $x, t$ .

Из формул (25) и (19) заключаем, что непрерывная функция  $\Phi(x, t)$  принимает при  $t=0$  следующие значения:

$$\Phi(x, 0) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi = \Phi_0(x). \quad (26)$$

Так как функция  $\mathcal{G}(t, x, \xi)$  — липшиц-непрерывная функция всех своих аргументов в любой ограниченной области переменных  $t > 0, x, \xi, t, e$ .

$$|\mathcal{G}(t + \Delta t, x + \Delta x, \xi + \Delta \xi) - \mathcal{G}(t, x, \xi)| \leq M \{|\Delta t| + |\Delta x| + |\Delta \xi|\}, \quad (27)$$

то тем же свойством обладает и ее абсолютный минимум по переменному  $\xi$  — функция  $\Phi(x, t)$ , т. е.

$$|\Phi(x + \Delta x, t + \Delta t) - \Phi(x, t)| \leq \bar{M} \{|\Delta x| + |\Delta t|\}. \quad (28)$$

Липшиц-непрерывная функция  $\Phi(x, t)$  обладает почти всюду непрерывными производными по переменным  $x, t$ .

Вычислим эти производные пока формально. Мы имеем

$$\Phi(x, t) = \int_0^{\xi(x, t)} u_0(\eta) d\eta + \int_0^t [\bar{U}\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) - \varphi(\bar{U}, \bar{X}, \tau)] d\tau, \quad (29)$$

где по-прежнему обозначаем  $\xi(x, t) = \xi^-(x, t)$ ,  $\bar{U} = \bar{U}(\tau, t, x, \xi(x, t))$ .

Дифференцируя (29) по переменному  $x$ , получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_0(\xi(x, t)) \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} [\bar{U}\varphi'_u - \varphi] d\tau. \quad (30)$$

Аналогично предыдущему

$$\frac{\partial}{\partial x} [\bar{U}\varphi'_u(\bar{U}, \bar{X}, \tau) - \varphi(\bar{U}, \bar{X}, \tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{U}\bar{X}'_x), \quad (31)$$

где

$$\bar{X}'_x = \frac{\partial}{\partial x} \bar{X}(\tau, t, x, \xi(x, t)).$$

Подставляя (31) в (30), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = & u_0(\xi(x, t)) \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} + \bar{U}(t, t, x, \xi(x, t)) \bar{X}'_x(t, t, x, \xi(x, t)) - \\ & - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t)) \bar{X}'_x(0, t, x, \xi(x, t)). \end{aligned} \quad (32)$$

Но из формул (8) следует, что

$$\bar{X}'_x(0, t, x, \xi(x, t)) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}, \quad X'_x(t, t, x, \xi(x, t)) = 1, \quad (33)$$

поэтому (32) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = & [u_0(\xi(x, t)) - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} + \bar{U}(t, t, x, \xi(x, t)) = \\ = & [u_0(\xi(x, t)) - U(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} + u(x, t). \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичные выкладки приводят к формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= [u_0(\xi(x, t)) - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} - \varphi(\bar{U}, \bar{X}, t)|_{\tau=t} = \\ &= [u_0(\xi(x, t)) - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} - \varphi(u(x, t), x, t). \end{aligned} \quad (35)$$

Формулы (34) были получены нами формально, и мы предполагали при этом существование производных  $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}$ .

Но эти производные существуют в точках  $(x, t)$ , для которых  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ , независимо от того, дифференцируема или нет в точке  $\xi = \xi^+(x, t)$  начальная функция  $u_0(\xi)$ . Строгое обоснование этих формул несложно, но громоздко. Например, обоснование формул (34), (35) может быть получено, если рассматривать  $u_0(x)$  как предел непрерывно дифференцируемых функций. Теперь, однако, легко заметить, что если  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$ , то выражения

$$\begin{aligned} [u_0(\xi(x, t)) - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}, \\ [u_0(\xi(x, t)) - \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))] \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

обращаются в нуль\*), и формулы (34), (35) при этом условии превращаются в более простые:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u(x, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\varphi(u(x, t), x, t). \quad (36)$$

Если же  $\xi^-(x, t) \neq \xi^+(x, t)$ , то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x-0, t) = u(x-0, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x+0, t) = u(x+0, t). \quad (37)$$

Итак, почти всюду существуют производные  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , при этом они вычисляются по формулам (36). Отсюда следует, что почти всюду непрерывная функция  $\Phi(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, x, t\right) = 0 \quad (38)$$

и принимает начальные значения (26).

\*) Если  $\xi^-(x, t) = \xi^+(x, t)$  и  $u_0(\xi)$  непрерывна в точке  $\xi = \xi(x, t)$ , то  $u_0(\xi(x, t)) = \bar{U}(0, t, x, \xi(x, t))$ ; если же  $\xi(x, t)$  — точка разрыва  $u_0(\xi)$ , то  $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = 0$ .

Итак, мы заключаем, что решение  $u(x, t)$ , заданное формулой (14), для любого замкнутого контура  $C$  удовлетворяет тождеству

$$\oint_C u(x, t) dx - \varphi(u(x, t), x, t) dt = 0. \quad (39)$$

Так как, кроме того,  $u(x, t)$  принимает начальные значения (2) в следующем смысле:

$$\int_0^x u(x, t) dx \rightarrow \int_0^x u_0(x) dx \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (40)$$

и удовлетворяет условию устойчивости  $u(x-0, t) \geq u(x+0, t)$ , то разрывная функция  $u(x, t)$ , заданная формулой (14), является устойчивым обобщенным решением задачи Коши (1), (2).

Выше мы получили доказательство того, что формула (14) определяет обобщенное устойчивое решение задачи Коши (1), (2). Но это доказательство не показывает, каким путем мы пришли к формуле (14). Поэтому мы изложим здесь другой способ построения разрывного решения задачи Коши (1), (2), который автоматически приводит к формуле (14) для обобщенного решения. Этот метод применим при тех же предположениях о задаче (1), (2), которые были сделаны выше, и даже при отказе от некоторых из них. Однако в целях ясности и простоты изложения мы начнем с разбора случая гладкой начальной функции  $u_0(x)$ , а затем рассмотрим случай кусочно-гладкой и кусочно-непрерывной функции  $u_0(x)$ .

Итак, предположим, что функция  $\varphi(u, x, t)$  удовлетворяет нашим прежним требованиям, а начальная функция  $u_0(x)$  обладает непрерывной первой производной и ограничена при любых конечных значениях переменного  $x$ . До тех пор, пока уравнение

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0)) \quad (41)$$

имеет единственное решение  $x_0 = x_0(x, t)$  относительно  $x_0$ , как мы видели в главе 1, решение является непрерывным и задается формулой

$$u(x, t) = U(t, x_0, u_0(x_0(x, t))). \quad (42)$$

Если же уравнение (41) имеет более одного решения относительно  $x_0$  в некоторых точках или областях переменных  $x, t$ , то формула (42) определяет некоторую многозначную функцию переменных  $x, t$ , из ветвей которой должно быть построено обобщенное решение.

Существование обобщенного решения  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) предполагает существование липшиц-непрерывного по-

тенциала  $\Phi(x, t)$ , который почти всюду удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, x, t\right) = 0 \quad (43)$$

и начальному условию

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi. \quad (44)$$

Обозначим через  $\Phi = \tilde{\Phi}(t, x_0)$  геометрический интеграл задачи Коши (43), (44), т. е. уравнение интегральной поверхности этой задачи, выраженное в параметрах  $t, x_0$ , где  $x_0$  — точка, через которую проходит характеристика (41). Эта поверхность, вообще говоря, однозначно не проектируется на плоскость переменных  $x, t$ . Согласно п. 2 § 9 главы 1 функция  $\tilde{\Phi}(t, x_0)$  определяется с помощью интегрирования «уравнения полосы»

$$\frac{d\tilde{\Phi}(t, x_0)}{dt} = U\varphi'_u(U, X, t) - \varphi(U, X, t), \quad (45)$$

где

$$U = U(t, x_0, u_0(x_0)), \quad X = X(t, x_0, u_0(x_0)).$$

Учитывая начальное условие (44), интегрируем уравнение (45):

$$\tilde{\Phi}(t, x_0) = \Phi_0(x_0) + \int_0^t [U\varphi'_u(U, X, \tau) - \varphi(U, X, \tau)]_{t=\tau} d\tau. \quad (46)$$

В случае, когда уравнение (41) однозначно разрешимо относительно параметра  $x_0$ , потенциал  $\Phi(x, t)$  задается формулой

$$\Phi(X(t, x_0, u_0(x_0)), t) = \tilde{\Phi}(t, x_0) \quad (47)$$

либо явной формулой

$$\Phi(x, t) = \tilde{\Phi}(t, x_0(x, t)). \quad (48)$$

Если же зависимость (41) неоднозначно разрешается относительно  $x_0$ , формулы (47), (48) определяют многозначную функцию  $\tilde{\Phi}(x, t)$ , из ветвей которой должна быть построена однозначная и непрерывная функция  $\Phi(x, t)$  — потенциал обобщенного решения.

Фиксируем произвольное  $t > 0$  и рассмотрим поведение кривой

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0)) \quad (49)$$

в плоскости переменных  $x, x_0$  (рис. 4.16). Зависимость (49), очевидно, изображается некоторой непрерывной кривой, которая, однако, при достаточно большом значении аргумента  $t > 0$

не проектируется однозначно на прямую  $x_0 = 0$ . Кривая (49) всегда однозначно проектируется на прямую  $x = 0$ .

Поэтому мы можем считать, что каждой точке этой кривой соответствует при фиксированном значении переменного  $t$  определенное значение параметра  $x_0$ . Следовательно, можно считать, что на непрерывной кривой (49) заданы непрерывные функции  $U(t, x_0, u_0(x_0))$ ,  $\tilde{\Phi}(t, x_0)$  (как функции переменного  $x_0$ ).

Наша задача состоит в том, чтобы из ветвей многозначной функции (48) выбрать однозначную и непрерывную функцию — потенциал  $\Phi(x, t)$ . Покажем, как производится такое выделение, и установим попутно, что оно единственно.

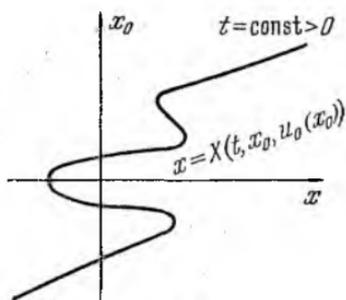


Рис. 4.16.

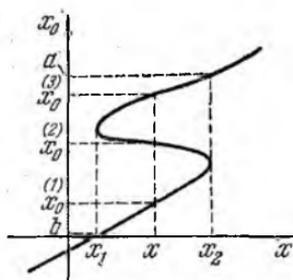


Рис. 4.17.

Пусть на некотором участке  $b < x_0 < a$  кривая (49) имеет по три точки пересечения с прямыми  $x = c$  при  $x_1 < c < x_2$ , т. е. трижды проектируется на отрезок  $x_1 \leq x \leq x_2$  оси  $x_0 = 0$  (рис. 4.17). Пусть  $x_1 < x < x_2$ , и пусть  $x_0 < x_0^{(1)} < x_0^{(2)} < x_0^{(3)}$  — значения переменного  $x_0$ , удовлетворяющие \*) равенству (49). Через  $u^{(1)}(x, t)$ ,  $u^{(2)}(x, t)$ ,  $u^{(3)}(x, t)$ ,  $\Phi^{(1)}(x, t)$ ,  $\Phi^{(2)}(x, t)$ ,  $\Phi^{(3)}(x, t)$  обозначим соответствующие значения функций  $U(t, x_0, u_0(x_0))$ ,  $\tilde{\Phi}(t, x_0)$ , т. е.

$$u^{(i)}(x, t) = U(t, x_0^{(i)}, u_0(x_0^{(i)})),$$

$$\Phi^{(i)}(x, t) = \tilde{\Phi}(t, x_0^{(i)}).$$

Для каждой из этих ветвей ввиду «условия полоски» (45) выполнены равенства

$$\frac{\partial \Phi^{(i)}(x, t)}{\partial x} = u^{(i)}(x, t). \tag{50}$$

Мы предполагали ранее, что краевая задача характеристиче-

\*) Кривая (49) может иметь вертикальные участки. В этом случае некоторым  $x$  может соответствовать бесконечное множество точек на кривой (49). Как мы увидим, это не повлияет на ход наших построений.

ской системы однозначно разрешима. Из этого предположения следует, что

$$\varphi'_u^{(1)}(u(x, t), x, t) > \varphi'_u^{(2)}(u(x, t), x, t) > \varphi'_u^{(3)}(u(x, t), x, t), \quad (51)$$

а так как  $\varphi''_{uu}(u, x, t) > 0$ , то и

$$u^{(1)}(x, t) > u^{(2)}(x, t) > u^{(3)}(x, t). \quad (52)$$

Согласно формуле (50) мы можем написать

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}(x, t)}{\partial x} > \frac{\partial \Phi^{(2)}(x, t)}{\partial x} > \frac{\partial \Phi^{(3)}(x, t)}{\partial x}. \quad (53)$$

На рис. 4.18 изобразим на участке  $[x_1, x_2]$  зависимость (48), которая, согласно нашему предположению, является трехзначной. Ветвь  $\Phi^{(1)}(x, t)$  определена при  $x \leq x_2$ , ветвь  $\Phi^{(2)}(x, t)$  — при  $x_1 \leq x \leq x_2$ ; при этом ввиду непрерывности функции  $\tilde{\Phi}(t, x_0)$  по переменному  $x_0$  имеем равенства

$$\Phi^{(1)}(x_2, t) = \Phi^{(2)}(x_2, t),$$

$$\Phi^{(2)}(x_1, t) = \Phi^{(3)}(x_1, t).$$

Учитывая, наконец, неравенства (53), приходим к выводу, что график зависимости (48) имеет вид, изображенный на рис. 4.18.

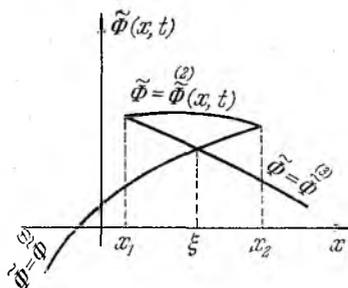


Рис. 4.18.

Итак, на участке  $x_1 \leq x \leq x_2$ , на котором функция  $\tilde{\Phi}(x, t)$  трехзначна, выделение однозначной и непрерывной функции — потенциала  $\Phi(x, t)$  — производится, очевидно, единственным образом и дается формулой

$$\Phi(x, t) = \min \tilde{\Phi}(x, t), \quad (54)$$

где минимум берется по всем значениям  $\Phi^{(i)}(x, t)$  в данной точке  $x, t$ . На рис. 4.18 показано, что минимум этот достигается на 1-й и 3-й ветвях  $\tilde{\Phi}(x, t)$ , т. е.

$$\Phi(x, t) = \Phi^{(1)}(x, t) \text{ при } x \leq \xi, \quad \Phi(x, t) = \Phi^{(3)}(x, t) \text{ при } x \geq \xi. \quad (55)$$

Соответственно этому определяется и функция  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) \text{ при } x \leq \xi, \quad u(x, t) = u^{(3)}(x, t) \text{ при } x \geq \xi. \quad (56)$$

Если теперь кривая (49) имеет участки, которые более чем три раза проектируются на ось  $x_0 = 0$ , то, разбивая ее на отдельные куски, на которых  $\tilde{\Phi}(x, t)$  трехзначна, мы сведем всю процедуру построения непрерывного потенциала  $\Phi(x, t)$  к только что рассмотренному случаю.

Итак, обобщенное решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) задается формулой

$$u(x, t) = U(t, \xi(x, t), u_0(\xi(x, t))), \tag{57}$$

где  $\xi(x, t)$  — значение параметра  $x_0$ , при котором

$$\Phi(x, t) = \tilde{\Phi}(t, \xi(x, t)) \tag{58}$$

есть наименьшее значение функции  $\tilde{\Phi}(t_0, x_0)$  при значениях  $x_0$ , ограниченных условием (49), т. е.

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0)).$$

Учитывая теперь формулы (46), (19), (23), легко устанавливаем, что формула (54) эквивалентна требованию минимума функции  $I(t, x, \xi)$ .

Таким образом, мы снова пришли к формуле (14) для обобщенного решения  $u(x, t)$ .

Мы рассмотрели, однако, лишь случай, когда начальная функция  $u_0(x)$  является гладкой и, в частности, непрерывной функцией переменного  $x$ . Мы увидим сейчас, что ничто существенно не меняется и в случае кусочно-гладкой и кусочно-непрерывной начальной функции  $u_0(x)$ .

Если рассматривать разрывную начальную функцию  $u_0(x)$  как предел непрерывных, то это приводит лишь к тому, что в точках разрыва  $u_0(x)$  при решении характеристической системы нужно придавать функции  $u_0(x)$  все промежуточные значения между левым и правым предельными значениями  $u_0(x-0)$ ,  $u_0(x+0)$ . Тогда зависимость (49) по-прежнему будет изображаться непрерывной кривой в плоскости переменных  $x, x_0$ . Отличие состоит лишь в том, что в точках разрыва эта кривая имеет горизонтальные участки (рис. 4.19). Так, например, на рис. 4.19 точке  $x_0^{(1)}$  соответствует случай, когда

$$u_0(x_0 - 0) \geq u_0(x_0 + 0),$$

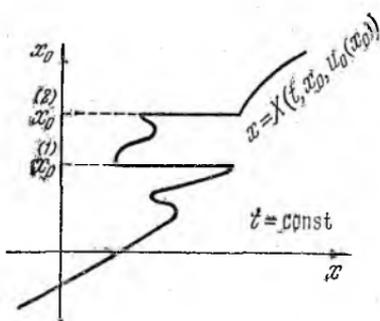


Рис 4. 19.

в точке  $x_0$  — случай, когда

$$u_0(x_0 - 0) < u_0(x_0 + 0).$$

Из точки разрыва начальной функции  $u_0(x)$  выходит пучок характеристик  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ , который, конечно, не может быть описан с помощью одного лишь параметра  $x_0$ . Поэтому мы введем в точке разрыва  $u_0(x)$  еще один параметр  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) и определим функции  $X(t, x_0, u_0(x_0), \alpha)$ ,  $U(t, x_0, u_0(x_0), \alpha)$ ,  $\Phi(t, x_0, \alpha)$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X(t, x_0, u_0(x_0), \alpha) &= X(t, x_0, \alpha u_0(x_0 - 0) + (1 - \alpha)u_0(x_0 + 0)), \\ U(t, x_0, u_0(x_0), \alpha) &= U(t, x_0, \alpha u_0(x_0 - 0) + (1 - \alpha)u_0(x_0 + 0)), \end{aligned} \right\} (59)$$

$$\tilde{\Phi}(t, x_0, \alpha) = \Phi_0(x_0) + \int_0^t [U\varphi'_u(U, X, \tau) - \varphi(U, X, \tau)] d\tau. \quad (60)$$

В формуле (60) через  $U, X$  обозначены функции (59) при  $t = \tau$ . Если теперь параметр  $x_0$  пробегает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , а  $\alpha$  изменяется от 0 до 1, то кривая

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0), \alpha)$$

будет непрерывной в плоскости переменных  $x, x_0$ ; вдоль этой непрерывной кривой непрерывным образом изменяется  $\tilde{\Phi}(t, x_0, \alpha)$ . Поэтому, повторяя предыдущие выкладки, мы приходим к выводу, что и в случае разрывных начальных функций  $u_0(x)$  формулы (57), (58) для обобщенного решения остаются в силе.

Эти формулы теперь будут выглядеть следующим образом:

$$u(x, t) = U(t, \xi(x, t), u_0(\xi(x, t)), \alpha(x, t)),$$

где  $\xi(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$  — значения параметров  $x_0, \alpha$ , для которых

$$\Phi(x, t) = \tilde{\Phi}(t, \xi(x, t), \alpha(x, t))$$

есть наименьшее значение функции  $\tilde{\Phi}(t, x_0, \alpha)$  по параметрам  $x_0, \alpha$ , подчиненным условию

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0), \alpha).$$

Для неоднородного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(u, x, t) = f(u, x, t) \quad (61)$$

с начальным условием (2) формулы (14) и (54) по-прежнему определяют обобщенное решение в случае, если

$$f(u, x, t) = f_1(x, t) + f_2(t)u. \quad (62)$$

Только теперь под  $U(t, x_0, u_0)$ ,  $X(t, x_0, u_0)$ ,  $\bar{U}$ ,  $\bar{X}$  понимается решение характеристической системы для уравнения (61):

$$\frac{dx}{dt} = \Phi'_u(u, x, t), \quad \frac{du}{dt} = f(u, x, t) - \Phi'_x(u, x, t), \quad (63)$$

а под  $\tilde{\Phi}(t, x_0)$  — решение «условия полосы» для уравнения (61):

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = U\Phi'_u(U, X, t) - \Phi(U, X, t) + F(x, t) + \dot{f}_2(t)\tilde{\Phi}, \quad (64)$$

где

$$F'_x(x, t) = \dot{f}_1(x, t).$$

Для того чтобы убедиться в этом, преобразуем уравнение (61) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\varphi}(v, x, t)] = 0, \quad (65)$$

где

$$v = u \exp \left\{ - \int_0^t \dot{f}_2(\tau) d\tau \right\},$$

$\bar{\varphi}(v, x, t) =$

$$= \exp \left\{ - \int_0^t \dot{f}_2(\tau) d\tau \right\} \left[ \varphi \left( v \cdot \exp \left\{ \int_0^t \dot{f}_2(\tau) d\tau \right\}, x, t \right) - F(x, t) \right].$$

К уравнению (65) применим метод построения обобщенного решения задачи Коши, изложенный выше, и, в частности, здесь справедливы формулы (14) и (54). Возвращаясь вновь к переменному  $u = v \exp \int_0^t \dot{f}_2(\tau) d\tau$ , получаем, что последнее определяется формулами (14). Это решение удовлетворяет интегральному закону сохранения

$$\oint_C u dx - \varphi(u, x, t) dt + \iint_{\mathcal{D}C} [\dot{f}_1(x, t) + \dot{f}_2(t)u] dx dt = 0,$$

вытекающему из уравнения (61) при условии (62).

**4. Задача Коши для неоднородного закона сохранения.** Задача Коши для неоднородного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t) \quad (\varphi''_{uu}(u, x, t) > 0) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

впервые рассмотрели А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1954], предполагая функции  $\varphi$ ,  $f$  дважды непрерывно дифференцируе-

мыми, а начальную функцию  $u_0(x)$  — кусочно-непрерывной и кусочно-дифференцируемой.

Их метод можно назвать методом интегрирования условия Гюгонио.

Решение характеристической системы

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'_u(u, x, t), \quad \frac{du}{dt} = f(u, x, t) - \varphi'_x(u, x, t), \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0, \quad (4)$$

как и прежде, обозначим через

$$x = X(t, x_0, u_0), \quad u = U(t, x_0, u_0). \quad (5)$$

Мы будем считать, что функции  $X, U$  остаются ограниченными в рассматриваемой области изменения переменных  $t, x_0, u_0$ .

Достаточно рассмотреть случай, когда начальная функция  $u_0(x)$  задана на конечном отрезке  $|x| \leq a$ , и решить задачу (1), (2) в области определенности для этого отрезка.

Выберем величину  $a$  столь малой, чтобы начальная функция  $u_0(x)$  имела на отрезке  $|x| \leq a$  единственную точку разрыва первого рода, которую без ограничения общности можно считать точкой  $x = 0$ . Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть  $u_0(-0) < u_0(+0)$ . Так как  $\varphi''_{uu} > 0$ , то отсюда следует, что

$$\varphi'_u(u_0(-0), 0, 0) < \varphi'_u(u_0(+0), 0, 0). \quad (6)$$

Проведем через точку  $(0, 0)$  две характеристики  $x = x^-(t)$  и  $x = x^+(t)$ , заданные уравнениями

$$x^-(t) = X(t, 0, u_0(-0)), \quad x^+(t) = X(t, 0, u_0(+0)). \quad (7)$$

Из условия (6) вытекает, что по крайней мере для достаточно малых значений переменного  $t > 0$  будет выполняться условие

$$x^-(t) < x^+(t), \quad (8)$$

а если предположить, как и раньше, что для характеристической системы (3) однозначно разрешима краевая задача (2.3.8), то неравенства (8) будут выполнены при всех  $t > 0$ .

На рис. 4.20 изображены область определенности отрезка  $|x| \leq a$  и характеристики (7). Согласно главе 1 в зонах I и II (рис. 4.20) при достаточно малом  $t_0 > 0$  существует единствен-

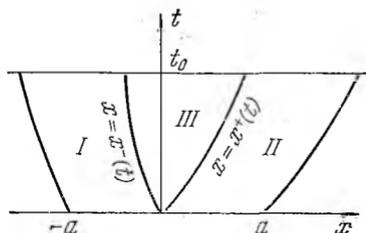


Рис. 4.20.

ное классическое решение уравнения (1), принимающее начальные значения (2). Это решение задается формулой

$$u(X(t, x_0, u_0(x_0)), t) = U(t, x_0, u_0(x_0)) \quad (9)$$

неявно с помощью параметра  $x_0$  либо, если нам удалось разрешить зависимость

$$x = X(t, x_0, u_0(x_0)) \quad (10)$$

относительно  $x_0$ :

$$x_0 = x_0(x, t), \quad (11)$$

то и явной формулой

$$u(x, t) = U(t, x_0(x, t), u_0(x_0(x, t))). \quad (12)$$

Формулы (9), (12) определяют решение задачи Коши (1), (2) в зонах *I* и *II*. Остается определить решение в зоне *III*.

Через точку  $(0, 0)$  проведем характеристики  $x = X^\alpha$ , заданные условиями

$$\left. \begin{aligned} x = X^\alpha &= X(t, 0, \alpha u_0(-0) + (1 - \alpha) u_0(+0)), & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ X^0 &= x^+(t), & X^1 = x^-(t). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнение

$$x = X^\alpha \quad (14)$$

однозначно разрешимо в зоне *III* относительно параметра  $\alpha$ :

$$\alpha = \alpha(x, t). \quad (15)$$

Поэтому решение  $u(x, t)$  задается в зоне *III* формулой

$$u(X^\alpha, t) = U(t, 0, \alpha u_0(-0) + (1 - \alpha) u_0(+0)) \quad (16)$$

либо, если зависимость (15) известна, — формулой

$$u(x, t) = U(t, 0, \alpha(x, t) u_0(-0) + [1 - \alpha(x, t)] u_0(+0)). \quad (17)$$

Совокупность формул (9) и (16) определяет решение задачи Коши (1), (2) в зонах *I*, *II*, *III*, которое непрерывно при  $t > 0$ , обладает разрывами первых производных, расположенными на линиях  $x = x^-(t)$ ,  $x = x^+(t)$ , и имеет особенность в точке  $(0, 0)$ . Для выяснения характера этой особенности заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(X^\alpha(t), t) = u_0^\alpha = \alpha u_0(-0) + (1 - \alpha) u_0(+0), \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX^\alpha(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi'_u(u(X^\alpha, t), X^\alpha, t) = \Phi'_u(u_0^\alpha, 0, 0). \quad (19)$$

Отсюда следует, что в зоне *III* решение (17) имеет особенность вида

$$u(x, t) = g\left(\frac{x}{t}\right) + O(t), \quad g' = \frac{1}{\Phi''_{uu}(u, 0, 0)}. \quad (20)$$

Особенность подобного типа называют в газовой динамике *центрированной волной разрежения*.

Итак, в случае выполнения неравенства (6) существует непрерывное решение, которое задается формулами (9) и (16).

2) Рассмотрим теперь второй случай, когда  $u_0(-0) > u_0(+0)$ , т. е.

$$\varphi'_u(u_0(-0), 0, 0) > \varphi'_u(u_0(+0), 0, 0). \quad (21)$$

В этом случае неравенство (8) изменяется на противоположное и зоны I и II перекрываются друг с другом (рис. 4.21). Пересечение зон I и II обозначим зоной III (рис. 4.21). В этом случае формула (9) определяет функцию  $u(x, t)$  в зоне III дважды: одна функция, которую мы обозначим через  $u^-(x, t)$ , определяется по значениям  $x_0 < 0$ , другая,  $u^+(x, t)$ , — по значениям  $x_0 > 0$ . Решение  $u(x, t)$  в этом случае разрывно. Будем считать, что через точку  $O(0, 0)$  в зоне III проходит линия разрыва

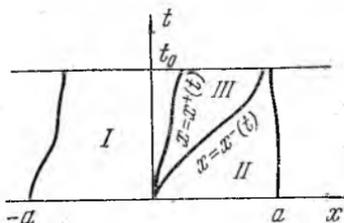


Рис. 4.21.

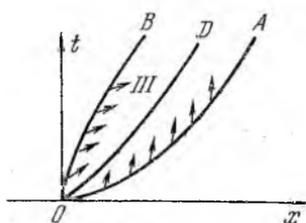


Рис. 4.22.

$OD$  (рис. 4.22), уравнение которой будем считать записанным в виде  $x = x(t)$ ,  $x(0) = 0$ ; слева от линии разрыва  $OD$   $u(x, t) = u^-(x, t)$ ; справа от  $OD$   $u(x, t) = u^+(x, t)$ .

На линии разрыва  $x = x(t)$  должны в таком случае выполняться условия Гюгонио (§ 1), которые записываются в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = D = \frac{\varphi(u^+(x, t), x, t) - \varphi(u^-(x, t), x, t)}{u^+(x, t) - u^-(x, t)} = A(x, t). \quad (22)$$

Согласно теоремам существования, установленным в главе 1, функции  $u^-(x, t)$  и  $u^+(x, t)$  при достаточно малом  $t_0$  обладают ограниченными первыми производными. Поэтому функция  $A(x, t)$ , входящая в уравнение (22), обладает ограниченной первой производной.

Рассмотрим какую-либо точку  $\mathcal{P}$  на линии  $OB$ . Пусть через  $D_{\mathcal{P}}$  обозначен наклон линии  $OB$  к оси  $t = 0$  в точке  $\mathcal{P}$ , т. е.

$$D_{\mathcal{P}} = \left. \frac{dx^+(t)}{dt} \right|_{t=\tau_{\mathcal{P}}}$$

Через  $\mathcal{P}$  проходит одна характеристика  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ , отвечающая значению  $x_0 < 0$ . Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \varphi'_u(u^-(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}) &= X'_t(t_{\mathcal{P}}, x_0^-, u_0(x_0^-)) > \\ &> \varphi'_u(u^+(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}) = D_{\mathcal{P}} = X'_t(t_{\mathcal{P}}, 0, u_0(+0)). \end{aligned} \quad (23)$$

На рис. 4.23 изобразим график зависимости  $\varphi = \varphi(u, x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}})$ , считывая, что  $\varphi''_{uu} > 0$ . Из условия (23) заключаем, что  $\varphi(u^-(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}})) > \varphi(u^+(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}))$ . Величина  $A(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}})$  есть, очевидно, наклон хорды, соединяющей точки  $\{u^+(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), \varphi(u^+(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}})\}$ ,  $\{u^-(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), \varphi(u^-(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}})\}$ . Как явствует из рис. 4.23, следствием неравенств (23) является неравенство

$$A(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}) > \varphi'_u(u^+(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}), x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}) = D_{\mathcal{P}}. \quad (24)$$

Итак на линии  $OB$   $A(x_{\mathcal{P}}, t_{\mathcal{P}}) > D_{\mathcal{P}}$ , т. е. скорость интегральных кривых дифференциального уравнения (22) на линии  $OB$  больше скорости линии  $OB$ .

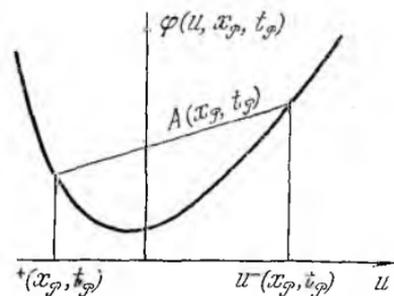


Рис. 4.23.

Короче говоря, поле направлений на линии  $OB$  для уравнения (22) имеет вид, изображенный на рис. 4.22. Аналогично заключаем, что и на линии  $OA$  поле направлений имеет вид, изображенный на рис. 4.22. Так как в зоне III, как мы уже говорили выше,  $A(x, t)$  непрерывно дифференцируема по своим переменным, то, следовательно, существует единственная интегральная кривая

$D$  обыкновенного дифференциального уравнения (22), целиком лежащая в зоне III.

Определив линию  $OD$ , определяем решение в зонах I, II, III:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-(x, t) & \text{слева от линии } OD, \\ u^+(x, t) & \text{справа от линии } OD. \end{cases} \quad (25)$$

Решение (25) непрерывно всюду, кроме линии  $OD$ , и обладает ограниченной первой производной. На линии  $OD$

$$u(x-0, t) > u(x+0, t),$$

т. е. это решение удовлетворяет условию устойчивости. На линии разрыва  $OD$  вследствие уравнения (22) выполнено условие резонанса; поэтому формула (25) определяет устойчивое обобщенное решение задачи Коши (1), (2).

Итак, в случае, когда начальная функция имеет изолированный разрыв первого рода, указанным выше способом мы строим

обобщенное решение задачи Коши в некоторой окрестности точки разрыва. Если начальная функция имеет несколько точек разрыва, то, разбивая начальный отрезок на части, мы сводим задачу к рассмотренному случаю.

Наконец, отметим еще одно обстоятельство. Величина  $t_0$ , которой мы ограничивали выше область определенности, ограничивалась сверху тем, что решения  $u^-(x, t)$ ,  $u^+(x, t)$  в зонах  $I$ ,  $II$  должны иметь ограниченные первые производные.

Однако, как мы видели в главе I, производные решения квазилинейных уравнений не остаются ограниченными и могут возрастать по абсолютной величине до бесконечности. Существенно, что наиболее характерным случаем в поведении решений квазилинейных уравнений является такой, когда производные решения в какой-либо точке становятся бесконечными, а само решение еще остается непрерывным.

Таким образом, для того чтобы иметь возможность последовательно, шаг за шагом, применять изложенный выше метод явного выделения особенностей, необходимо еще рассмотреть случай, когда начальная функция  $u_0(x)$  имеет в точке  $x = 0$  неограниченную производную, а сама остается непрерывной (рис. 4.24). При этом достаточно рассмотреть лишь случай, когда в окрестности точки  $x = 0$

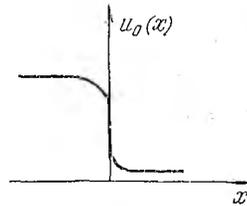


Рис. 4.24.

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial x} < 0, \quad (26)$$

так как производная  $p = \frac{\partial u}{\partial x}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \varphi'_u(u, x, t) \frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi''_{uu} p^2 + [f'_u - \varphi''_{ux}] p + f'_x \quad (27)$$

и остается ограниченной сверху:  $p(x, t) < A$  ( $\varphi''_{uu} > 0$ ), если ограничена производная функции  $u_0(x)$ .

Итак, предположим, что при  $|x| \leq a$  выполнено условие (26) и

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (28)$$

В этом случае мы ограничимся лишь замечаниями, так как построение решения в основных чертах схоже с проведенным в случае (21). Основное отличие этого случая от предыдущего состоит в том, что задача Коши для уравнения (1), рассматриваемая отдельно для отрезков  $[-a, 0]$  и  $[0, a]$ , имеет решение, обладающее неограниченной производной при любом  $t_0 > 0$ . Поэтому под линией  $OA$  (рис. 4.22) теперь следует понимать

огibaющую семейства характеристик  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ ,  $x_0 < 0$ , т. е. характеристик, выходящих слева от точки  $O$ ; под линией  $OB$  — огibaющую семейства характеристик  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$ ,  $x_0 > 0$ .

В этом случае линии  $OA$  и  $OB$  касаются одна другой при  $t = 0$ , решения  $u^-(x, t)$  и  $u^+(x, t)$  имеют неограниченные производные соответственно на линиях  $OA$  и  $OB$ , в остальном картина вполне сходна с рассмотренной выше. Так, поле направлений для дифференциального уравнения (22) имеет вид, изображенный на рис. 4.22, а единственность линии разрыва  $OD$  в условиях неограниченности производных функции  $A(x, t)$  следует из касания линий  $OA$  и  $OB$  при  $t = 0$ .

Таким образом, применяя метод явного интегрирования условия Гюгонио, мы сможем определить решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) в любой интересующей нас области, в которой число линий разрыва остается ограниченным, что чаще всего и бывает в практических задачах.

Отметим еще, что в случае, когда  $f(u, x, t) \equiv 0$ , после введения потенциала обобщенного решения  $\Phi(x, t)$ , мы можем записать:

$$\left. \begin{aligned} u^-(x, t) &= \frac{\partial \Phi^-(x, t)}{\partial x}, & u^+(x, t) &= \frac{\partial \Phi^+(x, t)}{\partial x}, \\ \varphi(u^-(x, t), x, t) &= -\frac{\partial \Phi^-(x, t)}{\partial t}, & \varphi(u^+(x, t), x, t) &= -\frac{\partial \Phi^+(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где  $\Phi^-(x, t)$ ,  $\Phi^+(x, t)$  однозначно определяются в области  $AOB$  из «уравнений полоски». Поэтому условие Гюгонио принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Phi^+(x, t) - \Phi^-(x, t)] dt + \frac{\partial}{\partial x} [\Phi^+(x, t) - \Phi^-(x, t)] dx = 0, \quad (30)$$

откуда следует, что линия разрыва  $OD$ :  $x = x(t)$  есть линия, где

$$\Phi^+(x, t) = \Phi^-(x, t). \quad (31)$$

Равенство (31) показывает, что в случае кусочно-гладких решений  $u(x, t)$  метод явного выделения линий разрыва эквивалентен для однородных законов сохранения изложенному в п. 3 аналитическому методу нахождения решения.

Задачу Коши (1), (2) можно в некотором смысле свести к задаче для однородного закона сохранения, пользуясь методом последовательных приближений. Положим  $u(x, t) = u_0(x)$ . Считая известным приближение  $u^{(s-1)}(x, t)$  определим  $u^{(s)}(x, t)$  как

решение задачи Коши

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(u^{(s)}, x, t) = f(u^{(s-1)}(x, t), x, t), \quad (32)$$

$$u^{(s)}(x, 0) = u_0(x). \quad (33)$$

Вводя функцию

$$F(x, t) = \int_0^x f(u^{(s-1)}(\xi, t), \xi, t) d\xi, \quad (34)$$

запишем уравнение (32) в виде

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(u^{(s)}, x, t) - F(x, t)] = 0. \quad (35)$$

Для уравнения (35) применима теория построения разрывных решений, развитая в п. 3, однако мы должны учесть несколько деталей.

Характеристическая система для уравнения (35) записывается в виде

$$\frac{dX^{(s)}}{dt} = \varphi'_u(u^{(s)}, X, t), \quad \frac{dU^{(s)}}{dt} = -\varphi_x(u^{(s)}, X, t) + f(u^{(s-1)}(X, t), X, t), \quad (36)$$

при этом функция  $f(u^{(s-1)}(x, t), x, t)$  является разрывной функцией переменных  $x, t$ . В точках разрыва  $f$  мы ставим условие непрерывности величин  $X, U$ .

Аналогично предыдущему решению задачи (35) с начальным условием (33) дается формулой

$$\Phi(x, t) = \min \Phi(t, x_0), \quad (37)$$

где  $\Phi(t, x_0)$  определяется квадратурой

$$\Phi(t, x_0) = \Phi_0(x_0) + \int_0^t [U \varphi'_u(u^{(s)}, X, \tau) - \varphi(u^{(s)}, X, \tau) + F(X, \tau)] d\tau \quad (38)$$

(в формуле (38)  $U = U(\tau, x_0, u_0(x_0))$ ).

Последовательность  $\Phi(x, t)$  равномерно сходится в любой ограниченной области переменных  $x, t$ . Поэтому, переходя к пределу в (37), получаем потенциал  $\Phi(x, t)$  обобщенного решения задачи Коши (1), (2).

5. Единственность обобщенного решения при условии  $\varphi''_{uu} > 0$ . Убедимся теперь, что обобщенное решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t) \quad (\varphi''_{uu} > 0), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

удовлетворяющее условию устойчивости

$$u(x-0, t) \geq u(x+0, t), \quad (3)$$

единственно.

Мы докажем эту теорему в классе кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых решений.

Предположим, что существуют два ограниченных кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых при  $t > 0$ \*) решения задачи (1), (2)  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$ , каждое из которых удовлетворяет всюду вне линий разрыва уравнению (1), а на линиях разрыва — условию устойчивости (3).

Пусть  $\Phi(x, t)$  и  $\bar{\Phi}(x, t)$  — потенциалы, отвечающие этим двум решениям. Эти функции непрерывны и всюду, кроме линий разрыва решений  $u, \bar{u}$ , удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, x, t\right) = \int_0^x f\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \xi, t\right) d\xi, \quad (4)$$

а при  $t=0$  — начальному условию

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Разность  $v = \Phi - \bar{\Phi}$  удовлетворяет всюду, кроме линий разрыва  $u$  и  $\bar{u}$ , уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} &= \int_0^x B(\xi, t) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= - \int_0^x \frac{\partial B(\xi, t)}{\partial \xi} v(\xi, t) d\xi + B(x, t) v(x, t) - B(0, t) v(0, t) + \\ &+ \sum_i v(x_i(t), t) [B(x_i(t)+0, t) - B(x_i(t)-0, t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

\*) Мы рассматриваем решения, которые также могут иметь особенности типа  $g\left(\frac{x-x_0}{t}, t\right)$  и не являются непрерывными при  $t=0$ .

Суммирование в (6) производится по всем линиям разрыва  $x = x_i(t)$  решений  $u(x, t)$ ,  $\bar{u}(x, t)$  таким, что  $0 < x_i(t) < x$ , а

$$A(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(u(x, t), x, t) - \varphi(\bar{u}(x, t), x, t)}{u(x, t) - \bar{u}(x, t)} & \text{при } u \neq \bar{u}, \\ \varphi'_u(u(x, t), x, t) & \text{при } u = \bar{u}, \end{cases} \quad (7)$$

$$B(x, t) = \begin{cases} \frac{j(u(x, t), x, t) - j(\bar{u}(x, t), x, t)}{u(x, t) - \bar{u}(x, t)} & \text{при } u \neq \bar{u}, \\ j'_u(u(x, t), x, t) & \text{при } u = \bar{u} \end{cases} \quad (8)$$

и

$$v(x, 0) = 0. \quad (9)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} |u(x, t)| < M_0, \quad |\bar{u}(x, t)| < M_0, \\ |\varphi'_u(u, x, t)| \leq M_1 \quad \text{при } |u| \leq M_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Докажем, что при произвольном  $a > 0$  в трапеции

$$x + a \geq M_1 t, \quad x - a \leq -M_1 t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

функция

$$v(x, t) = 0.$$

При сделанных предположениях относительно  $u$  и  $\bar{u}$  и требованиях п. 4 на функции  $\varphi, j$  функция  $B(x, t)$  имеет, очевидно, ограниченную вариацию по переменному  $x$ , а число линий разрыва  $x = x_i(t)$  функций  $u, \bar{u}$  (они же являются линиями разрыва величин  $A(x, t), B(x, t)$ ) конечно в рассматриваемой трапеции (11). Поэтому правая часть уравнения (6) оценивается величиной  $M_2 V(t)$ , где

$$V(t) = \max |v(\xi, \tau)|, \quad (12)$$

а максимум в формуле (12) берется по пересечению трапеции (11) с полосой  $0 \leq \tau \leq t$ .

Итак, в трапеции (11) функция  $v(x, t)$  удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right| < M_2 V(t), \quad (13)$$

а при  $t = 0$  — условию (9).

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(x, t), \quad (14)$$

в котором правая часть разрывна на линиях  $x = x_i(t)$ . Интегральной кривой уравнения (14) будем называть непрерывную кривую  $x = x(t)$ , которая удовлетворяет уравнению (14) во всех точках непрерывности  $A(x, t)$ .

Предположим, что через каждую точку трапеции (11) проходит интегральная кривая уравнения (14), пересекающая ось  $t = 0$  на основании трапеции  $-a \leq x \leq a$ . Тогда, интегрируя неравенство (13) вдоль интегральной кривой, проходящей через точку  $(x, t)$ , получим, с учетом условия (9),

$$|v(x, t)| \leq \int_0^t M_2 V(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$V(t) \leq M_2 \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (16)$$

и, на основании леммы 1 из п. 5 § 6 главы 1, что

$$v(x, t) = 0. \quad (17)$$

Так как  $u - \bar{u} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ , то из (17) вытекает доказательство сформулированной нами теоремы.

Итак, доказательство теоремы сводится к доказательству следующего факта:

Через любую точку  $(x, t)$  трапеции (11) проходит интегральная кривая уравнения (14), пересекающая ось  $t = 0$ .

Покажем, что если  $u$  и  $\bar{u}$  удовлетворяют условию устойчивости (3), то это действительно так. Для этого заметим, что через

точку  $(\xi, \tau)$ , если она является точкой непрерывности  $A(x, t)$ , проходит интегральная кривая уравнения (14), определенная при  $t \leq \tau$ . Если эта интегральная кривая при  $t < \tau$  не пересекает линии разрыва  $x = x_i(t)$ , то она пересечет ось  $t = 0$  на отрезке  $-a \leq x \leq a$ , так как  $|A(x, t)| \leq M_1$ .

Поэтому, если через любую точку  $(\xi, \tau)$ , лежащую на линии разрыва  $x = x_i(t)$ , проходит интегральная кривая уравнения (14), определенная при  $t < \tau$ , то через любую точку трапеции (11) проходит интегральная кривая, пересекающая ось  $t = 0$ .

Рассмотрим случай, когда точка  $(\xi, \tau)$  лежит на линии разрыва функции  $A(x, t)$   $x = x_i(t)$  (рис. 4.25). Согласно нашим предположениям, в точке  $(\xi, \tau)$  существуют левое и правое предельные значения  $A(\xi - 0, \tau)$ ,  $A(\xi + 0, \tau)$ . Если

$$A(\xi - 0, \tau) > A(\xi + 0, \tau), \quad (18)$$

то через точку  $(\xi, \tau)$  обязательно проходит интегральная кривая уравнения (14), определенная при  $t < \tau$ .

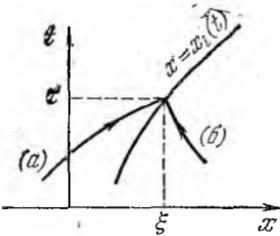


Рис. 4.25.

В самом деле, если обозначить  $D_i = x'_i(t)$ , то в этом случае выполнено одно из двух неравенств:

$$а) A(\xi - 0, \tau) > D_i, \quad б) A(\xi + 0, \tau) < D_i. \quad (19)$$

На рис. 4.25 изображены направления интегральных кривых уравнения (14) в случаях а) и б). Как видно из рис. 4.25, в любом из этих случаев через точку  $(\xi, \tau)$  проходит интегральная кривая, определенная при  $t < \tau$ .

Итак, доказательство теоремы сведено нами к установлению неравенства (18). Поскольку  $(\xi, \tau)$  — точка разрыва  $A(x, t)$ , то в этой точке разрывна либо  $u(x, t)$ , либо  $\bar{u}(x, t)$ , либо они разрывны одновременно. Поэтому будем считать, что

$$u(\xi - 0, \tau) > u(\xi + 0, \tau), \quad \bar{u}(\xi - 0, \tau) \geq \bar{u}(\xi + 0, \tau). \quad (20)$$

Изобразим на рис. 4.26 график функции  $\varphi(u, \xi, \tau)$  при фиксированных  $\xi, \tau$ . Так как  $\varphi''_{uu} > 0$ , то эта кривая выпукла вниз.

Согласно формуле (7) величина  $A(\xi - 0, \tau)$  равна наклону хорды, соединяющей точки  $A^-, B^-$ , а  $A(\xi + 0, \tau)$  — наклону хорды  $A^+B^+$ . Из условия (20), вытекает, что каждый конец интервала  $[\bar{u}(\xi - 0, \tau), u(\xi - 0, \tau)]$  лежит правее соответствующих концов интервала  $[\bar{u}(\xi + 0, \tau), u(\xi + 0, \tau)]$ . Для выпуклых кривых ( $\varphi''_{uu} > 0$ ) отсюда следует, что наклон хорды  $A^-B^-$  больше наклона хорды  $A^+B^+$ . Это же обстоятельство следует из рис. 4.26.

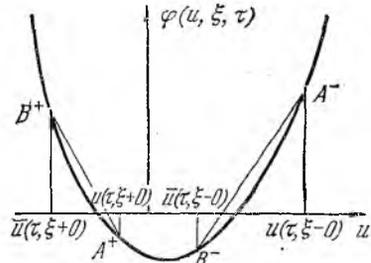


Рис. 4.26.

Итак, в каждой точке разрыва функции  $A(x, t)$  выполнено условие (18). Значит, через каждую точку трапеции (11) проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения (14), пересекающая ось  $t = 0$ . Значит, в этой трапеции имеет место условие (17) и  $u(x, t) \equiv \bar{u}(x, t)$ .

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости обобщенных решений от входных данных.

Пусть  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  — кусочно-гладкие устойчивые обобщенные решения квазилинейных уравнений, определенные условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \varphi''_{uu} > 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u}, x, t)}{\partial x} = \bar{f}(\bar{u}, x, t), \quad \bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad \bar{\varphi}''_{uu} > 0. \quad (22)$$

Будем предполагать, что функции  $\varphi, \bar{\varphi}, f, \bar{f}, u_0, \bar{u}_0$  удовлетворяют требованиям, которые к ним предъявлялись в пп. 3, 4.

Решениям  $u$  и  $\bar{u}$  соответствуют потенциалы  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, x, t \right) = \int_0^x f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \xi, t \right) d\xi, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \bar{\varphi} \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}, x, t \right) = \int_0^x \bar{f} \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi}, \xi, t \right) d\xi \quad (24)$$

и начальным условиям

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\xi) d\xi, \quad \bar{\Phi}(x, 0) = \bar{\Phi}_0(x) = \int_0^x \bar{u}_0(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Разность  $v = \Phi - \bar{\Phi}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} = \\ = \int_0^x B(\xi, t) \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + [\bar{\varphi}(\bar{u}(x, t), x, t) - \varphi(\bar{u}(x, t), x, t)] + \\ + \int_0^x [f(\bar{u}(\xi, t), \xi, t) - \bar{f}(\bar{u}(\xi, t), \xi, t)] d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

и начальному условию

$$v(x, 0) = v_0(x) = \Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x) = \int_0^x [u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi)] d\xi, \quad (27)$$

а величины  $A, B$  определены формулами (7), (8).

Пусть в трапеции (11) выполнены условия

$$|u| \leq M_0, \quad |\bar{u}| \leq M_0,$$

и пусть при  $|u| \leq M_0$

$$|\varphi'_u(u, x, t)| \leq M_1, \quad |\varphi(u, x, t) - \bar{\varphi}(u, x, t)| \leq \Delta\varphi,$$

$$|f(u, x, t) - \bar{f}(u, x, t)| \leq \Delta f.$$

Тогда из уравнения (26) следует оценка

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq \left| \int_0^x B(\xi, t) \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi \right| + \Delta\varphi + a\Delta f,$$

Аналогично предыдущему отсюда следует новая оценка:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq MV(t) + \Delta\varphi + a\Delta f, \quad (28)$$

где константа  $M$  зависит, в частности, от числа линий разрыва решений  $u$  и  $\bar{u}$ .

Мы предполагаем, что каждое из решений  $u$  и  $\bar{u}$  удовлетворяет условию устойчивости, т. е.

$$u(x-0, t) \geq u(x+0, t), \quad \bar{u}(x-0, t) \geq \bar{u}(x+0, t).$$

Так же как и раньше, из этого следует, что в точках разрыва функции  $A(x, t)$  выполнено неравенство

$$A(x-0, t) \geq A(x+0, t).$$

Следовательно, через каждую точку трапеции (11) проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения (14), пересекающая ось  $t=0$ . Интегрируя вдоль этой кривой неравенство (28) и применяя лемму 1 из п. 5 § 6 главы 1, получим

$$|v(x, t)| \leq v_0 e^{Mt} + [\Delta\varphi + a\Delta f] \frac{e^{Mt} - 1}{M}, \quad (29)$$

где

$$v_0 = \max_{|x| \leq a} |\Phi_0(x) - \bar{\Phi}_0(x)|.$$

Учитывая, что

$$v(x, t) = \int_0^x [u(\xi, t) - \bar{u}(\xi, t)] d\xi,$$

приходим к выводу, что неравенство (29) устанавливает непрерывную зависимость обобщенных решений квазилинейных уравнений от входных данных задачи Коши в потенциальной метрике.

К сожалению, однако, в оценку (29) входит константа  $M$ , зависящая от числа линий разрыва решений  $u$ ,  $\bar{u}$ . В связи с этим заметим, что эта величина может быть оценена с помощью вариации функций  $u(x, t)$ ,  $\bar{u}(x, t)$ , а последние оцениваются из начальных условий.

Для однородных законов сохранения, когда  $f = \bar{f} = 0$ , оценка (29) упрощается:

$$|v(x, t)| \leq v_0 + \Delta\varphi t.$$

В частности, если рассматривать лишь зависимость решений задачи Коши одного квазилинейного уравнения от начальных данных, т. е. полагать, что  $\Delta\varphi = 0$ , то эта оценка показывает, что построенные выше решения удовлетворяют принципу непрерывной зависимости (1.5.4), (1.5.5) из главы 1.

К вопросу о непрерывной зависимости обобщенных решений от начальных данных примыкает один способ построения раз-

ривных решений, который мы назовем «методом потенциального сглаживания». Для простоты рассмотрим однородный закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = 0, \quad \varphi''_{uu} > 0, \quad (30)$$

для которого поставлено начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (31)$$

Будем считать, что функция  $\varphi$  удовлетворяет предыдущим требованиям, а  $u_0(x)$  задана на отрезке  $|x| \leq a$ , имеет единственную точку разрыва первого рода  $x=0$ , а во всех остальных точках отрезка обладает ограниченной константой Липшица. Обозначим  $u^- = u_0(-0)$ ,  $u^+ = u_0(+0)$ . Как мы видели выше, если  $u^- \leq u^+$ , то решение задачи (30), (31) непрерывно при  $t \geq 0$  в некоторой окрестности  $0 \leq t \leq T$  начальной оси. В частности, оно может быть получено как предел классических решений  $u_\delta(x, t)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , где  $u_\delta(x, t)$  есть решение уравнения (30) с начальным условием

$$u_\delta(x, 0) = u_\delta^0(x); \quad (32)$$

при этом  $u_\delta^0(x) \equiv u_0(x)$  при  $|x| \geq \delta$  и  $u_\delta^0(x)$  монотонна при  $|x| \leq \delta$ .

Поэтому мы рассмотрим лишь второй случай, когда  $u^- > u^+$ . В этом случае решение  $u(x, t)$  при достаточно малом  $T$  имеет в полосе  $0 \leq t \leq T$  единственную линию разрыва  $O\mathcal{L}$ , выходящую из точки  $(0, 0)$  начальной оси (рис. 4.27). На рис. 4.27 изображены линия разрыва  $O\mathcal{L}$  и характеристики решения  $u(x, t)$ . Будем решать вместо задачи (30), (31) задачу (30), (32), предполагая, что  $u_\delta^0(x) \equiv u_0(x)$  при  $|x| \geq \delta$ , функция  $u_\delta^0(x)$  монотонна при  $|x| \leq \delta$  и обладает константой Липшица на отрезке  $|x| \leq \delta$ , не превосходящей величины  $M/\delta$ , и, наконец, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} [u_0(x) - u_\delta^0(x)] dx = 0. \quad (33)$$

Введем потенциалы решений  $u$  и  $u_\delta$  с помощью соотношений

$$\Phi(x, t) = \int_{(-a, 0)}^{(x, t)} u dx - \varphi(u, x, t) dx,$$

$$\Phi_\delta(x, t) = \int_{(-a, 0)}^{(x, t)} u_\delta dx - \varphi(u_\delta, x, t) dt.$$

Тогда из соотношения (33) следует, что

$$\Phi(x, 0) \equiv \Phi_\delta(x, 0) \quad \text{при } |x| \geq \delta. \quad (34)$$

При сделанных ограничениях на функцию  $u_0^\delta(x)$  существует решение  $u_\delta(x, t)$  в широком смысле задачи (30), (32), которое непрерывно и может быть построено классическим методом характеристик при  $0 \leq t \leq t_1^\delta$ , где  $t_1^\delta \sim 1/\delta$ . Обозначим через  $x = X_1^{-\delta}$  и  $x = X_1^\delta$  уравнения характеристик этой задачи, выходящих соответственно из точек  $x = -\delta$  и  $x = \delta$  начальной оси (рис. 4.28).

Очевидно, что ввиду условия (34)

$$u(x, t) \equiv u_\delta(x, t), \quad \Phi(x, t) \equiv \Phi_\delta(x, t)$$

при  $[x - X_1^{-\delta}(t)][x - X_1^\delta(t)] > 0$  и  $0 \leq t \leq t_1^\delta$ , т. е.  $u(x, t)$ ,  $\Phi(x, t)$  совпадают соответственно с  $u_\delta(x, t)$ ,  $\Phi_\delta(x, t)$  вне криволинейной трапеции, образованной прямыми  $t=0$ ,  $t=t_1^\delta$  и отрезками характеристик  $x = X_1^{-\delta}$ ,  $x = X_1^\delta$ .

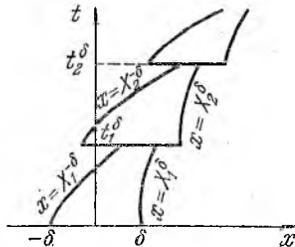


Рис. 4.28.

Пусть при  $t=t_1^\delta$  решение  $u_\delta(x, t)$  имеет особенность (неограниченность константы Липшица либо разрыв первого рода) на отрезке  $[X_1^{-\delta}(t_1^\delta), X_1^\delta(t_1^\delta)]$  прямой  $t=t_1^\delta$ . Очевидно, что

$$X_1^\delta(t_1^\delta) - X_1^{-\delta}(t_1^\delta) < 2\delta.$$

Выберем отрезок прямой  $t=t_1^\delta$  длиной  $2\delta$ , внутри которого целиком лежит отрезок  $[X_1^{-\delta}(t_1^\delta), X_1^\delta(t_1^\delta)]$ , и снова сгладим функцию  $u_\delta(x, t_1^\delta)$  на этом отрезке, т. е. введем функцию  $u_\delta^1(x, t_1^\delta)$ , которая удовлетворяет тем же требованиям, что и  $u_0^\delta(x)$ , именно:  $u_\delta^1(x, t_1^\delta) \equiv u_\delta(x, t_1^\delta)$  вне отрезка сглаживания и

$$\int_{a_1}^{b_1} [u_\delta(x, t_1^\delta) - u_\delta^1(x, t_1^\delta)] dx = 0,$$

где  $[a_1, b_1]$  — отрезок сглаживания. По-прежнему потребуем, чтобы функция  $u_\delta^1(x, t_1^\delta)$  обладала константой Липшица, ограниченной величиной  $M/\delta$ , и была монотонной на отрезке сглаживания  $[a_1, b_1]$ . Будем искать решение  $u_\delta(x, t)$  при  $t_1^\delta \leq t \leq t_2^\delta$ , считая, что  $u_\delta(x, t)$  удовлетворяет уравнению (30) и начальному условию

$$u_\delta(x, t_1^\delta) = u_\delta^1(x, t_1^\delta).$$

Для построения  $u_\delta(x, t)$  в полосе  $t_1^\delta \leq t \leq t_2^\delta$  снова применим классический метод характеристик. Снова обнаруживаем, что вне трапеции, образованной прямыми  $t = t_1^\delta$ ,  $t = t_2^\delta$  и отрезками характеристик  $x = X_1^{-\delta}(t)$ ,  $x = X_2^\delta(t)$ , выходящими из концов отрезка сглаживания, решения  $u(x, t)$  и  $u_\delta(x, t)$  и потенциалы  $\Phi(x, t)$  и  $\Phi_\delta(x, t)$  совпадают.

Продолжая этот процесс, мы сможем последовательно с помощью сглаживания и решения классическим методом характеристик задач Коши достичь прямой  $t = T$ , т. е. исчерпать интересующую нас область. При этом нам придется решать задачу Коши с гладкими начальными условиями порядка  $T/\delta$  раз.

В результате этого процесса мы получим решение  $u_\delta(x, t)$ , которое непрерывно всюду, кроме отрезков сглаживания на прямых  $t = t_k^\delta$ . Отрезки характеристик, выходящих из концов отрезков сглаживания, образуют «поясок», внутри которого заключены особенности и разрывы функции  $u_\delta(x, t)$ . При уменьшении величины  $\delta$  этот «поясок» будет стягиваться к линии разрыва  $OL$ .

Так как потенциалы  $\Phi(x, t)$  и  $\Phi_\delta(x, t)$  совпадают вне «пояска», а решения  $u(x, t)$  и  $u_\delta(x, t)$  предполагаются ограниченными, то

$$|\Phi(x, t) - \Phi_\delta(x, t)| < 2M\delta.$$

Отсюда следует сходимость «метода потенциального сглаживания» при  $\delta \rightarrow 0$  в потенциальной метрике. Ясно, однако, что вне «пояска» решения  $u(x, t)$  и  $u_\delta(x, t)$  совпадают.

Изложенный метод позволяет приближенно строить разрывные решения квазилинейных уравнений, аппроксимируя их непрерывными решениями. Однако наибольший интерес представляет применение этого метода к случаю системы квазилинейных уравнений. К сожалению, на этом пути пока еще не получены окончательные результаты.

**6. Асимптотическое поведение обобщенных решений при  $t \rightarrow \infty$ .** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное решение однородного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad \Phi''_{uu}(u) > 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого не зависят от независимых переменных  $x, t$ . Пусть далее,

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > b > 0, \end{cases} \quad (2)$$

а в промежутке  $(0, b)$   $u_0(x)$  принимает произвольные ограниченные значения. Функцию  $u_0(x)$  будем считать кусочно-непрерывной. Итак,

$$|u_0(x)| \leq M, \quad |u(x, t)| \leq M. \quad (3)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \max_{|u| \leq M} |\varphi'_u(u)|, & A &= \max_{|u| \leq M} \varphi''_{uu}(u), \\ a &= \min_{|u| \leq M} \varphi''_{uu}(u), & 0 < a &\leq A \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и

$$\int_0^x u_0(\xi) d\xi = \Phi_0(x). \quad (5)$$

Решению  $u(x, t)$  поставим в соответствие потенциал

$$\Phi(x, t) = \int_{(0,0)}^{(x,t)} u dx - \varphi(u) dt, \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x). \quad (6)$$

Ввиду условий (2), (3) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(x) &= u^- x \quad \text{при } x \leq 0, \\ \Phi_0(x) &= \Phi_0(b) + (x - b)u^+ \quad \text{при } x \geq b, \\ |\Phi_0(x)| &\leq Mx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Мы изучим поведение решения  $u(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если бы начальные данные (1) были заданы лишь при  $x < 0$  ( $u_0(x) \equiv u^-$ ), то, очевидно, решение задачи Коши (1), (2) могло бы быть определено лишь при  $x < \varphi'_u(u^-)t$  и совпадало бы там тождественно с  $u^-$ . Оценим ширину области слева от прямой  $x = \varphi'_u(u^-)t$ , в которой решение  $u(x, t)$  задачи (1), (2) не совпадает с  $u^-$ , т. е.  $u(x, t) \neq u^-$ ; при этом  $u(x, t) \neq u^-$  за счет характеристик, выходящих из отрезка  $[0, b]$ . Очевидно, что никакая характеристика  $x = X(t, \bar{x}_0, u_0(\bar{x}_0))$  при  $0 \leq \bar{x}_0 \leq b$  не может лежать слева от прямой  $x = -\xi t$  ввиду ограниченности начальной функции  $u_0(x)$ ; однако такая оценка области влияния отрезка  $[0, b]$  является слишком грубой. Пусть  $u(x, t) \neq u^-$ ,  $x - \varphi'_u(u^-)t < 0$  и в точку  $(x, t)$  приходит характеристика, выходящая из точки  $\bar{x}_0$  отрезка  $0 \leq \bar{x}_0 \leq b$ , и  $u(x, t) = u_0(\bar{x}_0)$  (рис. 4.29). Для простоты обозначим

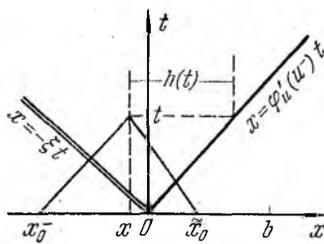


Рис. 4.29.

$$u_0(\bar{x}_0) = \bar{u}, \quad \varphi'_u(u^-)t - x = h,$$

Имеем равенства \*)

$$h = \varphi'_u(u^-)t - x, \quad (8)$$

$$x - \bar{x}_0 = \varphi'_u(\bar{u})t \quad \text{или} \quad h = t[\varphi'_u(u^-) - \varphi'_u(\bar{u})] - \bar{x}_0. \quad (9)$$

По формуле (2.3.46) вычислим  $\tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0)$ :

$$\tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) = \Phi_0(\bar{x}_0) + t[\bar{u}\varphi'_u(\bar{u}) - \varphi(\bar{u})]. \quad (10)$$

С помощью формулы (9) исключим из (10) величину  $t\bar{u}\varphi'_u(\bar{u})$ :

$$t\bar{u}\varphi'_u(\bar{u}) = \bar{u}t\varphi'_u(u^-) - \bar{u}\bar{x}_0 - \bar{u}h, \quad (11)$$

$$\tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) = \Phi_0(\bar{x}_0) - \bar{u}\bar{x}_0 - \bar{u}h + t[\bar{u}\varphi'_u(u^-) - \varphi(\bar{u})]. \quad (12)$$

С другой стороны, в эту же точку  $(x, t)$  при  $x - \varphi'_u(u^-)t < 0$  приходит характеристика  $x = X(t, x_0^-, u^-)$  при значении  $x_0^- < 0$  (рис. 4.29). Эта характеристика переносит в точку  $(x, t)$  значение  $u = u^-$  и значение потенциала  $\tilde{\Phi}(t, x_0^-)$ .

Итак,

$$x - x_0^- = \varphi'_u(u^-)t, \quad \text{или} \quad x_0^- = -h, \quad (13)$$

а по формуле (2.3.46)

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t, x_0^-) &= \Phi_0(x_0^-) + t[u^-\varphi'_u(u^-) - \varphi(u^-)] = \\ &= u^-x_0^- + t[u^-\varphi'_u(u^-) - \varphi(u^-)] = t[u^-\varphi'_u(u^-) - \varphi(u^-)] - hu^-. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно формулам (2.3.57), (2.3.58), для того чтобы  $u(x, t) = u_0(x_0) = \bar{u} \neq u^-$ , необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) \leq \tilde{\Phi}(t, x_0^-) \quad \text{или} \quad \tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) - \tilde{\Phi}(t, x_0^-) \leq 0. \quad (15)$$

Вычитая из формулы (12) формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) - \tilde{\Phi}(t, x_0^-) &= [\Phi_0(\bar{x}_0) - \bar{u}\bar{x}_0] + h(u^- - \bar{u}) + \\ &+ t[\varphi'_u(u^-)(\bar{u} - u^-) + \varphi(u^-) - \varphi(\bar{u})]. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь в формуле (16) оценим последний член. Учитывая, что  $\bar{u} < u^-$  и  $\varphi''_{uu}(u) > 0$ , получим по формуле Тейлора

$$\varphi(u^-) - \varphi(\bar{u}) \geq \varphi'_u(u^-)(u^- - \bar{u}) + \frac{a}{2}(u^- - \bar{u})^2. \quad (17)$$

Подставляя это выражение в (16), получим

$$\tilde{\Phi}(t, \bar{x}_0) - \tilde{\Phi}(t, x_0^-) \geq [\Phi_0(\bar{x}_0) - \bar{u}\bar{x}_0] + h(u^- - \bar{u}) + \frac{ta}{2}(u^- - \bar{u})^2. \quad (18)$$

\*) В случае, если  $\bar{x}_0$  — точка разрыва начальной функции  $u_0(x)$ , под  $\bar{u}$  следует понимать  $u_0^\alpha(\bar{x}_0)$  при соответствующем значении параметра  $\alpha$ .

Из формулы (9), учитывая, что  $u^- > \bar{u}$ , легко получим

$$\Phi'_u(u^-) - \Phi'_u(\bar{u}) = \frac{h + \bar{x}_0}{t} \quad \text{и} \quad (u^- - \bar{u}) \geq \frac{h + \bar{x}_0}{At}. \quad (19)$$

Последнее неравенство позволяет переписать (18) в виде

$$\bar{\Phi}(t, \bar{x}_0) - \Phi(t, x_0^-) \geq [\Phi_0(\bar{x}_0) - \bar{u}\bar{x}_0] + \frac{h(h + \bar{x}_0)}{At} + \frac{a(h + \bar{x}_0)^2}{2A^2t}. \quad (20)$$

Итак, для выполнения неравенства (15) необходимо, чтобы

$$[\Phi_0(\bar{x}_0) - \bar{u}\bar{x}_0] + \frac{h(h + \bar{x}_0)}{At} + \frac{a(h + \bar{x}_0)^2}{2A^2t} \leq 0 \quad (21)$$

или

$$\frac{h(h + \bar{x}_0)}{At} + \frac{a(h + \bar{x}_0)^2}{2A^2t} \leq [\bar{u}\bar{x}_0 - \Phi_0(\bar{x}_0)]. \quad (22)$$

Неравенство (22) ограничивает область переменных  $x, t$ , лежащую в полуплоскости  $t \geq 0$  слева от прямой  $x = \Phi'_u(u^-)t$ , так как

$$h = \Phi'_u(u^-)t - x.$$

Завышая область влияния отрезка  $[0, b]$ , будем считать, что точка  $(x, t)$  ей принадлежит, если существует хотя бы одно значение  $\bar{x}_0$  ( $0 \leq \bar{x}_0 \leq b$ ), для которого при данных  $x, t$  справедливо неравенство (22). Так как  $|\bar{u}| \leq M$ ,  $|\Phi_0(\bar{x}_0)| \leq M\bar{x}_0$ , то усиливая \*) неравенство (22), запишем:

$$h + \frac{(h + \bar{x}_0)a}{2A} \leq \frac{2M\bar{x}_0At}{h + \bar{x}_0} < 2AMt \quad (23)$$

и

$$h < 2AMt. \quad (24)$$

Неравенство (24) показывает, что при малых  $t$  величина  $h$  растет линейно с ростом  $t$ . Наоборот, мы заведомо увеличим область влияния отрезка  $[0, b]$ , если в (22) положим  $\bar{x}_0 = 0$ , а в правой части возьмем максимум при всех  $\bar{x}_0$ . Тогда запишем:

$$h^2 \left( \frac{2A + a}{2A} \right) \leq 2MbAt \quad \text{или} \quad h^2 < \frac{4A^2Mbt}{2A + a} < 2AMbt. \quad (25)$$

Мы видим, что при больших значениях  $t$  величина  $h$  растет, как  $\sqrt{t}$ . Таким образом, область влияния лежит внутри области, заштрихованной на рис. 4.30:

$$h < \sqrt{2AMbt} = h(t). \quad (26)$$

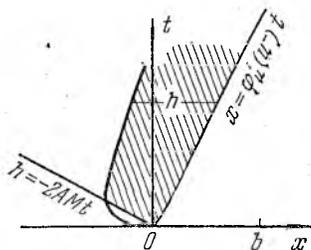


Рис 4.30.

\*) То есть заведомо увеличивая область влияния отрезка  $[0, b]$ .

Совершенно аналогично оценивается область влияния отрезка  $[0, b]$  справа от прямой

$$x = b + \varphi'_u(u^+)t.$$

Неравенство (22) остается в силе, если только под  $h$  понимать теперь величину

$$h = x - b - \varphi'_u(u^+)t, \quad (27)$$

а правую часть брать с обратным знаком. Неравенство (26) остается при этом вообще без изменения.

В случае  $u^- > u^+$  существует такое  $t_1 > 0$ , что при  $t \geq t_1$

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x - c < Dt, \\ u^+ & \text{при } x - c > Dt, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$D = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-}. \quad (29)$$

В самом деле, если  $u^- > u^+$ , то прямые  $x = \varphi'_u(u^-)t$  и  $x = b + \varphi'_u(u^+)t$  расположены так, как на рис. 4.31. Так как расстояние между этими прямыми растет пропорционально  $t$ , а границы областей влияния отрезка  $[0, b]$  отстоят от этих прямых на расстояние

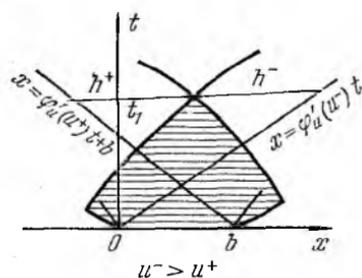


Рис. 4.31.

$$h_1 = \varphi'_u(u^-)t - x = \sqrt{2AMbt},$$

$$h_2 = -b - \varphi'_u(u^+)t + x = \sqrt{2AMbt}$$

пересекутся. Для определения величины  $t_1$  имеем уравнение

$$2\sqrt{2AMbt_1} + b = t_1[\varphi'_u(u^-) - \varphi'_u(u^+)]. \quad (30)$$

Пусть  $t_1[\varphi'_u(u^-) - \varphi'_u(u^+)] > 2b$ . Тогда из (30) получаем

$$t_1 \leq \frac{4\sqrt{2AMbt_1}}{\varphi'_u(u^-) - \varphi'_u(u^+)} \quad \text{или} \quad t_1 \leq \frac{32AMb}{x^2[u^- - u^+]^2} = T. \quad (31)$$

Теперь мы с очевидностью заключаем, что при  $t_1 = T$  справедлива формула (28). В самом деле, так как область значений переменных  $x, t$ , заданная условиями

$$b + \varphi'_u(u^+)t < x < \varphi'_u(u^-)t,$$

лжит слева от прямой  $x = \varphi'_u(u^-)t$  и справа от прямой  $x = \varphi'_u(u^+)t + b$ , то для того, чтобы в этой области  $u(x, t) \neq u^-$  и  $u(x, t) \neq u^+$ , необходимо, чтобы точка  $(x, t)$  принадлежала области влияния отрезка  $[0, b]$ , что при  $t \geq T$  невозможно.

Для определения величины  $c$  в формуле (28) рассмотрим некоторую точку  $x_A$  на прямой  $t = t_1$ . Определим эту точку из условий

$$x_A - \varphi'_u(u^-)t_1 = x_0^-, \quad x_A - \varphi'_u(u^+)t_1 = x_0^+, \quad (32)$$

$$\tilde{\Phi}(t_1, x_0^-) = \tilde{\Phi}(t_1, x_0^+). \quad (33)$$

Условие (33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u^-x_0^- + t_1[u^- \varphi'_u(u^-) - \varphi(u^-)] = \\ = \Phi_0(b) + u^+(x_0^+ - b) + t_1[u^+ \varphi'_u(u^+) - \varphi(u^+)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассматривая уравнение (32), (34) как уравнения, определяющие величины  $x_0^-$ ,  $x_0^+$ ,  $x_A$ , находим величины  $x_A$ ,  $c$ :

$$x_A = \frac{\Phi_0(b) - u^+b}{u^- - u^+} + Dt_1 = c + Dt_1, \quad c = \frac{\Phi_0(b) - u^+b}{u^- - u^+}. \quad (35)$$

Итак, мы установили, что решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) при условии  $u^- > u^+$  совпадает при  $t \geq T$  с решением  $u^0(x, t)$  задачи о распаде разрыва

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u^0)}{\partial x} = 0, \quad u^0(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < c, \\ u^+, & x > c. \end{cases} \quad (36)$$

Полученный результат может быть сформулирован иначе. Пусть  $u$  и  $\bar{u}$  — обобщенные решения уравнения (1), и пусть

$$u(x, 0) \equiv \bar{u}(x, 0) \quad \text{при} \quad |x| \geq b. \quad (37)$$

Если, далее,

$$u(x, 0) \equiv \bar{u}(x, 0) = \begin{cases} u^- & \text{при} \quad x \leq -b, \\ u^+ & \text{при} \quad x \geq b \end{cases} \quad (38)$$

и  $u^- > u^+$ , то существует  $t_1 > 0$  такое, что при  $t \geq t_1$

$$u(x, t) \equiv \bar{u}(x + c, t), \quad (39)$$

где

$$c = \frac{1}{u^- - u^+} \int_{-b}^b [\bar{u}(x, 0) - u(x, 0)] dx. \quad (40)$$

Доказанное нами свойство обобщенных решений выражает тот факт, что в случае  $u^- > u^+$  обобщенные решения задачи Коши (1) — (7) «с точностью до сдвига» не зависят при достаточно больших временах от начальных значений на любом конечном отрезке начальной оси  $t = 0$ .

Заметим, что полученный результат может быть усилен в двух направлениях:

- 1) для более общих уравнений, когда  $\varphi = \varphi(u, x, t)$ , при некоторых предположениях о функции  $\varphi$ ;
- 2) ослабляется требование (38):

$$|\bar{u}(x, 0) - u(x, 0)| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty,$$

$$u(x, 0) \rightarrow \begin{cases} u^- & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u^+ & \text{при } x \rightarrow +\infty; \end{cases}$$

при этом требуется определенный порядок стремления к пределу.

Изучим асимптотическое поведение решения  $u(x, t)$  в случае  $u^- < u^+$ . В этом случае, как легко видно из рис. 4.32, область влияния отрезка  $[0, b]$  не исчезает при  $t \rightarrow \infty$ , а, наоборот, становится неограниченной. В этом случае уже нельзя утверждать, что для достаточно больших  $t$

$$u(x, t) = u^0(x, t),$$

где  $u^0(x, t)$  — решение задачи о распаде. Однако и в этом случае решение  $u(x, t)$  близко к решению  $u^0(x, t)$  при достаточно больших  $t$ . Именно докажем, что

$$|u(x, t) - u^0(x, t)| \Rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Пусть  $u^0$  есть решение задачи о распаде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u^0)}{\partial x} &= 0, \\ u^0(x, 0) &= \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad u^- \leq u^+. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Функция  $u^0$  задается формулами

$$u^0(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x \leq \varphi'_u(u^-)t, \\ f\left(\frac{x}{t}\right) & \text{при } \varphi'_u(u^-)t \leq x \leq \varphi'_u(u^+)t, \\ u^+ & \text{при } x \geq \varphi'_u(u^+)t, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$\varphi'_u(f(\xi)) = \xi, \quad \text{т. е. } f(\xi) = [\varphi'_u]^{-1}(\xi). \quad (44)$$

Таким образом, слева от луча  $OA$   $u^0(x, t) \equiv u^-$ , а справа от луча  $OC$   $u^0(x, t) \equiv u^+$  (рис. 4.32), в зоне же  $AOC$   $u^0 = f\left(\frac{x}{t}\right)$ .

Как мы видим, вне области влияния отрезка  $[0, b]$  это также имеет место для  $u(x, t)$ , т. е. при

$$\varphi_u(u^-)t - x \geq h(t) \quad u(x, t) \equiv u^-, \quad (45)$$

и при

$$x - \varphi_u(u^+)t - b \geq h(t) \quad u(x, t) \equiv u^+. \quad (46)$$

Следовательно, доказывать свойство (41) надо только в области влияния отрезка  $[0, b]$  — зоне  $EOBD$ . Пусть  $(x, t)$  — любая точка, лежащая внутри зоны  $EOBD$ . Тогда, так как через эту точку не проходит ни одна характеристика  $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$  при  $x_0 \notin [0, b]$ , то, следовательно,

$$u(x, t) = u_0(\bar{x}_0), \quad x - \varphi_u(u_0(\bar{x}_0))t = \bar{x}_0, \quad (47)$$

при этом

$$0 \leq \bar{x}_0 \leq b. \quad (48)$$

Из (47) получаем

$$\varphi_u(u_0(\bar{x}_0)) = \varphi_u(u(x, t)) = \frac{x}{t} - \frac{\bar{x}_0}{t}. \quad (49)$$

Сравнивая (49) с (44), заключаем, что

$$u(x, t) = u_0(\bar{x}_0) = f\left(\frac{x}{t} - \frac{\bar{x}_0}{t}\right). \quad (50)$$

Таким образом, в зоне  $AOC$

$$|u(x, t) - u^0(x, t)| = \left| f\left(\frac{x}{t} - \frac{\bar{x}_0}{t}\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq \max_{|\eta| \leq \frac{\bar{x}_0}{t}} |f'(\eta)| \left| \frac{\bar{x}_0}{t} \right|. \quad (51)$$

Так как  $f'_\eta = 1/\varphi''_{uu}$ , то из (51) следует

$$|u(x, t) - u^0(x, t)| \leq \frac{\bar{x}_0}{at} \leq \frac{b}{at}. \quad (52)$$

Таким образом, свойство (41) в зоне  $AOC$  доказано. Пусть теперь  $(x, t)$  — любая точка в зоне  $EOBD$ , например, пусть эта точка лежит справа от прямой  $x = \varphi_u(u^+)t$ , т. е. в зоне  $COBD$  (рис. 4.32). Тогда в этой точке  $u^0 = u^+$ , а  $u(x, t)$  по-прежнему определяется из формул (47), (48).

Согласно определению области влияния отрезка  $[0, b]$ , имеем

$$x - \varphi_u(u^+)t \leq b + h(t) = b + \sqrt{2AMbt}. \quad (53)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^0(x, t)| &= \left| f\left(\frac{x - \bar{x}_0}{t}\right) - u^+ \right| = \\ &= \left| f\left(\frac{x - \bar{x}_0}{t}\right) - f(\varphi_u(u^+)) \right| \leq \frac{|x - \bar{x}_0 - \varphi_u(u^+)t|}{at} \leq \\ &\leq \frac{|b - \bar{x}_0 + h(t)|}{at} = \frac{b}{at} + \frac{h(t)}{at} = \frac{b}{at} + \frac{\sqrt{2AMb}}{a\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Так как слева от луча  $OA$  неравенство (54) доказывается совершенно аналогично, то тем самым мы доказали свойство обобщенного решения (41) и установили при этом порядок стремления  $u(x, t)$  к  $u^0(x, t)$ , именно:

$$|u(x, t) - u^0(x, t)| < \frac{4b}{at} + \frac{8}{a\sqrt{t}} \sqrt{AMb}. \quad (55)$$

Объединяя результат для случаев  $u^- < u^+$  и  $u^- > u^+$ , можно его усилить и сформулировать следующим образом.

Пусть  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  — ограниченные обобщенные решения уравнения (1), начальные значения которых отличаются лишь на конечном отрезке начальной оси, т. е.

$$|u(x, 0) - \bar{u}(x, 0)| = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq b. \quad (56)$$

Тогда существуют константы  $c, D, t_1$  такие, что при  $t \geq t_1$

$$|u(x, t) - u(x + c, t)| \leq \frac{D}{\sqrt{t}}. \quad (57)$$

Подчеркнем, что в этой формулировке не предполагается, что

$$u(x, 0) \rightarrow u^-, \quad u^+ \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad +\infty.$$

Доказанные выше асимптотические свойства обобщенных решений одного квазилинейного уравнения существенно связаны с нелинейностью уравнения. В самом деле, решения линейных уравнений, отличающиеся в начальных значениях, отличаются друг от друга при всех значениях  $t > 0$ , и эта «невязка», вообще говоря, не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**7. Метод вязкости.** В п. 1 этого параграфа мы уже рассмотрели одно из применений метода вязкости — обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

было получено как предел при  $\mu \rightarrow 0$  решений  $u_\mu(x, t)$  другой задачи Коши:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_\mu^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad u_\mu(x, 0) = u_0(x), \quad \mu > 0.$$

При этом для  $u_\mu$  была получена явная формула, которая позволила совершить переход к пределу при  $\mu \rightarrow 0$  и изучить свойства обобщенного решения  $u(x, t)$ . Естественно, что для более сложных уравнений трудно рассчитывать на получение аналитических формул для решения. Однако, желая познакомить читателя с применениями метода вязкости, мы рассмотрим некоторые простые случаи, из которых можно сделать вывод о возможностях этого метода.

Будем рассматривать задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad \Phi'''(u) > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |u_0(x)| \leq M. \quad (2)$$

Наряду с этой рассмотрим другую задачу:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u_\mu)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2} \quad (\mu > 0), \quad (3)$$

$$u_\mu(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Будем считать, что начальная функция  $u_0(x)$  обладает непрерывной первой производной, и пусть

$$|u_0'(x)| \leq K \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5)$$

Первый вопрос, который сразу же возникает, — это вопрос о существовании решения  $u_\mu$  и его свойствах.

Изучение этого вопроса вывело бы нас далеко за рамки излагаемого предмета, посвященного в основном системам квазилинейных уравнений гиперболического типа и уравнениям газовой динамики. Поэтому, отсылая читателя по этому поводу к специальным исследованиям (см., например, Т. Д. Вентцель [1957], О. А. Ладыженская [1956], О. А. Олейник [1955]), мы будем предполагать известным следующее:

1. Ограниченное решение  $u_\mu(x, t)$  существует при любом  $t > 0$  и единственно.

2. Для любой начальной функции  $u_0(x)$ , удовлетворяющей условиям (2), (5), производные  $u_\mu$  существуют и остаются ограниченными для всех  $t > 0$ . В частности, при  $t > 0$  существуют непрерывные производные, входящие в уравнение (3).

3. Решение  $u_\mu$  и его производная  $p_\mu = \frac{\partial u_\mu}{\partial x}$  удовлетворяют *принципу максимума*, который формулируется в виде неравенств

$$|u_\mu| \leq M, \quad (6)$$

$$p_\mu = \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \leq K \quad (7)$$

справедливых при любых  $x, t \geq 0$ .

Проиллюстрируем принцип максимума (6) следующими наглядными рассуждениями. Пусть функция  $u_\mu(x, t_1)$ , рассматриваемая как функция переменного  $x$  на прямой  $t = t_1$ , имеет в точке  $x = x_1$  относительный максимум (минимум). Тогда в этой точке выполнены соотношения

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x}(x_1, t_1) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

Согласно уравнению (3) заключаем:

$$\frac{\partial u_\mu(x_1, t_1)}{\partial t} = \left[ \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2} - \Phi'_u(u_\mu) \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right]_{x=x_1, t=t_1} \leq 0 \quad (\geq 0).$$

Это неравенство показывает, что каждый относительный максимум по переменному  $x$  функции  $u_\mu(x, t)$  не возрастает с ростом времени  $t$ . Отсюда, однако, еще не вытекает неравенство (6), так как функция  $u_\mu$  может не принимать свое максимальное (минимальное) значение ни в какой конечной точке.

Более детальное доказательство принципа максимума учитывает, что начальная функция  $u_0(x)$  ограничена.

Что касается принципа максимума для производной  $p_\mu$ , то обратим внимание, что неравенство (7) ограничивает производную  $p_\mu$  лишь с одной стороны, именно сверху. Это связано с тем, что уравнение, получаемое дифференцированием (3):

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial t} + \Phi'_u(u_\mu) \frac{\partial p_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 p_\mu}{\partial x^2} - \Phi''_{uu}(u_\mu) p_\mu^2, \quad \Phi''_{uu} > 0,$$

позволяет лишь утверждать, что относительный максимум  $p_\mu(x, t)$  не возрастает с ростом времени  $t$ . Что касается минимумов  $p_\mu$ , то они могут и убывать.

4. При всех  $\mu > 0$  и произвольных  $x, t \geq 0$  имеем

$$\left| \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right| \leq C, \quad (8)$$

где  $C$  — некоторая положительная величина, не зависящая от  $\mu$ .

Докажем \*) неравенство (8). Обозначая

$$z = \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} - \Phi(u_\mu), \quad (9)$$

запишем уравнение (3) в виде  $\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}$ . Дифференцируя уравнения (9) по переменному  $t$ , найдем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial t} \right) - \Phi'_u(u_\mu) \frac{\partial u_\mu}{\partial t}.$$

Подставляя сюда  $\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}$ , получим  $\frac{\partial z}{\partial t} + \Phi'_u(u_\mu) \frac{\partial z}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ . Таким образом, функция  $z$  удовлетворяет нелинейному уравнению теплопроводности. Следовательно, из принципа максимума получаем

$$|z(x, t)| \leq \max_x |z(x, 0)|.$$

\*) Это доказательство было сообщено нам студентом МГУ В. Г. Сушко в 1964 г.

Отсюда следует неравенство (8) и, в частности, более точное неравенство

$$\begin{aligned} \min_x \left[ \mu \frac{du_0(x)}{dx} - \varphi(u_0(x)) \right] + \varphi(u_\mu) &\leq \mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \leq \\ &\leq \max_x \left[ \mu \frac{du_0(x)}{dx} - \varphi(u_0(x)) \right] + \varphi(u_\mu). \end{aligned}$$

При выполнении требований 1—4 можно доказать также некоторые дальнейшие свойства решений  $u_\mu(x, t)$ . Покажем, в частности, что функция  $\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x}$  в среднем по любой конечной области переменных  $x, t$  стремится к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ .

Умножая уравнение (3) на  $u_\mu$ , запишем результат в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_\mu^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\mu) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{u_\mu^2}{2} - \mu \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right)^2, \quad (10)$$

где

$$F'(u_\mu) = u_\mu \varphi'(u_\mu).$$

Проинтегрируем уравнение (10) по прямоугольнику  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ :

$$\int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{u_\mu^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\mu) \right] dt dx = \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{u_\mu^2}{2} - \mu \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right)^2 \right] dt dx.$$

Это соотношение перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right)^2 dt dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{u_\mu^2(x, 0) - u_\mu^2(x, t_1)}{2} \right] dx + \\ &+ \int_0^{t_1} \left\{ \mu u_\mu(x_2, t) \frac{\partial u_\mu}{\partial x}(x_2, t) - F(u_\mu(x_2, t)) - \mu u_\mu(x_1, t) \frac{\partial u_\mu}{\partial x}(x_1, t) + \right. \\ &\quad \left. + F(u_\mu(x_1, t)) \right\} dt. \end{aligned}$$

Ввиду неравенств (6) и (8) правая часть оценивается сверху:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right)^2 dt dx &\leq \frac{1}{2} M^2 (x_2 - x_1) + 2Ft_1 + 2MCt_1 = \\ &= \frac{M^2}{2} (x_2 - x_1) + 2t_1 (F + MC), \quad (11) \end{aligned}$$

где константа  $F$  определена таким образом, что

$$F \geq |F(u)| \quad \text{при} \quad |u| \leq M.$$

Так как правая часть (11) не зависит от  $\mu$ , то отсюда следует, что для любой конечной области  $\mathcal{G}$  полуплоскости  $t \geq 0$

$$\mu \iint_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq D,$$

где константа  $D$  зависит только от области  $\mathcal{G}$ .

Применим неравенство Буняковского

$$\iint_{\mathcal{G}} |uv| dt dx \leq \sqrt{\iint_{\mathcal{G}} u^2 dt dx} \sqrt{\iint_{\mathcal{G}} v^2 dt dx},$$

в котором положим  $u = \mu \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x}$ ,  $v = 1$ . Тогда получим

$$\mu \iint_{\mathcal{G}} \left| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right| dt dx \leq \sqrt{S_{\mathcal{G}} \mu^2 \iint_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right)^2 dt dx} \leq \sqrt{\mu} \sqrt{S_{\mathcal{G}} D}, \quad (12)$$

где  $S_{\mathcal{G}}$  — площадь области  $\mathcal{G}$ . Неравенство (12) показывает, что  $\iint_{\mathcal{G}} \mu \left| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right| dt dx$  стремится к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ , как  $\sqrt{\mu}$ .

Теперь мы наметим путь доказательства сходимости в среднем при  $\mu \rightarrow 0$  решений  $u_{\mu}(x, t)$  к решению  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2). Введем потенциал  $\Phi_{\mu}(x, t)$ . Согласно уравнению (3) контурный интеграл

$$\Phi_{\mu}(x, t) = \int_{(0,0)}^{(x,t)} u_{\mu} dx + \left[ \mu \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} - \varphi(u_{\mu}) \right] dt$$

не зависит от пути интегрирования и определяет непрерывную и дифференцируемую функцию, производные которой удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x} = u_{\mu}, \quad \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial t} = \mu \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} - \varphi(u_{\mu}).$$

Исключая из этих равенств величину  $u_{\mu}$ , получим

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 \Phi_{\mu}}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Потенциал  $\Phi_{\mu}$  принимает следующие начальные значения:

$$\Phi_{\mu}(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\eta) d\eta.$$

Ввиду неравенств (6), (8) заключаем, что

$$|\Phi_{\mu}(x, t)| \leq M|x| + [C + \varphi]t, \quad (14)$$

где  $|\varphi(u)| \leq \varphi$  при  $|u| \leq M$  и семейство функций  $\Phi_\mu(x, t)$  ограничено при всех  $\mu > 0$  в любой точке  $(x, t)$ . Наконец, мы запишем очевидные неравенства:

$$\left| \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t} \right| \leq C + \varphi.$$

Докажем равномерную сходимость в любой конечной части полуплоскости  $t \geq 0$  потенциала  $\Phi_\mu(x, t)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Для этого продифференцируем уравнение (13) по переменному  $\mu$ . Обозначая  $\Phi'_\mu = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \mu}$ , получим

$$\frac{\partial \Phi'_\mu}{\partial t} + \varphi'(u_\mu) \frac{\partial \Phi'_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \Phi'_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 \Phi'_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x}, \quad (15)$$

а согласно начальному условию

$$\Phi'_\mu(x, 0) \equiv 0.$$

Считая функцию  $u_\mu$  заданной, мы видим, что величина  $\Phi'_\mu$  удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (15) и нулевому начальному условию. Согласно неравенству (14)  $\Phi_\mu(x, t)$  растет не быстрее линейной функции при  $x \rightarrow \pm\infty$ , поэтому  $\Phi'_\mu$  удовлетворяет принципу максимума для уравнения (15):

$$\Phi'_\mu(x, t) \leq t \max_{(\xi, \tau)} \frac{\partial u_\mu(\xi, \tau)}{\partial \xi}.$$

Так как согласно (7)  $\frac{\partial u_\mu}{\partial \xi} \leq K$ , то

$$\Phi'_\mu(x, t) \leq Kt.$$

Поэтому для функции

$$\Psi_\mu = \Phi_\mu - 2Kt\mu$$

выполнено неравенство

$$\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial \mu} \leq -Kt,$$

так что последовательность функций  $\Psi_\mu(x, t)$  монотонно убывает при  $\mu \rightarrow 0$ , следовательно, в силу равномерной ограниченности ее снизу, равномерно по  $x, t$  сходится. Поэтому существует предел

$$\Phi(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_\mu(x, t).$$

Выясним некоторые простейшие свойства потенциала  $\Phi(x, t)$ .

Так как  $|u_\mu| \leq M$  и  $\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} = u_\mu$ , то

$$|\Phi(x + \Delta x, t) - \Phi(x, t)| \leq M |\Delta x|.$$

Аналогично

$$|\Phi(x, t + \Delta t) - \Phi(x, t)| \leq [C + \varphi] |\Delta t|.$$

Таким образом, потенциал  $\Phi(x, t)$  — липшиц-непрерывная функция своих переменных, которая принимает начальные значения

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = \int_0^x u_0(\eta) d\eta$$

и, как всякая липшиц-непрерывная функция, почти всюду обладает производными  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Покажем, что почти всюду эти производные удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (16)$$

а последовательность  $u_\mu$  стремится при  $\mu \rightarrow 0$  к  $u(x, t)$  почти всюду, где

$$u(x, t) = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}.$$

Для этого заметим, что из равномерной ограниченности  $u_\mu$  (6) и односторонней ограниченности производной  $p_\mu$  (7) следует ограниченность вариации функций  $u_\mu$  на любом конечном отрезке прямых  $t = \text{const}$ .

Пользуясь этим обстоятельством, можно показать, что почти всюду

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t} \rightarrow -\varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

при  $\mu \rightarrow 0$ , так что потенциал  $\Phi(x, t)$  почти всюду удовлетворяет уравнению (16).

Таким образом, потенциал  $\Phi(x, t)$  липшиц-непрерывен, почти всюду удовлетворяет уравнению (16) и принимает нужные значения при  $t = 0$ . Поэтому функция  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  определена почти всюду, ограничена и измерима, удовлетворяет ввиду следствия из (7):

$$\frac{\Phi(x + \Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} < K,$$

условию устойчивости и является тем самым обобщенным решением задачи Коши (1), (2).

Отметим еще, что с помощью метода вязкости может быть рассмотрена задача Коши также и в случае произвольной, ограниченной, измеримой начальной функции  $u_0(x)$  (см. О. А. Олейник [1957]).

Покажем еще одно из применений метода вязкости. Следуя И. М. Гельфанду, получим условия устойчивости обобщенного решения одного квазилинейного уравнения с невыпуклой функцией  $\varphi(u)$  (см. также § 1).

Пусть кусочно-непрерывное решение  $u(x, t)$  является пределом решений  $u_\mu(x, t)$  уравнения с вязкостью

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u_\mu)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( B(u_\mu) \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right), \quad B(u_\mu) > 0, \quad \mu > 0. \quad (17)$$

Пусть в точке  $x_1, t_1 > 0$  решение  $u(x, t)$  разрывно,  $u(x_1 - 0, t_1) = u^-$ ,  $u(x_1 + 0, t_1) = u^+$  и разрыв перемещается в плоскости  $x, t$  вдоль кривой  $x = x(t)$ , при этом  $x'(t_1) = D$ .

Естественно считать, что в малой окрестности точки  $x_1, t_1$  решение  $u(x, t)$  представляется приближенно в виде  $u(x, t) = \bar{u}(x - Dt)$ , где  $\bar{u}(x) = u^-$  при  $x < 0$  и  $\bar{u}(x) = u^+$  при  $x > 0$ . Будем считать, что решение  $u_\mu(x, t)$  в малой окрестности точки  $x_1, t_1$  также представляет собой бегущую волну, т. е.  $u_\mu(x, t) = \bar{u}_\mu\left(\frac{x - Dt}{\mu}\right)$ ; при этом  $\bar{u}_\mu(x) \rightarrow u^-$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\bar{u}_\mu(x) \rightarrow u^+$  при  $x \rightarrow \infty$  (при этом мы считаем, что параметр  $\mu$  достаточно мал).

Итак, будем искать стационарное решение  $u_\mu(x, t)$  уравнения (17) в виде

$$u_\mu(x, t) = \bar{u}_\mu\left(\frac{x - Dt}{\mu}\right). \quad (18)$$

Обозначая  $\xi = \frac{x - Dt}{\mu}$ , получим из (17) обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\bar{u}_\mu(\xi)$ :

$$\left[ \varphi'_\mu(\bar{u}_\mu(\xi)) - D \right] \frac{d\bar{u}_\mu(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( B(\bar{u}_\mu) \frac{d\bar{u}_\mu(\xi)}{d\xi} \right); \quad (19)$$

при этом из (18) следуют краевые условия для уравнения (19):

$$\bar{u}_\mu(\xi) \rightarrow \begin{cases} u^- & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ u^+ & \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (20)$$

Интегрируя уравнение (19) от точки  $\xi = -\infty$  до  $\xi$  и считая, что  $\frac{d\bar{u}_\mu}{d\xi} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , получим

$$B(\bar{u}_\mu) \frac{d\bar{u}_\mu}{d\xi} = \varphi(\bar{u}_\mu) - \varphi(u^-) - D(\bar{u}_\mu - u^-) = F(\bar{u}_\mu). \quad (21)$$

Для того, чтобы  $\frac{d\bar{u}_\mu}{d\xi} \rightarrow 0$  при  $\bar{u}_\mu \rightarrow u^+$ , необходимо также, чтобы  $F(u^+) = 0$ , т. е.

$$D = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (22)$$

что, как мы видели в § 1, вытекает также из условий Гюгонио.

Итак, для существования интегральной кривой задачи (19), (20) необходимо, чтобы  $F(u^-) = F(u^+) = 0$ . Этого, однако, недостаточно.

Другим необходимым условием существования  $\bar{u}_\mu$  является требование отсутствия перемены знака у функции  $F(\bar{u}_\mu)$  на интервале  $(u^-, u^+)$ . В самом деле, если на этом интервале существует точка  $u^*$  такая, что слева и справа от  $u^*$  функция  $F(u)$  имеет разные знаки, то, очевидно, не существует интегральной кривой  $\bar{u}_\mu = \bar{u}_\mu(\xi)$ .

Умножая уравнения (21) на величину  $2(\bar{u}_\mu - u^-)$ , придадим ему следующий вид:

$$B(\bar{u}_\mu) \frac{d}{d\xi} (\bar{u}_\mu - u^-)^2 = 2(\bar{u}_\mu - u^-) F(\bar{u}_\mu). \quad (23)$$

Теперь очевидно, что для существования  $\bar{u}_\mu(\xi)$  необходимо также, чтобы правая часть (23) была неотрицательна, т. е.

$$2(\bar{u}_\mu - u^-) F(\bar{u}_\mu) \geq 0.$$

В самом деле, так как  $B(\bar{u}_\mu) > 0$ , то из существования  $\bar{u}_\mu(\xi)$  вытекает, что величина  $(\bar{u}_\mu - u^-)^2$  не убывает с ростом переменного  $\xi$ , так как в противном случае на интервале  $(u^-, u^+)$  функция  $F(u)$  меняет свой знак.

Аналогично легко получить, что величина  $(\bar{u}_\mu - u^+)^2$  не возрастает с ростом  $\xi$ , поэтому  $2(\bar{u}_\mu - u^+) F(\bar{u}_\mu) \leq 0$ .

Деля каждое из последних двух неравенств на положительные величины  $2(\bar{u}_\mu - u^-)^2$ ,  $2(\bar{u}_\mu - u^+)^2$ , придадим им следующий вид:

$$\frac{\varphi(\bar{u}_\mu) - \varphi(u^-)}{\bar{u}_\mu - u^-} \geq D = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-} \geq \frac{\varphi(\bar{u}_\mu) - \varphi(u^+)}{\bar{u}_\mu - u^+}; \quad (24)$$

при этом, очевидно,  $\bar{u}_\mu$  — любое число из интервала  $(u^-, u^+)$ . Итак, мы приходим к заключению, что разрывное решение  $u(x, t)$  может рассматриваться как предел решений  $u_\mu(x, t)$  при  $\mu \rightarrow 0$  лишь в том случае, если на линии разрыва  $x = x(t)$  в каждой ее точке выполнено условие (24). Легко заметить, что полученное здесь условие (24) совпадает с условием устойчивости, полученным нами ранее в § 1 из совершенно других соображений.

В заключение отметим, что в настоящее время доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи Коши в случае невыпуклой функции  $\varphi(u)$ . При этом устойчивость обобщенного решения понимается как выполнение условий (24).

### § 3. Система квазилинейных уравнений

1. **Вводные замечания.** Теперь мы будем рассматривать консервативную систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(u, x, t)}{\partial x} = f_i(u, x, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

которую для краткости будем записывать в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = f(u, x, t), \quad (2)$$

понимая под  $u$ ,  $\varphi$ ,  $f$  векторные функции с  $n$  компонентами. Мы будем считать в дальнейшем, что вектор-функции  $\varphi(u, x, t)$ ,  $f(u, x, t)$  обладают двумя непрерывными производными по всем своим переменным в рассматриваемой области изменения переменных  $u$ ,  $x$ ,  $t$ .

Система дифференциальных уравнений (2) в гиперболическом случае приводится, как мы видели в главе 1, к виду

$$l_\alpha^k(u, x, t) \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \xi_k(u, x, t) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right] = g_k(u, x, t), \quad (3)$$

при этом

$$\text{Det}((l_\alpha^k(u, x, t))) \neq 0. \quad (4)$$

Вектор  $l^k(u, x, t) = \{l_\alpha^k(u, x, t)\}$  — левый собственный вектор матрицы  $A(u, x, t) = \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right) \right)$ , а  $\xi_k(u, x, t)$  — соответствующее собственное значение, т. е.

$$l^k(u, x, t) A(u, x, t) = \xi_k(u, x, t) l^k(u, x, t). \quad (5)$$

На протяжении всего этого параграфа мы будем рассматривать лишь системы уравнений (2), (3), гиперболические в узком смысле, т. е. считать, что

$$\xi_1(u, x, t) < \xi_2(u, x, t) < \dots < \xi_n(u, x, t). \quad (6)$$

Задача построения классических решений системы (2) рассматривалась в главе 1, а здесь мы будем изучать обобщенные (разрывные) решения.

Обобщенное решение системы (2) удовлетворяет интегральным законам сохранения

$$\oint_C u \, dx - \varphi(u, x, t) \, dt + \int \int_{\mathcal{D}_C} f(u, x, t) \, dx \, dt = 0, \quad (7)$$

а в области, где существуют первые производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , — дифференциальным уравнениям (2) либо (3); последние мы

также будем записывать более кратко:

$$t^k \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = g_k. \quad (8)$$

Для системы квазилинейных уравнений (2) мы будем ставить задачу Коши с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (9)$$

где  $u_0(x)$  — вообще говоря, разрывная ограниченная вектор-функция.

Как мы видели в § 1, разумная постановка задачи Коши приводит к некоторым условиям устойчивости, которым должны удовлетворять обобщенные решения этой задачи.

В этом параграфе мы будем рассматривать в основном обобщенные решения, имеющие кусочно-гладкие линии разрыва  $x = x(t)$ , вне которых они являются классическими решениями системы (2).

Условия устойчивости, в соответствии с § 1, будем понимать в следующем смысле.

Каждой линии разрыва  $x = x(t)$  ставится в соответствие некоторый номер  $k$ , называемый индексом линии разрыва. Для этого номера  $k$  на линии  $x = x(t)$  выполнены неравенства

$$\xi_k(u(x(t) - 0, t), x(t), t) > D > \xi_k(u(x(t) + 0, t), x(t), t), \quad (10)$$

$$\xi_{k-1}(u(x(t) - 0, t), x(t), t) < D < \xi_{k+1}(u(x(t) + 0, t), x(t), t), \quad (11)$$

$$D = x'(t).$$

В наиболее простой форме свойства обобщенных решений систем квазилинейных уравнений могут быть изучены на примере однородной нелинейной системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

т. е. в случае, когда вектор  $\Phi$  не зависит от переменных  $x, t$ , а  $f = 0$ .

**2. Автомодельные решения системы квазилинейных уравнений.** Решения системы уравнений (3.1.12), зависящие лишь от одного переменного  $y = (x - x_0)/(t - t_0)$ , называются автомодельными. Не ограничивая общности, будем считать  $t_0 = x_0 = 0$ . Мы ищем решение  $u(y)$  системы (3.1.12), определенное при  $t \geq 0$  и зависящее лишь от переменного  $y = \frac{x}{t}$ . Совершая в (3.1.12) подстановку по формулам

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{d}{dy} = -\frac{y}{t} \frac{d}{dy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{dy},$$

получим, что автомодельное решение  $u = u(y)$  удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[A(u) - yE] \frac{du}{dy} = 0, \quad A(u) = \left( \left( \frac{\partial \Phi_i(u)}{\partial u_j} \right) \right), \quad (1)$$

где  $E$  — единичная матрица  $n$ -го порядка.

Из системы уравнений (1) следует, что если

$$y \neq \xi_k(u) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то вектор  $\frac{du}{dy}$  тождественно равен нулю:

$$\frac{du}{dy} \equiv 0,$$

и решение  $u(y) \equiv \text{const}$ . Поэтому будем считать, что на некотором отрезке переменного  $y$  выполняется тождественно равенство

$$y = \xi_k(u), \quad (2)$$

где  $k$  — какой-либо среди номеров  $1, 2, \dots, n$ . Тогда система уравнений (1) имеет нетривиальное решение относительно вектора производных  $\frac{du}{dy}$ :

$$\frac{du}{dy} = \lambda r^k(u), \quad (3)$$

где  $r^k(u)$ , как обычно, означает правый собственный вектор матрицы  $A(u)$  (гл. 1), т. е.

$$A(u) r^k(u) = \xi_k(u) r^k(u).$$

Система уравнений (3) еще не позволяет определить  $u(y)$  путем интегрирования, так как в эти уравнения входит неизвестный множитель  $\lambda$ . Для его определения продифференцируем уравнение (2) по переменному  $y$ . Мы получим уравнение

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_k(u)}{\partial u_j} \frac{du_j}{dy} = 1,$$

которое перепишем в форме

$$\frac{du}{dy} \text{grad} \xi_k(u) = 1, \quad (4)$$

вводя обозначение

$$\text{grad} \xi_k(u) = \left\{ \frac{\partial \xi_k(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \xi_k(u)}{\partial u_n} \right\}.$$

Наконец, подставляя в уравнение (4) выражение (3) для  $\frac{du}{dy}$ , получим уравнение, служащее для определения величины  $\lambda$ :

$$\lambda r^k(u) \operatorname{grad} \xi_k(u) = \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_k(u)}{\partial u_j} r_j^k = 1. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие две возможности:

а) На рассматриваемом интервале изменения переменного  $y$  выполнено неравенство

$$r^k(u) \operatorname{grad} \xi_k(u) \neq 0. \quad (6)$$

Системы уравнений, для которых при всех значениях  $k = 1, 2, \dots, n$  и любых  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  выполнены неравенства (6), П. Лакс [1957] называет *истинно нелинейными*.

Если выполнено неравенство (6), то из (5) однозначно определяется величина  $\lambda$ , подставляя которую в (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dy} = \frac{r^k(u)}{r^k(u) \operatorname{grad} \xi_k(u)}, \quad (7)$$

из которой интегрированием можно определить решение  $u(y)$ , если известно значение  $u_0 = u(y_0)$  такое, что выполнено соотношение (2), т. е.

$$y_0 = \xi_k(u_0) = \xi_k(u(y_0)).$$

Обозначим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), проходящее через точку  $u_0 = \{u_1^0, \dots, u_n^0\}$ , следующим образом:

$$u(y) = U^k(y, u_0), \quad U^k(\xi_k(u_0), u_0) \equiv u_0. \quad (8)$$

б) Вторая возможность имеет место тогда, когда в данной точке  $y = y_0$

$$r^k(u(y)) \operatorname{grad} \xi_k(u(y)) = 0. \quad (9)$$

В этом случае уравнение (5) не выполнено при  $\lambda \neq 0$ , и решение  $u(y)$  либо постоянно в некоторой окрестности точки  $y_0$ , либо разрывно в этой точке.

Случай разрыва автомодельного решения будет обсуждаться ниже.

Вообще в дальнейшем мы будем ограничиваться, если противное не оговорено особо, случаем, когда условия (6) выполнены при всех  $k = 1, 2, \dots, n$  и любых  $u$ .

Ограничиваясь этим случаем, мы теперь подробнее изучим решение  $u(y)$  системы (7). Решение (8) мы, следуя аналогии с уравнениями газовой динамики, будем называть «центриро-

нашней волной разрежения» либо центрированной бегущей волной.

В пространстве переменных  $u_1, u_2, \dots, u_n$  рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных для одной (скалярной) функции  $v = v(u) = v(u_1, \dots, u_n)$ :

$$r^k(u) \operatorname{grad} v(u) = \sum_{\alpha=1}^n r_{\alpha}^k(u) \frac{\partial v}{\partial u_{\alpha}} = 0. \quad (10)$$

Пусть  $v = v(u)$  — какое-нибудь решение уравнения (10). Покажем, что

$$v(U^k(y, u_0)) = \operatorname{const}. \quad (11)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} dv(U^k(y, u_0)) &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial v}{\partial u_{\alpha}} \frac{\partial U_{\alpha}^k}{\partial y} dy = \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial v}{\partial u_{\alpha}} \lambda r_{\alpha}^k(U) dy = \lambda dy r^k(u) \operatorname{grad} v = 0. \end{aligned}$$

Итак, каждое решение  $v(u)$  уравнения (10) постоянно на волне разрежения (8). Это же можно сформулировать еще следующим образом.

Интегральная кривая (8) системы уравнений (7) лежит на гиперповерхности  $v(u) = \operatorname{const}$ , если  $v(u)$  удовлетворяет уравнению (10).

Уравнение (10) имеет  $n - 1$  независимых решений, которые мы обозначим через

$$v = v_1^k(u), \quad v = v_2^k(u), \quad \dots, \quad v = v_{n-1}^k(u);$$

при этом система  $n$  векторов

$$r^k(u), \quad \operatorname{grad} v_1^k(u), \quad \dots, \quad \operatorname{grad} v_{n-1}^k(u)$$

линейно независима.

Из уравнения (11) вытекает, что в бегущей волне  $u = u(y)$ , заданной формулой (8), постоянен  $(n - 1)$ -мерный вектор  $v^k(u) = \{v_1^k(u), \dots, v_{n-1}^k(u)\}$ , т. е.

$$v^k(U^k(y, u_0)) = c^k,$$

где  $c^k$  — постоянный  $(n - 1)$ -мерный вектор.

Таким образом, интегральная кривая (8) уравнений (7) может быть задана другим образом:

$$v^k(u) = \operatorname{const}, \quad \xi_k(u) = y,$$

и задача интегрирования системы (7) сводится к определению  $n - 1$  независимых решений уравнения (10).

Вектор  $v^k(u) = \{v_1^k(u), \dots, v_{n-1}^k(u)\}$  мы будем называть  $(n-1)$ -мерным вектор-инвариантом Римана. Легко показать, что в случаях, когда существуют обычные инварианты Римана  $r_k = r_k(u)$ , вектор-инвариант  $v^k(u)$  представляется в виде

$$v^k(u) = \{r_1(u), r_2(u), \dots, r_{k-1}(u), r_{k+1}(u), \dots, r_n(u)\}.$$

В самом деле, согласно § 3 главы 1

$$dr_i(u) = \mu_i(u) l^i(u) du,$$

т. е.

$$\text{grad } r_i(u) = \mu_i(u) l^i(u),$$

и, следовательно,  $v_i^k(u) = r_i(u)$  при  $i \neq k$  является решением уравнения (10), так как правые  $r^k(u)$  и левые  $l^k(u)$  собственные векторы матрицы  $A(u)$  биортогональны:

$$l^i(u) r^k(u) = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

В частности, при  $n = 2$  инварианты Римана всегда существуют, и поэтому при  $n = 2$

$$v^k(u) = r_i(u), \quad i \neq k.$$

Решение (8) системы (7) представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую кривую, расположенную в пространстве переменных  $u_1, u_2, \dots, u_n, y$ . Если величину  $y$  считать параметром, то это будет кривая, проходящая через точку  $u_0$  в пространстве переменных  $u$ .

Ввиду условия (6) величина  $\xi_k(u(y))$  монотонно изменяется вдоль этой кривой. Так как  $y = x/t$  и  $t > 0$ , то из уравнения (2) мы заключаем, что часть этой кривой, заданная условием  $\xi_k(u(y)) > \xi_k(u_0)$ , отвечает лучам  $y = x/t$ , лежащим справа от луча  $y = y_0$ , а часть кривой, на которой  $\xi_k(u(y)) < \xi_k(u_0)$ , — лучам  $y = x/t$ , лежащим в плоскости переменных  $x, t$  слева от луча  $\frac{x}{t} = y_0$ .

Придавая теперь номеру  $k$  в равенстве (2) все значения от 1 до  $n$ , мы приходим к следующему выводу:

Через точку  $u_0$  в пространстве  $E_n$  переменных  $u_1, u_2, \dots, u_n$  проходит  $n$  гладких кривых, являющихся решением уравнений (3) при  $k = 1, 2, \dots, n$ , которые нигде не касаются друг друга. Вдоль каждой из этих кривых указывается направление монотонного возрастания переменного  $y = x/t$ .

Теперь рассмотрим случай разрыва автомодельного решения. Автомодельное решение  $u(y) = u(x/t)$  может иметь разрывы лишь на линиях  $\frac{x}{t} = y = \text{const}$ . Пусть в точке  $y$  решение  $u(y)$  разрывно. Тогда на линии  $x = yt$  должны удовлетворяться

условия Гюгонно (§ 1)

$$y [u(y-0) - u(y+0)] = \varphi(u(y-0)) - \varphi(u(y+0)), \quad D = y.$$

Будем считать, что одно из значений  $-u(y+0)$  либо  $u(y-0)$  — фиксировано, и обозначим его через  $u_0$ , а эта система уравнений служит для определения другой величины, которую мы обозначим через  $u$ . Перепишем эту систему в виде

$$D(u - u_0) = \varphi(u) - \varphi(u_0), \quad D = y. \quad (12)$$

Предположим, что уравнения (12) определяют в пространстве переменных  $u$  и  $n$  гладких кривых, проходящих через точку  $u = u_0$ .

Рассмотрим одну из этих кривых и введем какой-либо параметр  $\xi$ , считая, что решение уравнений (12) параметрически выражается через  $\xi$ :

$$u = u(\xi), \quad D = D(\xi) \quad \text{и} \quad u(\xi_0) = u_0.$$

Дифференцируя систему (12) по параметру  $\xi$ , найдем

$$D\dot{u} + \dot{D}[u(\xi) - u_0] = A(u(\xi))\dot{u},$$

где через  $\dot{u}$ ,  $\dot{D}$  обозначены производные соответствующих функций по параметру  $\xi$ . Полагая здесь  $\xi = \xi_0$ , получим

$$[A(u_0) - DE]\dot{u}(\xi_0) = 0, \quad (13)$$

так как  $u(\xi_0) = u_0$ .

Величина  $\dot{u}(\xi_0)$  отлична от нуля лишь в том случае, если

$$\text{Det}((A(u_0) - D(\xi_0)E)) = 0.$$

Поэтому положим

$$D(\xi_0) = D_k(\xi_0) = \xi_k(u_0)$$

и будем обозначать эту ветвь кривой, определяемой из системы (12), через  $u = \bar{U}^k(\xi)$ .

Выберем теперь параметр  $\xi$  вполне определенным образом:

$$\xi = \xi_k(u). \quad (14)$$

Уравнения (13) приводят к следствию

$$\bar{U}^k(\xi_0) = \lambda r^k(u_0), \quad (15)$$

а из (14) получаем путем дифференцирования по  $\xi$ , что

$$\bar{U}^k(\xi_0) \text{grad } \xi_k(u_0) = 1. \quad (16)$$

Сравнение формул (15), (16) с формулами (3), (4) приводит нас к выводу, что

$$\bar{U}^k(\xi_0) = \frac{r^k(u_0)}{r^k(u_0) \text{grad } \xi_k(u_0)}, \quad (17)$$

т. е. производная  $\dot{U}^k(\xi_0)$  имеет то же значение, что и в волне разрежения (7). Мы покажем сейчас, что и вторые производные  $\ddot{U}^k(\xi_0)$  совпадают со вторыми производными, вычисленными на волне разрежения. Дважды дифференцируя по  $\xi = \xi_k(u)$  формулы (12) и полагая затем  $\xi_k(u) = \xi_k(u_0)$ , получим

$$[A(u_0) - \xi_k(u_0)E] \ddot{U}^k(\xi_0) = 2\dot{D}_k(\xi_0) \dot{U}^k(\xi_0) - [\nabla A(u_0) \dot{U}^k(\xi_0)] \dot{U}^k(\xi_0), \quad (18)$$

где символ  $[\nabla A \dot{U}^k] \dot{U}^k$  обозначает вектор

$$[\nabla A \dot{U}^k] \dot{U}^k = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_l} \dot{U}_j^k \dot{U}_l^k. \quad (19)$$

Для сравнения продифференцируем по переменному  $y$  уравнения (1); мы получим уравнения, сходные с (18), если положим в них  $y = y_0$ :

$$[A(u_0) - \xi_k(u_0)E] \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{du}{dy} - \left[ \nabla A(u_0) \frac{du}{dy} \right] \frac{du}{dy}. \quad (20)$$

В левой части уравнений (18), (20) матрица коэффициентов вырождена, так как  $\xi_k(u_0)$  — собственное значение матрицы  $A(u_0)$ . Поэтому для разрешимости системы (20) относительно  $\frac{d^2 u}{dy^2}$  необходимо, чтобы правая часть была ортогональна к левому собственному вектору  $l^k(u_0)$  матрицы  $A(u_0)$ , так как левая часть равенства заведомо ортогональна к этому вектору.

Так как в силу формулы (7) функция  $u(y)$  обладает вполне определенными вторыми производными, то это условие заведомо выполнено. Следовательно, записывая условие ортогональности правой части (20) к вектору  $l^k(u_0)$ , получим

$$\frac{du(y_0)}{dy} l^k(u_0) = \frac{r^k(u_0) l^k(u_0)}{r^k(u_0) \text{grad } \xi_k(u_0)} = \frac{l^k(u_0) [\nabla A(u_0) r^k(u_0)] r^k(u_0)}{[r^k(u_0) \text{grad } \xi_k(u_0)]^2}. \quad (21)$$

Условие ортогональности правой части системы (18) к вектору  $l^k(u_0)$  запишем с учетом (17) в следующем виде:

$$\dot{D}_k(\xi_0) = \frac{1}{2} \frac{l^k(u_0) [\nabla A(u_0) r^k(u_0)] r^k(u_0)}{(r^k(u_0) \text{grad } \xi_k(u_0)) (r^k(u_0) l^k(u_0))}. \quad (22)$$

Учитывая формулу (21), из (22) получим

$$\dot{D}_k(\xi_0) = \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Теперь из сравнения системы уравнений (18) с системой (20) заключаем, что

$$\ddot{U}^k(\xi_0) = \frac{d^2 U^k}{dy^2}(y_0, u_0). \quad (24)$$

Обозначим через  $u = \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)$  решение уравнений (12). Тогда из равенств (17) и (24) следует, что

$$\bar{U}^k(\xi_k(u), u_0) = U^k(\xi_k(u), u_0) + O[(\xi_k(u) - \xi_k(u_0))^3] \quad (25)$$

и

$$\begin{aligned} U_k(\xi_k(u), u_0) &= \xi_k(u_0) + \frac{1}{2} [\xi_k(u) - \xi_k(u_0)] + O[(\xi_k(u) - \xi_k(u_0))^2] = \\ &= \frac{\xi_k(u) + \xi_k(u_0)}{2} + O[(\xi_k(u) - \xi_k(u_0))^2]. \end{aligned} \quad (26)$$

Формулы (25) отражают то обстоятельство, что состояние  $\bar{U}^k$ , связанное с состоянием  $u_0$  с помощью ударной волны  $k$ -го индекса, отличается от состояния  $U^k$ , связанного с  $u_0$  волной разрежения, на величину третьего порядка малости относительно разности  $[U^k - u_0]$ . Этот факт для общих систем квазилинейных уравнений впервые был доказан П. Лаксом [1953]. В газовой динамике подобное свойство слабых ударных волн является общеизвестным.

Итак, через точку  $u = u_0$  проходят две гладкие кривые  $u = U^k(\xi_k(u), u_0)$  и  $u = \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)$ . Первая кривая изображает семейство состояний, которые могут быть соединены с состоянием  $u_0$  посредством волны разрежения  $k$ -го типа. Вторая кривая образована состояниями, которые могут быть связаны с состоянием  $u_0$  посредством ударной волны индекса  $k$ . Эти две кривые в точке  $u_0$  имеют касание второго порядка.

Из формул (25) следует, что в малой окрестности точки  $u = u_0$  кривые ударного перехода  $u = \bar{U}^k(\xi_k, u_0)$  близки к кривым  $u = U^k$ , описывающим переходы по волнам разрежения.

Однако в целом, т. е. вдали от точки  $u = u_0$  структура кривых ударного перехода может быть довольно сложной и весьма непохожей на структуру кривых  $u = U^k$ .

Так кривые  $u = U^k$  продолжают без самопересечения через любую точку области, в которой выполнены условия (6), вплоть до выхода на границу области. Наоборот, кривые ударного перехода, заданные с помощью условий Гюгонно (12), могут вести себя совершенно иначе. Пример системы двух уравнений.

$$u_t + (3 \ln u + v)_x = 0, \quad v_t + \left(\frac{2}{u}\right)_x = 0$$

(см. В. А. Боровиков [1969]), гиперболической в узком смысле при  $u > 0$  и удовлетворяющей условиям (6) в этой полуплоскости, дает тому подтверждение.

Множество значений  $(u, v)$ , являющихся решением условий Гюгонно (12) для этой системы, расположено на ограниченной замкнутой кривой, имеющей форму восьмерки.

Таким образом, для этой системы даже разбиение этого множества на кривые  $u = \bar{U}^1$  и  $u = \bar{U}^2$  имеет смысл лишь вблизи точки  $u = u_0$ ; ограниченность этой кривой приводит к принципиальным затруднениям при решении задачи о распаде произвольного разрыва.

Если мы будем считать состояние  $u_0$  левым состоянием, то для значений  $y > y_0$ , как мы говорили выше, имеет смысл лишь одна половина кривой  $u = U^k(\xi_k(u), u_0)$ , заданная условием

$$\xi_k(u) > \xi_k(u_0).$$

Для ударной волны  $u = \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)$  условия устойчивости (3.1.10), (3.1.11) требуют, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \xi_k(\bar{U}^k(\xi_k(u_0), u_0)) > D_k(\xi_k(u), u_0) > \xi_k(\bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)), \\ \xi_{k-1}(\bar{U}^k(\xi_k(u_0), u_0)) < D_k(\xi_k(u), u_0) < \xi_{k+1}(\bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)), \end{aligned}$$

т. е. мы приходим к выводу, что если  $u = u_0$  — левое состояние, то правым состоянием отвечает лишь половина кривой  $u = \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0)$ , заданная неравенством

$$\xi_k(u) < \xi_k(u_0).$$

Поэтому кривая

$$u = \begin{cases} U^k(\xi_k(u), u_0) & \text{при } y = \xi_k(u) \geq \xi_k(u_0), \\ \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0) & \text{при } \xi_k(u) \leq \xi_k(u_0) \end{cases} \quad (27)$$

обладает в силу уравнений (25) двумя непрерывными производными, проходит через точку  $u_0$  и изображает семейство состояний, которые могут быть соединены с состоянием  $u_0$ , рассматриваемые как левое состояние по отношению к  $u$ , заданному формулой (27), с помощью волны разрежения либо ударной волны.

Напротив, если состояние  $u_0$  считается правым, то аналогичная кривая задается формулой

$$u = \begin{cases} U^k(\xi_k(u), u_0) & \text{при } \xi_k(u) \leq \xi_k(u_0), \\ \bar{U}^k(\xi_k(u), u_0) & \text{при } \xi_k(u) \geq \xi_k(u_0). \end{cases} \quad (28)$$

Кривые (27) и (28) состоят из всех состояний  $u$ , которые могут быть связаны с состоянием  $u_0$  волной разрежения  $k$ -го типа или же ударным переходом  $k$ -го типа; при этом в случае (27) состояние  $u_0$  является левым по отношению к  $u$ , а в случае (28) — наоборот правым.

Кривые (27) и (28) будем называть *волновыми адиабатами* системы законов сохранения (3.1.12)  $k$ -го типа.

Наконец, рассмотрим случай, когда для какого-либо значения  $k = 1, 2, \dots, n$

$$r^k(u) \operatorname{grad} \xi_k(u) \equiv 0, \quad (29)$$

Характеристику  $\xi = \xi_k(u)$ , удовлетворяющую условию (29), будем называть *контактной*.

Очевидно, что вдоль линии

$$v^k(u) = \{v_1^k(u), v_2^k(u), \dots, v_{n-1}^k(u)\} = c^k \quad (30)$$

величина  $\xi_k(u)$  постоянна в силу уравнения (10). Поэтому величина  $\xi_k(u)$  не может быть выбрана, как это мы делали выше, в качестве параметра, определяющего точку на этой кривой.

Введем какой-либо другой параметр на кривой (30), например длину дуги этой кривой, отсчитываемую от любой ее точки. Тогда кривая (30) есть интегральная кривая системы уравнений

$$\frac{du}{ds} = r^k(u),$$

так как мы считаем, что  $\|r^k(u)\| = \sum_{i=1}^n (r_i^k)^2 = 1$ . Умножая это уравнение слева на матрицу  $A(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ , получим

$$A(u) \frac{du}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = A(u) r^k(u) = \xi_k(u) r^k(u) = \xi_k(u) \frac{du}{ds}.$$

Но вдоль кривой (30) величина  $\xi_k(u)$  постоянна, и, следовательно, эти уравнения интегрируются. Проинтегрируем эти уравнения от  $u = u_0$ , до произвольной точки  $u = u(s)$ , тогда

$$\varphi(u(s)) - \varphi(u_0) = \xi_k(u) [u(s) - u_0] = \xi_k(u_0) [u(s) - u_0]. \quad (31)$$

Таким образом, мы видим, что любые две точки кривой (30) удовлетворяют условиям Гюгонио при  $D = \xi_k(u_0) = \xi_k(u)$ . Разрывы такого рода в газовой динамике называются *контактными*.

Наконец, заметим, что если выполнено условие (29), то не существует центрированной волны разрежения  $k$ -го типа. Эта волна разрежения переходит в ударную волну (30).

Понятие волновой адиабаты  $k$ -го типа может быть обобщено, в частности, с учетом того, что условия (6) могут нарушаться. Всякое обобщение понятия волновой адиабаты должно опираться на обобщение условий устойчивости разрыва решения.

По аналогии со случаем одного уравнения и системы уравнений газовой динамики (см. гл. 2, § 5, п. 7; § 6, п. 9) представляется необходимым для устойчивости разрыва  $(u_0, u)$ , где  $u_0$  — левое состояние,  $u$  — правое состояние,  $x = Dt$  — линия разрыва, потребовать выполнения неравенств

$$\xi_k(u_0) \geq D \geq \xi_k(u). \quad (32)$$

Однако выполнения лишь этих условий недостаточно даже в указанных выше простых случаях. По-видимому и в общем

случае нужно требовать, чтобы точки  $u_0$  и  $u$  были связаны непрерывной кривой  $H(u_0, \bar{u}) = 0$ , любая точка  $\bar{u}$  которой соответствует решению условий Гюгонио (12), т. е.  $\varphi(\bar{u}) - \varphi(u_0) = D(\bar{u} - u_0)$ , где  $D = D(u_0, u)$ , при этом

$$D(u_0, \bar{u}) \geq D(u_0, u) \quad (33)$$

для любой точки  $\bar{u}$  кривой  $H(u_0, \bar{u}) = 0$ , промежуточной между  $u_0$  и  $u$ .

Таким образом, мы приходим к обобщению понятия волновой адиабаты  $k$ -го типа, построенной для точки  $u_0$ , рассматриваемой как левое состояние по отношению к состоянию  $u$ . Она должна быть непрерывной кривой в пространстве переменных  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  и состоять из множества значений  $u$ , которые могут быть связаны с состоянием  $u_0$  (рассматриваемым как левое состояние) волнами разрежения  $y = \xi_k(u)$  и допустимыми разрывами, на которых выполнены условия (32) и (33).

Подобное понятие волновой адиабаты для уравнений газовой динамики фактически использовалось Г. Я. Галиным [1958], было определено А. Д. Сидоренко [1968], изучалось Б. Вендрофом [1972], Т. Лю [1975а].

Для более общих систем из  $n$  квазилинейных законов сохранения понятие волновой адиабаты изучалось в работе Т. Лю [1975а]; в этой работе предлагаются условия на законы сохранения, при которых волновая адиабата определяется однозначно.

### 3. Задача о распаде произвольного разрыва. Задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

называется задачей о распаде произвольного разрыва. Легко заметить, что эта задача инвариантна относительно преобразования подобия\*)

$$t = kt', \quad x = kx', \quad k = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Поэтому, если предположить единственность решения задачи Коши (1), (2), то отсюда следует автомодельность решения. В самом деле, пусть

$$u = u(x, t) \quad (4)$$

\*) Допускается лишь  $k > 0$ . Это объясняется тем, что в постановку задачи Коши (1), (2) входят условия устойчивости линий разрыва. Эти условия содержат понятия левых и правых значений решения на разрыве, которые инвариантны относительно преобразования (3) при  $k < 0$ .

ость решение задачи (1), (2). Совершая преобразование подобия (3), мы видим, что решение  $u(x', t')$ , в силу предположения о единственности, совпадает с решением (4), т. е.

$$u\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k}\right) = u(x, t). \quad (5)$$

Равенство (5) выполнено при любых значениях параметра  $k > 0$ . Поэтому, полагая  $k = 1/t > 0$ , получим

$$u(x, t) = u\left(1, \frac{x}{t}\right) = u(1, y) = u_0(y). \quad (6)$$

Легко видеть, что если не предполагать единственности решения задачи Коши (1), (2), то нельзя утверждать, что все решения этой задачи автомодельны, т. е. зависят лишь от переменного  $y = x/t$ . Поэтому доказательство единственности автомодельного решения задачи (1), (2) не позволяет утверждать, что эта задача Коши имеет единственное решение. Тем не менее вопрос о единственности автомодельного решения задачи (1), (2) имеет определенное самостоятельное значение, во-первых, потому, что в ряде случаев удается доказать непосредственно, что всякое устойчивое обобщенное решение этой задачи автомодельно, а во-вторых, потому, что в процессе доказательства единственности автомодельного решения вскрываются основные трудности, с которыми сталкиваются при изучении общей задачи Коши (1), (2).

Дадим геометрическую интерпретацию задачи о распаде произвольного разрыва.

Будем рассматривать автомодельное решение  $u(y)$  задачи (1), (2), предполагая, что оно существует. Тогда в областях гладкости вектор-функции  $u(y)$  она удовлетворяет системе уравнений (3.2.1):

$$A(u) \frac{du}{dy} = y \frac{du}{dy}, \quad (7)$$

а в точках разрыва — условиям Гюгонио

$$y[u(y+0) - u(y-0)] = \varphi(u(y+0)) - \varphi(u(y-0)). \quad (8)$$

Будем предполагать решение  $u(y)$  ограниченным. Тогда можно утверждать, что вектор  $u(y)$  непостоянен лишь в ограниченном интервале значений переменного  $y$ . В самом деле, пусть  $|u(y)| \leq M$ ,  $|\xi_k(u)| \leq M$ ; тогда, если  $y = y_0$  — точка непрерывного изменения  $u(y)$ , то в этой точке выполнены уравнения (7) и, как мы видели в п. 2,

$$|y_0| = |\xi_k(u(y_0))| \leq M. \quad (9)$$

Если же  $y = y_0$  — точка разрыва функции  $u(y)$ , то из условий устойчивости следует, что

$$|D| = |y_0| \leq \max_{k=1, \dots, n} \max_{\substack{y=y_0+0 \\ y=y_0-0}} |\xi_k(u(y))| \leq M. \quad (10)$$

Итак, если  $|\xi_k(u(y))| \leq M$  ( $k = 1, \dots, n$ ), то вне интервала  $[-M, M]$  функция  $u(y)$ , очевидно, постоянна. Условие (2) для функции  $u(y)$  принимает вид

$$u(y) \rightarrow u^- \text{ при } y \rightarrow -\infty, \quad u(y) \rightarrow u^+ \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad (11)$$

а в виду ограниченности  $u(y)$

$$u(y) = \begin{cases} u^- & \text{при } y < -M, \\ u^+ & \text{при } y > M. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть в точке  $y \geq -M$  решение  $u(y) = u^-$ . Рассмотрим возможное изменение функции  $u(y)$ . Если  $u(y)$  изменяется, образуя волну разрежения  $k$ -го типа, то

$$y = \xi_k(u(y)).$$

Наименьшая среди величин  $\xi_k$  есть  $\xi_1$ . Поэтому рассмотрим участок переменного  $y$ , на котором

$$y = \xi_1(u(y)). \quad (13)$$

Поскольку  $u(y) = u^-$  при  $y < -M_1$ , то решение типа (13) может иметь место, начиная с значений  $y_1^-$ , где

$$y_1^- = \xi_1(u^-). \quad (14)$$

Пусть на интервале  $[y_1^-, y_1^+]$  выполнено равенство (13), т. е. в интервале  $[y_1^-, y_1^+]$  решение  $u(y)$  образует волну разрежения, соответствующую первому собственному значению  $\xi_1$ .

На рис. 4.33 по оси абсцисс откладывается значение переменного  $y$ , по оси ординат — значения величин  $\xi_1(u(y))$ ,  $\xi_2(u(y))$ , ...,  $\xi_n(u(y))$  и проведена биссектриса  $\xi = y$ . На участке  $y_1^- \leq y \leq y_1^+$   $\xi_1(u(y)) = y$ , все остальные собственные значения  $\xi_2(u)$ , ...,  $\xi_n(u)$  больше, чем  $y$ . Состояния  $u = u(y)$  на отрезке  $[y_1^-, y_1^+]$  связаны с состоянием  $u^-$ , как с левым состоянием, волной разрежения, соответствующей собственному значению  $\xi = \xi_1(u)$ . График зависимости  $\xi_1 = \xi_1(u(y))$  при  $y_1^- \leq y \leq y_1^+$  лежит на прямой  $\xi = y$ .

Пусть на интервале  $[y_2^-, y_2^+]$   $\xi_2(u(y)) = y$ , т. е. решение  $u(y)$  на этом интервале образует волну разрежения, соответствующую  $\xi = \xi_2(u)$ . Тогда совершенно очевидно и, в частности, из рис. 4.33 видно, что

$$y_2^- > y_1^+, \quad \xi_3(u(y)) > y, \quad \xi_1(u(y)) < y. \quad (15)$$

Состояния  $u(y)$ , рассматриваемые на интервале  $[y_2^-, y_2^+]$ , связаны с состоянием  $u(y_1^+)$ , как с левым состоянием, волной разрежения 2-го типа ( $y = \xi_2(u)$ ).

Теперь из рис. 4.33 совершенно ясно, что каждая волна разрежения, соответствующая  $k$ -му собственному значению ( $y = \xi_k(u(y))$ ), лежит правее любой волны разрежения, соответствующей собственному значению  $\xi_l$  с меньшим номером  $l$ , и левее любой волны разрежения с большим номером  $l$ .

Отсюда мы заключаем, что непрерывное решение  $u(y)$  задачи (7), (12) содержит не более  $n$  упорядоченных волн разрежения.

Если удалось выбрать величины  $y_k^-, y_k^+$  так, что  $u(y_1^-) = u^-, u(y_n^+) = u^+$ , то функция  $u(y)$ , определенная на интервалах  $[y_k^-, y_k^+]$  в виде волны разрежения, т. е.

$$u(y) = U^k(y, U_+^{k-1}) \quad \text{при } y_k^- \leq y \leq y_k^+, \quad (16)$$

$$u(y) = U_+^k \quad \text{при } y_k^+ \leq y \leq y_{k+1}^-, \quad (17)$$

где

$$U_+^k = U^k(y_k^+, U_+^{k-1}), \quad U_+^0 = u^-,$$

дает автомодельное решение задачи о распаде разрыва.

Рассмотрим другую возможность, когда в точке  $y = y_k$  решение  $u(y)$  разрывно. Тогда, согласно условиям устойчивости, существует номер  $k$  такой, что

$$\xi_k(u(y_k - 0)) > y_k > \xi_k(u(y_k + 0)), \quad (18)$$

$$\xi_{k+1}(u(y_k + 0)) > y_k > \xi_{k-1}(u(y_k - 0)). \quad (19)$$

Пусть индекс линии разрыва в точке  $y_1$  есть  $k = 1$ . На рис. 4.34 снова изобразим зависимости  $\xi_k(u(y))$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . В этом случае в точке  $y_1$

$$\xi_1(y_1 - 0) = \xi_1(u^-) > y_1 > \xi_1(u(y_1 + 0)), \quad (20)$$

$$\xi_k(u(y_1^- + 0)) > y_1 \quad \text{при } k > 1. \quad (21)$$

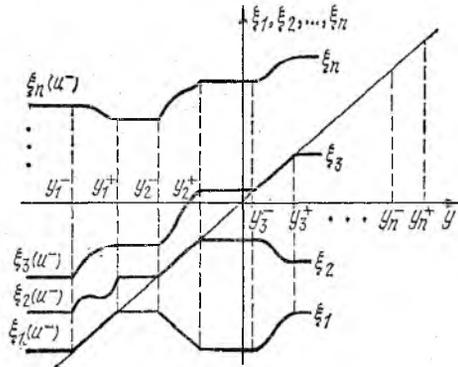


Рис. 4.33.

Отсюда сразу следует, что если в точке  $y = y_1$  имеется ударная волна с индексом  $k=1$ , то в решении  $u = u(y)$  отсутствует волна разрежения, соответствующая значению  $\xi = \xi_1(u) = y$ .

Вообще, из сравнения рис. 4.33 и 4.34 мы заключаем, что устойчивое (удовлетворяющее условиям устойчивости (18), (19)) обобщенное автомодельное решение  $u(y)$  содержит не более  $n$  бегущих волн (волн разрежения либо ударных), которые упорядочены по своим индексам, так как присутствие ударной

волны индекса  $k$  исключает возможность волны разрежения индекса  $k$ , и наоборот.

Таким образом, при решении задачи о распаде (1), (2) в классе автомодельных решений представляется возможность построения решения в виде  $n$  бегущих волн, амплитуды которых должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись условия (11).

Как мы видели в предыдущем параграфе, если известно левое состояние, то на волне  $k$ -го типа семейство состоя-

ний, в которые можно перейти с помощью этой волны (ударной или волны разрежения  $k$ -го типа), описывается с помощью одного параметра. Таким образом, задача состоит в том, чтобы, выбрав  $n$  таких параметров, удовлетворить условиям (11).

По заданному значению  $u^-$ , которое является левым для решения  $u = u(y)$ , мы определяем как функцию одного параметра  $\xi_1 = \xi_1(u)$  решение в волне (ударной или разрежения) индекса 1:

$$u^1 = F^1(\xi_1, u^-), \quad (22)$$

где  $F^1$  задано, согласно (3.2.27), формулой

$$F^1(\xi_1, u^-) = \begin{cases} U^1(\xi_1, u^-) & \text{при } \xi_1 \geq \xi_1(u^-), \\ \bar{U}^1(\xi_1, u^-) & \text{при } \xi_1 \leq \xi_1(u^-); \end{cases} \quad (23)$$

при этом

$$\frac{\partial F^1}{\partial \xi_1}(\xi_1(u^-), u^-) = \frac{r^1(u^-)}{r^1(u^-) \operatorname{grad} \xi_1(u^-)}. \quad (24)$$

Состояние (22) является левым для волны индекса 2. Поэтому вводим

$$u^2 = F^2(\xi_2, u^1) = F^2(\xi_2, F^1(\xi_1, u^-)), \quad (25)$$

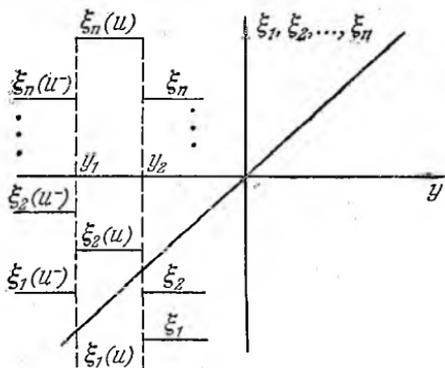


Рис. 4.34.

где  $F^2$  определяется по формуле (3.2.27) аналогично (23). Продолжая наши рассуждения, мы найдем

$$\begin{aligned} u^n &= F^n(\xi_n, u^{n-1}) = \\ &= F^n(\xi_n, F^{n-1}(\xi_{n-1}, F^{n-2}(\dots(\xi_2, F^1(\xi_1, u^-))\dots))) = \\ &= \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u^-). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи о распаде в классе автомодельных решений сводится к определению величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  из системы  $n$  уравнений

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u^-) = u^+. \quad (27)$$

Будем считать, что состояния  $u^1, u^2, \dots, u^n = u^+$  лежат в достаточно малой окрестности точки  $u^-$ . Поскольку якобиан

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u^-)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \Big|_{\substack{\xi_1 = \xi_1(u^-) \\ \xi_2 = \xi_2(u^-) \\ \dots \\ \xi_n = \xi_n(u^-)}} &= \\ &= \text{Det}((r_i^k(u^-))) \prod_{k=1}^n \frac{1}{(r^k(u^-) \text{ grad } \xi_k(u^-))} \end{aligned} \quad (28)$$

отличен от нуля в силу предположения о гиперболичности системы (1) и выполнения условий (3.2.6), то существует некоторая окрестность  $|u - u^-| < \delta$  точки  $u^-$  такая, что при  $u^1, \dots, u^n$ , лежащих в этой окрестности, якобиан

$$\frac{\partial \Phi(\xi_1, \dots, \xi_n, u^-)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

отличен от нуля. Уравнения (27), кроме того, совместны при  $u^+ = u^-$ ;  $\xi_k = \xi_k(u^-)$ . Поэтому по теореме о неявных функциях в этой окрестности существует единственное решение  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  системы уравнений (27), которому отвечает автомодельное решение  $u = u(y)$ .

Эта теорема существования решения задачи о распаде малого разрыва была доказана П. Лаксом [1957].

Заметим теперь, что существование и единственность автомодельного решения  $u(y)$  доказано сейчас не только в предположении о достаточной близости точек  $u^-, u^+$ , но и в предположении близости величин  $u^-, u^1, u^2, \dots, u^n = u^+$ .

Поэтому вопрос о единственности решения при достаточно близких  $u^-, u^+$  здесь тем не менее не решен, так как вполне может случиться, что при сколь угодно близких  $u^-, u^+$  существует другое решение  $\bar{u}(y)$  задачи о распаде разрыва, для которого промежуточные состояния  $u^1, \dots, u^{n-1}$  находятся далеко от  $u^-, u^+$ .

**4. Пример неединственности автомодельного решения задачи о распаде.** Мы покажем сейчас, что если не предполагать достаточной близости векторов  $u^-$ ,  $u^+$ , то без ограничения на рассматриваемые системы квазилинейных уравнений нельзя рассчитывать на единственность автомодельного решения этой задачи.

Предварительно заметим, что понятие разрывного автомодельного решения задачи о распаде введено нами лишь для консервативных систем вида (3.3.1); однако непрерывное решение  $u(y)$ , если оно существует, определяется и для систем, не записываемых в виде законов сохранения.

Поэтому мы рассмотрим сейчас гиперболическую в узком смысле систему трех квазилинейных уравнений

$$l^k(u) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \quad u = \{u_1, u_2, u_3\} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

оставляя в стороне вопрос о возможности записи этой системы в виде законов сохранения, и покажем, что задача о распаде для этой системы может иметь несколько непрерывных автомодельных решений  $u = u(y)$ .

Заметим, что подобная ситуация имеет место и для консервативных систем квазилинейных уравнений (см. В. Ф. Дьяченко [1963]), мы же рассматриваем неконсервативную систему, так как в этом случае пример более прост.

Положим

$$l^1 = \{\cos u_2, 0, \sin u_2\}, \quad l^2 = \{0, 1, 0\}, \quad l^3 = \{-\sin u_2, 0, \cos u_2\}, \quad (2)$$

и пусть

$$\xi_1(u) < \xi_2(u) \equiv u_2 < \xi_3(u). \quad (3)$$

Векторы  $l^1$ ,  $l^2$ ,  $l^3$  взаимно ортогональны, поэтому мы можем считать, что

$$r^k(u) = l^k(u). \quad (4)$$

Условия (3.2.6) для системы уравнений (1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} k=1: & \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \cos u_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial u_3} \sin u_2 \neq 0, \\ k=2: & \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} = 1 > 0, \\ k=3: & \quad -\frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \sin u_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} \cos u_2 \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Легко заметить, что всегда можно выбрать функции  $\xi_1$ ,  $\xi_3$  такие, чтобы удовлетворялись условия (5) и (3), например:

$$\xi_1 = u_2 - \alpha(u_1 \cos u_2 + u_3 \sin u_2), \quad \alpha > 0, \quad \alpha' \neq 0, \quad (6)$$

$$\xi_3 = u_2 + \beta(-u_1 \sin u_2 + u_3 \cos u_2), \quad \beta > 0, \quad \beta' \neq 0. \quad (7)$$

Кривые  $u = U^k(y, u_0)$ , описывающие состояния, которые могут быть соединены посредством волн разрежения, для системы (1) являются прямыми:

$$U^1(y, u_0) = u_0 + l^1(u_0)s, \quad \frac{dy}{ds} = l^1(u_0) \operatorname{grad} \xi_1(U^1), \quad (8)$$

$$U^2(y, u_0) = u_0 + l^2(u_0)(y - u_0^0), \quad (9)$$

$$U^3(y, u_0) = u_0 + l^3(u_0)s, \quad \frac{dy}{ds} = l^3(u_0) \operatorname{grad} \xi_3(U^3). \quad (10)$$

Прямая  $u = U^1$  лежит в плоскости  $u_2 = u_2^0$  и имеет направление вектора  $l^1(u_0)$ ; прямая  $u = U^3$  также лежит в плоскости  $u_2 = u_2^0$  и имеет направление вектора  $l^3(u_0)$ ; прямая  $u = U^2$  есть

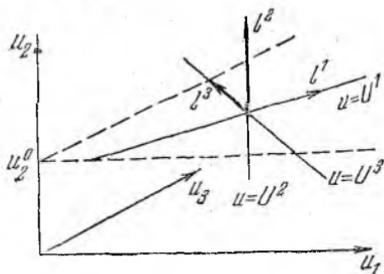


Рис. 4.35.

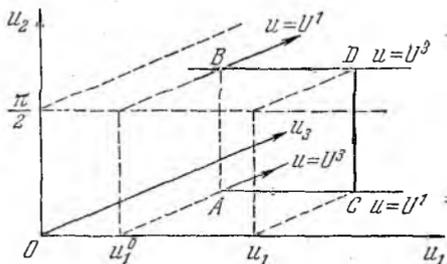


Рис. 4.36.

прямая  $u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0$  (рис. 4.35). Стрелками на прямых  $u = U^k$  обозначено направление возрастания величины  $\xi_k(u)$ .

Рассмотрим две какие-либо плоскости  $u_2 = c, u_2 = c + \frac{\pi}{2}$ , например  $u_2 = 0$  и  $u_2 = \frac{\pi}{2}$  (рис. 4.36). Так как  $l^1(u_1, 0, u_3) = l^3(u_1, \frac{\pi}{2}, u_3)$ , то прямые  $u = U^1$  и  $u = U^3$ , лежащие в этих двух плоскостях, проектируются друг на друга. Стрелками на этих прямых  $u = U^k$  по-прежнему обозначено направление возрастания величины  $\xi_k(u)$ . Рассмотрим теперь для системы (1) задачу о распаде для случая, когда

$$u^- = \{u_1^0, 0, u_3^0\}, \quad u^+ = \left\{u_1^0, \frac{\pi}{2}, u_3^0\right\}. \quad (11)$$

Построим одно из решений этой задачи

$$u(y) = \begin{cases} u^- & \text{при } y \leq 0, \\ U^2(y, u^-) & \text{при } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ u^+ & \text{при } y \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

которое, очевидно, непрерывно по переменному  $y$ . Покажем, что для этой же задачи существует бесконечное множество других автомодельных решений  $u(y)$ . Пусть, например, точки  $C$  и  $D$  лежат на одной прямой, параллельной оси  $u_2$ :  $C(u_1, 0, u_3^0)$ ,  $D(u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0)$  (рис. 4.36). Ввиду наших предположений

$$\xi_1(u_1^0, 0, u_3^0) > \xi_1(u_1, 0, u_3^0), \quad \xi_3(u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0) > \xi_3(u_1^0, \frac{\pi}{2}, u_3^0). \quad (13)$$

Поэтому мы можем выписать также другое автомодельное и непрерывное решение этой задачи о распаде:

$$u(y) = \begin{cases} u^- & \text{при } y \leq \xi_1(u^-) < 0, \\ U^1(y, u^-) & \text{при } \xi_1(u_1^0, 0, u_3^0) \leq y \leq \xi_1(u_1, 0, u_3^0), \\ U^1(\xi_1(u_1, 0, u_3^0), u^-) & \text{при } \xi_1(u_1, 0, u_3^0) \leq y \leq 0, \\ U^2(y, (u_1, 0, u_3^0)) & \text{при } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ U^2(\frac{\pi}{2}, (u_1, 0, u_3^0)) & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq y \leq \xi_3(u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0), \\ U^3(y, (u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0)) & \text{при } \xi_3(u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0) \leq y \leq \xi_3(u_1^0, \frac{\pi}{2}, u_3^0), \\ u^+ = U^3(\xi_3(u_1^0, \frac{\pi}{2}, u_3^0), (u_1, \frac{\pi}{2}, u_3^0)) & \text{при } y \geq \xi_3(u_1^0, \frac{\pi}{2}, u_3^0), \end{cases} \quad (14)$$

которое, очевидно, отлично от решения (12). Произвольно изменяя величину  $u_1 > u_1^0$ , получим бесчисленное множество автомодельных решений.

Этот пример показывает, что для гиперболической системы трех квазилинейных уравнений задача о распаде может иметь бесконечное множество автомодельных решений.

Наконец, мы отметим еще, что, возможно, неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва для системы типа (1) каким-то образом связана с общим свойством систем трех и более квазилинейных уравнений гиперболического типа, которое заключается в следующем.

Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

трех и более квазилинейных уравнений рост решения  $u(x, t)$  задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

определяется, в отличие от систем двух квазилинейных уравнений, не только величиной  $U_0 = \max_x \|u_0(x)\|$ , но и величиной

производных  $\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|$ . Поэтому решение системы (15) при  $n \geq 3$ , вообще говоря, становится неограниченным при некотором  $t > 0$ . Это показывает, что, вообще говоря, для таких систем задача о распаде произвольного разрыва теряет смысл, так как в этом случае решение задачи нельзя рассматривать как предельное при сглаживании начальных данных.

В работах В. А. Тупчиева [1972, 1973] рассмотрен более подробно вопрос об единственности непрерывного решения задачи о распаде разрыва для систем из трех и более уравнений. Показано, что при  $n \geq 3$  в любой окрестности данного непрерывного решения задачи о распаде разрыва может оказаться другое решение той же задачи. Решение задачи о распаде разрыва называется в этом случае *неизолированным*.

Рассматриваются условия, при которых всякое непрерывное решение задачи о распаде изолировано, при этом рассматриваются как консервативные, так и неконсервативные системы уравнений. Показано, что для консервативных систем исследование изолированности и единственности решения задачи о распаде облегчается.

Отметим другие осложнения, которые могут возникнуть в задаче о распаде разрыва. В п. 2 мы привели простую систему из двух квазилинейных уравнений, для которой кривые  $u = U_k$  ( $k = 1, 2$ ) лежат в ограниченной области полуплоскости  $u > 0$ . Отсюда, в частности, следует, что задача о распаде разрыва не имеет решения при  $(u^-)$  и  $(u^+)$  достаточно далеких друг от друга; а при достаточно близких  $(u^-)$  и  $(u^+)$  может иметь несколько различных решений (см. В. А. Боровиков [1969]). В работе В. А. Боровикова [1972] изучаются условия единственности решения задачи о распаде произвольного разрыва при  $n = 2$  для случая «выпуклых» систем ( $r^k \nabla \xi_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2$ ).

**5. Задача о распаде для системы двух квазилинейных уравнений.** В случае  $n = 2$  система квазилинейных уравнений приводится к инвариантам Римана (гл. 1, § 3) и записывается в виде

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r) \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (1)$$

Будем считать выполненным условие (3.2.6), которое для системы (1) записывается в виде

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial r_k} \neq 0. \quad (2)$$

Кривая  $u = U^k(y, u_0)$  в плоскости переменных  $u_1, u_2$  переходит в прямую  $r_j = \text{const}$  ( $j \neq k$ ) в плоскости переменных  $r_1, r_2$

(рис. 4.37). Таким образом, волна разрежения для системы (1) соответствует отрезку прямой  $r_1 = \text{const}$ . Согласно предыдущему через каждую точку  $r = r^0$  проходят две кривые  $u = U^k(y, u_0)$ , изображающие семейства состояний, могущих быть связанными с состоянием  $u_0$  посредством ударного перехода. Как мы видели выше, эти кривые имеют в точке  $u_0$  касание второго порядка с прямыми  $r_1 = r_1^0$ ; поэтому по крайней мере в некоторой окрестности точки  $r = r^0$  уравнения этих кривых могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} k_1 = 1; \quad r_2 = R_2(r_1, r_1^0, r_2^0) = R_2(r_1, r^0), \\ k_2 = 2; \quad r_1 = R_1(r_2, r_1^0, r_2^0) = R_1(r_2, r^0), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

т. е. эти кривые однозначно проектируются соответственно на прямые  $r_2 = \text{const}$ ,  $r_1 = \text{const}$ . На рис. 4.37 стрелками показано направление возрастания переменного  $y = \frac{x}{t}$  в волнах разрежения  $r_1 = \text{const}$  и в ударных волнах  $r_1 = R_1$ ; при этом мы требуем

$$\frac{\partial^2 k(r)}{\partial r_k^2} > 0, \quad (4)$$

что всегда можно считать выполненным ввиду (2).

Вопрос об однозначной разрешимости задачи о распаде в классе автомодельных решений существенным образом зависит от поведения кривых  $r_2 = R_2$  и  $r_1 = R_1$  в целом, т. е. при достаточно больших значениях  $|r - r^0|$ . Однако изучить поведение в целом этих кривых трудно, так как они определяются из существенно нелинейных уравнений. Поэтому мы укажем сейчас некоторые достаточные условия, при которых задача о распаде произвольного разрыва для системы двух квазилинейных уравнений имеет единственное автомодельное решение.

При предположениях, сделанных выше, будем считать дополнительно, что условия Гюгоньо разрешаются в форме (3) при любых  $r_1, r_2, r_1^0, r_2^0$ . Т. е. соответствующие кривые однозначно проектируются на оси  $r_2 = \text{const}$  и  $r_1 = \text{const}$  при любых  $r, r^0$ . Пусть, далее,

$$\left| \frac{\partial R_2(r_1, r_1^0, r_2^0)}{\partial r_1} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial R_1(r_2, r_1^0, r_2^0)}{\partial r_2} \right| < 1. \quad (5)$$

В каждой точке кривой  $I$   $r_2 = R_2(r_1, r^0)$  известно значение  $D = y$ , входящее в условия Гюгоньо. Обозначим вдоль кривой  $I$

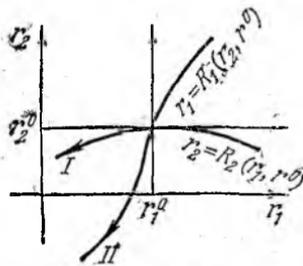


Рис. 4.37.

величину  $D$  через

$$D = D_1(r_1, r_1^0, r_2^0) = D_1(r_1, r^0), \quad (6)$$

и на кривой  $II$

$$D = D_2(r_2, r_1^0, r_2^0) = D_2(r_2, r^0). \quad (7)$$

Как мы показали в п. 2, в точке  $r = r^0$

$$\left. \begin{aligned} D_1(r_1^0, r^0) &= \xi_1(r^0), \\ D_2(r_2^0, r^0) &= \xi_2(r^0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и

$$\left. \frac{dD_1(r_1, r^0)}{dr_1} \right|_{r_1=r_1^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_1(r^0)}{\partial r_1} > 0, \quad \frac{dD_2(r_2, r^0)}{dr_2} \Big|_{r_2=r_2^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_2(r^0)}{\partial r_2} > 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial R_2(r_1, r^0)}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_1^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial R_1(r_2, r^0)}{\partial r_2} \right|_{r_2=r_2^0} = 0. \quad (10)$$

Предположим, что при любых  $r_1^0, r_2^0$  и  $r_1 < r_1^0, r_2 > r_2^0$  выполнены, помимо (5), условия

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(r_1, R_2(r_1, r^0)) &< D_1(r_1, r^0) < \xi_1(r^0), \\ \xi_2(r_1, R_2(r_1, r^0)) &> D_1(r_1, r^0), \quad r_1 < r_1^0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2(R_1(r_2, r^0), r_2) &> D_2(r_2, r^0) > \xi_2(r^0), \\ \xi_1(R_1(r_2, r^0), r_2) &< D_2(r_2, r^0), \quad r_2 > r_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Условия (11), (12) означают, очевидно, что решения  $r_2 = R_2, D = D_1$  и  $r_1 = R_1, D = D_2$  условий Гюгонио удовлетворяют условиям устойчивости.

Если при любых  $r^0$  и  $r_1 < r_1^0, r_2 > r_2^0$  выполнены неравенства (11), (12), то при  $r_1 > r_1^0$  и  $r_2 < r_2^0$  в этих неравенствах знаки изменяются на противоположные. В самом деле, пусть  $r_1 > r_1^0$ . Через точку  $(r_1, R_2(r_1, r^0))$  проходит кривая  $r_2 = R_2$ , которая, согласно условиям Гюгонио, удовлетворяет уравнениям

$$R_2(r_1^0, r_1, R_2(r_1, r^0)) = r_2^0, \quad D_1(r_1^0, r_1, R_2(r_1, r^0)) = D_1(r_1, r^0). \quad (13)$$

Уравнения (13) выражают тот очевидный факт, что условия Гюгонио не меняются, если левое и правое значения решения поменять местами. Из формул (13) теперь легко следует справедливость нашего утверждения.

Условия (5), (11), (12) носят сравнительно сложный характер. Поэтому на простом примере мы проверим их выполнение. Рассмотрим систему двух квазилинейных уравнений, описываю-

ших движение изотермического газа в лагранжевых переменных (гл. 2 § 2, п. 7):

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(V)}{\partial x} = 0, \quad p'(V) < 0, \quad p''(V) > 0, \quad (14)$$

которая записывается в инвариантах Римана:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} - c(V) \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + c(V) \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

где

$$r_1 = u - \int_V^\infty c(\eta) d\eta, \quad r_2 = u + \int_V^\infty c(\eta) d\eta, \quad c^2(V) = -\frac{\partial p}{\partial V}. \quad (16)$$

Уравнения (16) позволяют выразить величину  $V$  через разность  $r_2 - r_1$ . Вычислим производные  $\frac{\partial \xi_k}{\partial r_k}$  для проверки выполнения условия (2):

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial r_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial r_2} = -\frac{c'(V)}{2c(V)} = \frac{p''(V)}{c^2(V)} > 0. \quad (17)$$

Приступая к проверке условий (5), (11), (12), запишем для системы (14) условия Гюгонио:

$$D(V - V_0) = u_0 - u, \quad D(u_0 - u) = p(V_0) - p(V), \quad (18)$$

откуда

$$(u - u_0)^2 = \{p(V) - p(V_0)\}(V_0 - V), \quad (19)$$

$$D^2 = \frac{p(V) - p(V_0)}{V_0 - V}. \quad (20)$$

Из формулы (20) получаем, что величина  $D$  может иметь положительные и отрицательные значения. Пусть  $D_1(r_1, r^0) < 0$ , а  $D_2(r_2, r^0) > 0$ . Тогда, так как  $p'(V) < 0$ ,  $p''(V) > 0$ , то если  $V_0 > V$ , то

$$-c(V) < D_1(r_1, r^0) < -c(V_0), \quad (21)$$

$$c(V_0) < D_2(r_2, r^0) < c(V). \quad (22)$$

Для проверки выполнения неравенств (5) будем дифференцировать условия Гюгонио (18), считая, что  $V$ ,  $u$ ,  $D$  зависят от  $r_1$  и  $D = D_1(r_1, r^0) < 0$ . Обозначая производные по  $r_1$  штрихом, получим из (18)

$$DV' + D'(V - V_0) = -u', \quad Du' + D'(u - u_0) = -c^2(V)V' \quad (23)$$

и

$$\frac{dr_1}{dr_1} = u' + c(V)V' = 1. \quad (24)$$

Из уравнений (23), (24) определяются значения  $V'$ ,  $u'$ ,  $D'$ . Так как

$$\frac{\partial R_2(r_1, r^0)}{\partial r_1} = u' - c(V) V' = \frac{[D_1(r_1, r^0) + c(V)]^2}{[D_1(r_1, r^0) - c(V)]^2} \quad (25)$$

и  $D_1(r_1, r^0) < 0$ , то

$$0 \leq \frac{\partial R_2(r_1, r^0)}{\partial r_1} < 1. \quad (26)$$

Аналогичные вычисления приводят к результату

$$\frac{\partial R_1(r_2, r^0)}{\partial r_2} = \frac{[D_2(r_2, r^0) - c(V)]^2}{[D_2(r_2, r^0) + c(V)]^2}, \quad (27)$$

и мы убедились, таким образом, что для системы двух уравнений (14) выполнены требования (5).

Так как вдоль кривой  $r_2 = R_2(r_1, r^0)$

$$V' = \frac{dV}{dr_1} = \frac{-2D_1(r_1, r^0)}{[D_1(r_1, r^0) - c(V)]^2} > 0, \quad (28)$$

а вдоль кривой  $r_1 = R_1(r_2, r^0)$   $V' < 0$ , то неравенства (21), (22) приводят к выполнению условий (11), (12).

Возвращаясь к общему случаю, покажем, что если система двух квазилинейных уравнений удовлетворяет нашим условиям, то задача о распаде разрыва для такой системы имеет не более одного автомодельного решения\*).

Через точку  $r^-$  проведем отрезок кривой  $r_2 = R_2(r_1, r^-)$  при  $r_1 \leq r_1^-$  и луч  $r_2 = r_2^-$  при  $r_1 \geq r_1^-$  (рис. 4.38), а через точку  $r^+$  отрезок кривой  $r_1 = R_1(r_2, r^+)$  при  $r_2 \geq r_2^+$  и луч  $r_1 = r_1^+$  при  $r_2 \leq r_2^+$ .

Кривая  $I$  изображает семейство состояний, которые могут быть связаны с состоянием  $r^-$ , если последнее считать левым; кривая  $II$  изображает состояния, которые могут быть связаны с состоянием  $r^+$ , которое считается правым. Из условий (5) следует, что пересечение кривых  $I$  и  $II$  может иметь место только в одной точке. Это и означает единственность автомодельного решения задачи о распаде.

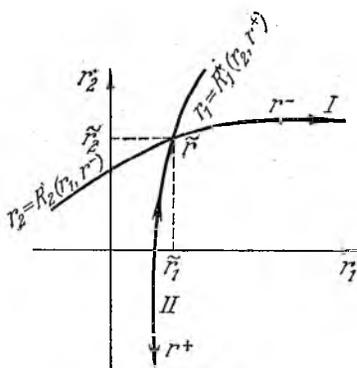


Рис. 4.38.

\*) Если в условиях (5) потребовать, чтобы  $\left| \frac{\partial R_1}{\partial r_1} \right| < q < 1$ , то тогда можно утверждать также, что автомодельное решение задачи о распаде существует.

Легко заметить, что если  $r_1^- \leq r_1^+$ ,  $r_2^- \leq r_2^+$ , то автомодельное решение состоит из двух волн разрежения (рис. 4.39, а); если  $r_1^- \leq r_1^+$ , а  $r_2^- > r_2^+$ , то решение состоит либо из волны разрежения и ударной волны (рис. 4.39, б), либо из двух ударных волн (рис. 4.39, в), а в случае  $r_1^- > r_1^+$ ,  $r_2^- > r_2^+$  также обязательно содержит хотя бы одну ударную волну. Если нам удалось определить функции  $R_2$ ,  $D_1$ ,  $R_1$ ,  $D_2$ , то, за исключением случая, когда рассматриваемое автомодельное решение имеет две

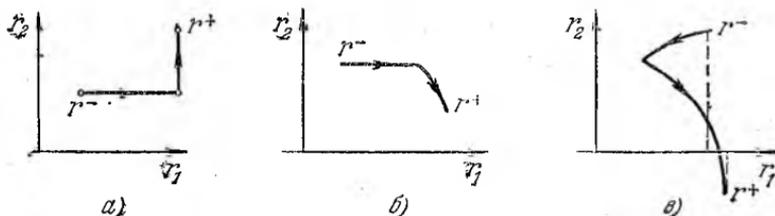


Рис. 4.39.

ударные волны, решение  $r(y)$  определяется явно. В случае двух ударных волн (рис. 4.38) построение автомодельного решения  $r(y)$  сводится к решению системы двух уравнений

$$R_2(\bar{r}_1, r^-) = \bar{r}_2, \quad R_1(\bar{r}_2, r^+) = \bar{r}_1, \quad (29)$$

где  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  — значение автомодельного решения между ударными волнами. Система уравнений (29) может быть решена методом последовательных приближений:

$$\bar{r}_1^{(s+1)} = R_1(\bar{r}_2^{(s)}, r^+), \quad \bar{r}_2^{(s+1)} = R_2(\bar{r}_1^{(s)}, r^-); \quad (30)$$

при этом мы можем положить  $\bar{r}_1^{(0)} = r_1^-, \bar{r}_2^{(0)} = r_2^+$ .

Условие сходимости последовательных приближений

$$\left| \frac{\partial R_2(\bar{r}_1, r^-)}{\partial \bar{r}_1} \frac{\partial R_1(\bar{r}_2, r^+)}{\partial \bar{r}_2} \right| < 1, \quad (31)$$

очевидно, выполнено, если выполнены неравенства (5). Заметим теперь, что условие (31), более широкое, нежели (5), достаточно для единственности автомодельного решения. К тому же это условие инвариантно по отношению к замене зависимых переменных, в отличие от требований (5).

Условие (5) мы принимали для простоты, на самом деле достаточно условия (31).

Пусть система двух квазилинейных уравнений удовлетворяет требованиям (2), (11), (12), (31). Тогда решение задачи о распаде для такой системы автомодельно,

Действительно, пусть для системы квазилинейных уравнений (1) поставлена задача Коши

$$r(x, 0) = \begin{cases} r^-, & x < 0, \\ r^+, & x > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Обозначим ограниченное устойчивое обобщенное решение этой задачи через  $r(x, t)$  и докажем, что оно автомодельно, т. е. зависит лишь от переменного  $y = x/t$ .

Пусть решение  $r = r(x, t)$  задачи Коши (1), (32) непрерывно при  $t > 0$ . Это возможно лишь в случае, когда  $\xi_1(r^-) < \xi_2(r^+)$ . Проведем через начало координат  $(0, 0)$  две характеристики  $x = \xi_1(r^-)t$  и  $x = \xi_2(r^+)t$  (рис. 4.40). Очевидно, что в зонах I и II решение постоянно. Предположим, что в некоторой окрестности линии  $x = \xi_1(r^-)t$  в зоне III решение  $r(x, t)$  переменное. Но в этой окрестности  $r_2(x, t) = r_2^-$ , так как  $\xi_2(r^-) > \xi_1(r^-)$ . Поэтому функция  $r_1(x, t)$  удовлетворяет в окрестности характеристики  $x = \xi_1(r^-)t$  уравнению

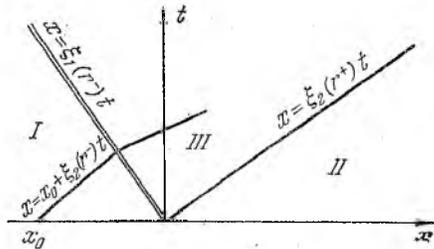


Рис. 4.40.

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + \xi_1(r_1, r_2^-) \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0. \quad (33)$$

Из уравнения (33) мы заключаем, что вблизи линии  $x = \xi_1(r^-)t$  в зоне III функция  $r_1(x, t)$  постоянна вдоль прямых линий  $x = \xi_1(r_1, r_2^-)t + \alpha$ . Очевидно, что эти прямые могут пересекаться лишь при  $t \leq 0$  (рис. 4.41). Совершенно аналогично мы заключаем, что в зоне III в окрестности характеристики  $x = \xi_2(r^+)t$   $r_2(x, t) = r_2^+$ , а  $r_1(x, t)$  постоянна вдоль прямых, которые могут пересекаться лишь при  $t \leq 0$ . Итак,  $r_1(x, t)$  постоянна вдоль прямых  $x = \xi_1(r_1, r_2^-)t + \alpha(r_1)$ ,  $\alpha \geq 0$ , а  $r_2(x, t)$  постоянна вдоль прямых  $x = \xi_2(r_1^+, r_2) t + \beta(r_2)$ ,  $\beta \leq 0$ . Покажем, что  $\alpha = \beta = 0$ . Если это не так, то эти два семейства прямых пересекаются при  $t > 0$ . В точке пересечения мы будем иметь

$$r_2(x, t) = r_2^-, \quad r_1(x, t) = r_1^+.$$

Отсюда мы получаем, что в области OABC (рис. 4.42)  $r(x, t) = \text{const}$ , что возможно лишь в случае, когда  $r^- = r^+$ . В этом случае решение вообще постоянно и, следовательно,

автомодельно. Если же  $r^- \neq r^+$ , то  $\alpha = \beta = 0$ . Если  $\alpha = \beta = 0$ , то непрерывное решение  $r(x, t)$  автомодельно.

Рассмотрим теперь случай разрывных решений  $r(x, t)$  задачи о распаде разрыва. Предварительно заметим, что из условий устойчивости обобщенного решения (3.1.10), (3.1.11) следует, что устойчивое обобщенное решение, ограниченное и

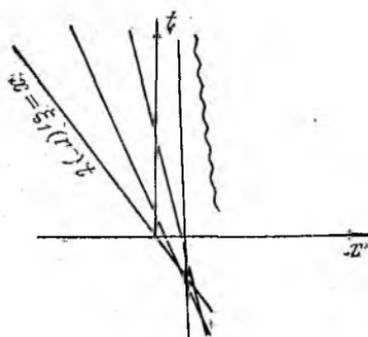


Рис. 4.41.

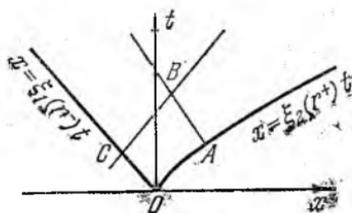


Рис. 4.42.

кусочно-непрерывное при  $t > 0$ , не может иметь более двух линий разрыва, распространяющихся из одной точки в область  $t > 0$ .

Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда решение имеет одну и две линии разрыва, выходящие из точки  $(0, 0)$  разрыва начальных значений. Рассмотрим случай одной линии разрыва. Пусть решение  $r(x, t)$  имеет одну линию разрыва  $OA$  индекса 2 (рис. 4.43). Очевидно, что справа от  $OA$   $r(x, t) = r^+$ , а слева от характеристики  $x = \xi_1(r^-)t$   $r(x, t) = r^-$ . Аналогично предыдущему, мы заключаем, что в зоне  $BOA$   $r_2(x, t) = r_2^-$ . Действительно, из условий устойчивости (3.1.10), (3.1.11) следует, что характе-

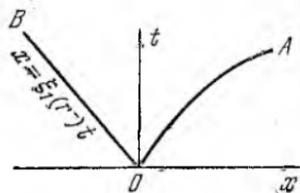


Рис. 4.43.

ристики  $\frac{dx}{dt} = \xi_2(r(x, t))$  пересекают одновременно линии  $OB$  и  $OA$  и, следовательно,  $r_2(x-0, t)|_{OA} = r_2^- = r_2(x, t)|_{OB}$ . Поэтому на линии  $OA$  заданы

$$r_2(x-0, t) = r_2^-, \quad r(x+0, t) = r^+. \quad (34)$$

Согласно нашим предположениям о системе двух квазилинейных уравнений, по этим данным однозначно определяется скорость  $D$  линии разрыва  $OA$  и значение  $r_1(x-0, t)$  при этом эти величины будут постоянны:

$$D = D_2(r_2^-, r^+), \quad r_1(x-0, t) = R_1(r_2^-, r^+). \quad (35)$$

Итак, линия разрыва  $OA$  — прямая. После этого мы так же, как и выше, устанавливаем, что в зоне  $BOA$   $r(x, t) = r(y)$ , т. е. решение задачи о распаде, имеющее одну линию разрыва, автомодельно.

Наконец, рассмотрим случай, когда решение  $r = r(x, t)$  имеет две линии разрыва  $OA$  и  $OB$  (рис. 4.44), на которых выполняются условия устойчивости (3.1.10), (3.1.11). Опуская некоторые детали, заметим, что интегральные кривые уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_1(r(x, t)) \quad (36)$$

в зоне  $BOA$  пересекают одновременно линии  $OA$  и  $OB$ . На рис. 4.44 интегральная кривая уравнения (36) — кривая  $CE$ , при этом  $t_C > t_E$ . Аналогично интегральная кривая  $CD$  уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_2(r(x, t)) \quad (37)$$

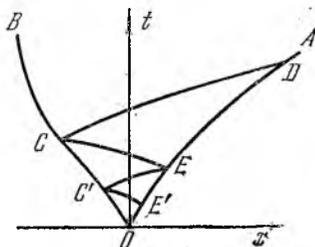


Рис. 4.44.

пересекает одновременно линии  $OB$  и  $OA$ , при этом  $t_D > t_C$ . Таким образом, мы можем написать

$$r_2(D) = r_2(C), \quad r_2(C) = R_2(r_1(C), r^-) \quad (38)$$

и

$$r_1(C) = r_1(E), \quad r_1(E) = R_1(r_2(E), r^+), \quad (39)$$

где через  $r(D)$ ,  $r(C)$ ,  $r(E)$  обозначены значения решения в зоне III в соответствующих точках. Подставляя (39) в (38), найдем

$$r_2(D) = R_2(R_1(r_2(E), r^+), r^-). \quad (40)$$

Аналогично мы могли бы получить

$$r_2(D) = R_2(R_1(R_2(R_1(r_2(E'), r^+), r^-), r^+), r^-). \quad (41)$$

Продолжая этот процесс и сравнивая его с процессом последовательных приближений (30), мы заключаем, что  $r_2(D) = \bar{r}_2$ . Ввиду произвольности точки  $D$  мы заключаем, что величина  $r_2(x-0, t)$  постоянна на линии  $OA$  и равна  $\bar{r}_2$ ; аналогично  $r_1(x+0, t)$  на линии  $OB$  равна  $\bar{r}_1$ . Итак, решение  $r(x, t)$  постоянно в зоне  $BOA$ , а линии  $OA$  и  $OB$  — прямые. Это и означает автомодельность решения  $r(x, t) = r(y)$ , содержащего две линии разрыва.

Доказательство автомодельности решения задачи о распаде в сочетании с единственностью автомодельного решения задачи о распаде позволяет утверждать, что решение задачи Коши о распаде произвольного разрыва единственно и автомодельно.

Задача о распаде разрыва для системы двух квазилинейных уравнений изучалась в предположении «выпуклости» законов сохранения, т. е. выполнения условий (2), в работах Дж. Джонсона, Дж. Смоллера [1969], Дж. Смоллера [1969б] и ряде других. Изучалась структура решения, условия единственности (и существования) решения.

Вопросы существования и единственности решения задачи о распаде для системы двух квазилинейных уравнений изучались также и при отказе от условий выпуклости (см., например, В. А. Тупчиев [1966], Б. Вендроф [1972], К. Дафермос [1973а, 1974], Т. Лю [1974], Л. Лейбович [1974]). В этом случае возникают линии разрыва решения, совпадающие с характеристиками по одну или по обе стороны линии разрыва, типа рассмотренных для уравнений газовой динамики в п. 9 § 6 гл. 2. В качестве условий устойчивости разрыва принимаются условия (3.2.32), (3.2.33); условие (3.2.33) должно выполняться вдоль волновой адиабаты индекса  $k$ , между ее точками  $u_{\text{лев}}$  и  $u_{\text{пр}}$ , где  $u_{\text{лев}}$  и  $u_{\text{пр}}$  — значения решения по разные стороны рассматриваемой линии разрыва.

Следует иметь в виду, что для произвольной системы двух квазилинейных уравнений эти условия устойчивости недостаточны для выделения единственного устойчивого решения задачи о распаде произвольного разрыва.

**6. Задача Гурса для системы квазилинейных уравнений.** Теперь для системы двух квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r, x, t) \frac{\partial r_k}{\partial x} = f_k(r, x, t) \quad (k = 1, 2) \quad (1)$$

мы будем рассматривать некоторые более общие задачи, чем задача о распаде разрыва. Пусть  $\xi_k, f_k \in C_2$  и

$$\xi_1(r, x, t) < \xi_2(r, x, t), \quad \frac{\partial \xi_k(r, x, t)}{\partial r_k} > 0 \quad (k = 1, 2). \quad (2)$$

Пусть кривая  $O\mathcal{L}_2$ , уравнение которой будем записывать в виде  $x = x_2(t)$ , является характеристикой системы (1). На кривой  $O\mathcal{L}_2$  известны дифференцируемые функции  $r_1^0(x, t)$ ,  $r_2^0(x, t)$ . Кривая  $O\mathcal{L}_2$  обладает непрерывной касательной и является интегральной кривой уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \xi_2(r^0(x, t), x, t),$$

а функция  $r^0(x, t)$  удовлетворяет на  $O\mathcal{L}_2$  условию совместности

$$\frac{d}{dt} r_2^0(x_2(t), t) = f_2(r^0(x_2(t), t), x, t).$$

Будем искать в некоторой области  $\mathcal{L}_2 O \mathcal{L}_2^-$  (рис. 4.45) решение  $r(x, t)$  системы (1), удовлетворяющее условиям:

1° Решение  $r(x, t)$  на линии  $O \mathcal{L}_2$  принимает заданные значения  $r^0(x, t)$ :

$$r(x, t)|_{O \mathcal{L}_2} = r^0(x, t)|_{O \mathcal{L}_2}. \quad (3)$$

2° Функция  $r_2(x, t)$  имеет особенность в точке  $(0, 0)$  типа автомодельной волны разрежения. Аналитически это условие выглядит так:

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_2(t \xi_2(r_1^0(0, 0), \beta, 0, 0), t) = \beta, \quad (4)$$

а параметр  $\beta$  принимает значения из некоторого интервала

$$\beta_1 \leq \beta \leq \beta_0 = r_2^0(0, 0).$$

Из условия (4) вытекает, что функция  $r_2(x, t)$  должна обладать в точке  $(0, 0)$  особенностью вида

$$r_2(x, t) = g_2\left(\frac{x}{t}, t\right). \quad (5)$$

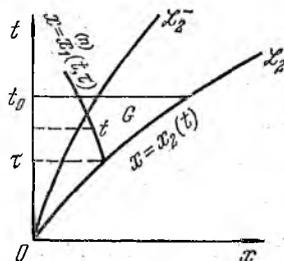


Рис. 4.45.

Мы будем искать такое решение задачи (1), (3), (4), что функция  $r_2(x, t)$  представляется в виде (5); при этом  $g_2(y, t)$  обладает непрерывными первыми производными по  $y$  и по  $t$ . Решение поставленной задачи будем искать методом последовательных приближений, отличным от применявшегося в главе 1 в связи с особенностью решения  $r_2(x, t)$ .

При этом мы должны заметить, что ограниченность всех последовательных приближений можно гарантировать, если рассматривать лишь достаточно малую полосу  $0 \leq t \leq T$  перемногого  $t$ .

Предположим, что в зоне  $\mathcal{L}_2^- O \mathcal{L}_2$  известно приближение  $r^{(n-1)}(x, t)$ , удовлетворяющее условиям (3), (4).

Определим  $r_1^{(n)}(x, t)$  как решение одного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial r_1^{(n)}}{\partial t} + \xi_1^{(n)}(r_1^{(n)}, r_2^{(n-1)}(x, t), x, t) \frac{\partial r_1^{(n)}}{\partial x} = f_1^{(n)}(r_1^{(n)}, r_2^{(n-1)}(x, t), x, t), \quad (6)$$

удовлетворяющее условию (3), т. е.

$$r_1^{(n)}(x_2(t), t) = r_1^0(x_2(t), t). \quad (7)$$

Эта задача Коши является нормальной, так как линия  $O \mathcal{L}_2^-$  — характеристика второго семейства.

Функция  $r_2^{(n)}(x, t)$  также определяется как решение одного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial r_2^{(n)}}{\partial t} + \xi_2^{(n-1)}(r_1^{(n)}(x, t), r_2^{(n)}(x, t)) \frac{\partial r_2^{(n)}}{\partial x} = f_2^{(n-1)}(r_1^{(n)}(x, t), r_2^{(n)}(x, t)), \quad (8)$$

удовлетворяющее условию (4):

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_2^{(n)}(t \xi_2^{(n)}(r_1^{(n)}(0, 0), \beta, 0, 0), t) = \beta.$$

Решение этих двух задач будем искать в области  $G$ , образованной пересечением области  $\mathcal{L}_2^- O \mathcal{L}_2$  с полосой  $0 \leq t \leq t_0$ . Величину  $t_0$  мы определим ниже из условия, чтобы все последовательные приближения  $r_1^{(n)}$  и  $g_2^{(n)}(y, t) = r_2^{(n)}(yt, t)$  обладали в  $G$  ограниченными первыми производными:  $r_1^{(n)}$  по  $x$  и по  $t$ ,  $g_2^{(n)}(y, t)$  по  $y$  и  $t$ .

Задача Коши (6), (7) решается обычным методом характеристик. Что касается задачи (8), (4), то здесь мы имеем задачу с особенностью в точке  $(0, 0)$ . Обозначим через  $x = x_2^{(n)}(t, \beta)$  уравнение характеристики, вдоль которой при  $t \rightarrow 0$  функция  $r_2^{(n)}(x, t)$  принимает значение  $\beta$ . Очевидно, по определению

$$x_2^{(n)}(0, \beta) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0} r_2^{(n)}(x_2^{(n)}(t, \beta), t) = \beta.$$

Для сокращения письма обозначим

$$r_2^{(n)}(x_2^{(n)}(t, \beta), t) = \bar{r}_2^{(n)}(t, \beta).$$

Величины  $\bar{r}_2^{(n)}(t, \beta)$ ,  $x_2^{(n)}(t, \beta)$  удовлетворяют характеристической системе уравнений (8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_2^{(n)}}{dt} &= \xi_2^{(n-1)}(r_1^{(n)}(x_2^{(n)}, t), \bar{r}_2^{(n)}(x_2^{(n)}, t), \\ \frac{d\bar{r}_2^{(n)}}{dt} &= f_2^{(n-1)}(r_1^{(n)}(x_2^{(n)}, t), \bar{r}_2^{(n)}(x_2^{(n)}, t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и начальным условиям

$$x_2^{(n)}(0, \beta) = 0, \quad \bar{r}_2^{(n)}(0, \beta) = \beta. \quad (10)$$

Будем предполагать, что  $t_0$  столь мало, что все последовательные приближения  $r_1^{(n)}$ ,  $r_2^{(n)}$  остаются ограниченными в  $G$ :

$$|r_i^{(n)}(x, t)| \leq R, \quad i=1, 2, \quad n=1, 2, \dots$$

Покажем, что при достаточно малом  $t_0$  производные функций  $r_1^{(n)}$ ,  $g_2^{(n)}(y, t)$  остаются ограниченными при всех  $n=1, 2, \dots$

Обозначим через  $E_1^0$  величину, превосходящую по модулю первые производные  $r_1^0(x, t)$ :

$$\left| \frac{\partial r_1^0}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial r_1^0}{\partial t} \right| \leq E_1^0,$$

аналогично

$$\left| \frac{\partial r_1^{(n-1)}}{\partial x}(x, t) \right| \leq E_1^{(n-1)}, \quad \left| \frac{\partial g_2^{(n-1)}}{\partial y}(y, t) \right| \leq E_2^{(n-1)},$$

и произведем оценку  $\left| \frac{\partial r_1^{(n)}}{\partial x}(x, t) \right|$ . Для этого дифференцируем по переменному  $x$  уравнение (6). Мы получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^{(n)}}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial p_1^{(n)}}{\partial x} = & - \frac{\partial \xi_1^{(n)}}{\partial r_1} (p_1^{(n)})^2 + p_1^{(n)} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial r_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{1}{t} \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2} \frac{\partial g_2^{(n-1)}}{\partial y} \right] + \\ & + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial r_2} \frac{\partial g_2^{(n-1)}}{\partial y} \frac{1}{t} \right], \quad p_1^{(n)} = \frac{\partial r_1^{(n)}(x, t)}{\partial x}. \quad (11) \end{aligned}$$

Вычислим начальное значение производной  $p_1^{(n)}$  на линии  $O\mathcal{L}_2$ .

Для этого определим  $p_1^{(n)}$  из двух условий: уравнения (6)

$$q_1 + \xi_1 p_1 = \dot{f}_1,$$

и дифференциального следствия (7)

$$p_1 \frac{dx_2}{dt} + q_1 = \frac{\partial r_1^0}{\partial x} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial r_1^0}{\partial t}.$$

Учитывая, что  $\frac{dx_2}{dt} = \xi_2$ , из этих двух условий находим

$$p_1^{(n)}|_{O\mathcal{L}_2} = \frac{\frac{\partial r_1^0}{\partial x} \xi_2 + \frac{\partial r_1^0}{\partial t} - \dot{f}_1}{\xi_2 - \xi_1} \Big|_{O\mathcal{L}_2}.$$

Так как  $\xi_2 - \xi_1 > \epsilon > 0$ , то отсюда следует, что существует число  $C$  такое, что

$$|p_1^{(n)}|_{O\mathcal{L}_2} \leq C.$$

Рост величины  $p_1^{(n)}$  оценивается с помощью решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= Mp_1^2 + M \left[ 2 + \frac{E_2^{(n-1)}}{t} \right] p_1 + M \left[ 1 + \frac{E_2^{(n-1)}}{t} \right] \leq \\ &\leq M(p_1 + 1)^2 + \frac{M E_2^{(n-1)}}{t} (p_1 + 1), \end{aligned} \quad (12)$$

принимая при  $t = \tau$  значение  $C$ .

Через  $\tau$  мы обозначаем значение переменного  $t$  на характеристике уравнения (11) при пересечении с линией  $OL_2$  (рис. 4.45); величина  $M$  выбирается такой, что при  $|r_i| \leq R$  и  $(x, t) \in G$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\xi_i| \leq M, \quad |f_i| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial r_j} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \right| \leq M, \\ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right| \leq M \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Решение уравнения

$$\frac{dp_1}{dt} = M(p_1 + 1)^2 + \frac{M E_2^{(n-1)}}{t} (p_1 + 1) \quad (13)$$

превосходит решение уравнения (12). Переписывая (13) в виде

$$\frac{d}{dt} (p_1 + 1) \left( \frac{\tau}{t} \right)^{M E_2^{(n-1)}} = M(p_1 + 1)^2 \left( \frac{\tau}{t} \right)^{M E_2^{(n-1)}},$$

интегрируем его с учетом условия  $p_1(\tau) = C$ :

$$\begin{aligned} p_1 + 1 &= \frac{(C + 1) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{M E_2^{(n-1)}}}{1 - \frac{(C + 1) \tau M}{M E_2^{(n-1)} + 1} \left[ \left( \frac{t}{\tau} \right)^{M E_2^{(n-1)} + 1} - 1 \right]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Итак, решение  $p_1^{(n)}(x, t)$  уравнения (11) оценивается сверху:

$$\begin{aligned} |p_1^{(n)}(x, t)| < \frac{(C + 1) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{M E_2^{(n-1)}}}{1 - \frac{(C + 1) \tau M}{M E_2^{(n-1)} + 1} \left[ \left( \frac{t}{\tau} \right)^{M E_2^{(n-1)} + 1} - 1 \right]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отношение  $t/\tau$ , входящее в (15), есть отношение переменного  $t$  на характеристике уравнения (11) к значению этой же величины в точке пересечения характеристики с линией  $OL_2$  (рис. 4.45).

Если в области  $G$  ограничено отношение  $t/\tau$ , то при достаточно малых  $t_0$  из оценки (15) вытекает ограниченность производных  $p_1$ .

Величину производной  $\frac{\partial g_2^{(n)}}{\partial y}$  легче оценить, исходя из характеристической системы (9). Дифференцируя по параметру  $\beta$  уравнения (9) и начальные условия (10), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_2^{(n)} &= \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial r_2} \bar{r}_2' + \left[ \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial x} \right] x_2^{(n)}, \\ \frac{d}{dt} \bar{r}_2^{(n)} &= \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial r_2} \bar{r}_2' + \left[ \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial x} \right] x_2^{(n)}, \\ x_2^{(n)}(0, \beta) &= 0, \quad \bar{r}_2^{(n)}(0, \beta) = 1, \end{aligned} \right\} (16)$$

где введены обозначения

$$x_2^{(n)} = \frac{\partial}{\partial \beta} x_2^{(n)}(t, \beta), \quad \bar{r}_2^{(n)} = \frac{\partial}{\partial \beta} \bar{r}_2^{(n)}(t, \beta).$$

Из уравнений (16) следует

$$\left. \begin{aligned} x_2^{(n)}(t, \beta) &= \int_0^t \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial r_2} \bar{r}_2'(\tau, \beta) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \left[ \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial x} \right] d\xi \right\} d\tau, \\ \bar{r}_2^{(n)}(t, \beta) &= \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial r_2} d\tau \right\} + \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial x} \right] x_2^{(n)}(\tau, \beta) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \frac{\partial f_2^{(n)}}{\partial r_2} d\xi \right\} d\tau. \end{aligned} \right\} (17)$$

Обычные оценки формул (17) приводят к неравенствам

$$t \delta \min_{0 \leq \tau \leq t} \bar{r}_2^{(n)}(\tau, \beta) e^{-1} e^{(n-1) E_1 + 1} M t \leq x_2^{(n)}(t, \beta) \leq M t \max_{0 \leq \tau \leq t} \bar{r}_2^{(n)}(\tau, \beta) e^{1} e^{(n-1) E_1 + 1} M t. \quad (18)$$

Здесь  $\delta$  обозначает величину

$$\delta = \min_{|r_i| \leq R, (x, t) \in G} \frac{\partial \xi_2^{(n)}}{\partial r_2}(r, x, t),$$

которая, согласно (2), больше нуля.

Подставляя во вторую формулу (17) оценки (18), получим

$$e^{-Mt} - [E_1 + 1] \frac{M^2 t^2}{2} \max_{0 \leq \tau \leq t} \bar{r}'_2^{(n)}(\tau, \beta) \exp\{(E_1 + 2)Mt\} \leq \bar{r}'_2^{(n)}(t, \beta) \leq \\ \leq e^{Mt} + [E_1 + 1] \frac{M^2 t^2}{2} \max_{0 \leq \tau \leq t} \bar{r}'_2^{(n)}(\tau, \beta) \exp\{(E_1 + 2)Mt\}. \quad (19)$$

Пусть  $t_0$  столь мало, что

$$\frac{M^2 t_0^2}{2} [E_1 + 1] \exp\{(E_1 + 2)Mt_0\} < \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Тогда из (19) следуют более простые оценки:

$$\frac{2}{3} e^{-Mt} < \bar{r}'_2^{(n)}(t, \beta) < 2e^{Mt}. \quad (21)$$

Подставляя оценки (21) в (18), получим

$$\frac{2}{3} t \delta e^{-[E_1 + 2]Mt} \leq x_2^{(n)}(t, \beta) \leq 2Mt e^{[E_1 + 2]Mt}. \quad (22)$$

Так как

$$\frac{\partial g_2^{(n)}}{\partial y} = t \frac{\partial r_2^{(n)}}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r_2^{(n)}}{\partial x} = \frac{\bar{r}'_2^{(n)}(t, \beta)}{x_2^{(n)}(t, \beta)},$$

то из (21), (22) имеем

$$\left| \frac{\partial g_2^{(n)}(y, t)}{\partial y} \right| < \frac{2e^{Mt} t}{\frac{2}{3} t \delta e^{-[E_1 + 2]Mt}} = \frac{3}{\delta} e^{[E_1 + 3]Mt}. \quad (23)$$

Аналогично могут быть оценены производные  $\frac{\partial r_1^{(n)}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial g_2^{(n)}}{\partial t}$ . Предполагая, что в области  $G$  ограничено отношение  $\frac{t}{\tau}$ :

$$\frac{t}{\tau} < K,$$

из (15) получаем

$$|p_1^{(n)}(x, t)| < \frac{(C+1) K^M E_2^{(n-1)}}{1 - \frac{(C+1) \tau M}{M E_2^{(n-1)}} [K^M E_2^{(n-1)} + 1]}. \quad (24)$$

Пусть в области  $G$  выполнено неравенство

$$[K^M E_2^{(n-1)} + 1] \frac{(C+1) t_0 M}{M E_2^{(n-1)} + 1} < \frac{1}{2}. \quad (25)$$

тогда из (24) имеем

$$|p_1^{(n)}(x, t)| < 2(C+1)K^M E_2^{(n-1)}. \quad (26)$$

Если, далее,

$$[E_1^{(n-1)} + 3]Mt_0 < \alpha, \quad (27)$$

то из (23) получаем

$$\left| \frac{\partial g_2^{(n)}}{\partial y} \right| < \frac{3}{\delta} e^\alpha = E_2 \quad (28)$$

и, согласно (26),

$$|p_1^{(n)}(x, t)| < 2(C+1)K^{\left(\frac{3Me^\alpha}{\delta}\right)} = E_1. \quad (29)$$

Итак, если в области  $G$  одновременно выполнены неравенства

$$\frac{t}{\tau} < K, \quad (30)$$

$$M^2 \frac{t_0^2}{2} [E_1 + 1] e^{[E_1+2]Mt_0} < \frac{1}{2}, \quad (31)$$

$$[K^{ME_2+1} - 1] \frac{(C+1)t_0M}{ME_2+1} < \frac{1}{2}, \quad (32)$$

$$(E_1 + 3)Mt_0 < \alpha, \quad (33)$$

то выполнены одновременно неравенства (20), (25), (27) и, следовательно,

$$E_1^{(n-1)} < E_1, \quad E_2^{(n-1)} < E_2.$$

Поэтому при выполнении в  $G$  условий (30) — (33) имеем

$$|p_1^{(n)}(x, t)| = \left| \frac{\partial r_1^{(n)}(x, t)}{\partial x} \right| < E_1, \quad \left| \frac{\partial g_2^{(n)}(y, t)}{\partial y} \right| < E_2 \quad (34)$$

$$(n = 1, 2, 3 \dots),$$

и все последовательные приближения  $r_1^{(n)}$ ,  $g_2^{(n)}(y, t)$  обладают в  $G$  ограниченными первыми производными.

Рассмотрим вопрос о возможности удовлетворения в области  $G$  неравенствам (30) — (33). Зададимся произвольными конечными значениями  $\alpha > 0$  и  $K > 1$ . После этого вычисляются величины  $E_1$  и  $E_2$  по формулам (29), (28). Неравенствам (31) — (33), очевидно, можно удовлетворить, если выбрать параметр  $t_0$  достаточно малым. Что же касается неравенства (30), то оно ограничивает снизу область значений  $\beta$ . Таким образом, ввиду произвольности  $K > 1$  мы можем считать неравенство (30) выполненным в области  $G$ . Итак, существует область  $G$  типа указанной на рис. 4.45, в которой все последовательные приближения

$r_1^{(n)}(x, t)$ ,  $g_2^{(n)}(y, t)$  обладают ограниченными первыми производными.

Заметим, что в случае липшиц-непрерывных входных данных задачи Гурса аналогичным образом доказывается равномерная липшиц-непрерывность последовательных приближений.

Докажем сходимость последовательных приближений. Из уравнения (6) имеем следствие

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial t} (r_1^{(n)} - r_1^{(n-1)}) + \xi_1^{(n)}(r_1, r_2, x, t) \frac{\partial}{\partial x} (r_1^{(n)} - r_1^{(n-1)}) \right| < \\ & < \left[ \max \left| \frac{\partial f_1}{\partial r_2} \right| + \max \left| \frac{\partial \xi_1}{\partial r_1} \right| E_1 \right] |r_1^{(n)} - r_1^{(n-1)}| + \\ & + \left[ \max \left| \frac{\partial f_1}{\partial r_2} \right| + E_1 \left| \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2} \right| \right] |r_2^{(n-1)} - r_2^{(n-2)}| \leq \\ & \leq M[E_1 + 1] \{ |r_1^{(n)} - r_1^{(n-1)}| + \max_G |r_2^{(n-1)} - r_2^{(n-2)}| \}. \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом условия (7) отсюда следует, что существует  $B > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} |r_1^{(n)}(x, t) - r_1^{(n-1)}(x, t)| & < B(t - \tau) \max_G |r_2^{(n-1)} - r_2^{(n-2)}| < \\ & < Bt \max_G |r_2^{(n-1)} - r_2^{(n-2)}|. \end{aligned} \quad (36)$$

Величину  $|r_2^{(n)} - r_2^{(n-1)}|$  нам легче оценить, исходя из характеристической системы (9). Из уравнений (9) и начальных условий (10) следует, что

$$\left. \begin{aligned} |x_2^{(n)}(t, \beta) - x_2^{(n-1)}(t, \beta)| & \leq Bt \max_G |r_1^{(n-1)} - r_1^{(n-2)}|, \\ |\bar{r}_2^{(n)}(t, \beta) - \bar{r}_2^{(n-1)}(t, \beta)| & \leq Bt \max_G |r_1^{(n-1)} - r_1^{(n-2)}|. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Согласно нашим обозначениям

$$\begin{aligned} |r_2^{(n)}(x, t) - r_2^{(n-1)}(x, t)| & = |r_2(x_2(t, \beta), t) - r_2(x_2(t, \beta), t)| \leq \\ & \leq |r_2(x_2(t, \beta), t) - r_2(x_2(t, \beta), t)| + \\ & + |r_2(x_2(t, \beta), t) - r_2(x_2(t, \beta), t)| < |\bar{r}_2^{(n)}(t, \beta) - \bar{r}_2^{(n-1)}(t, \beta)| + \\ & + \frac{E_2}{t} |x_2(t, \beta) - x_2(t, \beta)|. \end{aligned}$$

Подставляя сюда оценки (37), получим

$$|r_2^{(n)}(x, t) - r_2^{(n-1)}(x, t)| < B \max_G |r_1^{(n-1)} - r_1^{(n-2)}| \{t + E_2\}. \quad (38)$$

Оценки (36) и (38) доказывают равномерную сходимость в области  $G$  последовательных приближений при достаточно малой величине  $t_0$ .

Таким образом мы доказываем существование решения поставленной задачи Гурса для системы двух квазилинейных уравнений. Интересно отметить, что в случае  $n \geq 3$  неясен не только вопрос о существовании решения, но и сама постановка задачи Гурса.

**7. Построение разрывных решений системы двух квазилинейных уравнений.** Теперь мы рассмотрим несколько случаев построения разрывных решений системы двух квазилинейных уравнений, которую будем записывать в инвариантах:

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k(r, x, t) \frac{\partial r_k}{\partial x} = f_k(r, x, t) \quad (k = 1, 2), \quad (1)$$

а также в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_l(u, x, t)}{\partial x} = g_l(u, x, t) \quad (l = 1, 2). \quad (2)$$

Мы будем считать, что система уравнений (2) удовлетворяет требованиям (3.5.4)—(3.5.12), только теперь входящие в эти условия функции  $\xi_k, R_1, R_2, D_1, D_2$ , помимо аргументов, указанных в п. 5, зависят также от  $x$  и  $t$ .

Построение кусочно-гладких разрывных решений системы двух законов сохранения (2) было проведено независимо большой группой китайских ученых (см. Ч. Х. Гу, Д. К. Ли и др. [1961—1962]) и Б. Л. Рождественским [1962б, в, 1963]. Локальное построение разрывных решений проведено в почти совпадающих предположениях о системе (2), однако методы построения в этих двух циклах работ несколько отличны один от другого.

Изложение в этом пункте следует работам Б. Л. Рождественского [1962в, 1963], так как этот подход более тесно связан с изложением методов решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа, принятым в этой книге.

Мы будем искать обобщенное решение  $r = r(x, t)$  системы уравнений (1), принимающее начальные значения

$$r(x, 0) = r_0(x). \quad (3)$$

Будем считать, что  $r_0(x)$  имеет разрыв 1-го рода в точке  $x = 0$ ; за исключением этой точки, на отрезке  $|x| \leq a$  функция  $r_0(x)$  предполагается непрерывно дифференцируемой.

В случае, когда

$$r_1^0(-0) \leq r_1^0(+0), \quad r_2^0(-0) \leq r_2^0(+0),$$

решение  $r(x, t)$  будет содержать лишь центрированные волны разрежения и не будет иметь линий разрыва (ударных волн). Решение в этом случае может быть построено с помощью решения двух задач Гурса, рассмотренных в предыдущем пункте. Поэтому здесь мы будем рассматривать случай разрывных решений и от начальной функции  $r_0(x)$  потребуем, чтобы, например,

$$r_1^0(-0) > r_1^0(+0). \quad (4)$$

Аналогично случаю задачи о распаде произвольного разрыва, рассмотренному в п. 5, задача (1), (3) при условии (4) разбивается на три взаимно исключающих друг друга случая:

$$\text{а) } r_1^0(+0) < r_1^0(-0), R_2(r_1^0(+0), r_1^0(-0), r_2^0(-0), 0, 0) \leq \leq r_2^0(+0); \quad (5)$$

$$\text{б) } r_2^0(+0) < r_2^0(-0), R_1(r_2^0(-0), r_1^0(+0), r_2^0(+0), 0, 0) \geq \geq r_1^0(-0); \quad (6)$$

$$\text{в) } \left. \begin{aligned} R_2(r_1^0(+0), r_1^0(-0), r_2^0(-0), 0, 0) &> r_2^0(+0), \\ R_1(r_2^0(-0), r_1^0(+0), r_2^0(+0), 0, 0) &< r_1^0(-0). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В случае выполнения (5) решение  $r(x, t)$  задачи (1), (3) имеет линию разрыва  $OL_{D_1}$  индекса 1, выходящую из точки  $(0, 0)$ , и волну разрежения  $L_2^-OL_2^+$  (рис. 4.46, а); при выполнении (6) из точки  $(0, 0)$  выходят волна разрежения  $L_1^-OL_1^+$  и

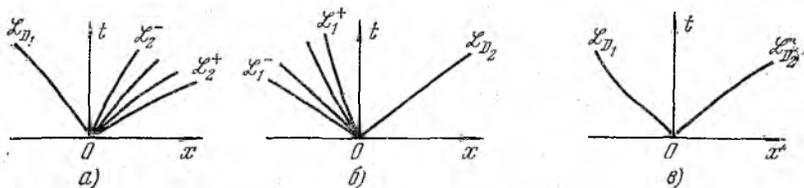


Рис. 4.46

линия разрыва  $OL_{D_2}$  индекса 2 (рис. 4.46, б). Наконец, при выполнении неравенств (7) из точки  $(0, 0)$  выходят две линии разрыва  $OL_{D_1}$  индекса 1 и  $OL_{D_2}$  индекса 2 (рис. 4.46, в).

Построение решения  $r(x, t)$  различно в каждом из этих случаев, однако случаи а) и б) отличаются друг от друга лишь индексами линий разрыва и волн разрежения. Поэтому нам достаточно рассмотреть вопрос о построении решения лишь в случае выполнения неравенств (5) либо (7).

Изложим способ построения решения  $r(x, t)$  в каждом из этих двух случаев,

Общим моментом для этих двух случаев является решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$r(x, 0) = r_0(x), \quad -a \leq x < 0,$$

заданными лишь слева от точки  $x = 0$ , и начальными условиями

$$r(x, 0) = r_0(x), \quad 0 < x \leq a,$$

заданными лишь справа от точки  $x = 0$ .

Решение каждой из этих двух задач Коши является непрерывно дифференцируемым и может быть определено в области определенности каждой из задач методом характеристик, изложенным в главе 1. Решение первой задачи определяется при

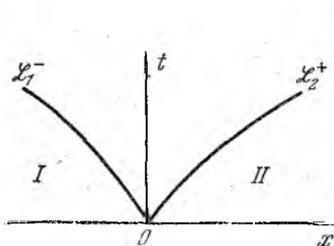


Рис. 4.47.

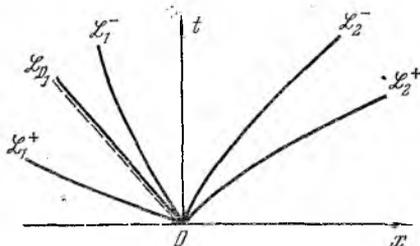


Рис. 4.48.

этом в области  $I$ , ограниченной справа характеристикой первого семейства  $OL_1^-$ ; решение второй задачи — в области  $II$ , ограниченной слева характеристикой второго семейства, которую мы обозначим через  $OL_2^+$  (рис. 4.47). Заметим, что в некоторых случаях может оказаться, что области  $I$  и  $II$  перекрываются друг с другом, т. е. линия  $OL_2^+$  лежит левее линии  $OL_1^-$ , однако для нашего дальнейшего рассмотрения это не имеет существенного значения. Решения этих двух задач в областях  $I$  и  $II$  мы дальше будем обозначать через  $r_0(x, t)$ . Согласно результатам главы 1,  $r_0(x, t)$  обладает ограниченными первыми производными по переменным  $x$  и  $t$ ; мы будем считать, что эти производные ограничены по модулю числом  $C > 0$ .

В случае выполнения условий (5) построение решения начинается с решения задачи Гурса для системы уравнений (1) с условиями, заданными на характеристике  $OL_2^+$ :

$$r_1(x, t)|_{OL_2^+} = r_1^0(x, t),$$

и в точке  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_2(t\xi_2(r_1^0(+0), \beta, 0, 0), t) = \beta,$$

где

$$R_2(r_1^0(+0), r_1^0(-0), r_2^0(-0), 0, 0) \leq \beta \leq r_2^0(+0).$$

Решение этой задачи строится методом, изложенным в п. 6. Пусть при  $0 \leq t \leq T$  в зоне  $\mathcal{L}_2^- O \mathcal{L}_2^+$  (рис. 4.48) построено решение этой задачи. Согласно п. 6 решение  $r(x, t)$  этой задачи Гурса является гладкой функцией и, в частности, дифференцируемо вдоль характеристики  $O \mathcal{L}_2^-$ . Решение  $r(x, t)$  в зоне  $\mathcal{L}_2^- O \mathcal{L}_2^+$  мы также будем обозначать  $r_0(x, t)$ .

Дальнейшие построения имеют целью определение функций  $\tilde{r}_1(x, t)$ ,  $\tilde{r}_2(x, t)$ , удовлетворяющих следующим условиям:

1)  $\tilde{r}_1$ ,  $\tilde{r}_2$  определены в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$ , содержащей зону  $\mathcal{L}_1^- O \mathcal{L}_2^-$ , и удовлетворяют в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  системе уравнений (1).

2) Интегральная кривая  $O \mathcal{L}_D$ , уравнения

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\tilde{r}_1(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (8)$$

проходящая через точку  $(0, 0)$ :

$$x(0) = 0, \quad (9)$$

целиком лежит при  $0 \leq t \leq T$  внутри зоны  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_1^-$ .

3) На линии  $O \mathcal{L}_2^-$  выполнено условие

$$\tilde{r}_1(x, t) |_{O \mathcal{L}_2^-} = r_1^0(x, t), \quad (10)$$

а на линии  $O \mathcal{L}_D$  — условие

$$\tilde{r}_2(x, t) |_{O \mathcal{L}_D} = R_2(\tilde{r}_1(x, t), r_0(x, t), x, t). \quad (11)$$

Легко заметить, что если такие функции  $\tilde{r}_1$ ,  $\tilde{r}_2$  и линия  $O \mathcal{L}_D$  найдены, то обобщенное решение задается формулами

$$r(x, t) = \begin{cases} \tilde{r}(x, t) & \text{в зоне } \mathcal{L}_D O \mathcal{L}_2^-, \\ r_0(x, t) & \text{вне зоны } \mathcal{L}_D O \mathcal{L}_2^-. \end{cases} \quad (12)$$

В самом деле, формула (12) определяет разрывную на линии  $O \mathcal{L}_D$  функцию, которая всюду, кроме линии разрыва, удовлетворяет системе уравнений (1). На линии разрыва  $O \mathcal{L}_D$  решение  $r(x, t)$  удовлетворяет условиям Гюгонио и условиям устойчивости.

Итак, задача сведена к построению функций  $\tilde{r}_1$ ,  $\tilde{r}_2$ , удовлетворяющих требованиям (1), (2), (3), сформулированным выше. Мы укажем сейчас метод последовательных приближений, с помощью которого могут быть построены эти функции.

Определим функцию  $r_2(x, t)$  слева от линии  $O \mathcal{L}_2^-$ . Будем считать, что  $\tilde{r}_2(x, t)$  не зависит от  $x$  и на линии  $O \mathcal{L}_2^-$  прини-

мает те же самые значения, что и  $r_2^0(x, t)$ . Таким образом,

$\tilde{r}_2^{(0)}(x, t)$  определена слева от  $OL_2^-$  и задается формулой

$$\tilde{r}_2^{(0)}(x, t) = r_2^0(x(t), t),$$

где  $x = x(t)$  — уравнение линии  $OL_2^-$ .

После этого определяем  $\tilde{r}_1^{(1)}(x, t)$  как решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{r}_1^{(1)}}{\partial t} + \xi_1^{(1)}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2(x, t), x, t) \frac{\partial \tilde{r}_1^{(1)}}{\partial x} = \\ = f_1^{(1)}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2(x, t), x, t), \end{aligned} \quad (13)$$

удовлетворяющее на линии  $OL_2^-$  условию

$$\tilde{r}_1^{(1)}|_{OL_2^-} = r_1^0(x, t).$$

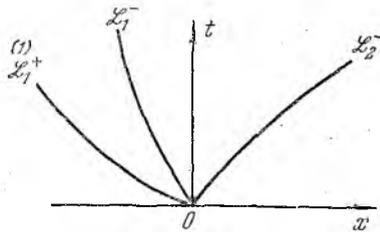


Рис 4.49.

Решение  $\tilde{r}_1^{(1)}$  однозначно определяется в зоне  $L_1^+ OL_2^-$  (рис. 4.49),

где  $OL_1^+$  — характеристика уравнения (13), проходящая через точку  $(0, 0)$ . Согласно нашим условиям  $r_1^0(+0) < r_1^0(-0)$ , поэтому при достаточно малых  $T$  в зоне  $L_1^+ OL_1^-$  будет выполняться неравенство

$$\tilde{r}_1^{(1)}(x, t) < r_1^0(x, t).$$

Из условий (3.5.11) следует, что

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)}(\tilde{r}_1(0, 0), \tilde{r}_2(0, 0), 0, 0) = \\ = \xi_1(r_1^0(+0), R_2(r_1^0(+0), r_0(-0), 0, 0), 0, 0) < \\ < \xi_1(r_1^0(-0), r_2^0(-0), 0, 0). \end{aligned} \quad (14)$$

В неравенстве (14) в левой части стоит наклон линии  $OL_1^+$  в точке  $(0, 0)$ , в правой — наклон характеристики  $OL_1^-$  в точке  $(0, 0)$ . Поэтому из выполнения этого неравенства следует, что при достаточно малом  $T$  кривая  $OL_1^+$  лежит слева от  $OL_1^-$ , как это и показано на рис. 4.49.

Теперь в зоне  $L_1^+ OL_1^-$  рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\tilde{r}_1(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (15)$$

для которого поставим начальное условие  $x(0) = 0$ . Замечая, что при достаточно малом  $T$   $\bar{r}_1^{(1)}(x, t)$  является дифференцируемой функцией своих переменных, заключаем, что правая часть уравнения (15) является также дифференцируемой функцией своих переменных. В точке  $(0, 0)$  из условий (3.5.11) следует, что

$$\xi_1^{(1)}(\bar{r}_1^{(1)}(0, 0), \bar{r}_2^{(0)}(0, 0), 0, 0) < D_1(\bar{r}_1^{(1)}(0, 0), r_0(0, 0), 0, 0) < \xi_1(r_0(0, 0), 0, 0).$$

Отсюда по непрерывности этих функций мы заключаем, что при достаточно малом  $T$  на линии  $OL_1^-$  выполнено неравенство

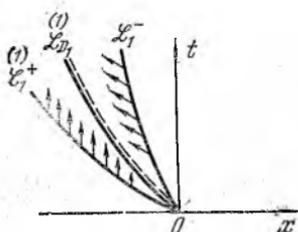


Рис. 4.50.

$$D_1(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), r_0(x, t), x, t) < \xi_1(r_0(x, t), x, t), \quad (16)$$

а на линии  $OL_1^+$  — неравенство

$$\xi_1^{(1)}(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), \bar{r}_2^{(0)}(x, t), x, t) < D_1(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), r_0(x, t), x, t). \quad (17)$$

Неравенства (16) и (17) означают, что на линиях  $OL_1^-$  и  $OL_1^+$  поле направлений для дифференциального уравнения (15) имеет вид, который изображен на рис. 4.50. Мы заключаем, что существует, и притом единственная, интегральная кривая уравнения (15), проходящая через точку  $(0, 0)$ . Обозначим эту кривую через  $OL_{D_1}^{(1)}$ . Очевидно, что кривая  $OL_{D_1}^{(1)}$  является гладкой, в частности дифференцируемой, кривой.

После определения кривой  $OL_{D_1}^{(1)}$  определим функцию  $\bar{r}_2^{(1)}(x, t)$  в зоне  $L_1^+ OL_2^-$  как решение уравнения

$$\frac{\partial \bar{r}_2^{(1)}}{\partial t} + \xi_2^{(1)}(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), \bar{r}_2^{(1)}(x, t), \frac{\partial \bar{r}_2^{(1)}}{\partial x}) = f_2^{(1)}(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), \bar{r}_2^{(1)}(x, t)) \quad (18)$$

(в котором  $\bar{r}_1^{(1)}(x, t)$  является известной функцией), удовлетворяющее начальному условию, поставленному на кривой  $OL_{D_1}^{(1)}$ :

$$\bar{r}_2^{(1)}(x, t) \Big|_{OL_{D_1}^{(1)}} = R_2^{(1)}(\bar{r}_1^{(1)}(x, t), r_0(x, t), x, t),$$

Эта задача, очевидно, имеет решение  $\tilde{r}_2^{(1)}(x, t)$ , однозначно определенное во всей зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$ , дифференцируемое в этой зоне при достаточно малом  $T$ ; при этом значения решения в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  непрерывным образом примыкают к значениям функции  $r_2^0(x, t)$  на линии  $O \mathcal{L}_2^-$ .

Слева от линии  $O \mathcal{L}_1^+$  функцию  $\tilde{r}_2^{(1)}(x, t)$  положим не зависящей от переменного  $x$  и принимающей те же значения, что и на линии  $O \mathcal{L}_1^+$ . После этого процесс последовательных приближений повторяется.

Пусть слева от  $O \mathcal{L}_2^-$  известна липшиц-непрерывная функция  $\tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t)$ . В зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  определяем  $\tilde{r}_1^{(n)}(x, t)$  как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{r}_1^{(n)}}{\partial t} + \xi_1^{(n)}(\tilde{r}_1^{(n)}, r_2^{(n-1)}(x, t), x, t) \frac{\partial \tilde{r}_1^{(n)}}{\partial x} &= \\ &= f_1^{(n)}(\tilde{r}_1^{(n)}, \tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t), x, t), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tilde{r}_1^{(n)}(x, t) |_{O \mathcal{L}_2^-} = r_1^0(x, t). \quad (20)$$

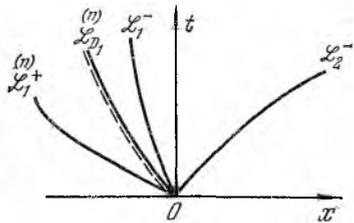


Рис. 4.51.

Аналогично предыдущему линия  $O \mathcal{L}_1^+$  расположена слева от  $O \mathcal{L}_1^-$ ,

а в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_1^-$  (рис. 4.51) существует единственная интегральная кривая  $O \mathcal{L}_{D_1}$  уравнения

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad x(0) = 0. \quad (21)$$

После этого функция  $\tilde{r}_2^{(n)}(x, t)$  определяется в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  как решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{r}_2^{(n)}}{\partial t} + \xi_2^{(n)}(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), \tilde{r}_2^{(n)}, x, t) \frac{\partial \tilde{r}_2^{(n)}}{\partial x} = f_2^{(n)}(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), \tilde{r}_2^{(n)}, x, t), \quad (22)$$

$$\tilde{r}_2^{(n)} |_{O \mathcal{L}_{D_1}} = R_2(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), r_0(x, t), x, t) \quad (23)$$

и полагается не зависящей от  $x$  слева от  $O \mathcal{L}_1^+$  и непрерывной на линии  $O \mathcal{L}_1^+$ .

Для доказательства сходимости последовательных приближений оценим, аналогично п. 6, производные  $\tilde{p}_1 = \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial x}$ ,  $\tilde{p}_2 = \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial x}$ .

Пусть

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_i(x, t)| &\leq R \quad (i=1, 2), \quad n=1, 2, \dots, \\ |p_i(x, t)| &\leq E_i, \quad |\tilde{p}_1|_{O\mathcal{L}_2} \leq C, \end{aligned}$$

а величина  $M$  имеет тот же смысл, что и в п. 6.

Из уравнения (19) получаем уравнение, аналогичное (3.6.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} = & - \frac{\partial \xi_1}{\partial r_1} (p_1)^2 + \\ & + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial r_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} \right] p_1 + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично (12) имеем уравнение для мажоранты  $p_1$ :

$$\frac{dp_1}{dt} = Mp_1^2 + M[E_2 + 2]p_1 + M[E_2 + 1] < M(E_2 + 1)(p_1 + 1)^2.$$

Аналогично выкладкам п. 6 отсюда легко следует

$$|p_1(x, t)| < \frac{C+1}{1 - (C+1)M(E_2 + 1)(t-\tau)}. \quad (24)$$

Если

$$T \leq \frac{1}{2(C+1)M(E_2 + 1)},$$

то при  $0 \leq \tau \leq t < T$

$$|p_1(x, t)| < 2(C+1). \quad (25)$$

Аналогично выписывается и уравнение для  $p_2$ ; начальное значение  $p_2(x, t)$  вычисляется на линии  $O\mathcal{L}_D$ , из условия (23):

$$p_2(x, t) = \frac{\frac{\partial R_2}{\partial t} + D_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} - f_2}{\xi_2(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, x, t) - D_1(\tilde{r}_1, r_0(x, t), x, t)}. \quad (26)$$

Здесь через  $\frac{\partial R_2}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial R_2}{\partial x}$  кратко обозначены соответствующие производные от правой части (23). Согласно условиям (3.5.12)

$$\xi_2(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, x, t) - D_1(\tilde{r}_1, r_0(x, t), x, t) > \varepsilon > 0,$$

поэтому при достаточно малых  $T$  знаменатель в формуле (26) не будет обращаться в нуль, и ввиду (25) можно считать, что существуют константы  $D, E$  такие, что на линии  $OL_D$ ,

$$|p_2^{(n)}(x, t)| < DC + E = D_0.$$

Аналогично предыдущему получаем, что при

$$T \leq \frac{1}{2(D_0 + 1)M(E_1 + 1)}, \quad (27)$$

$$|p^{(n)}(x, t)| < 2D_0. \quad (28)$$

Выбирая теперь

$$T = \min \left\{ \frac{1}{2(C+1)M(2D_0+1)}, \frac{1}{2(D_0+1)M(2C+3)} \right\}, \quad (29)$$

получим, что при  $0 \leq t \leq T$  одновременно выполнены оценки (25) и (28) при любых  $n = 1, 2, \dots$ , т. е. все последовательные приближения имеют ограниченные первые производные.

Приступаем к доказательству сходимости последовательных приближений  $\tilde{r}^{(n)}(x, t)$ , считая, что величина  $T$  задана формулой (29).

Выберем общую часть областей  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_2^-$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  и ограничим ее условием  $0 \leq t \leq T' \leq T$ , где  $T'$  столь мало, что общая часть областей  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_2^-$  всегда содержит внутри себя все линии  $OL_D$ , при  $n = 1, 2, \dots$ . Так как наклон линии  $OL_1^+$  в точке  $(0, 0)$  не зависит от номера  $n$ , а величины  $\tilde{r}_1^{(n)}, \tilde{r}_2^{(n)}$  имеют равномерно ограниченные производные, то это всегда можно сделать.

Обозначим через  $G$  эту общую часть областей  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_2^-$  и введем следующие обозначения:

$$\Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t) = \max_{G_t} |\tilde{r}_i^{(n)}(\xi, \tau) - \tilde{r}_i^{(n-1)}(\xi, \tau)|,$$

где  $G_t$  — пересечение области  $G$  с полосой  $0 \leq \tau \leq t$ ,

$$\Delta x_{D_1}^{(n)}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |x_{D_1}^{(n)}(\tau) - x_{D_1}^{(n-1)}(\tau)|.$$

Здесь через  $x = x_{D_1}^{(n)}(t)$  обозначено уравнение линии  $OL_{D_1}^{(n)}$ . Из (19), (20) легко получаем оценки (аналогичные оценки мы проводили в п. 6 этого параграфа)

$$\Delta \tilde{r}_1^{(n)}(t) \leq \bar{M}t \Delta \tilde{r}_2^{(n-1)}(t),$$

из уравнений (21)

$$\Delta x_{D_1}(t) \leq \bar{M} t \Delta \bar{r}_1^{(n)}(t) \leq \bar{M}^2 t^2 \Delta \bar{r}_2^{(n-1)}(t),$$

и, наконец, из уравнений (22), (23) можно получить оценку

$$\Delta \bar{r}_2^{(n)}(t) \leq \bar{M} \Delta \bar{r}_1^{(n)}(t) + \bar{M} t \Delta \bar{r}_1^{(n)}(t) + \bar{M} \Delta x_{D_1}(t) < \bar{M} t \Delta \bar{r}_2^{(n-1)}(t).$$

Здесь  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}$  — некоторые ограниченные величины.

Из этих формул легко следует равномерная сходимость последовательностей  $\{\bar{r}_2^{(n)}\}$ ,  $\{\bar{r}_1^{(n)}\}$ ,  $\{x_{D_1}^{(n)}\}$ .

Ввиду равномерной сходимости величины

$$\bar{r}_1(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}_1^{(n)}(x, t), \quad \bar{r}_2(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}_2^{(n)}(x, t)$$

удовлетворяют в  $G$  системе уравнений (1), линия  $O\mathcal{L}_{D_1}(x_{D_1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{D_1}^{(n)}(t))$  является интегральной кривой уравнения (8),

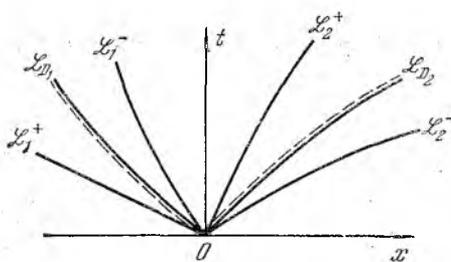


Рис. 4.52.

а функция  $\bar{r}_2(x, t)$  удовлетворяет на линии  $O\mathcal{L}_{D_1}$  условию (11).

Переходим теперь к рассмотрению второго случая.

При выполнении неравенств (7), как мы уже отмечали, решение содержит две линии разрыва:  $O\mathcal{L}_{D_1}$  индекса 1 и  $O\mathcal{L}_{D_2}$  индекса 2, выходящих из точки  $(0, 0)$  (рис. 4.52). Аналогично пре-

дыдущему введем функции  $\bar{r}_1(x, t)$ ,  $\bar{r}_2(x, t)$ , от которых потребуем:

1) Функции  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_2$  определены в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_2^-$ , содержащей зону  $\mathcal{L}_{D_1} O\mathcal{L}_{D_2}$ ; обладают в этой зоне ограниченными первыми производными, удовлетворяющими системе уравнений (1).

2) Интегральная кривая  $O\mathcal{L}_{D_1}$  уравнения

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\bar{r}_1(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (30)$$

проходящая через точку  $(0, 0)$ , при  $0 \leq t \leq T$  лежит в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_1^-$ , а интегральная кривая  $O\mathcal{L}_{D_2}$  уравнения

$$\frac{dx}{dt} = D_2(\bar{r}_2(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (31)$$

выходящая из точки  $(0, 0)$ , лежит при  $0 \leq t \leq T$  в зоне  $\mathcal{L}_2^+ O\mathcal{L}_2^-$ .

3) На линиях  $OL_{D_1}$  и  $OL_{D_2}$  выполнены условия

$$\bar{r}_2(x, t)|_{OL_{D_1}} = R_2(\bar{r}_1(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (32)$$

$$\bar{r}_1(x, t)|_{OL_{D_2}} = R_1(\bar{r}_2(x, t), r_0(x, t), x, t). \quad (33)$$

Если функции  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_2$  и линии  $OL_{D_1}$ ,  $OL_{D_2}$ , удовлетворяющие этим требованиям, построены, то решение задачи Коши (1), (3) задается формулой

$$r(x, t) = \begin{cases} \bar{r}(x, t) & \text{в зоне } \mathcal{L}_{D_1}OL_{D_2}, \\ r_0(x, t) & \text{вне зоны } \mathcal{L}_{D_1}OL_{D_2}. \end{cases} \quad (34)$$

Мы изложим метод последовательных приближений, с помощью которого могут быть построены функции  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ ; при этом мы опустим некоторые детали, общие с предыдущим построением.

Введем обозначения

$$\bar{r}_1^{(0)}(x, t) = \bar{r}_1^{(0)} = R_1(r_2^0(-0), r_0(+0), 0, 0),$$

$$\bar{r}_2^{(0)}(x, t) = \bar{r}_2^{(0)} = R_2(r_1^0(+0), r_0(-0), 0, 0)$$

и определим линию  $OL_{D_1}^{(0)}$  как интегральную кривую задачи

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\bar{r}_1^{(0)}, r_0(x, t), x, t), \quad x(0) = 0, \quad (35)$$

а линию  $OL_{D_2}^{(0)}$  — как интегральную кривую задачи

$$\frac{dx}{dt} = D_2(\bar{r}_2^{(0)}, r_0(x, t), x, t), \quad x(0) = 0. \quad (36)$$

Если  $T$  достаточно мало, то при  $0 \leq t \leq T$  кривая  $OL_{D_1}^{(0)}$  лежит слева от  $OL_{D_1}^-$ ; соответственно  $OL_{D_2}^{(0)}$  лежит справа от  $OL_{D_2}^+$ .

После этого определяем следующее приближение  $\bar{r}_1^{(1)}(x, t)$  как решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{r}_1^{(1)}}{\partial t} + \xi_1(\bar{r}_1^{(1)}, \bar{r}_2^{(0)}(x, t), x, t) \frac{\partial \bar{r}_1^{(1)}}{\partial x} = f_1(\bar{r}_1^{(1)}, \bar{r}_2^{(0)}(x, t), x, t), \quad (37)$$

$$\bar{r}_1^{(1)}(x, t)|_{OL_{D_2}^{(0)}} = R_1(\bar{r}_2^{(0)}(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad (38)$$

а  $\tilde{r}_2^{(1)}(x, t)$  — как решение задачи Коши

$$\frac{\partial \tilde{r}_2^{(1)}}{\partial t} + \xi_2^{(0)}(\tilde{r}_1^{(1)}(x, t), \tilde{r}_2^{(1)}(x, t), x, t) \frac{\partial \tilde{r}_2^{(1)}}{\partial x} = f_2^{(0)}(\tilde{r}_2^{(1)}(x, t), \tilde{r}_2^{(1)}(x, t), x, t), \quad (39)$$

$$\tilde{r}_2^{(1)}(x, t) \Big|_{O\mathcal{L}_{D_1}^{(0)}} = R_2(r_1^{(0)}(x, t), r_0(x, t), x, t). \quad (40)$$

Решение задачи (37), (38) может быть определено в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_2^-$ ; в этой же зоне определим и решение задачи Коши (39), (40), а вне этой зоны положим, что  $\tilde{r}_1^{(1)}, \tilde{r}_2^{(1)}$  непрерывно примыкают к их значениям на линиях  $O\mathcal{L}_1^+$  и  $O\mathcal{L}_2^-$  и не зависят от координаты  $x$ .

После этого процесс последовательных приближений становится стандартным. Пусть известно приближение  $\tilde{r}^{(n-1)}(x, t)$ , обладающее ограниченной производной. Сначала определяем линии  $O\mathcal{L}_{D_1}^{(n-1)}$  и  $O\mathcal{L}_{D_2}^{(n-1)}$  как интегральные кривые задач

$$\frac{dx}{dt} = D_1(\tilde{r}_1^{(n-1)}(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad x(0) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{dx}{dt} = D_2(\tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t), r_0(x, t), x, t), \quad x(0) = 0. \quad (42)$$

Эти интегральные кривые при достаточно малом  $T$  лежат в зонах  $\mathcal{L}_1^+ O\mathcal{L}_1^-$  и  $\mathcal{L}_2^+ O\mathcal{L}_2^-$  соответственно. В этом мы убеждаемся, исследовав поля направлений дифференциальных уравнений (41) и (42) на линиях  $O\mathcal{L}_1^+, O\mathcal{L}_1^-$  и  $O\mathcal{L}_2^+, O\mathcal{L}_2^-$  совершенно аналогично предыдущему.

После этого определяем  $\tilde{r}_1^{(n)}(x, t)$  с помощью решения задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{r}_1^{(n)}}{\partial t} + \xi_1^{(n-1)}(\tilde{r}_1^{(n-1)}, \tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t), x, t) \frac{\partial \tilde{r}_1^{(n)}}{\partial x} &= f_1^{(n-1)}(\tilde{r}_1^{(n-1)}, \tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t), x, t), \\ \tilde{r}_1^{(n)}(x, t) \Big|_{O\mathcal{L}_{D_1}^{(n-1)}} &= R_1(\tilde{r}_2^{(n-1)}(x, t), r_0(x, t), x, t) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

в зоне  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$ ; в этой же зоне находим  $\tilde{r}_2(x, t)$  из условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{r}_2^{(n)}}{\partial t} + \tilde{\varepsilon}_2^{(n-1)}(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), \tilde{r}_2^{(n)}(x, t)) \frac{\partial \tilde{r}_2^{(n)}}{\partial x} &= \tilde{f}_2^{(n-1)}(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), \tilde{r}_2^{(n)}(x, t)), \\ \tilde{r}_2^{(n)}(x, t)|_{O \mathcal{L}_2^-} &= R_2^{(n-1)}(\tilde{r}_1^{(n)}(x, t), r_0(x, t), x, t) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

и полагаем  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  не зависящими от  $x$  вне зоны  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  (рис. 4.53). Мы не будем проводить здесь громоздких выкладок, связанных с оценками первых производных последовательных приближений

$\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ , так как они в основном повторяют проведенные ранее, а фиксируем лишь результаты. Если система (1) удовлетворяет вышеперечисленным требова-

ниям, а решения  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  остаются ограниченными при любом  $n = 1, 2, \dots$ , то существует  $T > 0$  такое, что при  $0 \leq$

$t \leq T$  все последовательные приближения  $\tilde{r}(x, t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) обладают ограниченными первыми производными.

Зоной  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  мы обозначаем область переменных  $x, t$ , в которой одновременно определяются функции  $\tilde{r}_1(x, t)$  и  $\tilde{r}_2(x, t)$  как решения задач (43) и (44) (рис. 4.53).

Вне зоны  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  мы доопределяем  $\tilde{r}(x, t)$  для того, чтобы в процессе метода последовательных приближений не происходило уменьшения областей  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  за счет того, что функции

$\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  неизвестны в области определенности решений задач Коши (43) и (44).

Наконец, наметим элементы доказательства сходимости метода последовательных приближений с тем, чтобы выяснить требования, которые гарантируют сходимость.

В общей части зон  $\mathcal{L}_1^+ O \mathcal{L}_2^-$  для всех  $n = 1, 2, \dots$  (таковая существует и при достаточно малых  $T$  содержит линии  $O \mathcal{L}_{D_1}^{(n)}, O \mathcal{L}_{D_2}^{(n)}$  при всех  $n = 1, 2, \dots$ ) аналогично предыдущему нетрудно

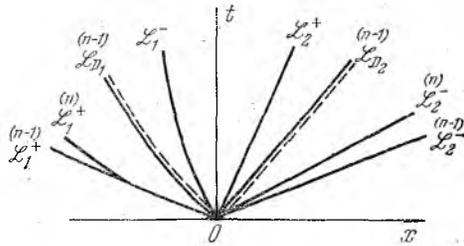


Рис. 4.53.

получить оценки

$$\Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t) \leq \max \left| \frac{\partial R_i(\tilde{r}_j, r_0, x, t)}{\partial \tilde{r}_j} \right| \Delta \tilde{r}_j^{(n-1)}(t) + \bar{M} t \Delta \tilde{r}_i^{(n-1)}(t) + \bar{M} \Delta x_{D_j}^{(n-1)}(t) \quad (i=1, 2; j \neq i), \quad (45)$$

$$\Delta x_{D_i}^{(n)}(t) \leq \bar{M} t \Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t). \quad (46)$$

В формуле (45) выражение  $\frac{\partial R_i}{\partial \tilde{r}_j}$  вычисляется при некотором значении первого аргумента, промежуточном для последовательных приближений. Из формул (45), (46) следует, что

$$\Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t) \leq \left\{ \max \left| \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{r}_j} \right| + \bar{M} t \right\} \Delta \tilde{r}_j^{(n-1)}(t) \quad (i=1, 2; j \neq i). \quad (47)$$

Отсюда следует, далее, что

$$\Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t) \leq \left\{ \max \left| \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{r}_j} \right| + \bar{M} t \right\} \left\{ \max \left| \frac{\partial R_j}{\partial r_i} \right| + \bar{M} t \right\} \Delta \tilde{r}_i^{(n-2)}(t) \quad (i=1, 2; j \neq i). \quad (48)$$

Так как

$$\left| \frac{\partial R_1(\tilde{r}_2, r_0, x, t)}{\partial \tilde{r}_2} \right| \cdot \left| \frac{\partial R_2(\tilde{r}_1, r_0, x, t)}{\partial \tilde{r}_1} \right| < 1$$

при произвольных  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, r_0, \tilde{r}_0$ , то отсюда следует, что существует малое  $T > 0$ , для которого неравенство (48) можно усилить так, что

$$\Delta \tilde{r}_i^{(n)}(t) \leq \beta \Delta \tilde{r}_i^{(n-2)}(t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (i=1, 2).$$

Отсюда следует равномерная сходимость при  $0 \leq t \leq T$  последовательных приближений  $\tilde{r}^{(n)}(x, t)$  и линий разрыва  $OL_{D_i}^{(n)}$  и  $OL_{D_i}$ .

Таким образом, мы можем показать, что существуют предельные функции  $\tilde{r}_i(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_i^{(n)}(x, t)$  ( $i=1, 2$ ), которые удовлетворяют сформулированным выше условиям. Этим заканчивается доказательство существования решения задачи Коши (1), (3) в случае выполнения условий (7).

**8. Замечания о единственности разрывного решения системы двух уравнений.** Мы кратко обсудим здесь вопрос о единственности разрывного решения  $r(x, t)$ , построение которого было проведено выше.

По известному приближению  $\tilde{r}^{(n-1)}(x, t)$  мы строили в предыдущем пункте следующее приближение  $\tilde{r}^{(n)}(x, t)$ . Коротко обо-

значим процедуру построения приближения  $\bar{r}^{(n)}(x, t)$  с помощью равенства

$$\bar{r}^{(n)}(x, t) = T \bar{r}^{(n-1)}(x, t), \quad (1)$$

где через  $T$  мы обозначаем нелинейный оператор, который переводит приближение  $\bar{r}^{(n-1)}(x, t)$  в приближение  $\bar{r}^{(n)}(x, t)$ . Мы установили выше, что для каждой из рассмотренных конфигураций имеет место неравенство

$$\|\bar{r}^{(n)}(x, t) - \bar{r}^{(n-1)}(x, t)\| \leq \beta \|\bar{r}^{(n-1)}(x, t) - \bar{r}^{(n-2)}(x, t)\|, \quad 0 < \beta < 1, \quad (2)$$

где под нормой  $\|r(x, t)\|$  понимается максимум модуля  $r(x, t)$  в области  $G$ . Неравенство (2) можно также записать в виде

$$\|T \bar{r}^{(n-1)} - T \bar{r}^{(n-2)}\| \leq \beta \|\bar{r}^{(n-1)} - \bar{r}^{(n-2)}\|, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (3)$$

Предположим теперь, что существуют два различных решения  $r(x, t)$ ,  $\bar{r}(x, t)$  рассматриваемой задачи Коши. Мыслимы при этом две возможности:

1) решения  $r$  и  $\bar{r}$  соответствуют двум различным конфигурациям;

2) решения  $r$  и  $\bar{r}$  соответствуют одной и той же конфигурации линий разрыва и волн разрежения.

Первая возможность, однако, сразу же исключается, так как она эквивалентна неединственности устойчивого обобщенного решения задачи о распаде произвольного разрыва, а, как мы видели в п. 5, это исключается требованиями, наложенными на систему двух квазилинейных уравнений.

Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда решения  $r(x, t)$  и  $\bar{r}(x, t)$  соответствуют одной и той же конфигурации.

Значит, существуют два решения  $\bar{r}(x, t)$  и  $\tilde{r}(x, t)$ , удовлетворяющие требованиям, которые формулировались в п. 7, и удовлетворяющие одному и тому же операторному уравнению:

$$\bar{r}(x, t) = T\bar{r}(x, t), \quad \tilde{r}(x, t) = T\tilde{r}(x, t). \quad (4)$$

К решениям  $\bar{r}$  и  $\tilde{r}$  уравнения (4) применим метод оценок, которые приводились выше для последовательных приближений; поэтому из (4) следует оценка

$$\|\bar{r} - \tilde{r}\| = \|T\bar{r} - T\tilde{r}\| \leq \beta \|\bar{r} - \tilde{r}\|, \quad 0 < \beta < 1, \quad (5)$$

что невозможно. Отсюда мы заключаем, что  $\bar{r} = \tilde{r}$ . Так доказывается единственность устойчивого обобщенного решения задачи Коши (3.7.1), (3.7.3).

Наше второе замечание касается области, в которой может быть построено разрывное решение системы двух квазилинейных уравнений. До тех пор, пока число особенностей решения (линии разрыва, волны разрежения) остается конечным, мы можем применять указанный метод построения решения, разбивая область на части, в которых особенности носят изолированный характер. Однако особенности решения возникают даже из гладких начальных данных, и число их может множиться, возможно, даже неограниченно.

Это обстоятельство затрудняет построение разрывных решений системы двух квазилинейных уравнений в целом, т. е. для любых  $t > 0$ .

Заметим, однако, что в большинстве практических задач число особенностей остается ограниченным.

**9. Теорема Глимма.** Дж. Глимм [1965] доказал, что задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (1)$$

разрешима в целом (т. е. во всей полуплоскости  $t \geq 0$ ), если начальная функция  $u_0(x)$  достаточно мало отличается от постоянного вектора  $\tilde{u}$ . О системе законов сохранения в (1) предполагается лишь гиперболичность в узком смысле и выполнение «условий выпуклости»

$$r^k(u) \cdot \nabla_{\xi_k}^{\varepsilon} (u) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

в некоторой области  $\Omega$  переменных  $u_1, \dots, u_n$ .

В качестве меры уклонения начальной функции  $u_0(x)$  от постоянного вектора  $\tilde{u}$  используются величины

$$d_0 = \max_x |u_0(x) - \tilde{u}| (1 + \text{tot var}_{-\infty < x < \infty} u_0(x)),$$

$$d_1 = \max_x |u_0(x) - \tilde{u}| + \text{tot var}_{-\infty < x < \infty} u_0(x).$$

Величина  $d_1$  применяется при рассмотрении общих законов сохранения, а  $d_0$  — при рассмотрении систем (1), приводимых к инвариантам Римана. Малость  $d_0$  накладывает на  $u_0(x)$  существенно менее жесткие ограничения, чем малость  $d_1$ .

Под обобщенным решением задачи Коши (1) понимается ограниченная, измеримая в полуплоскости  $t \geq 0$  функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая интегральным соотношениям

$$\iint_{\substack{t \geq 0 \\ -\infty < x < \infty}} (g_t u + g_x \Phi(u)) dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx = 0 \quad (3)$$

для любой гладкой вектор-функции  $g(x, t)$ , отличной от нуля лишь в ограниченной области этой полуплоскости.

**Теорема.** Пусть для системы законов сохранения (1) в некоторой области  $\Omega$  выполнены сформулированные выше условия. Тогда для любого  $\tilde{y} \in \Omega$  можно указать числа  $\delta > 0$  и  $K > 0$ , такие, что если

$$d_1 < \delta, \quad (4)$$

то задача Коши (1) имеет в полуплоскости  $t \geq 0$  обобщенное решение  $u(x, t)$ , удовлетворяющее оценкам:

$$\sup_x |u(x, t) - \tilde{y}| \leq K \sup_x |u_0(x) - \tilde{y}|, \quad (5)$$

$$\text{tot var } u(x, t) \leq K \text{ tot var } u_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t_2) - u(x, t_1)| dx \leq K |t_2 - t_1| \text{ tot var } u_0(x). \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

Если, кроме того, система законов сохранения приводится к инвариантам Римана, то условие (4) заменяется на более слабое условие  $d_0 < \delta$ .

Отметим сразу, что теорема Глимма устанавливает лишь факт существования обобщенного решения. Вопрос об единственности решения задачи Коши (1) остается открытым.

Мы ограничимся здесь лишь обсуждением узловых моментов довольно сложного доказательства этой теоремы, отсылая читателя за деталями к работе Дж. Глимма [1965].

Сначала строится некоторое семейство «приближенных» решений задачи (1). На полуплоскости  $t \geq 0$  введем «шахматную» сетку точек  $(mh, n\tau)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $m$  при каждом  $n$  пробегает множество всех целых чисел таких, что  $m + n$  четно.

Пусть функция  $v(x, t)$  кусочно-постоянна на каждом слое  $t = n\tau$ , где она имеет постоянные значения  $v_m^n$  на каждом интервале

$$(m-1)h < x < (m+1)h \quad (\text{при } m+n \text{ нечетном}).$$

На рис. 4.54 указаны точками границы этих интервалов и буквами принадлежащие этим интервалам постоянные значения  $v_m^n$ .

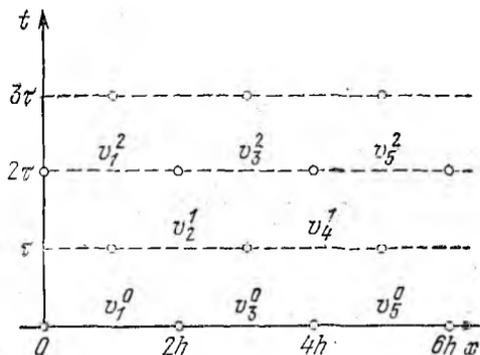


Рис. 4.54.

Опишем процедуру построения по известным  $v_m^n$  приближенного решения  $v(x, t)$  в полосе  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$  и последующего выбора постоянных значений  $v_m^{n+1}$ .

Кусочно-постоянные значения  $v_m^n$  на  $n$ -м слое  $t = n\tau$  примем за начальные условия для системы законов сохранения (1) и найдем решение  $v(x, t)$  этой задачи Коши в слое  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ . Таким образом, в этой полосе  $v(x, t)$  является точным обобщенным решением системы (1) с кусочно-постоянными начальными значениями, т. е. нахождение  $v(x, t)$  сводится к последовательному решению задач о распаде разрыва, сосредоточенного в точках сетки на  $n$ -м слое. Ширина этой полосы — шаг  $\tau$  — может быть выбрана столь малой, что волны, возникшие в результате распада разрыва в точках  $(mh, n\tau)$  остаются при  $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$  в интервалах  $(m-1)h \leq x \leq (m+1)h$ . Тогда за время  $\tau$  эти волны не успевают вступить друг с другом во взаимодействие. Условие

$$\frac{\tau}{h} \sup_{u \in \Omega} |\xi_k(u)| < 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

очевидно, обеспечивает нужную малость  $\tau$ .

В силу близости величин  $v_{m-1}^n$  и  $v_{m+1}^n$  (которая следует из малости вариации  $u_0(x)$ ), согласно теореме Лакса (см. п. 4), существует решение

$$v = V\left(\frac{x - mh}{t - n\tau}; v_{m-1}^n, v_{m+1}^n\right), \quad t \geq n\tau$$

задачи о распаде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(v)}{\partial x} = 0, \quad v(x, n\tau) = \begin{cases} v_{m-1}^n, & x < mh, \\ v_{m+1}^n, & x > mh. \end{cases}$$

Ввиду выполнения условия (8)  $v^n(x, t)$  определяется при всех  $m$  таких, что  $m+n$  четно, формулой

$$v^n(x, t) = V\left(\frac{x - mh}{t - n\tau}; v_{m-1}^n, v_{m+1}^n\right), \quad (9)$$

$$n\tau \leq t \leq (n+1)\tau, \quad (m-1)h \leq x \leq (m+1)h.$$

Пусть на каждом сеточном интервале  $t = (n+1)\tau$ ,  $(m-1)h \leq x \leq (m+1)h$  выбрана произвольная точка  $x_m^{n+1}$ . Тогда полагаем

$$v_m^{n+1} = v^n(x_m^{n+1}, (n+1)\tau) = V\left(\frac{x_m^{n+1} - mh}{\tau}; v_{m-1}^n, v_{m+1}^n\right). \quad (10)$$

Формулы (10) позволяют определять рекуррентно последовательности  $\{v_m^n\}$  при  $n = 1, 2, \dots$ , если, конечно, заданы по-

последовательности  $\{x_m^n\}$ . Полагаем  $v_m^0 = u_0(x_m^0)$ , тогда формулы (10) можно рассматривать как некоторую конечно-разностную схему, аппроксимирующую задачу Коши (1) на сетке  $\{x_m^n\}$  (схема Глимма).

Заметим, что задание совокупности точек  $\{x_m^n\}$  на полуплоскости  $t \geq 0$ ,  $x$  эквивалентно заданию совокупности точек  $a_m^n = \frac{x_m^n - (m-1)h}{2h}$  фиксированного отрезка  $[0, 1]$ . Эту совокупность будем обозначать буквой  $a$ . Ее можно считать точкой бесконечномерного пространства  $A = \prod_{m,n} [0, 1]$ .

В качестве приближенного решения задачи (1) принимаем функцию  $v(x, t)$ , которая определена равенствами (9) и (10). Оно зависит от параметров  $\tau, h$  и бесконечномерного параметра  $a = \{a_m^n\}$ . Из параметров  $\tau, h$  будем считать независимым только один ( $h$ ), фиксируя отношение  $\tau/h$  с выполнением (8). Параметры  $a_m^n$  будем считать независимыми.

Таким образом, в качестве приближенного решения мы принимаем функцию

$$v = v(x, t; h; a),$$

определенную (9) и (10), в которых  $x_m^n = (m-1)h + 2ha_m^n$ . Согласно построению приближенного решения функция  $v(x, t; h; a)$  является точным обобщенным решением рассматриваемой системы законов сохранения внутри каждой полосы  $n\tau < t < (n+1)\tau$ .

Для доказательства существования  $v(x, t; h; a)$  нужно обосновать применимость теоремы Лакса к распаду разрыва во всех точках сетки, т. е. доказать достаточную близость  $v_{m-1}^n, v_{m+1}^n$  для всех  $n, m$ , а также принадлежность значений  $v(x, t; h; a)$  области  $\Omega$ , что необходимо для удовлетворения (8). За доказательством этих деталей мы отсылаем читателя к цитированной работе Дж. Глимма.

Также без доказательства отметим, что приближенное решение  $v(x, t; h; a)$  удовлетворяет оценкам, аналогичным (5)–(7):

$$\sup_x |v(x, t; h; a) - \tilde{u}| \leq K \sup_x |v(x, 0; h; a) - \tilde{u}|, \quad (11)$$

$$\text{tot var}_{-\infty < x < \infty} v(x, t; h; a) \leq K \text{tot var}_{-\infty < x < \infty} v(x, 0; h; a), \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x, t_2; h; a) - v(x, t_1; h; a)| dx \leq K(\tau + |t_2 - t_1|) \text{tot var}_{-\infty < x < \infty} v(x, 0; h; a) \quad (13)$$

с постоянной  $K$ , не зависящей от  $h, a$ .

Из неравенств (11) и (12) по известным теоремам теории функций следует, что при каждом фиксированном  $t$  и  $a$  семейство функций  $v(x, t; h_i; a)$  содержит последовательность  $v(x, t; h_i; a)$  ( $h_i \rightarrow 0$ ), сходящуюся почти всюду и в среднем:

$$v(x, t; h_i; a) \rightarrow v(x, t; a) \quad \text{для почти всех } x,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |v(x, t; h_i; a) - v(x, t; a)| dx \rightarrow 0 \quad \text{для любых } x_1, x_2.$$

Из неравенства (13) с помощью простого рассуждения следует, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду в полуплоскости  $t \geq 0$ , а также в среднем в любой ограниченной области этой полуплоскости. Будем поэтому считать, что этими свойствами обладает сама последовательность  $v(x, t; h_i; a) \rightarrow v(x, t; a)$  (почти всюду при  $t \geq 0$ ).

Доказательство теоремы Глимма завершается рассмотрением невязки приближенного решения  $v(x, t; h; a)$  — ошибки в выполнении равенства (3) с гладкой финитной функцией  $g(x, t)$ :

$$\delta(g; h; a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t \geq 0, -\infty < x < \infty} (g_t v + g_x \varphi(v)) dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx. \quad (14)$$

Учет того, что в полосах  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$  приближенное решение  $v(x, t; h; a)$  является точным решением, приводит к выполнению равенств

$$\begin{aligned} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} (g_t v + g_x \varphi(v)) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x, (n+1)\tau) v(x, (n+1)\tau - 0; h; a) - \\ - g(x, n\tau) v(x, n\tau; h; a)] dx, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\delta(g; h; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(g; h; a),$$

где

$$\delta_0(g; h; a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) [u_0(x) - v(x, 0; h; a)] dx,$$

$$\delta_n(g; h; a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, n\tau) [v(x, n\tau - 0; h; a) - v(x, n\tau; h; a)] dx.$$

Доказать, что  $\delta \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  и любом фиксированном  $a$  (т. е. всюду на  $A$ ) не удается. Поэтому будем рассматривать  $\delta$  как функцию переменных  $a = \{a_m^n\}$  и покажем, что невязка  $\delta$  стремится к нулю в среднеквадратичном, т. е. в метрике  $\mathcal{L}_2(A)$ :

$$\int_A |\delta(g; h; a)|^2 da \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (15)$$

Так как

$$\delta^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k < n} \delta_n \delta_k$$

и число значений  $n$ , при которых  $\delta_n \neq 0$  есть  $O\left(\frac{1}{h}\right)$  (ввиду finитности  $g$ ), то для доказательства (15) достаточно показать, что

$$\int \delta_n^2 da \leq Ch^2, \quad \left| \int \delta_n \delta_m da \right| \leq Ch^2. \quad (16)$$

Первая оценка (16) является следствием равномерной на  $A$  оценки

$$|\delta_n(g; h; a)| \leq Ch \text{ tot var } v(x, t; h; a),$$

которая легко проверяется.

Для доказательства второй оценки из (16) обозначим через  $a^n$  совокупность  $a_m^n$  с фиксированным  $n$  и заметим, что

$$\begin{aligned} \int \delta_n(g; h; a) da^n &= \\ &= \sum_k \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} g(x, \tau) dx \int da^n [v^{n-1}(x, n\tau) - v^{n-1}(x_k^n, n\tau)] = \\ &= \sum_k \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} g(x, n\tau) dx \int_0^1 da_k^n [v^{n-1}(x, n\tau) - v^{n-1}(x_k^n, n\tau)] = \\ &= \sum_k \frac{1}{2h} \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} g(x, n\tau) dx \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} [v^{n-1}(x, n\tau) - v^{n-1}(y, n\tau)] dy = \\ &= \sum_k \frac{1}{2h} \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} [g(x, n\tau) - g(kh, n\tau)] dx \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} [v^{n-1}(x, n\tau) - v^{n-1}(y, n\tau)] dy. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int \delta_n(g; h; a) da^n \right| &\leq \\ &\leq C_1 \sum_k \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} dx \int_{-2h}^{2h} |v^{n-1}(x, n\tau) - v^{n-1}(x+y, n\tau)| dy \leq \\ &\leq 4h^2 C_1 \text{ tot var } v(x, t; h; a), \end{aligned}$$

где  $C_1$  — постоянная, оценивающая  $|g_x(x, t)|$ . Так как при  $m < n$   $\delta_m(g; h; a)$  не зависит от  $a^n$  (она зависит только от  $a^k$  при  $k \leq m$ ), то

$$\left| \int \delta_n \cdot \delta_m da^n \right| \leq |\delta_m| \cdot O(h^2) = O(h^3).$$

Отсюда следует вторая оценка (16), так как, очевидно,

$$\left| \int \delta_n \cdot \delta_m da \right| \leq \left| \int \delta_n \cdot \delta_m da^n \right|.$$

Итак, стремление  $\delta(g; h; a)$  к нулю в среднеквадратичном смысле в бесконечномерном пространстве  $A$  (15) показано для любой гладкой финитной  $g(x, t)$ . Согласно известным теоремам теории функций существует подпоследовательность  $\delta(g; h_i; a)$ , которая при  $h_i \rightarrow 0$  стремится к нулю почти всюду в  $A$ .

Простое рассуждение показывает, что эту последовательность можно выбрать общей для всех пробных функций  $g(x, t)$ . Поэтому мы можем считать, что последовательность  $\{h_i\}$ , определяющая  $v(x, t; a)$  и есть эта последовательность.

Итак, для любой точки  $a \in B \subset A$ , где  $\text{mes}(A - B) = 0$ , и любой пробной функции  $g(x, t)$  невязка  $\delta(g; h; a) \rightarrow 0$ . Совершенная предельный переход при  $h_i \rightarrow 0$  в равенстве (14), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g_i v(x, t; a) + g_{x\varphi}(v(x, t; a))) dt dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} g(x, 0) u_0(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $v(x, t; a)$  есть обобщенное решение задачи Коши (1), и теорема доказана.

Снова подчеркнем, что теорема Дж. Глимма не устанавливает единственности решения задачи (1). Другой существенный недостаток этой теоремы — ее неконструктивность: конкретного алгоритма построения приближенных решений, которые стремились бы при  $h_i \rightarrow 0$  к точному, в ней не указывается, ибо неизвестна сетка  $\{a_m^n\}$ .

Наконец, пожалуй, самым серьезным недостатком метода Глимма является то, что даже при априорном предположении о сходимости приближенных решений  $v(x, t; h; a)$  при  $h \rightarrow 0$  к некоторой функции  $v(x, t; a)$  нельзя утверждать, что она есть точное решение задачи (1), так как  $\delta(g; h; a)$  при этом может не стремиться к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Можно сказать поэтому, что метод Глимма не является «сходящимся по невязке» (точнее, не доказано противное).

Несмотря на эти недостатки, теорема Глимма явилась первой теоремой, устанавливающей существование обобщенного решения задачи (1) в целом для случая системы ( $n \geq 2$ ) квазилинейных уравнений и, хотя и сильно ограниченного условием (4), но все-таки достаточно интересного класса начальных условий. Метод Глимма был применен рядом математиков для более частных систем законов сохранения, в результате чего для этих систем были получены более общие теоремы существования.

Т. Нишида [1968] показал, что для системы двух квазилинейных законов сохранения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(V) = 0 \quad (17)$$

задача Коши с начальными функциями

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

которые ограничены и имеют локально ограниченную вариацию, а  $V_0(x) > \delta > 0$ , также имеет обобщенное решение в случае  $p(V) = a^2/V$ .

Н. С. Бахвалов [1970] выделил класс систем двух квазилинейных уравнений, включающий в себя, в частности, систему (17) при  $p(V) = a^2 V^{-\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 2$ , для которого теорема Глимма справедлива без предположения о малости полной вариации начальной функции. Для этих конкретных систем двух законов сохранения в силу их специфики удается провести оценки ограниченности решений и их вариации (т. е. доказать оценки (5)–(7) без условия малости (4)). Аналогичный подход к проблеме имеется также в работах Диперна [1973, 1976б] и ряде других.

Н. Н. Кузнецов и В. А. Тупчиев [1975] обобщили теорему Глимма в другом отношении: для более общих систем законов сохранения, не удовлетворяющих «условиям выпуклости» (2), они показали применимость этого метода.

Иной подход к проблеме существования решения задачи (1) был развит Т. Занг, Ю. Ф. Гуо [1965], которые рассмотрели задачу Коши для системы (17) с давлением  $p = p(V)$ , удовлетворяющим обычным условиям выпуклости  $p'(V) < 0$ ,  $p''(V) > 0$ . Однако начальные функции не произвольны, они должны удовлетворять некоторым условиям упорядочения, которые, грубо говоря, означают, что все возникающие в решении ударные волны движутся в одном направлении, а волны разрежения — в другом. В этом случае не требуется малость вариации начальных функций, достаточно их ограниченности.

В. Ю. Ляпидевский [1974] доказал единственность решения задачи Коши для системы (17) в тех же предположениях.

В работе В. Ю. Ляпидевский [1975] доказывает единственность решения задачи Коши для более общей системы из двух законов сохранения, однако лишь в классе решений, имеющих конечное число линий разрыва.

Наконец, отметим, что изложенная здесь методика Глимма обобщена на случай начально-краевых задач для систем законов сохранения (см. А. Доктор [1977]).

**10. Метод вязкости для системы квазилинейных уравнений. Феномены метода вязкости.** В главе 2 мы видели, что ударные волны в газе или жидкости могут рассматриваться как пределы течений вязкой и теплопроводной жидкости, познакомились с применением некоторой нелинейной вязкости (вязкость Неймана — Рихтмайера). В пп. 2, 7 § 2 этой главы показано, что устойчивое обобщенное решение одного квазилинейного уравнения является пределом решений уравнения с «вязкостью» при стремлении коэффициента вязкости к нулю.

Для систем квазилинейных уравнений метод вязкости исследован еще недостаточно. На примере однородной системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad u = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad (1)$$

гиперболической в узком смысле:

$$\xi_1(u) < \xi_2(u) < \dots < \xi_n(u),$$

мы покажем, что вопрос о выборе той или иной вязкости существен и требует большой осторожности.

Соответствующую (1) систему уравнений с вязкостью будем записывать в виде

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u_\mu)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} B(u_\mu) \frac{\partial u_\mu}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $B(u_\mu)$  — квадратная  $n \times n$  матрица. Тем самым мы ограничиваемся классом «дивергентных»\*) вязкостей.

Сделаем предварительно несколько самых общих замечаний. Очевидно, матрицу  $B$  надо подбирать таким образом, чтобы выполнялись следующие требования:

- а) корректность постановки задачи Коши для системы (2);
- б) решения  $u_\mu$  гладки при  $t > 0$  при любых кусочно-непрерывных и кусочно-гладких начальных данных;
- в) имеет место сходимость (в какой-либо норме, например в среднем) решений  $u_\mu$  при  $\mu \rightarrow 0$  к устойчивым обобщенным решениям  $u(x, t)$  системы (1).

\*) Дивергентная форма вязкости в виде  $\frac{\partial}{\partial x} B \frac{\partial u}{\partial x}$  обеспечивает выполнение условий Гюгонно на фронте размазанной ударной волны (ср. гл. 2, § 5).

Указать какие-либо достаточные требования, при выполнении которых будут иметь место условия а) — в), в настоящее время невозможно, ввиду того что системы (2) недостаточно изучены. Поэтому мы постараемся ограничить класс матриц  $B$ , опираясь на некоторые простейшие аналогии.

Рассмотрим случай линейных систем (1) и (2) с постоянными коэффициентами, когда  $\varphi = Au$  и  $A, B$  — постоянные матрицы.

Заметим прежде всего, что тогда всякое решение  $u_\mu(x, t)$  представимо в виде

$$u_\mu(x, t) = u\left(\frac{x}{\mu}, \frac{t}{\mu}\right),$$

где  $u(x, t)$  есть решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Эта система имеет частные решения вида

$$u = u_0 \exp\{t(\lambda t + \nu x)\}, \quad (4)$$

где  $u_0$  — собственный вектор (правый), а  $\left(-\frac{i\lambda}{\nu^2}\right)$  — собственное значение матрицы  $B + \frac{i}{\nu}A$ . Если  $\beta_j$  — собственные значения матрицы  $B$ , то при  $|\nu| \rightarrow \infty$   $\lambda = i\beta_j \nu^2 + O(\nu)$ . Согласно требованию а) мы хотим обеспечить выполнение условия

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u(x, 0) \rightarrow 0,$$

поэтому следует потребовать, чтобы было

$$\operatorname{Re} \beta_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

В самом деле, при  $\operatorname{Re} \beta_j < 0$  можно указать последовательность начальных функций, скажем,

$$u_\nu(x, 0) = \frac{u_0}{\nu} e^{i\nu x},$$

которая при  $\nu \rightarrow \infty$  стремится к нулю, но для которой решения  $u_\nu(x, t)$ , согласно (4), стремятся (по абсолютной величине) к  $\infty$  при всяком  $t > 0$ .

Условие (5) есть хорошо известное условие корректности задачи Коши для системы уравнений (3) по Адамару.

В последнее время было обращено внимание на то (см. З. А. Искандер-заде [1966]), что условия (5) в некотором смысле недостаточны для корректности рассматриваемой задачи.

Рассмотрим поведение чисел  $\lambda$  при малых  $\nu$ . Если  $\alpha_j$  — собственные значения матрицы  $A$ , а  $r_j$  и  $l_j$  — соответствующие

собственные векторы (мы, как обычно, допускаем, что  $\alpha_j$  вещественны и различны), то, как легко видеть,

$$\lambda = -\alpha_j v + iv^2(l_j Br_j) + O(v^3).$$

Если для некоторого  $j = j_0$   $(l_{j_0} Br_{j_0}) < 0$ , то, согласно (4), система с вязкостью будет иметь частные решения вида

$$u_\mu = e^{\frac{v^2 |l_{j_0} Br_{j_0}| t}{\mu}} v_\mu,$$

где  $v_\mu$  — ограниченная (при  $\mu \rightarrow 0$ ) функция, которые при  $\mu \rightarrow 0$  будут стремиться при всяком  $t > 0$  к  $\infty$ . Согласно требованию в) мы должны исключить эту возможность и требовать, чтобы наряду с условием (5) выполнялось условие

$$(l_j Br_j) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Отметим, что требование (6) означает, что должны быть положительны диагональные элементы матрицы вязкости в системе, возникающей из (3) после ее приведения к инвариантам Римана.

По аналогии с линейным случаем также и для нелинейной системы будем требовать выполнения условий (5), (6).

Рассмотрим некоторые простые примеры.

Будем искать частные решения  $u_\mu \left( \frac{x-Dt}{\mu} \right)$  системы (2), зависящие лишь от одного переменного  $y = (x-Dt)/\mu$ , т. е.

$$u_\mu(x, t) = u_\mu(y), \quad y = \frac{x-Dt}{\mu}.$$

Функция  $u_\mu(y)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d}{dy} B(u_\mu) \frac{du_\mu}{dy} = \frac{d\varphi(u_\mu)}{dy} - D \frac{du_\mu}{dy} = [A(u_\mu) - DE] \frac{du_\mu}{dy},$$

которая допускает интегрирование

$$B(u_\mu) \frac{du_\mu}{dy} = \varphi(u_\mu) - Du_\mu - C = F(u_\mu), \quad (7)$$

где  $C$  — произвольный постоянный вектор.

От решения  $u_\mu$  потребуем, чтобы оно стремилось к постоянным значениям при  $y \rightarrow \pm \infty$ , т. е.

$$u_\mu(y) \rightarrow \begin{cases} u^- & \text{при } y \rightarrow -\infty, \\ u^+ & \text{при } y \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Для существования такого решения необходимо, чтобы точки  $u_\mu = u^-$ ,  $u_\mu = u^+$  были стационарными точками системы (7), т. е.

$$F(u^-) = F(u^+) = 0.$$

Эти условия можно переписать в виде

$$\varphi(u^-) - \varphi_1(u^+) = D(u^- - u^+).$$

Отсюда мы заключаем, что состояния  $u^-$ ,  $u^+$  должны быть связаны условиями Гюгоню.

Этого, однако, еще недостаточно для существования интегральной кривой  $u_\mu(y)$  системы (7), проходящей через точки  $u^-$  при  $y = -\infty$  и  $u^+$  при  $y = +\infty$ .

Выясним некоторые дополнительные необходимые условия, для чего систему (7) перепишем в виде

$$\frac{du_\mu}{dy} = B^{-1}(u_\mu)F(u_\mu),$$

где  $B^{-1}$  — обратная к  $B$  матрица. Разложим правую часть этой системы в ряд в окрестности стационарной точки, например,  $u_\mu = u^-$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(u_\mu - u^-) &= B^{-1}(u^-) \left( \frac{\partial F(u_\mu)}{\partial u} \right) \Big|_{u=u^-} (u_\mu - u^-) + O(|u_\mu - u^-|^2) = \\ &= B^{-1}(u^-) [A(u^-) - DE] (u_\mu - u^-) + O(|u_\mu - u^-|^2). \end{aligned}$$

Умножая эту систему скалярно на вектор  $(u_\mu - u^-)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{(u_\mu - u^-)^2}{2} = \\ = (u_\mu - u^-) B^{-1}(u^-) [A(u^-) - DE] (u_\mu - u^-) + O(|u_\mu - u^-|^3). \end{aligned}$$

При возрастании переменного  $y$  величина  $\frac{(u_\mu - u^-)^2}{2}$  не убывает в окрестности  $u = u^-$ ; поэтому, если существует интегральная кривая  $u_\mu(y)$  системы (7), то матрица  $B^{-1}(u^-) [A(u^-) - DE]$  не может быть отрицательно определенной. Совершенно аналогично устанавливается, что матрица  $B^{-1}(u^+) [A(u^+) - DE]$  не может быть положительно определенной.

Пусть существует искомое решение  $u_\mu(y)$  системы (7). Тогда предел

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x, t) = u(x, t) = \begin{cases} u^- & \text{при } x - Dt < 0, \\ u^+ & \text{при } x - Dt > 0 \end{cases}$$

есть разрывная функция, которая удовлетворяет условиям Гюгоню на линии разрыва  $x = Dt$  и, следовательно, интегральным законам сохранения системы (1).

Однако это решение может оказаться неустойчивым решением системы (1), так как условия существования решения  $u_\mu(y)$ , которые обсуждались выше, и условия устойчивости разрыва  $u^-$ ,  $u^+$  различны.

Подтвердим это простым примером, построенным в работе Э. Б. Быховского [1962]. Пусть

$$n = 2; \quad \varphi(u) = \{-u_2; p(u_1)\}; \quad p'(u_1) < 0, \quad p''(u_1) > 0.$$

Тогда система (1) есть система уравнений изотермического течения нормального газа (см. гл. 2, § 2).

Пусть  $u^+ = \{1, 0\}$ ,  $D > 0$ . Покажем, что существует решение  $u_\mu(y)$  при  $u_1^- > 1$ . Такое решение при  $\mu \rightarrow 0$  переходит в ударную волну разрежения, которая, как мы видели в главе 2, является неустойчивым решением уравнений газовой динамики.

Выберем постоянную положительно определенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a, b > 0, \quad c \neq 0.$$

Тогда

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ c/ab & \frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $B^{-1}(A(u) - DE)$ , как легко проверить, являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \left[ \frac{(a+b)D - c}{ab} \right] \lambda + \frac{D^2 + p'(u_1)}{ab} = 0. \quad (8)$$

Согласно условиям Гюгонио

$$D^2 = \frac{p(1) - p(u_1^-)}{u_1^- - 1},$$

и согласно нашим предположениям  $u_1^- > 1$ ,  $D > 0$ . Так как  $p'(u_1) < 0$  и  $p''(u_1) > 0$ , то отсюда следуют неравенства

$$\sqrt{-p'(1)} > D > \sqrt{-p'(u_1^-)}, \quad (9)$$

или

$$p'(1) + D^2 < 0, \quad p'(u_1^-) + D^2 > 0.$$

Так как  $a, b > 0$ , то отсюда следует, что корни квадратного уравнения (8) при  $u_1 = u_1^+ = 1$  имеют разные знаки. Таким образом, собственные значения матрицы  $B^{-1}(A(u^+) - DE)$  разных знаков. Это означает, что точка  $u = u^+$  — седло.

Наоборот, в точке  $u = u^-$  корни квадратного уравнения (8) одного знака (если они действительны). Поэтому для существования интегральной кривой, соединяющей точки  $u^-$ ,  $u^+$ , мы должны требовать, чтобы корни уравнения (8) были действительны и положительны, т. е. матрица  $B^{-1}(u^-)[A(u^-) - DE]$  была

положительно определенной. Это будет иметь место при выполнении неравенств

$$\frac{c - (a + b)D}{ab} > 0, \quad \frac{[c - (a + b)D]^2}{4ab} - D^2 - p'(u_1^-) > 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что этим двум неравенствам можно удовлетворить, фиксируя произвольное  $c > 0$  и выбирая величину  $D > 0$  достаточно малой.

Пусть величины  $a, b, c, D > 0$  таковы, что эти неравенства выполнены. Тогда точка  $u^- = \{u_1^-, u_2^-\}$  — узел ( $u_1^- > 1, u_2^- < 0$ ) точка  $u^+ = \{1, 0\}$  — седло.

Таким образом, картина интегральных кривых системы (7) на плоскости переменных  $u_1, u_2$  имеет вид, изображенный на рис. 4.55. Стрелками на рисунке указано направление возрастания переменного  $y$ . Итак, существует при сделанных ограничениях интегральная кривая  $u = u_\mu(y)$ , проходящая через точки  $u^-, u^+$ .

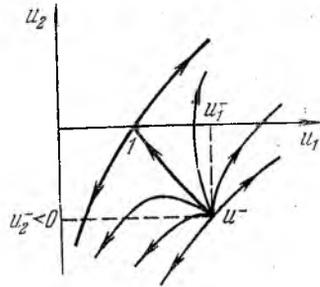


Рис. 4.55.

Устремляя в решении  $u_\mu$  параметр  $\mu$  к нулю, получим в пределе ударную волну разрежения, которая является неустойчивой.

До сих пор мы не учитывали условия (6). В нашем случае, как легко проверить,

$$l_1 B r_1 = a \sqrt{-p'(u_1)} - c + b \sqrt{-p'(u_1)},$$

$$l_2 B r_2 = a \sqrt{-p'(u_1)} + c + b \sqrt{-p'(u_1)}.$$

Если удовлетворены условия (10), при которых мы получили неустойчивую ударную волну, то, согласно (9),

$$(l_1 B r_1)_{u_1 = u_1^-} < (a + b)D - c < 0,$$

т. е. (6) нарушено.

Еще более простой и поразительный пример \*) представляет система (2) в случае

$$\varphi(u) = \left\{ \frac{u_1^2}{2}, \frac{u_2^2}{2} \right\}, \quad B = \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}.$$

При

$$0 < \alpha < 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

\*) Пример предложен Н. Н. Кузнецовым.

матрица  $B$  положительно определена, кроме того, она всегда симметрична и, очевидно, удовлетворяет условию (6). Система

(1) при  $\varphi = \left\{ \frac{u_1^2}{2}, \frac{u_2^2}{2} \right\}$  распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_1^2}{2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_2^2}{2} = 0,$$

а система (2) в этом случае имеет решение

$$u_2 = -\sqrt{2} u_1, \quad \frac{u_1 + u_1^0}{u_1 - u_1^0} = \exp \left\{ \frac{2u_1^0 x}{\alpha \mu} \right\}, \quad u_1^0 > 0.$$

Отсюда следует, что при  $\mu \rightarrow 0$   $u_1 = u_1(y) = u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)$  стремится к неустойчивому решению

$$u_1(x) = \begin{cases} -u_1^0, & x < 0, \\ u_1^0, & x > 0, \end{cases} \quad u_1^0 > 0,$$

уравнения Хопфа ( $u_2(y)$  стремится к устойчивому решению).

Заметим, что интегральная кривая в этом случае проходит через точку  $u_1 = u_2 = 0$ , в которой собственные значения системы (1)  $\xi_1 = u_1$ ,  $\xi_2 = u_2$  совпадают (т. е. система не гиперболическая в узком смысле). Именно с этим связано то, что условие (6) в данном случае оказывается недостаточным.

Возможны ли подобные примеры с симметричной матрицей вязкости для систем, гиперболических в узком смысле, — неизвестно.

Рассмотрим матрицу вязкости

$$B = b(u)E,$$

которая, очевидно, удовлетворяет условию (6).

Покажем, что в этом случае при  $n = 2$  система (7) не может иметь решений, которые при  $\mu \rightarrow 0$  соответствуют неустойчивым разрывам.

Действительно, если существует интегральная кривая  $u_\mu(y)$ , проходящая через точки  $u^-(y = -\infty)$  и  $u^+(y = \infty)$ , то невозможно выполнение неравенств

$$\xi_k(u^-) < D < \xi_k(u^+) \quad (11)$$

ни для какого  $k = 1, 2$ . В самом деле, пусть эти неравенства имеют место, например, для  $k = 1$ . Тогда, так как  $\xi_2(u) > \xi_1(u)$ , то  $\xi_2(u^+) > D$ . Поэтому матрица  $B^{-1}(u^+) [A(u^+) - DE] = \frac{B}{b(u^+)} [A(u^+) - DE] = \frac{1}{b(u^+)} [A(u^+) - DE]$  имеет собственные значения  $\frac{\xi_k(u^+) - D}{b(u^+)}$ , которые, согласно (11), оба положительны.

Как мы видели выше, в этом случае не существует интегральной кривой системы (4), соединяющей точки  $u^-$ ,  $u^+$ , поэтому выполнение (11) невозможно. Аналогично доказывается невозможность (11) при  $k = 2$ .

Итак, в случае  $B = b(u)E$  ни для какой интегральной кривой не может выполняться (11).

Заметим, что отсюда еще не следует, что все решения  $u_\mu(y)$  при  $\mu \rightarrow 0$  будут стремиться к устойчивым решениям системы (1), так как для произвольных систем условия устойчивости не формулируются в виде неравенств (3.1.10), (3.1.11). Тем не менее для систем, для которых эти неравенства гарантируют единственность, матрицы вязкости рассмотренного вида дают лишь устойчивые решения.

Некоторые преимущества единичной матрицы вязкости можно установить и в более общих случаях (см. Л. Фой [1964]). Общие матрицы вязкости, но для систем более специального вида рассматривались в работе А. Г. Куликовского [1962]. Преимущества единичной матрицы вязкости не означают, конечно, ее предпочтительности. На практике приходится пользоваться более сложными матрицами вязкости. Так, например, для вязкой и теплопроводной жидкости «матрица вязкости» не является единичной.

С помощью метода вязкости успешно исследован вопрос о допустимых разрывах для общих систем из двух и более законов сохранения. В работах В. А. Тупчиева [1964, 1966, 1973а] формулируются условия допустимости разрыва для достаточно общей системы законов сохранения. Там же вводится понятие допустимой матрицы вязкости и устанавливаются достаточные условия, при которых матрица вязкости допустима. Интересно применение специального вида вязкости, когда матрица  $B(u)$  в (2) заменяется на  $tB(u)$  и система уравнений (2) имеет вид

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u_\mu)}{\partial x} = t\mu \frac{\partial}{\partial x} B(u_\mu) \frac{\partial u_\mu}{\partial x}. \quad (12)$$

Такая форма вязкости применялась в работах А. С. Калашникова [1959], В. А. Тупчиева [1964, 1972б], К. Дафермоса [1973а, 1974].

Система уравнений (12) инвариантна относительно преобразования подобия  $x' = kx$ ;  $t' = kt$  ( $k > 0$ ). Поэтому задача о распаде произвольного разрыва для системы (12) имеет автомодельное решение  $u_\mu = u_\mu(y)$ ,  $y = x/t$ , аналогично задаче о распаде разрыва для системы без вязкости. Это решение удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{d}{dy} B(u_\mu) \frac{du_\mu}{dy} = \frac{d\varphi(u_\mu)}{dy} - y \frac{du_\mu}{dy} \quad (13)$$

и краевым условиям на бесконечности

$$u_\mu(y) = \begin{cases} u^- & \text{при } y \rightarrow -\infty, \\ u^+ & \text{при } y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (14)$$

Изучение структуры решений задачи (13), (14) приводит к необходимым условиям на разрывах решения  $u(y) = \lim_{\mu \rightarrow +0} u_\mu(y)$

задачи о распаде для системы уравнений гиперболического типа. Более подробно рассматривалась система двух законов сохранения, для которой изучалась структура решения  $u(y)$  и для «невыпуклых» систем (см. цитированные выше работы). В частности, показано, что на допустимых разрывах решения  $u(y)$  должны выполняться условия (3.2.32), (3.2.33).

Теперь рассмотрим более общие задачи для уравнений с вязкостью. Наибольший интерес представляют уравнения движения вязкого и теплопроводного газа или близкие к ним системы уравнений.

В главе 2 § 5 мы уже рассматривали автомодельные решения уравнений движения для вязкого и теплопроводного газа, которые были применены для изучения структуры ударного перехода. Более общие задачи — задача Коши и смешанные задачи — изучены в настоящее время недостаточно. Вопрос о глобальной разрешимости этих задач для большинства случаев остается открытым.

Математическое исследование системы уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого и теплопроводного газа было начато Дж. Нэшем [1962]. Им доказано, что при любых гладких начальных данных на достаточно малом интервале времени существует единственное классическое решение задачи Коши. Эти результаты были затем повторены и обобщены с применением другого метода в работах Н. Итая [1970] и А. И. Вольперта, С. И. Худяева [1972]. В. А. Солонников [1976] доказал локальную разрешимость смешанной краевой задачи для уравнений баротропной сжимаемой вязкой жидкости.

Поведение решений уравнений вязкого газа в целом по времени изучено пока только в одномерном случае, а также для модельных уравнений.

Н. Итая [1974] рассмотрел простейшие модельные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial q} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

— так называемую модель Бюргерса, — которые совпадают с уравнениями газовой динамики с вязкостью в лагранжевых

координатах, если в них положить  $p \equiv \text{const}$ . Н. Итая доказал существование и единственность классического решения задачи Коши для системы (15) для любых  $t > 0$ .

В работах А. В. Кажихова [1975, 1976] доказаны глобальные теоремы для некоторых смешанных краевых задач для более общей модели баротропной жидкости и для системы уравнений совершенного политропного газа с вязкостью и теплопроводностью

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \mu V^{-1} \frac{\partial u}{\partial q} - p \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ u \left( p - \mu V^{-1} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \kappa V^{-1} \frac{\partial T}{\partial q} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

с уравнениями состояния

$$pV = RT, \quad \varepsilon = c_V T \quad (17)$$

(см. гл. 2, формулы (2.5.14), (2.5.16) при  $v = 0$ ).

Центральное место в доказательстве глобальной разрешимости задачи Коши для системы (15) занимает установление ограниченности и строгой положительности плотности  $\rho(q, t)$  при любом  $t \geq 0$ ; в случае краевой задачи для системы (16) надо также установить это и для температуры  $T$ .

Из второго уравнения системы (15) следует ограниченность сверху и снизу скорости  $u = u(q, t)$  при любом  $t > 0$ , после чего легко устанавливается ограниченность сверху и снизу плотности  $\rho(q, t)$ .

Для системы (16), (17) в работе А. В. Кажихова [1976] ставятся начальные

$$u(q, 0) = u_0(q), \quad V(q, 0) = V_0(q) > 0, \quad T(q, 0) = T_0(q) > 0, \quad (18)$$

$$0 \leq q \leq q_1$$

и краевые

$$\mu V^{-1} \frac{\partial u}{\partial q} - p = 0, \quad \kappa \frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad (q = 0, q = q_1) \quad (19)$$

условия. Условия (19) описывают истечение теплоизолированной массы газа в вакуум.

С помощью введения новых безразмерных переменных

$$\tau = \frac{t}{t_1}, \quad x = \frac{q}{q_1}, \quad \rho = \frac{V_1}{V}, \quad v = \frac{u}{u_1}, \quad \theta = \frac{T}{T_1},$$

где

$$V_1 = \frac{1}{q_1} \int_0^{q_1} V_0(q) dq, \quad u_1 = \frac{\mu}{q_1}, \quad t_1 = \frac{q_1^2 V_1}{\mu}, \quad T_1 = \frac{\mu^2}{q_1^2 c_V}$$

приводим уравнения (16) — (19) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) - k \frac{\partial}{\partial x} (\rho \theta), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - k \rho \theta \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (20)$$

$$(k = R/c_v, \quad \lambda = \kappa/\mu c_v)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial x} - k\theta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=1. \quad (21)$$

Начальные значения функций  $\rho_0(x)$  и  $\theta_0(x)$  строго положительны и ограничены:

$$0 < m \leq \rho_0(x), \quad \theta_0(x) \leq M < \infty. \quad (22)$$

Получим оценку для  $\rho(x, t)$ . Интегрируя второе из уравнений (20), найдем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^x v(\xi, \tau) d\xi = \rho \frac{\partial v}{\partial x} - k\rho\theta.$$

Так как из первого уравнения системы (20) следует, что  $\rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial \tau}$ , то отсюда имеем после интегрирования по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \rho(x, \tau) \exp \left\{ k \int_0^{\tau} \rho(x, s) \theta(x, s) ds \right\} &= \\ &= \rho_0(x) \exp \left\{ \int_0^x [v_0(\xi) - v(\xi, \tau)] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Умножим формулу (23) на  $k\theta(x, \tau)$  и вновь проинтегрируем полученное равенство по  $\tau$ . Мы получим

$$\begin{aligned} \exp \left\{ k \int_0^{\tau} \rho(x, s) \theta(x, s) ds \right\} &= \\ &= 1 + k\rho_0(x) \int_0^{\tau} \theta(x, s) \exp \left\{ \int_0^x [v_0(\xi) - v(\xi, s)] d\xi \right\} ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Комбинируя (23) и (24), получаем соотношение

$$\rho(x, \tau) = \frac{\rho_0(x) \exp \left\{ \int_0^x [v_0(\xi) - v(\xi, \tau)] d\xi \right\}}{1 + k\rho_0(x) \int_0^{\tau} \theta(x, s) \exp \left\{ \int_0^x [v_0(\xi) - v(\xi, s)] d\xi \right\} ds}, \quad (25)$$

позволяющее оценить  $\rho(x, \tau)$ . Из (25) имеем оценки

$$M_\rho(\tau) \leq N \left( 1 + kN^{-1} \int_0^\tau m_0(s) ds \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$m_\rho(\tau) \geq N^{-1} \left( 1 + kN \int_0^\tau M_\rho(s) ds \right)^{-1}, \quad (27)$$

где введены обозначения

$$m_\rho(\tau) = \min_x \rho(x, \tau), \quad m_0(\tau) = \min_x \theta(x, \tau),$$

$$M_\rho(\tau) = \max_x \rho(x, \tau), \quad M_0(\tau) = \max_x \theta(x, \tau).$$

Константа  $N$  в (26), (27) зависит только от начальных данных. Если  $m_0(\tau) > 0$ , то из (26) имеем оценку сверху для плотности  $\rho(x, \tau)$

$$M_\rho(\tau) \leq N.$$

Запишем третье уравнение системы (20) в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{k}{2} \theta \right)^2 - \frac{k^2}{4} \rho \theta^2$$

и будем рассматривать его как параболическое уравнение для температуры  $\theta(x, \tau)$ . Тогда легко получаем оценку

$$m_\theta^{-1}(\tau) \leq m^{-1} + \frac{k^2}{4} \int_0^\tau M_\rho(s) ds.$$

Усиливая эту оценку с помощью соотношения (26), мы получим интегральное неравенство для  $m_0(\tau)$ , из которого следует оценка снизу для  $m_\theta(\tau)$ .

Из формулы (27) аналогично получается оценка снизу и для плотности  $\rho(x, \tau)$ .

Остальные априорные оценки получаются на основе известных приемов, разработанных в теории параболических уравнений. Не останавливаясь на этом, сформулируем основной результат работы А. В. Кажихова [1976].

*Теорема. Пусть начальные данные (18) удовлетворяют условиям (22) и принадлежат пространству С. Л. Соболева  $W_2^1$ . Тогда на любом конечном промежутке времени  $[0, T]$  существует единственное решение задачи (16)–(19) со следующими свойствами:*

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} \left[ \|v(\tau)\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\theta(\tau)\|_{W_2^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(\tau) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x}(\tau) \right\|_{L_2(\Omega)} \right] < \infty,$$

$$\|v_\tau\|_{L_2(Q)} + \|v_{xx}\|_{L_2(Q)} + \|\theta_\tau\|_{L_2(Q)} + \|\theta_{xx}\|_{L_2(Q)} < \infty.$$

Здесь  $\Omega = [0, 1]$ ,  $Q = \Omega \times [0, T]$ .

Величины  $\rho(x, \tau)$  и  $\theta(x, \tau)$  строго положительны и ограничены в  $Q$ .

Если при этом начальные данные достаточно гладки и выполнены необходимые условия согласования, то решение рассматриваемой смешанной задачи является классическим.

#### § 4. Приложения общей теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа

В этом параграфе будут указаны некоторые задачи физики, химии, математики, которые связаны с теорией систем квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Наиболее известным применением систем квазилинейных уравнений гиперболического типа является изучение одномерных течений сжимаемых газов и жидкостей, лишенных вязкости и теплопроводности. В главе 2 подробно изучался этот вопрос и его связь с теорией систем квазилинейных уравнений.

Другими хорошо известными примерами задач, связанных с системами квазилинейных уравнений, являются движение несжимаемой жидкости в неглубоких каналах (теории «мелкой воды»), сверхзвуковое установившееся течение газа или жидкости в двумерном случае, задачи нелинейной теории упругости, теории фильтрации и некоторые другие. Мы кратко остановимся здесь на некоторых из них.

**1. Теория «мелкой воды».** Пусть в канале, имеющем форму, указанную на рис. 4.56, течет тяжелая (в поле тяжести) несжимаемая жидкость. Будем предполагать, что жидкость лишена внутреннего трения, трения о стенки и дно канала, а уровень жидкости над дном канала  $h$  является малой величиной по сравнению с размерами неровностей дна, характерными размерами течения и т. п. Будем считать, что течение жидкости характеризуется одним пространственным переменным  $x$  и зависит от времени  $t$ . Тем самым мы считаем, что скорость жидкости  $u$  имеет отличную от нуля компоненту  $u_x$ , которую мы будем обозначать через  $u$ , а остальными компонентами можно пренебречь; кроме того, мы считаем, что уровень  $h$  зависит также лишь от  $x$  и  $t$ .

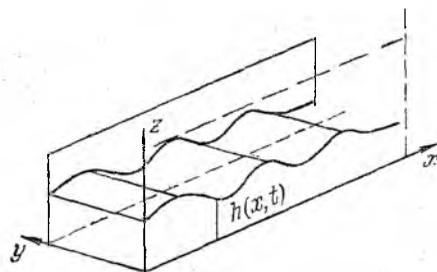


Рис. 4.56.

При этих предположениях выведем уравнения, описывающие движение жидкости\*).

Пусть  $h(x, t)$  — уровень жидкости, отсчитываемый от дна канала в точке  $x$ ,  $\rho$  — плотность жидкости,  $l$  — ширина канала,  $u(x, t)$  — скорость жидкости, направленная вдоль оси  $x$ .

Количество жидкости, находящейся в момент  $t$  между двумя поперечными сечениями канала плоскостями  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , очевидно, есть величина

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho l h(x, t) dx = \rho l \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx.$$

Изменение количества жидкости в этой части канала между моментами  $t = t_1$  и  $t = t_2$  есть величина

$$\rho l \int_{x_1}^{x_2} [h(x, t_2) - h(x, t_1)] dx, \quad (1)$$

которая, очевидно, должна равняться количеству жидкости, втекающему за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  через плоскости  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , т. е. величине

$$-\rho l \int_{t_1}^{t_2} [h(x_2, t) u(x_2, t) - h(x_1, t) u(x_1, t)] dt. \quad (2)$$

Приравнявая (1) величине (2), получим уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} \{h(x, t_2) - h(x, t_1)\} dx + \int_{t_1}^{t_2} [hu|_{x=x_2} - hu|_{x=x_1}] dt = 0, \quad (3)$$

которое, очевидно, представляет собой интегральный закон сохранения массы жидкости.

Как обычно, из (3) вытекает интегральный закон сохранения

$$\oint_C h dx - hu dt = 0, \quad (4)$$

справедливый для любого замкнутого контура  $C$  плоскости переменных  $x, t$ , и дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} hu = 0 \quad (5)$$

в случае гладких течений.

\* Наш вывод имеет лишь наводящий характер. Строгое обоснование теории «мелкой воды» см. в работе Л. В. Овсянникова [1973].

Изменение полного импульса жидкости в той же части канала за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  равно величине

$$\rho l \int_{x_1}^{x_2} [hu|_{t=t_2} - hu|_{t=t_1}] dx. \quad (6)$$

Импульс жидкости изменяется в этой части канала за счет двух эффектов: за счет переноса импульса потоком через плоскости  $x = x_1$  и  $x = x_2$  в количестве

$$- \rho l \int_{t_1}^{t_2} [u^2 h|_{x=x_2} - u^2 h|_{x=x_1}] dt, \quad (7)$$

а также за счет импульса сил давления в плоскостях  $x = x_1$  и  $x = x_2$ .

Вычислим полное давление  $p(x, t)$ , действующее в сечении канала. Считая, что на свободной поверхности жидкости  $z = h$  давление равно нулю, будем иметь по барометрической формуле  $p = \rho g(h - z)$  ( $g$  — ускорение силы тяжести) и

$$p(x, t) = l \int_0^h p dz = l \rho g \int_0^h (h - z) dz = \frac{1}{2} l \rho g h^2. \quad (8)$$

Поэтому импульс сил давления в сечениях  $x = x_1$  и  $x = x_2$  за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  дается величиной

$$- \frac{l \rho g}{2} \int_{t_1}^{t_2} [h^2(x_2, t) - h^2(x_1, t)] dt. \quad (9)$$

Приравнявая теперь (6) сумме (7) и (9), получим интегральный закон сохранения импульса жидкости

$$\int_{x_1}^{x_2} [hu|_{t=t_2} - hu|_{t=t_1}] dx + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right] \Big|_{x=x_2} - \left[ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right] \Big|_{x=x_1} \right\} dt = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) может быть записано в виде интегрального закона сохранения импульса

$$\oint_C hu dx - \left( hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) dt = 0, \quad (11)$$

из которого для гладких течений следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0. \quad (12)$$

Соединяя уравнения (5) и (12), получаем систему двух квазилинейных уравнений для  $h(x, t)$ ,  $u(x, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right] = 0. \quad (13)$$

Теперь легко заметить, что система уравнений (13) совпадает с системой уравнений газовой динамики изоэнтропического течения идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ . В самом деле, если величину  $h$  обозначить через  $\rho$  и считать, что  $\rho = \frac{g}{2} \rho^2$ , то система (13) переходит в соответствующую систему для указанного случая (см. гл. 2).

Из этого сравнения мы, в частности, заключаем, что система (13) — система квазилинейных уравнений гиперболического типа и что решения ее, вообще говоря, разрывны. Разрыву решения системы (13) соответствует внезапное повышение уровня  $h(x, t)$ , так называемый «прыжок воды». На фронте разрыва должны выполняться обычные условия Гюгонио и условия устойчивости.

**2. Плоское установившееся течение сжимаемого газа.** Другим хорошо известным примером системы квазилинейных уравнений гиперболического типа является система уравнений, описывающих плоское установившееся сверхзвуковое течение сжимаемого газа. Если  $u$ ,  $v$  — составляющие вектора скорости  $q$ , то эта система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эта система описывает лишь гладкие течения. Необходимая для рассмотрения разрывных течений консервативная форма уравнений (1) приведена ниже.

Характеристическое уравнение (4-й степени) для системы (1) имеет вид

$$\begin{vmatrix} v - \xi u & -\xi \rho & \rho & 0 \\ -\xi \frac{c^2}{\rho} & v - \xi u & 0 & -\xi \rho'_S \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v - \xi u & \rho'_S \\ 0 & 0 & 0 & v - \xi u \end{vmatrix} = 0$$

ИЛИ

$$(v - \xi u)^2 [\xi^2 (u^2 - c^2) - 2uv\xi + (v^2 - c^2)] = 0, \quad (2)$$

где  $\xi = \frac{dy}{dx}$  — характеристическое направление системы (1).

Первый множитель дает двукратный корень  $\xi = v/u$ . Соответствующая характеристика есть, очевидно, линия тока. Она, таким образом, двукратно вырождена. Второй множитель в левой части (2) имеет вещественные корни лишь при  $q^2 = u^2 + v^2 \geq c^2$ . В звуковом случае ( $q = c$ ) оба эти корня совпадают и система (1), как нетрудно проверить, не является гиперболической. Напротив, в сверхзвуковом случае ( $q > c$ ) она гиперболического типа. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что кратному собственному значению  $\xi = v/u$  соответствуют два линейно независимых собственных вектора, т. е. два независимых уравнения в характеристической форме системы (1). Несложные выкладки приводят к следующим двум уравнениям, содержащим лишь дифференцирование вдоль линии тока:

$$\frac{dS}{dq} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dq} + \frac{d}{dq} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

(здесь  $\frac{d}{dq} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ ). Соотношение (3) означает постоянство энтропии на линии тока и, очевидно, независимо с уравнением (4).

Вводя в рассмотрение функцию  $H(\rho, S)$ , заданную уравнением

$$H(\rho, S) = \int \frac{c^2(\rho, S) d\rho}{\rho},$$

получим из уравнений (3), (4)

$$\frac{d}{dq} \left( H(\rho, S) + \frac{q^2}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, линии тока соответствуют два инварианта Римана: энтропия  $S$  и  $B = H + \frac{1}{2} q^2$ . Следующее из (5) на линии тока равенство  $B = \text{const}$  называется интегралом Бернулли.

Выражение остальных (так называемых звуковых) характеристических значений системы (1) таково:

$$\xi_{\pm} = \frac{uv \pm c \sqrt{q^2 - c^2}}{u^2 - c^2} = \frac{v^2 - c^2}{uv \mp c \sqrt{q^2 - c^2}}.$$

Характеристики  $\frac{dy}{dx} = \xi^{\pm}$  образуют с линией тока углы  $\alpha$  и  $-\alpha$  соответственно, причем

$$\sin \alpha = \frac{c}{q} = \frac{1}{M}, \quad M = \frac{q}{c}$$

(угол  $\alpha$  называется углом Маха, а функция  $M$  — числом Маха).

В заключение приведем дивергентную форму уравнений (1):

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho v^2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( \epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v \left( \epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) \right] = 0.$$

3. Химическая сорбция и задачи хроматографии\*). Пусть через трубку, содержащую сорбционно активное вещество (сорбент), пропускают жидкую или газообразную смесь веществ, подлежащих разделению. Отвлекаясь от эффектов, связанных с влиянием стенок трубки, будем считать задачу одномерной. Пусть  $t$  — время,  $x$  — координата вдоль оси сорбционной колонки,  $u_i$  — концентрация  $i$ -й компоненты в смеси,  $a_i$  — концентрация  $i$ -й компоненты в сорбенте и  $V$  — скорость движения смеси в колонке, предполагаемая постоянной.

Пренебрегая диффузионными потоками веществ как в смеси, так и в сорбенте, запишем уравнения сохранения массы каждой компоненты:

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ [u_i + a_i] |_{t=t_2} - [u_i + a_i] |_{t=t_1} \} dx + \int_{t_1}^{t_2} V [u_i(x_2, t) - u_i(x_1, t)] dt = 0 \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

которые для гладких  $u_i$ ,  $a_i$  сводятся к дифференциальным уравнениям

$$V \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (u_i + a_i) = 0. \quad (2)$$

Сделаем предположение о мгновенном характере сорбции, т. е. будем считать, что в каждой точке трубки и в каждый момент

\*) См. Н. Н. Кузнецов [1967].

времени между сорбированным веществом и свободной смесью имеет место равновесие. Математически это выражается в том, что концентрация сорбированного вещества определена составом смеси, т. е. имеют место зависимости

$$a_i = f_i(u_1, \dots, u_n) = f_i(u) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Уравнения (3) называют обычно уравнениями изотермы сорбции. При этом условии система уравнений (2) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + f(u)) + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где  $u, f$  — векторы с  $n$  компонентами.

Характеристические значения  $\xi = \xi(u)$  системы (4) определяются из уравнения

$$\text{Det} \left( \left( (V - \xi) \delta_{ij} - \xi \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \right) = 0. \quad (5)$$

Обозначим через  $\lambda = \lambda(u)$  собственное значение матрицы  $\left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \right)$ . Тогда, очевидно, из уравнения (5) получаем

$$\frac{V - \xi}{\xi} = \lambda, \quad \xi = \frac{V}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

Будем предполагать (на самом деле это следует из общих закономерностей характера сорбции), что все собственные значения  $\lambda_k(u)$  матрицы  $\left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \right)$  положительны, т. е. матрица  $\frac{\partial f}{\partial u}$  положительно определенная. Тогда из (6) вытекает, что собственные значения  $\xi = \xi_k(u)$  системы (4) удовлетворяют неравенствам

$$\xi_k(u) = \frac{V}{1 + \lambda_k(u)} < V \quad (V > 0), \quad (7)$$

т. е. скорость  $\xi_k(u)$  характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(u) \quad (8)$$

системы (4) меньше скорости потока  $V$ .

Рассмотрим более подробно случай специальной изотермы сорбции (3), когда

$$a_i = \frac{a_i^\infty k_i u_i}{1 + \sum_{s=1}^n k_s u_s} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

называемый обычно случаем лэнгмюровской сорбции. Здесь  $a_i^\infty$  — величина адсорбции насыщения,  $k_i$  — коэффициент сорбируемости.

Вводя обозначения  $v_i = k_i u_i$ ,  $\Gamma_i = a_i^\infty k_i$  (коэффициенты Генри), перепишем уравнения изотермы Лэнгмюра (9) в виде

$$\varphi_i(v) = k_i a_i = \Gamma_i \frac{v_i}{1 + \sum_{s=1}^n v_s} = \frac{\Gamma_i v_i}{\rho}, \quad \rho = 1 + \sum_{s=1}^n v_s, \quad (10)$$

а систему (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (v + \varphi(v)) + V \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Будем предполагать, что все коэффициенты Генри  $\Gamma_i$  различны (если ряд  $\Gamma_i$  совпадает, то задачу можно свести к случаю, когда  $\Gamma_i$  различны), и занумеруем их в порядке возрастания:

$$\Gamma_1 < \Gamma_2 < \dots < \Gamma_n. \quad (12)$$

Для изотермы (10) собственные значения  $\lambda$  определяются из уравнения

$$\text{Det}(((\Gamma_i \rho - \lambda) \delta_{ij} - \Gamma_i v_i)) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда  $v_i \neq 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда уравнение (13) преобразуется к виду

$$\text{Det} \left( \left( \frac{\Gamma_i \rho - \lambda}{\Gamma_i v_i} \delta_{ij} - 1 \right) \right) = \left[ \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma_k \rho - \lambda}{\Gamma_k v_k} \right] \left( 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k v_k}{\Gamma_k \rho - \lambda} \right) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно записать также в виде

$$F(\lambda, v) = 1, \quad (15)$$

где

$$F(\lambda, v) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k v_k}{\Gamma_k \rho - \lambda}. \quad (16)$$

Поскольку

$$F'_\lambda(\lambda, v) = \sum_{k=1}^n \Gamma_k v_k (\Gamma_k \rho - \lambda)^{-2} > 0 \quad (v_k > 0), \quad (17)$$

то функция  $F(\lambda, v)$  — монотонно возрастающая функция переменного  $\lambda$ , имеющая полюсы в точках  $\lambda_k^* = \Gamma_k \rho > 0$  (рис. 4.56). Так как корни  $\lambda = \lambda_k(v)$  суть абсциссы точек пересечения графика функции  $F(\lambda, v)$  с прямой  $F = 1$  (рис. 4.57) и

$$0 < F(0, v) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k v_k}{\Gamma_k \rho} = 1 - \frac{1}{\rho} < 1,$$

то мы заключаем, что уравнение (15) имеет  $n$  действительных, различных, положительных корней  $\lambda = \lambda_k(v)$ . Эти корни удовлетворяют неравенствам

$$0 < \lambda_1(v) < \lambda_1^*, \quad \lambda_{i-1}^* < \lambda_i(v) < \lambda_i^*, \quad (18)$$

и согласно формуле (6) характеристические значения  $\xi = \xi_k(v)$  системы (11) также действительны, различны и положительны; при этом

$$V > \xi_1(v) > \xi_2(v) > \dots > \xi_n(v) > 0, \quad (19)$$

т. е. при условии  $\Gamma_i v_i \neq 0$  система (11) гиперболическая в узком смысле.

Вычисляя левые собственные векторы  $l^k = \{l_i^k\}$  системы (11), найдем (с точностью до множителя)

$$l_i^k = \frac{1}{\Gamma_i v_i - \lambda_k(v)}, \quad (20)$$

а правые  $r^k = \{r_i^k\}$ :

$$r_i^k = \frac{\Gamma_i v_i}{\Gamma_i v_i - \lambda_k(v)}. \quad (21)$$

Отметим еще некоторые особенности системы уравнений (11).

Для системы (11) существуют  $n$  инвариантов Римана, так что эта система может быть приведена к виду

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \xi_k(R) \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

где

$$R_i(v) = \frac{\lambda_i(v)}{p}.$$

Разрывы решения  $v(x, t)$  системы (11), как обычно, удовлетворяют условиям Гюгоню, которые в этом случае принимают вид

$$D[v + \varphi(v)] = V[v], \quad D = \frac{dx}{dt}, \quad (23)$$

и условию устойчивости

$$\xi_k(v(x-0, t)) > D > \xi_k(v(x+0, t)). \quad (24)$$

Интересно отметить, что для системы (11) волны разрежения ( $R_i = \text{const}$  при  $i \neq k$ )  $k$ -го типа совпадают с адиабатой Гюгоню  $k$ -го типа, т. е. прямая  $R_i(v) = \text{const}$  ( $i \neq k$ ) дает решение уравнений (23).

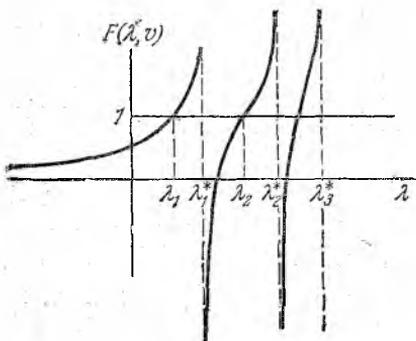


Рис. 4.57.

Различие в скоростях характеристик  $\xi_k(v)$  объясняет способ разделения компонент смеси в сорбенте. Способ разделения компонент, основанный на различии коэффициентов Генри, носит название хроматографии.

**4. Приложения к дифференциальной геометрии.** Задачи геометрии связаны с нелинейными дифференциальными уравнениями. Поэтому геометры первыми начали систематическое изучение нелинейных дифференциальных уравнений и их решений. Не случайно выдающийся геометр прошлого столетия Риман получил основные результаты в газовой динамике, во многих отношениях оставшиеся непревзойденными и в настоящее время.

Мы укажем здесь на связь теории квазилинейных уравнений с одним из разделов дифференциальной геометрии — теорией поверхностей.

Пусть на некоторой гладкой поверхности в трехмерном пространстве осуществляется метрика

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2, \quad (1)$$

где линии  $y = \text{const}$  — геодезические линии на поверхности, а линии  $x = \text{const}$  — семейство ортогональных к ним траекторий. Такая система координат  $(x, y)$ , введенная на поверхности, носит название полугеодезической.

Гауссова кривизна  $K(x, y)$  поверхности определяется лишь метрикой (1) с помощью формулы

$$B''(x, y) + K(x, y) B(x, y) = 0. \quad (2)$$

Если задана лишь метрика (1) (первая квадратичная форма), то вопрос о существовании поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, реализующей эту метрику, сводится к нахождению коэффициентов  $L(x, y)$ ,  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  второй квадратичной формы. Эти коэффициенты должны удовлетворять основным уравнениям теории поверхностей — уравнениям Петерсона — Кодацци \*):

$$M_x - L_y = -\frac{B_x}{B} M, \quad N_x - M_y = \frac{B_x}{B} (N + B^2 L) - \frac{B_y}{B} M. \quad (3)$$

С другой стороны, гауссова кривизна поверхности может быть вычислена и внешним образом, через коэффициенты второй квадратичной формы. Для этого служит формула Гаусса

$$B^2 K = LN - M^2. \quad (4)$$

Если теперь мы исключим из уравнений (3) с помощью (4) одну из величин  $L$ ,  $M$ ,  $N$  то получим систему двух квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными  $x$ ,  $y$  относительно двух искомых функций.

\*) См. Бляшке, Дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.—Л., 1935.

Исследуя эту систему уравнений, легко установить, что она является эллиптической в случае  $K > 0$ , параболической при  $K = 0$  и гиперболической в случае  $K < 0$ .

Итак, в случае отрицательной гауссовой кривизны  $K < 0$  уравнения Петерсона — Кодацци сводятся к системе двух квазилинейных уравнений гиперболического типа. Характеристиками при этом являются интегральные кривые уравнения

$$L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 = 0 \quad (5)$$

— линии, называемые в геометрии асимптотическими линиями поверхности.

Как мы видели в главе 1, для всякой системы двух квазилинейных уравнений гиперболического типа можно ввести инварианты Римана. Несложные вычисления приводят к следующим выражениям для инвариантов:

$$r = B \frac{-M - B\sqrt{-K}}{N}, \quad s = B \frac{-M + B\sqrt{-K}}{N}, \quad (6)$$

после чего уравнения (3) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{s}{B} \frac{\partial r}{\partial y} &= -s(1+r^2) \frac{B_x}{B} + \frac{(r-s)}{2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{r}{B} \frac{\partial Q}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{r}{B} \frac{\partial s}{\partial y} &= -r(1+s^2) \frac{B_x}{B} + \frac{(s-r)}{2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{s}{B} \frac{\partial Q}{\partial y} \right], \\ Q &= \ln \sqrt{-K(x, y)}, \quad B = B(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если положить  $r = \operatorname{tg} \varphi_1$ ,  $s = \operatorname{tg} \varphi_2$ , то  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы, образованные на поверхности направлением асимптотических линий (характеристик) с направлением геодезических линий  $y = \operatorname{const}$ . При этом система (7) записывается еще в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{ds_2} &= \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\sin \varphi_2}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\sin \varphi_2 \frac{B_x}{B} + \frac{1}{2} \sin \omega \frac{dQ}{ds_1}, \\ \frac{d\varphi_2}{ds_1} &= \cos \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\sin \varphi_1}{B} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\sin \varphi_1 \frac{B_x}{B} - \frac{1}{2} \sin \omega \frac{dQ}{ds_2}, \\ \omega &= \varphi_1 - \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если мы посмотрим теперь на систему уравнений (7) либо (8), то легко заметим, что система (7) является слабо-нелинейной системой квазилинейных уравнений, так как

$$\xi_1 = \frac{s}{B(x, y)}, \quad \xi_2 = \frac{r}{B(x, y)}.$$

Регулярная поверхность отрицательной гауссовой кривизны  $K(x, y) < 0$  обладает различными направлениями асимптотических линий (характеристик), так что мы можем считать, что в точках регулярности  $r \neq s$ , т. е.  $\xi_1 \neq \xi_2$ , т. е. системы (7), (8)

являются в точках регулярности гиперболическими в узком смысле.

Как мы видели в главе 1, слабо-нелинейные системы обладают замечательным свойством: решения таких систем остаются непрерывными и гладкими, пока ограничено само решение. Аналогичное свойство имеет место и для решений системы (7) либо (8).

В начале этого века Д. Гильберт сформулировал гипотезу о том, что не существует полной регулярной поверхности отрицательной гауссовой кривизны  $K(x, y) < \varepsilon < 0$ , погруженной в трехмерное евклидово пространство. Он же дал и доказательство этого утверждения для случая постоянной гауссовой кривизны  $K = -1$ . Поскольку система (8) является слабо-нелинейной, то причиной несуществования поверхности  $K(x, y) \leq -1$  является не образование разрыва решения (как можно было бы думать), а также не неограниченность решения (как видно из записи (8)), решение остается ограниченным в конечных точках  $x, y$ ). Поэтому причиной несуществования решений в целом системы (8) является вырождение поверхности, т. е. случай  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\omega = 0$ . Во всех известных случаях, действительно, на краю поверхности получается, что  $\omega = 0$ , и поверхность не может быть продолжена гладким образом за границу (край).

Отметим, что в последние годы было получено доказательство сформулированной гипотезы при некоторых ограничениях на производные от  $K(x, y)$ .

**5. Уравнения магнитной гидродинамики.** В этом пункте мы получим дифференциальные\*) уравнения, описывающие одномерное движение электропроводного газа в магнитном поле.

Если через  $E$  и  $H$  обозначить соответственно напряженности электрического и магнитного полей, то силу  $f$ , действующую со стороны электромагнитного поля на единицу объема газа, можно, как известно\*\*), записать в виде

$$f = \rho_e E + \frac{1}{c} [j \times B], \quad (1)$$

где  $\rho_e$  — плотность электрического заряда,  $j$  — плотность электрического тока,  $c$  — скорость света. В формуле (1) принята гауссова система единиц для электромагнитных величин.

При протекании в неподвижном веществе электрического тока  $j$  за единицу времени в единице объема выделяется энергия (джоулево тепло)

$$Q = Ej.$$

\*) При изучении разрывных решений следует вывести интегральные законы сохранения. Для простоты мы ограничиваемся здесь гладкими решениями уравнений магнитной гидродинамики.

\*\*) И. Е. Тамм, Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1946.

В случае, если проводник движется со скоростью  $u$ , то  $Q = E'j'$ , где  $E'$ ,  $j'$  по формулам электродинамики с точностью до членов порядка  $u^2/c^2$  записываются в виде

$$E' = E + \frac{1}{c} [u \times B], \quad j' = j - \rho_e u, \quad (2)$$

где  $B$  — индукция магнитного поля.

Электромагнитные поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, & \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{div} D &= 4\pi \rho_e, & \operatorname{div} B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом  $D = \epsilon E$ ,  $B = \mu H$  ( $\epsilon$ ,  $\mu$  — электрическая и магнитная проницаемости газов).

Мы будем считать, что рассматриваемая нами среда удовлетворяет условию квазинейтральности. Это означает, что суммарный электрический заряд всякого элементарного объема равен нулю ( $\rho_e = 0$ ). Тогда  $j' = j$ . Среду, удовлетворяющую условию квазинейтральности, обычно называют плазмой.

Наконец, для хорошо ионизированной плазмы можно с достаточной точностью полагать, что  $B = H$ ,  $D = E$ .

Для определения плотности тока  $j$  воспользуемся законом Ома:

$$j = \sigma E' = \sigma \left( E + \frac{1}{c} [u \times H] \right). \quad (4)$$

Получим уравнения, описывающие движение плазмы. Они состоят из двух групп: уравнений Максвелла в движущейся среде и уравнений гидродинамики. Последние должны учитывать действие электромагнитной силы (1) и выделение в единице объема джоулева тепла  $Q = j^2/\sigma$ .

Очевидно, что уравнение неразрывности остается неизменным:

При этом «электромагнитные» уравнения (3), (4) связаны с «гидродинамическими» (5)—(7) только правыми частями: в (3) входит зависящая от скорости  $u$  функция  $j$ , а в (5)—(7) входят зависящие от  $E$  и  $H$  функции  $j$ ,  $f$ .

В большинстве представляющих интерес для практики случаев система (3)—(7) может быть несколько упрощена. Дело в том, что даже в случае довольно холодной плазмы обычно можно пренебречь в системе (3) током смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}$  по сравнению с током проводимости  $j$ . При этом, очевидно, следует отбросить уравнение  $\operatorname{div} D = 0$ . Тогда из системы уравнений (3)—(7) исключается  $E$ , и уравнения (3) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} H &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} \left[ \frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} H - (u \times H) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Рассмотрим дальнейшее упрощение системы, предположив, что электропроводность плазмы  $\sigma$  бесконечно велика, т. е. рассматриваемый газ является идеальным проводником. При этом предположении закон Ома (4) заменяется условием конечности тока  $j$ , т. е. уравнением

$$E = -\frac{1}{c} [u \times H],$$

а уравнения (8) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} H &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} [u \times H] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Система уравнений (5)—(7) упрощается в этом случае очень существенно. Так как

$$j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H, \quad f = \frac{1}{c} [j \times H] = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} H \times H]$$

Рассмотрим одномерное движение, т. е. предположим, что все величины зависят только от  $x$  и  $t$ . Тогда из уравнений (9) следует, что  $H_x = H_0 = \text{const}$ .

Выпишем нашу систему уравнений (5), (9), (10), (11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_x H_y - u_y H_0) &= 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_x H_z - u_z H_0) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} (H_0 H_y) &= 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} (H_0 H_z) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u_x \frac{\partial S}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Система (12) связывает семь переменных:  $\rho$ ,  $S$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  — семью уравнениями. Записывая характеристическое уравнение для системы (12), получим

$$(u_x - \xi) [(u_x - \xi)^2 - a^2] \left\{ (u_x - \xi)^2 \left[ (u_x - \xi)^2 - \frac{H^2}{4\pi\rho} \right] - c^2 [(u_x - \xi)^2 - a^2] \right\} = 0, \quad (13)$$

$$\text{где } c^2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S, \quad a^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}, \quad b^2 = \frac{H_y^2 + H_z^2}{4\pi\rho}.$$

Первый множитель дает обычную энтропийную характеристику (линию тока)  $\xi_0 = u_x$ , второй множитель — так называемые альфвеновские характеристики  $\xi_{\pm 1} = u_x \pm a$ . Наконец, последний множитель в (13) дает еще четыре вещественных корня:

$$\xi_{\pm 2} = u_x \pm a_-; \quad \xi_{\pm 3} = u_x \pm a_+,$$

где

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c^2 + a^2 + b^2) - \sqrt{(c^2 + a^2 + b^2)^2 - 4c^2 a^2}},$$

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c^2 + a^2 + b^2) + \sqrt{(c^2 + a^2 + b^2)^2 - 4c^2 a^2}}.$$

Эти характеристики называются соответственно медленными и быстрыми магнитозвуковыми характеристиками.

В случае, когда продольная составляющая магнитного поля отсутствует ( $H_0 = 0$ ), имеем  $a = a_- = 0$ , так что система (12) имеет пятикратно вырожденную характеристику  $\xi = u_x$ .

Три независимых уравнения на этой характеристике суть четвертое, пятое и седьмое уравнения системы (12). Для получения еще двух вычислим  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_y}{\rho} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_z}{\rho} \right)$ .

Из системы (12) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_y}{\rho} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_x H_y}{\partial x} - \frac{H_y}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_x H_y}{\partial x} + \frac{H_y}{\rho^2} \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \left( \rho u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_y}{\rho} \right) + \frac{H_y}{\rho} \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} \right) + \frac{H_y}{\rho^2} \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = -u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_y}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Поэтому искомые соотношения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_y}{\rho} \right) + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_y}{\rho} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_z}{\rho} \right) + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_z}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Из них вытекает, что вдоль линии тока

$$\frac{H}{\rho} = \text{const}. \quad (14)$$

Говорят, что равенство (14) выражает «вмороженность» магнитного поля.

Пользуясь интегралом (14), сводим в случае  $H_0 = 0$  систему (12) к трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_3 &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u_x \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где через  $p_3$  обозначено так называемое эффективное магнитогидродинамическое давление:

$$p_3 = p(\rho, S) + A\rho^2.$$

Величина  $A$ , так же как и энтропия  $S$ , может меняться при переходе от одной линии тока к другой, но постоянна вдоль любой из них.

В рассматриваемом случае  $H_0 = 0$  быстрые магнитозвуковые волны распространяются относительно газа со скоростью

$$a_+ = \sqrt{c^2 + b^2} > c,$$

## Литература

(Цифры перед названием работы указывают год издания; цифры в квадратных скобках указывают год издания оригинала при ссылках на русский перевод работы.)

- Абарбанель С., Готтлиб Д. (S. Abarbanel, D. Gottlieb)  
1973. Higher order accuracy finite difference algorithms for quasilinear conservation law hyperbolic systems. *Math. Comp.* **27**, 123, 505—523.
- Адамский В. Б.  
1956. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу. *Акуст. журнал* **2**, 1, 3.
- Аллен Р., Саусвелл Д. (R. Allen, D. Southwell)  
1955. Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fixed cilinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **8**, 129—145.
- Альтшулер Л. В.  
1965. Применение ударных волн в физике высоких давлений. *УФН* **82**, вып. 2, 197—258.
- Андерсон Д. (Anderson D. A.)  
1974. A comparison of numerical solutions to the inviscid equations of fluid motion. *J. Comp. Phys.* **15**, 1, 1—20.
- Андреев П. А.  
1975. Об устойчивости решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка. *Матем. заметки* **17**, 1, 79—89.
- Арсенин В. Я., Яненко Н. Н.  
1956. О взаимодействии бегущей и ударной волн в изотермическом газе. *ДАН СССР* **109**, 4, 11—14.
- Бабенко К. И., Гельфанд И. М.  
1958. Замечания о гиперболических системах, *Научные доклады высшей школы. Физ.-мат. науки.* № 1, 12—18.
- Балакин В. Б.  
1970. О методах типа Рунге—Кутта для уравнений газовой динамики. *ЖВМ и МФ* **10**, 6, 1512—1519.
- Баллоу Д. (Ballou D. P.)  
1970. Solutions to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **152**, 441—460.
- Бари Н. К.  
1961. Тригонометрические ряды. *Физматгиз.*
- Бахвалов Н. С.  
1961. Оценка погрешности численного интегрирования квазилинейного уравнения первого порядка. *ЖВМ и МФ* **1**, 5, 771—783.  
1967. О параболических системах с малыми параметрами при старших производных. *ДАН СССР* **174**, 2, 263—266.  
1970. О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы. *ЖВМ и МФ* **10**, 4, 969—980.
- Беккер Р. (Becker R.)  
1921. *Stosswelle und Detonation.* *Z. Phys.* **8** (1921—1922), 321—362.

- Бехерт К. (Bechert K.)  
 1940. Zur Theorie ebener Strömungen in reibungsfreien Gasen. Ann. Physik 37, 38.  
 1941. Über die Ausbreitung von Zylinder und Kugelwellen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten. Ann. Physik 39, 169.
- Боровиков В. А.  
 1969. К задаче о распаде разрыва для системы двух квазилинейных уравнений. ДАН СССР 185, 2, 19—21.  
 1972. О распаде разрыва для системы квазилинейных уравнений. Труды Моск. матем. общ-ва 27, 53—92.
- Бояринцев Ю. Е.  
 1966. О сходимости разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами. Труды Матем. ин-та АН СССР 74, 16—37.
- Брушлинский К. В., Каждан Я. М.  
 1963. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. УМН 18, 2 (110), 3—24.
- Бурштейн С., Мирин А. (Burstein S., Mirin A.)  
 1970. Third order difference methods for hyperbolic equations. J. Comp. Phys. 5, 547.
- Быховский Э. Б.  
 1962а. О недопустимых матрицах вязкости для уравнений изотермического движения газа. ДАН СССР 146, 4, 751—753.  
 1962б. О методе малого параметра («исчезающая вязкость») для системы уравнений газовой динамики. ЖВМ и МФ 2, 6, 1128—1131.  
 1972. Начально-краевая задача для уравнения  $u_t + a_x(u) = 0$ . ДАН СССР 202, 3, 511—514.  
 1972. Краевая и начально-краевая задачи «в целом» для квазилинейного закона сохранения. ДАН СССР 215, 1, 17—20.
- Бюргерс И. (Burgers I. M.)  
 1940. Application of a model system to illustrate some point of the statistical theory of free turbulence. Proc. Acad. Sci. 43, Amsterdam, 2—12.  
 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Advances of Mechanics 1, 171—199.
- Введенская Н. Д.  
 1956. Решение задачи Коши для нелинейных уравнений с разрывными начальными данными. ДАН СССР 111, 3, 517—520.  
 1961. Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений. ДАН СССР 136, 3, 532—533.
- Вейль Г. (Weyl H.)  
 1949. Shock waves in arbitrary fluids. Comm. Pure Appl. Math. 2, 2—3, 103—122.
- Вендров Б. (Wendroff B.)  
 1972. The Riemann problem for materials with nonconvex equations of state, I — Isentropic flow. J. Math. Anal. and Appl. 38, 454—466; II — General flow Ibid. 38, 640—658.
- Вентцель Т. Д.  
 1957. О некоторых квазилинейных параболических системах. ДАН СССР 117, 1, 21—24.  
 1963. Квазилинейные параболические системы с растущими коэффициентами. Вестник МГУ, сер. I, VI, 34—44.
- Вольперт А. И.  
 1967. Пространства BV и квазилинейные уравнения. Матем. сб. 73, 2, 255—302.
- Вольперт А. И., Худяев С. И.  
 1972. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Матем. сб. 87, 4, 504—528.

- Ворожцов Е. В.  
1977. Численные тесты дифференциальных анализаторов ударных волн. В сб. «Численные методы механики сплошной среды» 8, 2, 12—27.
- Галин Г. Я.  
1958. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния. ДАН СССР 119, 6, 1106—1109.  
1959. К теории ударных волн. ДАН СССР 127, 1, 55—58.
- Гантмахер Ф. Р.  
1967. Теория матриц. «Наука».
- Гари Дж., Хелгасон Р. (Gary J., Helgason R.)  
1970. A matrix method of ordinary differential eigenvalue problems. J. Comp. Phys, 5, 2, 169—187.
- Гельфанд И. М.  
1959. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН 14, 9, 87—158.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.  
1958. Обобщенные функции, вып. 1—3. Физматгиз.
- Гир К. (Gear C. W.)  
1967. The numerical integration of ordinary differential equations. Math. Comp. 21, 146.  
1969. The automatic integration of stiff ordinary differential equation. Int. Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh) 1, 197.
- Глимм Дж. (Glimm J.)  
1965. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math. 18, 697—715.
- Глимм Дж., Лакс П. (Glimm J., Lax P.)  
1970. Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws. Amer. Math. Soc. Memoirs, № 101.
- Годунов С. К.  
1956. О единственности решения уравнений гидромеханики. Матем. сб. 40 (82), 4, 467—478.  
1959. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики. Матем. сб. 47 (89), 3, 271—306.  
1960. О понятии обобщенного решения. ДАН СССР 134, 6, 1279—1282.  
1961a. Интересный класс квазилинейных систем. ДАН СССР 139, 3, 521—523.  
1961b. О неединственном «размазывании» разрывов в решениях квазилинейных систем. ДАН СССР 136, 2, 272—273.  
1962. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике. УМН 17, 3, 147—158.
- Годунов С. К., Рябенский В. С.  
1973. Разностные схемы (введение в теорию). «Наука».
- Годунов С. К., Семендяев К. А.  
1962. Разностные методы численного решения задач газовой динамики. ЖВМ и МФ 2, 1, 3—14.
- Гольдин В. Я., Ионкин Н. И., Калиткин Н. Н.  
1969. Об энтропийной схеме расчета газодинамики. ЖВМ и МФ 9, 6, 1411—1413.
- Гринберг Дж. (Greenberg J. M.)  
1973. Estimates for fully developed shock solutions to the equations  $du/dt - dv/dx = 0$  and  $d\sigma/dt - d\sigma(u)/dx = 0$ . Indiana Univ. Math. J. 22, 10, 989—1004.
- Гудерлей Г. (Guderley G.)  
1942. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstosse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. Luftfahrtforschung 19, 9.
- Гурса Э.  
1933. Курс математического анализа, т. II, ч. 2, ГТТИ.

- Гу Ч Х., Ли Д. К и др. (Gu Chao-hao, Li Da-qian, Hou Zong-yi and others)  
 1961—1962. Discontinuous initial value problems for systems of quasilinear hyperbolic equations I, II, III: *Acta Math. Sinica* **11** (1961), 314—323; **11** (1961), 324—327; **12** (1962), 132—143.
- Да фермос К. (Dafermos C. M.)  
 1973а. Solution of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **52**, 1, 1—9.  
 1973б. The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws. *J. Different. Equat.* **14**, 2, 202—212.  
 1974. Structure of solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **53**, 3, 203—217.
- Да фермос К., Ди Перна Р. (Dafermos C., Di Perna R.)  
 1976. The Riemann problem for certain classes of hyperbolic systems of conservation laws. *J. Different. Equat.* **20**, 1, 90—114.
- Джеффри А. (Jeffrey A.)  
 1973. Quasi-linear hyperbolic systems and continuum mechanics. *«Mathematica Balkanica»* **3**, 166—183.  
 1975. Smooth fronted waves in the shallow water approximation. *Proc. Roy. Soc., Edinburgh, A-73*, 107—116.  
 1976. Quasilinear hyperbolic systems and waves. *«Res. Notes Math.»* **5**, 230.
- Джилбарг Д. (Gilbarg D.)  
 1951. The existence and limit behavior the onedimensional shock layer. *Amer. J. Math.* **73** (256).
- Джон Ф. (John F.)  
 1974. Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. *Comm. Pure Appl. Math.* **27**, 377—405.
- Ди Перна Р. (Di Perna Ronald J.)  
 1973. Global solutions to a class of nonlinear system of equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **26**, 4, 697—715.  
 1975. Decay and asymptotic behavior of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.* **24**, 11, 1047—1071.  
 1976а. Singularities of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rat. Mech., Anal.* **60**, 1, 75—100.  
 1976б. Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Different. Equat.* **20**, 1, 187—212.
- Доктор А. (A. Doktor)  
 1977. Global solution of mixed problem for a certain system of nonlinear conservation laws. *Czechoslovak Math. J.* **27** (102), 69—95.
- Домбровский Г. А.  
 1964. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. «Наука».
- Дуглас Дж. (Douglas J., jr.)  
 1956. On the relation between stability and convergence in the numerical solution of parabolic and hyperbolic partial differential equations. *J. Soc. Industrial and Appl. Math.* **4**, 20—37.  
 1958. The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic *diff. equations*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **89**, 484—518.
- Дуглис А. (Douglis A.)  
 1952. Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. *Comm. Pure Appl. Math.* **5**, 1, 119—154.  
 1959. An ordering principle and generalized solution of nonlinear partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 1, 87—112.

1961. The continuous dependence of generalized solution of nonlinear partial differential equation upon initial data. *Comm. Pure Appl. Math.* 14, 2, 267—284.
1972. Layering method for nonlinear partial differential equations of first order. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 22, 3, 141—227.
- Дулов В. Г.  
1958. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения. *Вестник ЛГУ* 19, 96—99.
- Дьяченко В. Ф.  
1961а. О задаче Коши для квазилинейных систем. *ДАН СССР* 136, 1, 16—17.  
1961б. О численном счете разрывных решений квазилинейных систем. *ЖВМ и МФ* 1, 6, 1127—1129.
1963. Об условиях единственности непрерывного решения задачи о распаде разрыва для системы трех уравнений. *ДАН СССР* 153, 6, 1245—1248.
- Емельянов К. В.  
1970. О разностной схеме для дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных. В сб. «Численные методы механики сплошной среды» 1, 5, 20—30.
1973. Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. *Труды ин-та математики и механики Уральского Научн. центра АН СССР*, вып. 11, 30—42, Свердловск.
- Жермен П., Баде Р. (Germain P., Bader R.)  
1953. *Unicité des écoulement avec chocs dans la mécanique de Burgers*. *Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques, Paris*, 1—13.
- Жуков А. И.  
1959. Предельная теорема для разностных операторов. *УМН* 14, 3 (87), 129—136.
1960. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. *Труды Матем. ин-та АН СССР* 7.
- Жуков А. И., Каждан Я. М.  
1956. О движении газа под действием кратковременного импульса. *Акуст. журнал* 2, 4, 352.
- Завьялов Ю. С.  
1955. О некоторых интегралах одномерного движения газа. *ДАН СССР* 103, 5, 781—782.
1956. Об интегрировании некоторых уравнений неизэнтропического движения газа. *Диссертация ТГУ, Томск*.
- Занг Т., Гуо Ю. Ф. (Zhang Tong and Guo Yu-fa)  
1965. A class of initial value problems for systems of aerodynamic equations. *Chinese Math.-Acta* 7, 90—101.
- Зельдович Я. Б.  
1956. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). *Акуст. журнал* 2, 28.
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.  
1966. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, изд. 2-е, доп., «Наука».
- Зигмунд А.  
[1959] *Тригонометрические ряды*. «Мир», 1965.
- Ильин А. М.  
1965. Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. *ДАН СССР* 104, 3, 491—494.
1969. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Матем. заметки* 6, 2, 237—248.

Ильин А. М., Олейник О. А.

1958. О поведении решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени. ДАН СССР 120, 1, 25—28.

1960. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени. Матем. сб. 51 (43), 2, 191—216.

Искандер-заде З. А.

1966. К вопросу об устойчивости тривиальных решений параболических систем уравнений в частных производных. ЖВМ и МФ 6, 5, 921—927.

Итая Н. (Itaya N.)

1970. The existence and uniqueness of the solution of the equations describing compressible viscous fluid flow. Proc. Japan Acad. 46, 4, 379—382.

1974. On the temporally global problem of the generalized Burgers equation. J. of Math. of Kyoto Univ. 14, 1, 129—177.

Кажихов А. В.

1975. Корректность в «целом» смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа. Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 21, Новосибирск, 18—47.

1976. О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа. Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 24, Новосибирск, 45—61.

Калашников А. С.

1959а. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром. ДАН СССР 127, 1, 27—30.

1959б. О единственности решения задачи Коши для одного класса квазилинейных гиперболических систем. УМН 14, 2(86), 195—202.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.

1959. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз. Карган Э.

[1945] Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд-во МГУ, 1962.

Катлер П., Ломакс Г. (Kutler P., and Lomax H.)

1971. The computation of supersonic flow fields about wing-body combinations by shock-capturing finite-difference techniques. Lecture Notes Phys. 8, 24—29.

Катлер П., Сакелл Л. и др. (Kutler P., Sakell L., Aiello G.)

1975. Two-dimensional shock-on shock interaction problem. AIAA J. 13, 3, 361—367.

Келлер Дж. (Keller J. B.)

1959. Spherical, cylindrical and one-dimensional gas flows. Quart. Appl. Math. 14, 2, 171—184.

Коллатц Л.

[1951] Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, 1953.

Конвей Е., Смоллер Дж. (Convey E. D., Smoller J. A.)

1973. Shocks violating Lax's condition are unstable. Proc. Amer. Math. Soc. 39, 2, 353—356.

Конли К., Смоллер Дж. (Conley C. C., Smoller J. A.)

1970. Viscosity matrices for two-dimensional non-linear hyperbolic systems. Comm. Pure Appl. Math. 23, 6, 867—884.

1971. Shock waves as limits of progressive wave solutions of higher order equations. Comm. Pure Appl. Math. 24, 4, 459—472.

Коновальцев И. В.

1968. Устойчивость в  $S$  и в  $L_p$  двухслойных разностных схем для параболических уравнений с переменными коэффициентами. ЖВМ и МФ 8, 4, 894—899.

- Копсон Е. (Copson E. T.)  
1953. On sound waves of finite amplitude. Proc. Roy. Soc. 23, 2, 216.
- Коробейников В. П.  
1961. Теория точечного взрыва. Физматгиз.
- Коул И. (Cole I. D.)  
1951. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. Appl. Math. 9, 226—236.
- Кочин Н. Е.  
[1925] К теории разрывов жидкости. Собрание сочинений, т. 2, 1948, 5—42.
- Крайс Х. (Kreiss H. O.)  
[1958] О корректности задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными. В сб. «Математика» 7 (1963), 38—55.  
1962. Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentiale approximieren. BIT 2, 153—181.  
1964. On difference approximation of dissipative type for hyperbolic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 17, 3, 335—353.
- Кружков С. Н.  
1960. О задаче Коши в целом для некоторых дифференциальных уравнений первого порядка. ДАН СССР 132, 1, 36—39.  
1964. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка и некоторые задачи для квазилинейных параболических уравнений. Вестник МГУ, сер. математики и механики. 6, 65—74.  
1965. К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. УМН 20, 6, 112—118.  
1970. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. Матем. сб. 81, 2, 228—255.
- Кузнецов Н. Н.  
1959. О некоторых асимптотических свойствах обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. УМН 14, 2(86), 203—209.  
1960. Задача о распаде произвольного разрыва для системы квазилинейных уравнений первого порядка. ДАН СССР 131, 3, 503—506.  
1967а. О слабом решении задачи Коши для многомерного квазилинейного уравнения. Матем. заметки 2, 4, 401—410.  
1967б. Некоторые математические задачи хромотографии. Вычислительные методы и программирование, вып. 6, изд. МГУ, 242—258.  
1972. Асимптотика решений конечно-разностной задачи Коши. ЖВМ и МФ 12, 2, 334—351.  
1973. О применении метода сглаживания к некоторым системам гиперболических квазилинейных уравнений. ЖВМ и МФ 13, 1, 92—102.  
1975. Об устойчивых методах решения квазилинейных гиперболических уравнений 1-го порядка в классе разрывных функций. ДАН СССР 225, 5, 1009—1012.  
1977. On stable Methods for Solving Non-linear first order partial differential Equations in the class of discontinuous functions. Topics in Numerical Analysis, vol. 3, Acad. Press Inc., London, 243—257.
- Кузнецов Н. Н., Волошин А. С.  
1976. О монотонных разностных аппроксимациях квазилинейного уравнения первого порядка. ДАН СССР 17, 4, 1317—1320.
- Кузнецов Н. Н., Рождественский Б. Л.  
1959а. Построение обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. УМН 14, 2(86), 211—215.  
1959б. Существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для неоднородного закона сохранения. ДАН СССР 126, 3, 486—489.  
1965. К вопросу о построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. УМН 20, 1(121), 209—213.

- Кузнецов Н. Н., Тупчиев В. А.  
1975. Об одном обобщении теоремы Глиммма. ДАН СССР 221, 2, 287—290.
- Кузнецов Н. Н., Ци Чжун-тао.  
1964а. Об одной теореме единственности в теории гиперболических квазилинейных уравнений. Вестник МГУ, серия 1, № 3, 25—30.  
1964б. О единственности обобщенного решения задачи Коши для гиперболической системы двух квазилинейных уравнений. Вестник МГУ, серия 1, № 4, 3—6.
- Куликовский А. Г.  
1962. О структуре ударных волн. ПММ 26, 4, 631—641.
- Курант Р.  
[1962] Уравнения с частными производными. «Мир», 1964.
- Курант Р., Изаacson Е., Рис М. (Courant R., Isaacson E., Rees M.)  
1952. On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences. Comm. Pure Appl. Math. 5, 3, 243—255.
- Курант Р., Лакс П. (Courant R., Lax P.)  
1949. On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Comm. Pure Appl. Math. 2, 2—3, 255—273.
- Курант Р., Фридрихс К.  
[1948] Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, 1950.
- Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. (Courant R., Friedrichs K., Levy H.)  
[1928] О разностных уравнениях математической физики. УМН 8 (1940), 125—160.
- Куропатенко В. Ф.  
1962. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики. Изв. вузов 3 (28), 75—83.  
1966. О разностных методах для уравнений гидродинамики. Труды Матем. ин-та АН СССР 74, 107—137.
- Ладфорд К. (Ludford C. S.)  
1955. Generalized Riemann invariants. Pacif. J. Math. 5, 441—450.
- Ладыженская О. А.  
1952. Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. Учен. зап. ЛГУ 144, сер. матем., 23, 192—246.  
1956. О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов соответствующих параболических уравнений при стремлении «коэффициентов вязкости» к нулю. ДАН СССР 111, 2, 291—294.
- Лакс П. (Lax P. D.)  
1953. Nonlinear hyperbolic equations. Comm. Pure Appl. Math. 6, 2, 231—258.  
1954а. The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. Math. Stud. 33, 211—229.  
1954б. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure Appl. Math. 7, 159—193.  
1957. Hyperbolic systems of conservation laws, II. Comm. Pure Appl. Math. 10, 4, 537—566.  
1960. The scope of the energy method. Math. Soc. 66, 32—35.  
1964. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys. 5, 5, 611—613.  
1971. Shock waves and entropy, in «Contribution to Nonlinear Functional Analysis» (E. H. Zarantonello Ed.), pp. 603—634, Academic Press, New York.
- Лакс П., Вендрофф Б. (Lax P. D., Wendroff B.)  
1960. Systems of conservation laws. III., Comm. Pure Appl. Math. 13, 2, 217—237.
- Лакс П., Рихтмайер Р. (Lax P. D., Richtmyer R. D.)  
1956. Survey of stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math. 9, 2, 267—293.

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.  
1954. Механика сплошной среды. Гостехиздат.
- Ландау Л. Д., Мейман Н. Н., Халатников И. М.  
1958. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. Труды III Всесоюзного матем. съезда 3, 92—100.
- Леви Г. (Levy H.)  
1927. *Über Anfangswertproblem für eine hyperbolische nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.* Math. Ann. 97, 179—191.
- Лейбович Л. (Leibovich Levis)  
1974. Solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of quasilinear equations without convexity conditions. J. Math. Anal. and Appl. 45, 1, 81—90.
- Леонтович М. А.  
1950. Введение в термодинамику. Гостехиздат.
- Линь Цзя-цзяо.  
[1955] Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, 1958.
- Лэттер Р. (Latter R.)  
1955. Similarity solution for a spherical shock wave. J. Appl. Phys. 26, 8, 955—960.
- Люстерник Л. А., Соболев В. И.  
1951. Элементы функционального анализа. Гостехиздат.
- Лю Тай-пинг (Liu Tai-Ping)  
1974. The Riemann problem for general  $2 \times 2$  conservation laws. Trans. Amer. Math. Soc. 199, 89—112.  
1975a. The Riemann problem for general systems of conservation laws. J. Different. Equat. 18, 218—234.  
1975b. Existence and uniqueness theorems for Riemann problems. Trans. Amer. Math. Soc. 212, 375—382.  
1976. Uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem for general  $2 \times 2$  conservation laws. J. Different. Equat. 20, 369—388.
- Ляпидевский В. Ю.  
1973. Корректность задачи Коши в целом для одного класса нелинейных гиперболических систем уравнений. Сб. «Динамика сплошной среды». Новосибирск, 15, 74—88.  
1974a. О непрерывной зависимости от начальных условий обобщенных решений уравнений газовой динамики. ЖВМ и МФ 14, 4, 982—991.  
1974b. О единственности решения системы уравнений газовой динамики. ДАН СССР 215, 3, 535—538.  
1975. О классах корректности нелинейных гиперболических систем. ДАН СССР 225, 3, 507—510.
- Мак-Кормак Р. (MacCormack R. W.)  
[1969]. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering AIAA Paper, 1969, 63—354.
- Мартин М. (Martin M. H.)  
1953a. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. Canad. J. Math. 3, 165—187.  
1953b. The Monge-Ampere partial differential equation  $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$ , Pasif. J. Math. 3, 37—39.
- Марчук Г. И.  
1961. Методы расчета ядерных реакторов. «Наука».  
1967. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеоздат.  
1973. Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука».
- Мейман Н. Н.  
1954. К теории уравнений в частных производных. ДАН СССР 97, 4, 593—596.

- Нейман Дж., Рихтмайер Р. (Von Neumann J., Richtmyer R. D.)  
1950. A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. Appl. Phys.* 21, 232—237.
- Неуважаев В. Е.  
1962. Распространение сферической взрывной волны в теплопроводном газе. *ПММ* 26, 6.
- Неуважаев В. Е., Яненко Н. Н.  
1966. Об одном методе расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Труды Матем. ин-та АН СССР 74, 138—143.
- Нитше Дж. (Nitsche J.)  
1953. Über Unstetigkeiten in der Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssysteme. *J., Rat. Mech. Anal.* 2, 291—297.
- Нишида Т. (Nishida T.)  
1968. Global solutions for an initial value problem. *Proc. Japan Acad.* 44, 642—646.
- Нишида Т., Смоллер Дж. (Nishida T., Smoller J. A.)  
1973. Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 26, 2, 183—200.
- Нордзик А. (Nordsieck A.)  
1962. On numerical integration of ordinary differential equations. *Math. Comp.* 16, 77, 22—49.
- Нэш Дж. (Nash J.)  
1962. Le probleme de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general. *Bulletin de la Societe Mathematique de France* 90, 4, 487—497.
- Овсянников Л. В.  
1960. Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина. *ПМТФ* 3, 126—145.  
1962. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во СО АН СССР.  
1973. К обоснованию теории мелкой воды. Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 15, Новосибирск, 1973, 104—125.
- Олейник О. А.  
1954а. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. *ДАН* 95, 3, 451—455.  
1954б. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. *УМН* 9, 3 (61), 231—233.  
1955. Краевые задачи для уравнений с частными производными с малым параметром при старших производных и задача Коши для нелинейных уравнений в целом. *УМН* 10, 3 (65), 229—234.  
1956а. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями. Труды Моск. матем. об-ва 5, 433—454.  
1956б. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. *ДАН* 109, 6, 1098—1101.  
1957а. О единственности обобщенного решения задачи Коши для одной нелинейной системы уравнений, встречающейся в механике. *УМН* 12, 6 (78), 169—176.  
1957б. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. *УМН* 12, 3 (75), 3—73.  
1958. Об одном классе разрывных решений квазилинейных уравнений первого порядка. Научные доклады высшей школы, Физико-матем. науки, № 3, 91—98.  
1959а. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости». *УМН* 14, 2 (86), 160—164.  
1959б. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. *УМН* 14, 2 (86), 165—170.

- Олейник О. А., Введенская Н. Д.  
1957. Решение задачи Коши и краевой задачи для квазилинейных уравнений в классе разрывных функций. ДАН 113, 3, 424—427.
- Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К.  
1957. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Труды Матем. ин-та АН СССР 50, 1—65.
- Павлов Б. В., Повзнер А. Я.  
1973. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМ и МФ 13, 5, 1056—1059.
- Панов Д. Ю.  
1957. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат.
- Паттерсон Г. И.  
[1956] Молекулярное течение газов. Физматгиз, 1960.
- Петровский И. Г.  
1937. Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Матем. сб. 2 (44), 871—900.  
1961. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз.
- Пииский А. Р., Рузанов А. И.  
1976. Применение метода Пикара к решению нестационарных упругопластических задач. Всесоюзный межвузовский сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности», вып. 5, Горький, 53—58.
- Положий Г. Н.  
1962. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевск. ун-та.
- Попов Ю. П., Самарский А. А.  
1969. Полностью консервативные разностные схемы. ЖВМ и МФ 9, 4, 953—958.  
1970. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. ЖВМ и МФ 10, 3, 773—779.
- Разумейко Р. В.  
1973. Оценка погрешности численного интегрирования квазилинейного уравнения первого порядка. Матем. заметки 13, 2, 207—215.
- Распопов В. Е., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.  
1974. Применение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям газовой динамики. Изв. вузов, «Математика» 11, 69—74.  
1977. Метод дифференциальных связей для уравнений одномерной газовой динамики. Сб. «Численные методы механики сплошной среды» 8, 2, 100—105.
- Рашевский П. К.  
1947. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Гостехиздат.
- Рикье Ш. (Requier Ch.)  
1910. Les systemes d'equations aux derivees partielles. Paris.
- Риман Б. (Riemann B.)  
[1876]. О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. Гостехиздат, 1948, 376—395.  
[1878] Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования. Сочинения. Гостехиздат, 1948, 262—275.
- Рихтмайер Р., Мортон К. (Richtmyer R. D., Morton K. W.)  
[1967] Разностные методы решения краевых задач. «Мир», 1972.
- Рождественский Б. Л.  
1957. О системах квазилинейных уравнений. ДАН 115, 3, 454—457.  
1958а. О задаче Коши для квазилинейных уравнений. ДАН 122, 4, 551—553.

19586. О единственности обобщенного решения задачи Коши для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. ДАН 122, 5, 762—765.
- 1959а. О консервативности систем квазилинейных уравнений. УМН 14, 2, 217—218.
- 1959б. О разрывности решений квазилинейных уравнений. Матем. сб. 47 (89), 485—494.
1960. Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. УМН 15, 6 (96), 59—117.
1961. Новый метод решения задачи Коши в целом для квазилинейных уравнений. ДАН 138, 2, 309—312.
- 1962а. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей. ДАН 143, 1, 50—52.
- 1962б. Построение разрывных решений систем двух квазилинейных уравнений. ДАН 144, 1, 58—61.
- 1962в. Построение разрывных решений систем квазилинейных уравнений, ч. I. ЖВМ и МФ 2, 6, 1019—1043.
1963. Построение разрывных решений систем квазилинейных уравнений, ч. II. ЖВМ и МФ 3, 1, 79—98.
1974. Метод Пикара — как метод численного решения задач математической физики. Сб. «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск, 5, 2, 96—107.
- Рождественский Б. Л., Ермакова М. И., Приймак В. Г.
1977. Исследование устойчивости разностных схем высокого порядка точности. Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, № 14, 1977.
- Рождественский Б. Л., Сидоренко А. Д.
1967. О невозможности «градиентной катастрофы» для слабо-нелинейных систем. ЖВМ и МФ 7, 5, 1176—1179.
- Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.
1968. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. «Наука».
- Русанов В. В.
1968. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. ДАН СССР 180, 6, 1303—1305.
- Рябенский В. С.
1952. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши. ДАН СССР 86, 6, 1071—1074.
- Рябенский В. С., Филиппов А. Ф.
1956. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат.
- Самарский А. А.
1971. Введение в теорию разностных схем. «Наука».
1977. Теория разностных схем. «Наука».
- Самарский А. А., Арсенин В. Я.
1961. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости. ЖВМ и МФ 1, 2, 357—360.
- Самарский А. А., Гулин А. В.
1973. Устойчивость разностных схем. «Наука».
- Самарский А. А., Попов Ю. П.
1973. Разностные схемы газовой динамики. «Наука».
- Седов Л. И.
1946. Движение воздуха при сильном взрыве. ДАН СССР 52, 1.
1957. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат.
- Сидоренко А. Д.
1968. Волновые адиабаты для сред с произвольным уравнением состояния. ДАН СССР 178, 4, 818—821.
1973. Вариант задачи с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений. Дифференц. уравнения 9, 4, 774—777.

- Сидоренко А. Д., Рождественский Б. Л.  
1968. Задача с контактным разрывом. ЖВМ и МФ 8, 6, 1217—1220.
- Смирнов В. И.  
1957. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат.  
1959. Курс высшей математики, т. V, Гостехиздат.
- Смирнов В. И., Соболев С. Л.  
1932. Sur une Methode nouvelle dans le Probleme plan des Vibrations elastique. Труды сейсмологического ин-та АН СССР, № 20, 1—37.
- Смоллер Дж. (Smoller J. A.)  
1969а. On the solution of the Riemann problem with general step data for an extended class of hyperbolic system. Mich. Math. J. 16, 201—210.  
1969б. A uniqueness theorem for Riemann problem. Arch. Rat. Mech. Anal. 33, 110—115.  
1970. Contact discontinuities in quasilinear hyperbolic systems. Comm. Pure Appl. Math. 23, 791—801.
- Смоллер Дж., Джонсон Дж. (Smoller J. A., Johnson J. L.)  
1969. Global solutions for an extended class of hyperbolic systems. Arch. Rat. Mech. Anal. 32, 169—189.
- Смоллер Дж., Конли К. (Smoller J. A., Conley C. C.)  
1972. Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems II. Amer. J. Math. 94, 3, 631—650.
- Соболев С. Л.  
1962. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СО АН СССР.
- Солонников В. А.  
1976. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости. «Записки научных семинаров Ленинградского отделения Матем. ин-та АН СССР», 56, 128—142.
- Станюкович К. П.  
1955. Неустойчивые движения сплошной среды. Гостехиздат.
- Степанов В. В.  
1959. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз.
- Стрэнг Г. (Strang G.)  
1963. Accurate partial difference methods. I. Linear Cauchy problems. Arch. Rat. Mech. Anal. 12, 392.  
1964. Accurate partial difference methods. II. Nonlinear problems. Numer. Math. 6, 37.  
1966. Necessary and insufficient conditions or wellposed Cauchy problems. J. Different. Equat. 2, 107.
- Тауб А. (Taub A. H.)  
1946. Interaction of progressive rarefaction waves. Ann. Math. 47, 4, 811—828.
- Титов В. А., Шишкин Г. И.  
1976. О численном решении параболического уравнения с малыми параметрами при производных по пространственным переменным. Труды Ин-та математики и механики Уральского научного центра АН СССР, вып. 21, Свердловск, 38—43.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А.  
1954. О разрывных решениях квазилинейных уравнений первого порядка. ДАН СССР 99, 1, 27—30.  
1959. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. ДАН СССР 124, 3, 529—532.  
1961. Об однородных разностных схемах. ЖВМ и МФ 1, 1, 5—64.  
1972. Уравнения математической физики. «Наука».
- Троцкий В. Е.  
1970. О дивергентности схемы «крест» численного решения уравнений газовой динамики. Сб. «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск 1, 5.

- Тупчинев В. А.  
 1964. К задаче о распаде произвольного разрыва для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка. ЖВМ и МФ 4, 5, 817—825.  
 1966. Задача о распаде произвольного разрыва для системы квазилинейных уравнений без условий выпуклости. ЖВМ и МФ 6, 3, 527—547.  
 1972а. Об изолированности решения задачи о распаде произвольного разрыва. Инф. бюлл. «Численные методы механики сплошной среды» 1, 2, 82—93.  
 1972б. Об асимптотике решения задачи Коши для уравнения  $\varepsilon^2 u_{xx} = u_t + [\varphi(u)]_x$ , вырождающейся при  $\varepsilon = 0$  в задачу о распаде произвольного разрыва для случая волны разрежения. ЖВМ и МФ 12, 3, 770—775.  
 1973а. О единственности непрерывного решения задачи о распаде произвольного разрыва для градиентной системы. Матем. заметки 13, 2, 251—258.  
 1973б. О методе введения вязкости в изучении задачи о распаде разрыва. ДАН СССР 211, 1, 55—58.
- Уиттем I. (Whitham G. B.)  
 1958. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area of flow. J. Fluid Mech. 4, 337.
- Уорминг Р., Катлер П., Ломакс Г. (Warming R., Kutler P., Lomax H.)  
 1973. Second and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. AIAA J. 11, 189—204.
- Федотова З. И., Шокин Ю. И.  
 1975. Инвариантные разностные схемы с полиномиальной матрицей вязкости. ДАН СССР 221, 1, 34—37.
- Фиников С. П.  
 1948. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Гостехиздат.
- Фой Л. (Foy L. R.)  
 1964. Steady state solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms. Comm. Pure Appl. Math. 17, 177—189.
- Фридрихс К. (Fridrichs K. O.)  
 1948. Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables. Amer. J. Math. 70, 555—588.  
 1954. Symmetric hyperbolic linear differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 7, 345—392.
- Харлоу Ф. (Harlow F. H.)  
 [1964] Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. Сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». «Мир», 1967, 316.
- Харди Г. Х., Рогозинский В. В.  
 [1956] Ряды Фурье. Физматгиз, 1959.
- Хартман Ф. (Hartman P.)  
 [1964] Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Мир», 1970.
- Хартман Ф., Винтнер А. (Hartman P., Wintner A.)  
 1952. On hyperbolic differential equations. Amer. J. Math. 5, 119—154.
- Хачатуров А. Р.  
 1977. Спектральные характеристики одного семейства разностных схем для уравнений Навье — Стокса. Сб. «Численные методы механики сплошной среды» 8, 6, 108—119.
- Хермандер Л.  
 [1963] Линейные дифференциальные операторы с частными производными. «Мир», 1965.
- Хёрнер С. (Hörner S.)  
 1955. Z. Naturforsch. 10a, 687.
- Хёфеле В. (Häfele W.)  
 1954. Z. Naturforsch. 9a, 269.

- Хилле Э.  
[1957] Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962, гл. XX.
- Хопф Э. (Hopf E.)  
1950. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Comm. Pure Appl. Math.* 3, 201—230.  
1969. On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order. *J. Math. Mech.* 19, 6, 483—487.
- Христианович С. А.  
1937. Задача Cauchy для нелинейных уравнений гиперболического типа. *Матем. сб.* 2 (44), 871—900.
- Христианович С. А., Рыжов О. С.  
1958. О нелинейном отражении слабых ударных волн. *ПММ* 22, 5, 586—600.
- Цзянь Сюэ-сень.  
1956. Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го. *Проблемы механики*, вып. 2, 7—62.
- Чепмен С., Каулинг Т. (Chapman S., Cowling T. G.)  
[1952] Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
- Честер Б.  
[1953] Распространение ударных волн в канале переменной ширины. *Сб. «Механика»* 6 (1954), 76—87.
- Чиснелл Р. (Chisnell R. F.)  
1955. The normal motion of a shock wave through a nonuniform onedimensional medium. *Proc. Roy. Soc.* 232, 350.  
1957. The motion of a shock wave in a channel with application to cylindrical and spherical shock waves. *J. Fluid Mech.* 2, 268.
- Шварц Л. (Schwartz L.)  
1950. *Theorie de distributions*, I, II. Paris.
- Шокин Ю. И.  
1973. О методе первого дифференциального приближения в теории разностных схем для гиперболических систем уравнений. *Труды матем. ин-та АН СССР* 122, 66—84.  
1976. Analysis of the properties of approximation viscosity of difference schemes by means of the method of differential approximation. *«Lecture Notes In Phys»* 59, 410—414.
- Ямагати М., Нишида Т. (Yamaguti M., Nishida T.)  
1968. On some global solutions for quasilinear hyperbolic equations. *Funkcialaj Ekvacioj* 11, 51—57.
- Яненко Н. Н.  
1955а. Сведение системы квазилинейных уравнений к одному квазилинейному уравнению. *УМН* 10, 3, 173—178.  
1955б. О разрывах в решениях квазилинейных уравнений. *УМН* 10, 2, 195—202.  
1964. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. *Труды IV Всесоюзного матем. съезда* 2, 613—621.
- Яненко Н. Н., Бояринцев Ю. И.  
1961. О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. *ДАН СССР* 139, 6, 1322—1324.
- Яненко Н. Н., Ворожцов Е. В., Фомин В. М.  
1976а. Дифференциальные анализаторы ударных волн. *ДАН СССР* 227, 1, 50—53.  
1976б. Дифференциальные анализаторы ударных волн. *Приложения теории*. Сб. «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск 7, 6, 8—23.  
1976в. Differential analysers of shock waves: theory. *«Computers and Fluids»* 4, 171—183.

- Яненко Н. Н., Демидов Г. В.  
1971. О структуре абсолютно аппроксимирующих и абсолютно корректных разностных схем. Сб. «Проблемы прикладной математики и механики». «Наука», М.
- Яненко Н. Н., Демидов Г. В., Кантор С. А.  
1972. Эволюционные двухслойные разностные схемы. Сб. «Численные методы механики сплошной среды» 3, 5, Новосибирск.
- Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.  
1968. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. ДАН СССР 182, 4, 776—778.  
1973. О групповой классификации разностных схем для системы уравнений газовой динамики. Труды Матем. ин-та АН СССР 122, 85—97.
- Яненко Н. Н., Яушев И. К.  
1966. Об одной абсолютно устойчивой схеме интегрирования уравнений гидродинамики. Труды Матем. ин-та АН СССР 74, 141—146.
- Яушев И. К.  
1967. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения. Изв. СО АН СССР, техн. серия 8, 2.