

В.И. БАРСУКОВ, О.С. ДМИТРИЕВ

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И
МАГНЕТИЗМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

УДК 535. 338 (0765)
ББК В36я73-5
Б261

Р е ц е н з е н т ы:

Заведующий кафедрой общей физики Тамбовского государственного
университета имени Г.Р. Державина,
доктор физико-математических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки Российской Федерации
В.А. Федоров

Заведующий кафедрой физики ТВВАИУРЭ (ВИ),
доктор технических наук, профессор
О.И. Гайнутдинов

Барсуков, В.И.

Б261 Физика. Электричество и магнетизм : учебное пособие / В.И. Барсуков, О.С. Дмитриев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 252 с. – 300 экз. – ISBN 978-5-8265-0866-4.

Подготовлено по разделу «Электромагнетизм» курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений. Содержит основы классической и современной физики и с этих позиций рассматривает основные явления и закономерности, связанные с учением об электричестве.

Предназначено для студентов 1–2 курсов всех специальностей инженерного профиля дневного и заочного отделений.

УДК 535.338(0765)
ББК В36я73-5

ISBN 978-5-8265-0866-4 © ГОУ ВПО «Тамбовский государственный
технический университет» (ТГТУ), 2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

В.И. БАРСУКОВ, О.С. ДМИТРИЕВ

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И
МАГНЕТИЗМ

*Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям*



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

Учебное издание

БАРСУКОВ Владимир Иванович
ДМИТРИЕВ Олег Сергеевич

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Филатова

Подписано в печать 30.11.2009.
Формат 60 × 84/16. 14,65 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ № 552.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В представленном учебном пособии рассматриваются основные современные положения из раздела учения об электричестве.

Само же учение достаточно бурно начало развиваться только с середины XIX в., когда в связи с развитием техники и теплотехники встал вопрос о дополнительных мощных и удобных источниках энергии.

Возникшие проблемы были разрешены с помощью использования электрической энергии, благодаря исключительным, по сравнению с другими видами, её свойствам.

Электрическую энергию можно передавать в практически неограниченных количествах на большие расстояния и с незначительными потерями. Если к этому добавить лёгкость преобразования электрической энергии в другие виды энергии, высокие коэффициенты полезного действия устройств, в которых эти превращения происходят, при самой различной мощности, то станет ясным, что практическое использование электрической энергии в промышленности привело к революции в технике.

В настоящее время с помощью электрической энергии осуществляется искусственное освещение, приводятся в действие станки и транспорт, осуществляются сигнализация, связь, телевидение и почти все измерения величин в науке и технике. Без электрической энергии были бы крайне затруднены, а иногда и невозможны, автоматизация производства в широких масштабах, управление агрегатами на расстоянии, изучение космического пространства. Электроэнергия получила разнообразные специальные применения в металлургии (электроплавка, получение легких металлов), в машиностроении (сварка, резка металлов), в химии (электролиз), на транспорте и т.д. Общеизвестно и широкое применение электроприборов в быту.

Не менее важна и теоретическая роль учения об электричестве и магнетизме.

Именно к электромагнитным взаимодействиям сводятся в конечном итоге межатомные и межмолекулярные силы, в том числе и так называемые «обменные силы», являющиеся своеобразным квантово-механическим результатом электромагнитных взаимодействий между заряженными частицами – электронами и ядрами.

Действиями электромагнитных сил объясняется громадное количество явлений, в том числе и таких, которые на первый взгляд никакого отношения к электричеству не имеют, как, например, механические (упругость твёрдых тел и жидкостей), тепловые (теплопроводность металлов), оптические (показатель преломления) и т.д.

Электрохимические явления указали на тесную связь, существующую между веществом и электричеством, и в настоящее время учение о строении материи неразрывно связано с учением об электричестве.

С другой стороны, учение об электромагнитных волнах включило в область электромагнетизма и учение о свете.

Кроме того, электромагнитные явления лежат в основе процессов, происходящих внутри атома. Не зная закономерностей электромагнитных явлений, нельзя было бы изучать строение атомов и атомных ядер.

Таким образом, учение об электромагнетизме занимает одно из центральных мест в современной физике.

Нельзя не отметить, что в этой области русским учёным принадлежит весьма почётное место. Достаточно напомнить имена М.В. Ломоносова и Г.В. Рихмана, изучавших атмосферное электричество; В.В. Петрова, открывшего электрическую дугу; Э.Х. Ленца, изучившего тепловые действия электрического тока и открывшего закон, которому следует электромагнитная индукция; Б.С. Якоби, сконструировавшего первый электромагнитный двигатель и применившего его для приведения в действие речного бота и железнодорожного вагона и открывшего и применившего гальванопластику и гальваностегию; А.Г. Столетова, изучившего явления фотоэлектричества; П.Н. Яблочкова, который изобрел первый, практически удобный способ освещения электрической дугой; А.Н. Лодыгина – изобретателя электрической лампочки накаливания; Н.Г. Славянова и Н.Н. Бенардоса – изобретателей электросварки; М.О. Доливо-Добровольского – изобретателя трёхфазного тока и вращающегося магнитного поля и их многочисленных применений; А.С. Попова – знаменитого изобретателя радио и многих, многих других, являющихся предметом законной гордости славной русской науки.

Крупных успехов в различных областях учения об электричестве достигли и советские учёные. Ими были разработаны многие проблемы, имеющие не только большой теоретический интерес, но и огром-

ное практическое значение. Сюда относятся вопросы физики диэлектриков, полупроводников, магнетиков, физики газового разряда и физики плазмы больших энергий, термоэлектронной эмиссии, фотоэффекта, электромагнитных колебаний и волн, лазерной техники и т.д.

Таким образом, раздел физики, посвящённый электромагнетизму, имеет особо важное значение для изучения науки и для освоения современной техники.

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ – МАТЕРИАЛЬНЫЙ НОСИТЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. В основе учения об электричестве лежит представление об *электромагнитном поле*.

Напомним, что термин «поле» в физике применяется для обозначения нескольких различных по своему содержанию понятий.

Во-первых, словом «поле» характеризуют *пространственное распределение* какой-либо физической величины, векторной или скалярной. Изучая, например, тепловое состояние в различных точках среды, говорят о скалярном поле температур, рассматривая процесс распространения механических колебаний в упругой среде, говорят о механическом волновом поле и т.д. В этих примерах термин «поле» описывает *физическое состояние* изучаемой материальной среды.

Во-вторых, полем называют особый *вид материи*. Понятие поля как особого вида материи возникло в связи с проблемой *взаимодействия*. Как передаётся действие сил – мгновенно или с конечной скоростью, через посредство промежуточной среды или без её участия?

Теория, утверждающая, что действие сил передаётся *через пустоту мгновенно*, носит название теории *дальнодействия*.

Теория, утверждающая, что действие сил передаётся с *конечной скоростью* через посредство промежуточной *материальной среды*, называется теорией *близкодействия*.

Современная физика признаёт только близкодействие и отвергает дальнодействие.

2. Как уже говорилось ранее (в механике), в настоящее время известны следующие типы взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

Каждый тип взаимодействия с механической точки зрения характеризует соответствующие силы: гравитационные, электромагнитные, ядерные.

Передачу того или иного взаимодействия, передачу сил современная физика мыслит как процесс распространения *возмущений* соответствующего *поля*, связанного с взаимодействующими объектами.

Электромагнитное поле – это особый вид материи, посредством которого осуществляется электромагнитное взаимодействие между частицами, обладающими электрическим зарядом.

Говоря кратко, – это *особый вид материи, передающий действие электромагнитных сил*.

Электромагнитное поле отличается *непрерывным распределением в пространстве* (доказательством тому служит существование *электромагнитных волн*). Вместе с тем, электромагнитное поле обнаруживает *дискретность структуры*, о чём говорит существование *фотонов*. Электромагнитное поле обладает способностью распространяться в вакууме со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с и оказывать на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их заряда и скорости.

Опытом установлено, что электромагнитное поле обладает массой, энергией, импульсом и т.д. Все это – неоспоримые доказательства физической реальности этого вида материи.

3. При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются два его проявления, две неразрывно связанные стороны – электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле – одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная *электрическими зарядами* и *изменением магнитного поля* и передающая действие *электрических сил*.

Электрическая сила – одна из двух *составляющих* электромагнитной силы. Величина и направление её зависят от *положения* заряженного тела или частицы в электромагнитном поле.

Выявляется электрическое поле по *силовому воздействию на неподвижные* заряженные тела или частицы (хотя оно действует и на движущиеся заряженные частицы и тела).

Магнитное поле – одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная *движением* электрических зарядов и *изменением электрического поля* и передающая действие магнитных сил.

Магнитная сила – другая составляющая электромагнитной силы. Особенностью этой силы является то, что она действует только на *движущиеся* заряды, её величина и направление зависят от *скорости движения* заряженных частиц относительно электромагнитного поля.

Обнаруживается магнитное поле по *силовому воздействию* на *движущиеся* заряженные тела или частицы, направленному нормально к направлению движения этих тел и частиц.

4. Электрические и магнитные явления обычно рассматриваются отдельно, хотя в действительности «чисто» электрических или «чисто» магнитных явлений не существует. Существует единый электромагнитный процесс. В связи с этим разделение электромагнитного взаимодействия на электрическое и магнитное, разделение единых электромагнитных сил на электрические и магнитные носит условный характер, и эта условность легко может быть доказана. Столь же условна и сама терминология – «электрические», «магнитные» силы. Поэтому в последующем мы, как правило, будем говорить просто о силе, действующей на тот или иной заряд, не называя её – электрической или магнитной.

1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

1. *Электрический заряд* – неотъемлемое свойство, присущее некоторым «простейшим» частицам материи – так называемым «элементарным» частицам. Электрический заряд вместе с массой, энергией, спином и т.д. образуют «комплекс» фундаментальных свойств частиц.

Из известных в настоящее время элементарных частиц электрическим зарядом обладают электроны, позитроны, протоны, антипротоны, некоторые мезоны и гипероны и их античастицы. Не обладают электрическим зарядом нейтроны, нейтрино, нейтральные мезоны и гипероны и их античастицы, а также фотоны.

2. Известны только два рода электрических зарядов, условно называемые *положительными* и *отрицательными* (термины «положительное» и «отрицательное» электричество впервые введены В. Франклином (США) в XVIII в.).

3. Многочисленными опытами установлено, что абсолютная величина заряда всех заряженных элементарных частиц одинакова и равна $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Этот минимальный электрический заряд (положительный или отрицательный) называется элементарным зарядом или атомом электричества.

Любой заряд q состоит из целого числа элементарных зарядов:

$$q = \pm eN,$$

где e – абсолютная величина заряда; N – любое целое положительное число (1, 2, 3...).

Изменение любого заряда может происходить только скачком, сразу на величину одного или нескольких элементарных зарядов.

Идея о дискретном, атомистическом строении электричества была выдвинута В. Вебером и Г. Гельмгольцем (Германия) во второй половине XIX в. Опытным обоснованием этой идеи было открытие законов электролиза (М. Фарадей, Англия) и исследование свойств катодных и анодных лучей (Крукс, Англия).

4. Если заряд q содержит весьма большое число элементарных зарядов, его называют *макроскопическим*. Изменение такого заряда можно считать *непрерывным*, так как элементарный заряд по сравнению с ним весьма мал.

5. Прямое экспериментальное определение величины элементарного заряда (заряда электрона) было впервые осуществлено в 1909 – 1904 гг. Р.Э. Милликеном (США) и А.Ф. Иоффе (Россия). После опытов Милликена и Иоффе была отвергнута выдвинутая было гипотеза о существовании субэлектронов, т.е. зарядов, меньших заряда электрона.

6. Электрический заряд *неотделим* от частиц, которым он принадлежит. Неуничтожимость материи влечёт за собой *неуничтожимость электрического заряда*. К известным из механики и теоретической механики законам сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии следует добавить **закон сохранения электрического заряда**: *в замкнутой системе тел или частиц алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная, какие бы процессы не происходили в системе*. Закон сохранения заряда был установлен экспериментально Ф. Эпинусом (Россия) и М. Фарадеем (Англия).

7. Все элементарные заряженные частицы всегда находятся в состоянии *движения*. Рассматриваемые в электростатике «неподвижные» заряды есть результат макроскопического усреднения: если геометрическая сумма скоростей всех элементарных зарядов, образующих данный макроскопический заряд q , в среднем равна нулю, то такой заряд проявляет себя в окружающем пространстве как «неподвижный».

8. Элементарные заряды, имеющиеся в телах, будем называть *свободными*, если заряженные частицы могут перемещаться по всему объёму тела, и *связанными*, если они прочно связаны со своими атомами или молекулами.

9. Макроскопический заряд будем называть свободным, если состоит из свободных элементарных зарядов, и связанным, если он состоит из связанных элементарных зарядов.

10. С движением любого элементарного заряда связано наличие *электромагнитного микрополя*. Электрическое и магнитное поля, изучаемые электростатикой и макроскопической электродинамикой, являются *усреднёнными*: они представляют собой наложение (суперпозицию) микрополей, создаваемую большой совокупностью движущихся элементарных зарядов.

Опыт показывает, что усреднённое электрическое поле может быть отлично от нуля не только тогда, когда его «источник» – макрозаряд неподвижен, но и тогда, когда он *движется*. Усреднённое магнитное поле отлично от нуля только тогда, когда создающий его макрозаряд находится *в движении*. Если макрозаряд неподвижен, то магнитные поля элементарных зарядов *компенсируют* друг друга, поэтому суммарное магнитное поле не обнаруживается, и наблюдаемые явления выглядят как «чисто» электрические.

11. Предметом электростатики является изучение взаимодействия *макроскопических зарядов*, находящихся в условии *равновесия*, а также свойств электрических полей, связанных с такими зарядами. Электрические поля, связанные с *неподвижными* зарядами, называются *электростатическими*, а электрические силы, характеризующие взаимодействие таких зарядов, – *электростатическими или кулоновскими*.

ЗАКОН КУЛОНА

1.3. ЗАКОН КУЛОНА

1. Наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело оказывает (через посредство электрического поля) силовое воздействие на другие заряженные тела.

Французский учёный Ш. Кулон установил (1785) закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов.

Заряд называется точечным, если размеры тела, обладающего этим зарядом, малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

Согласно закону Кулона, *сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:*

$$F_0 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (1.3.1)$$

где q_1 и q_2 – величины зарядов; r_{12} – расстояние между ними; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения q , F , r_{12} .

2. Сила взаимодействующих зарядов в безгранично однородной и изотропной среде уменьшается в ϵ раз:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}^2}, \quad (1.3.2)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая во сколько раз уменьшается силовое взаимодействие зарядов в среде по сравнению с взаимодействием этих же зарядов в вакууме:

$$\epsilon = \frac{F_0}{F}.$$

3. Чтобы формуле Кулона придать *векторный* вид, правую часть (1.3.2) надо умножить на единичный вектор $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$:

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}; \quad (1.3.3)$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}^2} \vec{r}_{12}, \quad (1.3.4)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на *первый* заряд со стороны второго; \vec{F}_{21} – сила, действующая на *второй* заряд со стороны первого; \vec{r}_{12} – вектор, проведённый от первого заряда ко второму.

Направления силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} на рис. 1.1 и знаки «минус» и «плюс» в формулах (1.3.3) – (1.3.4) соответствуют *одноимённым* зарядам.

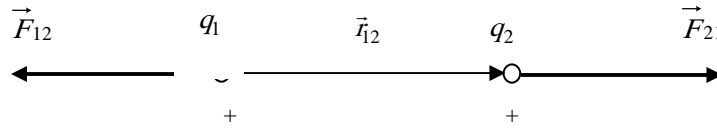


Рис. 1.1

Как видно из формул (1.3.3) и (1.3.4), направление \vec{F}_{21} *совпадает* с направлением \vec{r}_{12} , а направление \vec{F}_{12} *противоположно* \vec{r}_{12} .

Напомним, что силы притяжения принято считать отрицательными, а силы отталкивания – положительными.

Зависимость силы взаимодействия одноименных (кривая *а*) и разноименных (кривая *б*) точечных зарядов изображена на рис. 1.2.

4. Закон Кулона выражает силу взаимодействия между *неподвижными* электрическими зарядами, т.е. является, в сущности, *электростатическим законом*. Для *движущихся* зарядов этот закон перестаёт быть точным.

5. Силы электростатического взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

6. Нетрудно подметить формальную *аналогию* между законом Кулона и законом всемирного тяготения Ньютона. И электрические, и гравитационные силы являются центральными – направлены по прямой, соединяющей взаимодействующие тела. И те, и другие силы *обратно пропорциональны квадрату расстояния* между телами. Однако между этими законами есть и принципиальное *различие*: электростатические силы могут быть как силами *притяжения*, так и силами *отталкивания*, гравитационные – только притяжения; на электростатическое взаимодействие существенное влияние оказывает среда, на гравитационное – нет.

7. Закон Кулона справедлив только для *точечных* зарядов. Чтобы вычислить силу взаимодействия между зарядами q_1 и q_2 , сосредоточенными на телах *конечных* размеров, поступают следующим образом. Каждый из зарядов разбивают на столь малые порции dq , что их можно считать точечными, затем по формуле (1.3.4) находят силы взаимодействия между всеми парами, после чего геометрически складывают эти силы:

$$\vec{F}_{21} = \int d\vec{F}_{ki}; \quad (1.3.5)$$

здесь $d\vec{F}_{ki} = k \frac{dq_i dq_k}{\epsilon r_{ik}^2} \vec{r}_{ik}$ – сила, с которой i -й заряд первого тела действует на k -й заряд второго тела (рис.

1.3), а \vec{F}_{21} – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

Можно показать теоретически и убедиться на опыте, что если заряды распределены равномерно по поверхности или объёму тел сферической формы, то сила электростатического взаимодействия между ними такова, как если бы были сосредоточены в геометрических *центрах* этих тел. В этом случае силу можно рассчитывать по закону Кулона (1.3.2), понимая под r_{12} расстояние между центрами сфер (рис. 1.4, *а*)

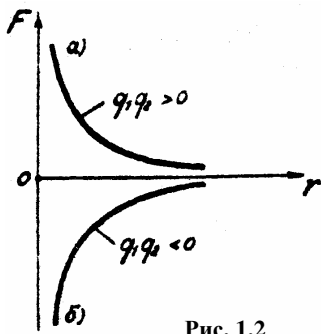


Рис. 1.2

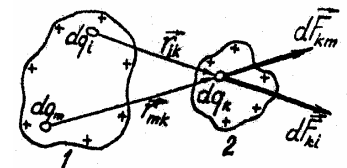


Рис. 1.3

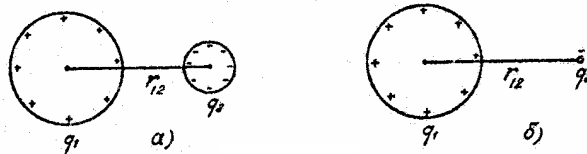


Рис. 1.4

Наконец, формулу Кулона (1.3.2) можно применять в случае, когда один из зарядов точный, а другой сосредоточен на сфере и распределён по ней равномерно (рис. 1.4, б)

1.4. СИСТЕМА ЕДИНИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ. РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ФОРМУЛ

1. Единица измерения заряда может быть установлена на основе закона Кулона, а может быть введена *независимо* от него.

Если единица заряда устанавливается из закона Кулона, то её разумно выбрать такой, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (1.3.1) оказался равным 1 (при этом используются единицы силы и расстояния, установленные в механике).

Если единицей силы является дина, расстояния – сантиметр, то единица заряда, соответствующая $k = 1$ в законе Кулона, называется *абсолютной электростатической единицей заряда* (сокращённое обозначение СГСЭ q).

Абсолютная электростатическая единица заряда – это такой заряд, который действует на равный ему заряд, расположенный на расстоянии 1 см в вакууме, с силой в 1 дину.

Система единиц, в которой за основные единицы приняты сантиметр, грамм, секунда и в которой заряд измеряется в абсолютных электростатических единицах, называется СГСЭ – системой (абсолютной электростатической системой).

Закон Кулона в системе СГСЭ имеет вид

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (1.4.1)$$

2. В системе СИ единица заряда, называемая *кулон*, устанавливается не из закона Кулона, а из других закономерностей.

Кулон определяется через четвертую основную единицу системы СИ – единицу тока – *ампер* (напомним, что первыми тремя основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда). Определяющим условием для единицы заряда в системе СИ является выражение $q = It$.

Кулон (Кл) – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1 с при токе в проводнике, равном 1А:

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}.$$

Опытом установлено, что $1 \text{ Кл} = 3,10^9 \text{ СГСЭ } q$.

3. Введение единицы заряда в системе СИ *независимо от закона Кулона* приводит к тому, что в формуле (1.3.2) сохраняется размерный коэффициент пропорциональности k :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (1.4.2)$$

Как видно из этой формулы, коэффициент k в системе СИ численно равен силе, с которой взаимодействовали бы в вакууме два точечных заряда величиной по 1 кулону каждый, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, т.е. если $q_1 = q_2 = 1 \text{ Кл}$, $r = 1 \text{ м}$, $\epsilon = 1$, то $|k| = |F|$.

Коэффициент k может быть найден из опыта. Для этого необходимо измерить силу F , с которой взаимодействуют два точечных заряда q_1 и q_2 , расположенных на некотором расстоянии r друг от друга в вакууме (практически в воздухе или, лучше молекулярном вакууме). Не следует думать при этом, что заряды обязательно должны быть единичными (кстати, заряд в 1 Кл не удержится даже на шаре радиусом несколько метров: он пробьёт любую изоляцию!), что расстояние между зарядом должно быть 1 м. И заряды, и расстояния, в принципе, могут быть любыми.

Подставив F (в ньютонах), q_1 и q_2 (в кулонах) и r (в метрах) в формулу (1.4.2), можно вычислить k . Многочисленные измерения дают для k значение:

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Таким образом, при вычислении силы взаимодействия зарядов в системе СИ можно пользоваться формулой (1.4.2), понимая под

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

4. Было замечено, что во многие важные формулы электродинамики входит множитель 4π , делающий расчёты неудобными. Чтобы избавиться от этого множителя в наиболее важных формулах, О. Хевисайд (Англия) предложил ввести его искусственно в закон Кулона, представив коэффициент пропорциональности k в виде произведения двух сомножителей – безразмерного $\frac{1}{4\pi}$ и размерного $\frac{1}{\epsilon_0}$:

$$k = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_0}, \quad (1.4.3)$$

где ϵ_0 – новый коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной.

Тогда закон Кулона в системе СИ примет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.4.4)$$

5. Введение в закон Кулона вместо коэффициента k равного ему коэффициента $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ видоизменяет все формулы электростатики: из наиболее употребительных формул множитель 4π исчезает (в результате сокращения), и это делает формулы более простыми; в других же формулах, наоборот, он появляется, что, к сожалению, приводит к усложнению их вида.

«Исправленные» указанным образом формулы называются *рационализированными*, а система единиц, построенная на использовании рационализированных формул, – *рационализованной*.

Система СИ является рационализованной системой, система СГСЭ – нерационализованной.

Как и в предыдущих разделах курса, в электростатике мы будем пользоваться только системой СИ. Будет, однако, полезным самостоятельным упражнением переход от системы СИ к системе СГСЭ. Этот переход осуществляется просто: если в формуле, записанной в системе СИ, электрическая постоянная ϵ_0 стоит в знаменателе, то для перехода к нерационализованной СГСЭ – системе числитель надо умножить на $4\pi\epsilon_0$, если ϵ_0 стоит в числителе, то на $4\pi\epsilon_0$ умножается знаменатель.

6. Найдём теперь численное значение и наименование величины ϵ_0 системы СИ.

Из формулы (1.4.3) $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$, а так как $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, то

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое электромагнитное поле?
2. Что называется магнитным полем?
3. Что называется электрическим полем?
4. Какой заряд называется элементарным и какой – макроскопическим?
5. Какой заряд называется свободным и какой – связанным?
6. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда?
7. Какой заряд называется точечным и какой – протяжённым?
8. Сформулируйте закон Кулона.
9. В чём заключается сходство и различие между законом электростатического взаимодействия зарядов и гравитационного взаимодействия материальных тел?
10. В каких единицах измеряется заряд в системе СИ?
11. Объясните, почему в законе Кулона, записанном в системе СИ, имеется размерный коэффициент пропорциональности.
12. В чём состоит рационализация формул электростатики и чем она вызвана?

НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1.5. НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Перейдём к описанию свойств электрического поля.

1. Следует различать *две* разновидности электрического поля: *электростатическое* или безвихревое и *вихревое* или соленоидальное.

Электростатическое поле характеризуется тем, что оно *не изменяется* с течением времени. Кроме того, такое поле *не может существовать в отрыве от электрических зарядов*: электрические заряды являются его «источником».

Вихревое электрическое поле характеризуется тем, что *оно может изменяться* с течением времени и может существовать в отрыве от электрических зарядов.

2. Электрическое поле оказывает *силовое воздействие* на вносимые в него электрические заряды.

Заряженное тело, при помощи которого обнаруживается и исследуется электрическое поле, называется *пробным зарядом*. Пробный заряд должен отвечать некоторым вполне определённым требованиям.

а) Пробный заряд должен быть достаточно малым по величине.

С пробным зарядом связано его собственное электрическое поле. Это поле, воздействуя на заряды, создающие исследуемое поле, вызывает их перераспределение. В результате исследуемое поле «искажается», оно становится не таким, каким было раньше, до внесения пробного заряда. Чем меньше величина пробного заряда, тем меньше он искажает исследуемое поле.

б) Пробный заряд должен быть точечным.

Сила, действующая на пробный заряд, характеризует свойства поля, усреднённые по тому объёму, который занимает этот заряд. Чем меньше объём, занимаемый пробным зарядом, тем ближе найденный средние характеристики поля к истинным «точечным» характеристикам.

в) Условились в качестве пробного заряда выбирать положительный заряд; чтобы отразить это, будем обозначать пробный заряд индексом «+»: q_+ .

3. Как показывает опыт, сила \vec{F} , действующая на пробный заряд q_+ , помещённый в данную точку поля, зависит как от *свойств* поля в этой точке, так и от *величины пробного заряда*.

Сила же, отнесённая к *единице* заряда (чтобы найти эту силу, достаточно взять отношение $\frac{F}{q_+}$), зависит *только от свойств* поля в рассматриваемой точке и, следовательно, может служить его характеристикой в этой точке. Это *векторная* величина характеризует *силовое действие* поля на вносимые в него заряды и называется *напряжённостью* (её часто называют просто «полем», иногда электрическим вектором).

Таким образом, напряжённость *электрического* (и статического, и вихревого) *поля есть векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на вносимые в него электрические заряды и численно равная силе, с которой поле действовало бы на единичный точечный заряд, помещённый в данную точку. Направление* вектора напряжённости совпадает с направлением силы, действующей на *положительный* пробный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}. \quad (1.5.1)$$

4. Заметим: напряжённость характеризует любую точку поля *независимо* от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5. За единицу напряжённости в системе СИ принимается напряжённость такой точки поля, в которой на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н:

$$1 \text{ СИ}_E = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ К}}.$$

6. Если *вектор* напряжённости во всех точках поля одинаков по величине и имеет *одно и то же направление*, то такое *поле* называется *однородным*:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dots \quad (1.5.2)$$

7. Найдём выражение для напряжённости поля, созданного точечным зарядом. Силу, действующую на пробный заряд со стороны заряда, создающего поле, можно найти по формуле Кулона (так как оба заряда точечные):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_+ \vec{r}}{\epsilon r^2 r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведённый из точки, где находится заряд q , создающий поле, в точку, где находится пробный заряд q_+ .

Разделив силу \vec{F} на величину пробного заряда, найдём величину и направление векторов напряжённости:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{q}{r^2} \right) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.5.3)$$

Величина, стоящая в формуле (1.5.3) в скобках, определяет численное значение напряжённости:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{q}{r^2} \quad (1.5.4)$$

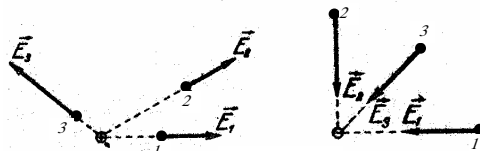


Рис. 1.5

Из формулы (1.5.3) видно, что векторы \vec{E} электрического поля во всех точках направлены радиально *от* заряда, если он *положителен*, и *к* заряду, если он *отрицателен* (рис. 1.5).

8. Из определяющего уравнения для напряжённости (1.5.1) следует, что на всякий точечный заряд в электрическом поле с напряжённостью \vec{E} действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1.5.5)$$

Если $q > 0$, направление \vec{F} совпадает с направлением \vec{E} ; если $q < 0$, направление \vec{F} противоположно направлению \vec{E} .

9. Наряду с напряжённостью для описания электрического поля вводится вспомогательная, чисто *расчётная* характеристика, называемая *электростатической индукцией* или электрическим смещением \vec{D} (подробнее об этой величине речь пойдёт в п.1.19).

Если среда *изотропна*, то связь между индукцией \vec{D} и напряжённостью \vec{E} в любой точке поля выражается формулой

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (1.5.6)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; ϵ – относительная проницаемость среды.

10. Найдём индукцию для *точечного* заряда. Для этого в формулу (1.5.6) подставим выражение для \vec{E} по (1.3.5). Получим

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.5.7)$$

Численное значение индукции в этом случае

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (1.5.8)$$

Существенно подчеркнуть, что по формулам (1.5.7) и (1.5.8) можно находить величину и направление индукции только в случае, если поле создано в *однородной, изотропной и безграничной среде*.

1.6. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЕЙ

1. «Источники» *электростатических* полей обычно представляют собой *систему* сосредоточенных (точечных) или распределённых (непрерывных) *макроскопических* зарядов.

2. Пусть поле создано *в вакууме* системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Каждый из этих зарядов, взятый в отдельности (т.е. в *отсутствии* других зарядов), действует на пробный заряд q_+ соответственно с силой F_1, F_2, \dots, F_n . Измерения показывают, что *резльтирующая* сила \vec{F} , действующая со стороны *всех* зарядов, равна геометрической сумме сил F_1, F_2, \dots, F_n

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (1.6.1)$$

Разделив левую и правую части этого соотношения на величину пробного заряда q_+ , мы получим выражение для напряжённости

$$\frac{\vec{F}}{q_+} = \frac{\vec{F}_1}{q_+} + \frac{\vec{F}_2}{q_+} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_+},$$

т.е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$, или кратко

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.6.2)$$

где \vec{E}_i – напряжённость электрического поля, которую создавал бы заряд q_i в данной точке, если бы он был одиночным, т.е. если бы всех других зарядов не было.

\vec{E} – напряжённость результирующего поля, т.е. поля, которое существует при наличии всех зарядов системы.

Таким образом, *напряжённость электростатического поля, созданного в вакууме системой точечных зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.*

Соотношение (1.6.2) выражает весьма важный принцип независимости действия полей или принцип *суперпозиции* (наложения) полей.

3. Принцип суперпозиции справедлив и для поля, созданного системой непрерывно распределённых зарядов. Только в этом случае суммирование (1.6.2) заменяется интегрированием:

$$\vec{E} = \int_q d\vec{E}, \quad (1.6.3)$$

где $d\vec{E}$ – напряжённость, создаваемая в данной точке бесконечно малым зарядом dq , а символ « q » означает, что интегрирование распространяется на весь непрерывно распределённый заряд q .

4. При наличии *среды* соотношения (1.6.2) и (1.6.3) будут иметь место только при условии, если диэлектрическая проницаемость среды ϵ *не зависит от напряжённости поля.*

В самом деле, если ϵ зависит от напряжённости поля (такие среды называют *сегнетоэлектрическими*), то один и тот же заряд при *наличии* других зарядов создаст в данной точке напряжённость

$E'_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon' r_i^2}$, *отличную* от напряжённости $E''_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon'' r_i^2}$, которую он создавал бы, будучи одиночным (так как в этом случае $\epsilon' \neq \epsilon''$).

1.7. РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

1. Одной из важных прикладных задач электростатики является расчёт электрических полей, имеющих в различных приборах и аппаратах (конденсаторах, электронных лампах, кабелях и т.д.).

Рассчитать поле – это значит определить в любой его точке величину и направление вектора напряжённости.

Эта задача в общем случае может быть решена на основе закона Кулона и принципа суперпозиции.

2. *Схема* решения задачи в случае системы *точечных* зарядов такова.

1) По формуле поля точечного заряда находят напряжённости $\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_i$, создаваемые каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^2} \vec{r}_1, \dots, \vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i^2} \vec{r}_i, \quad (1.7.1)$$

где $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i$ – радиус-векторы, проведённые из точек, где находятся заряды q_1, \dots, q_i , в точку, где определяется напряжённость.

2) Напряжённости, создаваемые отдельными зарядами, геометрически складываются:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (1.7.2)$$

(на рис. 1.6 вектор результирующей напряжённости не показан).

3. *Схема* решения в случае *непрерывно распределённых* зарядов.

1) Протяжённый заряд q *разбивается* на достаточно малые порции dq с тем, чтобы каждую такую

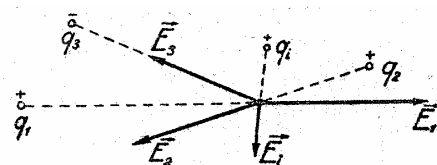


Рис. 1.6

порцию можно было рассматривать как точечный заряд. Чтобы вычислить dq , надо знать закон распределения зарядов в пространстве. Вводятся понятия объёмной (ρ), поверхностной (σ) и линейной плотности (τ) зарядов. Объёмная плотность $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ измеряется зарядом единицы объёма тела, поверхностная $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ – зарядом единицы поверхности и линейная $\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ – зарядом единицы длины тела.

Закон распределения зарядов известен, если известна зависимость ρ , σ , τ от соответствующих координат. Малые пропорции dq выражаются через объёмную, поверхностную или линейную плотности зарядов следующим образом:

$$dq = \rho dV; \quad dq = \sigma dS; \quad dq = \tau dl.$$

2) По формуле поля точечного заряда рассчитываются напряжённость $d\vec{E}$, создаваемая каждой отдельной порцией dq :

$$\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.7.3)$$

3) Геометрически складываются напряжённости, создаваемые отдельными точечными зарядами:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}. \quad (1.7.4)$$

4. В качестве простейшего примера расчёта поля, созданного системой точечных зарядов, рассмотрим поле электрического диполя (дипольное строение имеют многие молекулы, например, молекулы воды, спиртов, органических кислот и т.д.).

Электрический диполь – это система двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов q_+ и q_- смещённых на небольшое расстояние друг относительно друга.

Ориентацию диполя в пространстве указывает его плечо \vec{l} .

Плечо диполя \vec{l} – это вектор, проведённый от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними (рис. 1.7).

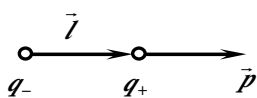


Рис. 1.7

Вектор, численно равный произведению величины плеча на абсолютную величину одного из зарядов диполя и совпадающий по направлению с \vec{l} , называется *электрическим моментом диполя*:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.7.5)$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряжённость, создаваемая диполем в любой точке пространства, равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \quad (1.7.6)$$

где \vec{E}_+ и \vec{E}_- – напряжённости, создаваемые зарядами диполя q_+ и q_- (предполагается при этом, что диэлектрическая проницаемость среды не является функцией напряжённости поля, в противном случае принцип суперпозиции не будет справедлив).

Найдём сначала напряжённость поля в точке M , лежащей на оси диполя, т.е. на прямой, проходящей через заряд. Пусть интересующая нас точка отстоит от центра диполя на расстоянии r , причём $r \gg l$ (рис. 1.8). Так как во всех точках на оси диполя (не между зарядами) векторы \vec{E}_+ и \vec{E}_- направлены в противоположные стороны, модуль результирующей напряжённости в выбранной нами точке будет равен разности модулей \vec{E}_+ и \vec{E}_- :

$$E_{\parallel} = E_+ - E_- \quad (1.7.7)$$

где \vec{E}_+ и \vec{E}_- находим по формуле напряжённости точечного заряда:

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{и} \quad \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{2qlr}{4\pi\epsilon_0\epsilon \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

Пренебрегая в знаменателе величиной $l^2/4$ по сравнению с r^2 и сокращая числитель и знаменатель на r , получим $E_{\parallel} = \frac{2qlr}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}$. Но $ql = p$ – электрический момент диполя. Следовательно,

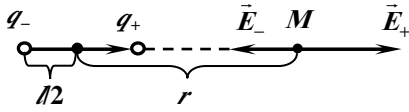


Рис. 1.8

$$E_{\parallel} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (1.7.8)$$

Таким образом, напряжённость поля на оси диполя прямо пропорциональна *электрическому моменту* диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя до точки наблюдения.

Найдем теперь напряжённость в точке, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя. Пусть точка наблюдения N отстоит от центра диполя на расстоянии r (рис. 1.9), причем снова $r \gg l$.

Так как точка N отстоит от заряда q_+ и q_- на *одинаковых* расстояниях, то $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-|$, а треугольники, опирающиеся на вектор \vec{E}_{\perp} и плечо \vec{l} , – равнобедренные и подобны друг другу. Из подобия треугольников:

$$\frac{E_{\perp}}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}, \text{ или } E_{\perp} = E_+ \frac{l}{r},$$

так как $l \ll r$

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (1.7.9)$$

Подставив (1.7.9) в формулу для \vec{E}_{\perp} , получим

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (1.7.10)$$

Поле в точках, лежащих на перпендикуляре к оси диполя, в два раза слабее поля в точках на оси диполя (при условии, что соответствующие точки отстоят от центра диполя на одинаковых расстояниях).

Можно показать, что напряжённость, создаваемая диполем в произвольной точке A , положение которой определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 1.10), численно равна

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (1.7.11)$$

где r – модуль радиус-вектора; α – угол между направлением радиус-вектора \vec{r} и плечом диполя.

5. Рассмотрим теперь пример расчёта поля, созданного *непрерывно распределёнными зарядами*. Найдём напряжённость поля на оси равномерно заряженного проволочного кольца на расстоянии h от его центра (рис. 1.11). Пусть радиус кольца r_0 , линейная плотность зарядов τ , величина полного заряда кольца $q = 2\pi r_0 \tau$.

Разобьём всё кольцо на малые элементы dl . Каждый из таких элементов несёт заряд τdl и создаёт в интересующей нас точке напряжённость, численное значение которой равно

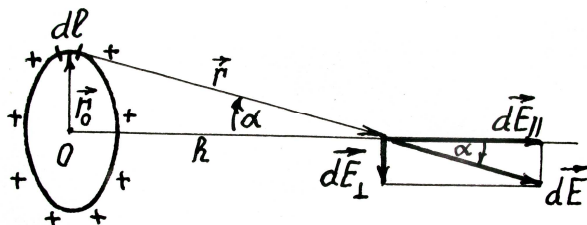


Рис. 1.11

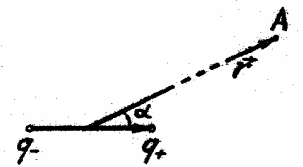


Рис. 1.10

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (1.7.12)$$

где r – расстояние от элемента dl до точки наблюдения.

Разложим каждый из векторов $d\vec{E}$ на две составляющие – $d\vec{E}_{\parallel}$, направленную вдоль оси кольца, и $d\vec{E}_{\perp}$, направленную перпендикулярно этой оси (см. рис. 1.11). При суммировании полей, создаваемых всеми элементами кольца, составляющие $d\vec{E}_{\perp}$ в сумме дадут нуль ($d\vec{E}_{\perp}$ на нашем чертеже скомпенсируется такой же составляющей напряжённости $d\vec{E}'_{\perp}$, созданной диаметрально противоположным элементом dl'). Результирующее поле E будет складываться лишь из суммы составляющих dE_{\parallel} :

$$E = \int dE_{\parallel}. \quad (1.7.13)$$

Как видно из чертежа, $dE_{\parallel} = dE \cos \alpha$.

Выразим r и $\cos \alpha$ через h и r_0 :

$$r = \sqrt{h^2 + r_0^2}; \quad \cos \alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r_0^2}}.$$

Таким образом,

$$dE_{\parallel} = \frac{\tau h dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon (h^2 + r_0^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя по l от 0 до $2\pi r_0$, получим

$$E = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau h dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon (h^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\tau h r_0}{2\epsilon_0\epsilon (h^2 + r_0^2)^{3/2}}. \quad (1.7.14)$$

Таким образом, напряжённость пропорциональна h – расстоянию от центра кольца. В центре кольца ($h = 0$) напряжённость поля получается равной нулю.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чём заключается различие между электростатическим и электрическим вихревым полем?
2. Что такое пробный заряд? Какие требования предъявляются к пробному заряду?
3. Что называется напряжённостью электрического поля?
4. Что принимается за направление вектора напряжённости?
5. Запишите выражение для напряжённости поля точечного заряда в системе СИ.
6. Какова связь между электрической индукцией и напряжённостью электрического поля?
7. Сформулируйте принцип суперпозиции полей.
8. Что такое электрический диполь?
9. Что определяет ориентацию электрического диполя в пространстве?
10. Чему равна напряжённость электростатического поля, создаваемая электрическим диполем в произвольной точке?
11. Как рассчитывается напряжённость электростатического поля в случае непрерывно распределённых зарядов?

ТЕОРЕМА ГАУССА

1.8. ЛИНИИ ВЕКТОРОВ НАПРЯЖЁННОСТИ И ИНДУКЦИИ

1. Электрическое поле можно описать *аналитически*, задав формулы, выражающие зависимость вектора напряжённости от координат.

2. Электрическое поле можно представить *графически*, изобразив для некоторых точек величину и направление вектора напряжённости \vec{E} . Однако такой способ графического представления электриче-

ского поля весьма неудобен, так как стрелки, изображающие напряжённость, накладываются друг на друга, пересекаются и тем самым запутывают картину распределения \vec{E} .

3. М. Фарадеем был предложен более наглядный метод изображения электрического поля *при помощи линий вектора напряжённости* (их называют также *силовыми линиями* или *линиями поля*).

Линией вектора напряжённости называется линия, проведённая в поле так, что касательная в каждой её точке совпадает с направлением вектора напряжённости в этой же точке (рис. 1.12). При помощи линий вектора напряжённости удаётся охарактеризовать не только *направление* вектора \vec{E} , но и его *численное значение*. Линии поля обычно проводят так, чтобы число их через единичную площадку, перпендикулярную линиям, было равно или пропорционально напряжённости в этом месте. Чем «гуще», «плотнее» идут линии вектора \vec{E} , тем больше здесь напряжённость поля.

4. Отметим некоторые *особенности линий электростатического поля*:

а) линии электростатического поля всегда *разомкнуты*: они начинаются на положительных зарядах и обрываются на отрицательных. Допускается также, что линии поля могут уходить в бесконечность или приходить из бесконечности;

б) линии электростатического поля нигде *не пересекаются*. Это является следствием того, что напряжённость – *однозначная* характеристика поля: в каждой точке поля вектор \vec{E} имеет *единственное* направление. Если бы линии поля пересекались, то в точке пересечения можно было бы провести две касательные и, следовательно, в этой точке вектор \vec{E} имел бы два направления, что невозможно;

в) линии *однородного* поля *параллельны* друг другу и проходят с одинаковой густотой; линии *неоднородного* поля *непараллельны*;

г) линии поля *нельзя отождествлять с траекториями* движения положительно заряженных частиц. Касательные к траекториям указывают направление *скорости*, касательные к силовым линиям – направление *силы*. В случае криволинейного движения направления силы и скорости не совпадают.

5. Так же, как для вектора \vec{E} вводят линии вектора напряжённости, для вектора \vec{D} вводят *линии вектора электростатической индукции* (кратко – *линии индукции*). Линии индукции проводятся так же, как и линии напряжённости, – чтобы направление касательной в каждой точке линии совпадало с направлением вектора \vec{D} . Остаётся в силе и соглашение о «густоте» линий: число линий индукции, пересекающих единичную площадку, перпендикулярно линиям поля, равно или пропорционально величине вектора \vec{D} в этом месте.



Рис. 1.12

1.9. ПОТОК ВЕКТОРА ИНДУКЦИИ

1. Расчёт электрических полей, основанный на непосредственном применении закона Кулона и принципа суперпозиции, – задача несложная принципиально, но достаточно громоздкая *математически*.

Для облегчения расчётов при решении этой задачи был разработан *ряд вспомогательных методов и приёмов*. Один из таких методов основан на применении *теоремы Гаусса*.

Прежде чем сформулировать эту теорему, введём понятие *потока вектора индукции*.

2. Назовём *элементарным потоком вектора индукции* через бесконечно малую площадку dS , ориентированную в электрическом поле произвольно, скалярную величину

$$dN = D dS \cos \alpha, \quad (1.9.1)$$

где α – угол между направлением нормали \vec{n} к площадке и направлением индукции \vec{D} в том месте, где находится площадка (рис. 1.13).

Легко видеть, что в правой части выражения (1.9.1) записано численное значение скалярного произведения вектора \vec{D} на вектор $d\vec{S}$:

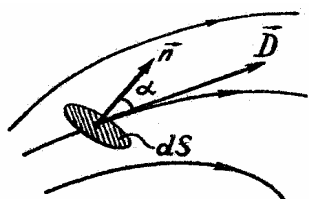


Рис. 1.13

$$dN = \vec{D} d\vec{S}, \quad (1.9.2)$$

где $d\vec{S} = dS \vec{n}$ – вектор, численно равный величине площадки dS и совпадающий по направлению с направлением *единичной* нормали \vec{n} к этой площадке. Произведение $D \cos \alpha$ в выражении (1.9.1) можно рассматривать как проекцию вектора \vec{D} на направление нормали \vec{n} :

$$D \cos \alpha = D_n.$$

Следовательно,

$$dN = D_n dS. \quad (1.9.3)$$

С таким же правом можно проекцию площадки dS на плоскость, перпендикулярную D :

$$dS \cos \alpha = dS_0.$$

В этом случае

$$dN = D dS_0.$$

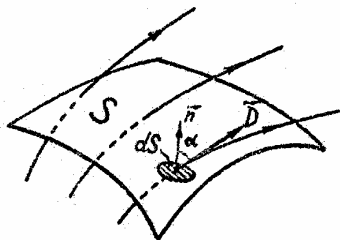


Рис. 1.14

рассматривать произведение $dS \cos \alpha$ как площадку, перпендикулярную D :

$$(1.9.4)$$

3. Формула (1.9.1) – *дифференциальная*. Она справедлива для *любого поля* – однородного и неоднородного. Площадка dS выбирается настолько малой, что её можно считать плоской, а индукцию поля одинаковой во всех её точках.

Чтобы найти полный поток, пронизывающий произвольную поверхность S (рис. 1.14), нужно сложить потоки dN через все элементарные площадки dS рассматриваемой поверхности:

$$N = \int_S dN = \int_S D_n dS. \quad (1.9.5)$$

В некоторых частных случаях интегрирование формулы (1.9.5) приводит к весьма простым результатам. Так, если поле однородно (вектор \vec{D} не зависит от координат), а поверхность S плоская, то поток вектора индукции сквозь эту поверхность равен

$$N = DS \cos \alpha = D_n S.$$

К такому же простому результату можно прийти и в случае *неоднородного поля и криволинейной поверхности*: если форма поверхности такова, что численное значение вектора \vec{D} во всех её точках одинаково, а направление \vec{D} составляет со всеми нормальными векторами один и тот же угол.

4. Если число линий индукции, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям поля, равно величине вектора \vec{D} в этом месте, то поток вектора \vec{D} можно определить как *число линий индукции*, пронизывающих данную поверхность S .

Не следует, однако, преувеличивать роль этого определения. Оно не более, как вспомогательный приём, своеобразная геометрическая модель этого важного физического понятия.

5. *Поток вектора индукции* – величина *алгебраическая*. Знак потока зависит от выбора направления нормалей к элементарным площадкам dS , на которые разбивается поверхность S .

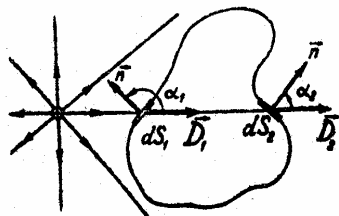


Рис. 1.15

Условимся в случае замкнутых поверхностей (именно о таких поверхностях пойдёт речь в теореме Гаусса) под нормалью к площадке dS понимать *внешнюю нормаль*, т.е. нормаль, обращённую наружу, вовне. При таком выборе направления нормали поток через площадку dS будет *положительным*, если угол между вектором \vec{D} и нормалью \vec{n} – *острый* (вектор \vec{D} направлен *наружу*, линии поля «*выходят*» из объёма, ограниченного поверхностью, поток «*вытекает*» из этого объёма). Если же угол между внешней нормалью и направлением \vec{D} тупой, то поток будет *отрицательным* (вектор \vec{D} направлен *внутри* объёма, линии \vec{D} «*входят*» в объём). Рисунок

1.15 поясняет сказанное:

$$dN_1 = D_1 dS_1 \cos \alpha_1 < 0;$$

$$dN_2 = D_2 dS_2 \cos \alpha_2 > 0.$$

6. Совершенно аналогично вводится понятие *потока вектора напряжённости*.

Элементарный поток вектора напряжённости

$$dN_E = E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E_n dS. \quad (1.9.6)$$

Полный поток вектора напряжённости через произвольную поверхность S :

$$N_E = \int_S E_n dS. \quad (1.9.7)$$

1.10. ТЕОРЕМА ГАУССА

1. Теорема Гаусса устанавливает *связь между потоком вектора индукции* (или напряжённости) через произвольную *замкнутую поверхность* и суммарным *свободным зарядом*, находящимся *внутри* объёма, ограниченного этой поверхностью. По соображениям, которые будут изложены позднее, сформулируем теорему Гаусса для потока вектора \vec{D} .

2. Пусть электрическое поле создано свободным положительным точечным зарядом q_+ (знак заряда мы выбрали произвольно; заряд находится в однородной, безграничной, изотропной среде). Охватим мысленно этот заряд произвольной замкнутой поверхностью S (рис. 1.16).

Вычислим поток вектора \vec{D} через эту поверхность. Так как поле точечного заряда неоднородно, а выбранная нами поверхность имеет произвольную форму, при вычислении потока нам придётся *интегрировать*.

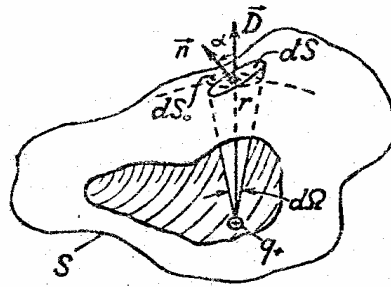


Рис. 1.16

Найдём сначала поток индукции через элементарную площадку dS . Нормаль к этой площадке образует с направлением \vec{D} в том месте, где находится площадка, угол α (рис. 1.16). Согласно определению потока:

$$dN = D dS \cos \alpha.$$

Выделенная нами площадка отстоит от заряда, создающего поле, на расстоянии r . Следовательно, индукция поля в том месте, где находится площадка, равна (1.5.8):

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

где $dS \cos \alpha = dS_0$ – проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную радиальной прямой r . Таким образом,

$$dN = \frac{q dS_0}{4\pi r^2}.$$

Обратим внимание на величину $\frac{dS_0}{r^2}$. Так как площадка dS_0 бесконечно мала, её можно рассматривать как участок сферической поверхности радиуса r , но тогда $\frac{dS_0}{r^2} = d\Omega$ – телесный угол, под которым видна площадка dS из точки, где находится заряд q . Следовательно,

$$dN = \frac{q}{4\pi} d\Omega. \quad (1.10.1)$$

Вся поверхность S видна из точки, где находится заряд, под телесным углом 4π . Суммирование элементарных потоков по S свелось к суммированию по Ω от 0 до 4π :

$$N = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega = q. \quad (1.10.2)$$

Итак, мы нашли, что поток вектора \vec{D} через *произвольную замкнутую* поверхность S равен q , где q – *свободный заряд*, заключённый *внутри объёма*, ограниченного этой поверхностью. «*Источниками*» *линий индукции являются свободные заряды*.

3. Формулу (1.10.2) нетрудно обобщить на случай поля, созданного любой системой точечных или протяжённых зарядов. В этом случае под q в формуле (1.10.2) следует понимать алгебраическую сумму свободных зарядов, попадающих внутрь объёма, ограниченного поверхностью S . Покажем это. Пусть в объёме, ограниченном выбранной поверхностью, находится n точечных зарядов: q_1, q_2, \dots, q_n . Поток индукции сквозь эту поверхность, обусловленный наличием заряда q_1 , согласно (1.10.2), равен

$$N_1 = q_1;$$

поток, обусловленный зарядом q_2 ,

$$N_2 = q_2,$$

и т.д. Полный поток индукции, пронизывающий рассматриваемую поверхность, равен алгебраической сумме потоков N_1, N_2, \dots, N_n :

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_n.$$

Подставим вместо N_1, N_2, \dots, N_n заряды q_1, q_2, \dots, q_n . Получим

$$N = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.10.3)$$

Обратим внимание на то, что суммирование здесь распространяется только на те заряды, которые *охватываются* поверхностью, находятся *внутри* объёма, ограниченного поверхностью.

4. Если заряды распределены непрерывно, то $q = \int_V \rho dV$ или $q = \int_S \sigma dS$, или $q = \int_l \tau dl$, где ρ, σ, τ – соответственно объёмная, поверхностная и линейная плотности зарядов; V, S, l – объём, поверхность, линия, по которым распределены заряды, попадающие внутрь поверхности S .

5. Если замкнутая поверхность S *не охватывает* заряд, то *поток* вектора \vec{D} через такую поверхность равен *нулю*. Убедимся в этом.

Построим коническую поверхность, *касательную* к поверхности S и с вершиной в точке, где находится заряд q (рис. 1.17). Точки касания конической поверхности образуют линию, которая пересекает всю поверхность S на две части – S_1 и S_2 . Обе эти части видны из точки, где

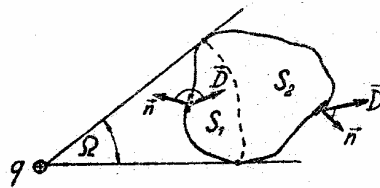


Рис. 1.17

находится заряд, под одним и тем же телесным углом Ω . Следовательно, потоки, пронизывающие S_1 и S_2 по (1.10.1), *равны по величине*: $|N_1| = |N_2|$.

Легко видеть, однако, что эти *потоки противоположны по знаку*: $N_1 < 0, N_2 > 0$ (углы между \vec{D} и \vec{n} во всех точках поверхности S_2 – острые, а во всех точках поверхности S_1 – тупые). Поэтому

$$N = N_1 + N_2 = 0.$$

Если привлечь «геометрическое» определение потока, то рассуждения будут ещё проще: так как внутри поверхности S свободных зарядов *нет*, линии индукции ни начинаются, ни обрываются внутри объёма, ограниченного поверхностью, т.е. идут, не разрываясь. Число линий, *входящих* в объём, *равно* числу линий, *выходящих* из него. Поток, образованный выходящими линиями, положителен; поток, образованный входящими линиями – отрицателен. Следовательно, полный поток сквозь такую поверхность равен нулю.

6. Если поток рассчитывается через *замкнутую* поверхность, то записывается так:

$$N = \oint_S D_n dS. \quad (1.10.4)$$

Кружок у знака интеграла означает, что суммирование ведётся по всем элементам поверхности S .

7. Теперь можно дать окончательную формулировку теоремы Гаусса и её математическую запись:

Поток вектора индукции электростатического (и только электростатического!) поля через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$N = \oint_S D_n dS = q, \quad (1.10.5)$$

где q – *полный свободный* заряд, находящийся в объёме, ограниченном поверхностью S .

8. Как видно из формулы (1.10.5), единицей потока индукции в системе СИ является *кулон*.

Кулон – это полный поток вектора \vec{D} , проходящий через произвольную замкнутую поверхность, если внутри её сосредоточен свободный заряд в 1 кулон.

1.11. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЁТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1. Как уже отмечалось, теорема Гаусса облегчает математическое решение задачи расчёта полей, т.е. нахождение характеристик \vec{E} и \vec{D} . Заметим, однако что она действительно облегчает эту задачу только в том случае, если:

а) электрическое поле обладает *симметрией*,

б) вспомогательная замкнутая поверхность выбрана *правильно* (форма поверхности должна быть такова, чтобы её элементы dS были либо *параллельны*, либо *перпендикулярны* линиям поля. Численное значение индукции на всех площадках, перпендикулярных полю, должно быть *одинаковым*. Последнее достигается выбором поверхности, *симметричной* относительно заряда, попадающего внутрь поверхности).

2. Расчёт индукции и напряжённости поля на основе теоремы Гаусса проводится по следующей схеме.

1) В зависимости от формы поля выбирается *симметричная замкнутая поверхность*, причем так, чтобы точка, в которой рассчитывается \vec{D} , принадлежала этой поверхности.

2) Вычисляется *поток* индукции через эту поверхность (заметим, что в основе вычисления лежит только *определение* потока).

3) Определяется *величина заряда*, попавшего внутрь выбранной поверхности.

4) В соответствии с теоремой Гаусса найденный *поток приравнивается заряду*, попавшему внутрь поверхности.

5) Составленное уравнение решается относительно D .

6) Разделив найденное значение индукции на произведение $\epsilon\epsilon_0$, находят напряжённость поля: $E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0}$.

3. Рассмотрим ряд примеров.

1) *Поле сферы, равномерно заряженной по поверхности* (радиус сферы r_0 , заряд q).

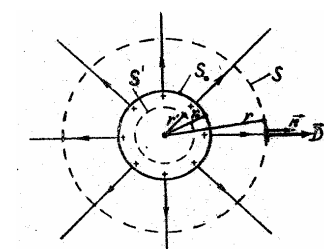


Рис. 1.18

Электрическое поле равномерно заряженной сферы симметрично относительно её центра; значит, геометрическое место точек, в которых численное значение индукции одинаково, представляет собой тоже сферу, центр которой совпадает с центром заряженной сферы. Поэтому в качестве вспомогательной поверхности следует выбрать сферу.

Найдём поток, пронизывающий мысленную сферу радиуса $r > r_0$ (рис. 1.18). Во всех точках этой сферы вектор \vec{D} *перпендикулярен* к её поверхности. Полный поток N через неё равен

$$N = DS = D4\pi r^2, \quad (1.11.1)$$

так как площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$. Внутри сферы попадает *весь* заряд q , создающий поле. По теореме Гаусса этот же поток N равен

$$N = q. \quad (1.11.2)$$

Приравняв правые части выражений (1.11.1) и (1.11.2), получим

$$D4\pi r^2 = q.$$

Откуда

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (1.11.3)$$

Разделив D на $\epsilon_0\epsilon$, получим выражение для напряжённости:

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (1.11.4)$$

Напряжённость поля в точках на поверхности самой сферы ($r = r_0$) равна

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0^2}. \quad (1.11.5)$$

Формулы (1.11.4) и (1.11.5) в точности совпадают с формулой поля *точечного* заряда.

Электрическое поле равномерно заряженной сферы во внешнем пространстве таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре этой сферы.

Поток индукции через вспомогательную сферу S' радиуса r' , меньшего радиуса заряженной сферы, равен нулю, так как внутри этой сферы нет зарядов: все они, по условию задачи, распределены по поверхности сферы S_0 :

$$N = DS' = 0.$$

Из этого соотношения следует, что во всех точках поверхности S' индукция D равна нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу: *внутри сферы, равномерно заряженной по поверхности, индукция и напряжённость равны нулю.*

$$\begin{aligned} D_{\text{внутри}} &= 0, \\ E_{\text{внутри}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.11.6)$$

Позднее (п. 1.26) мы выясним, что электрическое поле отсутствует внутри любого заряженного проводника, если только заряды, сосредоточенные в нем, находятся в *равновесии*.

На рис. 1.19 изображена зависимость напряжённости E от расстояния r до центра заряженной сферы. При переходе через поверхность сферы напряжённость поля меняется скачком от нуля до $\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$.

2) Поле безграничной равномерно заряженной плоскости.

Пусть имеется бесконечно протяжённая плоскость с поверхностной плотностью зарядов σ_+ .

Электрическое поле такой плоскости *симметрично* относительно её поверхности. Вследствие симметрии линии вектора \vec{D} идут в обе стороны от плоскости *перпендикулярно к ней*. Следовательно, в качестве замкнутой вспомогательной поверхности можно выбрать *прямой цилиндр*, образующие которого параллельны линиям поля. Можно выбрать также прямой параллелепипед или прямую призму.

Пусть вспомогательной поверхностью будет прямой цилиндр с площадью основания S (рис. 1.20).

Полный поток, пронизывающий этот цилиндр, складывается из потоков через торцы:

$$N = DS + DS = 2DS$$

(поток через боковую поверхность равен нулю, так как образующие цилиндра параллельны вектору \vec{D} , поэтому $\cos(\vec{D}, \vec{n}) = 0$).

Внутри цилиндра оказывается заряд $q = \sigma S$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma S$. Следовательно $2DS = \sigma S$, откуда

$$D = \frac{\sigma}{2}; \quad (1.11.7)$$

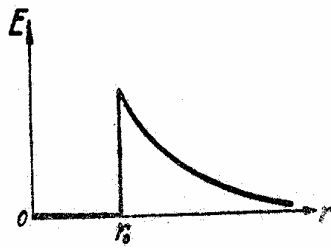


Рис. 1.19

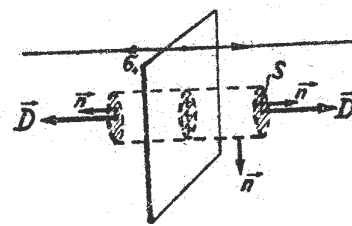


Рис. 1.20

тогда в соответствии с (1.5.6) имеем

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}. \quad (1.11.8)$$

3) Поле двух параллельных бесконечно протяжённых разноимённо заряженных плоскостей (рис. 1.21).

Пусть поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку:

$$|\sigma_+| = |\sigma_-|.$$

Результирующее поле, создаваемое обеими плоскостями, найдём, основываясь на принципе суперпозиции.

Положительно заряженная плоскость создаёт в окружающем пространстве однородное поле с напряжённостью

$$E_+ = \frac{|\sigma_+|}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

В свою очередь, отрицательно заряженная плоскость создаёт поле с напряжённостью $E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0\epsilon}$.

Так как поверхностные плотности σ_+ и σ_- численно равны, то равны и численные значения напряжённостей \vec{E}_+ и \vec{E}_- , т.е. $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$.

В пространстве между плоскостями оба поля имеют одинаковое направление (рис. 1.21), поэтому результирующая напряжённость здесь равна *сумме напряжённостей* \vec{E}_+ и \vec{E}_- , создаваемых плоскостями:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{|\sigma_+|}{2\epsilon_0\epsilon} + \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}, \quad (1.11.9)$$

где σ – абсолютная величина поверхностной плотности зарядов любой из плоскостей.

В пространстве *за* плоскостями оба поля имеют *противоположное направление*, поэтому при наложении они взаимно скомпенсируют друг друга. Результирующая напряжённость здесь равна нулю:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0. \quad (1.11.10)$$

Таким образом, поле отлично от нуля только в пространстве между плоскостями. На рисунке 1.22 изображен ход напряжённости поля двух плоскостей.

4) *Поле бесконечно длинного цилиндра, равномерно заряженного по поверхности* (радиус цилиндра r_0 , линейная плотность зарядов τ).

Электрическое поле бесконечно протяжённого равномерно заряженного цилиндра *симметрично* от-

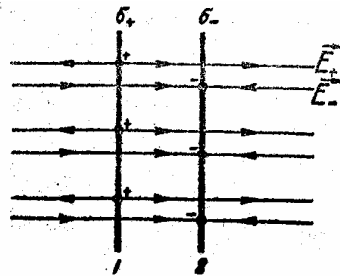


Рис. 1.21

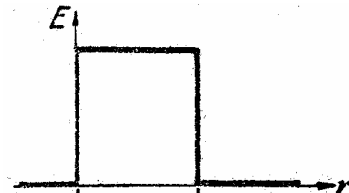


Рис. 1.22

носительно оси цилиндра. Линии индукции представляют собой радиальные прямые, перпендикулярные к поверхности цилиндра. Геометрическое место точек, в которых величина \vec{D} одинакова, представляют собой цилиндр. Следовательно, в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр.

Размеры вспомогательного цилиндра: высота – h , радиус оснований – $r > r_0$, ось совпадает с осью заряженного цилиндра (рис. 1.23). Полный поток вектора индукции через этот цилиндр складывается из потока через *боковую поверхность*:

$$N = D2\pi rh$$

(потоки через основания цилиндра равны нулю, так как во всех точках этих оснований $\vec{D} \perp \vec{n}$ и $\cos(\vec{D}, \vec{n}) = 0$). Вспомогательный цилиндр отсекает заряд $q = \sigma 2\pi r_0 h$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma 2\pi r_0 h$.

Приравнявая выражения для N , получим, $D2\pi rh = \sigma 2\pi r_0 h$,

откуда
$$D = \frac{\sigma r_0}{r} \quad (1.11.11)$$

Для E получается выражение:

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 \epsilon r}. \quad (1.11.12)$$

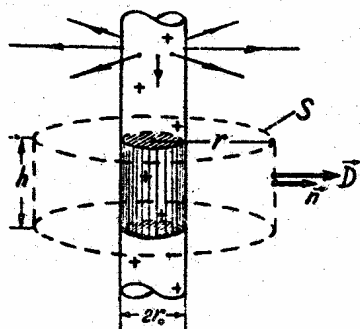


Рис. 1.23

Напряжённость поля заряженного цилиндра во внешнем пространстве изменяется *обратно пропорционально расстоянию* от оси цилиндра.

В заключение ещё раз подчеркнем, что теорема Гаусса позволяет рассчитывать электрическое поле только тогда, когда известна *симметрия поля*, когда заранее известно *направление линий* поля, когда есть возможность выделить мысленную поверхность, во всех точках которой численное значение вектора \vec{D} *одинаково*. Короче говоря, универсального практического применения эта теорема не имеет.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется потоком вектора индукции? Какая это величина – векторная или скалярная?
2. Сформулируйте и докажите теорему Гаусса.
3. Какова методика расчёта напряженности электростатического поля на основе теоремы Гаусса?
4. Рассчитайте напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, двумя разноименно заряженными плоскостями, равномерно заряженным бесконечным цилиндром.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Изучая механику и молекулярную физику, мы не раз обращали внимание на то, что при решении целого ряда теоретических и прикладных задач физики можно не вдаваться в вопросы *строения* изучаемого объекта, а изучать только *изменение его энергетического состояния*. Энергетическое описание допустимо и при изучении свойств электростатического поля.

1.12. РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

1. В механике было установлено, что силы любого *потенциального поля консервативны*.

Напомним о том, что сила называется консервативной, если совершаемая ею работа *не зависит от формы пути*.

Выясним, являются ли силы электростатического поля консервативными.

2. Пусть поле создано неподвижным точечным зарядом q . В поле этого заряда по *произвольной* траектории перемещается другой точечный заряд q' (для определённости будем считать, что оба заряда *положительны*).

Вычислим работу, совершаемую силами поля при перемещении заряда q' из произвольной точки 1 в точку 2 (положение точек 1 и 2 относительно заряда, создающего поле, определяется соответственно радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – рис. 1.24).

Так как величина и направление силы, действующей на заряд q' , при его перемещении *изменяются*, то расчёт работы на пути S_{12} сведётся к алгебраическому суммированию элементарных работ, совершаемых на всех бесконечно малых перемещениях между точками 1 и 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA.$$

Элементарная работа, совершаемая на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}'$, равна

$$dA = F dr' \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения.

Силу F найдём по закону Кулона (так как оба заряда – и создающий поле, и перемещаемый – точечные):

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Произведение $dr' \cos \alpha = dr$ есть проекция элементарного перемещения $d\vec{r}'$ на направление действия силы \vec{F} . Величина dr – *алгебраическая*. Она определяет *приращение модуля* радиус-вектора \vec{r} , т.е.

$$dr = |\vec{r} + d\vec{r}'| - |\vec{r}|.$$

Итак, элементарная работа равна

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r^2}. \quad (1.12.1)$$

Работа на участке 1–2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}. \quad (1.12.2)$$

Мы видим, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, зависит от величины заряда, создающего поле (q), и перемещаемого заряда q' , от электрических свойств среды, в которой происходит перемещение (ϵ), от положения начальных и конечных точек пути (r_1 и r_2), но *не зависит от формы пути* (в выражении (1.12.2) отсутствуют величины, характеризующие форму пути, например, кривизна траектории). Если бы перемещение из точки 1 в точку 2 осуществлялось по другому пути (на рис. 1.24 этот путь изображён пунктиром), то и в этом случае величина работы определялась бы соотношением (1.12.2).

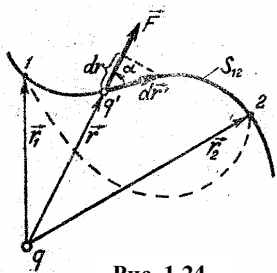


Рис. 1.24

3. Утверждение, что работа мы пути, справедливо не только справедливо для электрических *системой зарядов*. Этот вывод суперпозиции полей.

В самом деле, зарядов (и сосредоточенных, и точечных зарядов, образующих

Работа перемещения заряда в алгебраической сумме работ перемещения в поле каждого из зарядов системы. Так как работа перемещения в каждом из полей не зависит от форм пути, то она не зависит от формы пути и для суммарного поля.

4. Проиллюстрируем сказанное ещё одним расчётом.

Пусть поле создано равномерно заряженной бесконечной плоскостью (заряды на плоскости распределены непрерывно с поверхностной плотностью σ_+). Положительный точечный заряд q' перемещается в этом поле по произвольной криволинейной траектории (рис. 1.25). Найдём работу, которую совершают электростатические силы при перемещении заряда из точки 1 в точку 2. В начальном положении (1) перемещаемый заряд отстоит от плоскости на расстоянии r_1 , в конечном (2) – на расстоянии r_2 . Поле, созданное равномерно заряженной плоскостью, *однородно*, но так как переход заряда из точки 1 в точку 2 совершается по *криволинейному* пути, нам снова придётся находить сначала элементарную работу, а затем интегрировать.

Элементарная работа равна $dA = F dr' \cos \alpha$.

Силу, действующую на перемещаемый заряд, в рассматриваемом случае вычислять по формуле Кулона *нельзя* (так как заряд, создающий поле, *протяжённый*). Её можно выразить через напряжённость поля: $F = q'E$. Напряжённость, создаваемая равномерно заряженной плоскостью, численно равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}$$

Из чертежа видно, что $dr' \cos \alpha = dr$. Таким образом, элементарная работа равна

$$dA = \frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} dr. \quad (1.12.3)$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда из точки 1 в точку 2

$$A_2 = \int_1^2 dA = \frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r_2 - \frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r_1 = \left(\frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r_1 \right) - \left(-\frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r_2 \right). \quad (1.12.4)$$

Мы снова убеждаемся в том, что работа, совершаемая электростатическими силами, зависит от *положения* начальной и конечной точек пути, но не зависит от формы пути.

Так как работа электростатических сил не зависит от формы пути, можно заключить, что электростатические силы *консервативны*, а их материальный носитель – электростатическое поле – *потенциально*.

Независимость работы сил электростатического поля от формы пути и есть признак его потенциальности.

5. Условие потенциальности электростатического поля можно сформулировать иначе, введя понятие о *циркуляции вектора напряжённости (или индукции)*.

Легко показать, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда по любому замкнутому пути L , тождественно равна нулю: $A_L \equiv 0$.

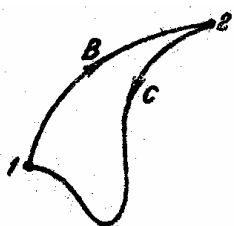


Рис. 1.26

В самом деле, если заряд перемещается из точки 1 в точку 2 по одному пути, например 1B2 (рис. 1.26), а затем снова возвращается в точку 1, но уже по другому пути 2C1, то согласно (1.12.2) или (1.12.4) работы, совершаемые при этом на участке 1B2 и 2C1, будут равны по величине, но противоположны по знаку:

$$A_{B2} = -A_{2C1}.$$

Отсюда следует, что полная работа, совершаемая при перемещении заряда по замкнутому пути, равна нулю:

$$A_L = A_{B2C1} = A_{B2} + A_{2C1} = 0.$$

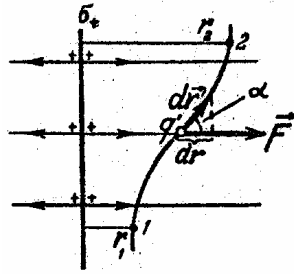


Рис. 1.25

электростатических сил не зависит от формы поля точечного заряда. Оно полей, созданных любой *статической* непосредственно вытекает из принципа

результатирующее поле, созданное системой распределённых), равно сумме полей систему.

результатирующем поле равна

Эту работу можно выразить обычным образом – через сумму всех элементарных работ:

$$A = \oint_L dA,$$

где кружок у знака интеграла означает, что интегрирование производится по всем элементам выбранного замкнутого контура L .

Элементарная работа dA равна

$$dA = Fdl \cos \alpha = qEdl \cos \alpha = qE_l dl,$$

так как $F = qE$ (q – перемещаемый заряд, E – напряжённость поля), а $E \cos \alpha = E_l$, (E_l – проекция вектора на направление перемещения dl).

$$\text{Итак, } A = \oint_L dA = \oint_L qE_l dl = q \oint_L E_l dl = 0.$$

Сократив на q ($q \neq 0$), окончательно получим

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (1.12.5)$$

Интеграл (1.12.5) численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного заряда по замкнутому пути L .

Этот интеграл называется *циркуляцией вектора напряжённости*.

Таким образом, *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю*.

Выражение (1.12.5) является условием потенциальности поля в *интегральной форме*.

1.13. СВЯЗЬ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЗАРЯДА

1. В механике было установлено, что работа, совершаемая консервативными силами, однозначно связана с некоторой *функцией состояния*, зависящей от *положения* взаимодействующих тел и характеризующей интенсивность этого взаимодействия. Эта функция была названа *потенциальной энергией*.

Было показано, что работа консервативных сил, действующих на тело, равна *убыли* потенциальной энергии тела:

$$dA = -dW_n, \quad (1.13.1)$$

если перемещение *бесконечно мало*, и

$$A_2 = -\Delta W_n, \quad (1.13.2)$$

если перемещение *конечно*. Обратим внимание на обозначения:

$$\Delta W_n = W_{n2} - W_{n1} \text{ – приращение величины } W_n,$$

$$-\Delta W_n = W_{n1} - W_{n2} \text{ – убыль величины } W_n.$$

И приращение (ΔW_n), и убыль ($-\Delta W_n$) – величины *алгебраические*.

2. Вычисляя *работу электростатических сил*, мы обнаружили, что она равна *разности* двух значений некоторой функции, зависящей от взаимного расположения зарядов – перемещаемого и создающего поле, причем вид этой функции и разность её значений не зависят от того, каким способом, по какому пути заряд переходит из начального положения в конечное.

Это даёт основание утверждать, что электрический заряд, помещённый в электростатическом поле, *обладает потенциальной энергией*, зависящей от положения заряда, и что её убыль при изменении положения заряда равна работе сил поля, действующих на заряд. Следовательно, полученные нами выражения для работы электростатических сил (1.12.2) и (1.12.4) следует рассматривать как разность двух значений потенциальной энергии, которой обладает перемещаемый заряд в начальном и конечном состояниях:

$$A_2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} = W_{n1} - W_{n2}, \quad (1.13.3)$$

$$A_2 = \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_1} \right) - \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \right) = W_{n1} - W_{n2}. \quad (1.13.4)$$

3. Формулы (1.13.3) и (1.13.4) позволяют найти лишь *изменение* потенциальной энергии заряда, но не её абсолютное значение. Иначе говоря, как и в механике, потенциальная энергия заряда в электростатике определяется не однозначно, а с *точностью до произвольной постоянной С*. Любое из слагаемых W_n в выражениях (1.13.3) и (1.13.4) должно быть представлено в виде

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C_1, \quad (1.13.5)$$

$$W_n = -\frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r + C_2, \quad (1.13.6)$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

Постоянные неопределённого интегрирования C_1 и C_2 зависят от начала отсчёта потенциальной энергии, т.е. от выбора точки (или геометрического места точек) поля, в которых потенциальная энергия заряда условно полагается *равной нулю* (эта точка или геометрическое место точек иногда называют *нулевым уровнем*). Поэтому правильнее говорить не вообще о потенциальной энергии, а о потенциальной энергии *относительно* такой-то точки, такого-то уровня.

4. Наличие произвольной постоянной в выражении потенциальной энергии заряда не играет существенной роли, ибо мы всегда имеем дело не с самой величиной, а с её *изменениями*. При нахождении разности двух значений энергии эта постоянная исключается:

$$W_{n1} - W_{n2} = \left(\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} + C \right) - \left(\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} + C \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}.$$

5. Если все-таки интересуются величиной потенциальной энергии (хотя бы условной величиной), то необходимо договориться, какое значение следует приписать постоянной C .

Найдём постоянные C_1 и C_2 в выражениях для потенциальной энергии (1.13.5) и (1.13.6). Определение постоянной C (или выбор нулевого уровня W_n) называется нормировкой констант, нормировкой потенциальной энергии.

Нулевой уровень обычно выбирают таким образом, чтобы константа C обратилась в нуль (хотя, вообще говоря, необязательно).

В случае поля точечного заряда будем считать потенциальную энергию заряда равной нулю, когда он удалён в *бесконечность*.

Подставив в (1.13.5) $r = \infty$ и $W_{n\infty} = 0$, найдём, что $C = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда q' , находящегося на расстоянии r от заряда q , создающего поле, равна

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.13.7)$$

Полученное выражение определяет потенциальную энергию заряда относительно *бесконечности*. С равным успехом мы могли бы отсчитать её от другого начала, но тогда $C_1 \neq 0$ и численное значение энергии будет *другим*.

В случае поля заряженной плоскости нулевой уровень потенциальной энергии выбирать в бесконечности бессмысленно, ибо при таком выборе постоянная $C_2 = \infty$. Будем считать потенциальную энергию заряда в этом случае равной нулю, когда $r = 0$ (r – кратчайшее расстояние от заряда q' до плоскости). Подставив в (1.13.6) $r = 0$ и $W_n = 0$, получим $C_2 = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда, находящегося на расстоянии r от положительно заряженной плоскости, равна

$$W_n = -\frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r. \quad (1.13.8)$$

6. Потенциальная энергия заряда может быть и *положительной* и *отрицательной*.

Если заряд переносится из данной точки на нулевой уровень, то работа, совершаемая силами поля, равна

$$A_0 = W_{n1} - 0 = W_{n1}. \quad (1.13.9)$$

Из этой формулы видно, что потенциальная энергия заряда *отрицательна*, если при переносе его из *данной* точки на *нулевой* уровень электростатические силы совершают *отрицательную работу*, и наоборот, соответственно.

7. Формулы (1.13.7) и (1.13.8) характеризуют, в сущности, энергию *системы* зарядов: заряда q' и заряда, создающего поле. Поэтому величину W_n правильно было бы назвать *взаимной потенциальной энергией этих зарядов*.

8. Ещё раз обратимся к выражениям для потенциальной энергии (1.13.7) и (1.13.8):

$$W_n = +\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}; \quad W_n = -\frac{q'\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} r.$$

Знак «+» в первой формуле и знак «-», во второй, получены в предположении, что заряды qq' и поверхностная плоскость σ *положительны*. Не составляет труда показать, что если бы заряд q' был *отрицательным*, то знаки в обеих формулах сменились бы на *противоположные*. Иначе говоря, знак потенциальной энергии будет автоматически учтён, если под qq' и σ в этих формулах понимать *алгебраические* величины.

Если произведение зарядов в первой формуле *положительно* (заряды *одноименные*, $qq' > 0$), то взаимная потенциальная энергия этих зарядов *положительна*, если $qq' < 0$, то энергия отрицательна.

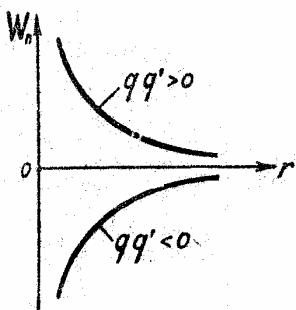


Рис. 1.27

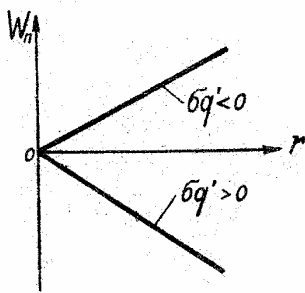


Рис. 1.28

Для случая поля заряженной плоскости энергия положительна, если $q'\sigma < 0$, и отрицательна, если $q'\sigma > 0$ (так как в формулу входит знак *минус*). Графики потенциальной энергии, соответствующие (1.13.7) и (1.13.8), приведены на рис. 1.27 и 1.28.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Докажите, что силы электростатического поля являются консервативными.
2. Сформулируйте условие потенциальности силового поля.
3. Каков физический смысл циркуляции вектора напряжённости электростатического поля?
4. Как связана работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, с потенциальной энергией этого заряда?
5. Как выражается потенциальная энергия точечного заряда, находящегося в поле другого точечного заряда, в системе СИ?
6. Изобразите графически взаимную потенциальную энергию одноименных и разноименных точечных зарядов.

1.14. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Будем изучать *энергетическое состояние* электростатического поля. Для этого вновь воспользуемся *пробным зарядом*.

Согласно (1.13.7) и (1.13.8) потенциальная энергия заряда, внесённого в электростатическое поле, зависит от:

- 1) положения точки, в которую помещён пробный заряд;
- 2) свойств поля в рассматриваемой точке;
- 3) величины заряда.

Разные по величине пробные заряды q_+, q'_+, q''_+, \dots обладают в одной и той же точке поля разными потенциальными энергиями W_n, W'_n, W''_n, \dots .

Разделим потенциальную энергию одного из зарядов на величину этого заряда, например, W_n на q_+ : $\frac{W_n}{q_+}$.

Величина, численно равная этому соотношению, показывает, какова *была бы* потенциальная энергия *единичного* пробного заряда, если бы мы поместили его в данную точку (в действительности этого делать *нельзя*: такой большой заряд необычайно исказил бы исследуемое поле!).

Составленное отношение зависит от величин, характеризующих свойства поля в рассматриваемой точке, но не зависит от величины пробного заряда. Следовательно, это отношение может служить характеристикой поля в данной точке. Величина, численно равная $\frac{W_n}{q_+}$, называется *электрическим потенциалом* или просто *потенциалом* данной точки поля (понятие потенциала впервые было введено в 1777 г.

Ж.Л. Лагранжем как добавление к закону всемирного тяготения, применительно к электрическому полю это понятие введено в 1811 г. С. Пуассоном).

Для обозначения потенциала используется буква ϕ , иногда U .

Потенциал данной точки электростатического поля – скалярная физическая величина, характеризующая энергетическое состояние поля в рассматриваемой точке и численно равная потенциальной энергии единичного точечного положительного заряда, помещённого в данную точку.

$$\varphi = \frac{W_n}{q_+} \quad (1.14.1)$$

2. Из соотношения (1.14.1) вытекает, что потенциальная энергия *любого* точечного заряда q (не обязательно положительного), помещённого в точку поля с потенциалом φ , равна

$$W_n = q\varphi \quad (1.14.2)$$

Как известно, работа сил поля равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда

$$A_2 = W_{n1} - W_{n2} \quad (1.14.3)$$

Но, согласно (1.14.2),

$$W_{n1} = q\varphi_1, \quad W_{n2} = q\varphi_2,$$

следовательно,

$$A_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.14.4)$$

Важный практический результат: *работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.*

3. Как и численное значение потенциальной энергии, численное значение потенциала определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора *нулевого уровня*.

Нулевой уровень потенциала, начало отсчёта φ – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю: $\varphi_0 = 0$, где φ_0 – потенциал нулевого уровня.

Нулевой уровень потенциала может быть выбран в *бесконечности* (так поступают в случае полей, созданных пространственно ограниченными зарядами, и это оправдано, так как поле таких зарядов *исчезает* в бесконечности). Нулевой уровень может быть выбран на *поверхности Земли* и, вообще говоря, где угодно. Если заряд q из точки с потенциалом φ_1 , перемещается в точку нулевого уровня, то работа сил поля будет равна

$$A_{10} = q_+(\varphi_1 - 0_2) = q_+\varphi_1 \quad (1.14.5)$$

Следовательно, потенциал данной точки поля *численно равен работе*, которую совершают силы поля при перемещении единицы положительного заряда *из данной точки в точку нулевого уровня*.

Говоря о потенциале какой-либо точки, следует обязательно подчеркивать, относительно какого уровня определён этот потенциал. В противном случае говорить о потенциале бессмысленно.

Заметим, что определение потенциала при помощи понятия *потенциальной энергии* следует предпочесть определению его через работу. По своему смыслу потенциал и потенциальная энергия характеризуют *состояние* поля и заряда, в то время как работа – процесс *изменения этого состояния*.

4. *Потенциал* – величина, характеризующая *каждую* точку электростатического поля *независимо* от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5. *Потенциал* – величина алгебраическая. Он может быть и положительным, и отрицательным. Из формулы $\varphi_1 = \frac{A_{10}}{q_+}$ ясно, что потенциал какой-либо точки поля *отрицателен*, если при перемещении *положительного* заряда из данной точки на поверхность нулевого уровня потенциала силы поля совершают *отрицательную* работу. Легко понять, что если поле создано отрицательным зарядом, то потенциал любой точки такого поля *отрицательный*, если же поле создано положительным зарядом, то потенциалы точек этого поля – *положительны*.

6. Еще раз обратимся к формуле $W_n = q\varphi$.

Из формулы видно, что знак потенциальной энергии *положительного* заряда *совпадает*, а *отрицательного* – *противоположен* знаку потенциала той точки поля, в которую заряд помещен (с вопросом о знаках потенциала и потенциальной энергии нам придётся столкнуться при изучении энергетических состояний электронов в металлах).

На рисунке 1.29, *а* и *б* пунктирной кривой изображён ход потенциала φ , созданного *положительным* точечным зарядом. Сплошной кривой изображена потенциальная энергия заряда q , внесённого в поле этого заряда: график *а*) соответствует $q > 0$; *б*) $q < 0$.

7. Если поле создано *системой* точечных или протяженных зарядов, то потенциал результирующего поля в данной точке равен *алгебраической сумме* потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности (*принцип суперпозиции*):

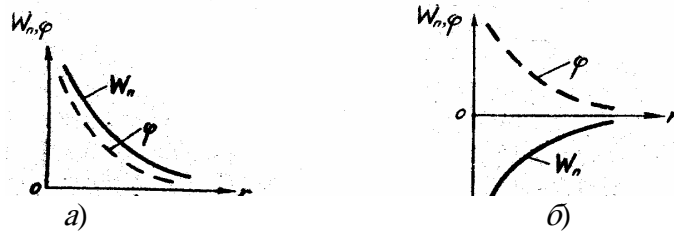


Рис. 1.29

а) в случае точечных зарядов

$$\phi = \sum_{i=0}^n \phi_i, \quad (1.14.6)$$

б) в случае непрерывно распределённых зарядов

$$\phi = \int_q d\phi. \quad (1.14.7)$$

8. Электрическое поле графически может быть изображено не только *линиями* вектора напряжённости (или индукции), но и поверхностями равного потенциала – *эквипотенциальными поверхностями*. Как следует из самого названия, *эквипотенциальная поверхность* – это мысленная поверхность, все точки которой имеют *одинаковый* потенциал. Работа при перемещении заряда между двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_2 = q(\phi_1 - \phi_2) = 0, \text{ так как } \phi_1 = \phi_2.$$

Легко показать, что вектор \vec{E} , а, следовательно, и линии поля *перпендикулярны* к эквипотенциальным поверхностям.

Выразим элементарную работу при перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности через напряжённость поля, заряд и перемещение:

$$dA = qE dr \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением напряжённости \vec{E} и направлением перемещения (т.е. между вектором \vec{E} и эквипотенциальной поверхностью).

Но $dA = 0$, следовательно,

$$qE dr \cos \alpha = 0, \quad E \neq 0, \quad q \neq 0, \quad dr \neq 0.$$

Значит $\cos \alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разность потенциалов между любыми двумя соседними поверхностями была одна и та же.

На рисунке 1.30 изображен вид линий напряжённости (сплошные линии) и эквипотенциальных поверхностей (пунктиры) поля бесконечно протяжённой равномерно заряженной плоскости.

9. Соотношение (1.14.4) может быть использовано в качестве *определяющего уравнения* при установлении единиц измерения потенциала и разности потенциалов.

За единицу потенциала в системе СИ (это единица называется *вольт*) принимается потенциал такой точки поля, в котором заряд в 1 кулон обладает энергией в 1 джоуль:

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}.$$

Часто используется единица энергии, называемая *электронвольт* (эВ). *Электронвольт* – это энергия, которую приобретает частица, обладающая элементарным зарядом ($1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К}$), при прохождении разности потенциалов

В
1 вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

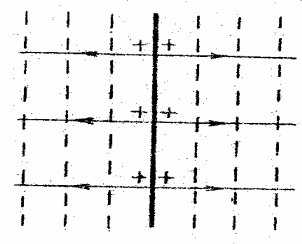


Рис. 1.30

10. Найдем потенциал поля точечного заряда. Для этого подставим в (1.14.1) значение потенциальной энергии точечного заряда q_+ (пробный заряд), находящегося в поле другого точечного заряда q (1.13.7):

$$\varphi = \frac{W_n}{q_+} = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon_0\epsilon r q_+} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.14.8)$$

Здесь r – расстояние от заряда, создающего поле, до данной точки.

1.15. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЁННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Электростатическое поле в каждой своей точке может быть описано либо с помощью векторной величины \vec{E} (*силовое* описание), либо с помощью скалярной величины φ (*энергетическое* описание). Несомненно, что между этими величинами существует вполне определенная связь. Установим эту связь.

2. Рассмотрим в *неоднородном* электрическом поле две произвольные бесконечно близкие точки 1 и 2, лежащие на оси x .

Пусть разность потенциалов между этими точками равна $d\varphi$, а расстояние dx (рис. 1.31).

Работа сил поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2 может быть выражена, с одной стороны, через напряжённость и перемещение:

$$dA = qE dx \cos \alpha = qE_x dx, \quad (1.15.1)$$

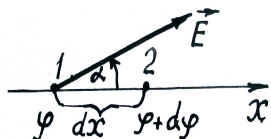


Рис. 1.31

где $E \cos \alpha = E_x$ – проекция вектора \vec{E} на направление x , с другой стороны, через убыль потенциальной энергии заряда:

$$dA = -dW_n = -q d\varphi. \quad (1.15.2)$$

Приравнивая правые части (1.15.1) и (1.15.2) и сокращая на q , получим

$E_x dx = -d\varphi$, откуда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (1.15.3)$$

Производная, стоящая в правой части этого равенства, выражает *быстроту изменения* потенциала вдоль оси x . Мы видим, что *проекция вектора напряжённости на ось x равна скорости изменения потенциала вдоль этой оси, взятой с обратным знаком.*

Так как потенциал поля может изменяться не только в направлении x , но и любом другом направлении, то правильнее было бы писать частную производную $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

В общем случае потенциал может изменяться в направлении всех трёх координат осей x, y, z . Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.15.4)$$

Как известно, для нахождения вектора по его проекциям необходимо каждую из проекций умножить на единичный вектор соответствующей оси и затем сложить полученные векторы:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad (1.15.5)$$

принимая во внимание (1.15.4):

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.15.6)$$

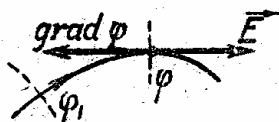


Рис. 1.32

Векторная величина, стоящая в скобках, называется *градиентом потенциала* и обозначается $\text{grad} \varphi$ или $\nabla \varphi$. Таким образом,

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (1.15.7)$$

Вектор напряжённости электростатического поля в каждой точке численно равен градиенту потенциала в этой же точке и противоположен ему по направлению (рис. 1.32).

Градиент потенциала – это вектор, указывающий направление *наиболее быстрого возрастания* потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.

3. Градиент потенциала так же, как и вектор напряжённости, направлен по *касательной* к силовой линии. Следовательно, *вдоль касательных* к линиям поля потенциал изменяется (растёт или убывает) с наибольшей скоростью. Полезно запомнить, что направление вектора \vec{E} в каждой точке поля указывает направление, в котором потенциал с наибольшей быстротой *уменьшается*.

Если r – направление быстрого изменения потенциала, то модуль градиента потенциала равен $\frac{d\phi}{dr}$. Таков же будет и модуль вектора напряжённости:

$$E = \left| \frac{d\phi}{dr} \right|. \quad (1.15.8)$$

Если поле однородно, напряжённость численно равна разности потенциалов, приходящейся на единицу длины линии поля:

$$E = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{r} \right|, \quad (1.15.9)$$

где r – расстояние между эквипотенциальными поверхностями $\phi_1 - \phi_2$, отсчитанное вдоль линии поля.

4. Из (1.15.9) видно, что в системе СИ напряжённость измеряется в «вольтах на метр» (В/м).

Вольт на метр – напряжённость такого однородного поля, потенциал которого изменяется на 1 В при перемещении вдоль силовой линии на расстояние, равное 1 м.

5. Умножим обе части равенства (1.15.7) на q (q – произвольный *точечный* заряд, внесённый в поле):

$$q\vec{E} = q(-\text{grad}\phi),$$

где $q\vec{E} = \vec{F}$ есть сила, действующая на заряд q в точке поля с напряжённостью \vec{E} ; $q\text{grad}\phi = \text{grad}q\phi$ (q – величина постоянная, поэтому её можно внести под знак производной). Под знаком *grad* стоит *потенциальная энергия* заряда: $q\phi = W_n$. Следовательно,

$$\vec{F} = -\text{grad} W_n. \quad (1.15.10)$$

Формула (1.15.10) выражает связь между силой, действующей на заряд, и его потенциальной энергией.

Сила, действующая на точечный заряд в данной точке электростатического поля, равна градиенту его потенциальной энергии в этой же точке, взятому с обратным знаком.

Из формулы (1.15.10) видно, что направление силы, действующей на заряд, и направление быстрого возрастания потенциальной энергии заряда всегда противоположны. Если r – направление быстрого изменения потенциальной энергии, то

$$F = \left| \frac{dW_n}{dr} \right|, \quad (1.15.11)$$

где F и $\left| \frac{dW_n}{dr} \right|$ – модули \vec{F} и $\text{grad} W_n$.

6. Напряжённость поля и силу, действующую на заряд, можно найти из графика потенциала и потенциальной энергии. На рисунке 1.33, *a* изображен график потенциала поля *отрицательного* точечного заряда, на рис. 1.33, *б* – график потенциальной энергии двух одноимённых точечных зарядов.

Легко видеть, что $\frac{d\phi}{dr}$ и $\frac{dW_n}{dr}$ есть *тангенсы* углов наклона *касательных* к графикам $\phi(r)$ и $W_n(r)$ в соответствующих точках:

$$\frac{d\phi}{dr} = \text{tg}\alpha, \quad \frac{dW_n}{dr} = \text{tg}\beta.$$

Но $\frac{d\phi}{dr} = E_r$ и $\frac{dW_n}{dr} = -F_r$ – проекции напряжённости \vec{E} и силы \vec{F} на направление r . Следовательно,

$$-\text{tg}\alpha = \vec{E}_r, \quad -\text{tg}\beta = \vec{F}_r.$$

По *наклону* касательных к графикам $\phi(r)$ и $W_n(r)$ можно судить о величине и направлении (относительно оси r) напряжённости поля и силы, действующей на заряд. Чем *круче* идёт соответствующий график, тем *больше* численное значение силы и напряжённости.

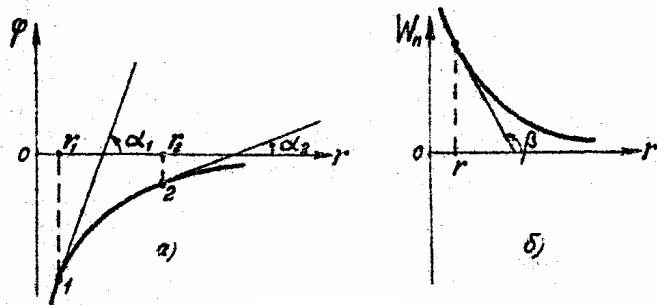


Рис. 1.33

Так, в точке с координатой r_1 (рис. 1.33, а) напряжённость E_1 больше, чем напряжённость E_2 в точке с координатой r_2 (так как касательная в точке r_1 наклонена под большим углом к оси r). Направление \vec{E} противоположно направлению r (угол α – острый, $\text{tg}\alpha > 0$; проекция вектора напряжённости на ось r , равная $E_r = -\text{tg}\alpha$ – отрицательна, следовательно, направления \vec{E} и оси r противоположны).

В случае (рис. 1.33, б) сила \vec{F} совпадает с направлением оси r и уменьшается по величине с увеличением r .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называют потенциалом электростатического поля?
2. Дайте определение единицы измерения потенциала в системе СИ.
3. Как связан потенциал какой либо точки поля с потенциальной энергией точечного заряда, помещённого в эту точку?
4. Запишите формулу для потенциала точечного заряда в системе СИ.
5. Какова связь между напряжённостью и потенциалом в случае неоднородного и однородного поля?
6. Что называется градиентом потенциала?
7. Верно ли утверждение, что направление вектора напряжённости в каждой точке электростатического поля указывает направление наибольшей быстроты падения потенциала? Объясните почему.
8. Как связана сила, действующая в электростатическом поле на точечный заряд, с потенциальной энергией этого заряда?

1.16. РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА И РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. В общем случае расчёт потенциала и разности потенциалов основывается на применении закона Кулона и принципа суперпозиции.

2. Схема расчёта в случае поля, созданного системой *точечных* зарядов, такова. Сначала находят потенциалы, создаваемые в данной точке определёнными зарядами системы (вычисление этих потенциалов требует применения закона Кулона):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}, \dots, \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}, \dots, \quad (1.16.1)$$

где r_1 – расстояние от заряда q_1 до данной точки; r_i – то же от заряда q_i .

Сложив потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ (с учётом их знака), находят потенциал результирующего поля:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}. \quad (1.16.2)$$

3. Если заряд, создающий поле, распределён *непрерывно*, то прибегают к обычному приёму: разбивают этот заряд на малые порции dq , определяют потенциал, создаваемый в данной точке каждым таким зарядом, после чего интегрируют:

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.16.3)$$

4. Найдём потенциал в произвольной точке поля, созданного электрическим диполем (рис. 1.34), причём ограничимся случаем, когда точка наблюдения отстоит от диполя на расстоянии r , значительно превышающем размеры диполя: $r \gg l$ (l – плечо диполя).

Согласно принципу суперпозиции потенциал в точке наблюдения равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых положительным и отрицательным зарядами диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \quad (1.16.4)$$

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}, \quad \varphi_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}, \quad (1.16.5)$$

где q – абсолютная величина каждого из зарядов диполя; r_1 и r_2 – расстояния от отрицательного и положительного зарядов диполя до точки наблюдения.

Выражения для потенциалов φ_+ и φ_- подставим в (1.16.4):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \quad (1.16.6)$$

Так как плечо диполя l значительно меньше расстояния от центра диполя до рассматриваемой точки, то можно приближённо считать, что $r_1 \approx r_2 \approx r$ и $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$.

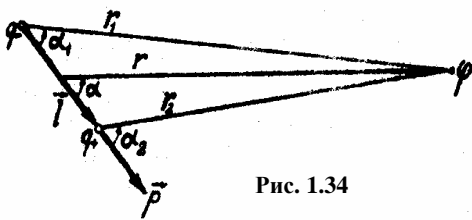


Рис. 1.34

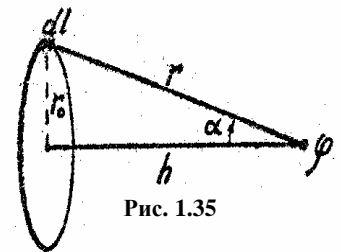


Рис. 1.35

Тогда вместо разности $r_1 - r_2$ можно записать:

$$r_1 - r_2 = l \cos \alpha,$$

а вместо $r_1 r_2$:

$$r_1 r_2 = r^2.$$

Подставив всё это в формулу для суммарного потенциала, получим

$$\varphi = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha. \quad (1.16.7)$$

Произведение ql есть электрический момент диполя.

Окончательная формула, таким образом, имеет вид

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha, \quad (1.16.8)$$

где α – угол между направлением электрического момента диполя и направлением к точке наблюдения.

5. Пусть поле создано равномерно заряженным тонким кольцом радиуса r_0 с линейной плотностью зарядов τ . Найдём потенциал (относительно бесконечности) в точке, лежащей на оси этого кольца на расстоянии h от его центра (рис. 1.35).

Так как заряды распределены непрерывно, то при расчёте результирующего потенциала нам придётся интегрировать. Найдём в точке наблюдения потенциал, созданный зарядом бесконечно малого элемента dl :

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где τdl – заряд, сосредоточенный на элементе dl ; r – расстояние от точки наблюдения до выделенного элемента:

$$r = \sqrt{r_0^2 + h^2}.$$

При интегрировании учтём, что все элементы dl находятся от точки наблюдения на *одинаковых* расстояниях; следовательно, суммировать придётся по l от 0 до $2\pi r_0$:

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon \sqrt{r_0^2 + h^2}} = \frac{\tau r_0}{2\epsilon_0\epsilon \sqrt{r_0^2 + h^2}}. \quad (1.16.9)$$

Потенциал в центре кольца ($h=0$) равен

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (1.16.10)$$

6. При вычислении потенциалов на основе принципа суперпозиции встречаются трудности физического и математического характера. Сложность вычислений с *физической точки зрения* заключается в том, что необходимо знать точное распределение зарядов во всём пространстве. *Математические трудности* – в достаточно громоздком *интегрировании*.

7. *Другой метод* расчёта потенциала и разности потенциалов основан на применении *теоремы Гаусса* и формулы *связи потенциала с напряжённостью*.

При *симметричном* распределении зарядов напряжённость поля оказывается зависящей *только от r* – кратчайшего расстояния от точки наблюдения до соответствующего элемента симметрии (оси, центра и т.д.), причём линия вектора \vec{E} в этом случае *совпадает* с этой радиальной прямой, поэтому численное значение *радиальной* проекции напряжённости E_r совпадает с полной величиной E :

$$|E_r| = E. \quad (1.16.11)$$

Это обстоятельство упрощает расчёты.

Пусть поле создано каким-либо симметричным распределением зарядов, например, равномерно заряженным шаром, длинной нитью, плоскостью и т.д. r – радиальное направление, проведённое через точку наблюдения и *совпадающее* с \vec{E} . Тогда из общего соотношения между напряжённостью и потенциалом имеем

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

откуда убыль потенциала ($-d\varphi$) на бесконечно малом отрезке dr радиальной прямой будет равна

$$-d\varphi = E_r dr. \quad (1.16.12)$$

Разность потенциалов между любыми двумя точками 1 и 2 будет равна интегральной сумме выражений (1.16.12):

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -d\varphi = \int_1^2 E_r dr \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr.$$

В соответствии с (1.16.11) под E_r в этой формуле следует понимать *численное значение* напряжённости, т.е. E :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr. \quad (1.16.13)$$

Зависимость E от r находим, пользуясь теоремой Гаусса.

Такова схема расчёта.

Рассмотрим примеры.

8. Найдём разность потенциалов между двумя *разноименно заряженными бесконечными плоскостями* (полученный вывод потребуется для расчёта ёмкости плоского конденсатора).

Обозначим: φ_1 – потенциал одной плоскости (например, левой), φ_2 – потенциал другой плоскости

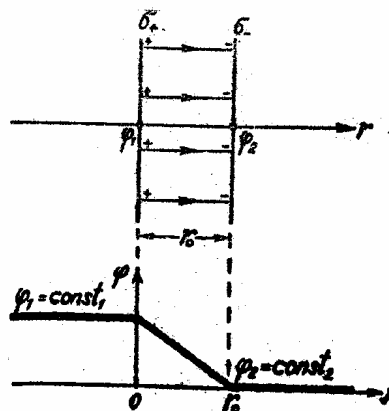


Рис. 1.36

(рис. 1.36). Согласно (1.16.13) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr$. Если поверхностные плотности зарядов обеих плоскостей одинаковы по величине $|\sigma_+| = |\sigma_-|$, то поле в пространстве между плоскостями численно равно $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$.

Если расстояние r отсчитывать от левой плоскости, то нижний предел интегрирования будет равен нулю, а верхний r_0 (r_0 расстояние между плоскостями)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{r_0} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} r_0. \quad (1.16.14)$$

Таким образом, разность потенциалов между двумя бесконечными плоскостями тем больше, чем больше расстояние между ними.

Так как во всем пространстве за плоскостями поле равно нулю ($\vec{E} = 0$), то из связи потенциала с напряжённостью ($-d\varphi = E dr$) следует, что во всех точках *слева* от плоскости (σ_+) потенциал одинаков и равен φ_1 . На том же основании потенциал одинаков и равен φ_2 во всех точках, лежащих *справа* от плоскости (σ_-). График $\varphi = \varphi(r)$ изображен на рис. 1.36.

За начало отсчёта потенциалов условно принята *правая* плоскость. В пространстве между плоскостями происходит *падение* потенциала.

9. Рассчитаем разность потенциалов между двумя *концентрическими сферами* радиусами r_1 и r_2 , равномерно заряженными по поверхности (вывод потребуется для расчёта ёмкости сферического конденсатора).

В соответствии с (1.16.13)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr,$$

где φ_1 – потенциал внутренней сферы; φ_2 – потенциал внешней сферы.

Поле в зазоре между сферами создаётся только теми зарядами, которые сосредоточены на *внутренней сфере* (это вытекает из теоремы Гаусса: достаточно представить замкнутую поверхность, лежащую *между* сферами, чтобы согласиться с этим).

По (1.11.4)
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Интегрировать будем в пределах от r_1 (радиус внутренней сферы) до r_2 (радиус внешней сферы):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}. \quad (1.16.15)$$

Легко убедиться в том, что если заряды сфер одинаковы по величине и противоположны по знаку $|q_+| = |q_-|$, то электрическое поле отлично от нуля только в пространстве *между* сферами. Отсутствие поля внутри малой сферы вытекает из теоремы Гаусса (там нет зарядов).

За пределами внешней сферы суммарное поле равно нулю, так как поля, создаваемые зарядами внутренней и внешних сфер, компенсируют друг друга (эти поля таковы, как если бы заряды сфер были сосредоточены в одном общем центре).

Так как заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку, то в любой точке за пределами внешней сферы они создают напряжённости, равные по величине и противоположные по направлению).

Из связи напряжённости с потенциалом следует, что потенциал всех точек, лежащих внутри меньшей сферы, одинаков и равен φ_1 , потенциал всех точек, лежащих за пределами внешней сферы, также одинаков и равен φ_2 . Между сферами происходит падение потенциала (от внутренней сферы к внешней, если заряд внутренней сферы положителен).

График $\varphi = \varphi(r)$ для этого случая изображён на рис. 1.37.

Потенциал внешней сферы условно принят равным нулю.

10. Найдём разность потенциалов между двумя *равномерно заряженными коаксиальными цилиндрами бесконечной длины*. Пусть r_1 – радиус внутреннего цилиндра; r_2 – радиус внешнего цилиндра.

Поверхностные плотности зарядов обоих цилиндров равны по величине и противоположны по знаку: $|\sigma_+| = |\sigma_-|$.

В соответствии с (1.16.13)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr,$$

где φ_1 – потенциал внутреннего цилиндра; φ_2 – потенциал внешнего цилиндра.

Электрическое поле в пространстве между цилиндрами (1.11.12) создаётся только теми зарядами, которые распределены по внутреннему цилиндру, поэтому

$$E = \frac{\sigma r_1}{\epsilon_0 \epsilon r}.$$

Разность потенциалов между цилиндрами

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1}{\epsilon \epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma r_1}{\epsilon \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.16.16)$$

Если $|\sigma_+| = |\sigma_-|$, то, как и в предыдущем случае, поле отлично от нуля только в зазоре между цилиндрами. Следовательно, только в пространстве между цилиндрами происходит падение потенциала, во

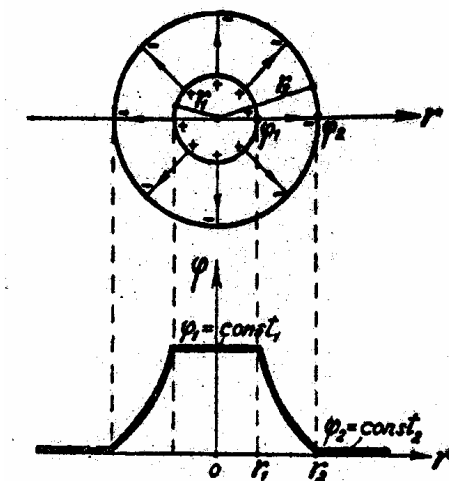


Рис. 1.37

всех точках за пределами внешнего цилиндра потенциал одинаков. Аналогично, потенциал одинаков и внутри малого цилиндра.

11. Обратим внимание на следующую примечательную особенность.

Напряжённость поля в пространстве между двумя концентрическими сферами *не зависит* ни от радиуса, ни от заряда внешней сферы: *она зависит только от заряда внутренней сферы*.

Что же касается разности потенциалов между внутренней и внешней сферами, то она зависит от радиусов обеих сфер и заряда внутренней сферы, но опять-таки не зависит от заряда, сосредоточенного на внешней сфере. Следовательно, внешняя сфера, в принципе, может быть не заряжена: разность потенциалов между сферами от этого не изменится. Для чего же обычно заряжают внешнюю сферу (например, в случае сферического конденсатора), да ещё зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду внутренней сферы? Только для того, чтобы *уничтожить* во внешнем пространстве поле, созданное зарядом внутренней сферы (для чего это необходимо будет объяснено в параграфе 1.29).

То же самое можно сказать и о коаксиальных цилиндрах.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как, в принципе, рассчитывается потенциал поля, созданного системой сосредоточенных зарядов?
2. Рассчитайте разность потенциалов между двумя произвольными точками полей созданных:
 - а) точечным зарядом;

- б) бесконечной равномерной заряженной плоскостью;
- в) бесконечным равномерно заряженным цилиндром.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Тонкий стержень длиной $l = 30$ см (рис. 1.38) несёт равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $q_1 = 10^{-2}$ мкКл. Заряд равноудалён от концов стержня. Определить силу взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение. Выделим на стержне дифференциально малый участок длиной dl , находящийся на нём заряд будет равен $dq = \tau dl$ и его можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_1 и dq равна $dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \tau dl}{r^2}$, где r – расстояние от выделенного элемента до заряда q_1 . Из рисунка 1.38 следует, что

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha},$$

где r_0 – расстояние от заряда q_1 до стержня. С учетом этих замечаний получим $dF = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha$. Так как

dF – вектор, то перед интегрированием разложим его на две составляющие, спроектированные на оси: параллельную длине стержня – dF_2 и перпендикулярную к ней – dF_1 . Из рисунка 1.38 видно, что

$$dF_1 = dF \cos \alpha, \quad dF_2 = dF \sin \alpha.$$

Подставляя значения dF в эти формулы, получим

$$dF_1 = \frac{q_1 \tau \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha; \quad dF_2 = \frac{q_1 \tau \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha.$$

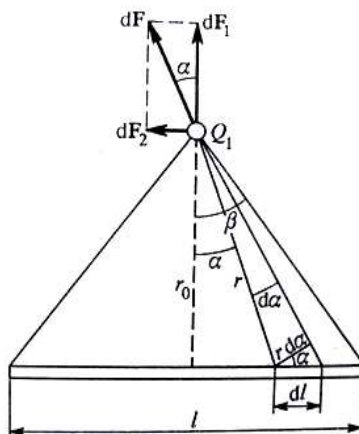


Рис. 1.38

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1 \tau \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos \alpha d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sin \alpha \Big|_{-\beta}^{+\beta},$$

$$F_1 = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} [\sin \beta - \sin(-\beta)] = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} 2 \sin \beta,$$

или

$$F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin \beta.$$

В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения даёт нуль.

Таким образом, сила, действующая на заряд q_1 , равна

$$F = F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin \beta.$$

Из рисунка 1.38 следует, что

$$\sin \beta = \frac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Тогда сила, действующая на заряд q_1 , будет равна

$$F = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$F = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} \cdot \frac{0,3}{\sqrt{4(0,2)^2 + (0,3)^2}} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

Пример 2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 30$ и $q_2 = -10$ нКл. Расстояние между зарядами $d = 20$ см. Определить напряжённость электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15$ см от первого и на расстоянии $r_2 = 10$ см от второго ряда.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей, напряжённость поля в искомой точке будет равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где вектор \vec{E}_1 направлен по силовой линии от положительного заряда q_1 , а вектор \vec{E}_2 также по силовой линии, но к отрицательному заряду q_2 (рис. 1.39). Численное значение напряжённости поля, созданного первым зарядом, равно

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2},$$

а вторым

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

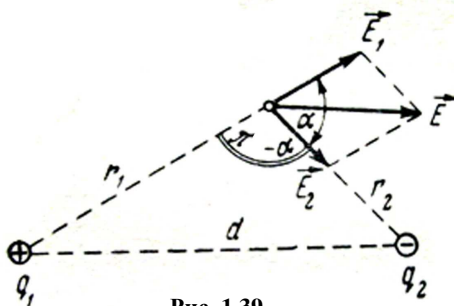


Рис. 1.39

Абсолютное значение вектора E найдём по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , который найдём из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Численное значение $\cos \alpha$ равно $\cos \alpha = \frac{20^2 - 15^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = 0,25$.

С учётом сделанных замечаний получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}.$$

Подставим числовые значения:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(3 \cdot 10^{-8})^2}{0,15^4} + \frac{(10^{-8})^2}{0,1^4} + 2 \frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-8}}{0,15^2 \cdot 0,1^2} \cdot 0,25} =$$

$$= 1,67 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 16,7 \text{ кВ/м}.$$

Пример 3. Положительные заряды $q_1 = 3$ и $q_2 = 0,02$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии 1,5 м друг от друга. Определить работу, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 м.

Решение. Будем считать первый заряд неподвижным, а второй под действием внешних сил перемещается в поле, созданном первым зарядом, приближаясь к нему с расстояния $r_1 = 1,5$ до $r_2 = 1$ м.

Работа A' внешней силы по перемещению заряда q из одной точки поля с потенциалом ϕ_1 в другую, потенциал которой ϕ_2 , равна по абсолютной величине и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками $A' = -A$

Работа сил поля выражается формулой

$$A = q(\phi_1 - \phi_2).$$

Тогда работа внешних сил запишется как

$$A' = -q(\phi_1 - \phi_2) = q(\phi_2 - \phi_1).$$

Потенциалы точек находятся по формулам

$$\phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}; \quad \phi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Учитывая, что переносится заряд q_2 в поле первого заряда, получим

$$A' = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления

$$A' = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1,5} \right) = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = 180 \text{ мкДж}.$$

Пример 4. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределённый по длине заряд $\tau = 0,1$ мкКл/м. Определить потенциал поля в точке, удалённой от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Решение. Поскольку расстояние от стержня до точки, в которой необходимо определить потенциал, соизмеримо с длиной стержня, то заряд, находящийся на стержне, нельзя считать точечным. Поэтому стержень разбиваем на элементарные отрезки dl с зарядами τdl на каждом из них и применяем формулу для определения потенциала точек поля, созданного точечным зарядом,

$$d\phi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние от точки, в которой определяется потенциал, до элемента стержня.

Из рисунка 1.40 следует, что

$$dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}, \text{ тогда } d\phi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha}.$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от α_1 до α_2 , получим

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha}.$$

В силу симметрии расположения точки A относительно концов стержня $\alpha_1 = \alpha_2$ и поэтому полученный интеграл можно заменить на удвоенный с пределами от 0 до α_1 ; следовательно,

$$\varphi = 2 \int_0^{\alpha_1} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

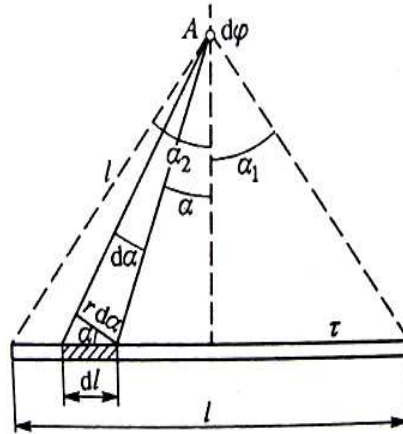


Рис. 1.40

Рассматриваемый интеграл является табличным, т.е.

$$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C,$$

тогда

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Intg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\operatorname{Intg}\pi/3 - \operatorname{Intg}\pi/4) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Intg}\pi/3.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\varphi = \frac{0,1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln 1,73 = 990 \text{ В.}$$

Пример 5. Диполь с электрическим моментом $p = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл·м находится в однородном электрическом поле напряжённостью $E = 3 \cdot 10^4$ В/м. Вектор \vec{p} составляет угол $\alpha_0 = 60^\circ$ с направлением силовых линий поля. Определить произведённую внешними силами работу поворота диполя на угол $\beta = 30^\circ$.

Решение. Из исходного положения (рис. 1.41) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^\circ = \pi/6$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ (рис. 1.41, б), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$ (рис. 1.41, в). В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля и работа внешних сил будет отрицательна. Во втором случае поворот возможен только под действием внешних сил и работа этих сил положительна.

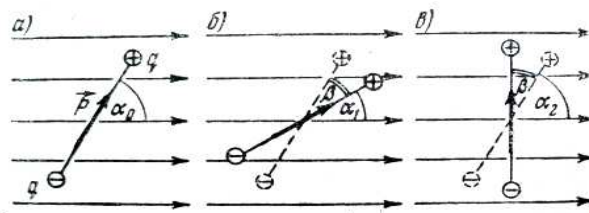


Рис. 1.41

Элементарная работа dA при повороте на угол $d\alpha$ выражается формулой $dA = M d\alpha = h F d\alpha = l \sin\alpha F d\alpha = l q E \sin\alpha d\alpha = p E \sin\alpha d\alpha$.

Полная работа при повороте от угла α_0 до α равна

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} p E \sin\alpha d\alpha = p E \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin\alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим $A = -pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$.

При повороте по часовой стрелке

$$A = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^4 (\cos\pi/3 - \cos\pi/6) = 6 \cdot 10^{-5} (0,5 - 0,86) = -2,19 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

При повороте против часовой стрелки работа внешних сил равна

$$A = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^4 (\cos \pi/3 - \cos \pi/2) = \\ = 6 \cdot 10^5 (0,5 - 0) = 3 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

До сих пор не затрагивался вопрос о том, какое влияние оказывает *вещество на свойства* электрического *поля*.

Заполнение пространства, где существует электрическое поле, веществом, несомненно, приводит к существенным изменениям свойств поля. В свою очередь, не менее существенные изменения претерпевает и само вещество, внесённое в поле.

Рассмотрение вопроса о взаимном влиянии друг на друга вещества и электростатического поля мы начнём с классификации веществ по их электрическим свойствам.

1.17. ПРОВОДНИКИ, ДИЭЛЕКТРИКИ, ПОЛУПРОВОДНИКИ

1. В зависимости от способности проводить электрический ток вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Тела, в которых электрические заряды могут *свободно перемещаться*, называются *проводниками* электричества.* В таких телах есть *свободные* электрические заряды. Эти заряды при наличии поля в проводнике приходят в упорядоченное движение, создавая *электрический ток*. Проводниками являются металлы, электролиты, ионизированные газы, плазма и т.д.

2. *Диэлектрики*** – это тела, в которых может длительное время существовать электростатическое поле. Диэлектрики отличаются от проводников тем, что при не слишком высоких температурах и в отсутствие очень сильных электрических полей они проводят ток в $10^{15} \dots 10^{20}$ раз хуже, чем проводники. Свободных зарядов в них практически нет.

Диэлектриками являются, например, слюда, фарфор, дистиллированная вода и др.

3. *Полупроводники* – это вещества, которые по своей способности проводить электрический ток занимают *промежуточное положение* между проводниками и диэлектриками. Кроме того, полупроводники обладают рядом специфических свойств, что позволяет их выделить в особую группу веществ.

Полупроводниками являются некоторые химически чистые элементы (кремний, германий, селен и др.) и весьма многие химические соединения.

1.18. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1. При наличии внешнего электрического поля в диэлектрике происходит особый процесс, называемый *поляризацией*.

Поляризация диэлектрика заключается в том, что *элементарные объёмы* диэлектрика *и весь* диэлектрик в целом приобретают вполне определённый *электрический момент*.

Поляризация сопровождается появлением *на гранях* диэлектрика *тонкого слоя нескомпенсированных* электрических зарядов (в случае неоднородного поля или неоднородного*** диэлектрика появляются также и *объёмные* заряды). Противоположные по знаку заряды всегда появляются на противоположных поверхностях диэлектрика, они образуют своеобразные электрические *полюсы*, отсюда и название этого процесса электризации – поляризация.

Заряды, возникающие на диэлектрике под действием внешнего электрического поля, называются *поляризационными* или *связанными* (иногда их называют фиктивными зарядами).

Связанные заряды, в отличие от свободных зарядов, не могут быть сняты с диэлектрика, не могут быть отведены в землю при заземлении диэлектрика. Они, в самом деле, оказываются *«связанными»* с диэлектриком. В этом смысле термин «связанные заряды» как нельзя лучше отражает действительное состояние этих зарядов.

* Термин «проводник электричества» введен англичанином С. Греем.

** Термин «диэлектрики» введен М. Фарадеем.

*** Неоднородными будем называть такие диэлектрики, у которых физические свойства, например, плотность, химический состав, электропроводность, восприимчивость и т.д. в разных точках *различны*.

2. Количественной характеристикой интенсивности поляризации является величина, называемая вектором поляризации или поляризуемостью.

Вектор поляризации \vec{P} – векторная величина, численно равная электрическому моменту единицы объёма поляризованного диэлектрика. Направление вектора поляризации в каждой точке диэлектрика совпадает с направлением электрического момента элементарного объёма в окрестности этой точки.

Если вектор поляризации во всех точках диэлектрика *одинаков*, то поляризация называется *однородной*.

Если же вектор \vec{P} в разных точках диэлектрика имеет *разное* направление и *неодинаков* по величине, то поляризация называется *неоднородной*.

С атомистической точки зрения вектор поляризации представляет собой геометрическую сумму дипольных моментов всех молекул, находящихся в единице объёма.*

В случае однородной поляризации

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (1.18.1)$$

где \vec{p}_i – электрический момент i -й молекулы; ΔV – произвольный объём диэлектрика.

Если поляризация неоднородна,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (1.18.2)$$

Вектор поляризации характеризует *каждую* точку поляризованного диэлектрика.

3. Распределение поляризационных зарядов по поверхности диэлектрика характеризует поверхностная плотность σ' :

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS}$$

где dq' – поляризационный заряд, сосредоточенный на площадке dS .

4. Между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанных зарядов существует связь. Установим эту связь на простом частном примере.

Пусть *однородный* диэлектрик, имеющий форму большой плоско-параллельной пластины, внесён в *однородное* электрическое поле. Под действием поля пластина поляризуется.

Если грани пластины не параллельны полю, то на них появляются поляризационные заряды с одинаковой по величине и противоположной по знаку поверхностной плотностью: $|\sigma'_+| = |\sigma'_-|$.

Вырежем (мысленно) в поляризованной пластине элементарный объём в виде бесконечно тонкого цилиндра (или призмы), основания dS которого совпадают с гранями пластины (если образующие цилиндра не перпендикулярны граням пластины, то цилиндр получится наклонным; именно такой цилиндр мы и рассмотрим (рис. 1.42)).

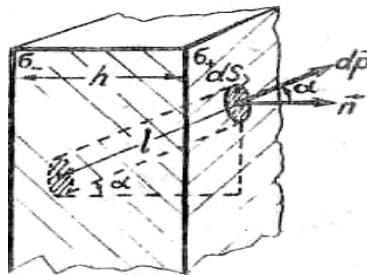


Рис. 1.42

Найдём электрический момент выделенного объёма диэлектрика. Этот момент можно выразить через вектор поляризации P и объём dV :

$$dp = P dV,$$

где P – модуль вектора поляризации. Направления $d\vec{p}$ и \vec{P} *совпадают*.

Объём наклонного цилиндра в рассматриваемом случае равен площади основания dS на толщину пластины h :

* Вопрос о том, как появляются у молекул диэлектрика дипольные моменты, будет рассмотрен позднее.

$$dV = dSh = dSl \cos \alpha,$$

так как $h = l \cos \alpha$.

Найденное значение объёма подставим в выражение для момента:

$$dp = PdSl \cos \alpha. \quad (1.18.3)$$

С другой стороны, выделенный объём можно рассматривать как электрический диполь с зарядами $\sigma'_{\pm} dS$ и плечом l (так как площадь торцов цилиндра бесконечно мала, то заряды $\sigma'_{\pm} dS$ можно считать точечными). Момент этого диполя численно равен

$$dp = \sigma' dSl. \quad (1.18.4)$$

Приравняв правые части (1.18.3) и (1.18.4), получим

$$P \cos \alpha = \sigma', \quad (1.18.5)$$

где α – угол между направлением внешней нормали и направлением вектора поляризации \vec{P} . Произведение $P \cos \alpha = P_n$ есть проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль. Тогда

$$P_n = \sigma'. \quad (1.18.6)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора поляризации численно равна поверхностной плотности поляризационных зарядов.

Полученный вывод остаётся в силе и для самого общего случая, когда поле или диэлектрик, или оба они неоднородны и когда диэлектрик имеет произвольную форму.

Зная распределение вектора поляризации в точках поверхности поляризованного диэлектрика, можно найти распределение поляризационных зарядов и наоборот.

Обратим внимание на то, что соотношение (1.18.6) – *дифференциальное*. P_n и σ' относятся к *одной и той же точке* поверхности диэлектрика.

4. Теория и опыт показывают, что вектор поляризации в каждой точке изотропного диэлектрика в не очень сильных полях пропорционален напряжённости поля, существующего в этой же точке, и совпадает с ней по направлению:

$$\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.18.7)$$

где \varkappa – так называемый *коэффициент поляризации* или диэлектрическая *восприимчивость* вещества. Эта величина является константой вещества и показывает, как сильно поляризуется данное вещество во внешнем электрическом поле. Электрическая постоянная ε_0 появляется в этом выражении по соображениям размерности (нетрудно убедиться в том, что размерности P и $\varepsilon_0 E$ одинаковы).

5. Если вектор поляризации и напряжённость поля совпадают по направлению в *любой* точке *внутри* изотропного диэлектрика, то, очевидно, они совпадают и в точках на поверхности диэлектрика.

Спроектировав векторы \vec{P} и \vec{E} на нормаль к поверхности, получим

$$P_n = \varkappa \varepsilon_0 E_n, \quad (1.18.8)$$

Но $P_n = \sigma'$; следовательно,

$$\sigma' = \varkappa \varepsilon_0 E_n. \quad (1.18.9)$$

Из последней формулы видно, что если проекция вектора напряжённости на направление внешней нормали к поверхности диэлектрика *положительна* ($E_n > 0$), то и $\sigma' > 0$, т.е. на такой поверхности появляются *положительные* поляризационные заряды. Если $E_n < 0$, то и $\sigma' < 0$ – на таких поверхностях появляются отрицательные поляризационные заряды. Поляризационные заряды не появляются в тех точках поверхности диэлектрика, в которых вектор \vec{E} направлен *по касательной* к поверхности (в этом случае $E_n = 0$ и, следовательно, $\sigma' = \varkappa \varepsilon_0 E_n = 0$).

1.19. ОПИСАНИЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

1. Говоря о поле *внутри диэлектрика*, имеют в виду *макроскопическое поле*, поле, *усредненное* по физически бесконечно малому объёму dV .

2. Электрическое поле, как в диэлектрике, так и вне его, представляет собой *суперпозицию* двух полей: поля, созданного *свободными* зарядами, и поля, созданного *связанными* зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (1.19.1)$$

где \vec{E}_0 – напряжённость поля, созданного свободными зарядами; \vec{E} – напряжённость поля, созданного связанными зарядами.

Поляризация любого элементарного объёма диэлектрика обусловлена именно этим *полным* полем \vec{E} . Именно об этом поле идёт речь в соотношении (1.18.7).

3. Поле связанных зарядов \vec{E}' *внутри диэлектрика* всегда *ослабляет* поле свободных зарядов: суммарное поле, которое существует в данной точке внутри диэлектрика, всегда *меньше* того поля, которое существовало бы в этой же точке в отсутствие диэлектрика (при том же распределении свободных зарядов):

$$E_{\text{внутри}} < E_0.$$

Поле связанных зарядов в диэлектрике никогда не компенсирует полностью поле свободных зарядов: оно компенсирует внешнее поле лишь частично!

Из сказанного *вовсе не следует*, что поле \vec{E}' в диэлектриках *всегда направлено противоположно* \vec{E}_0 . Направление \vec{E}' зависит помимо всего прочего от формы диэлектрика и его положения в электрическом поле.

В зависимости от этих факторов угол между \vec{E}' и \vec{E}_0 может принимать любые значения от $\frac{\pi}{2}$ до π . На рисунке 1.43 указаны направления векторов \vec{E}' и \vec{E}_0 внутри диэлектрика, имеющего форму большой плоскопараллельной пластины и расположенного в однородном поле так, что его грани не перпендикулярны линиям поля. Угол между векторами \vec{E}_0 и \vec{E}' не равен π .

4. *Вне* диэлектрика поле связанных зарядов может и *усиливать*, и *ослаблять* поле свободных зарядов, поэтому полное поле здесь может быть больше, меньше или равно полю свободных зарядов.

Рисунок 1.44 поясняет сказанное. В однородное поле внесён длинный тонкий стержень из однородного диэлектрика. Поле связанных зарядов q'_+ и q'_- будет приблизительно таким же, как и поле двух точечных разноимённых зарядов. Линии \vec{E}' на рисунке изображены тонкими линиями, линии \vec{E}_0 – толстыми.

Из чертежа видно, что в точке *A* (внутри диэлектрика) результирующее поле меньше, в точке *B* (вне диэлектрика) больше и в точке *C* (также вне диэлектрика) меньше E_0 .

5. Можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков с различными ϵ происходит скачкообразное изменение величины и направления вектора напряжённости (это изменение обусловлено наличием связанных зарядов).

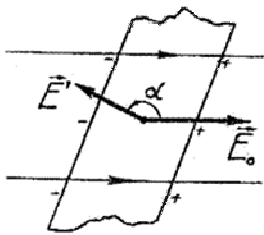


Рис. 1.43

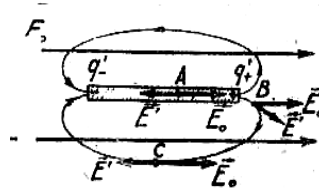


Рис. 1.44

Линии вектора напряжённости *на границе* раздела диэлектриков *преломляются* и испытывают *разрыв*: часть линий либо начинается, либо обрывается на связанных зарядах (рис. 1.45, а).

6. Очевидно, что *расчёт поля* в веществе – *задача более сложная*, чем расчёт поля в вакууме. При наличии диэлектриков приходится учитывать не только свободные, но и связанные заряды, распределение которых, особенно в случае неоднородной поляризации, не отличается простотой.

7. Для упрощения решения задач электростатики вводится вспомогательная характеристика поля – *вектор электростатической индукции* \vec{D} .

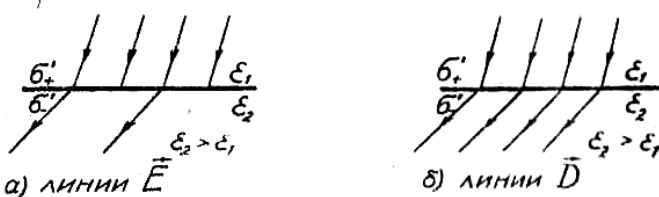


Рис. 1.45

По *определению*, вектор \vec{D} равен геометрической сумме вектора $\epsilon_0 \vec{E}$ (\vec{E} – *результующее* поле свободных и связанных зарядов) и вектора поляризации \vec{P} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.19.2)$$

8. В изотропных диэлектриках в не очень сильных полях вектор поляризации является

линейной функцией полного поля \vec{E} :

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

Подставив это выражение в формулу для \vec{D} (1.19.2), получим

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E}. \quad (1.19.3)$$

Из этого соотношения видно, что в *изотропных* диэлектриках направление вектора электростатической индукции *совпадает* с направлением вектора результирующей напряжённости.

В *анизотропных* диэлектриках направления \vec{P} и \vec{E} не совпадают, следовательно, направления \vec{D} и \vec{E} также различны. Безразмерная величина $(1 + \alpha)$ в формуле (1.19.3) называется *относительной диэлектрической проницаемостью среды* и обозначается буквой ϵ :

$$\epsilon = (1 + \alpha). \quad (1.19.4)$$

Следовательно,

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (1.19.5)$$

Мы получили формулу, которой уже пользовались ранее. Ещё раз подчеркнём, что эта формула верна только в случае *изотропных* диэлектриков.

9. При переходе через границу раздела диэлектриков величина и направление вектора индукции в общем случае *изменяются*.

Что касается *линий вектора* – \vec{D} , то они на границах раздела могут преломляться, но *не испытывают разрыва* (рис. 1.45, б).

Если граница раздела диэлектриков *перпендикулярна* линиям поля и значит *совпадает* с эквипотенциальной поверхностью, то на такой границе вектор \vec{E} изменяется только *по величине*, а вектор \vec{D} не изменяется ни по величине, ни по направлению. На рисунке 1.46 показаны линии \vec{E} (а) и линии \vec{D} (б) поля двух параллельных пластин (плоского конденсатора) при наличии диэлектрика, в форме плоскопараллельной пластины, перпендикулярной линиям поля.

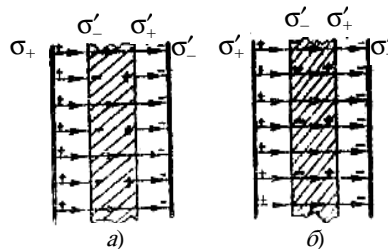


Рис. 1.46

10. Итак, связанные заряды *не влияют на число* линий индукции; «источниками» этих линий могут быть только свободные заряды. Следовательно, поток *вектора индукции через замкнутую поверхность зависит только от свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью*.

11. Физической причиной уменьшения силы взаимодействия зарядов *в среде* является действие нескомпенсированных поляризационных зарядов. Эти заряды *ослабляют* электрическое поле свободных зарядов и тем самым уменьшают их силу взаимодействия.

1.20. РАСЧЁТ ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1. На первый взгляд может показаться, что наличие диэлектриков не должно вносить особых затруднений в расчёт. В самом деле, между индукцией \vec{D} и напряжённостью \vec{E} в случае изотропных диэлектриков существует известная связь: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$.

Далее известно, что поток индукции зависит только от распределения свободных зарядов. Определив индукцию (по теореме Гаусса) в интересующей нас точке и разделив её на $\epsilon \epsilon_0$, мы решим поставленную задачу – найдём напряжённость.

Ход рассуждений здесь верен, но молчаливо обойдены два обстоятельства, усложняющие математическое решение задачи:

а) связанные заряды, возникающие в результате поляризации пространственно ограниченных диэлектриков *произвольной формы, деформируют поле* свободных зарядов, вызывают перераспределение этих зарядов. Если до внесения в поле диэлектрика свободные заряды были распределены симметрично, то после внесения отдельных «кусков» диэлектрика симметрия зарядов нарушается;

б) линии индукции на границах диэлектриков *преломляются* (в неоднородных диэлектриках, свойства которых изменяются *непрерывно*, линии индукции преломляются не только на границах, но и внутри диэлектрика). Первое обстоятельство затрудняет вычисление свободного заряда, попадающего внутрь выбранной поверхности (надо знать, *как эти заряды распределены*), второе – вычисление потока индукции через выбранную поверхность (надо точно знать, как направлен вектор \vec{D} в каждой точке этой поверхности). Теорема Гаусса остаётся, конечно, справедливой и в этом случае, но не позволяет вычислить индукцию в интересующей нас точке с той же легкостью, с какой мы это делаем в *отсутствии* диэлектриков и при *симметричном* распределении свободных зарядов.

2. Связанные заряды не вызывают перераспределения свободных зарядов и линии индукции не преломляются, если диэлектрик однороден и заполняет *всё* пространство, где сосредоточено поле, или, по крайней мере, область между двумя эквипотенциальными поверхностями. Если диэлектрик однороден и заполняет пространство между двумя эквипотенциальными поверхностями, то связанные заряды создают отличное от нуля поле только *внутри* диэлектрика; за пределами диэлектрика поля, создаваемые связанными зарядами противоположного знака, *компенсируют* друг друга. Линии индукции не преломляются в этом случае потому, что они всюду перпендикулярны к поверхности диэлектрика.

Если распределение свободных зарядов при наличии однородных изотропных диэлектриков известно, то расчёт поля осуществляется достаточно просто по схемам, изложенным в §§ 1.11 и 1.16.

Примечание. При расчёте полей, проведённом в §1.11, мы предполагали наличие среды, но ничего не говорили о форме диэлектриков, внесённых в поле.

Полученные результаты справедливы, если: а) диэлектрики однородны и изотропны; б) форма диэлектриков такова, что поляризационные заряды не вызывают смещения свободных зарядов и не нарушают их симметричного распределения (диэлектрики заполняют либо всё пространство, либо область между двумя любыми эквипотенциальными поверхностями).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чём заключается явление поляризации диэлектриков?
2. Что называется вектором поляризации?
3. Какова связь между вектором поляризации и поверхностной плотностью поляризационных зарядов?
4. Каково влияние поляризационных зарядов на электрическое поле внутри диэлектрика и вне его?
5. Что такое вектор электростатической индукции и как он связан с вектором поляризации?
6. Что характеризует диэлектрическая восприимчивость и как она связана с вектором поляризации и диэлектрической проницаемостью?
7. Каковы физические причины уменьшения силы взаимодействия между зарядами в среде по сравнению с силой взаимодействия в вакууме?

1.21. ДИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ МОЛЕКУЛ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Наша задача теперь – объяснить *механизм* поляризации с точки зрения *молекулярного строения* диэлектриков.

1. Как известно, молекулы построены из *атомов*.

Атом состоит из положительно заряженного *ядра* и отрицательно заряженных *электронов*, обращающихся вокруг ядра.

В обычном, неионизированном состоянии отдельные атомы электрически *нейтральны*. Это значит, что *заряд ядра атома равен суммарному заряду электронов* и что «центр тяжести» ядра совпадает с центром тяжести электронной оболочки.

2. При образовании молекул из атомов может случиться, что и в составе молекулы атомы останутся *незаряженными*. Молекулы, построенные из незаряженных, *нейтральных* атомов, называются *неполярными*. В таких молекулах центр тяжести всех ядер и центр тяжести всех электронов в отсутствие внешнего электрического поля *совпадают*. Следовательно, электрический момент неполярных молекул в отсутствие внешнего поля равен *нулю*. В неполярных молекулах *атомы расположены симметрично*.



Рис. 1.47

На рисунке 1.47 изображены структурные модели неполярных молекул водорода (а) и метана (б). Диэлектрики, состоящие из *неполярных молекул*, называются *неполярными*.

Примеры диэлектриков с неполярными молекулами: азот, водород, метан, четырёххлористый углерод, полистирол, полиэтилен, сера и др.

3. Существуют молекулы, которые построены из ионов – *заряженных* атомов. В таких молекулах в отсутствие внешнего электрического поля центр тяжести положительных ядер и центр тяжести электронов не совпадают.

Молекулы, в которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов *смещены* друг относительно друга, называются *полярными*.

В полярных молекулах атомы расположены асимметрично. Модель полярной молекулы воды, которая состоит из двух положительных ионов водорода и одного отрицательного иона кислорода изображена на рис. 1.48. Полярные молекулы подобны электрическим диполям: они обладают вполне определённым электрическим моментом и создают в окружающем пространстве своё собственное поле.

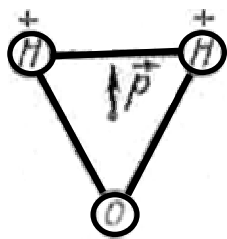


Рис. 1.48

4. Рассмотрим теперь, как воздействует внешнее электрическое поле на полярные и неполярные молекулы.

Под действием внешнего электрического поля *неполярные молекулы поляризуются*: в них индуцируется электрический момент, направление которого всегда *совпадает с направлением внешнего поля*. Появление электрического момента обусловлено *смещением центра* тяжести положительных зарядов в направлении поля, центра тяжести отрицательных зарядов – против поля (рис. 1.49).

В результате этого смещения молекула приобретает электрический момент \vec{p} и становится подобной электрическому диполю.

5. Смещение зарядов в неполярной молекуле в не очень сильных полях оказывается *пропорциональным* напряжённости внешнего электрического поля.

Убедимся в этом на примере атома *водорода*.

Пусть Δl расстояние, на которое смещается под действием внешнего поля орбита электрона (рис. 1.50). Свяжем это смещение с напряжённостью поля (будем считать при этом, что поле *перпендикулярно* плоскости орбиты и орбита *круговая*).

Движение электрона по окружности при наличии внешнего поля обусловлено совместным действием ядра (сила \vec{F}_i) и внешнего поля (сила \vec{F}_e).

Сумма проекций этих сил на направление радиуса r даёт величину центростремительной силы:

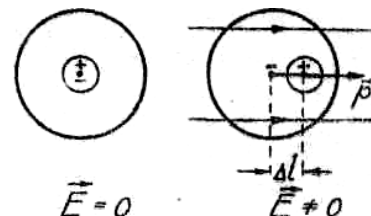


Рис. 1.49

$$F_i \cos \alpha = m\omega^2 r,$$

где α – угол между плоскостью электронной орбиты и радиус-вектором, проведённым от электрона к ядру; ω – угловая скорость обращения электрона; r – радиус орбиты; m – масса электрона.

Сумма проекций этих же сил на направление поля равна нулю (так как ускорение электрона в этом

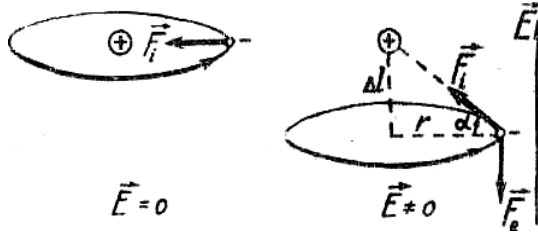


Рис. 1.50

направлении отсутствует):

$$F_i \sin \alpha - F_e = 0$$

Сила, действующая на электрон со стороны поля, равна

$$F_e = eE,$$

где E – напряжённость поля; e – заряд электрона.

Свяжем Δl , r и α . Из чертежа видно, что $\operatorname{tg} \alpha = \Delta l / r$.

Решая составленные уравнения совместно, найдём, что смещение орбиты электрона относительно ядра равно $\Delta l = \frac{e}{m\omega^2} E$.

Электрический момент атома, обусловленный этим смещением, найдём, умножив e (заряд электрона) на Δl :

$$p = e\Delta l = \frac{e^2}{m\omega^2} E. \quad (1.21.1)$$

Мы видим, что электрический момент, обусловленный смещением электронной орбиты, пропорционален напряжённости поля.

В многоэлектронных атомах и молекулах картина, несомненно, усложняется, но характер зависимости p от E остаётся прежним.

6. Смещение зарядов в неполярных молекулах происходит подобно упругой деформации, т.е. так, как если бы между зарядами действовали упругие силы. Смещение исчезает вместе с исчезновением электрического поля. Поэтому неполярные молекулы часто называют «квазиупругими» или «мягкими» диполями

7. Действие однородного электрического поля на полярные молекулы оказывается ориентирующим: поле стремится «развернуть» молекулярные диполи так, чтобы их электрические моменты совпали с направлением вектора \vec{E} . В неоднородном поле, кроме того, действуют силы, вызывающие поступательное движение диполей.

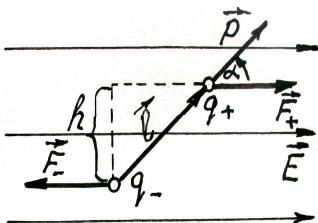


Рис. 1.51

8. Рассмотрим, от чего зависит вращательное действие электрического поля на молекулярные диполи. Если электрическое поле однородно, то на заряды q_+ и q_- диполя действуют равные по величине и противоположные по направлению силы \vec{F}_+ и \vec{F}_- (рис. 1.51). Эти силы образуют пару сил.

Вращательный момент этой пары относительно оси, проходящей через один из зарядов равен

$$M = Fk \sin \alpha,$$

где F – величина силы \vec{F}_+ (или \vec{F}_-); $k \sin \alpha$ – плечо этой силы.

Сила F равна qE . Подставим F в формулу для момента: $M = qlE \sin \alpha$. Но $ql = p$ – электрический момент диполя. Следовательно,

$$M = pE \sin \alpha, \quad (1.21.2)$$

где α – угол между направлениями \vec{p} и \vec{E} .

Таким образом, *вращательный момент*, действующий на молекулярный диполь со стороны внешнего поля, зависит от величины электрического момента диполя, от напряжённости поля и от ориентации диполя в электрическом поле. Формуле (1.21.2) можно придать векторный вид:

$$\vec{M} = |\vec{p}\vec{E}|. \quad (1.21.3)$$

Направление вектора \vec{M} удобно определять по правилу правого буравчика: если правый буравчик поставить перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы \vec{p} и \vec{E} , и поворачивать его по кратчайшему пути от \vec{p} к \vec{E} , то поступательное движение буравчика укажет направление вектора \vec{M} (механический момент, действующий на диполь, изображенный на рис. 1.52, направлен перпендикулярно плоскости чертежа, за чертеж).

Из формулы (1.21.2) видно, что вращательное действие поля отсутствует, если угол между \vec{p} и \vec{E} равен нулю или π (электрический момент диполя либо параллелен, либо антипараллелен вектору \vec{E}).

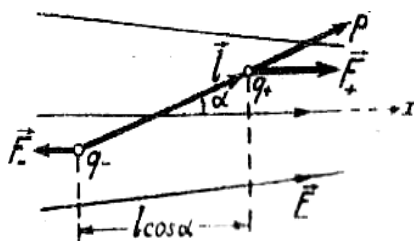


Рис. 1.52

9. В неоднородном поле силы, действующие на заряды q_+ и q_- диполя, вообще говоря, *неколлинеарны* (линии действия сил не параллельны), *некомпланарны* (векторы сил не лежат в одной плоскости) и *не равны друг другу* по величине. Однако, если учесть малые размеры диполя, то неколлинеарностью и некомпланарностью векторов сил можно пренебречь и учитывать только то, что они не равны друг другу по величине ($F_+ \neq F_-$). Если поле усиливается в направлении оси x , то $F_+ > F_-$ (рис. 1.52).

Величина результирующей сил F_+ и F_- равна

$$F_x = F_+ - F_-.$$

Но $F_+ = qE_2$ и $F_- = qE_1$, где E_1 и E_2 – напряжённости поля в тех точках, где находятся заряды q_- и q_+ . Тогда $F_x = q(E_1 - E_2)$.

Если смещение зарядов друг относительно друга вдоль направления, проходящего через *оба* заряда, равно l , то смещение их вдоль оси x равно $l \cos \alpha$ (на чертеже – это расстояние между вертикальными пунктирными линиями). Чтобы найти изменение величины E на некотором отрезке оси x , надо изменение E , приходящееся на *единицу длины* этой оси, т.е. $\frac{\partial E}{\partial x}$, умножить на длину этого отрезка (в нашем случае на $l \cos \alpha$):

$$E_2 - E_1 = \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha$$

(здесь взята *частная* производная, так как напряжённость может изменяться не только вдоль оси x). Подставим полученное выражение в формулу для силы F_x и учтём, что ql – электрический момент диполя:

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha \quad (1.21.4)$$

(заметим, что здесь берется производная по x от модуля вектора \vec{E}).

Из формулы (1.21.4) видно, что *поступательное движение диполя* в направлении оси x *отсутствует*, если:

1) $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ – поле вдоль оси x *не изменяется*;

2) $\cos \alpha = 0$ – диполь *перпендикулярен* полю.

Формулу (1.21.4) можно переписать в виде

$$F_x = p_x \frac{\partial E}{\partial x}, \quad (1.21.5)$$

где F_x – проекция силы \vec{F} на ось x ; \vec{F}_x – составляющая этой силы, действующая вдоль оси x , $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$ (\vec{i} – *единичный* вектор оси x); $p_x = p \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{p} на ось x .

Легко видеть из этой формулы, что сила \vec{F}_x перемещает диполь в направлении оси x : если

$$p_x > 0 \text{ и } \frac{\partial E}{\partial x} > 0 \text{ (или } p_x < 0 \text{ и } \frac{\partial E}{\partial x} < 0);$$

если же

$$p_x > 0 \text{ и } \frac{\partial E}{\partial x} < 0 \text{ (или } p_x < 0, \text{ но } \frac{\partial E}{\partial x} > 0),$$

то перемещение происходит в направлении, *противоположном* оси x .

Свободный диполь под действием вращательного момента устанавливается вдоль поля (так что \vec{P} и \vec{E} совпадают). Если поле при этом *неоднородно*, то диполь, кроме того, *втягивается* в область *более сильного поля* (убедитесь в этом сами). Именно этим объясняется притяжение легких предметов к заряженному телу.

10. В заключение отметим, что внешнее электрическое поле практически не влияет на величину электрического момента полярных молекул. Это значит, что силы, связывающие заряды таких молекул, значительно больше сил, действующих на них со стороны внешнего поля. Такие молекулы во внешнем поле практически не деформируются и ведут себя подобно жёсткой системе зарядов. Поэтому полярные молекулы часто называют «жёсткими» или «твёрдыми» диполями.

1.22. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ. МЕХАНИЗМ ПОЛЯРИЗАЦИИ. ТИПЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

1. Для количественного описания процесса поляризации введены следующие макроскопические характеристики: диэлектрическая восприимчивость χ , диэлектрическая проницаемость ϵ , вектор поляризации \vec{P} .

Диэлектрические свойства веществ полностью определяются этими параметрами.

Изучая свойства тех или иных диэлектриков, стремятся установить характер зависимости χ , ϵ и \vec{P} от величины поляризующего поля, от температуры диэлектрика, от частоты изменения внешнего электрического поля и т.д. (E , t , ν).

Опытом установлено, что разные по своему химическому составу диэлектрики могут обладать в значительной мере сходными электрическими свойствами. Это даёт возможность произвести классификацию диэлектриков. В основу классификации с макроскопической точки зрения кладётся зависимость χ , ϵ и P от температуры T и поляризующего поля E . Эту же классификацию можно обосновать и с атомистической точки зрения, с точки зрения механизма поляризации.

2. К *первой* группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с *неполярными молекулами*.

Диэлектрическая проницаемость ϵ и восприимчивость χ этих веществ являются константами, не зависящими ни от поляризующего поля, ни от температуры. Вектор поляризации \vec{P} в любых полях пропорционален напряжённости поляризующего поля. Графики χ и P приведены на рис. 1.53.

3. С атомистической точки зрения поляризация неполярных диэлектриков и, относящихся к этой же группе веществ, *ионных кристаллов* носит характер *электронного* и ионного смещения (этот тип поляризации так и называется «поляризация электронного и ионного смещения» или «деформационная поляризация»).

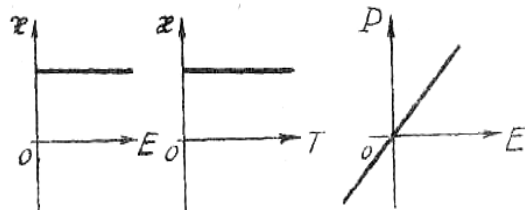


Рис. 1.53

Внешнее поле смещает электронные оболочки молекул относительно ядер, *деформирует* их, в результате чего *каждая* молекула приобретает дипольный момент.

На поверхности диэлектрика, сквозь которую линии внешнего поля «*входят*» в диэлектрик, «*выступают*» отрицательные поляризационные заряды, в результате чего, такая поверхность заряжается отрицательно. На поверхности же, сквозь которую линии поля «*выходят*» из диэлектрика, «*выступают*» положительные заряды, в результате чего такая поверхность заряжается положительно (рис. 1.54).

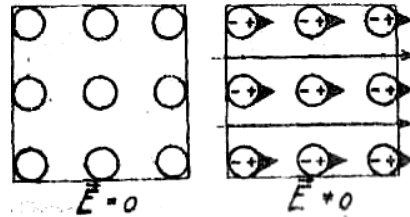


Рис. 1.54

Кристаллическую решетку ионных кристаллов (например, KCl, NaCl) можно представить состоящей из двух подрешеток – положительной и отрицательной, вставленных одна в другую. Под действием сил поля происходит смещение этих подрешеток.

4. Время установления (время релаксации) поляризации электронного смещения порядка 10^{-15} с, ионного $10^{-12} \dots 10^{-13}$ с. Это значит, что поляризация ионного смещения вплоть до частот изменений поля $10^{12} \dots 10^{13}$ Гц, а поляризация электронного смещения ещё выше – вплоть до частот 10^{15} Гц (световые колебания) не зависит от частоты изменений поляризирующего поля (поляризация не запаздывает по времени).

Время установления поляризации электронного смещения меньше времени релаксации ионного смещения потому, что масса электрона значительно меньше массы ионов.

5. Так как внешнее поле деформирует, смещает электронные оболочки всех без исключения атомов и молекул диэлектрика, то поляризация электронного смещения имеет место во всех диэлектриках.

6. Ко второй группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с полярными молекулами (иногда эти вещества *называют параэлектриками*).

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость этих веществ *не* зависят от поляризирующего поля, но зависят от температуры (при повышении температуры ϵ и ϵ *уменьшаются*).

Вектор поляризации полярных диэлектриков сначала растёт пропорционально E , затем рост P замедляется и в очень сильных полях (но не при высоких температурах) прекращается вовсе – наступает диэлектрическое *насыщение*.

В диэлектриках, содержащих полярные молекулы, в отсутствие внешнего электрического поля молекулярные диполи ориентированы *беспорядочно*, поэтому электрический момент любого физически малого объёма и всего диэлектрика в целом равен *нулю*.

При наличии внешнего поля в полярных диэлектриках на поляризацию электронного смещения накладывается так называемая *ориентационная* или дипольная поляризация.

Внешнее поле стремится расположить молекулярные диполи упорядоченно, *вдоль поля*, а тепловое движение нарушает эту ориентацию. По истечении некоторого времени после включения электрического поля наступает динамическое равновесие между этими двумя процессами, в результате чего устанавливается

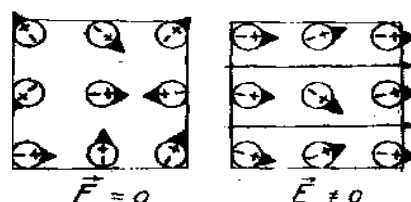


Рис. 1.55

ливается некоторая *преимущественная* ориентация диполей (рис. 1.55). Диэлектрическое насыщение наступает тогда, когда *все* молекулярные *диполи* выстраиваются *вдоль поля*.

Опыт показывает, что восприимчивость, обусловленная ориентационной поляризацией, подчиняется закону Кюри:

$$\chi_{\text{ор}} = \frac{C}{T},$$

где C – константа, зависящая от вещества; T – абсолютная температура.

Чем выше температура, тем сильнее дезориентирующее действие теплового движения и тем меньше становятся χ и ϵ . Время установления ориентационной поляризации довольно велико и сильно зависит от температуры диэлектрика и частоты изменений поля.

Если накладывается быстропеременное поле, то ориентационная поляризация вследствие инерции молекулярных диполей не успевает следовать (во времени) за изменениями поляризующего поля. Происходит резкое уменьшение поляризуемости и, стало быть, ϵ . Графики $\chi_{\text{ор}} = f(E)$, $\chi_{\text{ор}} = f(T)$, $P = f(E)$ для полярных диэлектриков приведены на рис. 1.56.

7. К *третьей* группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с особыми электрическими свойствами. Это так называемые *сегнетоэлектрики* или *ферроэлектрики*. Для них характерны следующие особенности:

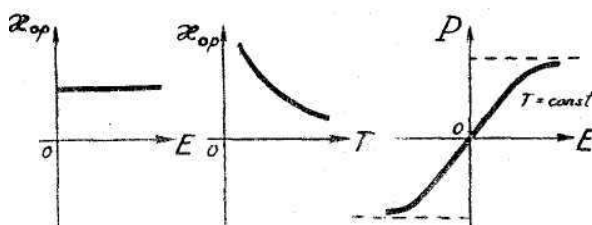


Рис. 1.56

а) диэлектрическая проницаемость в определённом температурном интервале (для разных сегнетоэлектриков он разный) весьма велика – может достигать десятков тысяч (для сравнения укажем, что ϵ для диэлектриков первой и второй групп не превышает нескольких десятков);

б) χ и ϵ зависят от *температуры и поляризующего поля* (последняя зависимость имеет место при температурах *ниже* некоторой характеристической, называемой *точкой Кюри*).

Примерные графики зависимости ϵ от E и T для одного из сегнетоэлектриков – титаната бария приведены на рис. 1.57 и 1.58.

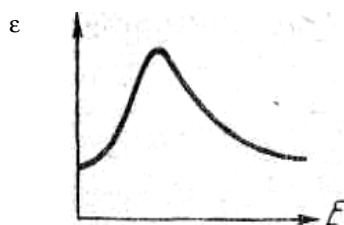


Рис. 1.57

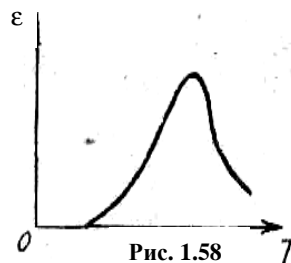


Рис. 1.58

в) отставание (не по времени) изменений поляризации P от изменений поляризующего поля (явление, называемое *диэлектрическим гистерезисом*).

График $P = f(E)$ приведён на рис. 1.59. Первоначально поляризация растёт вместе с увеличением поляризующего поля (кривая 1). При некотором значении E наступает *насыщение*. При уменьшении величины поля изменение P отстаёт от изменений E и следует не первоначальной кривой 1, а кривой 2.

При $E = 0$ сегнетоэлектрик остаётся *поляризованным*.

Поляризация P_0 , которой сегнетоэлектрик обладает в отсутствие внешнего электрического поля, называется *остаточной*. Чтобы устранить эту поляризацию, необходимо включить поле обратного направления.

Поле E_C *обратного* направления, которое полностью снимает остаточную поляризацию, называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении этого поля вновь наступает насыщение. В неполяризованное состояние диэлектрик возвращается в соответствии с кривой 3.

При циклическом изменении поля получается петлеобразная кривая, называемая *петлей гистерезиса*.

г) Для каждого из сегнетоэлектриков имеется температура, при которой исчезают его особые свойства. Эта температура называется точкой Кюри или температурой Кюри.

Восприимчивость сегнетоэлектриков при температурах, превышающих температуру Кюри, подчиняется *закону Кюри–Вейсса*:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}, \quad (1.22.2)$$

где C – константа вещества; T – абсолютная температура; θ – температура Кюри (по абсолютной шкале).

Наиболее интересными из сегнетоэлектриков являются сегнетова соль (двойная натриево-калиевая соль винной кислоты $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) и метатитанат бария (BaTiO_3).

Электрические свойства сегнетовой соли были впервые исследованы советскими физиками И.В. Курчатовым и П.П. Кобеко. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: верхнюю $+ 22,5^\circ\text{C}$ и нижнюю $- 15^\circ\text{C}$. Диэлектрическая проницаемость в указанном интервале температур достигает 10^4 . Особые электрические свойства метатитаната бария открыты и исследованы также советскими физиками Б.М. Вулом и И.М. Гольдманом. Проницаемость метатитаната бария порядка 10^3 , температура Кюри 125°C .

д) Объяснение сегнетоэлектричества.

В сегнетоэлектриках между молекулами существует весьма сильное взаимодействие, благодаря которому наиболее устойчивым и энергетически выгодным оказывается состояние *с параллельной ориентацией молекулярных диполей*.

Области сегнетоэлектрика, в которых электрические моменты молекулярных диполей параллельны, называются *доменами*.

В пределах каждого домена диэлектрик поляризован до *насыщения*.

Области самопроизвольной (спонтанной) поляризации сравнительно невелики. Это объясняется ря-

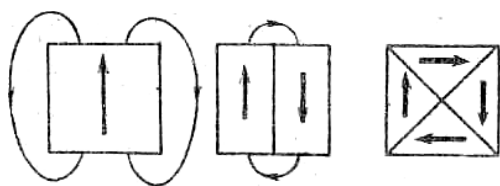


Рис. 1.60

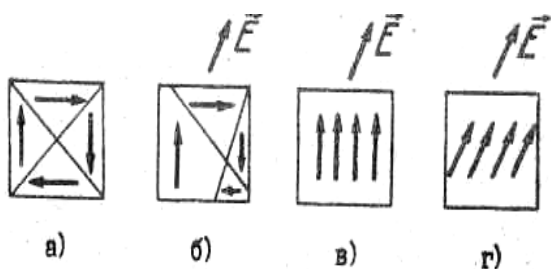


Рис. 1.61

дом причин.

1. Если бы сегнетоэлектрик состоял из одного только домена, то даже в отсутствие внешнего электрического поля он обладал бы огромным электрическим моментом и сам создавал бы в окружающем пространстве очень сильное собственное поле. Такой сегнетоэлектрик обладал бы большой энергией. Энергия, затрачиваемая на создание собственного электрического поля, существенно уменьшится, если

вместо одного домена образуются два или четыре домена, поляризованных так, как это показано на рис. 1.60 стрелками.

2. На границе между двумя соседними доменами происходит «разворот» молекулярных диполей от одной ориентации к другой. При повороте диполя во внешнем электрическом поле совершается *работа*. Образование *границ доменов* также связано с затратами вполне определённой энергии.

3. Наконец, энергия двух доменов одинакового объёма, поляризованных в *разных* кристаллографических направлениях, оказывается *различной*. Эта разница в энергиях называется энергией *анизотропии*.

В отсутствие поляризующего поля размеры доменов и их форма определяются минимумом энергии, затрачиваемой на создание собственного поля, энергии границ и энергии анизотропии. При этом сегнетоэлектрик разбивается на домены таким образом, что его результирующий электрический момент практически равен нулю (рис. 1.61, *а*). При наличии внешнего электрического поля энергия отдельных доменов оказывается неодинаковой: она меньше у тех доменов, в которых вектор поляризации образует с направлением поля острый угол, и больше у тех, у которых этот угол тупой.

Действие поля на домены первоначально проявляется в *смещении границ* между доменами, причём это смещение происходит так, что объём доменов с благоприятной ориентацией вектора \vec{P} (с меньшей энергией) *увеличивается* за счёт поглощения тех доменов, которые ориентированы неблагоприятно (рис. 1.61, *б*). Начальное смещение границ (в слабых полях) носит обратимый характер, поэтому поляризация точно следует за изменениями поляризующего поля (рис. 1.62, участок *ОА*). При дальнейшем увеличении поля смещение границ доменов делается *необратимым* (рис. 1.62, участок *АВ*). Наконец, границы исчезают вовсе (рис. 1.61, *в*). При дальнейшем увеличении поля происходит *поворот* (вслед за полем) электрических моментов доменов (рис. 1.62, участок *ВС*), которые, в конце концов, при некотором значении напряжённости устанавливаются *параллельно* полю (рис. 1.61, *г*). Сегнетоэлектрик превращается в один гигантский домен, поляризованный до насыщения (рис. 1.62, состояние *С*).

При уменьшении электрического поля кривая $P(E)$ не идёт «к нулю» по первоначальной кривой, так как *смещение границ некоторых доменов оказывается необратимым*.

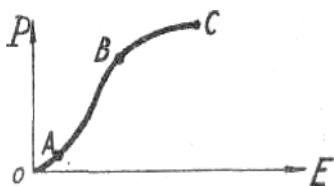


Рис. 1.62

1.23. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ. ЭЛЕКТРОСТРИКЦИЯ. ЭЛЕКТРЕТЫ

1. *Прямой пьезоэлектрический эффект* называется поляризация диэлектриков, обусловленная их *механической деформацией*.

Пьезоэлектрический эффект наблюдается у кварца, сегнетовой соли, метатитаната бария, турмалина.

Качественное объяснение пьезоэлектрического эффекта заключается в следующем. Пространственную решётку любого кристалла можно представить состоящей из двух или нескольких простых решёток. При механической деформации происходит сдвиг этих решёток, в результате чего диэлектрик поляризуется.

2. Из энергетических соображений можно предсказать обратный пьезоэлектрический эффект. Обратный пьезоэлектрический эффект заключается в том, что при поляризации диэлектриков имеют место механические деформации.

Силы электрического поля вызывают смещение простых решёток, в результате чего изменяются линейные размеры кристалла.

3. Во всех без исключения диэлектриках имеет место *электрострикция* — увеличение или уменьшение одних размеров диэлектрика за счёт уменьшения или увеличения других.

Может показаться, на первый взгляд, что обратный пьезоэффект и электрострикция — это одно и то же. На самом деле это не так.

Пьезоэффект наблюдается только у *некоторых* диэлектриков, *электрострикция* — у *всех*. Обратный пьезоэффект обусловлен смещением простых решёток в целом, электрострикция же объясняется действием поля на отдельные молекулярные диполи.

Деформация при обратном пьезоэффекте зависит от поля по линейному закону и при изменении направления поля изменяет свой знак (это значит, что растяжение переходит в сжатие, если направле-

ние поля изменяется на противоположное). Деформация же, обусловленная электрострикцией, зависит от поля по квадратичному закону и не изменяет своего знака при изменении направления поля.

4. Существуют диэлектрики, которые, будучи однажды поляризованы, сохраняют приобретённую поляризацию. Такие диэлектрики называются электретами.

1.24. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1. Изучение электрических свойств диэлектриков имеет важное теоретическое значение. Знание дипольных моментов молекул различных веществ помогает установлению структурных формул молекул и выяснению типа связей между атомами и группами атомов в молекулах (каждому типу связи соответствует определённое значение дипольного момента).

2. Диэлектрики широко используются в электро- и радиотехнике как изоляционные материалы и диэлектрические заполнители конденсаторов.

3. Широкое практическое применение получили прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты. Прямой пьезоэлектрический эффект используется, например, в пьезоэлектрических звукоснимателях и микрофонах. Обратный пьезоэффект – в генераторах ультразвука.

4. Высокое постоянство частоты собственных колебаний кварца используется для стабилизации частоты электромагнитных колебаний, что имеет огромное значение в радиотехнике. Генераторы с кварцевыми стабилизаторами представляют, в сущности, очень точные часы (о точности пьезокварцевых часов можно судить хотя бы по тому, что только с их помощью удалось установить неравномерность вращения Земли вокруг своей оси).

В ряде приборов используется зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от приложенного напряжения, например, в варикондах – конденсаторах с нелинейными характеристиками.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чём состоит различие между неполярными и полярными молекулами?
2. В чём проявляется действие внешнего электрического поля на неполярные молекулы?
3. Как действует однородное электрическое поле на полярные молекулы?
4. В чём проявляется действие неоднородного электрического поля на полярные молекулы?
5. Каков механизм поляризации неполярных диэлектриков?
6. Каков механизм поляризации полярных диэлектриков?
7. Каков механизм поляризации сегнетоэлектриков?
8. Объясните, почему восприимчивость полярных диэлектриков зависит от температуры.
9. Какие вещества называются сегнетоэлектриками? Опишите особые свойства сегнетоэлектриков.
10. В чём состоит диэлектрический гистерезис? Что такое остаточная поляризация и коэрцитивная сила?
11. В чём заключается прямой и обратный пьезоэлектрический эффект?
12. Что такое электрострикция?

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Твёрдые тела, внесённые в электростатическое поле, частично или полностью «разрушают» поле в тех областях пространства, которые они сами занимают, и в значительной мере «деформируют» поле во всём остальном пространстве.

Наша очередная задача – рассмотреть, каково влияние проводников на свойства электростатического поля.

1.25. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ НА ПРОВОДНИКЕ

1. Заряды, сообщённые проводнику, могут находиться в состоянии статического равновесия только в том случае, если электрическое поле внутри проводника отсутствует.

2. Отсутствие электрического поля в проводнике означает, что напряжённость и индукция во всех точках внутри проводника равны нулю:

$$\vec{E}=0, \vec{D}=0. \quad (1.25.1)$$

Докажем, что при этом потенциал во всех точках проводника как внутри, так и на поверхности одинаков (но не равен нулю!).

Из связи потенциала с напряжённостью следует, что $-d\varphi = E_x dx$, где x – направление, проходящее через две произвольные точки A и B , одна из которых находится внутри проводника, другая на поверхности (рис. 1.63). Так как поле внутри проводника отсутствует ($\vec{E}=0$ и $E_x=0$), то $-d\varphi = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Следовательно,

$$\varphi_A = \varphi_B \neq 0 \quad (1.25.2)$$

(так как потенциал точки B не равен нулю). В условиях равновесия зарядов и поверхность, и объём проводника являются эквипотенциальными.

3. В любой точке поверхности проводника вектор напряжённости перпендикулярен к поверхности, так что

$$|E_n| = E; \quad (1.25.3)$$

$$E_\tau = 0, \quad (1.25.4)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на направление нормали к поверхности проводника; E_τ – проекция вектора \vec{E} на направление касательной к поверхности проводника.

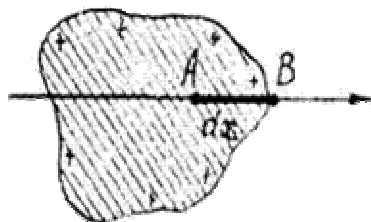


Рис. 1.63

Объяснение. Если бы поле вне проводника не было перпендикулярно к поверхности проводника, т.е. если бы касательная составляющая вектора напряжённости не была равна нулю, то это вызвало бы движение зарядов по поверхности проводника и, следовательно, равновесие зарядов было бы нарушено.

Так как в изотропной среде направления \vec{E} и \vec{D} совпадают. ($\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$), вектор \vec{D} в любой точке поверхности проводника так же перпендикулярен к поверхности проводника:

$$|D_n| = D; \quad (1.25.5)$$

$$D_\tau = 0. \quad (1.25.6)$$

4. Избыточные свободные заряды в состоянии равновесия могут находиться только на внешней поверхности проводника. Это вытекает из следующих соображений.

Так как одноименные заряды отталкиваются, то они стремятся удалиться на максимальное расстояние друг от друга.

Поскольку во всех точках внутри проводника $D = 0$, то поток индукции сквозь любую замкнутую поверхность, находящуюся внутри проводника, также равен нулю. Из теоремы Гаусса следует, что если поток индукции сквозь какую-либо замкнутую поверхность равен нулю, то внутри этой поверхности нет свободных зарядов (по теореме $N = q$, если $N = 0$, то и $q = 0$). Следовательно, при равновесии нигде внутри проводника не может быть нескомпенсированных свободных зарядов.

5. Можно доказать теоретически и убедиться на опыте, что поверхностная плотность зарядов в отдельных точках проводника тем больше, чем больше кривизна поверхности проводника. Покажем это на одном частном примере.

Пусть два достаточно удалённых друг от друга проводящих шара радиусами r_1 и r_2 соединены тонким проводом. Если сообщить одному из шаров некоторый заряд, то он «растечётся» по внешней поверхности шаров и соединительного провода так, что потенциалы шаров окажутся одинаковыми:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (1.25.7)$$

Так как шары достаточно удалены друг от друга и так как полем провода можно пренебречь, потенциалы шаров можно вычислить по формуле (1.14.8):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2},$$

где q_1 и q_2 – заряды шаров.

Выразим q_1 и q_2 через поверхностную плотность σ_1 и σ_2 :

$$q_1 = \sigma_1 4\pi r_1^2; \quad q_2 = \sigma_2 4\pi r_2^2.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_1} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon} r_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon} r_2.$$

Учитывая, что $\varphi_1 = \varphi_2$, получим

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.25.8)$$

Величина, обратная радиусу шара, называется кривизной его поверхности: $k = \frac{1}{r}$. Следовательно,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (1.25.9)$$

Таким образом, если два заряженных шара соединены проводником (т.е. образуют единый проводник), то поверхностная плотность зарядов будет больше на том из шаров, кривизна которого больше (меньше радиус).

В случае проводника произвольной формы каждый малый элемент его поверхности можно рассматривать как участок сферической поверхности определённой кривизны. Только что полученный вывод можно в первом приближении распространить и на проводник с неодинаковой кривизной.

6. Найдём, как связана напряжённость поля вблизи поверхности заряженного проводника произвольной формы с поверхностной плотностью зарядов, сосредоточенных на нём. Воспользуемся теоремой Гаусса. Из условий равновесия зарядов следует, что линии \vec{D} начинаются (или обрываются) на поверхности проводника и всюду перпендикулярны к ней (рис. 1.64).

В качестве вспомогательной поверхности разумно выбрать прямой цилиндр бесконечно малой высоты dh и с бесконечно малыми основаниями dS .

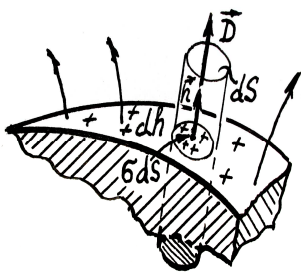


Рис. 1.64

Легко видеть, что поток вектора \vec{D} отличен от нуля только через верхнее основание: $dN = D dS$.

Внутри вспомогательного цилиндра попадает заряд $dq = \sigma dS$. По теореме Гаусса $dN = dq$.

Следовательно,

$$D dS = \sigma dS,$$

откуда

$$D = \sigma \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.25.10)$$

Напряжённость электрического поля в точках, бесконечно близких к заряженному проводнику, тем больше, чем больше поверхностная плотность зарядов.

7. Так как поверхностная плотность зарядов больше там, где больше кривизна поверхности проводника, напряжённость поля оказывается наибольшей вблизи краёв и острых выступов проводника. Электрическое поле вблизи таких мест может быть столь сильным, что оказывается способным ионизировать молекулы воздуха. Возникает явление, называемое стеканием зарядов с проводника. В общих чертах оно заключается в следующем. Образующиеся в процессе ионизации ионы под действием поля приходят в движение: ионы того же знака, что и заряд острия, перемещаются от острия, ионы противоположного знака – к острию (рис. 1.65). Первые при своём движении увлекают нейтральные молекулы воздуха, в результате чего возникает его заметное движение – своеобразный «электрический ветер».

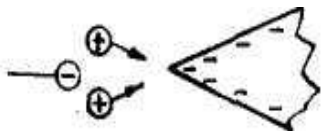


Рис. 1.65

Вторые, подойдя к острию, частично нейтрализуют его заряд, чем уменьшают напряжённость поля вблизи острия.

8. На явлении стекания зарядов основано действие молниеотвода.

Сверхвысокие электрические поля, окружающие тончайшие заряженные проволоки или острые выступы заряженных проводников получили применение в ряде приборов (струнный электромметр, катушка Румкорфа, счётчик Гейгера, ионный микроскоп и др.).

9. Так как индуцированные заряды располагаются только на внешней поверхности проводника, то наличие в нём каких-либо внутренних полостей никак не влияет на характер распределения этих зарядов. Равновесное распределение зарядов на полой проводнике будет точно таким же, как и на сплошном (при условии, разумеется, что форма сплошного проводника точно такая же как и полого).

10. Свойство избыточных зарядов распределяться только по внешней поверхности проводника нашло практическое применение. Чтобы заряд, сосредоточенный на проводнике A , полностью передать проводнику B , последнему следует придать форму почти замкнутой полости. Если проводник A ввести внутрь этой полости и коснуться её поверхности, то весь заряд с проводника A перейдёт на внешнюю поверхность проводника B (с момента соприкосновения проводников образуется единый проводник, внутри которого не может быть избыточных зарядов: все они переходят на внешнюю поверхность).

1.26. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1. При внесении незаряженного проводника во внешнее электрическое поле в нём происходит особый процесс, называемый электростатической индукцией. Это явление заключается в том, что свободные заряды в проводнике под действием поля приходят в движение: положительные – в направлении поля, отрицательные – против поля. В результате на поверхности (и только на поверхности!) проводника появляются нескомпенсированные свободные заряды. Эти заряды называются *наведёнными* или *индуцированными*.

Индукционные заряды создают внутри проводника своё собственное поле, противоположное по направлению внешнему полю. Разделение зарядов в проводнике, возрастание поверхностной плотности индуцированных зарядов происходит до тех пор, пока электрическое поле в проводнике не исчезнет во все, т.е. пока не будут выполнены условия равновесия (1.25.1)...(1.25.4). И это имеет место при любых напряжённостях внешнего поля! Индуцированные заряды всегда полностью компенсируют внешнее поле внутри проводника. Проводники, образно говоря, «разрушают», «уничтожают» электростатическое поле в той области пространства, которую они сами занимают (вспомним, что поляризационные заряды компенсируют внешнее поле в диэлектриках лишь частично).

2. Индуцированные заряды, в отличие от поляризационных, могут быть сняты с проводника, например, в результате заземления. Стадии такого «снятия» показаны на рис. 1.66:

а) индуцирующий заряд q (заряд, создающий внешнее поле) вызвал разделение зарядов в проводнике B ;

б) проводник B «заземлили», отрицательные заряды ушли в «землю»;

в) заряд q удален; оставшийся на проводнике положительный заряд распределяется по его поверхности в соответствии с условиями равновесия. Заметим, однако, что снять с проводника оба индуцированных заряда (т.е. и положительный, и отрицательный) одновременно

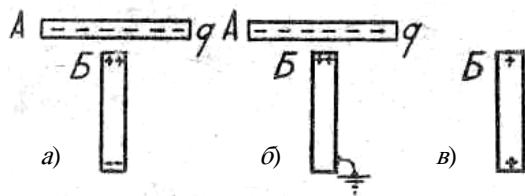


Рис. 1.66

невозможно. Отвести в землю можно лишь тот заряд, знак которого совпадает со знаком индуцирующего заряда. Заряд противоположного знака удерживается на проводнике взаимодействием с индуцирующим зарядом.

3. Индуцированные заряды, в отличие от поляризационных, могут быть отделены друг от друга. Для этого достаточно в присутствии индуцирующего заряда разъединить разноименно заряженные части проводника. Стадии этого разъединения показаны на рис. 1.67:

а) разделение зарядов в проводнике B завершилось, при этом части проводника B плотно прижаты друг к другу;

б) в присутствии влияющего заряда q заряженные части проводника B слегка раздвинуты;

в) заряд q удален; части 1 и 2 раздвинуты на большое расстояние. Заряды на проводниках 1 и 2 растекаются по поверхности в соответствии с условиями равновесия. Если эти разноименно заряженные проводники снова соединить, но уже в отсутствие наводящего заряда, то электризация проводника исчезнет полностью и он окажется вновь незаряженным. Это свидетельствует о том, что при электризации через влияние заряды не «создаются», а только перераспределяются.

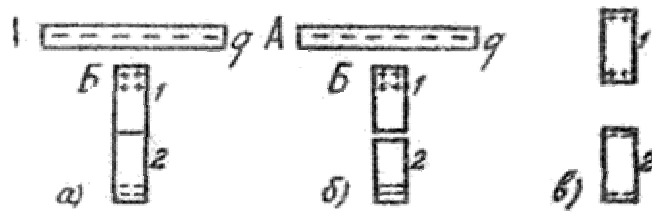


Рис. 1.67

4. Поляризованное состояние диэлектрика при определённых условиях может быть сохранено и в отсутствие внешнего электрического поля (электреты). Электризация проводников, обусловленная электростатической индукцией, в отсутствие внешнего поля не может быть сохранена (имеется в виду одновременное раздельное существование на проводнике положительных и отрицательных индуцированных зарядов).

5. Индуцированные заряды искажают то поле, которое существовало в пространстве в их отсутствие. Это искажение обусловлено двумя причинами:

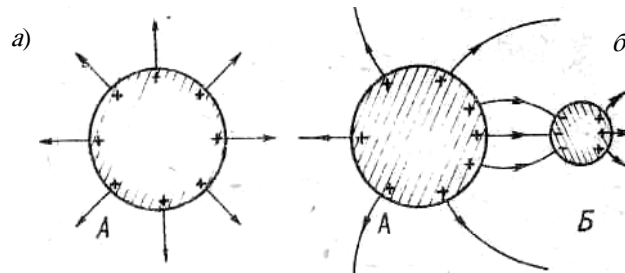


Рис. 1.68

- 1) индуцированные заряды вызывают перераспределение зарядов, создающих внешнее поле;
- 2) индуцированные заряды создают своё собственное поле, которое накладывается на внешнее поле, деформирует его.

На рисунке 1.68 показано, какими были линии поля заряженного проводящего шара *A* до (а) и после (б) внесения в это поле незаряженного проводника *B*.

6. Проводник, внесённый в электрическое поле, не вызывает перераспределения зарядов, создающих это поле, не искажает это поле, если он заполняет всю область между какими-либо двумя эквипотенциальными поверхностями. В этом случае поля, созданные индуцированными зарядами противоположных знаков, во внешнем пространстве компенсируют друг друга, в результате внешнее поле не искажается, заряды, создающие это поле, не перераспределяются.

На рисунке 1.69 сплошные линии изображают линии однородного поля. Пунктиры изображают эквипотенциальные поверхности. Если внести в это поле большую плоскопараллельную металлическую пластину, то заряды, индуцируемые на её поверхностях, образуют две параллельные разноименно заряженные плоскости с одинаковой по величине поверхностной плотностью зарядов $|\sigma_+''| = |\sigma_-''|$. Как известно, поле такой системы зарядов во внешнем пространстве равно нулю.

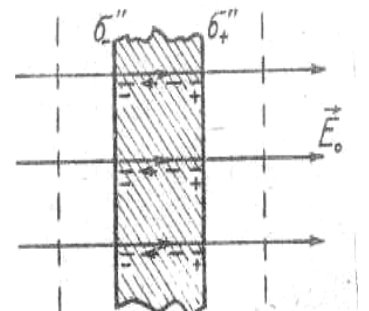


Рис. 1.69

7. Электрическое поле внутри проводника отсутствует независимо от того, сплошной этот проводник или полый («разрушают» поле в проводнике индуцированные заряды, а они, как мы выяснили, расположены на внешней поверхности).

Отсутствие поля в полых проводниках используют для электростатической защиты.

Чтобы оградить чувствительные к внешним полям приборы, схемы, участки цепей и т.д., их *экранируют*, т.е. помещают внутрь тонких полых замкнутых проводников, которые, как правило, заземляют. При этом вместо сплошных экранов можно использовать негустую проволочную сетку.

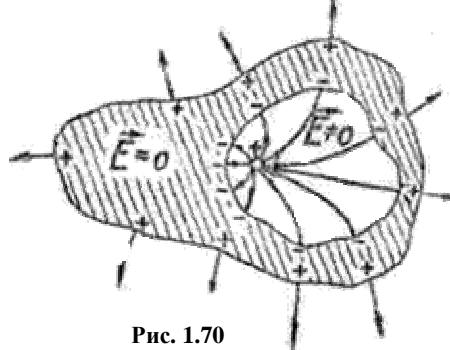


Рис. 1.70

Заметим, что замкнутый полый проводник защищает от действия только тех полей, которые созданы внешними зарядами.

Если нескомпенсированные заряды имеются *внутри* полости, то поле в ней отлично от нуля (рис.1.70).

1.27. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАРЯДОМ И ПОТЕНЦИАЛОМ УЕДИНЁННОГО ПРОВОДНИКА. ЭЛЕКТРОЁМКОСТЬ

1. Как показывает теоретический расчёт и подтверждает опыт, потенциал уединённого* проводника зависит от:

- заряда, сосредоточенного на проводнике;
- диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник;
- «геометрии» проводника – его размеров и формы.

2. Характер распределения заряда на проводнике определяется исключительно формой проводника и не зависит от величины заряда. Последнее означает, что каждая новая порция зарядов распределяется так же, как и предыдущая: если общий заряд проводника увеличился в n раз, то во столько же раз возрастает в каждой точке поверхности проводника и плотность зарядов σ .

Потенциал поля в любой точке наблюдения, в том числе и в точке на поверхности проводника, согласно принципу суперпозиции равен

$$\varphi = \int d\varphi = \int_s \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad (1.27.1)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на площадке dS ; r – расстояние от площадки dS до точки наблюдения; S – площадь внешней поверхности проводника.

Из этой формулы видно, что если поверхностная плотность зарядов в каждой точке проводника увеличится в некоторое число раз, то во столько же раз увеличится потенциал любой точки поля, и, стало быть, потенциал самого проводника. Мы обнаруживаем, таким образом, что потенциал уединённого проводника пропорционален сосредоточенному на проводнике заряду.

3. Отношение заряда проводника к его потенциалу для данного проводника есть величина постоянная, не зависящая ни от заряда, ни от потенциала. Следовательно, эта величина может служить характеристикой проводника. Она называется *электроёмкостью* или просто *ёмкостью проводника*.

Электроёмкость проводника – скалярная физическая величина, характеризующая связь между зарядом проводника и его потенциалом и численно равная заряду, который необходимо сообщить незаряженному проводнику, чтобы потенциал проводника стал равным единице:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.27.2)$$

Здесь предполагается, что потенциал проводника отсчитывается относительно точек, в которых поле, созданное зарядом проводника, равно нулю, т.е. относительно бесконечности.

Ограничения в выборе нулевого уровня потенциала снимаются (потенциал проводника можно отсчитывать относительно любой точки пространства), если оценивать изменение потенциала проводника, обусловленное изменением заряда проводника.

В этом случае

* Теоретически уединённый проводник – это проводник, удалённый от других тел на бесконечно большое расстояние. Практически проводник можно считать уединённым, если сообщаемый ему заряд не вызывает сколько-нибудь заметного смещения зарядов в ближайших к проводнику телах.

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \phi} \text{ или } C = \frac{dq}{d\phi}, \quad (1.27.3)$$

где $\Delta\phi$ и $d\phi$ – изменения потенциала, соответствующие изменениям заряда проводника на конечную (Δq) и бесконечно малую (dq) величину. В этом случае электроёмкость проводника численно равна количеству электричества, на которое нужно изменить заряд проводника, (уменьшить или увеличить), чтобы потенциал проводника изменился на единицу: если $|\Delta\phi|=1$, то $|C|=|\Delta q|$.

Определения (1.27.2) и (1.27.3) равноправны и не приводят к различию численного значения емкости рассматриваемого проводника.

4. Электроёмкость уединённого проводника, погруженного в безграничную изотропную среду, зависит только от диэлектрической проницаемости среды и геометрических факторов – формы внешней поверхности проводника и его линейных размеров.

5. Ёмкость не зависит от материала проводника, его температуры и агрегатного состояния, от размеров и формы внутренних замкнутых полостей. Ёмкость уединённого проводника не зависит также от заряда и потенциала проводника (нельзя, следовательно, формулу $C = \frac{q}{\phi}$ читать: «ёмкость прямо пропорциональна заряду проводника и обратно пропорциональна его потенциалу»!)

6. Расчёт ёмкости уединённых проводников сводится, в конечном счёте, к расчёту их потенциалов.

Рассмотрим в качестве примера расчёт ёмкости уединённого шара. Предположим, что шару сообщили заряд q . Этот заряд создаст в окружающем пространстве электрическое поле, напряжённость которого в произвольной точке равна $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$, а на поверхности шара $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0^2}$ (r_0 – радиус шара).

Для расчёта потенциала шара воспользуемся связью потенциала с напряжённостью, т.е. $-d\phi = E dr$.

Тогда

$$\phi = \int_{r_0}^{\infty} E dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_0}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0}. \quad (1.27.4)$$

Разделив заряд шара q на его потенциал ϕ , получим формулу ёмкости уединённого шара:

$$C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0. \quad (1.27.5)$$

Ёмкость уединённого шара, погруженного в изотропный безграничный диэлектрик, зависит только от радиуса шара и от диэлектрической проницаемости среды.

7. Из формулы $C = \frac{q}{\phi}$ устанавливаются единицы измерения ёмкости.

Единица ёмкости в системе СИ называется фарад (Ф).

Фарад – это ёмкость такого уединённого проводника, потенциал которого изменяется на 1 вольт при изменении заряда на 1 кулон:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}.$$

Подставив в формулу (1.27.5) единицы C (фарад) и r_0 (метр), найдём, что единицей электрической постоянной ϵ_0 в системе СИ является «фарад на метр» (Ф/м), убедитесь в том, что Ф/м и Кл²/Н·м² – одно и то же.

Фарад – весьма крупная единица ёмкости. Чтобы составить представление о величине этой единицы, найдём радиус шара, который, находясь в вакууме ($\epsilon = 1$), обладал бы ёмкостью в 1 фарад.

Из (1.27.5) получаем

$$r_0 = \frac{C}{4\pi\epsilon\epsilon_0} = \frac{1 \text{ Ф}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}} = 9 \cdot 10^9 \text{ м}.$$

Ёмкостью в один фарад обладал бы уединённый проводящий шар радиусом 9 млн. км! (Ёмкость Земного шара всего лишь $7,1 \cdot 10^{-4}$ Ф).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как распределяются заряды, сообщённые проводнику?
2. Сформулируйте условия равновесия зарядов на проводнике.
3. Чему равна напряжённость электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника?
4. В чём заключается явление электростатической индукции и каково его принципиальное отличие от явления поляризации?
5. Чему равны напряжённость и потенциал внутри проводника, внесённого в электростатическое поле?
6. Что называется ёмкостью проводника? От каких факторов зависит ёмкость?
7. Дайте определение единицы измерения ёмкости в системе СИ.

КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1.28. КОНДЕНСАТОР

1. Уединённые проводники обычных размеров обладают ничтожно малой ёмкостью и поэтому не способны накапливать сколько-нибудь заметные статические заряды.

Между тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при относительно небольших собственных размерах накапливали бы *значительные* по величине заряды при *невысоких потенциалах* (без таких устройств, называемых *конденсаторами* (от лат. condensare – сгущать, накапливать), не обходится, например, ни одна радиосхема).

2. Чтобы понять, что положено в основу устройства конденсаторов, рассмотрим, как влияют на ёмкость проводника окружающие его тела.

Если вблизи данного проводника оказываются какие-либо другие тела, то при сообщении проводнику заряда на этих телах появляются (вследствие индукции или поляризации) индуцированные или связанные заряды, причём ближайšie к наводящему заряду q оказываются заряды противоположного знака (рис. 1.71). Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом q , в том месте, где находится проводник.

В результате потенциал проводника при наличии других тел оказывается меньше того потенциала, которым обладал бы этот проводник (при том же заряде), будучи уединённым. Ёмкость проводника увеличивается (это видно из формулы $C = \frac{q}{\phi}$).

Располагая соответствующим образом проводники и заполняя пространство между ними диэлектриками с большой диэлектрической проницаемостью и высокой электрической прочностью, можно получить конденсаторы достаточно большой ёмкости при сравнительно небольших собственных размерах проводников.

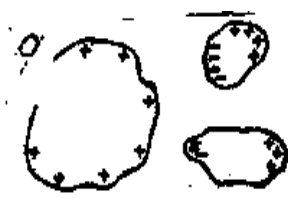


Рис. 1.71

3. Обычно конденсаторы делают в виде двух близко расположенных проводников, разделённых прослойкой из диэлектрика. Проводники, образующие конденсатор, называются обкладками конденсатора. Чтобы окружающие тела не оказывали влияния на ёмкость конденсатора, нужно, чтобы электрическое поле, созданное зарядами обкладок, было локализовано только между обкладками. Для этого обкладкам придают определённую форму, определённым образом располагают их друг относительно друга и соответствующим образом заряжают.

Если обкладкам придать форму двух близко расположенных пластин, двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров и зарядить их равными по величине, но противоположными по знаку зарядами, то электрическое поле действительно будет сосредоточено только внутри конденсатора (линии индукции будут начинаться и обрываться на обкладках).

В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические и цилиндрические конденсаторы (рис. 1.72).

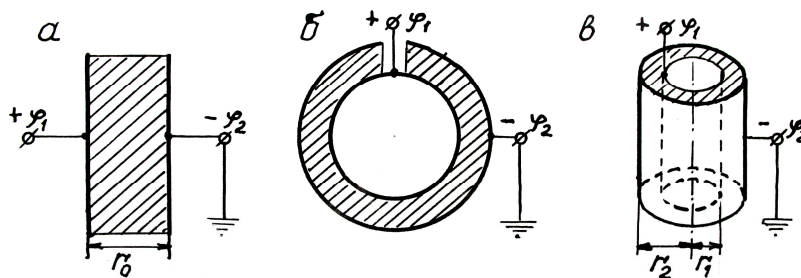


Рис. 1.72

Заряд одной из обкладок называют зарядом конденсатора.

4. Ёмкостью конденсатора называется величина, характеризующая связь между зарядом конденсатора и разностью потенциалов на его обкладках и численно равная заряду, который нужно сообщить конденсатору, чтобы изменить разность потенциалов между обкладками на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (1.28.1)$$

5. Ёмкость конденсатора зависит от формы, размеров и взаимного расположения обкладок, а также от проницаемости ϵ диэлектрика, заполняющего пространство между ними. При зарядке одна из обкладок обычно заземляется. Если незаземлённой обкладке сообщается заряд q_+ , то на заземлённой обкладке автоматически появляется заряд q_- , равный по величине q_+ (объясните, почему).

1.29. РАСЧЁТ ЁМКОСТИ ПРОСТЕЙШИХ КОНДЕНСАТОРОВ

1. Расчёт ёмкости конденсаторов осуществляется по той же схеме, что и расчёт ёмкости уединённого проводника. Конденсатору мысленно сообщают некоторый заряд q . Зная, как распределится этот заряд, рассчитывают разность потенциалов между обкладками. Разделив в соответствии с формулой (1.28.1) заряд, на разность потенциалов, находят ёмкость.

2. Рассмотрим ряд простейших примеров.

1) Рассчитаем ёмкость плоского конденсатора (рис. 1.72, а).

Пусть S – площадь одной из его пластин; r_0 – расстояние между пластинами; ϵ – проницаемость диэлектрика (нужно, чтобы диэлектрик был однородным, изотропным и заполнял зазор между пластинами полностью). Обозначим потенциалы обкладок соответственно через φ_1 и φ_2 . В соответствии с (1.28.1)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

В § 1.16 было найдено, что разность потенциалов между двумя параллельными бесконечными плоскостями равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} r_0, \quad (1.29.1)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов; r_0 – расстояние между плоскостями.

Если расстояние между пластинами плоского конденсатора мало по сравнению с линейными размерами пластин, то искажением поля вблизи краёв пластин можно пренебречь и находить разность потенциалов по той же формуле, что и в случае бесконечных пластин.

Если заряд обкладки q , а её площадь S , то поверхностная плотность зарядов равна $\sigma = \frac{q}{S}$, тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} r_0.$$

Разделив q на выражение для $\varphi_1 - \varphi_2$, получим формулу ёмкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{r_0}. \quad (1.29.2)$$

Ёмкость плоского конденсатора зависит от площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости диэлектрика.

б) Найдём ёмкость сферического конденсатора (рис. 1.72, б).

Пусть r_1 – радиус внутренней обкладки; r_2 – радиус внешней обкладки.

Согласно (1.16.16) разность потенциалов между двумя концентрическими сферами равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}, \quad (1.29.3)$$

где q – заряд внутренней сферы.

Разделив заряд q на разность потенциалов, получим выражение для ёмкости сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (1.29.4)$$

Ёмкость сферического конденсатора зависит от радиусов внутренней и внешней обкладок (она тем больше, чем больше радиусы обкладок и чем меньше зазор между ними) и от электрических свойств диэлектрика.

Преобразуем формулу (1.29.4), разделив числитель и знаменатель на r_2 ,

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}.$$

При $r_2 = \infty$ (практически при $r_2 \gg r_1$)

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1, \quad (1.29.5)$$

т.е. внутреннюю обкладку в этом случае можно рассматривать как уединённый шар.

Из сопоставления формул (1.29.4) и (1.29.5) видно, что при любом конечном значении r_2 ёмкость сферического конденсатора больше ёмкости уединённого шара радиуса r_1 (r_1 – радиус внутренней обкладки конденсатора). В самом деле, ёмкость конденсатора $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1}$ ёмкость уединённого шара

$$C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1. \text{ Дробь } \frac{r_2}{r_2 - r_1} \text{ всегда больше единицы, следовательно, } C > C_{\text{ш}}.$$

Если ширина зазора между обкладками сферического конденсатора значительно меньше радиусов обкладок, то его ёмкость можно приближенно рассчитывать по формуле, полученной для плоского конденсатора (1.29.2), понимая под S площадь одной из обкладок (безразлично какой – внутренней или внешней), а под l_0 – ширину зазора между обкладками.

3) Вычислим ёмкость цилиндрического конденсатора (рис. 1.72, в). Пусть радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно r_1 и r_2 , высота конденсатора h , проницаемость диэлектрика ϵ .

В § 1.16 было найдено, что разность потенциалов между двумя коаксиальными цилиндрами бесконечной длины равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma r_1}{\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (1.29.6)$$

где σ – заряд, приходящийся на единицу поверхности внутреннего цилиндра.

Если зазор между обкладками цилиндрического конденсатора мал, разность потенциалов между ними можно найти по формуле (1.29.6). Полный заряд конденсатора найдём, умножив поверхностную плотность зарядов σ на площадь $2\pi r_1 h$:

$$q = \sigma 2\pi r_1 h.$$

Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon h} \ln \frac{r_2}{r_1}$. Подставим $\varphi_1 - \varphi_2$ в определяющее уравнение для ёмкости, получим

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1.29.7)$$

5. Отметим в заключение, что каждый конденсатор, помимо ёмкости, характеризуется ещё рабочим, испытательным и пробивным напряжением (здесь обозначает «разность потенциалов») (при маркировке конденсаторов указывается рабочее напряжение).

Рабочее напряжение – напряжение, которое конденсатор должен выдерживать длительное время, т.е. в рабочем режиме.

Испытательное напряжение – напряжение, которое конденсатор должен выдерживать при кратковременном испытании (примерно до 1 мин). Испытательное напряжение обычно превышает рабочее в 2 – 3 раза.

Пробивное напряжение – минимальное напряжение, при котором наступает пробой (локальное разрушение диэлектрика, обусловленное действием электрического поля, потеря диэлектриком изолирующих свойств) диэлектрика.

Все названные характеристики конденсаторов зависят от конструкции обкладок и от электрической прочности диэлектрика.

Электрическая прочность или пробивная напряжённость – это предельная для данного диэлектрика напряжённость электрического поля, при которой диэлектрик ещё сохраняет свои изоляционные свойства. Так, например, электрическая прочность радиофарфора составляет $(1,5...2) \cdot 10^5$ В/см).

1.30. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

1. Конденсаторы могут соединяться в батарее. Соединять конденсаторы приходится тогда, когда нет конденсаторов нужной ёмкости, или конденсаторов, рассчитанных на данное напряжение.

Конденсаторы могут быть соединены последовательно, параллельно и комбинированно.

2. Введём понятие «заряд батареи конденсаторов».

Если незаземлённый электрод заряженной батареи конденсаторов соединить с «землёй», то батарея разрядится и по проводу заземления пройдет вполне определённый электрический заряд – тот заряд, который батарея накопила в процессе зарядки и который она может «отдать». Заряд, который может отдать батарея конденсаторов при разрядке, называют зарядом этой батареи (если второй электрод батареи не заземлён, то зарядом батареи следует назвать заряд, прошедший по проводнику, накоротко соединяющему положительный и отрицательный электроды батареи).

3. Зарядить конденсатор или батарею конденсаторов – это значит подключить их к источнику, создающему разность потенциалов.

Обратим внимание на терминологию. Когда конденсатор или батарея конденсаторов присоединены к источнику, говорят, что к ним приложено напряжение, действует напряжение (разность потенциалов).

4. Рассмотрим последовательное соединение конденсаторов (рис. 1.73). Пусть n конденсаторов ёмкостью C_1, C_2, \dots, C_n соединены последовательно. Если конденсаторы соединены последовательно, то

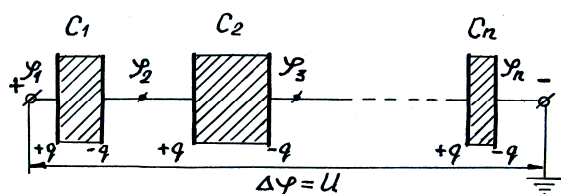


Рис. 1.73

при подключении их к источнику напряжения все конденсаторы получают одинаковый заряд.

Объяснение. Пусть крайней обкладке первого конденсатора (C_1) сообщен положительный заряд q_+ (что и происходит при подаче на батарею напряжения). На второй обкладке этого же конденсатора по индукции появится заряд q_- , равный q_+ по величине ($|q_-| = |q_+|$). Так как правая обкладка первого конденсатора и левая второго образуют единый проводник, который до этого был не заряжен, то на первой пластине второго конденсатора появится положительный заряд q_+ – точно такой же, как и на первом конденсаторе. Описанный процесс охватит все конденсаторы, поэтому все конденсаторы получают одинаковый заряд.

Найдём заряд батареи. Для этого положительный электрод батареи соединим с землёй (будем считать, что другой электрод батареи заземлён). Положительные заряды всех конденсаторов, кроме первого, отделены от земли прослойками из диэлектриков, следовательно, уйти в землю не могут (для этого они должны были бы пройти сквозь диэлектрики, что невозможно). Значит, при разрядке батареи по проводу заземления пройдет заряд только одного, конденсатора (q). Это и есть заряд батареи.

Итак,

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = q. \quad (1.30.1)$$

Найдём ёмкость батареи.

Обозначим потенциал левой обкладки первого конденсатора φ_1 , потенциал правой обкладки первого конденсатора и, следовательно, левой обкладки второго конденсатора (эти обкладки образуют единую эквипотенциальную поверхность) φ_2 и т.д.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма напряжений на отдельных конденсаторах равна напряжению $\Delta\varphi$, приложенному к батарее:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \Delta\varphi. \quad (1.30.2)$$

Разность потенциалов для краткости обозначим буквой u :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = u_1; \quad \varphi_2 - \varphi_3 = u_2; \quad \varphi_{n-1} - \varphi_n = u_n; \quad \Delta\varphi = u.$$

Перепишем соотношение (1.30.2), используя новые обозначения:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u. \quad (1.30.3)$$

Выразим напряжение на каждом из конденсаторов через заряд и соответствующую ёмкость:

$$u_1 = \frac{q}{c_1}; \quad u_2 = \frac{q}{c_2}; \quad \dots; \quad u_n = \frac{q}{c_n}.$$

Обозначив общую ёмкость всех конденсаторов символом C , получим для батареи конденсаторов $u = \frac{q}{C}$.

Заменяя в выражении (1.30.3) разности потенциалов через заряды и ёмкости, получим

$$\frac{q}{c_1} + \frac{q}{c_2} + \dots + \frac{q}{c_n} = \frac{q}{C},$$

или после сокращения на q :

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n} = \frac{1}{C}. \quad (1.30.4)$$

Вывод. при последовательном соединении конденсаторов величина, обратная ёмкости батареи, равна сумме величин, обратных ёмкостям отдельных конденсаторов.

Найдём, как распределяется напряжение, приложенное к батарее, между отдельными конденсаторами. Для этого в соотношении (1.30.1) заряды выразим через напряжения и ёмкости:

$$c_1 u_1 = c_2 u_2 = \dots = c_n u_n,$$

откуда следует, что

$$u_1 : u_2 : \dots : u_n = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \dots : \frac{1}{c_n}. \quad (1.30.5)$$

Напряжения, действующие на отдельных конденсаторах при последовательном соединении, обратно пропорциональны их ёмкостям: чем меньше ёмкость конденсатора, тем большее напряжение будет на нем действовать,

Примечание. Соотношение (1.30.5) справедливо только в том случае, если диэлектрики в конденсаторах – идеальные, т.е. совершенно не проводят ток. Реальные заполнители конденсаторов, хотя и слабо, но проводят ток. Поэтому в цепях с постоянным напряжением разности потенциалов, действующие на отдельных конденсаторах, зависят не от ёмкости конденсаторов, а от сопротивления диэлектриков.

5. Рассмотрим теперь параллельное соединение конденсаторов.

Пусть n конденсаторов ёмкостью c_1, c_2, \dots, c_n соединены параллельно (рис. 1.74). После подключения такой батареи к источнику напряжения на всех конденсаторах будет действовать одно и то же напряжение $\varphi_1 - \varphi_2 = u$ (все верхние обкладки образуют единый проводник, следовательно, находятся под одним и тем же потенциалом φ_1 ; аналогично, все заземлённые обкладки имеют один и тот же потенциал φ_2):

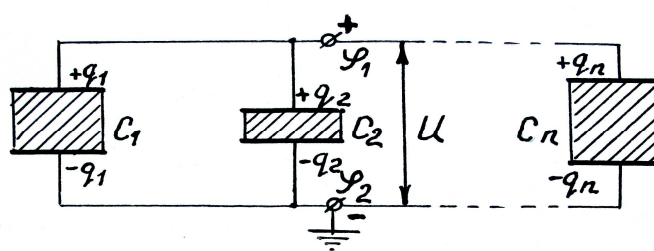


Рис. 1.74

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u. \quad (1.30.6)$$

Что касается зарядов, накапливаемых отдельными конденсаторами, то они оказываются разными, так как различны ёмкости конденсаторов.

Заряд батареи в этом случае равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n. \quad (1.30.7)$$

Выразим заряды через ёмкость и напряжение:

$$q_1 = c_1 u, \quad q_2 = c_2 u, \quad \dots \quad q_n = c_n u, \quad q = cu$$

и подставим в соотношение (1.30.7):

$$cu = c_1 u + c_2 u + \dots + c_n u.$$

После сокращения на u получим

$$c = c_1 + c_2 + \dots + c_n. \quad (1.30.8)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов ёмкость батареи равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов.

При параллельном соединении заряд, накапливаемый отдельными конденсаторами, прямо пропорционален ёмкости (докажите это сами).

б. При комбинированном (смешанном) соединении часть конденсаторов соединяется последовательно, а часть – параллельно.

1.31. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА И КОНДЕНСАТОРА

1. В § 1.13 было показано, что всякое заряженное тело, находящееся во внешнем электростатическом поле, обладает потенциальной энергией.

Естественно поставить вопрос о том, обладает ли потенциальной энергией заряженное тело в отсутствие внешнего поля.

Ряд соображений позволяет сделать вывод, что заряженное тело, находящееся только в собственном электростатическом поле, обладает потенциальной энергией.

Потенциальная энергия, которой обладает заряженный проводник в отсутствие внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника.

2. Найдём выражение для собственной энергии.

Будем мысленно заряжать проводник, перенося заряды из бесконечности на поверхность проводника малыми порциями dq . Перенос первой порции не потребует совершения работы: проводник первоначально не заряжен и, стало быть, не взаимодействует с зарядом, который на него переносится. Перенос же всех последующих порций потребует вполне определённой работы, так как проводник будет заряжен, и вокруг него будет существовать электрическое поле.

Пусть на проводнике уже имеется заряд q . Если ёмкость этого проводника C , то его потенциал примет значение $\varphi = \frac{q}{C}$.

Чтобы перенести заряд dq с нулевого уровня потенциала (из бесконечности) на поверхность проводника, придётся затратить работу $dA = dq(\varphi - \varphi_\infty) = dq\varphi$ так как $\varphi_\infty = 0$.

Обратим внимание на то, что здесь dA обозначает работу, совершаемую не электростатическими силами, а внешними силами против электростатических сил. За счёт работы внешних сил заряженный

проводник «запасает» потенциальную энергию. Приращение потенциальной энергии проводника равно работе внешних сил:

$$dA = dW,$$

тогда $dW = \varphi dq = \frac{q dq}{c}$.

Будем считать потенциальную энергию незаряженного проводника, не создающего вокруг себя поля, равной нулю. Тогда энергия проводника, обладающего зарядом q , будет равна

$$W = \int_0^q dW = \int_0^q \frac{q dq}{c} = \frac{q^2}{2c}. \quad (1.31.1)$$

Учитывая, что $c = \frac{q}{\varphi}$, получим следующие выражения для собственной энергии заряженного проводника:

$$W = \frac{q^2}{2c} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{c\varphi^2}{2}. \quad (1.31.2)$$

3. Столь же легко получить выражение для собственной энергии заряженного конденсатора. Так как заряды обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку, процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малых порций dq с одной обкладки на другую.

В результате такого переноса между обкладками возникнет всё возрастающая разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = u$. Работа переноса каждой очередной порции зарядов dq равна

$$dA = dq u,$$

где u – разность потенциалов между обкладками, действующая во время переноса порции dq .

Интегрируя последнее выражение и принимая потенциальную энергию незаряженного конденсатора равной нулю, получим формулы для собственной энергии конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2c} = \frac{qu}{2} = \frac{cu^2}{2}. \quad (1.31.3)$$

1.32. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

1. Представим, что два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2 находятся на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов находится в электрическом поле, созданном другим зарядом. Пользуясь соотношением (1.14.2), энергию взаимодействия этих зарядов можно выразить через потенциалы соответствующих полей. Если считать, что поле создано зарядом q_1 , то потенциальная энергия рассматриваемых зарядов будет равна

$$W = q_2 \varphi_2, \quad (1.32.1)$$

где φ_2 – потенциал, создаваемый зарядом q_1 в той точке, где находится заряд q_2 .

Если же полагать, что поле создано зарядом q_2 , то потенциальная энергия этой же системы зарядов будет равна

$$W = q_1 \varphi_1, \quad (1.32.2)$$

где φ_1 – потенциал, создаваемый зарядом q_2 в той точке, где находится заряд q_1 .

Из (1.32.1) и (1.32.2) следует, что $q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2$ (1.32.3)

Запишем соотношение (1.32.1) в следующем виде:

$$W = \frac{q_2 \varphi_2}{2} + \frac{q_2 \varphi_2}{2}.$$

Заменим в этой формуле первое слагаемое $q_2 \varphi_2$ на $q_1 \varphi_1$ (в соответствии с (1.32.3)):

$$W = \frac{q_1 \varphi_1}{2} + \frac{q_2 \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (1.32.4)$$

Формула (1.32.4) выражает тот факт, что заряды q_1 и q_2 равноправны и входят в выражение полной энергии симметрично. Действительно,

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad \text{а} \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

Подставив φ_1 и φ_2 в (1.32.4), получим

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \right). \quad (1.32.5)$$

2. Полученный результат можно обобщить на систему, состоящую из любого числа точечных зарядов. Потенциальная энергия n точечных зарядов выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (1.32.6)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i -го, в той точке, где находится заряд q_i .

1.33. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Уместно поставить вопрос о локализации собственной энергии заряженного проводника, где пространственно сосредоточена эта энергия – на поверхности проводника, т.е. на зарядах, или вне его – в окружающем проводник электрическом поле?

Решить этот вопрос электростатическими опытами нельзя, так как электростатические поля и породившие их электрические заряды неотделимы друг от друга.

Изучение же электродинамических явлений и, в частности, электромагнитного поля, убеждает в том, что носителем энергии является поле.

2. Преобразуем полученное нами выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряжённость или индукция. Проще всего это сделать на примере плоского конденсатора.

Энергия заряженного плоского конденсатора ёмкостью C в соответствии с (1.31.3) равна

$$W = \frac{Cu^2}{2}, \quad (1.33.1)$$

где u – напряжение на конденсаторе.

Ёмкость плоского конденсатора равна $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{r_0}$, разность потенциалов $u = Er_0$, (E – напряжённость поля, поле однородно).

Подставив C и u в формулу (1.33.1), получим

$$W = \frac{\epsilon_0\epsilon S E^2 r_0^2}{2r_0} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} V, \quad (1.33.2)$$

так как $Sr_0 = V$ – объём, занимаемый полем конденсатора.

3. Пространственное распределение энергии характеризует величина, называемая плотностью энергии. Плотность энергии ω численно равна энергии поля, заключённой в единице объёма. Если энергия распределена равномерно, то объёмная плотность вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{W}{V}, \quad (1.33.3)$$

если неравномерно, то по формуле

$$\omega = \frac{dW}{dV}. \quad (1.33.4)$$

Так как электрическое поле в плоском конденсаторе однородно, то энергия, заключённая в нём, распределена равномерно по всему объёму конденсатора. Следовательно, разделив энергию конденсатора W на объём поля, заключённого в нём, получим выражение для плотности энергии:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2}. \quad (1.33.5)$$

Можно показать, что полученная формула справедлива и для неоднородного поля.

4. Принимая во внимание, что в изотропном диэлектрике $E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon}$, плотность энергии можно выразить так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0\epsilon}, \quad (1.33.6)$$

5. Зная пространственное распределение объёмной плотности энергии, можно решить обратную задачу – найти энергию, заключённую во всём пространстве, где имеется поле:

$$W = \int_V \omega(x, y, z) dV, \quad (1.33.7)$$

где $\omega(x, y, z)$ – объёмная плотность энергии; dV – элементарный объём; V – объём всего пространства, где локализовано поле.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется конденсатором? Что такое ёмкость конденсатора?
2. Как рассчитывается ёмкость уединённого проводника и конденсатора?
3. Рассчитайте ёмкость плоского и сферического конденсаторов.
4. Чему равна ёмкость батареи, составленной из последовательно и параллельно соединённых конденсаторов (вывод)?
5. Рассчитайте ёмкость батареи при параллельном соединении конденсаторов.
6. Что такое собственная энергия проводника и конденсатора?
7. Каково выражение для собственной энергии заряженного проводника и конденсатора?
8. Как вычисляется энергия системы точечных зарядов?
9. Что называется объёмной плотностью энергии? Как она выражается через характеристики электрического поля – напряжённость и индукцию?
10. Как вычисляется энергия электрического поля?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Определить электрическую ёмкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 1,5$ мм, если площадь пластин $S = 100$ см.

Решение. Ёмкость конденсатора по определению $C = \frac{q}{U}$, где q – заряд на пластинах конденсатора, U – разность потенциалов пластин.

Заменив разность потенциалов суммой напряжений на слоях диэлектриков, получим $C = \frac{q}{U_1 + U_2}$, где U_1 – напряжение на первом слое диэлектрика; U_2 – напряжение на втором слое диэлектрика. Приняв во внимание, что $q = \sigma S$; $U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_1} d_1$ и $U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_2} d_2$, получим

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_1} d_1 + \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_2} d_2},$$

где σ – поверхностная плотность заряда на пластинах; E_1, E_2 – напряжённости поля в диэлектриках; D – индукция поля в диэлектриках. По теореме Гаусса $D = \sigma$.

С учётом замечаний окончательно получим

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}.$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления:

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{3}} = 9,83 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} = 98,3 \text{ пФ}.$$

Пример 7. Металлический шар радиусом $R = 3$ см несёт заряд $q = 2 \cdot 10^{-2}$ мкКл. Шар окружён слоем парафина толщиной $q = 2$ см. Определить энергию электрического поля, заключённого в слое диэлектрика.

Решение. Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно. Однако объёмная плотность энергии будет одинакова во

всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика: $dW = \omega dV$, где ω – объёмная плотность энергии; dV – объём элементарного слоя диэлектрика (рис. 1.75). Полная энергия выразится интегралом

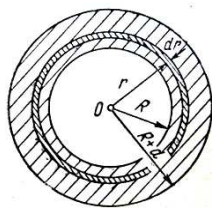


Рис. 1.75

$$W = \int \omega dV = 4\pi \int_R^{R+d} \omega r^2 dr,$$

где r – радиус элементарного сферического слоя; dr – толщина этого слоя. Объёмная плотность энергии определяется по формуле

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2},$$

где E – напряжённость поля.

В нашем случае для сферы

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4}.$$

Подставляя это выражение плотности в формулу для полной энергии и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{q^2 d}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R+d)}.$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления:

$$W = \frac{(2 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} (3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под *электрическим током* понимают упорядоченное движение заряженных частиц или заряженных макроскопических тел. При этом различают токи проводимости и конвекционные токи.

Токи проводимости возникают под действием электрического поля, когда равновесное распределение зарядов в проводнике нарушается и касательная составляющая вектора напряжённости отлична от нуля, т.е. $E_t \neq 0$ и потенциалы в разных его точках различны:

$$\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \dots \neq \varphi_n.$$

Необходимыми условиями существования тока проводимости является наличие носителей заряда и электростатического поля.

Носителями зарядов могут быть свободные электроны, ионы, электроны проводимости, дырки и др. Для создания электрического поля необходимы источники электрической энергии.

Направление движения положительных зарядов в проводнике определяет направление тока, а их количество – силу тока.

Сила тока – скалярная физическая величина I , равная отношению заряда dq , переносимого при электрическом токе сквозь рассматриваемую поверхность S за малый промежуток времени, к длительности dt этого промежутка

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{2.1.1}$$

Если направление и величина тока с течением времени не меняются, то ток называется постоянным. Для этого необходимо, чтобы везде $E = \text{const}$. В противном случае ток будет называться переменным.

Широкое распространение получил переменный ток, изменяющийся по закону синуса или косинуса, например

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где I_0 – амплитуда тока; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая (циклическая) частота; $\omega t + \varphi_0$ – фаза; φ_0 – начальная фаза.

Для характеристики направления электрического тока и распределения силы тока по поверхности вводится понятие вектора плотности тока \vec{j} .

Плотностью электрического тока проводимости называется вектор \vec{j} , совпадающий с направлением электрического тока в рассматриваемой точке и численно равен отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, расположенный перпендикулярно к направлению тока, к площади dS_{\perp} этого элемента

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{n}. \tag{2.1.2}$$

Тогда величину элементарного тока через эту площадку можно определить как

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS = \vec{j} d\vec{S},$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Среднее значение тока через проводник будет

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS. \tag{2.1.3}$$

Для постоянного тока $j_n = \text{const}$ и $I = j_n S$.

Если поверхность, сквозь которую течёт ток, замкнута, то поток вектора \vec{j} через эту поверхность равен убыли заряда, т.е.

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = I = -\frac{dq}{dt}.$$

Для постоянного тока

$$q = \text{const} \text{ и } \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0, \quad (2.1.4)$$

последнее выражение получило название *уравнения неразрывности тока*.

2.2. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ

От чего зависит величина тока проводимости?

Немецкий физик Ом проводил эксперименты с различными проводниками, помещёнными в различные электрические поля, и в 1826 г. установил закон

$$I = G(\varphi_1 - \varphi_2) = GU, \quad (2.2.1)$$

где G – проводимость проводника; $\frac{1}{G} = R$ – его сопротивление; $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$ – разность потенциалов на концах проводника или падение напряжения на нём.

Сопротивление проводников зависит от их формы и размеров, химического состава и физического состояния (l , p и др.). При однородном химическом составе, $\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$ сопротивление проводника определяется как

$$R_l = \rho_l \frac{l}{S},$$

где ρ_l – удельное сопротивление проводника, зависящее от температуры $\rho_l = \rho_0(1 + \alpha t)$.

Выражение (2.2.1) называется *интегральной записью* закона Ома для однородного участка цепи – оно определяет среднее значение тока через любое сечение проводника с разностью потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на его концах. Это выражение можно преобразовать так, что в него войдут величины, характеризующие поле и свойство проводника в *окрестностях одной точки*. Выделим из проводника элементарный объём длиной dl , сечением dS в окрестностях точки M , где напряжённость поля \vec{E} и плотность тока \vec{j} (рис. 2.1).

Сопротивление выделенного объёма проводника будет $dR = \rho \frac{dl}{dS}$ напряжение, приложенное к его концам, $dU = Edl$, ток через поперечное сечение $dI = jdS$.

Подставляя эти величины в закон Ома в виде

$$I = \frac{U}{R}, \text{ получим } jdS = \frac{EdldS}{\rho dl}, \text{ откуда } j = \frac{1}{\rho} E.$$

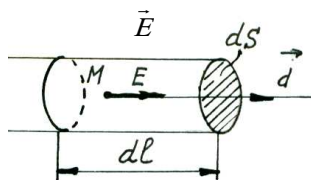


Рис. 2.1

Так как векторы плотности тока и напряжённости совпадают по направлению, то получим $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$, или

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.2.2)$$

где $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – удельная проводимость проводника.

Выражение (2.2.2) называется *дифференциальной записью* закона Ома для однородного участка цепи. Оба выражения можно проиллюстрировать графически (рис. 2.2 и рис. 2.3).

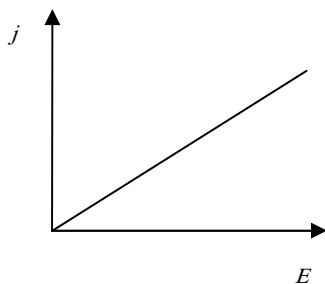


Рис. 2.2

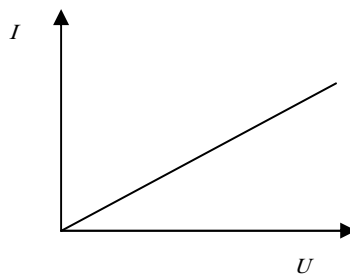


Рис. 2.3

2.3. ЗАКОН ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА

Опыт показывает, что при прохождении тока по проводникам в последних происходит превращение энергии электрического поля во внутреннюю энергию проводников, т.е. они нагреваются.

Ленц Э.Х. и Джоуль Д.П. экспериментально установили для стационарного тока зависимость между выделенным количеством тепла в проводнике и током, протекающим по нему, в виде

$$Q = I^2 R t. \quad (2.3.1)$$

Если ток с течением времени изменяется, то можно применить выражение

$$dQ = i^2 R dt, \quad (2.3.2)$$

где $i = f(t)$.

Покажем, что нагревание происходит за счёт работы электрического поля. При постоянном токе в проводнике $Q = I^2 R t = IRIt = Uq$, но $Uq = A$ – работа поля по перемещению заряда. Получили, что $Q = A$.

Выражение (2.3.1) есть *интегральная форма* записи закона Джоуля–Ленца. Её можно преобразовать в дифференциальную форму для количества тепла dQ , выделенного в элементарном объёме проводника dV за время dt :

$$dQ = i^2 R dt = (j dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt. \quad (2.3.3)$$

Если определить количество теплоты, выделяющееся в единице объёма проводника за единицу времени, то эта величина будет называться *плотностью тепловой мощности* или *удельной тепловой мощностью тока*

$$\omega = \frac{dQ}{dV dt}.$$

Тогда получаем

$$\omega = \rho j^2 = \rho (\sigma E^2) = \sigma E^2. \quad (2.3.4)$$

Выражение (2.3.4) и есть закон Джоуля–Ленца в *дифференциальной форме*.

2.4. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ИСТОЧНИКА ТОКА И ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ

Как отмечалось выше, для направленного движения зарядов в проводнике необходимо электрическое поле, создающее разность потенциалов между точками поля. Создать разность потенциалов значит разделить заряды на положительные и отрицательные. При этом разделение не может быть осуществлено электростатическими силами, ибо они стремятся соединить разноименные заряды.

Разделение может быть осуществлено только силами не электрического происхождения – так называемыми сторонними силами.

Природа сторонних сил определяется химическими процессами, диффузией носителей зарядов, контактными явлениями, вихревыми электрическими полями и др.

Устройства, в которых действуют сторонние силы, называются источниками тока или напряжения. При этом сторонние силы, действующие только в источнике тока, могут действовать на всём пути следования зарядов (в генераторе силы магнитного поля – сила Лоренца – действуют на заряды по всей длине проводника) или на отдельных участках (в гальванических элементах – тончайший слой около электродов). Поэтому источники тока называются с распределёнными или сосредоточенными сторонними силами.

Так как сторонние силы действуют только в источнике тока, а электрические – и в источнике, и во внешней части цепи, то участок цепи, где действуют только электрические силы, называется однородным, а участок цепи, где действуют и сторонние, и электрические силы, называется неоднородным.

Неоднородный участок – это участок, на котором имеются источники тока (рис. 2.4).

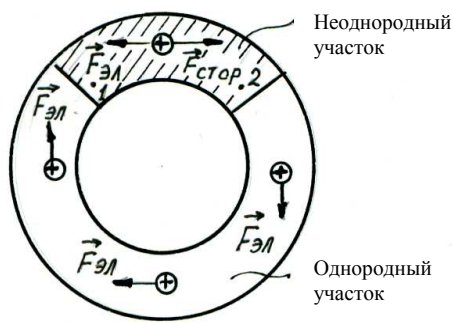


Рис. 2.4

На участке 1–2 сторонние силы совершают работу – её характеризует величина, называемая электродвижущей силой источника тока – ЭДС.

Электродвижущей силой на участке 1–2 называется скалярная физическая величина, численно равная работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{A_{1,2}^{\text{стор}}}{q_+} \quad (2.4.1)$$

Работу электрических сил характеризует разность потенциалов или «напряжение»

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1,2}^{\text{стор}}}{q_+} \quad (2.4.2)$$

Совместную работу электростатических и сторонних сил на участке цепи характеризует величина, называемая падением напряжения.

Падением напряжения на участке 1–2 называется физическая скалярная величина, численно равная алгебраической сумме работ, совершаемых электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2,

$$\frac{A_{1,2}}{q_+} = \frac{A_{1,2}^{\text{элст}}}{q_+} + \frac{A_{1,2}^{\text{стор}}}{q_+}, \text{ или } \frac{A_{1,2}}{q_+} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2} \quad (2.4.3)$$

Если сопротивление неоднородного участка $R_{1,2}$ и по нему течёт ток I , то падение напряжения на этом участке будет равно $IR_{1,2}$. Покажем это.

По закону сохранения энергии для неподвижного проводника при стационарном токе результатом его прохождения является выделение тепла, т.е. полная работа электрических и сторонних сил за время t равна выделенному теплу или $A_{1,2} = Q_{1,2}$.

Из (2.4.3) следует

$$A_{1,2} = q[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}],$$

а так как $q = It$ и $Q = I^2 R_{1,2} t$, то получаем

$$It[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}] = I^2 R_{1,2} t, \text{ откуда } (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2} = IR_{1,2} \quad (2.4.4)$$

Величина $(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}$, по определению, является падением напряжения на участке 1–2. Видим, что она равна $IR_{1,2}$.

Если (2.4.4) решить относительно тока, то получим закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}}{R_{1,2}}, \quad (2.4.5)$$

где величины I , $(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}$, $R_{1,2}$ – алгебраические, и знаки для I , $\varepsilon_{1,2}$ будут зависеть от выбора направления обхода участка (рис. 2.5).

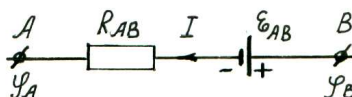


Рис. 2.5

При обходе от B к A

$$I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) - \varepsilon_{AB}}{R_{AB}},$$

а при обходе от A к B имеем

$$-I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \varepsilon_{AB}}{R_{AB}}.$$

Если рассматривать контур в целом, то говорят об ЭДС, действующей в замкнутой цепи, замкнутом контуре

$$\varepsilon = \frac{A_O^{\text{стор}}}{q}, \quad (2.4.6)$$

т.е. ЭДС равна работе сторонних сил по перемещению заряда q по всему контуру.

Действие сторонних сил на заряженные частицы эквивалентно действию некоторого электрического поля

$$\frac{\vec{F}^{\text{стор}}}{q} = \vec{E}^{\text{стор}},$$

где $\vec{E}^{\text{стор}}$ – напряжённость поля сторонних сил.

Работа, совершаемая сторонними силами при перемещении заряда по замкнутой цепи, есть криволинейный интеграл:

$$A_O^{\text{стор}} = \oint_L F_l^{\text{стор}} dl = q \oint_L E_l^{\text{стор}} dl = q\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \oint_L E_l^{\text{стор}} dl. \quad (2.4.7)$$

Выражение (2.4.7) показывает, что ЭДС равна циркуляции вектора напряжённости сторонних сил по замкнутому контуру.

При наличии сторонних сил закон Ома (2.2.2) примет вид

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}^{\text{элст}} + \vec{E}^{\text{стор}}). \quad (2.4.8)$$

Из закона Ома для неоднородного участка цепи (2.4.5) вытекает следующее:

а) если на участке отсутствует ЭДС, т.е. участок однородный, то

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{1,2}}, \quad (2.4.9)$$

откуда $IR_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$, т.е. падение напряжения на участке цепи равно разности потенциалов на его концах;

б) при обходе по замкнутой цепи $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ и работа электростатических сил $A^{\text{элст}} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, тогда $\oint_L E_l^{\text{элст}} dl = 0$ и отлична от нуля будет только циркуляция вектора напряжённости сторонних сил, т.е. работают, в конечном счёте, сторонние силы. При $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ток в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{полн}}}, \quad (2.4.10)$$

где $R_{\text{полн}} = R + r$ – сумма сопротивлений внешней и внутренней (источника тока) части цепи. Из (2.4.10) имеем

$$IR + Ir = \varepsilon. \quad (2.4.11)$$

Выражение (2.4.11) есть закон Ома для замкнутой цепи: *сумма падений напряжения на всех участках замкнутой цепи равна ЭДС, действующей в этой цепи*,

в) при разомкнутой электрической цепи, когда ток $I = 0$ и $IR = 0$, работа, совершаемая по перемещению единичного заряда электростатическими силами, равна работе, совершаемой сторонними силами, т.е.

$$\varepsilon = -(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.4.12)$$

2.5. РАЗВЕТВЛЁННЫЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФФА

При решении сложных разветвлённых электрических цепей обычно применяют правила Кирхгофа, которые являются следствием законов сохранения заряда и энергии.

Первое правило. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k = 0. \quad (2.5.1)$$

Узлом называется точка, где сходятся не менее трёх токов (рис. 2.6).

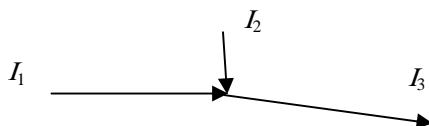


Рис. 2.6

Второе правило. В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k R_k = \sum_{i=0}^{i=m} \varepsilon_i. \quad (2.5.2)$$

Выражение (2.5.2) легко выводится из закона Ома для неоднородного участка цепи (рис. 2.7):

$$\begin{aligned} I_2 R_2 &= \varphi_B - \varphi_A + \varepsilon_2 \\ -I_1 R_1 &= \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} I_2 R_2 - I_1 R_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \end{aligned} \right.$$

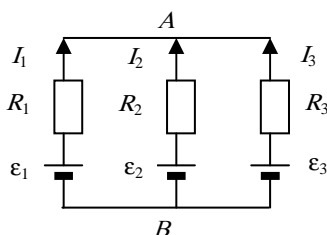


Рис. 2.7

Замечания. Количество уравнений, записанных по первому правилу, должно быть на одно меньше количества узлов.

Количество уравнений, записанных по второму правилу, соответствует количеству независимых контуров.

Независимый контур – контур, отличающийся хотя бы одной деталью от ранее рассмотренных.

Ток считается положительным, если совпадает с направлением обхода контура.

ЭДС считается положительной, если действие сторонних сил (возрастание потенциала) совпадает с направлением обхода контура.

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

2.6. ПРИРОДА НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В МЕТАЛЛЕ

До начала XX в. не было достаточного теоретического обоснования законам постоянного тока. Поэтому для выяснения природы носителей тока в металлах был поставлен ряд специальных опытов. Наиболее интересным из них является опыт Рикке (Германия, 1901 г.). Он должен был ответить на вопрос: связано ли прохождение тока по проводникам с переносом атомов вещества. (Опыт проводился больше года с пришлифованными стержнями из меди и алюминия, при этом пропущен заряд $q \approx n \cdot 10^6$ кулонов).

Из полученных результатов следовало, что носителями тока являются частицы свободные, не связанные с атомами вещества, одинаковые для всех веществ.

Друде П. (Германия) и Лоренц Г. (Нидерланды) предположили, что носителями заряда являются электроны. Это предположение было проверено качественными опытами (с помощью вращающейся катушки, замкнутой на телефон) Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси (Россия, 1913 г.) и количественными опытами Р. Толмэна и Т. Стюарта (США, 1916 г.). Было показано, что носители тока в металле заряжены отрицательно. Удельный заряд этих частиц оказался приблизительно одинаковым для всех исследованных металлов и близким к удельному заряду электрона, равному $-1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Таким образом, экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются электроны.

Все металлы в твёрдом состоянии являются кристаллами. Атомы образуют кристаллическую решётку. В решётке связь внешних (валентных) электронов с ядрами атомов ослабляется. Они легко отрываются и становятся свободными. Тогда металлы представляют собой решётку из положительных ионов, заполненную своеобразным «газом» свободных электронов, концентрацию которых можно определить по формуле

$$n = \frac{D}{A} N_A,$$

где $D \approx (1 \dots 20) \cdot 10^3$ кг/м³ – плотность металлов; $A \approx (10 \dots 250)$ кг/кат – масса килоатома; $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ кат⁻¹ – число Авогадро; тогда концентрация равна

$$n \approx (10^{28} - 10^{29}) \text{ 1/м}^3.$$

2.7. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ ДРУДЕ – ЛОРЕНЦА

В основе этой теории лежит модель идеального электронного газа, к которому применимы выводы классической теории газов. При этом электроны не взаимодействуют ни друг с другом на расстоянии, ни с ионами решётки. В отсутствие электрического поля их движение хаотичное, столкновения случайные и то только с узлами решетки. Сталкиваясь с узлами решётки, электроны обмениваются с ней энергией – устанавливается тепловое равновесие. Можно оценить порядок скорости хаотического движения электронов

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT \rightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (2.7.1)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град – постоянная Больцмана; $T \approx 300$ К, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона.

Получаем $v \approx 10^5$ м/с.

При наличии электрического поля в проводнике на хаотичное движение электронов накладывается упорядоченное, в направлении, противоположном полю.

Найдём связь между плотностью тока \vec{j} и скоростью упорядоченного движения электронов \vec{U} (рис. 2.8).

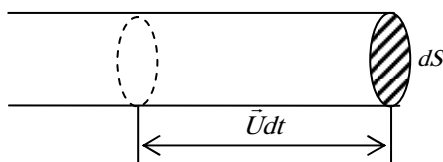


Рис. 2.8

Пусть через выделенную в проводнике площадку dS за время dt проходят те электроны, которые находятся на расстоянии $\vec{U}dt$ от неё.

Если концентрация электронов в выделенной трубке – n , то их полное число равно $N = ndSUdt$, а переносимый заряд $dq = Ne = nedSUdt$. Тогда плотность тока

$$j = \frac{I}{dS} = -\frac{dq}{dt dS} = neU \text{ или } \vec{j} = ne\vec{U}. \quad (2.7.2)$$

Оценим среднюю скорость упорядоченного движения электронов.

Так, для меди $j = 10^7 \text{ А/м}^2$, $n \approx 10^{29} \text{ 1/м}^3$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; тогда из (2.7.2) получим $U = \frac{j}{ne} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, что на восемь порядков меньше скорости хаотичного движения.

2.8. ВЫВОД ЗАКОНА ОМА НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Причиной электрического сопротивления проводников по классической теории является тормозящее действие со стороны узлов кристаллической решётки – ионов.

Так как направленное движение электронов обусловлено действием электрических и сторонних сил, то, очевидно, существует связь между скоростью упорядоченного движения электронов \vec{U} и вектором напряжённости поля этих сил \vec{E} .

Для примера рассмотрим однородный участок цепи. Друде полагал, что при столкновении с ионом электрон полностью теряет скорость упорядоченного движения (абсолютно неупругий удар). В промежутке между столкновениями электрон движется под действием поля ускоренно. Следовательно, средняя скорость

$$\bar{U} = \frac{U_0 + U_{\max}}{2} = \frac{U_{\max}}{2},$$

где $U_{\max} = a\tau$, $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$; $\tau = \frac{\bar{\lambda}}{v + \bar{U}} = \frac{\bar{\lambda}}{v}$, так как $\bar{U} \leq v$.

Получаем, что

$$\bar{U} = \frac{U_{\max}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE \bar{\lambda}}{m v} = bE, \quad (2.8.1)$$

где $b = \frac{1}{2} \frac{e\bar{\lambda}}{mv}$ – подвижность электронов.

$$\text{Тогда } j = ne\bar{U} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2mv} E = \sigma E \text{ или } \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad (2.8.2)$$

где $\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2mv}$ – электропроводность.

Выражение (2.8.2) и есть закон Ома, соответствующий (2.2.2).

2.9. ВЫВОД ЗАКОНА ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Электронная теория Друде – Лоренца позволяет в общих чертах понять механизм выделения энергии в проводнике с током.

Свободные электроны приобретают дополнительную кинетическую энергию за счёт работы электрических и сторонних сил.

Эта энергия упорядоченного движения электронов при взаимодействии их с решёткой переходит в энергию хаотического колебания узлов решётки – во внутреннюю энергию проводника – происходит его нагрев.

При столкновении одного электрона передаётся энергия $\frac{mU_{\max}^2}{2}$.

Если в единице объёма находится n электронов и каждый из них за единицу времени сталкивается $\frac{1}{\tau}$ раз, то выделяемая в единице объёма энергия будет равна

$$\omega = \frac{mU_{\max}^2}{2} n \frac{1}{\tau}, \quad (2.9.1)$$

где $U_{\max} = \frac{eE}{m}$; $\tau = \frac{\bar{\lambda}}{v}$, тогда

$$\omega = \frac{me^2 E^2 \tau^2}{2m^2} n \frac{1}{\tau} = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m\nu} E^2 = \sigma E^2,$$

что и требовалось доказать:

$$\omega = \sigma E^2. \quad (2.9.2)$$

2.10. ЗАКОН ВИДЕМАНА – ФРАНЦА И ЕГО ОБЪЯСНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИЕЙ

Опыт показывает, что хорошие проводники электричества одновременно являются хорошими проводниками тепла. Очевидно, в металлах перенос энергии в процессе теплопередачи осуществляется, в основном, свободными электронами. Следовательно, между электропроводностью и теплопроводностью должна существовать связь.

Немецкие физики Г. Видеман и Р. Франц на основе экспериментов установили (1853), что для всех металлов при одной и той же температуре отношение коэффициента теплопроводности χ к коэффициенту электропроводности σ одинаково, а при изменении температуры прямо пропорционально абсолютной температуре

$$\frac{\chi}{\sigma} = cT. \quad (2.10.1)$$

Если на электроны распространить выводы кинетической теории идеальных газов, то коэффициент теплопроводности электронного газа будет иметь вид

$$\chi = \frac{1}{3} \nu \bar{\lambda} \rho C_V, \quad (2.10.2)$$

тогда отношение

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{1}{3} \nu \bar{\lambda} \rho C_V : \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m\nu} = \frac{2\nu^2 \rho C_V m}{3ne^2},$$

где плотность электронного газа $\rho = nm$, теплоемкость единицы массы $C_V = \frac{3}{2} R \frac{1}{N_A m} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$ и скорость

$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, в итоге получим

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T = cT, \quad (2.10.3)$$

где $c = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2$, его теоретическое значение оказалось близким к экспериментальному.

2.11. ЗАТРУДНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Теория Друде – Лоренца не смогла объяснить целый ряд экспериментально установленных закономерностей для металлов.

1. Экспериментально установлено, что в довольно широком интервале температур T удельное электрическое сопротивление ρ пропорционально температуре $\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t)$, т.е. $\rho \sim T$. Согласно же

теории Друде – Лоренца, $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\nu}{ne^2 \bar{\lambda}} = \frac{2m \sqrt{\frac{3kT}{m}}}{ne^2 \bar{\lambda}}$, т.е. $\rho \sim \sqrt{T}$.

2. Ещё большие затруднения возникли с теплоёмкостью металлов. Согласно закону Дюлонга и Пти, а также опытных данных, молярная теплоёмкость металлов мало отличается от молярной теплоёмкости кристаллических диэлектриков и при обычных температурах близка к $3R$.

По классической электронной теории Друде – Лоренца, она должна быть в 1,5 раза больше, так как состоит из теплоёмкости решётки ($3R$) и электронного газа ($1,5R$), т.е. $C = 3R + \frac{3}{2}R = \frac{9}{2}R$.

Необходимо сделать вывод, что энергия теплового движения свободных электронов в металлах практически не изменяется при нагревании проводника, электроны не принимают участия в аккумуляции сообщённой проводнику энергии – всё это берёт на себя решётка. Классическая электронная теория не может объяснить этот результат.

3. Возникли трудности и при оценке средней длины свободного пробега электронов в металле. Чтобы согласовать теоретические и экспериментальные значения электропроводности металлов (σ), приходится предположить, что свободные электроны пробегают без столкновения с ионами решётки сотни межузельных расстояний. Такое предположение непонятно в рамках классической электронной теории.

Лоренц предпринял попытку усовершенствовать электронную теорию. Он применил к электронному газу статистику Максвелла–Больцмана. Однако это «уточнение» привело в ряде случаев к результатам, которые ещё хуже согласуются с опытом, чем выводы классической электронной теории. Требовалась качественно новая теория металлов. Такой теорией явилась *квантовая электронная теория металлов*, разработанная А. Зоммерфельдом (1928). Зоммерфельд применил к электронному газу в металле не статистику Максвелла – Больцмана, а квантовую статистику Ферми – Дирака. Ему удалось получить правильное значение молярной теплоёмкости электронного газа и объяснить малый вклад электронов проводимости в теплоёмкость металлов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется силой тока? плотностью тока? Каковы их единицы? (дать определения).
2. Назовите условия возникновения и существования электрического тока.
3. Что такое сторонние силы? Какова их природа?
4. В чём заключается физический смысл электродвижущей силы, действующей в цепи? напряжения? разности потенциалов?
5. Какова связь между сопротивлением и проводимостью? удельным сопротивлением и удельной проводимостью?
6. Выведите законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.
7. В чём заключается физический смысл удельной тепловой мощности?
8. Проанализируйте закон Ома для неоднородного участка (обобщённый закон Ома) электрической цепи. Какие частные законы можно из него получить?
9. Какими опытами была выяснена природа носителей электрического тока в металлах?
10. Каковы основные идеи теории Друде – Лоренца?
11. Как формулируются правила Кирхгофа? На чём они основаны? Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа?
12. Сравните порядок средних скоростей теплового и упорядоченного движения электроном в металлах (при условиях, близких к нормальным).
13. Выведите на основе классической теории электропроводности металлов законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.
14. В чём заключаются трудности элементарной классической теории электропроводности металлов? Каковы границы её применения?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Потенциометр сопротивлением $R = 150$ Ом подключен к батарее с ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутренним сопротивлением $r_i = 50$ Ом. Определить:

- 1) показание вольтметра сопротивлением $R_v = 100$ Ом, соединённого с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом, установленным посередине потенциометра;
- 2) разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключении вольтметра.

Решение.

1. Показание вольтметра, подключенного к точкам A и B (см. рис. 2.9), определим по формуле

$$U_1 = I_1 R_1,$$

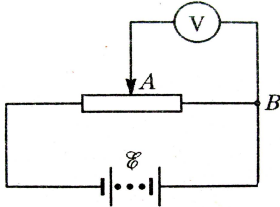


Рис. 2.9

где R_1 – сопротивление параллельно соединённых вольтметра и половины потенциометра; I_1 – суммарная сила тока в ветвях этого соединения (она равна силе тока в неразветвлённой части цепи).

Силу тока I_1 найдём по закону Ома для полной цепи

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_e + r_i}, \quad (1)$$

где R_e – сопротивление внешней цепи. Это сопротивление есть сумма двух со-

противлений:

$$R_e = R/2 + R_i. \quad (2)$$

Сопротивление R_1 найдём по формуле параллельного соединения проводников $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R/2}$, откуда

$$R_1 = \frac{RR_v}{R + 2R_v}.$$

Подставив в (1) выражение R_e по (2), найдём

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R/2 + R_1 + r_i}.$$

В данном случае решение задачи в общем виде было бы громоздким. Поэтому удобнее вычисление величин провести раздельно:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом};$$

$$I_1 = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ А} = 1,03 \text{ А};$$

$$U_1 = 1,03 \cdot 45,5 \text{ В} = 46,9 \text{ В}.$$

2. Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению силы тока I_2 на половину сопротивления потенциометра:

$$U_2 = I_2 R/2, \quad (3)$$

где I_2 – сила тока в цепи при отключенном вольтметре. Её определим по формуле

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R + r_i}.$$

Подставим выражение I_2 в (3), найдём

$$U_2 = \frac{\varepsilon}{R + r_i} \cdot \frac{R}{2}.$$

Произведём вычисления:

$$U_2 = \frac{150}{100 + 50} \cdot \frac{100}{2} \text{ В} = 50 \text{ В}.$$

Пример 2. Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением $r = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение времени $t = 20$ с.

Решение. Так как сила тока в проводнике изменяется, то воспользоваться для подсчёта заряда формулой $q = It$ нельзя. Поэтому возьмём дифференциал заряда

$$dq = Idt \quad (1)$$

и проинтегрируем

$$q = \int_0^t Idt. \quad (2)$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$q = \int_0^t \frac{U}{r} dt. \quad (3)$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + kt, \quad (4)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Подставив это выражение U в (3), найдём

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{r} + \frac{kt}{r} \right) dt = \frac{U_0}{r} \int_0^t dt + \frac{k}{r} \int_0^t t dt.$$

Взяв интегралы, получим

$$q = \frac{U_0 t}{r} + \frac{kt^2}{2r} = \frac{t}{2r} (2U_0 + kt). \quad (5)$$

Значение коэффициента пропорциональности k найдём из формулы (4), если заметим, что при $t = 20$ с $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4 - 2}{20} \text{ В/с} = 0,1 \text{ В/с}.$$

Подставим числовые значения в (5):

$$q = \frac{20}{2 \cdot 3} (2 \cdot 2 + 0,1 \cdot 20) = 20 \text{ Кл}.$$

Пример 3. Элементы ε_1 и ε_2 включены в цепь, как показано на рис. 2.10. Определить силы тока, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3 , если $\varepsilon_1 = 10$ В и $\varepsilon_2 = 4$ В, а $R_1 = R_4 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлением элементов пренебречь.

Решение. Силы тока в разветвлённой цепи можно определить с помощью законов Кирхгофа. Для определения четырёх сил токов необходимо составить четыре уравнения.

Перед составлением уравнений по законам Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать произвольно направления токов, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже, и, во-вторых, выбрать направление обхода контуров (последнее необходимо только для составления уравнений по второму закону Кирхгофа).

Выберем направления токов, как они показаны на рис. 2.10, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла A и B . Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла, – со знаком «минус».

По первому закону Кирхгофа для узла B имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (1)$$

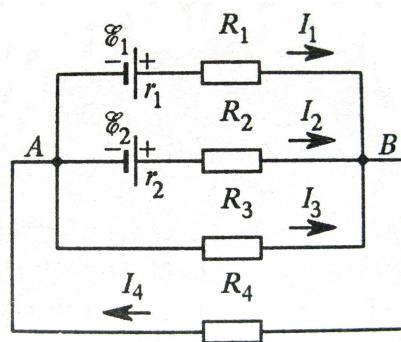


Рис. 2.10

Недостающие три уравнения составляем по второму закону Кирхгофа для замкнутых контуров. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, также меньше числа контуров (в нашем случае контуров шесть, а независимых уравнений три). Чтобы составить необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: для составления уравнений выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входило хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответст-

вующее произведение IR входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае произведение IR входит в уравнение со знаком «минус»;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус».

По второму закону Кирхгофа имеем:

для контура $A_1R_1B_1R_2A$

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad (2)$$

для контура $A_1R_1B_3R_3A$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1; \quad (3)$$

для контура $A_3R_3B_4R_4A$

$$I_3R_3 - I_4R_4 = 0. \quad (4)$$

Подставив в (2) – (4) числовые значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_2 = 6;$$

$$2I_1 - 4I_3 = 10;$$

$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения ещё раз в следующем виде:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6;$$

$$2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10;$$

$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Искомое значение токов найдём из выражений

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} \text{ и } I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_{I_2} и Δ_{I_3} – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырёх вышеприведённых уравнений.

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96;$$

определители

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -96,$$

откуда получаем

$$I_2 = \frac{0}{96} = 0, \quad I_3 = \frac{-96}{96} = -1 \text{ А.}$$

Знак минус у числового значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направлений токов, указанных на рисунке, направление тока I_3 было указано противоположно истинному. На самом деле ток I_3 течёт от узла B к узлу A .

Пример 4. По железному проводнику диаметром сечения $d = 0,6$ мм течет ток силой 16 А. Определить среднюю скорость направленного движения электронов, считая, что число свободных электронов n_0 в единице объёма равно числу атомов n'_0 в единице объёма проводника.

Решение. Среднюю скорость направленного (упорядоченного) движения электронов можно определить по формуле

$$\bar{v} = \frac{l}{t}, \quad (1)$$

где t – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся в отрезке проводника длиной l , пройдут через сечение II (см. рис. 2.11), перенесут заряд $q = ne$ и создадут ток силой

$$I = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t}, \quad (2)$$

где e – заряд электрона; n – число электронов в отрезке проводника длиной l .

Число свободных электронов в отрезке проводника можно выразить следующим образом:

$$n = n_0 V = n_0 l S, \quad (3)$$

где V – объём отрезка проводника; l – его длина; S – площадь сечения.

Но по условию задачи n_0 равно n'_0 . Следовательно,

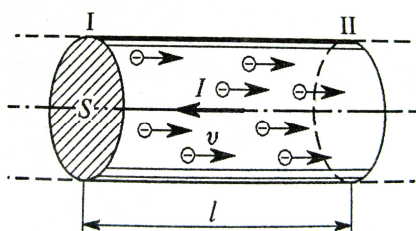


Рис. 2.11

$$n_0 = n'_0 = \frac{N}{V_0} = \frac{N}{A/\rho} = \frac{N\rho}{A}, \quad (4)$$

где N – число Авогадро; V_0 – объём одного моля металла; A – относительная атомная масса металла; ρ – его плотность.

Подставив последовательно выражения n_0 из (4) в (3) и l из (3) в (2), получим

$$I = \frac{N\rho l S e}{At}.$$

Отсюда найдём

$$l = \frac{IA t}{N\rho S e}.$$

Подставив выражение l в (1) и сократив t , найдем искомую величину средней скорости электронов:

$$\bar{v} = \frac{IA t}{N\rho S e t} = \frac{IA}{N\rho S e}. \quad (5)$$

Подставив числовые значения, получим

$$\bar{v} = \frac{16 \cdot 56}{6,02 \cdot 10^{26} \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-8} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}} \text{ м/с} = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

3. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА В ВАКУУМЕ

3.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА

До сих пор мы интересовались лишь теми явлениями, связанными с прохождением тока, которые разыгрывались внутри проводника. Сюда относились тепловые и химические действия тока.

Теперь займёмся явлениями, происходящими за пределами проводника, по которому идёт электрический ток.

Насыпьем железные опилки вокруг проводника (рис. 3.1) с током – прямым или круговым. Видим, что они как бы слипаются друг с другом в цепочки, образуя замкнутые петли. Это явление свидетельствует о действии в пространстве вокруг тока некоторых сил.

Цепочки похожи на силовые линии электростатического поля, но, в отличие от последних, всегда замкнуты.

Легко убедиться в том, что имеем дело не с электрическим полем – опилки из диэлектрика не образуют вокруг проводников с током замкнутых цепочек.

Заряженный легкий шарик около проводника с током (рис. 3.2) не испытывает силового воздействия, а контур с током – вращается. К тому же, проводник с током втягивается или выталкивается из магнитного поля постоянного магнита (рис. 3.3).

Следовательно, *проводник с током окружает поле, которое принято называть магнитным.*

Поскольку электрический ток есть упорядоченное движение электрических зарядов, то приходим к выводу, что движущиеся электрические заряды сверх электростатического поля создают ещё и магнитное, которое действует лишь на движущиеся электрические заряды.

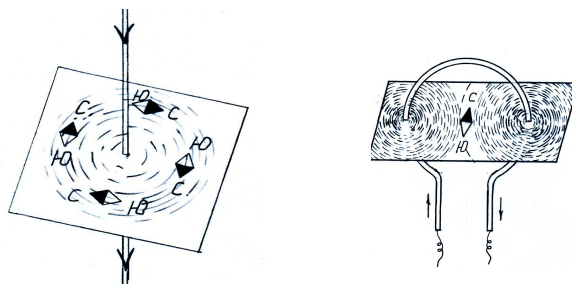


Рис. 3.1

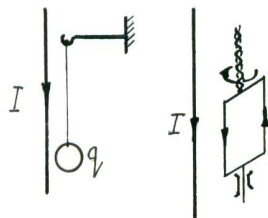


Рис. 3.2

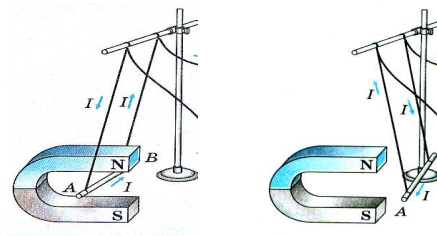


Рис. 3.3

Это заключение с большой убедительностью подтверждают опыты А.А. Эйхенвальда (1901) по определению магнитного поля, созданного вращающимися пластинами плоского заряженного конденсатора (рис. 3.4), и опыты А.Ф. Иоффе (1911) по измерению действия магнитного поля пучков движущихся электронов на магнитную стрелку и магнитного поля на эти пучки (рис. 3.5).

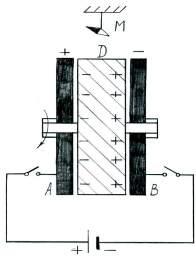


Рис. 3.4

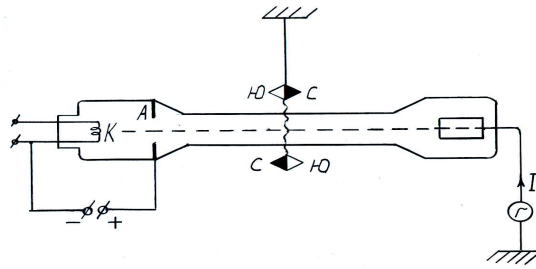


Рис. 3.5

3.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТОКОВ

Рассмотрим взаимодействие двух элементарных зарядов dq и dq' , движущихся со скоростями \vec{v} и \vec{v}' (рис. 3.6), при этом вектор скорости $\vec{v} \subset P$, а вектор скорости \vec{v}' пересекает плоскость P .

Электрическая сила, с которой взаимодействуют эти заряды, определяется по формуле

$$d\vec{F}_{\text{электр}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dqdq'}{r^3} \vec{r}. \quad (3.2.1)$$

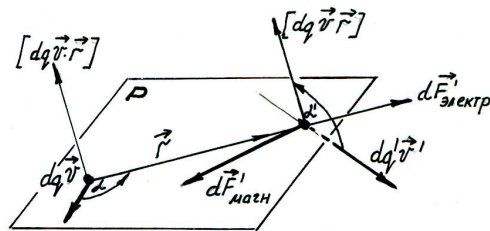


Рис. 3.6

Магнитная сила, действующая со стороны заряда dq на заряд dq' , определяется по формуле

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = k \frac{[dq\vec{v}'[dq\vec{v}\vec{r}]]}{r^3} \quad (3.2.2)$$

где k – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц.

Из опыта установлено, что $k=10^{-7}$ Гн/м (Н/м^3), а из соображений рационализации, в системе СИ $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$. Тогда (3.2.2) примет вид

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[dq\vec{v}'[dq\vec{v}\vec{r}]]}{r^3}, \quad (3.2.3)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, равная $4\pi k = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м.

Направление силы $d\vec{F}'_{\text{магн}}$ определяется следующим образом:

1. Определяется направление «внутреннего векторного произведения» $[dq\vec{v}\vec{r}]$.
2. Определяется направление «внешнего векторного произведения» $d\vec{F}'_{\text{магн}}$.

Из рисунка 3.6 видно, что под действием магнитных сил движущиеся одноименные заряды сближаются.

На практике чаще имеют дело не с точечными зарядами, а с их совокупностью – токами.

Выделим в проводнике (рис. 3.7) элементарные объёмы

$$dV = Sdl \text{ и } dV = S'dl',$$

где \vec{dl} и \vec{dl}' совпадают с направлениями токов I и I' .

Тогда величина $I\vec{dl}$ называется *элементарным током*.

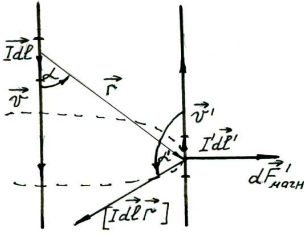


Рис. 3.7

Покажем, что

$$dq\vec{v} = I\vec{dl}.$$

$$dq\vec{v} = ne\vec{v}dV = ne\vec{v}Sdl = jS_n dl = I\vec{dl}.$$

Точно так же и $dq'\vec{v}' = I'dl'$. Тогда будем иметь

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I'dl' [I\vec{dl} \vec{r}]]}{r^3}, \quad (3.2.4)$$

Выражение (3.2.4) получило название *формулы Неймана или закона взаимодействия элементарных токов*. Численное значение силы имеет вид

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha I'dl' \sin \alpha'}{r^2}. \quad (3.2.5)$$

При этом $d\vec{F}'_{\text{магн}} = 0$ при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ (когда векторы $I\vec{dl}$ и \vec{r} направлены вдоль одной прямой в одну или противоположные стороны), при $\alpha' = 0$ или $\alpha' = \pi$ (вектор $I'dl'$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $I\vec{dl}$ и \vec{r}).

3.3. ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Часть закона (3.2.4) взаимодействия элементарных токов $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I\vec{dl} \vec{r}]}{r^3}$ зависит только от элементарного тока $I\vec{dl}$ и положения точки, в которой находится другой элемент $I'dl'$. Следовательно, это выражение может служить характеристикой магнитного поля, созданного элементарным током $I\vec{dl}$. Оно называется *индукцией магнитного поля*.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I\vec{dl} \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.3.1)$$

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $I\vec{dl}$ и \vec{r} . Для вектора индукции справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Введя вектор магнитной индукции в закон взаимодействия элементарных токов, получим закон Ампера, определяющий силу, действующую на элементарный ток $I'dl'$ со стороны магнитного поля элементарного тока $I\vec{dl}$:

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = [I'dl' d\vec{B}]. \quad (3.3.2)$$

Модуль этой силы равен

$$dF'_{\text{магн}} = I'dl' dB \sin \alpha, \quad (3.3.3)$$

где α – угол между $I'dl'$ и $d\vec{B}$.

Индукция магнитного поля – физическая векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на движущиеся в нём электрические заряды и численно равная величине силы, с которой магнитное поле действует в данной точке на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно полю.

Графически магнитное поле вектора \vec{B} (рис. 3.8).

Силовые линии вектора индукции \vec{B} везде одинаков по направлению и численно, то поле считается однородным.

Единицей измерения

Тесла – индукция однородного поля, в котором на элемент тока – 1 Ам, расположенный перпендикулярно полю, действует сила 1 Н:

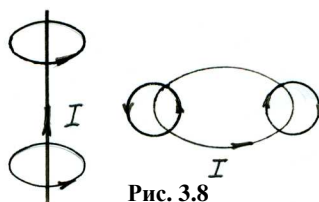


Рис. 3.8

изображается с помощью силовых линий

индукции \vec{B} замкнуты вокруг тока. Если направлению и численно, то поле

индукции магнитного поля является тесла.

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ Ам}}.$$

3.4. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЁТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Этот закон вытекает из закона взаимодействия элементарных токов и принципа суперпозиции полей. Он позволяет найти индукцию поля как отдельных элементов тока (рис. 3.9) (дифференциальная запись закона), так и токов, текущих в проводниках конечных размеров (интегральная запись). Так как $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}$, то его модуль $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id \sin \alpha}{r^2}$ – дифференциальная запись.

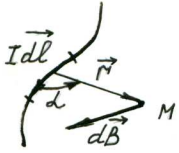


Рис. 3.9

Для проводника конечной длины L интегральная запись закона будет иметь вид

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0 [I d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Рассмотрим примеры применения закона Био–Савара–Лапласа для расчёта полей проводников с током.

1. Магнитное поле прямого проводника с током (рис. 3.10).

Выделим на проводнике элементарный ток $I d\vec{l}$ и воспользуемся принципом суперпозиции полей

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Для проводника длиной L будем иметь

$$B = \int_L \frac{\mu_0 Id \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

где dl, r, α – переменные величины.

Заменим их в соответствии с рис. 3.10:

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

получим

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi r_0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3.4.1)$$

Для бесконечно длинного прямого проводника, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$, индукция поля будет равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (3.4.2)$$

2. Магнитное поле на оси кругового тока (рис. 3.11).

Разобьём круговой ток на элементарные токи $I d\vec{l}$, а созданное ими поле $d\vec{B}$ разложим по двум направлениям: вдоль оси OM и перпендикулярно к ней – $d\vec{B} = d\vec{B}_\perp + d\vec{B}_\parallel$. Как видно из рис. 3.11, все перпендикулярные составляющие будут взаимно скомпенсированы. Останутся только составляющие вдоль оси. Численно $dB_\parallel = dB \sin \beta = dB \frac{R}{r}$, их суммарное значение $\int_L dB_\parallel = B$.

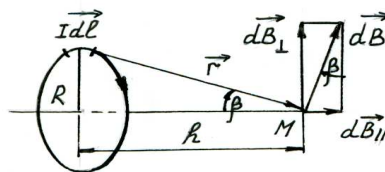


Рис. 3.11

Так как

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2},$$

где $\alpha = \pi/2, \sin \alpha = 1$, то

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I d\ell R}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (3.4.3)$$

где $(R^2 + h^2)^{1/2} = r$.

В центре контура, при $h = 0$,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (3.4.4)$$

3.5. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ВИХРЕВОЙ ХАРАКТЕР МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В электростатике было показано, что поле потенциально, если циркуляция его силовой характеристики (вектора напряжённости) по замкнутому контуру равна нулю, т.е. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$.

Какой будет циркуляция вектора индукции для магнитного поля? Найдём её. Для этого рассмотрим поле тока проводимости (для проводника, расположенного перпендикулярно плоскости чертежа – рис. 3.12).

Контур обхода L расположен перпендикулярно току I . Для элементарного перемещения $d\vec{l}$ вдоль контура $\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos \alpha = B dl_B$, а так как $dl_B = r d\varphi$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ то $\vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$ и циркуляция по всему контуру будет

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I, \quad (3.5.1)$$

т.е. циркуляция вектора индукции магнитного поля не равна нулю.

Если контур обхода не охватывает тока, то $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$.

Если контур обхода охватывает ток N раз, то $\oint d\varphi = 2\pi N$ и

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 IN; \quad (3.5.2)$$

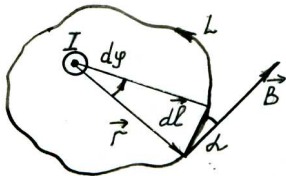


Рис. 3.12

для m токов

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{i=m} I_i. \quad (3.5.3)$$

Циркуляция вектора индукции стационарного магнитного поля в вакууме равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов проводимости, охватываемых контуром интегрирования.

Так как циркуляция вектора \vec{B} не равна «0», то, в отличие от электростатического поля, магнитное поле не потенциально, оно называется *вихревым полем*.

3.6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ К РАСЧЁТУ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Эта теорема в электромагнетизме играет такую же роль, что и теорема Остроградского–Гаусса в электростатике.

Приведём схему расчёта полей с применением теоремы о циркуляции вектора индукции.

1. Выясняется характер симметрии поля.
2. Выбирается замкнутый контур обхода так, чтобы численное значение \vec{B} во всех точках контура или на отдельных его участках было одинаковым, а угол между \vec{B} и $d\vec{l}$ равен 0 или $\pi/2$.
3. Вычисляется циркуляция \vec{B} по контуру. Найденное значение циркуляции приравнивается алгебраической сумме токов, охватываемых контуром обхода.
4. Составленное равенство решается относительно \vec{B} .

Рассмотрим примеры расчёта полей:

1. *Магнитное поле соленоида* (рис. 3.13).

Выберем контур обхода так, как показано на рис. 3.13. Пусть ток в соленоиде I , число витков на единицу длины – n . Линии индукции вектора \vec{B} внутри соленоида проходят через конечное сечение S .

Вне соленоида индукция поля очень мала. Из соображения симметрии видно, что индукция поля внутри соленоида одинакова, а проекции \vec{B} на остальные элементы контура обхода равны 0. Тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = BI, \text{ а так как } \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 IN, \text{ где } N = nL, \text{ то } BI = \mu_0 nLI :$$

и
$$B = \mu_0 nI. \tag{3.6.1}$$

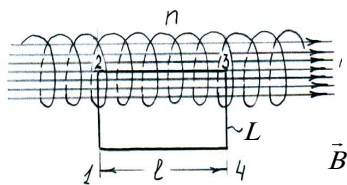


Рис. 3.13

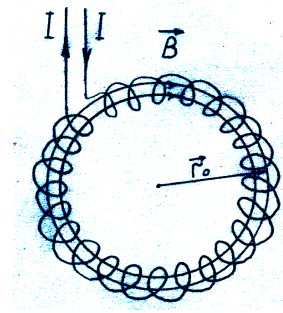


Рис. 3.14

2. *Магнитное поле тороида* (рис. 3.14).

Линии индукции поля тороида представляют собой окружности, центры которых совпадают с центром тороида. Пусть r_0 – радиус осевой линии; n – число витков на единицу длины; I – ток в тороиде.

Так как геометрическое место для одинаковых \vec{B} – окружности, то контур обхода L выберем в виде окружности.

Тогда $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B2\pi r_0$, а так как $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 IN$, то $B2\pi r_0 = \mu_0 NI$,

откуда
$$B = \mu_0 nI. \tag{3.6.2}$$

3.7. ПОТОК ВЕКТОРА ИНДУКЦИИ

Элементарным потоком вектора индукции магнитного поля $d\Phi$ сквозь элементарную площадку dS (рис. 3.15) называется скалярная физическая величина, определяемая выражением

$$d\Phi = B dS = B dS \cos \alpha.$$

Знак $d\Phi$ зависит от выбора направления нормали \vec{n} . Для конечной поверхности

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \tag{3.7.1}$$

При $\vec{B} = \text{const}$ и плоской поверхности $\Phi = BS \cos \alpha$.

Если поверхность замкнута, то поток через любую замкнутую поверхность будет равен нулю (рис. 3.16):

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \tag{3.7.2}$$

Выражение (3.7.2) есть *теорема Гаусса для магнитного поля*.

Измеряется магнитный поток в веберах $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$.

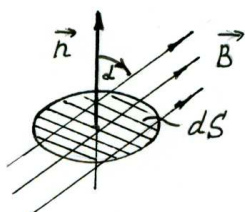


Рис. 3.15

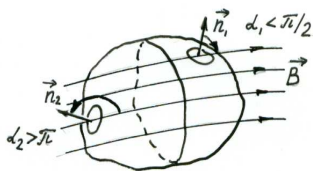


Рис. 3.16

ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТОК

3.8. ЗАКОН АМПЕРА

Закон Ампера позволяет определить силу, с которой усредненное магнитное поле действует как на отдельный элемент тока, так и на проводник с током конечных размеров.

Этот закон является следствием закона взаимодействия элементарных токов и принципа суперпозиции магнитных полей:

$$d\vec{F}'_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}' [I d\vec{l} \vec{r}]]}{r^3} \text{ и } \vec{B} = \int_L d\vec{B};$$

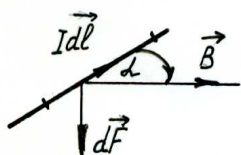


Рис. 3.17

$$d\vec{F} = [Id\vec{l}\vec{B}]. \quad (3.8.1)$$

Численное значение силы, действующей на элемент тока (рис. 3.17),

$$dF = IdlB\sin\alpha.$$

Для конечного проводника с током

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L [Id\vec{l}\vec{B}]. \quad (3.8.2)$$

3.9. ЗАДАЧИ НА ЗАКОН АМПЕРА

1. Определение силы воздействия на прямолинейный проводник с током.

Если магнитное поле \vec{B} везде однородно, проводник с током I прямой, то угол α везде один и тот же; все $d\vec{F}$ параллельны, и модуль результирующей будет равен сумме модулей:

$$F = \int dF = \int_0^l IdlB\sin\alpha = IlB\sin\alpha. \quad (3.9.1)$$

Значение силы зависит от ориентации тока: $F=0$ при $\alpha=0$ и $F=\max$ при $\alpha=\pi/2$.

2. Взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных токов.

Пусть токи I_1 и I_2 расположены на расстоянии r_0 друг от друга (рис. 3.18). Ток I_1 создает поле, ток I_2 испытывает действие. Так как токи параллельны, то каждый элемент второго тока испытывает одинаковую силу со стороны постоянной \vec{B}_1 . Для тока I_1

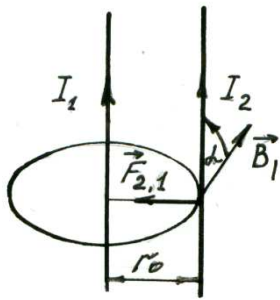


Рис. 3.18

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0},$$

тогда $F_{2,1} = I_2 B_1 \sin\alpha$.

При $\alpha = \pi/2$ получим

$$F_{2,1} = I_2 I_1 \frac{\mu_0}{2\pi r_0}. \quad (3.9.2)$$

Сила, действующая на единицу длины второго проводника, равна

$$\frac{F_{2,1}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I_1 I_2. \quad (3.9.3)$$

Такая же сила действует со стороны второго проводника на первый.

Закон взаимодействия параллельных токов (3.9.2) и (3.9.3) используется для установления единицы силы тока в системе СИ – ампера.

Ампер – сила не изменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

3. Замкнутый плоский контур с током в однородном магнитном поле.

1) Пусть плоский контур расположен в магнитном поле так, как показано на рис. 3.19.

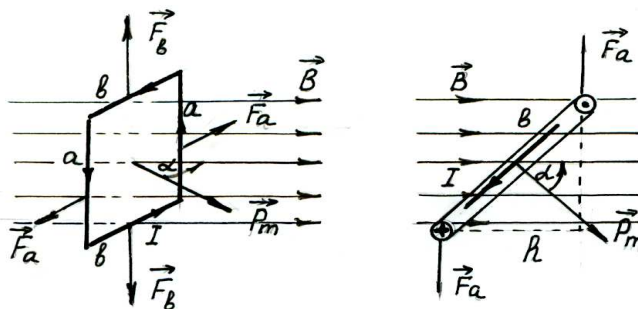


Рис. 3.19

Магнитный момент контура $\vec{p}_m = I\vec{S}_n$ образует с \vec{B} угол α . На стороны b , в соответствии с законом Ампера, действуют силы \vec{F} , растягивающие рамку и лежащие в её плоскости. Силы, действующие на

стороны a , образуют пару сил, механический вращательный момент которой относительно какой-либо стороны a равен

$$M = F_a h = F_a b \sin \alpha .$$

Величина силы \vec{F}_a равна $F_a = IaB \sin \pi/2$, следовательно, момент

$$M = IaB \sin \alpha = ISB \sin \alpha = p_m B \sin \alpha . \quad (3.9.4)$$

Учитывая взаимную ориентацию векторов \vec{p}_m и \vec{B} , получим

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] . \quad (3.9.5)$$

Вращательный момент будет равен нулю при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, т.е. когда $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ или $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$. Положение рамки при $\alpha = 0$ называется *устойчивым равновесием* (при малейшем отклонении от этого положения возникают силы, возвращающие рамку в исходное состояние). Положение рамки при $\alpha = \pi$ называется *неустойчивым равновесием* (даже малейшее отклонение способствует дальнейшему повороту рамки от равновесного состояния). Пояснение на рис. 3.20.

2) Контур, находящийся в магнитном поле, обладает механической энергией.

Мерой приращения этой энергии является работа, совершаемая вращательным моментом $dW = dA$. Из механики известно, что элементарная работа, совершаемая вращательным моментом, действующим на контур, равна

$$dA = M d\alpha ,$$

где $d\alpha$ – угол поворота контура.

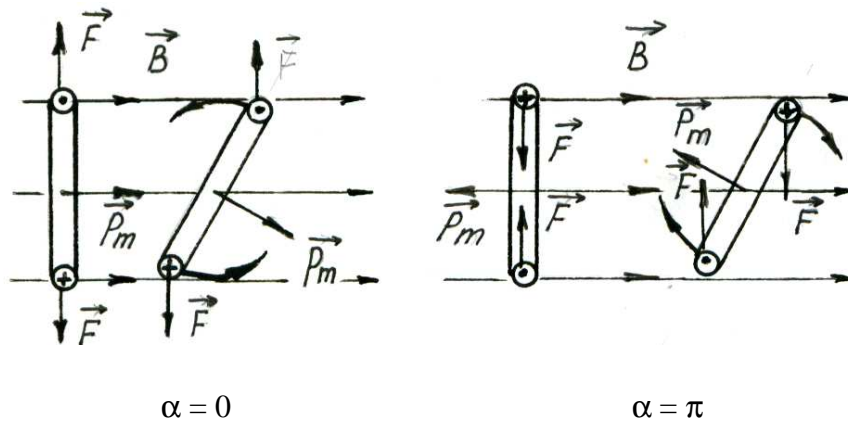


Рис. 3.20

С учётом того, что $M = p_m B \sin \alpha$, получим

$$dW = p_m B \sin \alpha d\alpha . \quad (3.9.6)$$

Проинтегрировав (3.9.6), имеем $W = -p_m B \cos \alpha + C$, где C можно взять равной 0, тогда

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B} . \quad (3.9.7)$$

При увеличении угла α энергия контура возрастает, она максимальна ($+p_m B$), когда $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$, и минимальна ($-p_m B$), когда $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$.

4. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

Пусть изначально плоский круговой контур расположен так, что $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ (рис. 3.21), вектор \vec{r} показывает направление возрастания поля \vec{B} (силовые линии не параллельны). Силы $d\vec{F}$, действующие на элементы тока, не будут лежать в плоскости контура. Разложим их по направлениям, параллельным плоскости контура – $d\vec{F}_\parallel$ и перпендикулярным к ней – $d\vec{F}_\perp$.

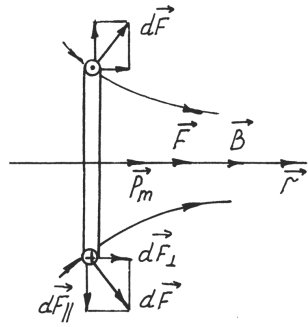


Рис. 3.21

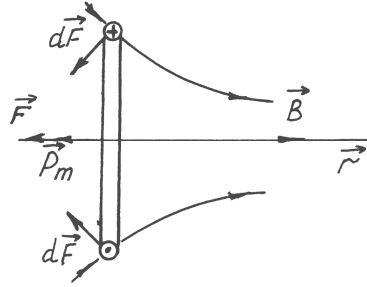


Рис. 3.22

Параллельные составляющие дадут силу, растягивающую или сжимающую плоский контур, а перпендикулярные составляющие, складываясь, дадут результирующую силу, вызывающую поступательное движение контура. При этом, если $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, сила направлена по полю и контур втягивается в область более сильного поля. Если $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$, то сила направлена против поля и контур будет выталкиваться из него (рис. 3.22).

Величину и направление силы можно определить из выражения для энергии контура

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\left(-p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \alpha\right) = p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то $F > 0$ и направлена в сторону возрастания \vec{B} , при $\alpha = \pi$ сила $F < 0$ и направлена в сторону убывания поля \vec{B} .

3.10. РАБОТА СИЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. При перемещении проводника с током магнитная сила, действующая на ток, совершает работу. Если перемещение $d\vec{r}$ перпендикулярно полю \vec{B} , то элементарная работа

$$dA = F dr \cos \alpha = F dr,$$

где $F = I B \sin \beta$. При $\beta = \pi/2$ (рис. 3.23)

$$dA = I B dr = I B dS = I d\Phi,$$

где $d\Phi = B dS$ – магнитный поток,

При перемещении проводника

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = \int_0^\Phi I d\Phi = I\Phi.$$

2. При произвольном (рис. 3.24) работа будет определяться

$$dA = F dr \cos \alpha = I B dr \cos \alpha = I B dS \cos \alpha,$$

где α – угол между перемещением $d\vec{r}$ и силой \vec{F} или между нормалью \vec{n} и полем \vec{B} . И в этом случае

$$dA = I d\Phi, \tag{3.10.2}$$

где $d\Phi = B dS \cos \alpha$.

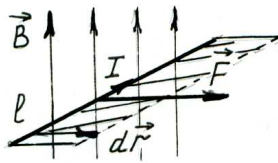


Рис. 3.23

омаемый проводником I на конечное расстояние

$$\tag{3.10.1}$$

перемещении проводника с током (рис. как

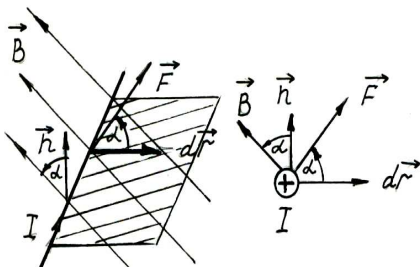


Рис. 3.24

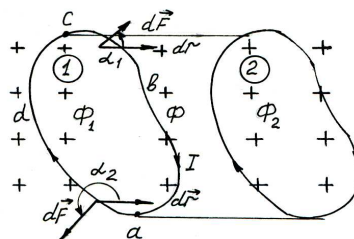


Рис. 3.25

3. Работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении замкнутого контура с током, равна произведению тока на приращение магнитного потока сквозь поверхность, опирающуюся на контур (рис. 3.25). Разобьём контур на два участка abc и cda . На участке abc угол между перемещением $d\vec{r}$ и силой $d\vec{F}$ ост-

рый, и работа по его перемещению положительна $A_{1,2} > 0$, на участке cda угол тупой и работа $A'_{1,2} < 0$.

Учитывая, что $A_{1,2} = I(\Phi + \Phi_2)$, $A'_{1,2} = -I(\Phi_1 + \Phi)$, получим полную работу

$$A_{1,2} = A_{1,2} + A'_{1,2} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi. \quad (3.10.3)$$

Для элементарного перемещения $dA = Id\Phi$.

Такой же результат (3.10.3) можно получить, основываясь на выражении энергии контура с током. Так как $A_{1,2} = W_1 - W_2$, а энергия

$$W_1 = -p_m B_1 \cos \alpha_1; \quad W_2 = -p_m B_2 \cos \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – углы между \vec{p}_m и \vec{B}_1, \vec{B}_2 . Индукция поля внутри контура в обоих случаях не изменяется. Тогда $W_1 = -ISB_1 \cos \alpha_1 = -I\Phi_1$, $W_2 = -ISB_2 \cos \alpha_2 = -I\Phi_2$, и работа

$$A_{1,2} = W_1 - W_2 = -I(\Phi_1 - \Phi_2) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi,$$

что и требовалось доказать.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

3.11. СИЛА ЛОРЕНЦА

Силой Лоренца принято называть силу, с которой магнитное поле действует на отдельно движущуюся заряженную частицу.

На все носители тока, заключенные в элементарном токе $Id\vec{l}$, действует сила

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \vec{B}],$$

где $Id\vec{l} = dq\vec{v} = nqdv\vec{V}$, тогда $d\vec{F} = nqdv[\vec{v} \vec{B}]$, и на одну частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F}_{Л} = \frac{d\vec{F}}{ndV} = q[\vec{v} \vec{B}]. \quad (3.11.1)$$

Направление силы определяется по правилу левой руки или правой тройкой векторов. Модуль силы равен $F_{Л} = qvB \sin \alpha$.

Так как сила Лоренца перпендикулярна к скорости, то она не совершает работы. Её действие сводится к сообщению заряженной частице центростремительного ускорения.

3.12. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Движущаяся заряженная частица со стороны электрического поля испытывает силу $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$, оказывающую ускоряющее или отклоняющее действие.

Ускоряющее действие электрического поля используется в электронных лампах, электронно-лучевых трубках, ускорителях и т.п.

Связь между изменением скорости и ускоряющим напряжением определяется соотношениями

$$A_{1,2} = W_{2,кин} - W_{1,кин}; \quad A_{1,2} = qU_{1,2},$$

где для нерелятивистских скоростей ($v \leq c$) – $W_{кин} = \frac{mv^2}{2}$, а для релятивистских скоростей ($v \approx c$) кинетическая энергия определяется полной энергией mc^2 движущегося тела и его энергией покоя m_0c^2 , т.е.

$$W_{кин} = mc^2 - m_0c^2,$$

где m_0 – масса покоя, а

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Тогда при $v \leq c$

$$qU_{1,2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (3.12.1)$$

а при $v \rightarrow c$

$$qU_{1,2} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right). \quad (3.12.2)$$

Отклоняющее действие электростатического поля используется для управления движением заряженных частиц в устройствах, называемых электростатическими отклоняющими системами.

Пусть положительно заряженная частица пролетает с начальной скоростью v_0 сквозь заряженный конденсатор длиной x_1 и попадает на экран (рис. 3.26). Её отклонение относительно первоначального положения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 – отклонение внутри конденсатора под действием электрического поля

$$y_1 = \frac{at_1^2}{2}; \quad a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}; \quad t_1 = \frac{x_1}{v_0}; \quad y_1 = \frac{qEx_1^2}{2mv_0^2}. \quad (3.12.3)$$

За пределами конденсатора частица летит прямолинейно под углом α к первоначальному направлению и отклоняется на величину

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{at_1}{v_0} = \frac{qEx_1}{mv_0^2}; \quad y_2 = \frac{qEx_1 x_2}{mv_0^2}. \quad (3.12.4)$$

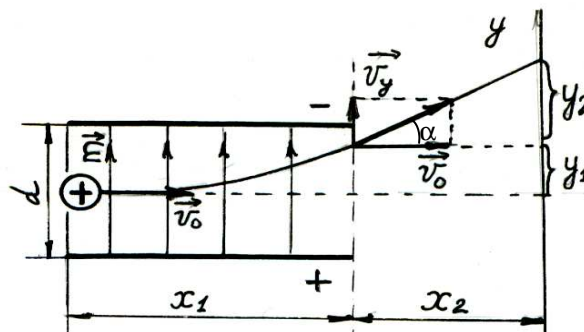


Рис. 3.26

Таким образом, полное отклонение

$$y = \frac{qEx_1}{mv_0^2} \left(\frac{x_1}{2} + x_2 \right). \quad (3.12.5)$$

Форма траектории будет определяться начальным углом входа частицы в поле, однородностью поля и начальной скоростью частицы.

3.13. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как уже отмечалось, на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB \sin \alpha$.

В зависимости от значения угла α , эта сила принимает любые значения от $F = 0$ до $F = qvB$:

а) при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, т.е. когда $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$ или $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$, $\vec{F}_{\text{Л}} = 0$; частица движется прямолинейно и равномерно, по инерции;

б) при $\alpha = \pi/2$ $F_{\text{Л}} = qvB$ и является центростремительной силой, т.е.

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (3.13.1)$$

откуда можно определить радиус криволинейной траектории

$$r = \frac{mv}{Bq}. \quad (3.13.2)$$

Если $\vec{B} = \text{const}$ и $\vec{v} = \text{const}$, то и $r = \text{const}$, т.е. траектория – окружность (рис. 3.27). Период обращения частицы по окружности

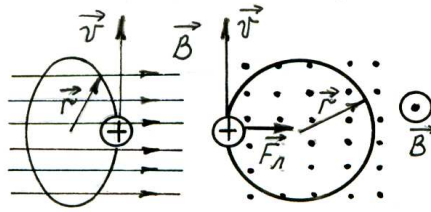


Рис. 3.27

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{Bq/m}, \quad (3.13.3)$$

при $v \leq c$ период не зависит от скорости;

в) при $0 < \alpha < \pi/2$ и $\vec{B} = \text{const}$ имеем винтовую линию.

Разложим начальную скорость \vec{v}_0 на две – вдоль поля и перпендикулярно к нему: $v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha$ и $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$ (рис. 3.28). Сила Лоренца $F_{\perp} = qv_{\perp} B = qv_0 B \sin \alpha$ вызывает движение по окружности.

Так как $v_{\parallel} \uparrow \vec{B}$ и не меняется по величине, то частица одновременно перемещается поступательно, в результате имеем движение по винтовой линии.

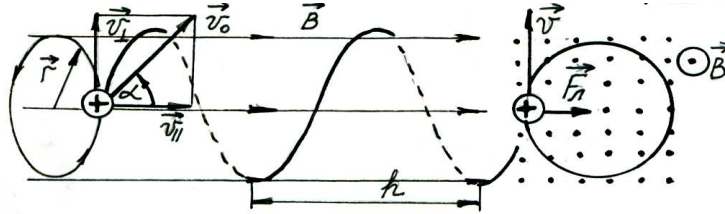


Рис. 3.28

Шаг винта определим как

$$h = v_{\parallel} T = v_0 \cos \alpha T = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha}{Bq/m}. \quad (3.13.4)$$

3.14. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

В 1880 г. Э. Холл (США) обнаружил явление, названное поперечным гальваномагнитным эффектом или эффектом Холла.

Суть явления заключается в возникновении ЭДС на гранях, поперечных току, в пластине, помещённой в магнитное поле, где вектор индукции магнитного поля \vec{B} перпендикулярен току I (рис. 3.29):

$$\varepsilon_{1,2\text{холл}} = R \frac{I}{b} B, \quad (3.14.1)$$

где R – коэффициент Холла.

Возникновение ЭДС на гранях пластины означает появление в проводнике сторонних сил.

В явлении Холла эту роль играют силы Лоренца. Разделение зарядов продолжается до выравнивания электрических и сторонних сил $\vec{F}_{\text{электр}} = \vec{F}_{\perp}$, при этом $U_{1,2} = -\varepsilon_{1,2\text{холл}}$.

Для длинной и широкой пластины поле однородно. Поэтому

$$|U_{1,2}| = Ea. \quad (3.14.2)$$

Так как $F_{\perp} = qvB$, $F_{\text{электр}} = qE$; $\rightarrow vB = E$.

Скорость v можно определить из плотности тока, $j = nqv$, где, в свою очередь, $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{ab}$. Тогда

$$|U_{1,2}| = |\varepsilon_{1,2\text{холл}}| = Ea = vBa = \frac{j}{nq} Ba = \frac{IBa}{abnq} = \frac{1}{nq} \frac{I}{b} B. \quad (3.14.3)$$

Если в (3.14.3) $\frac{1}{nq}$ заменить на R , то получим формулу (3.14.1).

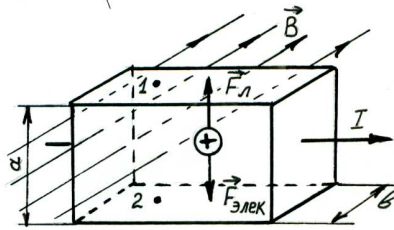


Рис. 3.29

Полярность ЭДС определяется носителями зарядов в образце. Определяя $\epsilon_{\text{холл}}$ на опыте, можно определить характер проводимости в проводниках и полупроводниках.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Запишите выражение для силы взаимодействия двух движущихся элементарных зарядов, элементарных токов.
2. Что называют индукцией магнитного поля? Каково направление вектора \vec{B} ?
3. Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого и кругового токов.
4. Записав закон Био–Савара–Лапласа, объясните его физический смысл.
5. Рассчитайте, применяя закон Био–Савара–Лапласа, магнитное поле:
 - 1) прямого тока;
 - 2) в центре кругового проводника с током.
6. Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.
7. Какова разница физического смысла силы Ампера и силы Лоренца?
8. Чему равна работа силы Лоренца при движении заряженной частицы в магнитном поле? Ответ обосновать.
9. Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле перпендикулярно к силовым линиям?
10. Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? (Ответ подтвердить выводами формул).
11. В чём заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов. Какую информацию можно получить на основе экспериментального исследования эффекта Холла?
12. Каков физический смысл теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B} ? Применив её, рассчитайте магнитное поле прямого тока.
13. Какой вывод можно сделать, сравнивая циркуляцию векторов \vec{E} и \vec{B} ? Почему магнитное поле является вихревым?
14. Используя теорему о циркуляции вектора \vec{B} , рассчитайте магнитное поле тороида.
15. Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив её физический смысл.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C , по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого проводниками с током в точке A (см. рис. 3.30), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

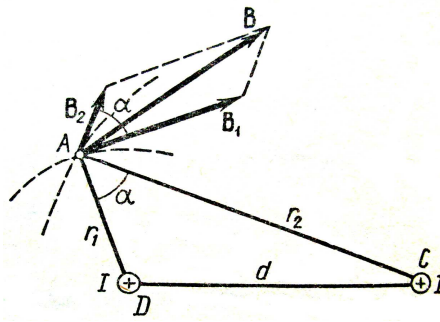


Рис. 3.30

Решение. Для нахождения магнитной индукции \vec{B} в точке A воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Модуль вектора B может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α – угол между векторами B_1 и B_2 .

Магнитные индукции B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки A :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Вычислим $\cos \alpha$. Заметив, что $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha,$$

где d – расстояние между проводами.

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Подставив в формулу (2) числовые значения физических величин и произведём вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \frac{23}{40}} = 3,08 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 308 \text{ мкТл.}$$

Пример 2. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10$ см течёт ток $I = 80$ А. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке A , равноудалённой от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l} \vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока $I d\vec{l}$ в точке, определяемой радиусом-вектором \vec{r} .

Выделим на кольце элемент $d\vec{l}$ и от него в точку A проведём радиус-вектор \vec{r} (см. рис. 3.31). Вектор $d\vec{B}$ направим в соответствии с правилом буравчика.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция \vec{B} в точке A определяется интегрированием:

$$\vec{B} = \int_I d\vec{B},$$

где интегрирование ведётся по всем элементам dl кольца.

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: $d\vec{B}_\perp$, перпендикулярную плоскости кольца, и $d\vec{B}_\parallel$, параллельную плоскости кольца, т.е.

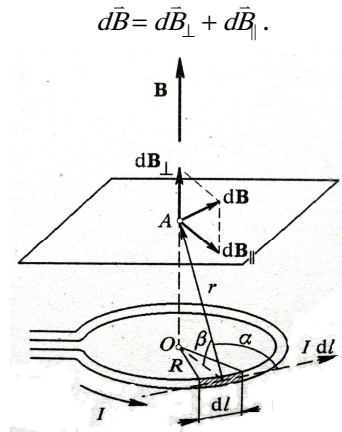


Рис. 3.31

Тогда

$$\vec{B} = \int d\vec{B}_\perp + \int d\vec{B}_\parallel.$$

Заметив, что $\int_I d\vec{B}_\parallel = 0$ из соображений симметрии и что векторы $d\vec{B}_\perp$ от различных элементов dl сонаправлены, заменим векторное суммирование (интегрирование) скалярным:

$$B = \int_I dB_\perp,$$

где $dB_\perp = dB \cos \beta$ и $dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$ (поскольку dl перпендикулярен r и, следовательно, $\sin \alpha = 1$). Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \cos \beta 2\pi R}{4\pi r^2}.$$

После сокращения на 2π и замены $\cos \beta$ на R/r получим (см. рис. 3.31)

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}.$$

Проверим, даёт ли правая часть равенства единицу магнитной индукции, Тл

$$\frac{[\mu_0][I][R^2]}{[r^3]} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2}{\text{м} \cdot 1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А}^2}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot \text{м}^2} = 1 \text{ Тл}.$$

Здесь мы воспользовались определяющей формулой для магнитной индукции:

$$B = \frac{M_{\max}}{p}.$$

Тогда
$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot \text{м}^2}.$$

Выразим все величины в единицах СИ и произведём вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot (0,1)^2}{2 \cdot (0,2)^3} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл},$$

или $B = 62,8 \text{ мкТл}$.

Вектор \vec{B} направлен по оси кольца (пунктирная стрелка на рисунке) в соответствии с правилом буравчика.

Пример 3. На проволочный виток радиусом $R = 10 \text{ см}$, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент $M = 65 \text{ дин} \cdot \text{см}$. Сила тока в витке $I = 2 \text{ А}$.

Определить магнитную индукцию \vec{B} поля между полюсами магнита. Действием магнитного поля Земли пренебречь.

Решение. Индукцию \vec{B} магнитного поля можно определить из выражения механического момента M , действующего на виток с током в магнитном поле,

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (1)$$

где p_m – магнитный момент витка с током; B – индукция магнитного поля; α – угол между направлением индукции магнитного поля и нормали к плоскости витка.

Если учесть, что максимальное значение механический момент принимает при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\sin \alpha = 1$), а также, что магнитный момент витка с током имеет выражение $p_m = IS$, то формула (1) примет вид

$$M = IBS.$$

Отсюда, учитывая, что $S = \pi R^2$, находим

$$B = \frac{M}{\pi R^2 I}. \quad (2)$$

Подставим числовые значения в формулу (2)

$$B = \frac{6,5 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Пример 4. Электрон движется в однородном магнитном поле ($B = 10$ мТл) по винтовой линии, радиус R которой равен 1 см и шаг $h = 6$ см. Определить период T обращения электрона и его скорость v .

Решение. Электрон будет двигаться по винтовой линии, если он влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом ($\alpha \neq \pi/2$) к линиям магнитной индукции. Разложим, как это показано на рис. 3.32, скорость \vec{v}_0 электрона на две составляющие: параллельную вектору \vec{B} (\vec{v}_{\parallel}) и перпендикулярную ему (\vec{v}_{\perp}). Скорость \vec{v}_{\parallel} в магнитном поле не изменяется и обеспечивает перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость \vec{v}_{\perp} в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению ($\vec{F}_{\perp} \perp \vec{v}_{\perp}$) (в отсутствие параллельной составляющей ($v_{\parallel} = 0$) движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитным силовым линиям). Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении со скоростью \vec{v}_{\parallel} и равномерном движении по окружности со скоростью \vec{v}_{\perp} .

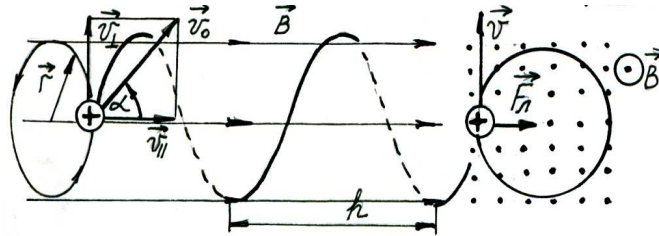


Рис. 3.32

Период обращения электрона связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = 2\pi R / v_{\perp}. \quad (1)$$

Найдём отношение R/v_{\perp} . Для этого воспользуемся тем, что сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = v_{\perp}^2 / R$. Согласно второму закону Ньютона, можно написать $F_{\perp} = ma_n$, или

$$|e|v_{\perp} B = m v_{\perp}^2 / R, \quad (2)$$

где $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$.

Сократив (2) на v_{\perp} , выразим соотношение R/v_{\perp} ($R/v_{\perp} = m/eB$) и подставим его в формулу (1):

$$T = 2\pi \frac{m}{|e|B}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства даёт единицу времени, с:

$$\frac{[m]}{[e][B]} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{1 \text{ с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = 1 \text{ с.}$$

Произведём вычисления:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 3,57 \cdot 10^{-9} = 3,57 \text{ нс.}$$

Модуль скорости v_0 , можно выразить через v_{\perp} и v_{\parallel} :

$$v_0 = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}.$$

Из формулы (2) выразим перпендикулярную составляющую скорости:

$$v_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Параллельную составляющую скорости v_{\parallel} найдём из следующих соображений. За время, равное периоду обращения T , электрон пройдёт вдоль силовой линии расстояние, равное шагу винтовой линии, т.е. $h = Tv_{\parallel}$, откуда $v_{\parallel} = \frac{h}{T}$.

Подставив вместо T правую часть выражения (2), получим

$$v_{\parallel} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

$$v_0 = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{|e|B}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства даёт единицу скорости м/с. Для этого заметим, что R и h имеют одинаковую единицу – метр (м). Поэтому в квадратных скобках мы поставим только одну из величин (например, R):

$$\frac{[e][B]}{[m]} [R^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}}{1 \text{ кг}} (\text{м}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ м/с.}$$

Произведем вычисления:

$$v_0 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[(0,01)^2 + \left(\frac{0,06}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с,}$$

или 24,6 Мм/с.

Пример 5. Определить индукцию и напряжённость магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей $N = 200$ витков, идёт ток силой $I = 5$ А. Внешний диаметр тороида $d_1 = 30$ см, внутренний – $d_2 = 20$ см.

Решение. Для определения напряжённости магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора H вдоль силовой линии поля:

$$\oint H dl.$$

Из условия симметрии следует, что силовые линии тороида представляют собой окружности и что во всех точках силовой линии численное значение напряжённости одно и то же. Поэтому в выражении циркуляции напряжённость H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до $2\pi r$, где r – радиус окружности, совпадающей с силовой линией, вдоль которой вычисляется циркуляция, т.е.

$$\oint_L H dl = H \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r H.$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_L H dl = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2)$$

Приравняв правые части равенства (1) и (2), получим

$$2\pi r H = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (3)$$

Силовая линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид

$$2\pi r H = NI.$$

Отсюда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \quad (4)$$

Для средней линии тороида

$$r = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{d_1 + d_2}{4}.$$

Подставив это выражение r в (4), найдём

$$H = \frac{2NI}{\pi(d_1 + d_2)}. \quad (5)$$

Индукция B связана с напряжённостью поля соотношением

$$B = \mu\mu_0 H.$$

Следовательно,

$$B = \frac{2\mu\mu_0 NI}{\pi(d_1 + d_2)}. \quad (6)$$

Подставляя числовые значения в (5) и (6), получим

$$H = \frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{3,14(0,3 + 0,2)} = 1370 \text{ А/м};$$

$$B = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5}{\pi(0,3 + 0,2)} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

КЛАССИФИКАЦИЯ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВ

4.1. НАМАГНИЧЕННОСТЬ МАГНЕТИКОВ

Все вещества, помещённые в магнитное поле, намагничиваются, т.е. приобретают вполне определённые магнитные моменты и сами становятся источниками магнитного поля. При этом полное поле \vec{B} в веществе (усреднённое) складывается из намагничивающего поля \vec{B}_0 и поля, возникшего в веществе \vec{B}' , т.е. $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$.

Вещества, способные намагничиваться, называются магнетиками. В зависимости от того, как направлены в каждой точке магнетика поля \vec{B} и \vec{B}_0 и как велико \vec{B}' , по сравнению с \vec{B}_0 , все вещества делятся на *диамагнетики* ($\vec{B} \leq \vec{B}_0$, $\vec{B}' \uparrow \downarrow \vec{B}_0$), *парамагнетики* ($\vec{B} \leq \vec{B}_0$, $\vec{B}' \uparrow \uparrow \vec{B}_0$) и *ферромагнетики* ($\vec{B} \geq \vec{B}_0$, $\vec{B}' \uparrow \uparrow \vec{B}_0$).

Действие любого из магнетиков можно формально свести к совокупности замкнутых элементарных токов. Ампер назвал их молекулярными токами (или микротоки). Каждый микроток имеет свое магнитное поле, характеризуемое магнитным моментом \vec{p}_m (рис. 4.1)

$$\vec{p}_m = i_{\text{микро}} \vec{S},$$

где $i_{\text{микро}}$ – микроток; \vec{S} – вектор, численно равный площади, охватываемой микротоком.

В намагниченном веществе магнитные поля микротоков, складываясь, дают результирующее поле \vec{B}' , а магнитные моменты – некоторый результирующий момент.

Магнитное состояние намагниченного вещества характеризуется вектором намагниченности или намагничения.

Вектор намагниченности \vec{J} – физическая векторная величина, характеризующая интенсивность намагничивания вещества и равная магнитному моменту единицы объёма вещества.

Для однородного магнетика

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V},$$

для неоднородного

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}. \quad (4.1.1)$$

Магнетик называется однородным, если его магнитные свойства одинаковы во всех его точках.

Магнетик называется изотропным, если его магнитные свойства одинаковы по всем направлениям.

Теория и опыт показывают, что в однородной, изотропной неферромагнитной среде, в не очень сильных полях и при не очень высоких частотах изменения внешнего поля \vec{B}_0 имеет место соотношение

$$\vec{J} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (4.1.2)$$

где χ – безразмерный коэффициент, зависящий от природы вещества и называемый магнитной восприимчивостью; $\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ и \vec{J} по размерности одинаковы

$$\left| \frac{B_0}{\mu_0} \right| = \frac{\text{Н/Ам}}{\text{Н/А}^2} = \text{А/м}; \quad |J| = \frac{\text{Ам}^2}{\text{м}^3} = \text{А/м}.$$

Между магнитной индукцией поля микротоков \vec{B}' и вектором намагниченности \vec{J} существует связь. Установим её.

В магнитное поле с стержень, все его микротоки. Рассмотрим поперечное сечение цилиндра. Соседние микротоки только микротоки во внешнем слое. Эти токи дают который и создает поле \vec{B} . Оно

$$\vec{B} = \mu_0 I_{\text{микро}},$$

где $I_{\text{микро}}$ – поверхностный ток,

поверхностная плотность тока (для соленоида $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$).

Микроток i , приходящийся на отрезок dl цилиндра, равен $i = I_{\text{микро}} dl$, его магнитный момент $p_m = iS = I_{\text{микро}} dldS$, где dS – сечение стержня. Поделив магнитный момент на элементарный объем $dV = dldS$, получим магнитный момент единицы объема, т.е. намагниченность

$$\frac{I_{\text{микро}} dldS}{dldS} = J = I_{\text{микро}};$$

тогда

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (4.1.3)$$

т.е. векторы \vec{B} и \vec{J} совпадают. Учитывая, что $\vec{J} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ (4.1.2), получим $\vec{B} = \chi \vec{B}_0$, и полное поле в веществе станет равным

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0, \quad (4.1.4)$$

где μ – относительная магнитная проницаемость вещества. Она показывает, во сколько раз изменяется поле в веществе, по сравнению с вакуумом $\mu = B / B_0$.

4.2. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

Установлено, что магнитное поле создается любыми токами, как макроскопическими, так и микротоками. Следовательно, выражение (3.5.1) примет вид

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{пров}} + \mu_0 \sum i_{\text{микро}}. \quad (4.2.1)$$

Между вектором намагничения \vec{J} и микротоками $i_{\text{микро}}$ существует связь. Проведём внутри материала проводника замкнутый контур L (рис. 4.3) и подсчитаем число микротоков, нанизанных на элемент контура dl . Нанизываться будут те токи, центры которых лежат внутри наклонного цилиндра с площадью основания dS и длиной dl .

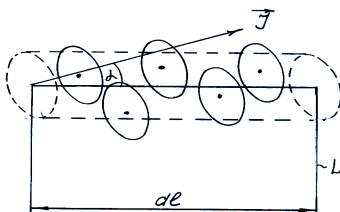


Рис. 4.3

При концентрации микротоков n их полное число в цилиндре

$$ndV = ndSdl \cos \alpha,$$

где α – угол между dl и \vec{J} . Суммарный ток будет равен $i_{\text{микро}} ndSdl \cos \alpha$.

Учитывая, что по определению

$$i_{\text{микро}} dSn = p_m n = J$$

есть вектор намагничения, получаем, что суммарный микроток, связанный с элементом dl контура обхода, равен

$$i_{\text{микро}} ndSdl \cos \alpha = Jdl \cos \alpha = \vec{J} d\vec{l},$$

т.е. полный микроток, охватываемый контуром L , будет $\sum i_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}$ и тогда (4.2.1) примет вид

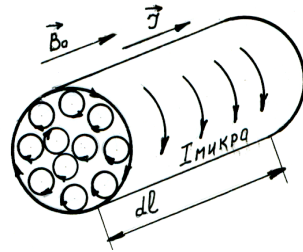


Рис. 4.2

индукцией \vec{B}_0 , внесём металлический установятся перпендикулярно \vec{J} . сечение цилиндра (рис. 4.2). компенсируются. Не компенсируются слое (10^{-10} м). результирующий поверхностный ток, подобно полю соленоида

приходящийся на единицу длины, или

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{пров}} + \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l} . \quad (4.2.2)$$

Разделим выражение (4.2.2) на μ_0 и объединим интегралы

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum I_{\text{пров}} , \quad (4.2.3)$$

где выражение $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$ называется напряжённостью магнитного поля. Единицей напряжённости является А/м, что следует из (4.2.3) $|\vec{H}|_{\text{м}} = \text{А}$, откуда $|\vec{H}| = \text{А/м}$.

Выполнив замену в (4.2.3), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{пров}} . \quad (4.2.4)$$

Выражение (4.2.4) называется *законом полного тока* или *теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля*.

Циркуляция вектора напряжённости стационарного магнитного поля равна полному току проводимости, протекающему через любую поверхность, опирающуюся на контур интегрирования.

Таким образом, для характеристики магнитного поля введены два вектора \vec{B} и \vec{H} . Основным является \vec{B} . Поскольку \vec{H} зависит от макротоков, то по ним легче следить за изменениями поля.

\vec{H} зависит от среды μ , в ограниченных магнетиках – от их формы и размеров. \vec{H} не зависит от среды, когда однородная среда заполняет всё пространство поля или эта среда не пересекается с линиями внешнего поля.

Рассмотрим примеры определения напряжённости поля в магнетиках.

1. Напряжённость магнитного поля в вакууме.

Так как для вакуума $\vec{J} = 0$, то и $\vec{B} = 0$. Следовательно,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 \quad \text{и} \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} . \quad (4.2.5)$$

Напряжённость магнитного поля в вакууме \vec{H}_0 равна \vec{B}_0 , делённому на μ_0 .

2. Напряжённость магнитного поля в безграничной однородной изотропной среде.

Рассмотрим безграничный соленоид. Если в нём сердечника нет, то $\vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0$. После заполнения соленоида однородным изотропным веществом $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0 + \vec{B}'}{\mu_0} - \vec{J}$, но так как $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$ (4.1.3), то, $\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0$, т.е. поле в однородном изотропном магнетике равно полю в вакууме $\vec{H} = \vec{H}_0$ (4.2.5) и совпадает с напряжённостью внешнего поля. Для изотропной неферромагнитной среды связь между \vec{B} и \vec{H} проста, так как $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$, то из $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$ следует, что

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} . \quad (4.2.6)$$

3. Напряжённость поля в ограниченных магнетиках.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с однородным, изотропным сердечником. Удалим части А и Б (рис. 4.4).

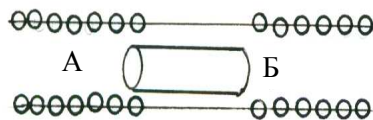


Рис. 4.4

Тогда индукция \vec{B}_1 станет меньше \vec{B} , а так как $\vec{B}_1 < \vec{B}$, то и напряжённость поля в коротком сердечнике $\vec{H}_1 = \vec{B}_1 / \mu_0 \mu$ будет меньше напряжённости поля длинного сердечника $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 \mu$, т.е. $\vec{H}_1 < \vec{H}$, но $\vec{H} = \vec{H}_0$, следовательно, $\vec{H}_1 < \vec{H}_0$.

В ограниченных магнетиках напряжённость магнитного поля меньше напряжённости внешнего поля.

4.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ \vec{H} И \vec{B}

Для ограниченных магнетиков большое значение приобретают граничные условия, определяющие поведение \vec{B} и \vec{H} на границе раздела сред. Эти условия вытекают из теоремы о циркуляции вектора напряжённости и теоремы Гаусса для вектора индукции.

На границе раздела двух магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 вырежем небольшой цилиндр так, чтобы его образующая была перпендикулярна границе раздела магнетиков (рис. 4.5).

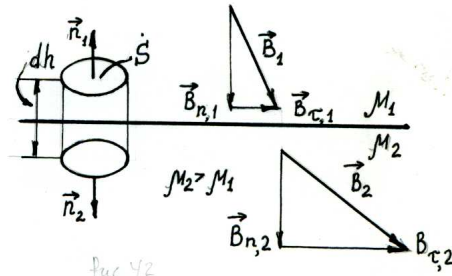


Рис. 4.5

Для рассматриваемого цилиндра по теореме Гаусса поток Φ равен нулю,

$$\Phi = B_{n2}S - B_{n1}S = 0,$$

откуда
$$B_{n2} = B_{n1}, \quad (4.3.1)$$

нормальные составляющие вектора индукции при переходе границы раздела магнетиков не изменяются.

Выразив вектор индукции через напряжённость поля, получим

$$\mu_0\mu_1 H_{n1} = \mu_0\mu_2 H_{n2},$$

откуда

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (4.3.2)$$

Вычислим циркуляцию вектора напряжённости (в проекции на выбранное направление) по прямоугольному контуру, стороны которого параллельны границе раздела магнетиков (рис. 4.6)

$$\oint_L H dl = H_{\tau 1}l - H_{\tau 2}l = \sum I = 0,$$

так как контур обхода не охватывает токов.

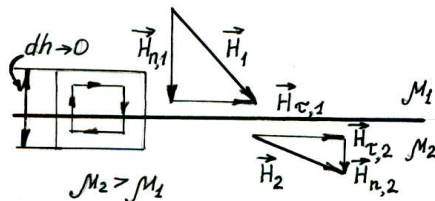


Рис. 4.6

Из последнего равенства получаем

$$H_{\tau 2} = H_{\tau 1}, \quad (4.2.3)$$

еще раз учитывая, что $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$, имеем

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.2.4)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора индукции \vec{B}_n и тангенциальная составляющая вектора напряжённости \vec{H}_τ не изменяется; тан-

генциальная составляющая вектора индукции \vec{B}_t и нормальная составляющая вектора напряжённости \vec{H}_n изменяются скачкообразно (рис. 4.7).

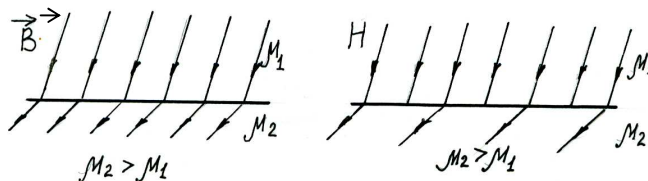


Рис. 4.7
МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

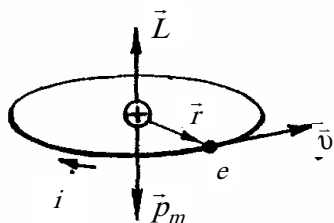
4.4. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

1. Согласно представлениям классической физики электроны в атомах движутся по замкнутым орбитам. Следовательно, каждый электрон создаёт замкнутый микроток, магнитное поле которого можно охарактеризовать магнитным моментом (рис. 4.8).

Магнитный момент \vec{p}_m , обусловленный движением электрона по орбите, называется орбитальным магнитным моментом электрона.

Величина орбитального магнитного момента электрона равна

$$\vec{p}_m = iS,$$



обусловленный движением электрона по орбитальным магнитным моментом

магнитного момента электрона равна

где i – ток, создаваемый электроном; S – площадь орбиты.

Будем считать орбиту круговой. Через любое сечение электронной орбиты за единицу времени переносится заряд $e\nu$, где e – заряд электрона; ν – число оборотов в секунду. Следовательно, созданный электроном ток равен $i = e\nu$. Частоту обращения ν можно выразить через линейную скорость v

$$\nu = \frac{v}{2\pi r},$$

где r – радиус орбиты. Площадь орбиты равна $S = \pi r^2$.

Таким образом

$$p_m = iS = \frac{evr}{2}. \quad (4.4.1)$$

Так как заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление создаваемого им тока противоположны. Направление вектора \vec{p}_m образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 4.8).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса, который принято называть орбитальным механическим моментом

$$\vec{L} = [\vec{r} m \vec{v}], \quad (4.4.2)$$

где \vec{r} – радиус-вектор электрона (рис. 4.8).

Модуль вектора \vec{L} равен

$$L = r m v, \quad (4.4.3)$$

так как угол между \vec{r} и \vec{v} все время прямой.

Отношение модулей векторов орбитального магнитного и орбитального механического моментов называется *орбитальным гиромангнитным отношением электрона*

$$\frac{p_m}{L} = g. \quad (4.4.4)$$

Учитывая направления \vec{p}_m и \vec{L} ,

$$\vec{p}_m = -g\vec{L}. \quad (4.4.5)$$

Подставив в (4.4.4) выражения для \vec{p}_m и \vec{L} , получим

$$g = \frac{e}{2m}. \quad (4.4.6)$$

Соотношение (4.4.6) справедливо для любых орбит.

Сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов в атоме образует орбитальный магнитный момент атома, сумма всех орбитальных механических моментов – орбитальный механический момент атома.

Гиромагнитное отношение не зависит от числа электронов, по которым производится суммирование механических и магнитных моментов, т.е. для любого числа электронов (в атоме, в магнетике в целом) выполняются соотношения:

$$\frac{|\sum \vec{p}_{mi}|}{|\sum \vec{L}_i|} = g$$

и

$$\sum \vec{p}_{mi} = -g \sum \vec{L}_i. \quad (4.4.7)$$

2. Из (4.4.7) следует, что намагничивание магнетика должно сопровождаться его вращением, а вращение – намагничиванием. Первое явление было открыто Эйнштейном и де Гаазом (1915), второе – Барнеттом (1909).

Если магнетик не намагничен, то суммарный магнитный момент, а, следовательно, и суммарный механический момент всех его электронов равен нулю. При намагничивании магнетик приобретает некоторый магнитный момент $\sum \vec{p}_i$. Следовательно, электроны приобретают и некоторый механический момент $\sum \vec{L}_i$. Но поворот электронных внутренних сил, поэтому должен импульса: сам магнетик должен прийти во вращение. При изменении вращения изменяется.

Схема опыта Эйнштейна и де Газа стержень, подвешенный на кварцевой соленоид. По соленоиду пропускается направления тока в соленоиде направление поворота стержня изменяется на противоположное (поворот стержня фиксируется с помощью светового зайчика, отражающегося от зеркала).

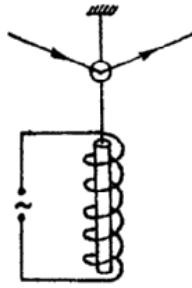


Рис. 4.9

токов происходит под действием выполняться закон сохранения момента приобрести момент импульса – $\sum \vec{L}_i$, т.е. направления намагничивания направление

изображена на рис. 4.9. Железный нити с зеркальцем, помещается в переменный ток. При изменении

Если частота изменений тока совпадает с частотой собственных крутильных колебаний стержня, то повороты стержня будут заметными и их можно зафиксировать. Измерив магнитный и механический моменты стержня, можно определить гиромагнитное отношение.

Барнетт производил в быстрое вращение железный стержень и измерял возникающую при этом намагниченность. По данным опыта также определялось гиромагнитное отношение.

3. Гиромагнитное отношение в опытах Эйнштейна и Барнетта оказалось в два раза больше теоретически ожидаемого значения. Это расхождение эксперимента с теорией оставалось загадкой вплоть до 1925 г.

В 1925 г. С. Гоудсмит и Г. Уленбек выдвинули предположение о том, что электрон независимо от орбитального движения обладает собственным моментом импульса \vec{L}_s и собственным магнитным моментом \vec{p}_{mS} . Собственный момент импульса электрона был назван спином, собственный магнитный момент – спиновым магнитным моментом. Предположение Гоудсмита и Уленбека в последующем полностью подтвердилось и надёжно доказано экспериментально.

Первоначально наличие у электрона спина связывали с вращением электрона вокруг собственной оси (англ. spin – вращение). Однако, такая чисто механическая модель спина противоречит теории относительности (линейная скорость внешних частей электрона должна превышать скорость света) и от неё отказались. Спин – это такое свойство электрона, которое нельзя представить наглядно.

Спиновый магнитный момент характеризует собственное магнитное поле электрона. На расстоянии это поле подобно полю контура с током. Во внешнем магнитном поле на спиновый магнитный момент \vec{p}_{ms} действует вращательный момент.

Спином и спиновым магнитным моментом обладают не только электроны, но и многие другие элементарные частицы. Отношение модулей спинового магнитного момента и спина электрона называется *спиновым гиромагнитным отношением* электрона

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = g_s \cdot \quad (4.4.8)$$

Измерения показали, что

$$g_s = \frac{e}{m}, \quad (4.4.9)$$

т.е. спиновое гиромагнитное отношение в два раза больше орбитального гиромагнитного отношения.

Из (4.4.8) и (4.4.9)

$$p_{ms} = \frac{e}{m} L_s. \quad (4.4.10)$$

Найденное Эйнштейном, де Гаазом и Барнеттом значение гиромагнитного отношения совпадает со спиновым гиромагнитным отношением. Следовательно, магнетизм железа обусловлен не орбитальными, а спиновыми магнитными моментами.

Спин в СИ измеряется в Дж·с, спиновый магнитный момент – в Дж/Тл.

Спин электрона равен $L_s = 0,53 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

спиновый магнитный момент $p_{ms} = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

Величина спинового магнитного момента электрона, т.е. $0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл принимается за единицу измерения магнитных моментов атомов и называется магнетоном Бора.

4. Таким образом, магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых магнитных моментов всех электронов атома, а также из спиновых моментов входящих в состав атомного ядра протонов и нейтронов.

Спины электронов, протонов и нейтронов по абсолютной величине одинаковы. Что касается спиновых магнитных моментов, то у протонов и нейтронов они значительно меньше, чем у электронов (при нахождении \vec{p}_{ms} протона в (4.4.10) нужно подставлять массу протона, которая почти в 2000 раз больше массы электрона). Поэтому магнитным моментом ядра можно пренебречь.

4.5. ДИАМАГНЕТИЗМ

Все вещества в магнитном отношении делятся на диамагнетики, парамагнетики и магнетики с упорядоченной магнитной структурой – ферро-, антиферро- и ферримагнетики.

С макроскопической точки зрения диамагнетики – это вещества, имеющие отрицательную магнитную восприимчивость и меньшую единицы магнитную проницаемость $\chi < 0$, $\mu < 1$.

Диамагнетиками являются инертные газы, многие органические соединения, некоторые металлы (Bi, Zn, Au, Cu, Ag, Hg), смолы, молекулярный водород, стекло, мрамор и др.

Вектор намагниченности в диамагнетиках антипараллелен намагничивающему полю \vec{B}_0 , поэтому результирующее поле в диамагнетиках \vec{B} всегда слабее внешнего поля \vec{B}_0 .

Восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры и намагничивающего поля (в не очень сильных полях) и весьма мала по величине. Так, у меди $\chi = -0,84 \cdot 10^{-7}$, у висмута $\chi = -1,7 \cdot 10^{-4}$.

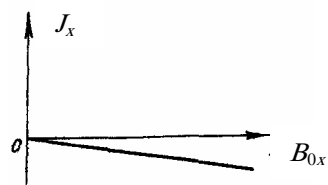


Рис. 4.10

Вектор намагниченности диамагнетиков пропорционален намагничивающему внешнему полю \vec{B}_0 . На рисунке 4.10 изображён график зависимости J_x от B_{0x} (J_x и B_{0x} – проекции векторов \vec{J} и \vec{B}_0 на ось x , направленную по вектору \vec{B}_0).

С микроскопической точки зрения диамагнетики – это вещества, состоящие из атомов и молекул, магнитные моменты которых (сумма орбитальных и спиновых моментов) в отсутствие внешнего поля равны нулю.

Рассмотрим механизм намагничивания диамагнетиков.

Атомный диамагнетизм (диамагнетизм связанных электронов). Во внешнем магнитном поле в каждом атоме диамагнетика индуцируется магнитный момент, направленный против поля. Индуциро-

ванные магнитные моменты обусловлены изменением угловой скорости обращения электронов. Рассмотрим одну из электронных орбит.

В отсутствие магнитного поля на электрон действует кулоновская сила, играющая роль центростремительной силы. По второму закону Ньютона

$$F_{\text{эл}} = m\omega_0^2 r,$$

где m – масса электрона; ω_0^2 – угловая скорость обращения электрона; r – радиус орбиты.

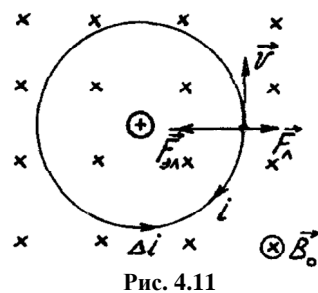


Рис. 4.11

При наличии магнитного поля на электрон действует ещё сила Лоренца. Если магнитное поле перпендикулярно к плоскости электронной орбиты и направлено так, как на рис. 4.11 (за чертеж), то электрическая сила и сила Лоренца противоположны друг другу.

Модуль центростремительной силы равен $F_{\text{эл}} - F_{\text{Л}}$ и, следовательно,

$$F_{\text{эл}} - F_{\text{Л}} = m\omega_1^2 r.$$

Радиус электронной орбиты при этом не изменяется (объяснение этому факту даёт квантовая механика). Так как величина центростремительной силы уменьшается, то уменьшается и угловая скорость обращения электрона: $\omega_1 < \omega_0$.

Уменьшение угловой скорости эквивалентно возникновению дополнительного кругового тока Δi , направленного против электронного орбитального тока.

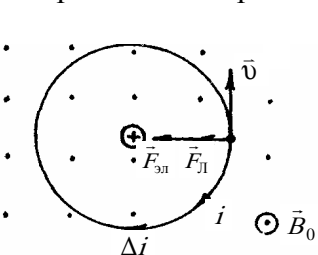


Рис. 4.12

Ток Δi создаёт дополнительный магнитный момент $\Delta \vec{p}_m$, направленный против внешнего поля.

Если магнитное поле направлено так, как на рис. 4.12 (к нам), то сила Лоренца и кулоновская сила направлены в одну сторону и угловая скорость обращения электрона возрастает: $\omega_2 > \omega_0$.

Возрастание угловой скорости эквивалентно возникновению дополнительного кругового тока Δi , совпадающего с орбитальным электронным током. Этот ток создаёт магнитный момент $\Delta \vec{p}_m$, направленный опять-таки против внешнего магнитного поля.

Электронная орбита не перпендикулярная к магнитному полю под действием поля прецессирует – совершает такое движение, при котором орбитальный магнитный момент \vec{p}_m описывает конус, осью которого служит направление \vec{B}_0 . Направление прецессии связано с направлением \vec{B}_0 правилом правого винта: если поступательное движение винта совпадает с \vec{B}_0 , то вращение винта совпадает с направлением прецессии. При этом направление обращения электрона по орбите противоположно направлению прецессии, если угол между \vec{p}_m и \vec{B}_0 острый и совпадает с направлением прецессии, если этот угол тупой (рис. 4.13, а, б).

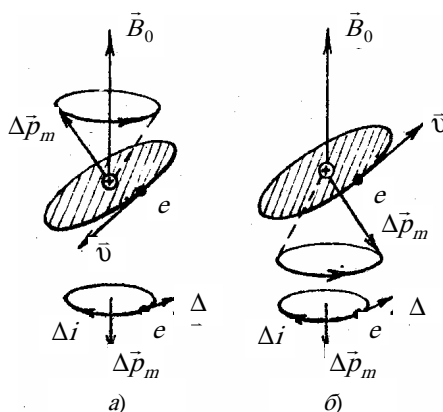


Рис. 4.13

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона в плоскости, перпендикулярной к \vec{B}_0 . За счёт этого движения возникает магнитный момент \vec{p}_m , направленный против поля. Просуммировав магнитные моменты, приобретаемые всеми электронами атома, можно найти индуцированный магнитный момент атома.

Приобретение атомом магнитного момента во внешнем магнитном поле называется атомным диамагнетизмом или диамагнетизмом связанных электронов. Этот эффект имеет место во всех без исключения веществах.

Диамагнетизм свободных электронов (диамагнетизм Ландау). Вещества, в которых имеются свободные электроны (металлы, полупроводники, ионизованные газы), кроме атомного диамагнетизма, обладают диамагнетизмом Ландау (по имени советского физика Л.Д. Ландау).

Как известно, заряженная частица, влетающая в магнитное поле под произвольным углом, движется по винтовой траектории. Это движение складывается из движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю, и из равномерного прямолинейного движения вдоль (или против) поля. За счёт движения по окружности создаётся магнитный момент, направленный против поля.

Таким образом, в магнитном поле свободные электроны металлов и других веществ создают диамагнитные моменты. Этот диамагнетизм свободных электронов и называется диамагнетизмом Ландау.

4.6. ПАРАМАГНЕТИЗМ

1. С макроскопической точки зрения парамагнетики – вещества, для которых χ , как и у диамагнетиков, не велика, но положительна, а μ несколько больше единицы:

$$\chi > 0, \mu > 1.$$

Парамагнетиками являются Na, K, Rb, Cs, Mg, Al, Mn, Pt, O₂, растворы солей железа и др. Восприимчивость парамагнетиков при обычных температурах лежит в пределах от 10^{-3} до 10^{-6} . Так, у алюминия

$\chi = 2 \cdot 10^{-5}$, у платины $\chi = 3 \cdot 10^{-4}$, у хлористого железа (FeCl₃) $\chi = 2,5 \cdot 10^{-3}$.

Опыт показывает, что χ парамагнетиков зависит от температуры (закон Кюри):

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (4.6.1)$$

где C – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества.

Закон Кюри справедлив при не слишком низких температурах.

Вектор намагничивания в изотропных парамагнетиках в не очень сильных постоянных внешних полях пропорционален намагничивающему полю и совпадает с ним по направлению. В очень сильных полях

(10^2 Тл и более) пропорциональность между J и B_0 нарушается и при некотором B_0 наступает насыщение: J перестает зависеть от B_0 (рис. 4.14).

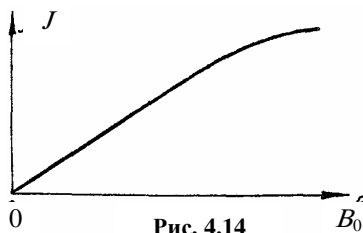


Рис. 4.14

2. С микроскопической точки зрения парамагнетики – это вещества, атомы и молекулы которых в отсутствие внешнего магнитного поля обладают магнитными моментами, т.е. являются магнитными диполями.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов парамагнетика вследствие теплового движения, ориентируются беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент атомов равен нулю.

При наличии магнитного поля магнитные моменты ориентируются преимущественно по полю, в результате чего возникает намагниченность (изменение ориентации магнитных моментов атомов происходит только при столкновениях атомов друг с другом). Интенсивность намагничивания пропорциональна намагничивающему полю B_0 и обратно пропорциональна температуре парамагнетика T : тепловое движение оказывает на магнитные диполи дезориентирующее действие.

Заметим, что в парамагнетиках наряду с поворотом электронных орбит имеет место и прецессия орбит, т.е. на парамагнитный эффект накладывается диамагнитный эффект. Парамагнитный эффект, как правило, перекрывает диамагнитный, поэтому в парамагнетиках внутреннее магнитное поле усиливает внешнее поле.

Классическая теория парамагнетизма была развита П. Ланжевром (Франция) в 1905 г.

Парамагнетизм свободных электронов (парамагнетизм Паули).

Электронный газ благодаря наличию спиновых магнитных моментов является парамагнитным. В магнитном поле собственные магнитные моменты электронов ориентируются преимущественно по полю, создавая тем самым определенную намагниченность. С классической точки зрения в намагничивании должны принимать участие все свободные электроны. Это означает, что восприимчивость электронного газа должна зависеть от температуры. Опыт, однако, показывает, что восприимчивость электронного газа (в металлах) практически не зависит от температуры и, кроме того, значительно меньше того значения, которое предсказывает классическая теория. Дело, однако, в том, что парамагнетизм свободных электронов – эффект квантовый.

Как известно, все глубокие энергетические уровни зоны проводимости металлов заполнены парами электронов с противоположно направленными спинами. Частично или полностью свободные уровни имеются только вблизи уровня Ферми и выше уровня Ферми. Электрон, изменяющий ориентацию своего спина, должен покинуть уровень, который он до этого занимал (в противном случае на этом уровне окажутся два электрона с одинаково направленными спинами – принципом Паули это запрещено). Для перехода на новый уровень требуется энергия. Та энергия, которую электроны получают при включении магнитного поля, невелика. Это приводит к тому, что переходят на новые энергетические уровни и ориентируют свои магнитные моменты по полю лишь электроны, заполняющие уровни вблизи уровня Ферми. Подавляющее же большинство электронов не меняет ориентации своих моментов и не вносит вклада в намагниченность. Вот почему парамагнитная восприимчивость электронного газа невелика. Поскольку уровень Ферми почти не зависит от температуры, практически от температуры не зависит и восприимчивость электронного газа

4.7. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

1. Ферромагнетики – вещества, способные намагничиваться очень сильно (внутреннее поле в таких веществах может в $10^2 \dots 10^6$ раз превышать внешнее магнитное поле):

$$\chi \gg 0, \mu \gg 1.$$

Ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd, сплавы и соединения этих элементов, а также некоторые сплавы и соединения Mn и Cr с неферромагнитными элементами, например MnAlCu, MnBi, CrTe и др.

Ферромагнетики, кроме способности сильно намагничиваться, обладают рядом свойств, существенно отличающих их от других магнетиков.

1) *Нелинейная зависимость намагниченности \vec{J}* , а следовательно, и индукции результирующего поля \vec{B} от намагничивающего внешнего поля \vec{B}_0 .

Обычно на графиках предпочитают изображать зависимость намагниченности и индукции в ферромагнетиках не от \vec{B}_0 , а от \vec{H} (\vec{H} , как известно, так же как и \vec{B}_0 , пропорционально макротоку, создающему намагничивающее поле).

Графики зависимости J от H и B от H ферромагнетика (железо), магнитный момент которого первоначально был равен нулю, изображены на рис. 4.15.

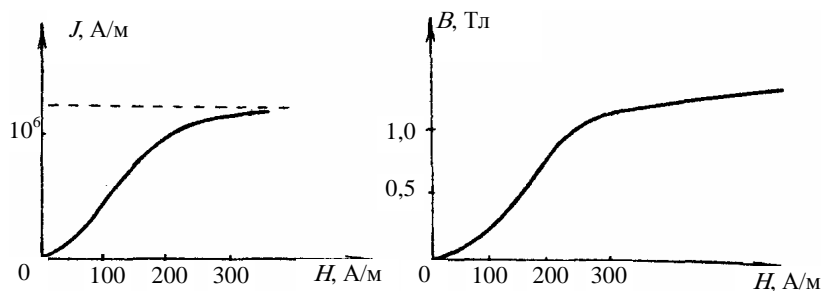


Рис. 4.15

Как видно из графиков, намагниченность при некотором значении H достигает насыщения. По достижении насыщения B растёт с увеличением H по линейному закону.

2) *Магнитный гистерезис.* Намагниченность ферромагнетика определяется не только существующим внешним магнитным полем, но и предысторией намагничивания. При изменении величины и на-

правления внешнего поля намагниченность отстаёт от изменений этого поля. Это явление называется *магнитным гистерезисом*.

Если ферромагнетик намагнитить до насыщения, а затем уменьшать напряжённость намагничивающего поля, то намагниченность J_x , будет следовать не первоначальной кривой 1 (она называется основной кривой намагничивания), а новой кривой 2 (рис. 4.16). При $H_x = 0$ ферромагнетик не утрачивает намагниченности. Намагниченность $\bar{J}_x^{\text{ост}}$, которой ферромагнетик обладает в отсутствие внешнего магнитного поля, называется *остаточной*. Чтобы снять остаточную намагниченность, нужно включить внешнее поле, направление которого противоположно первоначальному полю, вызвавшему намагничивание.

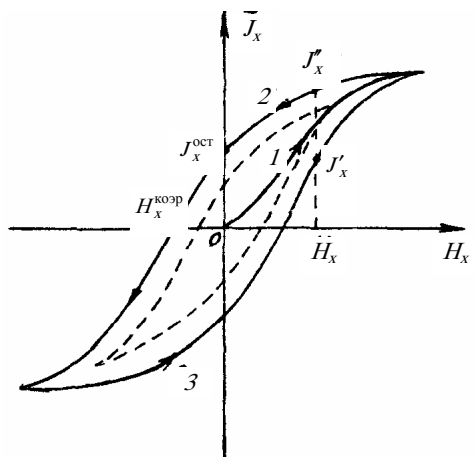


Рис. 4.16

Поле $\bar{H}_x^{\text{коэр}}$ обратного направления, которое полностью снимает остаточную намагниченность, называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении обратного намагничивающего поля вновь происходит насыщение ферромагнетика.

В ненамагниченное состояние ферромагнетик возвращается в соответствии с кривой 3.

При циклическом изменении величины и направления намагничивающего поля получается петлеобразная кривая, называемая *петлёй гистерезиса*. Если максимальные значения \bar{H} таковы, что достигается насыщение, получается максимальная петля гистерезиса (сплошная кривая на рис. 4.16), если насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (пунктирная кривая).

Частных циклов можно получить сколько угодно и все они лежат внутри максимальной петли.

Наличие гистерезиса означает, что намагниченность \bar{J} (и индукция результирующего поля \bar{B}) ферромагнетика не являются однозначной функцией \bar{H} . При одном и том же значении \bar{H} намагниченность может принимать любые значения, лежащие в некотором интервале (от J'_x до J''_x при H_x в случае петли, изображённой на рис. 4.16).

В связи с неоднозначностью зависимости \bar{B} от \bar{H} понятие магнитной проницаемости применимо только к основной кривой намагничивания. Магнитная проницаемость ферромагнетиков зависит от внешнего магнитного поля (рис. 4.17). Максимальная остаточная намагниченность $\bar{J}_{\text{max}}^{\text{ост}}$, максимальная коэрцитивная сила $\bar{H}_{\text{max}}^{\text{коэр}}$ и максимальная магнитная проницаемость μ_{max} — основные характеристики ферромагнетика.

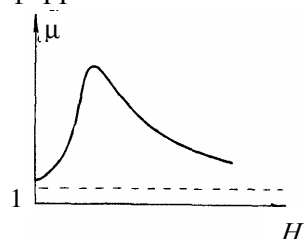


Рис. 4.17

Ферромагнетики с узкой петлёй гистерезиса (с малой $\bar{H}_{\text{max}}^{\text{коэр}}$) называются магнитно-мягкими. Такие ферромагнетики используются в качестве сердечников в трансформаторах и электрических машинах. Ферромагнетики с широкой петлёй гистерезиса называются магнитно-жесткими. Они используются для изготовления постоянных магнитов.

3) *Точка Кюри* — температура, при которой ферромагнетик утрачивает свои особые свойства. Точка Кюри для чистого железа составляет 1043 К (770 °С), для никеля 633 К (360 °С), для кобальта 1422 К (1149 °С)

При температуре выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

Природа ферромагнетизма. В ферромагнетиках между атомами имеет место так называемое обменное взаимодействие, благодаря которому энергетически выгодным оказывается состояние с параллельной ориентацией электронных спинов и, следовательно, спиновых магнитных моментов.

Силы, ориентирующие спины электронов параллельно друг другу, – немагнитные.

Области ферромагнетика, в которых спины параллельны, называются *доменами*. В пределах каждого домена ферромагнетик самопроизвольно (спонтанно) намагничен до насыщения.

Число нескомпенсированных спинов у разных ферромагнетиков различно. Так, у железа четыре нескомпенсированных спина на атом, у кобальта – три, у никеля – два.

Размеры доменов, как правило, невелики – порядка $10^{-3} \dots 10^{-4}$ см. Наличие доменов непосредственно обнаруживается на опыте методом Акулова–Биттера. Тонкий порошок ферромагнитного вещества напыляется на полированную и протравленную поверхность ферромагнетика. Частицы порошка концентрируются в тех местах, где поверхность образца пересекается со стенками доменов (здесь магнитное поле весьма неоднородно). Полученные порошковые фигуры Акулова–Биттера наблюдаются в микроскоп. Существуют и другие методы изучения доменной структуры ферромагнетиков. Если бы ферромагнетик состоял из одного домена, то он создавал бы сильное внешнее магнитное поле и обладал бы значительной магнитной энергией. Энергия, затрачиваемая на создание внешнего поля, существенно уменьшится, если вместо одного домена возникнет два или четыре домена, как это показано на рис. 4.18 (стрелками показаны направления магнитных моментов доменов).

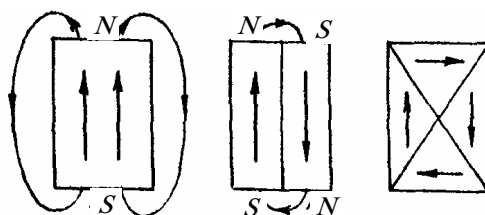


Рис. 4.18

Энергия затрачивается также на создание стенок между доменами. Наконец, существует разница в энергиях одного и того же монокристалла, намагниченного в разных кристаллографических направлениях (эта разность называется энергией анизотропии).

Таким образом, форма и размеры доменов определяются минимумом энергии внешнего магнитного поля, энергии границ доменов и энергии анизотропии.

В отсутствие намагничивающего внешнего поля ферромагнетик разбивается на домены таким образом, что его результирующий магнитный момент равен нулю. При наличии внешнего магнитного поля энергия доменов оказывается неодинаковой: она меньше для тех доменов, в которых вектор намагниченности образует с направлением поля острый угол, и больше в том случае, когда этот угол тупой.

Действие магнитного поля на ферромагнетик первоначально проявляется в смещении границ между доменами: объём доменов с благоприятной ориентировкой спинов увеличивается за счёт энергетически невыгодных доменов. Пока намагничивающее поле невелико, смещение границ обратимо и точно следует

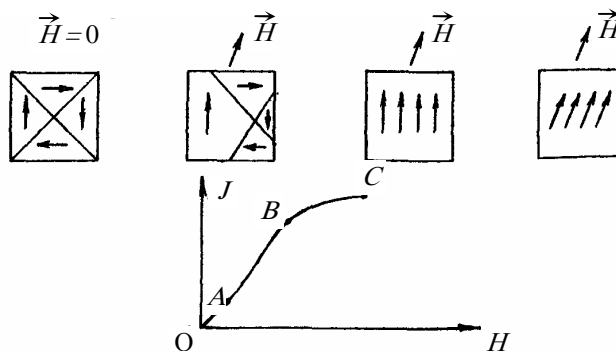


Рис. 4.19

за изменениями этого поля (рис. 4.19, область *OA*).

При дальнейшем увеличении поля смещение границ доменов становится необратимым (*AB*). В достаточно сильном поле происходит поворот магнитных моментов доменов. В состоянии насыщения ферромагнетик представляет собой один гигантский домен, магнитный момент которого совпадает с направлением внешнего намагничивающего поля.

При уменьшении намагничивающего поля намагниченность не следует первоначальному ходу, а несколько отстаёт из-за необратимости смещения границ между доменами.

Превращение ферромагнетика в парамагнетик в точке Кюри объясняется тем, что при этой температуре энергии теплового движения атомов достаточно для того, чтобы разрушились области спонтанной намагниченности.

Ферромагнетики получили весьма широкое практическое применение. Они используются в качестве сердечников в электрических машинах (генераторы, электродвигатели, трансформаторы), они применяются в качестве элементов памяти в счётно-решающих устройствах, их используют для записи звуковых и видеосигналов (магнитофоны, видеоманитофоны) и т.д.

4.8. АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ. ФЕРРИМАГНЕТИЗМ

Силы обменного взаимодействия могут приводить к упорядоченной структуре, при которой спины электронов соседних атомов антипараллельны. Вещества с такой упорядоченной магнитной структурой называются антиферромагнетиками.

Антиферромагнетик можно представить состоящим из двух подрешёток, спонтанно намагниченных во взаимно противоположных направлениях и вставленных одна в другую (рис. 4.20). Как и в случае ферромагнетиков, антиферромагнетиков возникает спонтанная намагниченность ниже некоторой температуры, называемой антиферромагнитной точкой Кюри. Выше этой температуры нескомпенсированные спины ориентированы беспорядочно, и вещество является парамагнетиком.

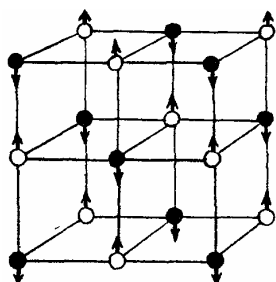


Рис. 4.20

представит состоящим из двух намагниченных во взаимно вставленных одна в другую (рис. 4.20). Как спонтанная намагниченность ниже некоторой температуры, называемой или точкой Нееля. Выше этой температуры ориентированы беспорядочно, и вещество

Во внешнем магнитном поле намагничивается, обнаруживая

Примеры антиферромагнитных

Существуют вещества, в которых магнитные моменты соседних атомов антипараллельны, но не одинаковы по абсолютной величине. Это приводит к образованию областей спонтанного намагничивания. Вещества с такой магнитной структурой называются ферримагнетиками. Примером ферримагнетиков могут служить ферриты. С химической точки зрения ферриты представляют собой твёрдые растворы, состоящие из окиси железа (Fe_2O_3) и окислов одного или нескольких металлов (Mn, Co, Cu, Zn, Ni и др.). Ферриты намагничиваются не так сильно, как ферромагнетики, но, обладая большим удельным сопротивлением, они практически не имеют потерь энергии на вихревые токи, это делает их незаменимыми в технике высоких частот.

антиферромагнетик слабо положительную восприимчивость.

веществ: Cr, MnO, MnS, NiCr, Cr_2O_3 , FeO.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Почему орбитальные магнитный и механический моменты электрона в атоме противоположно направлены?
2. Что называют гиромангнитным отношением?
3. Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
4. Что такое диамагнетики? парамагнетики? В чём различие их магнитных свойств?
5. Что такое намагниченность? Какая величина может служить её аналогом в электростатике?
6. Запишите и объясните соотношения между магнитными проницаемостью и восприимчивостью для парамагнетика; для диамагнетика.
7. Введите соотношение между векторами магнитной индукции, напряжённости магнитного поля и намагниченности.
8. Введите и прокомментируйте условия для векторов \vec{H} и \vec{B} на границе раздела двух магнетиков.
9. Запишите и проанализируйте теорему о циркуляции вектора \vec{B} в веществе.
10. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. Что такое магнитострикция? Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?
11. Какие ферромагнетики являются магнитомягкими? Магнитожёсткими? Где их применяют?
12. Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

ПРИРОДА И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

5.1. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1. Явление электромагнитной индукции (открыто М. Фарадеем в 1831 г.) состоит в том, что при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с проводящим контуром, в контуре возникает ЭДС индукции.

Магнитный поток, сцепленный с контуром, – это поток, пронизывающий любую поверхность S , опирающуюся на контур (рис. 5.1).

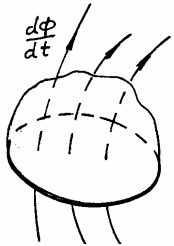


Рис. 5.1

2. Опыт показывает, что абсолютная величина ЭДС индукции в системе СИ равна абсолютной величине скорости изменения магнитного потока, сцепленного с контуром:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|. \quad (5.1.1)$$

3. Если контур замкнут, то ЭДС индукции вызывает в нём *индукционный ток*.

В незамкнутом контуре индукционный ток возникает только тогда, когда магнитный поток, сцепленный с контуром, изменяется с переменной скоростью, т.е. когда $d\Phi/dt \neq \text{const}$.

4. Изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, может быть обусловлено изменением:

- а) магнитного поля, пронизывающего контур;
- б) формы контура;
- в) положения контура в магнитном поле.

Схемы опытов, позволявших обнаружить индукционный ток за счет указанных изменений изображены на рис. 5.2.

- а) ток в контуре возникает при движении магнита относительно катушки;
- б) ток в контуре 1 возникает при движении катушки 2 с током;
- в) ток в контуре 1 возникает при замыкании и размыкании цепи 2 или при изменении в ней тока;
- г) ток в контуре возникает при повороте контура вокруг оси, не параллельной \vec{B} и не перпендикулярной к плоскости контура;

д) ток в контуре возникает при изменении площади, охватываемой контуром.

5. Ленц Э.Х. установил закон, согласно которому *индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, опирающуюся на контур, противодействует изменениям того магнитного потока, который вызывает этот индукционный ток*. Закон Ленца в формуле для ЭДС индукции отражен знаком минус:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.1.2)$$

Пример. Контур находится в изменяющемся магнитном поле (рис. 5.3).

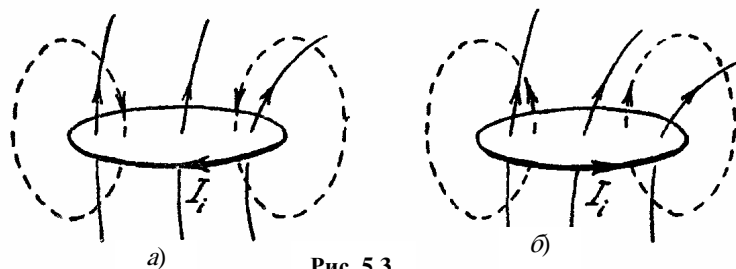


Рис. 5.3

Если \vec{B} (модуль индукции) возрастает, то $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ и по (5.1.2) $\varepsilon_i < 0$.

ЭДС индукции отрицательна – это означает, что магнитный поток, создаваемый индукционным током и пронизывающий контур, *противоположен по знаку* внешнему магнитному потоку, сцепленному с контуром (рис. 5.3, а). Если \vec{B} уменьшается, то $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ и $\varepsilon_i > 0$: магнитный поток индукционного тока и внешний магнитный поток совпадают по знаку (рис. 5.3, б).

Из закона Ленца следует, что внешнее магнитное поле всегда *тормозит* движение проводника с индукционным током. Рисунок 5.4 поясняет сказанное: при сближении цепей возникают силы отталкивания, при удалении – силы притяжения.

Тормозящее действие магнитного поля применяется в магнитных успокоителях (демпферах) некоторых измерительных приборов.

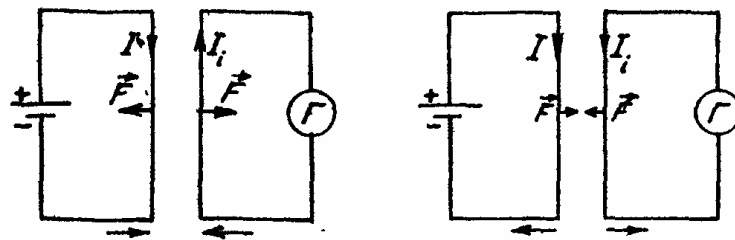


Рис. 5.4

5.2. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ИНДУКЦИИ

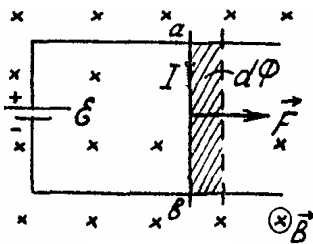


Рис. 5.5

1. Закон электромагнитной индукции Фарадея–Ленца (5.1.2) – одно из проявлений закона изменения энергии. Поместим цепь с источником ε и подвижным участком ab (рис. 5.5) в магнитное поле (поле направлено за чертёж).

За счёт работы источника тока в контуре выделяется лэнц-джоулево тепло и осуществляется перемещение проводника ab .

По закону изменения энергии работа источника за время dt равна количеству выделившегося за это время тепла и работе, затраченной на перемещение проводника ab :

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + I d\Phi, \quad (5.2.1)$$

где I – ток в контуре; R – сопротивление контура; $d\Phi$ – магнитный поток, пронизывающий поверхность, которую описывает проводник ab при своём движении, иначе – приращение, которое получает магнитный поток, сцепленный с контуром.

Из (5.2.1) получаем

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (5.2.2)$$

Таким образом, при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в последнем возникает дополнительная ЭДС, равная

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.2.3)$$

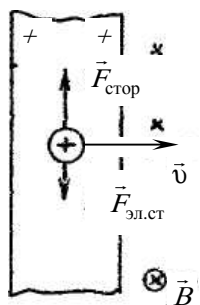


Рис. 5.6

2. Рассмотрим механизм возникновения ЭДС индукции. Наличие в контуре ЭДС означает, что на носители заряда в контуре действуют сторонние силы. Что это за силы?

В проводнике, движущемся в магнитном поле, – это *сила Лоренца*. Пусть прямолинейный проводник движется со скоростью \vec{v} в направлении, перпендикулярном к проводнику и к вектору \vec{B} (рис. 5.6).

Сила Лоренца разделяет разноименные заряды, смещая их к противоположным концам проводника. В проводнике возникает электростатическое поле. Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока лоренцева сила и сила электростатического поля не уравновесятся.

В процессе разделения зарядов, как известно, сторонние силы совершают работу. На первый взгляд может показаться, что сила Лоренца не может создавать ЭДС, поскольку она работы не совершает. Но это кажущееся противоречие. Всё объясняется тем, что сила, создающая ЭДС, – не полная сила Лоренца, а только её составляющая. Действительно, в процессе установления в проводнике равновесного распределения зарядов заряды перемещаются не только вместе с проводником, но и вдоль проводника. Следовательно, полная скорость каждого носителя заряда равна $\vec{v} + \vec{u}$, где \vec{v} – скорость проводника; \vec{u} – скорость носителей относительно проводника (рис. 5.7).

Полная сила Лоренца перпендикулярна к результирующей скорости $\vec{v} + \vec{u}$. Разложим эту силу на две составляющие: $\vec{F}_{\parallel} = q[\vec{v}\vec{B}]$, параллельную проводнику и обусловленную скоростью \vec{v} и $\vec{F}_{\perp} = q[\vec{u}\vec{B}]$, перпендикулярную к проводнику и обусловленную скоростью \vec{u} .

Составляющая \vec{F}_{\parallel} играет роль тормозит движение проводника. Соответственно

$$F_{\parallel} = qvB, \quad F_{\perp} = quB.$$

Элементарная работа, $dA = F_{\parallel} u dt \cos 0^\circ = qvBudt$.

Элементарная работа, жуток времени, равна

$$dA' = F_{\perp} v dt \cos 180^\circ = -quBvdt.$$

Работа полной силы Лоренца равна

$$dA = dA + dA' = qvBudt - quBvdt = 0.$$

Источником энергии, которая запасается в проводнике и за его пределами в виде энергии электростатического поля, а также энергии, за счёт которой совершается работа тока, является, в конечном счёте, тело, перемещающее проводник и совершающее работу против тормозящей силы F_{\perp} . После установления в проводнике равновесия, движение зарядов вдоль проводника прекратится, следовательно, $F_{\perp} = 0$, и полная сила Лоренца будет направлена вдоль проводника.

3. Роль сторонних сил в случае неподвижного проводника, находящегося в изменяющемся магнитном поле, играют *силы вихревого электрического поля*. Вихревое электрическое поле возникает в тех областях пространства, где имеется изменяющееся магнитное поле (подробнее об этом в п. 6.4). Вихревое электрическое поле непотенциально, его линии замкнуты, силы неконсервативны. Если проводник разомкнут, а вихревое поле с течением времени не изменяется, то силы этого поля уравниваются внутри проводника силами электростатического поля, возникшего в результате разделения зарядов (рис. 5.8). Направление $\vec{E}^{\text{вихр}}$ соответствует возрастанию B .

Если же проводник образует замкнутый контур, вихревое электрическое поле вызовет в нём ток. Этот ток будет существовать до тех пор, пока существует вихревое поле.

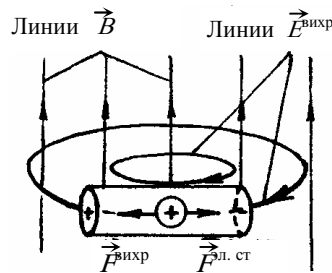


Рис. 5.8

5.3. РАСЧЁТ ЭДС ИНДУКЦИИ

Чтобы найти ЭДС индукции, действующую в данной цепи, нужно найти магнитный поток Φ , сцепленный с цепью, и продифференцировать этот поток по времени.

Пример 1. ЭДС индукции в прямолинейном проводнике, движущемся в однородном магнитном поле (рис. 5.9).

Пусть B – модуль индукции магнитного поля; l – длина проводника; v – модуль скорости движения проводника.

Магнитный поток Φ , сцепленный с движущимся линейным проводником, – это поток, пронизывающий площадь S , которую описывает проводник при своем движении. Нетрудно видеть, что при прямолинейном поступательном движении проводника

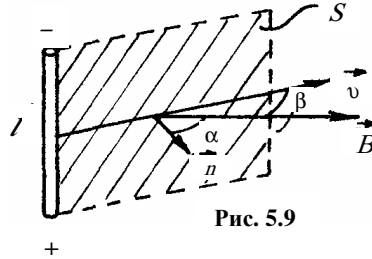


Рис. 5.9

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \sin \beta,$$

где α – угол между \vec{B} и нормалью к S ; β – угол между \vec{B} и \vec{v} ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$); $S = lv t$, следовательно;

$\Phi = B l v t \sin \beta$ и ЭДС индукции равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B l v \sin \beta. \quad (5.3.1)$$

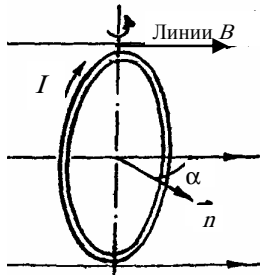


Рис. 5.10

Пример 2. ЭДС индукции в витке, вращающемся в однородном магнитном поле (рис. 5.10).

B – модуль индукции магнитного поля; S – площадь витка; ω – угловая скорость вращения витка.

Пусть виток вращается вокруг оси, перпендикулярной \vec{B} и лежащей в плоскости витка. Мгновенное значение магнитного потока, сцепленного с витком, равно

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Угол α между нормалью к витку и направлением \vec{B} в момент времени t равен

$$\alpha = \omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между \vec{n} и \vec{B} в начальный момент времени.

Следовательно, $\Phi = BS \cos(\omega t + \varphi_0)$.

ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[BS \cos(\omega t + \varphi_0)] = BS \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5.3.2)$$

где $B \omega S$ – амплитуда ЭДС.

Из (5.3.2) видно, что ЭДС, возникающая в витке, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле, изменяется со временем по гармоническому закону.

ЭДС в витке не возникает, если виток движется в однородном магнитном поле поступательно (в этом случае $B = \text{const}$; $S = \text{const}$; $\alpha = \text{const}$ и, следовательно, $\Phi = BS \cos \alpha = \text{const}$, если виток вращается вокруг оси, параллельной \vec{B} , или вокруг оси, перпендикулярной к плоскости витка (и в этих случаях $\Phi = \text{const}$).

Если в магнитном поле вращается контур, состоящий из N витков, то действующая в нём ЭДС равна сумме ЭДС, возникающих в каждом из витков:

$$\varepsilon_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i. \quad (5.3.3)$$

Величину $\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ называют магнитным потокосцеплением или полным магнитным потоком. Если

все N витков пронизываются одним и тем же потоком Φ_i , то

$$\psi = N\Phi_i. \quad (5.3.4)$$

Например, ЭДС в соленоиде, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле вокруг оси, не параллельной \vec{B} и осевой линии соленоида, равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = N\varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5.3.5)$$

где N – число витков соленоида; ε_m – амплитуда ЭДС в одном витке.

5.4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Рассмотрим два контура 1 и 2 , расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5.11). При наличии тока во втором контуре (i_2) и при соответствующем взаимном расположении контуров, первый контур будет пронизываться некоторым магнитным потоком Φ_{12} .

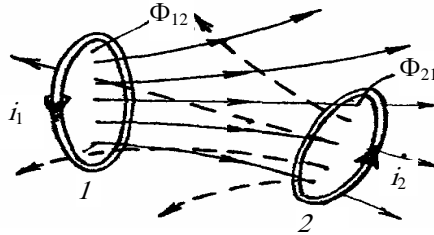


Рис. 5.11

Этот поток при прочих равных условиях тем больше, чем больше индукция \vec{B}_2 , создаваемая током i_2 в том месте, где находится контур 1 . В вакууме и в неферромагнитной среде $B_2 \sim i_2$. Следовательно,

$$\Phi_{12} = L_{12}i_2. \quad (5.4.1)$$

Аналогично, поток, создаваемый током i_1 и сцепленный со вторым контуром, пропорционален i_1 :

$$\Phi_{21} = L_{21}i_1. \quad (5.4.2)$$

Если потоки Φ_{12} и Φ_{21} существуют, то говорят, что между контурами имеет место магнитная связь.

2. Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров.

Взаимная индуктивность – физическая величина, характеризующая свойство двух (или более) контуров образовывать общие потокоцепления, когда по одному из них течёт ток.

Взаимная индуктивность L_{21} численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 2 при единичном токе в первом контуре. Взаимная индуктивность L_{12} численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 1 при единичном токе во втором контуре.

Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и относительного расположения контуров. При наличии среды – от магнитных свойств этой среды.

Покажем, что $L_{12} = L_{21}$. Найдём работу, совершаемую магнитными силами при сближении контуров 1 и 2 (рис. 5.11) из бесконечности до рассматриваемого положения. Если считать, что перемещается первый контур в магнитном поле второго контура, то совершаемая при этом работа равна

$$A = I_1(\Phi_{12} - 0) = I_1 L_{12} I_2.$$

Если считать, что перемещается второй контур в магнитном поле первого, то

$$A' = I_2(\Phi_{21} - 0) = I_2 L_{21} I_1.$$

Но $A = A'$ (это следует из относительности движения). Следовательно,

$$I_1 L_{12} I_2 = I_2 L_{21} I_1;$$

$$L_{12} = L_{21}. \quad (5.4.3)$$

3. Явление взаимной индукции заключается в возникновении ЭДС индукции в одном из контуров при изменении магнитного потока, сцепленного с этим контуром.

Пусть в контуре 2 (рис. 5.11) течёт ток. При наличии магнитной связи между контурами 1 и 2 с контуром 1 сцеплен магнитный поток $\Phi_{12} = L_{12}i_2$. При всяком изменении потока в контуре 1 возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{12}i_2).$$

Изменение Φ_{12} может быть обусловлено:

- а) изменением тока i_2 (когда $L_{12} = \text{const}$);
- б) изменением взаимной индуктивности контуров L_{12} (когда $i_2 = \text{const}$);
- в) одновременным изменением i_2 и L_{12} .

ЭДС индукции в этих случаях будут равны соответственно:

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}; \quad (5.4.4)$$

$$\varepsilon_{i1} = -i_2 \frac{dL_{12}}{dt}; \quad (5.4.5)$$

$$\varepsilon_{i1} = -\left(L_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_{12}}{dt} \right). \quad (5.4.6)$$

Аналогично при наличии тока в первом контуре во втором контуре возникает ЭДС, если этот ток изменяется или изменяется взаимное расположение контуров:

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}; \quad (5.4.7)$$

$$\varepsilon_{i2} = -i_1 \frac{dL_{21}}{dt}; \quad (5.4.8)$$

$$\varepsilon_{i2} = -\left(L_{21} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{21}}{dt} \right). \quad (5.4.9)$$

5.5. САМОИНДУКЦИЯ

1. Ток i , текущий в цепи, создаёт магнитное поле, магнитный поток которого сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи, в неферромагнитной среде пропорционален этому току (это следует из закона Био–Савара–Лапласа и из определения магнитного потока):

$$\Phi = Li \quad (5.5.1)$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью цепи.

Индуктивность – скалярная физическая величина, характеризующая свойство цепи создавать собственный магнитный поток, когда по цепи течёт ток, и численно равная магнитному потоку, создаваемому единичным током. если $|i|=1$, то $|L|=|\Phi|$.

Индуктивность зависит от формы и размеров цепи и не зависит (в отсутствие ферромагнетиков) от тока в цепи. При наличии среды L зависит от магнитных свойств этой среды. Если среда ферромагнитная, то L зависит и от тока в цепи, поскольку от i в этом случае зависит магнитная проницаемость среды μ . Соотношение (5.5.1) формально можно распространять и на случай ферромагнитной среды, но следует помнить, что при прочих равных условиях $L = L(i)$.

В СИ индуктивность измеряется в Генри (Гн). *Генри – индуктивность такой цепи, собственный магнитный поток которой равен 1 Вб при токе в цепи 1 А:*

$$1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}}.$$

2. Одна из возможных (но не единственных) схем расчёта индуктивности такова. По контуру мысленно пропускают ток i . Зная форму и размеры контура, вычисляют магнитный поток Φ , сцепленный с контуром. Сопоставляя Φ с формулой (5.5.1), находят L .

Пример. Вычислим индуктивность длинного соленоида с неферромагнитным сердечником. При пропускании по соленоиду тока i в нём создаётся однородное магнитное поле с индукцией $B = \mu_0 \mu n i$. Магнитный поток, пронизывающий один виток, равен $\Phi = BS$, а потокосцепление соленоида равно

$$\Psi = \Phi N = BSnl = \mu_0 \mu n^2 l S i = \mu_0 \mu n^2 V i \quad (5.5.2)$$

где l – длина соленоида; S – площадь поперечного сечения; n – число витков на единицу длины; V – объём соленоида.

Сопоставляя (5.5.2) с (5.5.1), получим

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (5.5.3)$$

Из (5.5.3) видно, что магнитная постоянная в СИ измеряется в Гн/м:

$$\mu_0 = \frac{L}{n^2 V \mu} \rightarrow \frac{\text{Гн}}{\frac{1}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

3. Явление самоиндукции заключается в возникновении дополнительной ЭДС (ЭДС самоиндукции) и обусловленного ею тока (тока самоиндукции) в цепи, по которой течёт изменяющийся ток или индуктивность которой изменяется (при наличии в цепи тока).

ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения собственного магнитного потока:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li). \quad (5.5.4)$$

При $L = \text{const}$ (контур цепи жёсткий, отсутствуют ферромагнетики) и $I = i(t)$

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (5.5.5)$$

При $I = \text{const}$ и $L = L(t)$

$$\varepsilon_s = -i \frac{dL}{dt}. \quad (5.5.6)$$

Если одновременно изменяется и i , и L , то ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon_s = -\left(L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}\right). \quad (5.5.7)$$

Знак минус указывает на то, что при увеличении тока или индуктивности цепи полярности ЭДС самоиндукции и ЭДС источника, создающего ток, противоположны; при уменьшении тока или индуктивности – одинаковы.

Соотношение (5.5.5) позволяет дать динамическое определение индуктивности. Если $\left|\frac{di}{dt}\right|=1$, то $|L| = |\varepsilon_s|$. Индуктивность численно равна абсолютной величине ЭДС самоиндукции, возникающей в цепи при единичной скорости изменения тока. Приведённое определение справедливо в отсутствие ферромагнетиков, когда L не зависит от тока.

Самоиндукция в электромагнетизме играет такую же роль, как и инерция в механике. Вследствие самоиндукции установление и исчезновение тока в цепи, а также любое его изменение происходит не мгновенно, а постепенно.

5.6. УСТАНОВЛЕНИЕ И ИСЧЕЗНОВЕНИЕ ТОКА В ЦЕПИ

1. Схема опыта по наблюдению токов самоиндукции дана на рис. 5.12, где ε – источник тока; L – катушка индуктивности; Γ – нуль-гальванометр; K – ключ. При замкнутом ключе ток от источника ε проходит через катушку и гальванометр в направлениях, указанных на рисунке сплошными стрелками. После отключения источника ε , в катушке возникает ток самоиндукции i_s , направленный согласно закону Ленца в ту же сторону, что и ток от источника ε .

Этот ток целиком проходит через гальванометр, где его направление противоположно первоначальному току i_Γ (ответвляться в источник ток самоиндукции не может, так как ключ K разомкнут). В результате гальванометр даёт отброс в противоположную сторону. Ток самоиндукции при замыкании на этой схеме заметен гораздо хуже, так как он делится между источником тока и гальванометром, при-

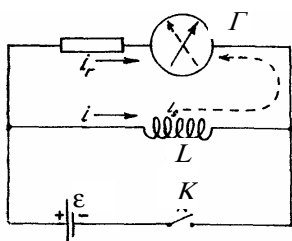


Рис. 5.12

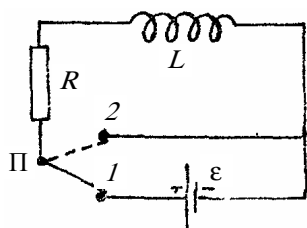


Рис. 5.13

чём направление его в гальванометре совпадает с направлением тока от источника ε .

2. Найдём закон исчезновения тока в цепи (рис. 5.13). ε – ЭДС источника тока; L – индуктивность цепи; R – сопротивление цепи; Π – переключатель.

Если переключатель поставить в положение 1, то в цепи установится ток

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Перебросим переключатель в положение 2, отключив тем самым источник ε . Ток в цепи начнёт исчезать. Возникнет ЭДС самоиндукции. По второму правилу Кирхгофа

$$iR = \varepsilon_s,$$

где i – мгновенное значение тока; ε_s – мгновенное значение ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$ (полагаем, что $L = \text{const}$).

Следовательно,

$$iR = -L \frac{di}{dt}.$$

Разделив переменные i и t , получим уравнение, которое легко интегрируется:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt. \quad (5.6.1)$$

Проинтегрировав (5.6.1), получим $\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln C$ (константы интегрирования левой и правой частей (5.6.1) мы объединили в одну постоянную и представили её в виде $\ln C$). После потенцирования получим

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Константу C определим из начальных условий. При $t = 0$, $i = I_0$, следовательно, $C = I_0$ и

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.6.2)$$

Таким образом, ток в цепи исчезает не мгновенно, а постепенно, уменьшаясь со временем по экспоненциальному закону. Быстрота убывания тока определяется величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (5.6.3)$$

имеющей размерность времени $\left(\frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Вс/А}}{\text{В/А}} = \text{с}\right)$. Она называется – «постоянная времени». Учитывая обозначение (5.6.3), формуле (5.6.2) можно придать вид

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (5.6.4)$$

где τ – есть время, в течение которого ток уменьшается в e раз.

Чем больше τ , тем медленнее уменьшается ток. График убывания тока изображен на рис. 5.14 (кривая a).

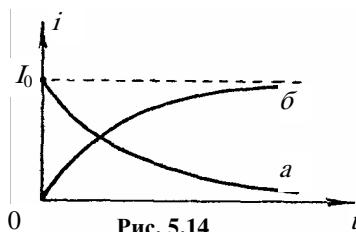


Рис. 5.14

3. Найдём закон установления тока. Перебросим переключатель в положение 1. Начнётся процесс установления тока, при котором в цепи, кроме ЭДС источника будет действовать ЭДС самоиндукции ε_s . По второму правилу Кирхгофа

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L \frac{di}{dt}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{di}{iR - \varepsilon} = -\frac{dt}{L}. \quad (5.6.5)$$

Возьмём неопределённые интегралы от левой и правой частей, объединив при этом константы интегрирования и умножив обе части на R :

$$\ln(iR - \varepsilon) = -\frac{R}{L}t + \ln C.$$

Потенцируем: $iR - \varepsilon = Ce^{-\frac{R}{L}t}$.
 Константу C находим из начальных условий. В момент времени $t = 0, I = 0$, следовательно, $C = -\varepsilon$

$$iR - \varepsilon = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$\text{откуда } i = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (5.6.6)$$

или

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (5.6.7)$$

где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ – установившееся значение тока.

Таким образом, нарастание тока в цепи происходит так же, как и исчезновение, постепенно (рис. 5.14, кривая б).

4. Полученные выводы справедливы при $L = \text{const}$. Если $L \neq \text{const}$, то ЭДС самоиндукции может оказаться больше ЭДС источника тока, и ток может значительно превзойти установившийся.

5.7. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Вновь рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5.13. Установим переключатель в положение 1. В цепи установится ток $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$. Этот ток создаст в окружающем пространстве магнитное поле. Если переключатель поставить в положение 2, то ток, а вместе с ним и магнитное поле начнут исчезать. Найдём работу тока за время исчезновения. Элементарная работа за время dt равна

$$dA = \varepsilon_s i dt, \quad (5.7.1)$$

где ε_s и i – значения ЭДС самоиндукции и тока в момент времени t . Если $L = \text{const}$, то $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$. Следовательно,

$$dA = -L i di. \quad (5.7.2)$$

Проинтегрировав это выражение по i от I_0 до 0, мы получим полную работу, совершённую током за время, в течение которого исчезает магнитное поле

$$A = -\int_{I_0}^0 L i di = \frac{L I_0^2}{2}. \quad (5.7.3)$$

За счёт работы (5.7.3) происходит увеличение внутренней энергии проводников, из которых образована цепь. Термодинамические соображения и эксперименты с электромагнитными волнами позволяют заключить, что носителем энергии, за счёт которой совершается работа (5.7.3), является магнитное поле. Таким образом, энергия магнитного поля W , созданного током i , текущим в цепи с индуктивностью L , равна

$$W = \frac{L i^2}{2} \quad (5.7.4)$$

2. Энергию (5.7.4) можно выразить через характеристики магнитного поля. Пусть цепь, изображенная на рис. 5.13, содержит длинный соленоид с сердечником из однородного неферромагнитного магнетика. Индуктивность цепи примем равной индуктивности соленоида (индуктивность всех других элементов цепи мала по сравнению с индуктивностью соленоида). Индуктивность длинного соленоида равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Магнитное поле соленоида сосредоточено внутри соленоида. Индукция этого поля равна

$$B = \mu_0 \mu n i, \text{ откуда } i = \frac{B}{\mu_0 \mu n}.$$

Подставив выражения для L и i в (5.7.4), получим

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V. \quad (5.7.5)$$

Магнитное поле длинного соленоида однородно. Следовательно, плотность энергии этого поля ω (энергия единицы объёма) равна

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (5.7.6)$$

Формула (5.7.6) справедлива для любого поля – и однородного, и неоднородного. Если известна зависимость ω от координат, то для нахождения энергии магнитного поля, распределённого в объёме V , нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV. \quad (5.7.7)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чём заключается явление электромагнитной индукции? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающей в контуре?
2. Сформулируйте правило Фарадея–Ленца, проиллюстрировав его примерами.
3. Покажите, что закон Фарадея есть следствие закона сохранения энергии.
4. Какова природа ЭДС электромагнитной индукции?
5. Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счёт чего её можно увеличить?
6. В чём заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? Вычислите ЭДС индукции для обоих случаев.
7. Когда ЭДС самоиндукции больше – при замыкании или размыкании цепи постоянного тока?
8. В чём заключается физический смысл индуктивности контура? взаимной индуктивности двух контуров? От чего они зависят?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков. Площадь рамки $S = 150$ см². Рамка делает $n = 10$ об/с. Определить мгновенное значение ЭДС, соответствующее углу поворота рамки в 30° .

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции ε_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (1)$$

где ψ – потокосцепление.

Потокосцепление ψ связано с магнитным потоком Φ соотношением

$$\psi = N\Phi, \quad (2)$$

где N – число витков, пронизываемых магнитным потоком Φ .

Подставляя выражение ψ в формулу (1), получим

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

При вращении рамки (см. рис. 5.15) магнитный поток Φ , пронизывающий рамку в момент времени t , изменяется по закону:

$$\Phi = BS\cos\omega t,$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – круговая (или циклическая) частота.

Подставив в формулу (3) выражение Φ и продифференцировав по времени, найдём мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NB\omega S\sin\omega t. \quad (4)$$

Круговая частота ω связана с числом оборотов в секунду соотношением

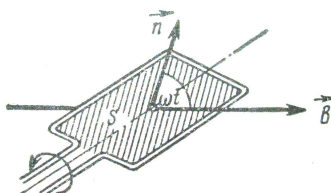


Рис. 5.15

$$\omega = 2\pi n.$$

Подставляя значения ω в формулу (4), получим

$$\varepsilon_j = NB\omega \sin \omega t. \quad (5)$$

Подставим числовые значения в расчетную формулу (5)

$$\varepsilon_j = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = 47,1, \text{ В.}$$

Пример 2. Если сила тока, проходящего в некотором соленоиде, изменяется на 50 А в секунду, то на концах соленоида возникает среднее значение ЭДС самоиндукции, равное 0,08 В. Найти индуктивность соленоида.

Решение. Индуктивность численно равно ЭДС самоиндукции, возникающей на концах соленоида, когда ток, проходящий через соленоид, равномерно изменяется на единицу силы тока в единицу времени. Математически это выражается известным законом Фарадея – Максвелла, применённым к ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_j = -\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Вынося постоянную величину L за знак приращения, получим

$$\varepsilon_j = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Знак «минус» показывает направление ЭДС самоиндукции. При равномерном изменении тока в контуре $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \text{const}$ независимо от интервала времени Δt . Если ток в контуре изменяется по произвольному закону, то $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ выражает среднее значение скорости изменения тока за данный интервал времени Δt . Тогда $L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ будет выражать собой среднее значение $\langle \varepsilon_j \rangle$ ЭДС самоиндукции за тот же интервал времени:

$$\langle \varepsilon_j \rangle = L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Знак «минус» в этом выражении опущен, так как направление ЭДС в данном случае несущественно. Отсюда находим интересующее нас выражение для индуктивности:

$$L = \frac{\langle \varepsilon_j \rangle}{\Delta I / \Delta t}.$$

Вычислим значение индуктивности:

$$L = \frac{0,08}{50} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Пример 3. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 5$ см и сопротивлением $R = 10$ Ом находится в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл). Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q , который пройдёт по рамке, если магнитное поле выключить.

Решение. При выключении магнитного поля произойдёт изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникнет ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_j = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить воспользовавшись законом Ома для полной цепи $I_i = \varepsilon_j / R$, где R – сопротивление рамки. Тогда

$$I_i R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как мгновенное значение силы индукционного тока $I_i = \frac{dQ}{dt}$, то это выражение можно переписать в виде $\frac{dQ}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}$, откуда

$$dQ = -\frac{d\Phi}{R}. \quad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1), найдём заряд Q :

$$Q = \int_0^Q dQ = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi, \text{ или } Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметив, что при выключенном поле (конечное состояние) $\Phi_2 = 0$, последнее равенство перепишется в виде

$$Q = \Phi_1 / R. \quad (2)$$

Найдём магнитный поток Φ_1 . По определению магнитного потока имеем

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

где S – площадь рамки.

В нашем случае (рамка квадратная) $S = a^2$. Тогда

$$\Phi_1 = Ba^2 \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$Q = \frac{Ba^2}{R} \cos \alpha.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства даёт единицу заряда (Кл):

$$\frac{[B][a^2]}{[R]} = \frac{1 \text{ Тл}(1 \text{ м}^2)}{1 \text{ Ом}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ В}} = 1 \text{ Кл}.$$

Произведём вычисления:

$$Q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{0,01} = 8,67 \cdot 10^{-3} = 8,67 \text{ мКл}.$$

Пример 4. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N=1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I=4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Решение. Индуктивность L связана с потокосцеплением ψ и силой тока I соотношением

$$\psi = LI. \quad (1)$$

Потокосцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим индуктивность соленоида:

$$L = N\Phi/I. \quad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Выразив L согласно (3), получим

$$W = \frac{1}{2} N\Phi I. \quad (4)$$

Подставим в формулы (3) и (4) значения физических величин и произведём вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 1,44 \cdot 10^{-2} = 14,4 \text{ мДж}.$$

6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

6.1. СОБСТВЕННЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Периодические колебания величин, характеризующих электрические и магнитные поля, называются электромагнитными колебаниями.

2. Различают колебания полей, связанных с зарядами и токами, и колебания полей, существующих в отрыве от зарядов и токов. Первые имеют место в электрических цепях, вторые – в электромагнитных волнах.

3. Электрическая цепь, в которой могут происходить электромагнитные колебания, называется колебательным контуром.

Колебательным контуром может служить любая цепь, даже простой отрезок провода; необходимо только определённое соотношение между электроёмкостью, индуктивностью и сопротивлением цепи (R , L , C – свойства, присущие любой цепи, любому проводнику).

4. Если электрическое и магнитное поля в колебательном контуре пространственно разобщены и локализованы в сравнительно небольших областях, контур называется закрытым (контур с сосредоточенными параметрами). В противном случае контур называется открытым (контур с распределёнными параметрами).

5. Простейший закрытый колебательный контур – это соединённые между собой конденсатор и катушка индуктивности. Хотя катушка обладает некоторой ёмкостью, а конденсатор – индуктивностью, будем полагать, что ёмкость сосредоточена только в конденсаторе, индуктивность – только в катушке и, кроме того, омическое сопротивление контура равно нулю (такой закрытый контур называется идеальным).

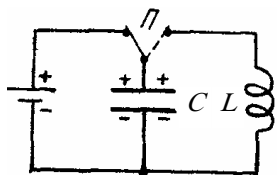


Рис. 6.1

6. Чтобы в контуре возникли электромагнитные колебания контур необходимо вывести из состояния равновесия. Для этого достаточно зарядить конденсатор (или возбудить ток в катушке) и предоставить контур самому себе. Присоединим конденсатор к источнику постоянного напряжения (рис. 6.1).

В процессе зарядки обкладки конденсатора приобретут разноимённые заряды $\pm q_0$, в результате чего в конденсаторе возникнет электрическое поле с энергией

$$W_E = \frac{q_0^2}{2C},$$

где C – ёмкость конденсатора.

7. Переключим конденсатор на катушку. Концы катушки приобретут потенциалы обкладок, внутри провода катушки возникнет электростатическое поле. Это поле приведёт в направленное движение свободные заряды катушки. Начнётся нейтрализация зарядов на обкладках конденсатора – разрядка конденсатора. Разрядный ток будет нарастать, но постепенно вследствие самоиндукции: ЭДС самоиндукции будет препятствовать мгновенному нарастанию тока. Напряжение, приложенное к катушке, ускоряет носители тока, ЭДС самоиндукции, напротив, тормозит их.

На рисунке 6.2, *a* изображена часть витка катушки. Ток течёт в сторону убыви потенциала. В этом направлении действуют на положительные заряды силы электростатического поля. Виток пронизывается нарастающим магнитным полем (ток в катушке растёт). Изменяющееся магнитное поле создаст в катушке и за её пределами вихревое электрическое поле. Силы этого поля вызовут в витке ток самоиндукции такого направления, что магнитное поле этого тока будет препятствовать нарастанию магнитного потока пронизывающего виток. Чтобы магнитное поле тока самоиндукции было противоположно магнитному полю тока в катушке, необходимо, чтобы линии вихревого электрического поля были направлены так, как это показано на рисунке (это направление соответствует направлению тока самоиндукции).

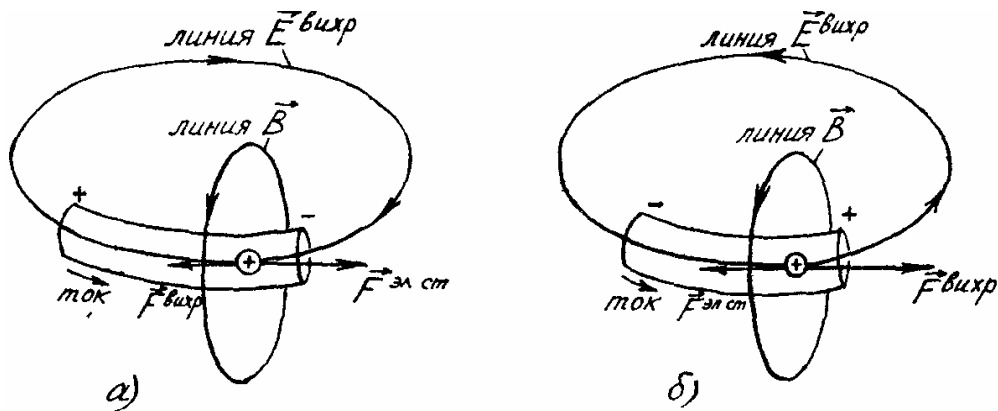


Рис. 6.2

8. В процессе разрядки конденсатора разность потенциалов на обкладках, заряд обкладок, напряжённость электрического поля уменьшаются, соответствующие характеристики магнитного поля возрастают. Энергия электрического поля конденсатора постепенно превращается в энергию магнитного поля катушки. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля будет равна нулю, а энергия магнитного поля максимальна

$$W_B = \frac{LI_0^2}{2},$$

где L – индуктивность катушки; I_0 – максимальный ток в катушке.

Этим мгновением заканчивается первая стадия колебательного процесса.

9. Если бы контур не был разорван обкладками конденсатора, то ток I_0 существовал бы в нём сколько угодно долго, не нуждаясь ни в напряжении, ни в ЭДС: ведь сопротивление контура равно нулю (в момент, когда ток в контуре достигает максимального значения I_0 , и напряжение, и ЭДС самоиндукции равны нулю). Наличие в контуре конденсатора приводит к тому, что ток на его обкладках обрывается, заряды здесь тормозятся и накапливаются: на той обкладке, по направлению к которой течёт ток, накапливаются положительные заряды, на другой обкладке – отрицательные. Это приводит к тому, что в конденсаторе и в катушке вновь возникает электростатическое поле, но теперь уже противоположного направления. Это поле тормозит движение зарядов катушки. Ток, а следовательно, и его магнитное поле начинают убывать. Уменьшение магнитного поля сопровождается возникновением ЭДС самоиндукции, возникновением вихревого электрического поля, которые препятствуют уменьшению тока и поддерживают его первоначальное направление (проанализируйте рис. 6.2, б). Благодаря совместному действию вихревого и кулоновского полей ток постепенно уменьшается до нуля. Энергия магнитного поля снова переходит в энергию электрического поля. Этим завершается вторая стадия цикла.

На третьей и четвертой стадиях повторятся те же процессы, что и на первой и второй стадиях, но в обратном направлении. Пройдя все эти четыре стадии, контур вернётся в исходное состояние. Последующие циклы будут в точности повторяться.

Таким образом, в колебательном контуре периодически изменяются (колеблются) следующие физические величины: q – заряд на обкладках конденсатора; U – разность потенциалов на конденсаторе и, следовательно, на концах катушки; i – ток в катушке; \vec{E} – напряжённость электрического поля; \vec{B} – индукция магнитного поля; W_E – энергия электрического поля; W_B – энергия магнитного поля.

10. Сопоставляя электромагнитные колебания с механическими, например, с колебаниями пружинного маятника, нетрудно подметить, что каждой величине, характеризующей механические колебания, соответствует электрическая или магнитная величина, играющая в электромагнитных колебаниях аналогичную роль. Так, координате x соответствует заряд q , скорости \dot{v} – ток i , потенциальной энергии пружины $\frac{kx^2}{2}$ – энергия электрического поля конденсатора $\frac{q^2}{2C}$, и т.д.

Приводим список таких величин.

Механические колебания		Электромагнитные колебания	
Инерция		Самоиндукция	
Масса	m	Индуктивность	L
Коэффициент упругости	k	Величина, обратная ёмкости	$\frac{1}{C}$
Координата	x	Заряд конденсатора	q
Скорость	\dot{v}	Ток	i
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля	$\frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$\frac{Li^2}{2}$
Коэффициент трения	r	Омическое сопротивление	R
Внешняя сила	\vec{F}	Электродвижущая сила	ε
		Напряжение	U

11. Найдём вид зависимости от времени колеблющихся физических величин. Будем полагать, что процессы в контуре происходят достаточно медленно: мгновенные значения тока одинаковы во всех сечениях контура и, следовательно, к контуру применимы законы постоянного тока.

Чтобы найти закон изменения данной переменной величины, нужно составить для неё дифференциальное уравнение и найти решение этого уравнения.

Начнём с заряда конденсатора. Так как контур не излучает волн и не выделяет тепла, его энергия, складывающаяся из энергии магнитного поля $\frac{Li^2}{2}$ и энергии электрического поля $\frac{q^2}{2C}$, остаётся неизменной

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const}, \quad (6.1.1)$$

где I и q – мгновенные значения тока и заряда.

Продифференцируем (6.1.1) по времени

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (6.1.2)$$

Мы полагаем, что среда, в которой находится контур, неферромагнитная, и, следовательно, $L \neq L(i)$. Производные по времени будем обозначать точкой над дифференцируемой величиной:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{di}{dt} = \dot{i}.$$

Учтём, что $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, $\dot{i} = \ddot{q}$. Разделим обе части уравнения (6.1.2) на Li и воспользуемся введёнными обозначениями:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Обозначив

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (6.1.3)$$

получим искомое дифференциальное уравнение для заряда

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6.1.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.1.5)$$

где q_m – амплитудное значение заряда; φ_0 – начальная фаза; ω_0 – циклическая частота колебаний.

Как видно из (6.1.5), заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону. Частота ω_0 называется собственной. Период собственных колебаний контура равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Подставив в эту формулу выражение для ω_0 по (6.1.3), получим формулу Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6.1.6)$$

Частота собственных колебаний равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (6.1.7)$$

Разделив уравнение (6.1.5) на C , найдём закон изменения напряжения на конденсаторе

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.1.8)$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ – амплитуда напряжения.

Закон изменения тока

$$i = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.1.9)$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ – амплитуда тока.

Закон изменения ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\dot{i} = L\omega_0^2 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \varepsilon_{sm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.1.10)$$

где $\varepsilon_{sm} = L\omega_0^2 q_m$ – амплитуда ЭДС самоиндукции.

Закон изменения энергии электрического поля

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Em} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.1.11)$$

где $W_{Em} = \frac{q_m^2}{2C}$ – амплитуда энергии электрического поля.

Закон изменения энергии магнитного поля

$$W_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Bm} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.1.12)$$

где $W_{Bm} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2}$ – амплитуда энергии магнитного поля.

В выражения для амплитуд всех изменяющихся величин входит амплитуда заряда q_m . Эта величина, а также начальная фаза колебаний φ_0 определяются начальными условиями – зарядом конденсатора и током в контуре в начальный момент времени $t = 0$. Если отсчёт времени вести с момента замыкания контура, то при $t = 0$, $q = q_0$ и $i = 0$. Подставив эти значения в уравнения (6.1.5) и (6.1.9), получим:

$$q_0 = q_m \cos \varphi_0;$$

$$0 = -\omega_0 q_m \sin \varphi_0.$$

Из второго уравнения получаем $\varphi_0 = 0$.

Подставив $\varphi_0 = 0$ в первое уравнение, найдём, что $q_m = q_0$, т.е. амплитуда заряда равна первоначальному заряду конденсатора. Если время отсчитывать от другого мгновения, связь между q_m и q_0 будет иной и $\varphi_0 \neq 0$.

Сопоставляя (6.1.5), (6.1.8) – (6.1.12), заключаем, что колебания заряда, напряжения, ЭДС самоиндукции совершаются в одинаковых фазах. Ток опережает по фазе эти величины на $\pi/2$. Частота колебаний энергии электрического и магнитного полей в два раза больше частоты колебаний всех других величин.

Графики всех этих величин изображены на рис. 6.3.

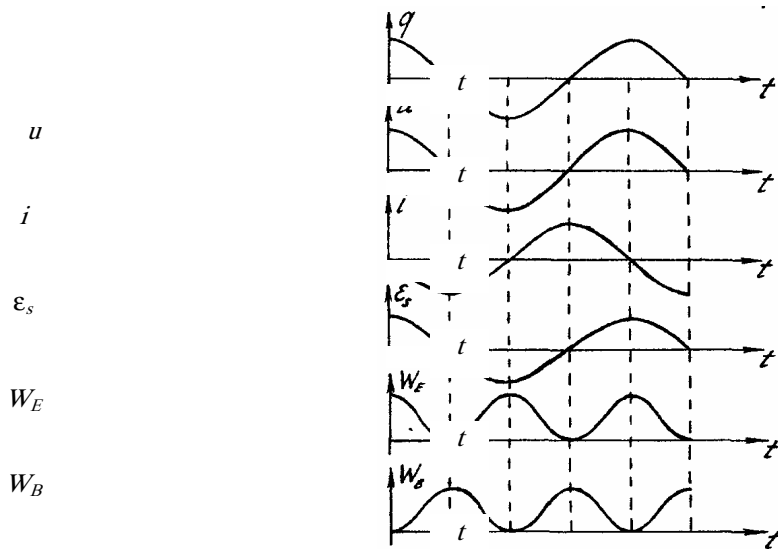


Рис. 6.3

Рис. 173

6.2. СОБСТВЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Любой реальный контур обладает омическим сопротивлением.

В *реальном контуре* электромагнитная энергия, запасённая в начале колебаний, постепенно *превращается в тепло*. Колебания вследствие этого затухают.

Составим дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний. Из закона изменения энергии следует, что убыль энергии электрического и магнитного полей контура за время dt равна количеству выделившегося в контуре тепла:

$$-d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = i^2 R dt. \quad (6.2.1)$$

Найдём дифференциал величины, стоящей в скобках, и разделим обе части уравнения на dt . Получим

$$-Li\dot{i} - \frac{q\dot{q}}{C} = i^2 R$$

Перенесем $i^2 R$ в левую часть, умножим обе части уравнения на (-1) и разделим все слагаемые на Li :

$$\dot{i} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Обозначим $\dot{i} = \dot{q}$, $i = q$, $\frac{R}{L} = 2\beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$.

Получим искомое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6.2.2)$$

Решение этого уравнения при $\beta < \omega_0$ имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.2.3)$$

где q_{m0} – начальная амплитуда заряда; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота колебаний.

3. Как видно из (6.2.3), собственные затухающие колебания не являются гармоническими: амплитуда таких колебаний с течением времени уменьшается по закону: $A = q_{m0} e^{-\beta t}$. Показатель β называется коэффициентом затухания. График $q = q(t)$ собственных затухающих колебаний изображен на рис. 6.4.

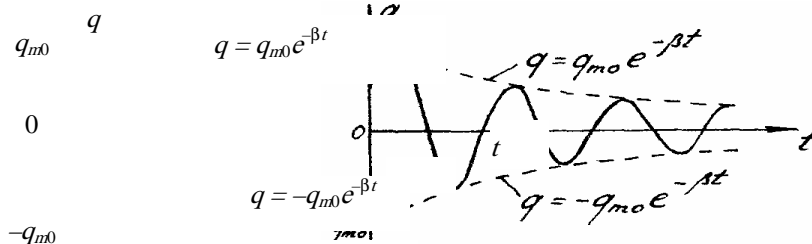


Рис. 6.4

Рис. 174

4. Разделив (6.2.3) на C , найдем закон изменения напряжения

$$U = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.2.4)$$

где U_{m0} – амплитуда заряда в начальный момент времени.

5. Чтобы найти закон изменения тока, продифференцируем (6.2.3) по времени

$$i = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0)]. \quad (6.2.5)$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на ω_0 :

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \varphi_0) \right].$$

Введём величину ψ , удовлетворяющую условиям

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Обозначим также $\omega_0 q_{m0} = I_{m0}$. Тогда выражение для тока приобретет вид

$$i = I_{m0} e^{-\beta t} [\cos \psi \cos(\omega t + \varphi_0) - \sin \psi \sin(\omega t + \varphi_0)].$$

Воспользовавшись известной тригонометрической формулой сложения, получим

$$i = I_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \psi). \quad (6.2.6)$$

Так как $\cos \psi < 0$, а $\sin \psi > 0$, то $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$.

Величина ψ – определяет фазовый сдвиг между током и напряжением: ток в катушке индуктивности опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$.

6. Циклическая частота затухающих колебаний меньше собственной частоты контура: $\omega < \omega_0$.

Условный период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (6.2.7)$$

7. Отношение двух последующих амплитуд называется декрементом затухания

$$\frac{A}{A_{+T}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (6.2.8)$$

8. Логарифм отношения двух последующих амплитуд называется логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (6.2.9)$$

9. Время релаксации затухающих колебаний τ – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Из условия $\frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+\tau)}} = e$ находим

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{\tau}. \quad (6.2.10)$$

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

10. Подставим выражение для β в (6.2.8): $\lambda = \frac{T}{\tau}$. Но $\frac{\tau}{T} = N$ – число колебаний, совершаемых за время релаксации. Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{N}. \quad (6.2.11)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации.

11. Для характеристики затухания колебаний вводят также добротность Q , связанную с логарифмическим декрементом соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \quad (6.2.12)$$

Так как $\lambda = \frac{1}{N}$, то $Q = \pi N$. (6.2.13)

Добротность контура есть умноженное на π число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в e раз.

12. Если параметры контура таковы, что $\beta^2 = \omega_0^2$, то период T , определяемый формулой (6.2.7), будет мнимым. Это значит, что уравнение (6.2.3) перестаёт быть решением уравнения (6.2.2), разряд конденсатора становится аperiodическим. Сопротивление R_k , при котором процесс переходит в аperiodический, называется *критическим*.

Из условия $\beta^2 = \omega_0^2$, т.е. $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, находим

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.2.14)$$

При $R \geq R_k$ колебания в контуре невозможны. Величина $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{волн}}$ называется волновым сопротивлением контура.

6.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. *Вынужденные* электромагнитные колебания – это колебания, происходящие в колебательном контуре под действием внешней периодической ЭДС или *внешнего напряжения*.

Внешнюю ЭДС (напряжение) можно приложить к контуру различными способами. Можно, например, включить источник ЭДС непосредственно в контур (рис. 6.5, а, б). Можно связать цепь, содержащую переменную ЭДС, с колебательным контуром индуктивно (рис. 6.5, в). Можно воздействовать на контур электромагнитными волнами. Рассмотрим случай, соответствующий рис. 6.5, а. R, L, C – параметры контура. Пусть переменная ЭДС изменяется по гармоническому закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (6.3.1)$$

где ε_m – амплитуда ЭДС; Ω – циклическая частота изменений этой ЭДС.

Составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Из закона сохранения энергии следует, что тепло в контуре выделяется не только за счёт убыли энергии магнитного и электрического полей контура, но и за счёт работы источника внешней ЭДС:

$$i^2 R dt = -d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) + \varepsilon i dt. \quad (6.3.2)$$

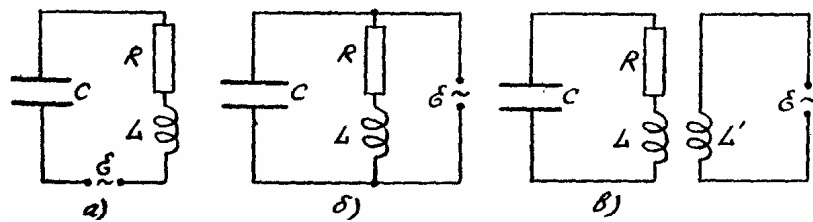


Рис. 6.5

Перенесём слагаемое $-d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right)$ в левую часть уравнения, произведём дифференцирование, разделим все слагаемые на $Li dt$ и воспользуемся обозначениями, введёнными в предыдущем параграфе. Получим

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L},$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \Omega t. \quad (6.3.3)$$

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения складывается из двух слагаемых: из общего решения однородного уравнения

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

определяющего собственные затухающие колебания, и частного решения уравнения (6.3.3).

Колебания в рассматриваемом контуре представляют собой суперпозицию собственных и вынужденных колебаний. Первые постепенно вымирают из-за затухания, так что по истечении некоторого промежутка времени в контуре останутся практически только вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания описываются уравнениями:

$$q = q_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (6.3.4)$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t + \alpha_0) = U_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (6.3.5)$$

$$i = \dot{q} = -\Omega q_m \sin(\Omega t + \alpha_0) = I_m \cos\left(\Omega t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.3.6)$$

где
$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (6.3.7)$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (6.3.8)$$

$$I_m = \frac{\Omega\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (6.3.9)$$

где q_m , U_m , I_m – амплитуды заряда, напряжения и тока; α_0 – начальная фаза, определяемая из выражения

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6.3.10)$$

Подставив $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2}$, преобразуем формулы (6.3.7) – (6.3.10):

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{\Omega\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (6.3.11)$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_m}{\Omega C\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (6.3.12)$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (6.3.13)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}. \quad (6.3.14)$$

Вывод. Если внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону, вынужденные колебания являются также гармоническими. Их частота совпадает с частотой внешней ЭДС.

Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде внешней ЭДС и зависит от её частоты. При некоторой определённой для данного контура RLC частоте $\Omega_{\text{рез}}$ амплитуда колебаний достигает максимума. Это соответствует резонансу.

Чтобы найти резонансную частоту для заряда (для напряжения она будет точно такой же), достаточно найти минимум выражения, стоящего под корнем в формуле (6.3.7) (проделайте самостоятельно). Получим

$$\Omega_{\text{рез},q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (6.3.15)$$

Как видно из этой формулы, резонансная частота для заряда несколько меньше частоты собственных незатухающих колебаний контура. Из (6.3.7) следует, что при $\Omega \rightarrow 0$, $q_m \rightarrow \frac{\varepsilon_m}{L\omega_0^2} = \varepsilon C$.

Такой заряд конденсатор получает при подключении его к источнику с постоянной ЭДС ε_m .

При $\Omega \rightarrow \infty$ $q_m \rightarrow 0$.

Высота резонансного пика и его «острота» тем больше, чем меньше β , т.е. чем меньше омическое сопротивление и больше индуктивность контура. Резонансные кривые для q_m , соответствующие разным β , приведены на рис. 6.6, а.

Резонансную частоту для тока легко найти из (6.3.13): амплитуда тока максимальна при $\frac{1}{\Omega_{\text{рез}} C} - \Omega_{\text{рез}} L = 0$, откуда

$$\Omega_{\text{рез},i} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0. \quad (6.3.16)$$

Резонансная частота для тока совпадает с собственной частотой контура. При $\Omega \rightarrow 0$ $i \rightarrow 0$; при $\Omega \rightarrow \infty$ $i \rightarrow 0$.

Первое означает, что при постоянной ЭДС установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может. Резонансные кривые для амплитуды тока приведены на рис. 6.6, б.

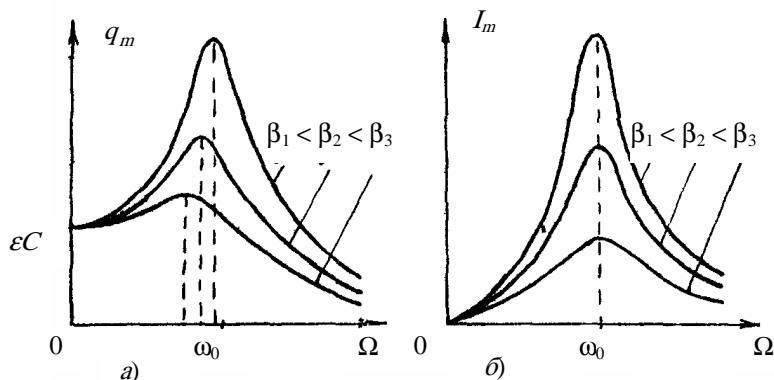


Рис. 6.6

Из формул (6.3.1), (6.3.4) – (6.3.6) видно, что колебания заряда, напряжения и тока сдвинуты по фазе относительно ЭДС. Этот сдвиг тем больше, чем больше R и чем меньше разность $\Omega L - \frac{1}{\Omega C}$.

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть, например, к контуру приложено напряжение

$$U = U_{m1} \cos(\Omega_1 t + \alpha_{01}) + U_{m2} \cos(\Omega_2 t + \alpha_{02}).$$

Настроив контур в резонанс с одной из частот, можно получить на конденсаторе напряжение, значительно превышающее величину данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое другими составляющими, будет мало. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприёмника на нужную длину волны.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Между электрическими зарядами и токами, с одной стороны, и создаваемыми ими электрическими и магнитными полями, с другой, существует связь. Связь существует и между самими электрическими и магнитными полями. Эта связь проявляется в том, что электрическое и магнитное поля способны порождать друг друга. При всяком изменении магнитного поля возникает электрическое поле и, наоборот, при всяком изменении электрического поля возникает магнитное поле. Уравнения Максвелла в сжатой математической форме отражают все эти связи и все эти процессы.

6.4. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

1. Следуя Максвеллу, обобщим явление электромагнитной индукции.

Как известно, при изменении магнитного потока, пронизывающего неподвижный проводящий контур, в последнем *возникает вихревое электрическое поле*, которое и создаёт ЭДС индукции.

Максвелл установил, что проводящий контур в этом процессе не играет принципиальной роли, а является лишь прибором, обнаруживающим вихревое электрическое поле. Переменное магнитное поле создаёт вихревое электрическое поле независимо от того, имеются или нет проводники в той области пространства, где существует переменное магнитное поле.

Таким образом, *переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле*.

2. Придадим выражению закона электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.4.1)$$

несколько иной вид. По определению ЭДС есть циркуляция вектора напряжённости поля сторонних сил:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

В рассматриваемом случае $\vec{E}_{\text{стор}} \equiv \vec{E}_{\text{вихр}}$, где $\vec{E}_{\text{вихр}}$ – напряжённость вихревого электрического поля. Следовательно,

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l}. \quad (6.4.2)$$

Подставив (6.4.2) в (6.4.1), получим *первое* интегральное уравнение Максвелла:

$$\oint_L \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.4.3)$$

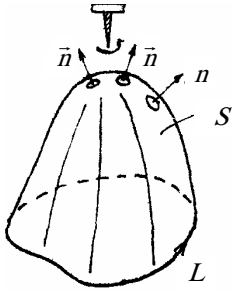


Рис. 6.7

Циркуляция вектора напряжённости вихревого электрического поля по произвольному замкнутому контуру L равна по абсолютной величине и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь любую поверхность S , опирающуюся на контур L (рис. 6.7).

Замечание. При вычислении Φ сквозь S необходимо выбирать нормали к отдельным элементам S . Условимся придерживаться правила: нормали должны «смотреть» в ту сторону, куда направлено поступательное движение правого буравчика, вращаемого в направлении обхода L .

3. Итак, существуют две разновидности электрического поля – потенциальное электростатическое (кулоновское) и непотенциальное вихревое. Электростатическое поле $\vec{E}_{\text{эл.ст}}$ порождается электрическими зарядами – свободными и поляризационными. Чтобы найти $\vec{E}_{\text{эл.ст}}$, нужно воспользоваться теоремой Гаусса.

Вихревое электрическое поле $\vec{E}_{\text{вихр}}$ порождается изменяющимся магнитным полем. Чтобы найти $\vec{E}_{\text{вихр}}$, нужно воспользоваться уравнением Максвелла (6.4.3).

Полное электрическое поле в любой точке пространства в общем случае равно сумме полей $\vec{E}_{\text{эл.ст}}$ и $\vec{E}_{\text{вихр}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл.ст}} + \vec{E}_{\text{вихр}}. \quad (6.4.4)$$

6.5. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Другое фундаментальное положение теории Максвелла гласит, что *переменное электрическое поле создаёт магнитное поле*.

Рассмотрим вакуумный конденсатор (рис. 6.8). Это напряженное переменное электрическое поле, по Максвеллу, создаёт в поле так, как если бы между обкладками проводимости.

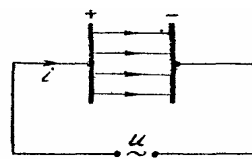


Рис. 6.8

тор, к которому приложено переменное напряжение создаёт между обкладками электрическое поле. Переменное электрическое поле в окружающем пространстве создаёт магнитное поле. Переменное электрическое поле между обкладками протекает вполне определённый ток проводимости.

Линии магнитного поля, порождаемого изменяющимся электрическим полем, замыкаются вокруг линий \vec{E} , направление этих линий связано с направлением вектора $\frac{d\vec{E}}{dt}$ (обратим внимание – с направлением $\frac{d\vec{E}}{dt}$, а не с \vec{E}) правилом правого буравчика: если поступательное движение буравчика совпадает с $\frac{d\vec{E}}{dt}$, то вращение его рукоятки указывает направление линий вектора магнитной индукции \vec{B} . Это правило поясняет рис. 6.9.

Если вектор \vec{E} , не изменяясь по направлению, растёт по модулю, то приращение \vec{E} и, следовательно, $\frac{d\vec{E}}{dt}$ совпадает с \vec{E} .

Линия \vec{B} направлена так, как на рис. 6.9, а. При уменьшении модуля \vec{E} приращение \vec{E} , а следовательно, и $\frac{d\vec{E}}{dt}$ противоположно \vec{E} . Одна из линий \vec{B} изображена на рис. 6.9, б.

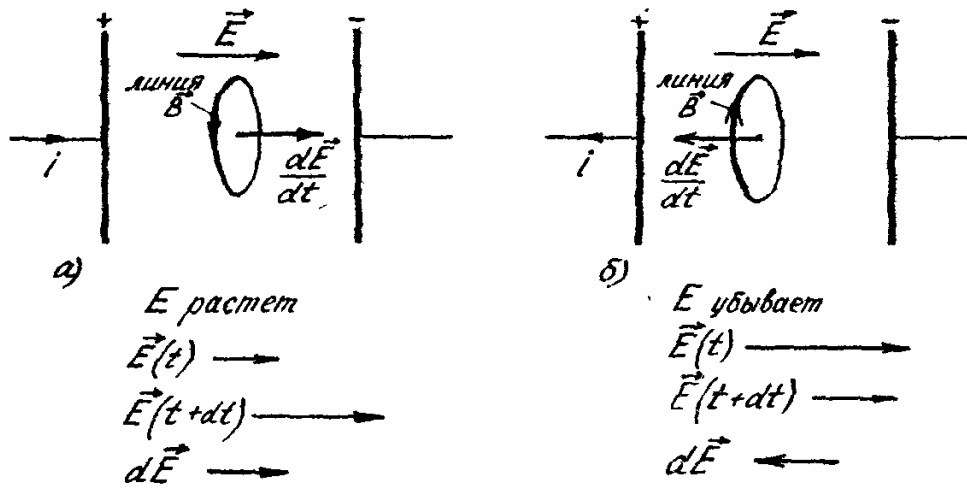


Рис. 6.9

2. Таким образом, магнитное поле в неферромагнитной среде создаётся:

- 1) любыми электрическими токами;
- 2) изменяющимся электрическим полем.

Токами, создавшими магнитное поле, могут быть:

- а) токи проводимости (а также конвекционные токи и токи в вакууме);
- б) микротоки (атомные электронные токи);
- в) поляризационные токи.

Поляризационные токи возникают в диэлектриках при наличии переменного электрического поля. Как известно, поляризация диэлектриков заключается либо в смещении зарядов в пределах каждой отдельной молекулы (неполярные диэлектрики), либо в повороте электрических диполей (полярные диэлектрики). Если электрическое поле, вызывающее поляризацию, – переменное, то заряды, ответственные за поляризацию, под действием поля смещаются то в одну, то в другую сторону, и тем самым создают ток, который и называется поляризационным. Каждый из осциллирующих зарядов вносит в ток свой вклад, равный $q\upsilon$ (υ – средняя скорость). Если число таких зарядов в единице объёма n , то они создают плотность тока

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = nq\vec{v}.$$

Поскольку $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, где $d\vec{r}$ приращение среднего смещения заряда, то

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = \frac{nq d\vec{r}}{dt}.$$

Величина $nq d\vec{r} = d\vec{P}$ – приращение электрического момента единицы объёма диэлектрика за время dt . Таким образом,

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

В случае неоднородной поляризации следует брать частную производную

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}; \quad \vec{j}_{\text{поляризация}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (6.5.1)$$

Полный поляризационный ток, протекающий через некоторую поверхность S , равен

$$I_{\text{поляризация}} = \int_S \vec{j}_{\text{поляризация}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (6.5.2)$$

3. Второе интегральное уравнение Максвелла выражает теорему о циркуляции вектора \vec{B} в самом общем случае: циркуляция \vec{B} по произвольному контуру интегрирования L в неферромагнитной среде равна

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial N_E}{\partial t} + \mu_0 I_{\text{пров}} + \mu_0 I_{\text{микро}} + \mu_0 I_{\text{поляризация}}, \quad (6.5.3)$$

где μ_0, ϵ_0 – магнитная и электрическая постоянные; $\frac{\partial N_E}{\partial t}$ – скорость изменения потока вектора напряжённости электрического поля \vec{E} сквозь произвольную поверхность S , опирающуюся на контур L ; $I_{\text{пров}}$, $I_{\text{микро}}$, $I_{\text{поляр}}$ – соответственно полные токи проводимости, микротоки и поляризационные, протекающие сквозь S (охватываемые контуром L).

Второе уравнение Максвелла называют иногда *теоремой полного тока*.

Уравнение (6.5.3), так же как и (6.4.3), не выводится. Оно – обобщение опыта.

6.6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Итак, электрическое и магнитное поля существуют в неразрывном единстве. Они образуют единое электромагнитное поле.

Согласно принципу относительности Эйнштейна (все физические законы инвариантны относительно инерциальных систем отсчёта) разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от выбора системы отсчёта. В этом нетрудно убедиться.

Пусть некоторая совокупность зарядов в данной инерциальной системе отсчёта покоится. В этой системе существует только электрическое поле, магнитное поле отсутствует. Но эти же заряды по отношению к другим инерциальным системам отсчёта движутся и, следовательно, создают не только электрическое, но и магнитное поле.

Если провод с постоянным током покоится в данной системе отсчёта, то он создаёт постоянное магнитное поле. Но этот же провод по отношению к другим инерциальным системам движется. Следовательно, порождаемое им магнитное поле в этих системах будет изменяться и создавать вихревое электрическое поле. Короче говоря, поле, которое относительно некоторой системы отсчёта выглядит как «чисто» электрическое или как «чисто» магнитное, относительно других систем будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

6.7. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Полная система уравнений Максвелла при наличии некоторых дополнительных условий позволяет решать с определенной степенью точности любую задачу, связанную с электрическими и магнитными процессами.

Замечание. Уравнения Максвелла, вообще говоря, следовало бы записывать в дифференциальной форме, ибо интегральные уравнения при решении конкретных задач приносят пользу только в самых простых случаях, например, при наличии симметрии зарядов и токов и при условии, что среда безгранична, однородна, изотропна и неферромагнитна. Однако уравнения Максвелла в дифференциальной форме выходят за рамки нашей программы и, поэтому мы ограничимся интегральными уравнениями.

Первые два уравнения мы уже записывали. Это – закон электромагнитной индукции и закон полного тока:

$$1) \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad (6.7.1)$$

$$2) \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial N_E}{\partial t} + \mu_0 I_{\text{пров}} + \mu_0 I_{\text{микро}} + \mu_0 I_{\text{поляр}}. \quad (6.7.2)$$

Уравнение (6.7.2) можно записать в более краткой форме.

Поток вектора \vec{E} равен $N_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$. Следовательно,

$$\frac{\partial N_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}.$$

Согласно (6.5.2),

$$I_{\text{поляр}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Ранее было показано, что суммарный микроток, пронизывающий поверхность S , опирающуюся на замкнутый контур L , равен циркуляции вектора намагниченности \vec{J} по этому контуру:

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Введём эти замены в (6.7.2), перенесём слагаемое с \vec{J} в левую часть, объединим слагаемые с \vec{E} и \vec{P} и разделим обе части на μ_0 . Получим

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I_{\text{пров}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S}.$$

Вектор $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$ – напряжённость магнитного поля.

Вектор $\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$ – индукция электрического поля.

Интеграл $\int_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S} = N_D$ – поток электрической индукции сквозь S .

Величина $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\partial N_D}{\partial t}$ – скорость изменения потока \vec{D} сквозь S .

Таким образом,

$$2)' \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пров}} + \frac{\partial N_D}{\partial t} \quad (6.7.3)$$

Циркуляция вектора \vec{H} по произвольному замкнутому контуру L равна суммарному току проводимости, охватываемому контуром L , плюс скорость изменения потока электрической индукции сквозь произвольную поверхность S , опирающуюся на L .

Как видно из (6.7.3), величина $\frac{\partial N_D}{\partial t}$ имеет размерность тока. $I_{\text{пров}}$ и $\frac{\partial N_D}{\partial t}$ действуют одинаковым образом: создают магнитное поле. Величину $\frac{\partial N_D}{\partial t}$ Максвелл назвал *током смещения* (причины, по которым переменное электрическое поле было названо током смещения, носят чисто исторический характер, и мы его касаться не будем. Заметим только, что с современной точки зрения термин не относится к числу удачных):

$$I_{\text{смещ}} = \frac{\partial N_D}{\partial t}. \quad (6.7.4)$$

Производную от \vec{D} по t Максвелл назвал плотностью тока $\vec{j}_{\text{смещ}}$

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.7.5)$$

Учитывая (6.7.4), перепишем (6.7.3):

$$2)'' \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пров}} + I_{\text{смещ}}. \quad (6.7.6)$$

Циркуляция вектора напряжённости \vec{H} магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме тока проводимости и тока смещения, охватываемых контуром L .

Третье и четвёртое уравнения выражают теорему Гаусса для векторов \vec{E} и \vec{B} .

Для вектора \vec{E} : поток вектора \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен величине $\frac{1}{\epsilon_0}$, умноженной на алгебраическую сумму свободных и поляризационных зарядов, заключенных внутри объёма, ограниченного поверхностью S .

$$3) \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{своб}}}{\epsilon_0} + \frac{q_{\text{поляри}}}{\epsilon_0}, \quad (6.7.7)$$

где $q_{\text{своб}}$, $q_{\text{поляри}}$ – алгебраические сумма свободных и поляризационных зарядов, охватываемых поверхностью интегрирования S .

Для вектора \vec{B}

$$4) \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (6.7.8)$$

Пятое и шестое уравнения связывают \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} :

$$5) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (6.7.9)$$

$$6) \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (6.7.10)$$

В изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных средах эти уравнения переходят в более простые:

$$5)' \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad (6.7.11)$$

$$6)' \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (6.7.12)$$

И, наконец,

$$7) \vec{j}_{\text{пров}} = \sigma \vec{E}, \quad (6.7.13)$$

где $\vec{j}_{\text{пров}}$ – плотность тока проводимости; σ – электропроводность; \vec{E} – напряжённость электрического поля.

Уравнения Максвелла играют в электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике или начала термодинамики в молекулярной физике.

6.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. Из дифференциальных уравнений Максвелла следует, что возможно существование электромагнитного поля в виде электромагнитных волн. Рассмотрим качественную сторону этого вопроса.

Пусть в точке O безграничного диэлектрика создано каким-либо способом электрическое поле \vec{E} (рис. 6.10). Если нет электрических зарядов, поддерживающих это поле, оно будет исчезать. Но изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле \vec{B} , линии которого направлены по часовой стрелке, если смотреть на вектор \vec{E} сверху (\vec{E} убывает, поэтому $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ направлен вертикально вниз).

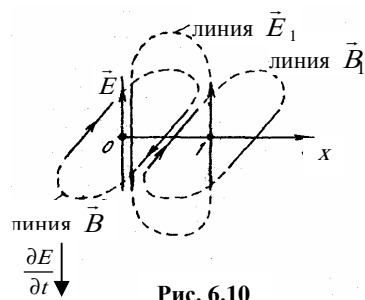


Рис. 6.10

Поскольку в рассматриваемой среде нет токов, поддерживающих поле \vec{B} , то оно также будет исчезать. Исчезающее магнитное поле вызовет появление вихревого электрического поля \vec{E}_1 , линии которого направлены против часовой стрелки. Поле \vec{E}_1 скомпенсирует первоначальное поле в точке O , но зато появится в соседней точке I . Исчезая в точке I , поле \vec{E}_1 , приведёт к появлению поля \vec{B}_1 , которое уничтожит поле \vec{B} , но обнаружится в более удалённой точке. Описанный процесс будет охватывать всё новые и новые точки. Электрическое и магнитное поля, взаимно превращаясь и поддерживая друг друга, будут распространяться в пространстве. Процесс распространения электромагнитного поля в пространстве и называется электромагнитной волной.

2. Поля \vec{E} и \vec{B} в каждой точке электромагнитной волны перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения волны. Направления векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} связаны между собой правилом правого буравчика: если вращать рукоятку буравчика от \vec{E} к \vec{B} (по кратчайшему пути), то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением \vec{v} (рис. 6.11).

3. Существование электромагнитных волн Д. Максвелл предсказал теоретически в 1863 г., но только в 1888 г. они были обнаружены экспериментально (Г. Герц).

Герц первым осуществил переход от закрытого колебательного контура, слабо излучающего электромагнитные волны, к открытому контуру.

В закрытом контуре электрическое и магнитное поля сосредоточены в небольших, отделённых друг от друга областях пространства.

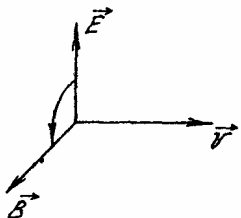


Рис. 6.11

Чтобы контур излучал сильно, необходимо области, где создаются электрическое и магнитное поля, сделать менее обособленными как друг от друга, так и от окружающего контур пространства. Этого можно достигнуть, раздвигая обкладки конденсатора и увеличивая расстояние между витками катушки (рис. 6.12, $a - r$).

Открытый контур Герца, называемый диполем или вибратором Герца представляет собой два проводящих стержня, снабжённых искровым промежутком (рис. 6.13).

Открытый контур Герца, называемый диполем или вибратором Герца представляет собой два проводящих стержня, снабжённых искровым промежутком (рис. 6.13).

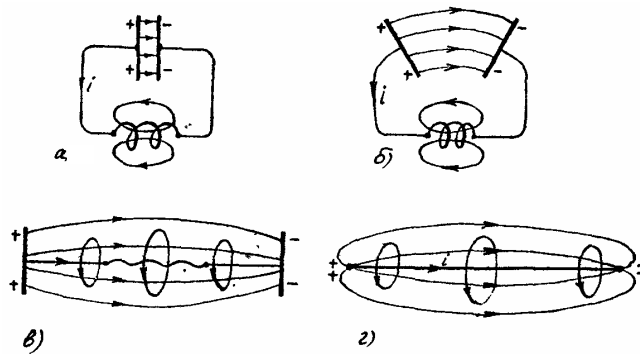


Рис. 6.12

Для возбуждения колебаний вибратор подключался к источнику напряжения (индуктор Румкорфа). По достижении пробивного напряжения в искровом промежутке возникала искра, закорачивающая стержни вибратора. В вибраторе возникали свободные затухающие колебания, которые продолжались до тех пор, пока не погасала искра.

Чтобы высокочастотные токи не уходили в обмотку индуктора, между вибратором и индуктором включались дроссели Др (дроссель – катушка с большой индуктивностью). В процессе колебаний вибратор излучал электромагнитные волны.

Для обнаружения излучаемых волн Герц использовал другой вибратор, тождественный излучающему (но с меньшим искровым промежутком). Появление вынужденных колебаний в приёмном вибраторе Герц фиксировал по искоркам, возникающим в зазоре вибратора.

4. Герцу удалось определить длину электромагнитных волн, измерить скорость их распространения (правда, с ошибкой почти в 100 000 км/с), установить поперечный характер волн, обнаружить их отражение и преломление.

5. Опыты Г. Герца были продолжены П.Н. Лебедевым, которому удалось измерить давление света – один из самых тонких эффектов. Этот эффект предсказывала теория Максвелла, но его довольно долго не могли обнаружить экспериментально.

Опыты Герца, Лебедева и их последователей доказали тождество световых и электромагнитных волн. Важную роль в этом доказательстве сыграли сближение на частотной шкале наиболее длинных световых (инфракрасных, тепловых) волн и волн, излучаемых вибраторами типа вибраторов Герца. Решающие опыты здесь принадлежат А.А. Глаголевой-Аркадьевой, которая в 1922 г. с помощью специального устройства, называемого «массовым излучателем», получила электромагнитные волны, почти смыкающиеся с инфракрасными световыми волнами (820 миллимикрон).

В 1896 г. А.С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние (были переданы слова «Генрих Герц»), положив тем самым начало радиосвязи.

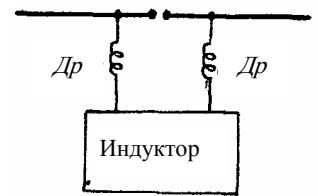


Рис. 6.13

6.9. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. Из уравнений Максвелла следует, что *электромагнитные волны поперечны*, векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны к направлению распространения волны.

2. Закон изменения векторов \vec{E} и \vec{B} в электромагнитной волне задается характером электромагнитных колебаний в излучающей антенне.

3. Электромагнитная волна называется *плоской*, если её фазовая поверхность – плоскость. *Фазовая поверхность* – поверхность, во всех точках которой векторы \vec{E} (или \vec{B}) колеблются в одинаковых фазах.

Если величина и направление вектора \vec{E} (равно как и вектора \vec{B}) во всех точках фазовой поверхности одинакова, то волна называется *однородной*.

Если векторы \vec{E} и \vec{B} в плоской волне изменяются по гармоническому закону, волна называется *гармонической*.

4. *Фазовая скорость волны* – скорость перемещения данной фазовой поверхности.

Фазовая скорость волны зависит от диэлектрической и магнитной проницаемости среды:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (6.9.1)$$

Для вакуума ($\epsilon = 1, \mu = 1$) по этой формуле получается

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c.$$

Мы видим, что в вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света. Окончательная формула для фазовой скорости электромагнитных волн в среде такова:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c. \quad (6.9.2)$$

5. Пусть плоская однородная гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль положительного направления оси x . Уравнения этой волны в векторном виде записываются следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right); \quad (6.9.3)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (6.9.4)$$

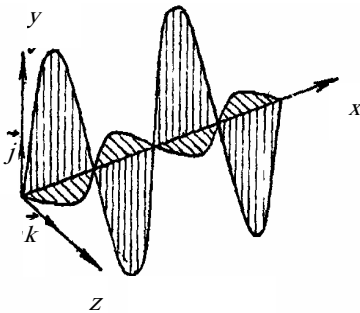
где $\vec{E}_m = E_m \vec{j}$; $\vec{B}_m = B_m \vec{k}$ (E_m, B_m – амплитуды \vec{E}, \vec{B} ; \vec{j}, \vec{k} – орты осей y, z); ω – циклическая частота колебаний \vec{E} и \vec{B} ; x – координата точки наблюдения; v – фазовая скорость волны.

Уравнениям (6.9.3) – (6.9.4) обычно придают следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx); \quad (6.9.5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - kx), \quad (6.9.6)$$

где $k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число.



На рисунке 6.14 изображена «Мгновенная фотография» плоской гармонической электромагнитной волны. Как видно из рисунка и из уравнений (6.9.5), (6.9.6), колебания векторов \vec{E} и \vec{B} происходят в фазе: \vec{E} и \vec{B} одновременно достигают максимума и одновременно проходят через нуль.

6. Гармоническая электромагнитная волна характеризуется *частотой, периодом и длиной*. Период T – время, в течение которого вектор \vec{E} (или \vec{B}) в электромагнитной волне совершает одно полное колебание.

Рис. 6.14

Частота ν – число полных колебаний за единицу времени.

Длина волны λ – расстояние, на которое волна распространяется за один период:

$$\lambda = \nu T = \frac{cT}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\nu \sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (6.9.7)$$

7. Электромагнитная волна материальна. Она обладает *массой, энергией, импульсом*.

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей. Плотность энергии электрического поля в среде равна

$$w_E = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}; \quad (6.9.8)$$

плотность энергии магнитного поля:

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}; \quad (6.9.9)$$

плотность энергии электромагнитной волны

$$w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (6.9.10)$$

Можно доказать, что в любой точке электромагнитной волны (в случае непроводящей среды) в любой момент времени плотности w_E и w_B одинаковы: $w_E = w_B$ или $\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}$, откуда

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (6.9.11)$$

Так как $w_E = w_B$ плотность w равна

$$w = 2w_E = \epsilon_0 \epsilon E^2$$

или

$$w = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} BE. \quad (6.9.12)$$

Для характеристики переноса энергии электромагнитной волной вводят понятие *потока энергии*.

Поток энергии Φ_w сквозь поверхность S – энергия, протекающая через S за единицу времени.

Распределение потока энергии по S характеризует *плотность потока энергии*.

Плотность потока энергии $\vec{\Pi}$ – векторная физическая величина, численно равная энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны, и совпадающая с направлением фазовой скорости волны.

Величину плотности потока энергии мы получим, умножив плотность энергии волны (6.9.12) на фазовую скорость волны (6.9.1):

$$\Pi = wv = \frac{1}{\mu_0 \mu} EB. \quad (6.9.13)$$

Векторы \vec{E} , \vec{B} и $\vec{\Pi}$ образуют правовинтовую систему

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 \mu} [\vec{E}\vec{B}]. \quad (6.9.14)$$

Вектор плотности потока энергии $\vec{\Pi}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Поток энергии через произвольную поверхность S вычисляется интегрированием $\vec{\Pi}$ по S

$$\Phi_w = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (6.9.15)$$

Масса электромагнитной волны, заключённая в некотором объеме V , может быть вычислена по формуле теории относительности о соотношении массы и энергии

$$W = mc^2. \quad (6.9.16)$$

В частности, масса, заключённая в единице объёма (средняя плотность материи в электромагнитной волне) ρ равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{W}{c^2 V} = \frac{\bar{w}}{c^2}, \quad (6.9.17)$$

где \bar{w} – средняя объёмная плотность энергии волны.

Импульс некоторого объёма электромагнитной волны равен $\vec{k} = m\vec{c}$ (в вакууме), $\vec{k} = m\vec{v}$ (в среде).

8. Электромагнитная волна, встречая на своём пути тела, оказывает на них давление. Пусть плоская волна падает на плоскую поверхность тела перпендикулярно к поверхности (рис. 6.15).

Электрическое поле волны вызовет в этом теле ток (проводимости или поляризационный). Магнитное поле волны будет действовать на этот ток с силой, направление которой совпадает с направлением распространения волны.

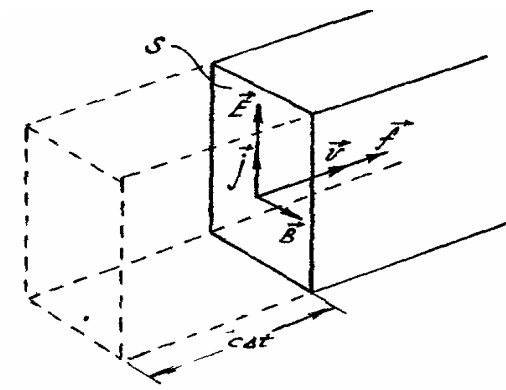


Рис. 6.15

Пусть рассматриваемое тело полностью поглощает падающую на него волну. Тогда импульс, передаваемый волной поверхности тела S за время Δt , равен mc , где m – масса волны, заключённая в прямой призме с основанием S и высотой $c \Delta t$ (рис. 6.15). Импульс mc равен $\bar{f} \Delta t$, где \bar{f} – средняя сила, действующая на площадку S :

$$mc = \bar{f} \Delta t. \quad (6.9.18)$$

Энергия электромагнитной волны, заключённая в объёме равна, с одной стороны,

$$W = mc^2; \quad (6.9.19)$$

с другой,

$$W = \bar{w} S c \Delta t, \quad (6.9.20)$$

где \bar{w} – средняя объёмная плотность энергии волны.

Из (6.9.19) и (6.9.20) находим m и подставляем в (6.9.18):

$$\bar{w} S = \bar{f}.$$

Разделив \bar{f} на S , найдём давление

$$p = \frac{\bar{f}}{S} = \bar{w}. \quad (6.9.21)$$

Если тело частично отражает волну и k – коэффициент отражения, то давление равно

$$p = (1 + k) \bar{w}, \quad (6.9.22)$$

(коэффициент отражения показывает, какая доля падающей на тело энергии отражается).

Для абсолютно отражающего тела $k = 1$ и

$$p = 2 \bar{w}. \quad (6.9.23)$$

Если волна падает на поверхность под углом i к нормали,

$$p = (1 + k) \bar{w} \cos i. \quad (6.9.24)$$

9. При прохождении через границу раздела двух сред электромагнитная волна испытывает преломление. Электромагнитные волны могут интерферировать, дифрагировать. Электромагнитные волны могут быть поляризованными (обо всём этом пойдёт речь в следующей части курса).

Теория Максвелла сыграла выдающуюся роль в развитии физики. Эта теория не только объяснила большую совокупность опытных фактов, но и предсказала вплоть до количественных оценок существование неизвестных ранее явлений (давление электромагнитных волн, электромагнитная природа света и др.).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется их период?
2. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.
3. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их.
5. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
6. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? добротность контура? время релаксации? В чём заключается физический смысл этих величин?
7. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение для них и решите его. Проведите анализ.
8. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
9. Нарисуйте, проанализируйте резонансные кривые для амплитуды заряда и тока. В чём их отличие?
10. Что такое электромагнитная волна? Какова скорость её распространения? Что может служить источником электромагнитных волн?

11. Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?
12. Запишите волновое уравнение для векторов \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решения и объясните физический смысл.
13. Как определить объёмную плотность энергии в электромагнитной волне?
14. В чём заключается физический смысл вектора Умова–Пойнтинга? Чему он равен?
15. Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
16. Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
17. Введите и объясните выражение для плотности тока смещения.
18. Запишите, объяснив физический смысл, обобщённую теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля.
19. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Объясните их физический смысл.
20. Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью 1000 см , резонирует на волну длиной 10 м . Определить расстояние между пластинами конденсатора.

Решение. Расстояние между пластинами конденсатора можно найти из формулы ёмкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (1)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор; S – площадь пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами. Отсюда

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C}. \quad (2)$$

Ёмкость найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Отсюда

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}. \quad (3)$$

Неизвестный в условии задачи период колебаний T можно определить, зная длину волны λ , на которую резонирует контур.

Длина волны связана с периодом колебаний соотношением

$$\lambda = cT.$$

Отсюда $T = \frac{\lambda}{c}$.

Подставив выражение периода T в (3), а затем ёмкости C в (2), получим

$$d = c^2 \frac{4\pi^2 \epsilon_0 \epsilon S L}{\lambda^2}. \quad (4)$$

Подставив числовые значения в (4) получаем:

$$d = (3 \cdot 10^8)^2 \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закрывая последнюю страницу этого пособия и мысленно вспоминая учебные дисциплины, включённые в образовательный план высшего технического учебного заведения, каждый из студентов сразу поймет, что материал, рассмотренный в разделе физики «Электромагнетизм» является базовым для многих из них. Это и электротехника, и промышленная электроника, и радиотехника, и автоматизация многих процессов и производств, и электроизмерения, и даже вычислительная техника и многие другие.

Поэтому изучение курса физики, в том числе учения об электромагнетизме, является прочной теоретической, а с учётом лабораторного практикума, и практической основой подготовки любого инженера. Время и усилия, потраченные на это сторицей окупятся в дальнейшей учебе и работе инженера.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев, И.В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2005. – 496 с.
2. Зисман, Г.А. Курс общей физики / Г.А. Зисман, О.М. Годес. – М. : Наука, 1972. – Т. 2.
3. Детлаф, А.А. Курс физики : учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 718 с.
4. Трофимова, Т.И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 7-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2001. – 541 с.
5. Чертов, А.Г. Задачник по физике : учебное пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2006. – 640 с.