математика» кафедраси, Тошкент электротехника алоқа институти «Олий математика» кафедраси жамоаларига, таҳрир ҳайъатининг аъзолари, доцентлар Е. М. Хусанбоев, Р. Ж. Исомов, А. Қ. Омонов, Ш. Р. Хуррамовларга ўз миннатдорчилигини билдиради ва уларнинг беминнат меҳнатларини эътироф этишни ўзининг бурчи деб билади.

Дарслик камчиликлардан холи эмас, албатта. Уни янада такомиллаштиришга қаратилган танкидий фикр ва мулоҳазаларни сидқидилдан билдирган ҳамкасб ўртоқларга муаллиф олдиндан ўзининг илиқ ҳурматини ва ташаккурини билдиради.

Муаллиф

1-боб

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар. Детерминантларни ҳисоблаш. Детерминантларнинг асосий хоссалари. Юқори тартибли детерминантлар.

1.1.1. Тўртта сондан иборат

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

квадрат жадвал *иккинчи тартибли квадрат матрица* дейилади.

Иккинчи тартибли квадрат матрицага мос келувчи *иккинчи тартибли детерминант* деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

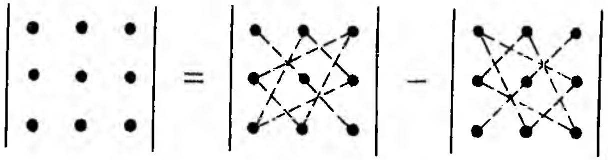
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Шунга ўхшаш ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

ифода *учинчи тартибли детерминант* дейилади. Бу ифодага мусбат ишора билан кирадиган ҳар бир кўпайтма, ҳамда манфий ишорали кўпайтмалар кўпайтувчиларини алоҳида-алоҳида пунктир чизиқлар ёрдамида туташтириб, учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш учун хотирада осон сақланадиган «учбурчаклар қоидаси»га эга бўламиз (1-шакл).



1- шакл

Детерминант a_{ik} элементининг M_{ik} *минори* деб, шу детерминантдан бу элемент турган қатор ва устунни ўчириш натижасида ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$$

муносабат билан аниқланади.

1.1.2. Детерминантларнинг асосий хоссалари:

а) агар детерминантнинг барча сатрлари мос устунлари билан алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди;

Кейинги хоссаларни таърифлашда сатрлар ва устунларни бир сўз билан *қатор* деб атаймиз.

б) агар детерминант ноллардан иборат қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

в) агар детерминант иккита бир хил параллел қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

г) агар детерминант иккита параллел қаторининг мос элементлари мутаносиб (пропорционал) бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

д) бирор қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин;

е) агар детерминант иккита параллел қаторининг ўринлари алмаштирилса, детерминант ишорасини карама-каршисига ўзгартиради;

ж) детерминантнинг қиймати бирор қатор элементлари билан шу элементларга тегишли алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Бу хосса *детерминантни* қатор элементлари бўйича *ёйиш* дейилади. Ундан детерминантларни ҳисоблашда фойдаланилади.

з) бирор қатор элементлари билан параллел қатор мос элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.

и) агар детерминант бирор қаторининг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, уларнинг бири тегишли қатор биринчи қўшилувчилардан, иккинчиси эса иккинчи қўшилувчилардан иборат бўлади. Масалан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

к) агар детерминантнинг бирор қатори элементларига параллел қаторининг мос элементларини бирор ўзгармас сонга кўпайтириб қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{11} & a_{32}+\lambda a_{12} & a_{33}+\lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

1.1.3 $(n\times n)$ та сондан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

жадвал *n- тартибли квадрат матрица* дейилади. Унинг *n- тартибли детерминанти* деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n}.$$

1.1.2 бандда келтирилган хоссаларнинг ҳаммаси исталган тартибли детерминантга тегишлидир. Ихтиёрий тартибли детерминантни ҳисоблашнинг иккита усулини келтирамиз:

1. *Детерминант тартибини пасайтириш усули* — детерминант бирор қатори элементларининг биттасидан бошқаларини олдиндан нолга айлантириб олиб, шу қатор бўйича ёйиш усули.

1- мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 91.$$

2. *Детерминантни учбурчак кўринишга келтириш усули* детерминантни шундай алмаштиришдан иборатки, унинг бош диагоналидан бир томонида ётувчи ҳамма элементлари нолга айлантирилади ва учбурчаксимон шаклга келтирилади, масалан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Равшанки, учбурчак шаклидаги детерминантнинг қиймати бош диагоналлари элементлари кўпайтмасига тенг:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

2- мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48.$$

1- дарсхона топшириғи

1. Учинчи тартибли детерминантларни учбурчак қоидасидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) -12; б) 0; в) 87.

2. Детерминантларни тартибини пасайтириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \text{ в)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) -2; б) 0; в) 16.

3. Детерминантларни учбурчак шаклига келтириб ҳисобланг:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) 48; б) 20.

4. Детерминантларни олдин соддалаштириб, кейин ҳисобланг:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}; \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) $a(x-y)(y-z)(z-x)$; б) 640;
в) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

1- мустақил иш

Детерминантларни ҳисобланг:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{Ж: 32.} \quad 2. \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{Ж: 24}.$$

$$3. \begin{vmatrix} -4 & -3 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 3 & 8 \end{vmatrix} \text{Ж:120.} \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{Ж:192}$$

2- §. Икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаси. Крамер қоидаси. Гаусс усули

1.2.1. Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

нинг бош детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ бўлганда, ягона ечимга эга ва у Крамер қоидаси бўйича қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

бу ерда

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta=0$ ва шу билан бирга $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ лардан ақалли биттаси нолга тенг бўлмаса, система ечимга эга эмас.

Агар $\Delta=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=0$ бўлса, у ҳолда берилган система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

1.2.2. Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}$$

нинг бош детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

бўлганда ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим Крамер формулалари билан ҳисобланади:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

бунда

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta=0$ ва $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ детерминантлардан ақалли биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда берилган система ечимга эга бўлмайди ва бу система *биргаликда бўлмаган система* деб аталади. Камида битта ечимга эга бўлган система *биргаликдаги система* деб аталади.

1- мисол. Чизиқли тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-4;\\ 3x_1+2x_2-x_3=8,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=-6.\end{cases}$$

Ечиш. Детерминантларни топамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & -4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=4.$$

Детерминант $\Delta=4\neq0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга ва Крамер формуласини қўллаб, уни топамиз:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1\\ 8 & 2 & -1\\ -6 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1\\ 3 & 8 & -1\\ 2 & -6 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1\\ 0 & 20 & -4\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 20 & -4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=8;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4\\ 3 & 2 & 8\\ 2 & -3 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4\\ 0 & 8 & 20\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 20\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=1,\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=2,\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=-1.$$

1.2.3. n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини n нинг катта $(n\geqslant4)$ қийматларида Крамер қоидаси билан ечиш бир нечта юқори тартибли дитерминантларни ҳисоблашни талаб этади. Шу сабабли, бундай системаларни ечишда Гаусс усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда номаълумлар кетма-кет йўқотилиб, система учбурчаксимон шаклга келтирилади. Агар система учбурчаксимон шаклга келса, у ягона ечимга эга бўлади ва унинг номаълумлари охирги тенгламадан бошлаб топиб борилади. (Система чексиз кўп ечимга эга бўлса, номаълумлар кетма-кет йўқотилгач, у трапециясимон шаклга келади.)

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3, \\ 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалардан x_1 ларни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани кетма-кет -1, -2, -2 га кўпайтирамиз ва мос равишда иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалар билан қўшамиз. Натижада ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_3-2x_4=4, \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_2-7x_3-2x_4=-5, \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+7x_3+2x_4=5, \\ x_3-x_4=2. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан иккинчи тенгламани айирамиз:

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ x_2+x_3+x_4=0, \\ 6x_3+x_4=5, \\ x_3-x_4=2, \end{cases}$$

сўнгра тўртинчи тенгламани — 6 га кўпайтириб, учинчи тенгламага қўшсак, учбурчакли система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ x_2+x_3+x_4=0, \\ x_3-x_4=2, \\ 7x_4=-7. \end{cases}$$

Бундан,

$$\begin{aligned} &x_4=-1, \\ &x_3=2+x_4=1, \\ &x_2=-x_3-x_4=0, \\ &x_1=1-x_2-5x_3-2x_4=-2. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=-1.$$

2-дарсхона топшириғи

1. Чизиқли тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2=3, \\ 3x_1+2x_2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-x_2=2, \\ 6x_1-2x_2=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+x_2=1, \\ 4x_1+2x_2=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1-2x_2=0, \\ 3x_1+x_2=0, \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x_1-x_2=2, \\ 4x_1+5x_2=9. \end{cases}$

Ж: а) $x_1=2$, $x_2=-1$; б) системанинг ечимлари йўқ; в) x_1 — ихтиёрий, $x_2=1-2x_1$; г) $x_1=0$, $x_2=0$; д) $x_1=1$, $x_2=1$.

2. Чизиқли тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-7x_3=0, \\ x_1-6x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-x_3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=8, \\ 2x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Ж: а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$; б) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$;
в) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

3. Тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_2+3x_3+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=6, \\ x_1-2x_2-x_4=-6, \\ x_2+x_3+3x_4=16, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=6. \end{cases}$

Ж: а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$;
б) $x_1=8$, $x_2=6$, $x_3=4$, $x_4=2$.

2-мустақил иш

1. Чизикли тенгламалар системаларини Крамер коидаси бўйича ечинг ва текширинг

а) $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-5, \\ x_1+2x_2-4x_3=17, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-7. \end{cases}$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3=0, \\ 5x_1+x_2-3x_3=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-6, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-4x_2+3x_3=6. \end{cases}$

Ж: а) $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$; б) $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

3. Чизикли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг ва текширинг:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_2-4x_3=9, \\ 5x_1-2x_2+4x_3=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2-x_3=-1, \\ x_1+x_2+3x_3=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-x_4=8, \\ -5x_1+x_2-3x_3=-7, \\ x_2+x_3-7x_4=-5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+x_3+x_4=9, \\ 3x_2-2x_3+3x_4=12, \\ -2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 5x_1+2x_2-3x_4=-3. \end{cases}$

Ж: а) $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-1$;
б) $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=1$;
в) $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=1$;
г) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4$.

3-§. Матрицалар. Матрицалар устида амаллар. Матрицанинг ранги. Чизикли тенгламалар системасини текшириш

1.3.1. Сонларнинг m та сатр ва n та қатордан иборат тўғри тўртбурчакли жадвали $m\times n$ *ўлчамли матрица* дейилади. Бу матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

Агар $m=1$ бўлса, *сатр матрица*, $n=1$ бўлса *устун матрица*, $m=n$ бўлса, *квадрат матрица* ҳосил бўлади. Квадрат A матрица учун шу матрицанинг элементларидан тузилган n-тартибли детерминантни ҳисоблаш мумкин. Бу детерминант $\det A$ ёки $|A|$ оркали белгиланади:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\,a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар $\det A=0$ бўлса, у ҳолда A матрица *махсус*, $\det A\neq 0$ бўлса, *махсусмас* дейилади.

Бош диагоналида турган элементлари бирга, қолган элементлари нолга тенг бўлган квадрат матрица *бирлик матрица* деб аталади ва E билан белгиланади:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Равшанки, $\det E=1$.

Агар ўлчамлари бир хил $m\times n$ бўлган икки матрицанинг барча мос элементлари ўзаро тенг бўлса, бу матрицалар *тенг* дейилади.

1.3.2. Бир хил $m\times n$ ўлчамли A ва B матрицанинг *йиғиндиси* деб ўша ўлчамли шундай $C=A+B$ матрицага айтиладики, унинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементлари йиғиндисидан иборат бўлади.

$m\times n$ ўлчамли A матрицанинг λ *сонга кўпайтмаси* деб, ўша ўлчамдаги $B=\lambda\cdot A$ матрицага айтиладики, бу матрица элементлари A матрица элементларини λ га кўпайтиришдан ҳосил бўлади.

$m\times k$ ўлчамли A матрицанинг $k\times n$ ўлчамли B *матрицага кўпайтмаси* деб, $m\times n$ ўлчамли шундай $C=A\cdot B$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементи A матрицанинг i- сатри элементларини B матрицанинг j- устунидаги мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}.$$

Агар $AB=BA$ бўлса, у ҳолда A ва B матрицалар *ўрни алмашинадиган* ёки *коммутатив матрицалар* дейилади.

1- мисол. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$$

матрицаларнинг AB ва BA кўпайтмаларини топинг.

Ечиш. AB матрица 2×2 ўлчамга эга бўлади:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 2+1(-1)+(-2)\cdot 4 & 3\cdot(-1)+1\cdot 3+(-2)\cdot(-5)\\ 2\cdot 2+(-4)\cdot(-1)+5\cdot 4 & 2\cdot(-1)+(-4)\cdot 3+5\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ 28 & -39\end{pmatrix}.$$

BA матрица 3×3 ўлчамга эга бўлади:

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-4) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 5\\ (-1)\cdot 3+3\cdot 2 & (-1)\cdot 1+3(-4) & (-1)\cdot(-2)+3\cdot 5\\ 4\cdot 3+(-5)\cdot 2 & 4\cdot 1+(-5)(-4) & 4\cdot(-2)+(-5)\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 6 & -9\\ 3 & -13 & 17\\ 2 & 24 & -33\end{pmatrix}.$$

$AB\neq BA$ бўлганлиги сабабли A ва B матрицалар коммутатив эмас.

1.3.3. Агар квадрат матрица махсусмас бўлса, у ҳолда $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона A^{-1} матрица мавжуд бўлади ва у A матрицага *тескари матрица* дейилади. A матрицанинг A^{-1} тескари матрицаси қуйидагича аниқланади:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Бу ерда A_{ik} A матрица детерминанти a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси.

2- мисол. Берилган

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 7-1\cdot(-6)=-4\neq 0.$$

Демак, A матрица махсусмас матрица экан. Энди A_{ik} алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4;\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8;\ A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Тескари матрицани тузамиз:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & -9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ эканини текшириш мумкин.

1.3.4. n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

ни матрица кўринишда

$$AX=B$$

каби ёзиш мумкин, бунда

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Агар A махсусмас матрица, яъни $\det A\neq 0$ бўлса, у ҳолда бу системанинг матрица шаклидаги ечими ушбу кўринишга эга бўлади:

$$X=A^{-1}B.$$

1.3.5. A матрицанинг *ранги* деб, унинг нолдан фарқли минорларининг энг катта тартибига айтилади ва у rang (A) каби белгиланади.

Матрицани қуйидаги алмаштиришлар *элементар алмаштиришлар* деб аталади:

а) фақатноллардан иборат сатрни (устунни) ўчириш;

б) иккита сатрнинг (устуннинг) ўринларини алмаштириш;

в) бир сатр (устун)нинг барча элементларини бирор кўпайтувчига кўпайтириб, бошқа сатр (устун)нинг мос элементларига қўшиш;

г) сатр (устун)нинг барча элементларини нолдан фарқли бир хил сонга кўпайтириш.

Элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди. Шу сабабли, элементар алмаштиришлардан фойдаланиб, матрицани диагонал элементларидан ташқари барча элементлари нолга тенг бўладиган кўринишга келтириш мумкин. Бу ҳолда матрица ранги диагоналдаги нолга тенг бўлмаган элементлари сонига тенг бўлади.

3 мисол. Матрица рангини топинг:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ечиш. Матрица устида элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ҳосил қилинган матрицанинг ранги 2 га тенг, демак, берилган A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлади:

1.3.6. Кронекер — Капелли теоремаси. n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \dots\ +a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

биргаликда бўлиши учун

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ерда

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

системанинг асосий матрицаси,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

системанинг кенгайтирилган матрицаси. Агар rang $A = n$ бўлса, у ҳолда системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлиб, у *ягона ечимга* эга бўлади; агар rang $A < n$ бўлса, у ҳолда система (n — rang$A$) та ихтиёрий параметрга боғлиқ бўлган *чексиз кўп* ечимга эга бўлади.

Агар барча b_i озод ҳадлар нолга тенг бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси *бир жинсли* дейилади. Бундай тенгламалар системасида ҳар доим rang$A$ = rang$B$, шу сабабли бир жинсли система биргаликда бўлади. Бир жинсли тенгламалар системасини $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ қийматлар қаноатлантиради, лекин A матрицанинг ранги номаълумлар сони n дан кичик бўлганда унинг детерминанти нолга тенг бўлиб, система нолмас ечимга эга бўлади.

4- мисол: Ушбу

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

чизиқли тенгламалар системаси биргаликдалигини аниқланг.

Ечиш. Берилган системанинг A асосий ва B кенгайтирилган матрицаларини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сатрлар устида тегишли элементар алмаштиришларни бажариб, бу матрицаларнинг рангини топамиз:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 42/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 29/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, rang$B$ = 4, rang$A$ = 3, яъни rang$B \neq$ rang$A$. Демак, система биргаликда эмас.

5- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

бир жинсли системани ечинг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 13 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \end{pmatrix}.$$

rang$A$ = 2 < 3 (3 — номаълумлар сони), чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Демак, система нолмас ечимларга эга ва системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 80 - 1 - 12 - 15 - 16 = 80 - 80 = 0$$

бўлгани сабабли улар чексиз кўпдир. Системанинг дастлабки икки тенгламасини ечамиз:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-\ \ x_3=0, \\ x_1-3x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

Бу системада x_3 ли ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2= \quad x_3 \\ x_1-3x_2=-5x_3 \end{cases}.$$

Бу системани Крамер қоидасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9-4=-13,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3+20x_3=17x_3,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3-x_3=-16x_3.$$

Шундай қилиб, $x_1=-\frac{17x_3}{13}$; $x_2=\frac{16x_3}{13}$; $x_3=13t$ бўлсин (t – ихтиёрий мутаносиблик коэффициенти). У ҳолда $x_1=-17t$; $x_2=16t$; $x_3=13t$. t га ихтиёрий қийматларни бериб, чексиз кўп ечимларни ҳосил қиламиз.

3- дарсхона топшириғи

1. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

бўлса, $3A+2B$ ни ҳисобланг.

$$Ж:\ 3A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган. AB ва BA ларни топинг.

$$Ж:\ AB=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix};\quad BA=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг.

$$Ж:\ A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -8 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

бўлса, A нинг рангини элементар алмаштиришлар ёрдамида топинг.

$$Ж:\ \mathrm{rang}A=3.$$

5. Тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг. Агар система биргаликда бўлса, уни матрица усули билан ечинг:

$$а)\ \begin{cases} 4x+2y-z=-9, \\ x+2z=5, \\ x-3y+z=5; \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} 2x-3y+\ \ z=2, \\ 3x+\ \ y-3z=1, \\ 5x-2y-2z=4. \end{cases}$$

Ж: а) $x=-1$, б) система биргаликда эмас.
$y=-1$,
$z=3$;

6. Бир жинсли системани ечинг:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-x_2+7x_3=0. \end{cases}$$

Ж: $x_1=17t$; $x_2=2t$; $x_3=-7t\,(-\infty<t<+\infty)$.

3- мустақил иш

1. Агар

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

бўлса, $(A+3B)^2$ ни топинг.

$$\text{Ж: }\begin{pmatrix}96 & 12 & 8\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 85 & 111\end{pmatrix}.$$

2. Агар

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

бўлса, A га тескари A^{-1} матрицани топинг ва $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ эканига ишонч ҳосил қилинг.

$$\text{Ж: } A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -4\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

3. Тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг. Агар у биргаликда бўлса, уни матрица усули билан ечинг:

$$\begin{cases}3x-\ y+\ z=12,\\ x+2y+4z=6,\\ 5x+\ y+2z=3\,.\end{cases}\qquad \text{Ж: } x=0,\ y=-7,\ z=5.$$

4. Бир жинсли системанинг нолмас ечимлари бор-йўқлигини аниқланг, агар бор бўлса, уларни топинг:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-11x_2+10x_3=0.\end{cases}\qquad \text{Ж: } x_1=-7t;\ x_2=2t;\ x_3=5t.$$

1- назорат иши

1. Олдин бирор қатор элементларининг биттасидан бошқасини нолларга айлантириб, детерминантни тартибини пасайтириш усули билан ҳисобланг:

1.1. $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -3 & 3\\ 3 & 4 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 4\end{vmatrix}.$ **1.2.** $\begin{vmatrix}0 & 3 & 2 & -4\\ -2 & 4 & -3 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 4 & 2\end{vmatrix}.$

1.3. $\begin{vmatrix}0 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ 3 & -3 & -1 & 4\\ -2 & 2 & 4 & 3\end{vmatrix}.$ **1.4.** $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ -3 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & 4 & -8\\ -2 & 4 & -3 & -1\end{vmatrix}.$

1.5. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 0 & 3\\ -4 & 3 & 2 & -3\\ -2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 0\end{vmatrix}.$ **1.6.** $\begin{vmatrix}-4 & 3 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 3 & -4\\ 3 & 4 & 0 & -3\\ 0 & -1 & -2 & 5\end{vmatrix}.$

1.7. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 0 & 3\\ -4 & 3 & 2 & -3\\ -2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 0\end{vmatrix}.$ **1.8.** $\begin{vmatrix}-4 & 2 & 3 & 0\\ -1 & -3 & 4 & -2\\ 2 & 4 & -1 & 3\\ 0 & -5 & 2 & 1\end{vmatrix}.$

1.9. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 5\\ -1 & -3 & 2 & -4\\ 4 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -4 & -2\end{vmatrix}.$ **1.10** $\begin{vmatrix}4 & 2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 2 & 4\\ -2 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{vmatrix}.$

1.11. $\begin{vmatrix}0 & -1 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 0 & 6\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}.$ **1.12.** $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 3 & -5\\ 3 & 7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1 & 2\end{vmatrix}.$

1.13. $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 7 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 7 & 1\end{vmatrix}.$ **1.14.** $\begin{vmatrix}5 & -8 & -4 & 7\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -3 & -2\\ 1 & 5 & -5 & -1\end{vmatrix}.$

1.15. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$ **1.16.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$ **1.18.** $\begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

1.19. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$ **1.20.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ -9 & 3 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & -4 \end{vmatrix}.$

1.21. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$ **1.22.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$

1.23. $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$ **1.24.** $\begin{vmatrix} 8 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$

1.25. $\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$ **1.26.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.27. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ -7 & 2 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}.$ **1.28.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

1.29. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \end{vmatrix}.$ **1.30.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$

2. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг:

2.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=9, \\ 4x_2+11x_3=1, \\ 7x_1-5x_2=-1. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=27, \\ 5x_1+2x_2+13x_3=70, \\ 3x_1-x_3=-2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+3x_3=46, \\ x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_1-7x_2-2x_3=5. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-1, \\ x_1+x_2-x_3=-1. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=21, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=43, \\ x_1+x_2-x_3=3, \\ 2x_1+x_2=13. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1-2x_2-3x_3=-2. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=11, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9, \\ x_1-5x_2-8x_3=23. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=12, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=9, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-15. \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=15, \\ x_1+x_2+5x_3=16, \\ 3x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=11, \\ x_1+2x_2-x_3=-6, \\ x_1-4x_2-2x_3=3. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} 2x_1-5x_2=19, \\ 3x_1+5x_2-x_3=-10, \\ x_1-4x_2+2x_3=16. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6, \\ 2x_2-x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+5x_3=19. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3=16, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-10, \\ 2x_1-3x_3=4. \end{cases}$

2.15. $$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=1, \\ 3x_1+5x_2-2x_3=3, \\ x_1-2x_2=-7. \end{cases}$$

2.16. $$\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=11, \\ x_1+x_2-x_3=-3, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-10. \end{cases}$$

2.17. $$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+4x_3=7, \\ x_1-3x_3=11. \end{cases}$$

2.18. $$\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3=-7, \\ 2x_1+x_2-x_3=-5, \\ 3x_1+5x_2-x_3=38. \end{cases}$$

2.19. $$\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=-4, \\ x_1+x_2+4x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-x_3=14. \end{cases}$$

2.20. $$\begin{cases} x_1-3x_2=-10, \\ 4x_1+3x_3=-7, \\ 5x_1+2x_2-4x_3=38. \end{cases}$$

2.21. $$\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=-13, \\ 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=3. \end{cases}$$

2.22. $$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=7, \\ x_1+x_2-4x_3=-13, \\ x_1+4x_2-x_3=14. \end{cases}$$

2.23. $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-6, \\ 6x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 5x_1+2x_2+5x_3=3. \end{cases}$$

2.24. $$\begin{cases} 5x_1-4x_2+x_3=23, \\ x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=15. \end{cases}$$

2.25. $$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-x_3=-5, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=6. \end{cases}$$

2.26. $$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-3x_3=24, \\ 4x_1-x_2=18. \end{cases}$$

2.27. $$\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=-10, \\ 2x_1+5x_2-4x_3=5, \\ x_1+2x_2-x_3=3. \end{cases}$$

2.28. $$\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=-3, \\ x_1+4x_2-3x_3=2. \end{cases}$$

2.29. $$\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=-20, \\ x_1-x_2=2, \\ 4x_1+x_3=-2. \end{cases}$$

2.30. $$\begin{cases} 6x_1+x_2+x_3=16, \\ x_2-3x_3=14, \\ 3x_1+3x_2-4x_3=31. \end{cases}$$

3. A матрица берилган. A^{-1} тескари матрицани топинг ва $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ эканини текширинг:

3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix} -5 & 7 & -4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

3.8. $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.9. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.11. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

3.14. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

3.16. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3.17. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.18. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3.19. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3.20. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3.21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

3.22. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.23. $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.24. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3.25. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

3.26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.28. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.29. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & 9 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

3.30. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ -3 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

4. Берилган A матрица рангини топинг:

4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 61 \\ 2 & 5 & 1 & -23 \\ 17 & -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 12 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & 7 & 4 & 30 \end{pmatrix}$.

4.6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4.7. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

4.8. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

4.12. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4.14. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.15. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4.17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.18. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.19. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -9 & 0 \end{pmatrix}$.

4.20. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.21. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.22. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.23. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.24. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

4.25. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4.26. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.27. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.28. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.29. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

4.30. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Бир жинсли тенгламалар системасини ечинг:

5.1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ x_1-x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+2x_2+10x_3=0. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 5x_1-14x_2+15x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ x_1-x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+2x_2+10x_3=0. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=0. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=0, \\ x_1+5x_2-6x_3=0. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 4x_1-2x_2-9x_3=0, \\ x_1-2x_2+7x_3=0. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=0, \\ x_1+5x_2-6x_3=0. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+7x_3=0. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=0, \\ 5x_1+3x_2-x_3=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=0, \\ x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1-x_2-7x_3=0. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+3x_2-x_3=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 7x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0, \\ 5x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1-3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2-4x_3=0. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x_1-x_2+6x_3=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2-5x_3=0, \\ x_1-x_2-3x_3=0. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=0, \\ x_1-4x_2+8x_3=0, \\ 2x_1-x_2+6x_3=0. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x_1-3x_2+7x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-x_3=0, \\ 2x_1+7x_2-8x_3=0. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-4x_3=0, \\ x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$

1- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Берилган детерминантни уч усул билан ҳисобланг.

а) уни i- сатр элементлари бўйича ёйиб;

б) уни j- устун элементлари бўйича ёйиб;

в) олдин j- устундаги биттадан бошқа элементларни нолга айлантириб, сўнгра шу устун элементлари бўйича ёйиб.

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$ $i=2,\ j=4.$

1.2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=3.$

1.3. $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$ $i=3,\ j=3.$

1.4. $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2.$

1.5. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$ $i=3,\ j=2.$

1.6. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3.$

1.7. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=1.$

1.8. $$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$i=2,\ j=2.$

1.9. $$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=3.$

1.10. $$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=4.$

1.11. $$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=2.$

1.12. $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=4.$

1.13. $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=1.$

1.14. $$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=1.$

1.15. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=4.$

1.16. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$i=2,\ j=1.$

1.17. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=1.$

1.18. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$i=2,\ j=2.$

1.19. $$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$i=2,\ j=3.$

1.20. $$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=4.$

1.21 $$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -10 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=2.$

1.22 $$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=3.$

1.23. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=2.$

1.24. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=4.$

1.25. $$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$i=3,\ j=2.$

1.26. $$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=4.$

1.27. $$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=3.$

1.28. $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$i=2,\ j=4.$

1.29. $$\begin{vmatrix} 8 & -7 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$i=1,\ j=3.$

1.30. $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$i=4,\ j=1.$

2. A ва B матрицалар берилган.

а) AB ва BA кўпайтмаларни топинг; б) A^{-1} ни топинг ва $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ эканини текширинг:

2.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.6. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.8. $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11. $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.17. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

2.22. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.23. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.25. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.26. $A=\begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.27. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2.28. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.29. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -13 \\ 0 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Берилган тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини текширинг, агар биргаликда бўлса, уларни: а) Крамер қоидасидан фойдаланиб, б) матрица усули, в) Гаусс усули билан ечинг:

3.1. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=11, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=8. \end{cases}$

3.2. а) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2+2x_3=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=7, \\ 2x_1+8x_2+5x_3=15, \\ 3x_1+9x_2+4x_3=10. \end{cases}$

3.3. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+6x_2+3x_3=17, \\ 2x_1+6x_2+5x_3=12, \\ 3x_1+6x_2+4x_3=9. \end{cases}$

3.4. а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=8. \end{cases}$

3.5. а) $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31, \\ 4x_1+11x_3=-43, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-x_2+3x_3=2, \\ -x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+x_3=7. \end{cases}$

3.6. а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-9x_2+2x_3=5, \\ x_1+3x_2-8x_3=3, \\ x_1-3x_2-2x_3=8. \end{cases}$

3.7. а) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-3x_2-x_3=-5, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=17, \\ 4x_1-2x_2+3x_3=8. \end{cases}$

3.8. а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=-7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1-2x_2+2x_3=1, \\ 4x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

3.9. а) $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-7, \\ 3x_1+x_2-x_3=5, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 7x_1+x_3=6. \end{cases}$

3.10. а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=20, \\ 3x_1-x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_1-3x_2-x_3=1, \\ 4x_1-x_2=6. \end{cases}$

3.11. а) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-2, \\ 2x_1-4x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=2, \\ 2x_1+x_2-5x_3=3, \\ 3x_1-2x_2-x_3=8. \end{cases}$

3.12. а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=-6, \\ 5x_1+8x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+5x_2-3x_3=5, \\ 2x_1-x_2+x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=7. \end{cases}$

3.13. а) $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=7, \\ 3x_1+x_2+x_3=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=2, \\ 5x_1-3x_2+3x_3=4, \\ 4x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$

3.14. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=10, \\ 5x_1+2x_2-13x_3=21, \\ 3x_1-x_2+5x_3=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1+3x_2-7x_3=3, \\ x_1-5x_2+5x_3=7. \end{cases}$

3.15. а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-3x_2+x_3=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=3, \\ 4x_1+3x_2+x_3=5, \\ 3x_1+x_2-2x_3=7. \end{cases}$

3.16. а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=-10, \\ 4x_1+11x_3=-29, \\ 7x_1-5x_2=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+2x_2-x_3=3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$

3.17. а) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-x_3=10, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=-14, \\ x_1+2x_2+x_3=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1+4x_2-7x_3=3, \\ 7x_1+x_2-3x_3=2, \\ x_1-3x_2+4x_3=7. \end{cases}$

3.18. а) $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=-6, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-15, \\ x_1+x_2-x_3=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=-3, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=4, \\ x_1-4x_2+x_3=8. \end{cases}$

3.19. а) $\begin{cases} 3x_1\quad 2x_2-5x_3=-14, \\ x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=-2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=4. \end{cases}$

3.20. а) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-x_2-5x_3=4, \\ 3x_1-2x_2-x_3=5, \\ x_1+x_2-4x_3=8. \end{cases}$

3.21. а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=9, \\ 2x_1-3x_2=0, \\ 5x_1-4x_2-2x_3=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3=3, \\ x_1-x_2+3x_3=5. \end{cases}$

3.22. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+x_2-5x_3=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3=2, \\ x_1+3x_2-4x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=9. \end{cases}$

3.23. а) $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=-2, \\ 2x_1+5x_2+x_3=-1, \\ x_1+7x_2-10x_3=-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-3x_2-4x_3=2, \\ 3x_1-x_2-3x_3=6. \end{cases}$

3.24. а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-3x_2-2x_3=6, \\ 4x_1-x_2+4x_3=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_1-3x_2+x_3=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=5. \end{cases}$

3.25. а) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1+x_2+7x_3=-1, \\ x_1+4x_2+3x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_1-3x_2+x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=8. \end{cases}$

3.26. а) $\begin{cases} 7x_1+5x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1+8x_2-6x_3=-13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-3x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=10. \end{cases}$

3.27. а) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=6, \\ 2x_1+5x_2-8x_3=3, \\ x_1+4x_2+x_3=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-4, \\ 2x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1-x_2+4x_3=7. \end{cases}$

3.28. а) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3=23, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-6x_2+4x_3=19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1+2x_2-x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0. \end{cases}$

3.29. а) $\begin{cases} 5x_1+7x_2-3x_3=-12. \\ 3x_1+2x_2+3x_3=5, \\ x_1-x_2=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3=2, \\ 2x_1-2x_2-x_3=3, \\ x_1+5x_2+2x_3=4. \end{cases}$

3.30. а) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-3x_2-x_3=5, \\ 4x_1-x_2-5x_3=-9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+7x_2+10x_3=4, \\ x_1-3x_2+4x_3=5, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=8. \end{cases}$

4. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаларини ечинг:

4.1. а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+4x_2-2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4.2. а) $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+3x_2-4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 4x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$

4.3. а) $\begin{cases} 5x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3=0, \\ x_1-4x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.4. а) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \\ 4x_1-x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1-2x_2+x_3=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4.5. а) $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=0, \\ x_1+8x_2-4x_3=0. \end{cases}$

4.6. а) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 4x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+3x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2+7x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=0. \end{cases}$

4.7. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ 4x_1 \quad x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2-x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.8. а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3=0, \\ 4x_1+x_2+2x_3=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-4x_2+6x_3=0. \end{cases}$

4.9. а) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

4.10. а) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+7x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$

4.11. а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ x_1-2x_2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$

4.12. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+5x_3=0, \\ 4x_1+5x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-6x_2+4x_3=0, \\ x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.13. а) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-7x_2+3x_3=0, \\ x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.14. а) $\begin{cases} 5x_1-4x_2+2x_3=0, \\ 3x_2-2x_3=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+8x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-4x_2+x_3=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

4.15. а) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4.16. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.17. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1-2x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=0. \end{cases}$

4.18. а) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+7x_2-4x_3=0. \end{cases}$

4.19. а) $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1-x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+7x_2-4x_3=0. \end{cases}$

4.20. а) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2-2x_3=0, \\ x_1+8x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$

4.21. а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-4x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ x_1-x_2+4x_3=0, \\ x_1+3x_2-3x_3=0. \end{cases}$

4.22. а) $\begin{cases} 5x_1-7x_2+6x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+7x_2-8x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1-4x_2+5x_3=0. \end{cases}$

4.23. а) $\begin{cases} 6x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

4.24. а) $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-8x_2+5x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2-2x_3=0, \\ x_1-5x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.25. а) $\begin{cases} 6x_1-7x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0, \\ x_1+8x_2-2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=0. \end{cases}$

4.26. а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=0, \\ x_1+6x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+7x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-4x_3=0, \\ x_1-6x_2-x_3=0. \end{cases}$

4.27. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1+x_2-2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4.28. а) $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4.29. а) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-5x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-4x_3=0, \\ x_1-8x_2-5x_3=0. \end{cases}$

4.30. а) $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+7x_3=0, \\ x_1+2x_2+5x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-4x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

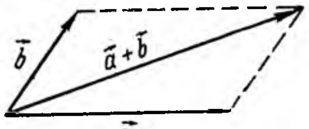
4- §. Векторлар устида чизиқли амаллар. Базис. Базис бўйича ёйиш. Қоординаталар орқали берилган векторлар устида чизиқли амаллар

1.4.1. Боши A нуқтада, охири B нуқтада бўлган йўналтирилган кесма *вектор* деб аталади ва у $\overrightarrow{AB}$ ёки $\vec{a}$ каби белгиланади. $\vec{a}$ векторнинг узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\vec{a}|$ каби белгиланади. Охири боши билан устма-уст тушадиган вектор *ноль-вектор* дейилади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бундай вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг.

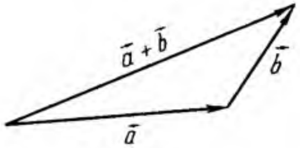
Узунлиги бирга тенг вектор *бирлик вектор* дейилади. $\vec{a}$ векторнинг бирлик вектори $\vec{a}^0$ каби белгиланади.

Бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётувчи векторлар *коллинеар векторлар* дейилади.

Агар икки вектор ўзаро коллинеар, бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлса, бу векторлар *тенг векторлар* дейилади.



2- шакл



3- шакл

Бир текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи векторларни *компланар векторлар* дейилади.

1.4.2. Векторларни қўшиш, айириш ва векторни сонга кўпайтириш амалларини векторлар устида *чизиқли амаллар* дейилади.

$\vec a$ векторнинг λ сонга *кўпайтмаси* деб, $\vec a$ векторга коллинеар, $\lambda>0$ да у билан йўналиши бир хил, $\lambda<0$ да эса йўналиши қарама-қарши ҳамда модули $|\lambda|\cdot|\vec a|$ га тенг бўлган $\lambda\vec a$ (ёки $\vec a\lambda$) векторга айтилади.

$\vec a^0=\frac{\vec a}{|\vec a|}$ бирлик вектор бўлиб, у $\vec a$ билаи бир хил йўналган.

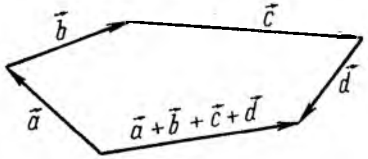
$\vec a$ ва $\vec b$ векторлариинг *йиғиндиси* деб $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар билан компланар бўлган $\vec a+\vec b$ векторга айтилади. Икки векторнинг йиғиидиси параллелограмм (2- шакл) ёки учбурчак (3- шакл) қоидалари бўйича топилади.

Бир нечта векторни қўшиш учбурчак қоидасини кетма-кет қўллаш билан амалга оширилади. Натижада шу векторларга қурилган синиқ чизиқни ёпувчи вектор бир нечта векторларнииг йиғиндиси бўлади (4- шакл).

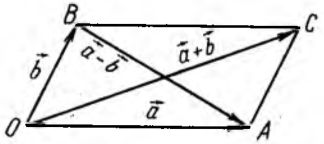
Икки $\vec a$ ва $\vec b$ векторнинг *айирмаси* деб, $\vec b$ векторга қўшилганда $\vec a$ векторни ҳосил қилувчи $\vec a-\vec b$ векторга айтилади (5- шакл).

$\vec a=\overrightarrow{OA}$ ва $\vec b=\overrightarrow{OB}$ векторларга қурилган параллелограммииг OC диагонали $\overrightarrow{OC}=\vec a+\vec b$ га, BA диагонали эса $\overrightarrow{BA}=\vec a-\vec b$ га тенг (6- шакл).

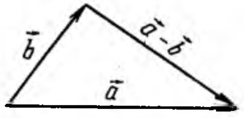
1.4.3. $\vec a=\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқ бўйича *ташкил этувчиси* (компоненти) деб, шу вектор боши ва охирининг проекцияларини бирлаштирувчи $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторга айтилади (7- шакл).



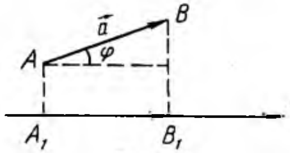
4- шакл



6- шакл



5- шакл



7- шакл

$\vec a=\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги *проекцияси* деб, $\overline{A_1B_1}$ векторнииг йўналиши l ўқ йўналиши билан бир хил ёки бир хил эмаслигига қараб, «+» ёки «—» ишора билаи олинадиган ташкил этувчисининг узунлигига айтилади.

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB}=\pm|\overline{A_1B_1}|.$$

$\vec a$ векторнинг l ўққа проекцияси a_l деб белгиланади, яъни:

$$\text{пр}_l\,\vec a=a_l.$$

Проекцияларнинг асосий хоссалари:

а) $\text{пр}_l\vec a=|\vec a|\cos\varphi$ ёки $a_l=|\vec a|\cos\varphi$.

Бунда φ — $\vec a$ вектор билан ўқ орасидаги бурчак;

б) $\text{пр}_l(\vec a+\vec b)=\text{пр}_l\vec a+\text{пр}_l\vec b$ ёки $\text{пр}_l(\vec a+\vec b)=a_l+b_l$;

в) $\text{пр}_l\lambda\vec a=\lambda\text{пр}_l\vec a$ ёки $\text{пр}_l\lambda\vec a=\lambda a_l$.

1.4.4. $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_n$ векторлариинг чизиқли *комбинацияси* деб

$$\vec a=\lambda_1\vec a_1+\lambda_2\vec a_2+\ldots+\lambda_n\vec a_n$$

формула билан аниқланувчи $\vec a$ векторга айтилади, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — тайин сонлар.

Агар $\vec a_1, \ldots, \vec a_n$ векторлар системаси учун камида биттаси иолдан фарқли шундай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соилар мавжуд бўлиб, $\lambda_1\vec a_1+\ldots+\lambda_n\vec a_n=0$ шарт бажарилса, у система *чизиқли боғлиқ система* дейилади. Агар юқоридаги тенглик фақат $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ бўлганда ўринли бўлса, $\vec a_1, \ldots, \vec a_n$ векторлар системаси *чизиқли эркли* дейилади.

Иккита коллинеар вектор ҳар доим чизиқли боғлиқдир. Шунингдек, учта компланар вектор ҳар доим чизиқли боғлиқ. Фазодаги ихтиёрий тўрт ёки ундан ортиқ векторлар ҳар доим чизиқли боғлиқ.

n та чизиқли боғлиқмас векторлар системаси $\vec e_1, \vec e_2, \ldots, \vec e_n$ берилган бўлиб, агар ихтиёрий $\vec a$ векторни уларнинг чизиқли комбинацияси, яъни

$$\vec a=\lambda_1\vec e_1+\ldots+\lambda_n\vec e_n$$

шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда берилган система *базис* дейилади.

Бу тенглик $\vec a$ векторнинг $\vec e_1, \vec e_2, \ldots, \vec e_n$ базис бўйича *ёйилмаси* дейилади.

Фазода чизиқли боғлиқ бўлмаган ҳар қандай учта $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ вектор базис ташкил қилади, шу сабабли фазодаги ҳар қандай $\vec a$ вектор шу базис бўйича ёйилиши мумкин:

$$\vec a=\lambda_1\vec e_1+\lambda_2\vec e_2+\lambda_3\vec e_3.$$

λ_1, λ_2, λ_3 сонлар $\vec a$ векторнинг берилган базисдаги *координаталари* бўлиб, бундай ёзилади:

$$\vec a = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Агар базиснинг векторлари ўзаро перпендикуляр ва бирлик узунликка эга бўлса, бу базис *ортонормалланган базис* дейилиб, у *ортлар* деб аталувчи $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ векторлар орқали белгиланади.

Агар $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ мос равишда OX, OY, OZ ўқлари бўйича йўналган ортлар бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\vec a$ векторнинг $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ базисдаги ёйилмаси қуйидагича ифодаланади:

$$\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k \text{ ёки } \vec a = \{a_x, a_y, a_z\},$$

бунда a_x, a_y, a_z — $\vec a$ векторнинг координаталари. $\vec a$ вектор узунлиги

$$|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

формула бўйича аниқланади.

$\vec a$ йўналиши унинг координата ўқлари билан ҳосил қилган α, β, γ бурчаклари билан аниқланади.

$\vec a$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

формулалар билан аниқланади ва улар

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

муносабат билан боғланган.

1.4.5. $\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k$ ва $\vec b = b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда

$$\vec a \pm \vec b = (a_x \pm b_x)\vec i + (a_y \pm b_y)\vec j + (a_z \pm b_z)\vec k,$$

$$\lambda\vec a = \lambda a_x\vec i + \lambda a_y\vec i + \lambda a_z\vec k.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлсин. У ҳолда $\overline{M_1M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмаси

$$\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1)\vec i + (y_2-y_1)\vec j + (z_2-z_1)\vec k$$

кўринишида бўлади. M_1 ва M_2 нуқталар орасидаги масофа ёки $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг узунлиги

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

формула билан ҳисобланади.

M_1M_2 кесмани берилган λ нисбатда бўлувчи M нуқтанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Хусусан, агар $\lambda=1$ бўлса, M нуқта M_1M_2 кесманинг ўртасида ётади ва унинг координаталари

$$x = \frac{x_1+x_2}{2};\ y = \frac{y_1+y_2}{2},\ z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

муносабатлардан топилади.

Мисол. $\vec a = \{3;\ 2;\ -5\}$ ва $\vec b = \{2;\ -3;\ 1\}$ векторлар берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) $2\vec a - \vec b$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини;

б) $2\vec a - \vec b$ векторнинг узунлигини;

в) $2\vec a - \vec b$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини.

Ечиш. а) $2\vec a - \vec b = \{2\cdot3-2;\ 2\cdot2-(-3);\ 2\cdot(-5)-1\} = \{4;\ 7;\ 11\}$

б) $|2\vec a - \vec b| = \sqrt{4^2+7^2+(-11)^2} = \sqrt{16+49+121} = \sqrt{186}$.

в) $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{186}},\ \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{186}},\ \cos\gamma = -\frac{11}{\sqrt{186}}$.

4- дарсхона топшириғи

1. Берилган $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар бўйича уларнинг қуйидаги чизиқли комбинацияларини ясанг:

а) $3\vec a$; б) $-\frac{1}{2}\vec b$; в) $2\vec a + \frac{1}{3}\vec b$; г) $\frac{1}{2}\vec a - 3\vec b$.

2. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB} = \vec m$ ва $\overrightarrow{AC} = \vec n$ векторлар берилган. Ушбу векторларни ясанг: а) $\frac{\vec m+\vec n}{2}$; б) $\frac{\vec m-\vec n}{2}$; в) $\frac{\vec n-\vec m}{2}$; г) $-\frac{\vec m+\vec n}{2}$.

3. ABC учбурчакда AB томони P ва N нуқталар билан учта тенг қисмга бўлинган: $|AP| = |PN| = |NB|$. Агар $\overrightarrow{CA} = \vec a$, $\overrightarrow{CB} = \vec b$ бўлса, $\overrightarrow{CP}$ векторни топинг.

Ж: $\overrightarrow{CP} = (2\vec a + \vec b)/3$.

4. Иккита $\vec a=\{-1,\ 2,\ 3\}$ ва $\vec b=\{2,\ -4,\ 5\}$ вектор берилган. Қуйидаги векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини топинг:

а) $2\vec a+\vec b$; б) $\vec a-3\vec b$; в) $3\vec a+5\vec b$.

Ж: а) $\{0,\ 0,\ 11\}$; б) $\{-7,\ 14,\ -12\}$; в) $\{7,\ -14,\ 34\}$.

5. $\vec a=\{2,\ 3,\ 6\}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Ж: $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

6. $\vec a=\{2,\ -3,\ 6\}$ ва $\vec b=\{-1,\ 2,\ -2\}$ векторлар ҳосил қилган бурчак биссектриссаси бўйича йўналган $\vec e$ бирлик векторнинг координаталарини топинг.

Ж: $\vec e=\left\{-\frac{1}{\sqrt{42}},\ \frac{5}{\sqrt{42}},\ -\frac{4}{\sqrt{42}}\right\}$.

4- мустақил иш

1. $\vec a=\{8,\ -5,\ 3\}$ ва $\vec b=\{-4,\ 1,\ -1\}$ векторларга қурилган параллелограмм диагоналлари узунликларини топинг.

Ж: $|\vec a+\vec b|=6$; $|\vec a-\vec b|=14$.

2. $A(1,\ 2,\ 3)$ ва $B\ (3,\ -4,\ 6)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ вектор узунлигини ва йўналишини топинг.

Ж: $|\overrightarrow{AB}|=7$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{3}{7}$.

3 $\vec a=\{3,\ 4,\ -12\}$ векторнинг ортини топинг.

Ж: $\vec a=\left\{\frac{3}{13},\ \frac{4}{13},\ -\frac{12}{13}\right\}$.

4. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB}=\{2,\ 6,\ -4\}$ ва $\overrightarrow{AC}=\{4,\ 2,\ -2\}$ векторлар берилган. C учидан ўтказилган медиана билан устма-уст тушувчи $\overrightarrow{CD}$ вектор узунлигини топинг.

Ж: $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$.

5- §. Скаляр кўпайтма. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак

1.5.1. Иккита $\vec a$ ва $\vec b$ векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, $\vec a\cdot\vec b$ кўринишида белгиланувчи ва шу векторлар узунликлари кўпайтмасининг улар орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига тенг бўлган сонга айтилади:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi.$$

Скаляр кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$ (ўрин алмаштириш қонуни);

б) $\vec a\cdot(\vec b+\vec c)=\vec a\vec b+\vec a\vec c$ (тақсимот қонуни);

в) $(\lambda\vec a)\cdot\vec b=\vec a(\lambda\vec b)=\lambda(\vec a\cdot\vec b)$ (гуруҳлаш қонуни);

г) агар $\vec a=\vec 0$, ёки $\vec b=\vec 0$, ёки $\vec a\perp\vec b$ бўлса, $\vec a\cdot\vec b=0$ (иолга тенг бўлмаган векторларининг ортогоналлик шарти);

д) $\vec a\cdot\vec a=|\vec a|^2$ ёки $\vec a^2=|\vec a|^2$;

е) $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot \text{пр}_{\vec a}\vec b=|\vec b|\,\text{пр}_{\vec b}\vec a$.

1.5.2. Координата ўқлари ортларинииг скаляр кўпайтмаси: $\vec i^2=1$, $\vec j^2=1$, $\vec k^2=1$, $\vec i\cdot\vec j=0$, $\vec i\cdot\vec k=0$, $\vec j\cdot\vec k=0$. $\vec a=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k$ ва $\vec b=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда:

$$\vec a\cdot\vec b=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_zb_z;$$

$$\vec a^2=|\vec a|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2.$$

$\vec a$ ва $\vec b$ векторлар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

$\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг перпендикулярлик шарти:

$\vec a\cdot\vec b=0$ ёки $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

1.5.3. $\vec F$ куч жисмни $\vec l$ вектор йўналишда $\overrightarrow{BC}$ масофага кўчириш натижасида бажарган иш ушбу формула билан ҳисобланади:

$$A=\vec F\cdot\overrightarrow{BC}=|\vec F|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\varphi,$$

бунда φ — кўчиш йўналиши $\vec l$ ва $\vec F$ кучнинг таъсир чизиғи орасидаги бурчак.

Мисол. Агар $|\vec a|=2$, $|\vec b|=3$ бўлиб, улар ўзаро 60° ли бурчак ташкил этса, $2\vec a-\vec b$ ва $2\vec a+3\vec b$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $(2\vec a-\vec b)\cdot(2\vec a+3\vec b)=2\vec a\cdot2\vec a+2\vec a\cdot3\vec b-\vec b\cdot2\vec a-\vec b\cdot3\vec b=$ $=4\vec a\cdot\vec a+6\vec a\cdot\vec b-2\vec a\cdot\vec b-3\vec b\cdot\vec b=4\vec a\cdot\vec a+4\vec a\cdot\vec b-3\vec b\cdot\vec b=4|\vec a|\cdot|\vec a|+$ $+4|\vec a|\cdot|\vec b|\cos60^\circ-3|\vec b|\cdot|\vec b|=4\cdot2\cdot2+4\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}-3\cdot3\cdot3=16+$ $+12-27=1$.

5- дарсхона топшириғи

1. Агар $|\vec a|=3$, $|\vec b|=4$ бўлиб, $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $\vec a\cdot\vec b$; б) $\vec a^2$; в) $\vec b^2$; г) $(\vec a+\vec b)^2$; д) $(\vec a-\vec b)^2$;

е) $(3\vec a-2\vec b)\cdot(\vec a+2\vec b)$.

Ж: а) -6; б) 9; в) 16; г) 13; д) 37; е) -61.

2. Агар $\vec{OA} = \vec{a}$ ва $\vec{OB} = \vec{b}$ векторлар ўзаро $\varphi = 60°$ ли бурчак ҳосил қилиб, $|\vec{a}| = 2$ ва $|\vec{b}| = 4$ бўлса, AOB учбурчакнинг $\vec{OM}$ медианаси билан $\vec{OA}$ томони орасидаги θ бурчакни топинг.

Ж: $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\theta \approx 41°$.

3. $\vec{a} = \{m, 3, 4\}$ ва $\vec{b} = \{4, m, -7\}$ векторлар берилган. m нинг қандай қийматида бу векторлар перпендикуляр бўлади?

Ж: $m = 4$.

4. Учбурчакнинг учлари берилган:

$A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

Учбурчакнинг B учидаги ташқи бурчакни ҳисобланг.

Ж: $\frac{3\pi}{4}$.

5. $\vec{F} = \{3, -2, -5\}$ кучнинг қўйилиш нуқтаси тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилиб, $M_1(2, -3, 5)$ ҳолатдан $M_2(3, -2, -1)$ ҳолатга ўтади. Бу кўчишда $\vec{F}$ куч бажарган ишни ҳисобланг.

Ж: $A = 31$ иш бирл.

5- мустақил иш

1. Тўртбурчакнинг учлари берилган:

$A\ (1, -2, 2)$, $B\ (1, 4, 0)$, $C\ (-4, 1, 1)$, $D\ (-5, -5, 3)$. Шу тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

2. $A\ (-2, 3, -4)$, $B\ (3, 2, 5)$, $C\ (1, -1, 2)$, $D\ (3, 2, -4)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ векторнинг $\overline{CD}$ вектордаги проекциясини ҳисобланг.

Ж: $-6\frac{5}{7}$.

3. Учбурчакнинг учлари берилган:

$A\ (1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C\ (7, 4, -2)$.

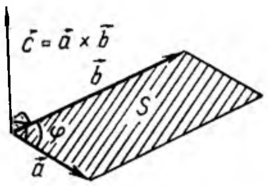
Унинг ички бурчакларини ҳисобланг.

6- §. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари

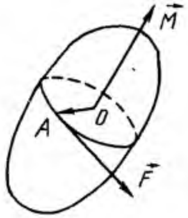
1.6.1. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга *вектор кўпайтмаси* деб $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ кўринишда белгиланувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\vec{c}$ векторга айтилади:

а) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр;

б) $\vec{c}$ вектор учидан қаралганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга энг қисқа бурилиш соат мили йўналишига тескари йўналишда



8- шакл



9- шакл

кузатилади ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг бундай жойлашувини ўнг учлик дейилади);

в) $\vec{c}$ векторнинг модули $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзига тенг, яъни $|\vec{c}| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (φ — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак) (8- шакл).

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

б) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

в) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

г) Агар $\vec{a} = \vec{0}$, ёки $\vec{b} = \vec{0}$, ёки $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Хусусан $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

1.6.2. Координата ўқлари ортларининг вектор кўпайтмаси:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0},\ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0},\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Агар

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

1.6.3. Жисм A нуқтасига қўйилган $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан $\vec{M}$ моменти (9- шакл)

$$\vec{M} = \overline{OA} \times \vec{F}$$

формула билан ҳисобланади.

10-мисол. $\vec a=2\vec i-3\vec j$ ва $\vec b=3\vec i+4\vec k$ векторларга қурилган параллелограммнинг юзини топинг.

Ечиш. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзи шу векторлар вектор кўпайтмасининг модулига тенг: $S=|\vec a\times\vec b|$. Вектор кўпайтмани топамиз:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{vmatrix}=-12\vec i-8\vec j+9\vec k.$$

Демак, $S=\sqrt{(-12)^2+(-8)^2+9^2}=\sqrt{144+64+81}=17$ кв. бирлик.

1.6.4. $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* деб $(\vec a\times\vec b)$ векторнинг $\vec c$ векторга скаляр кўпайтмасига айтилади.

Аралаш кўпайтманинг хоссалари:

а) $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)$.

Бу хоссадан аралаш кўпайтмани $\vec a\vec b\vec c$ кўринишда белгилаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

б) $\vec a\vec b\vec c=\vec b\vec c\vec a=\vec c\vec a\vec b$, яъни кўпайтирилувчи векторлар ўринлари доиравий алмаштирилганда аралаш кўпайтма қиймати ўзгармайди;

в) $\vec a\vec b\vec c=-\vec b\vec a\vec c$, $\quad\vec a\vec b\vec c=-\vec c\vec b\vec a$, $\quad\vec a\vec b\vec c=-\vec a\vec c\vec b$,

яъни қўшни иккита векторларнинг ўринлари алмаштирилганда аралаш кўпайтма ишорасини ўзгартиради;

г) агар векторлардан ақалли биттаси ноль вектор ёки $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда $\vec a\vec b\vec c=0$ бўлади.

1.6.5. Агар

$$\vec a=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k,$$
$$\vec b=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k,$$
$$\vec c=c_x\vec i+c_y\vec j+c_z\vec k$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec a\vec b\vec c=\begin{vmatrix}a_x\,a_y\,a_z\\ b_x\,b_y\,b_z\\ c_x\,c_y\,c_z\end{vmatrix}.$$

Агар $\vec a\vec b\vec c$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix}a_x\,a_y\,a_z\\ b_x\,b_y\,b_z\\ c_x\,c_y\,c_z\end{vmatrix}=0.$$

1.6.6. Аралаш кўпайтма кўпайтирилувчи векторларга қурилган параллелопипед ҳажмига ишора аниқлигида тенг, яъни $V=\pm\vec a\vec b\vec c$.

Мисол. Учлари A (1, 2, 0), B (—1, 2, 1); C (0; —3; 2) ва D (1, 0, 1) нуқталарда бўлган пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Пирамиданинг A учидан чиққан қирраларига мос келувчи векторларни топамиз:

$$\overrightarrow{AB}=\{-2;0;1),\quad\overrightarrow{AC}=\{-1;-5;2\},\quad\overrightarrow{AD}=\{0;-2;\ 1\}.$$

Пирамиданинг ҳажми шу векторларга қурилган параллелопипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлганлиги сабабли

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot4=\frac{2}{3}\text{ куб бирлик.}$$

6-дарсхона топшириғи

1. $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, $|\vec a|=3$ ва $|\vec b|=4$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $|(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)|$; $\quad$ б) $|(3\vec a-\vec b)\times(\vec a-2\vec b)|$.

Ж: а) 24; б) 60.

2. $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар ўзаро $\varphi=45°$ ли бурчак ташкил қилиб, $|\vec a|=|\vec b|=5$ бўлса, $\vec p=\vec a-2\vec b$ ва $\vec q=3\vec a+2\vec b$ векторларга қурилган учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: $50\sqrt{2}$ кв. бирлик.

3. A (2, —1, 2), B (1, 2, —1), C (3, 2, 1) нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ ни ҳисобланг.

Ж: {6, —4, —6}.

4. Учлари A(7, 3, 4), B(1, 0, 6), C(4, 5, —2) нуқталардан иборат учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: 24,5. кв. бирлик.

5. A (1, 2, —1), B (0, 1, 5), C (—1, 2, 1), D (2, 1, 3) нуқталар бир текисликда ётадими?

6. Қуйидаги векторлар компланарми:

а) $\vec a=\{-1,3,2\}$, $\vec b=\{2,-3,-4\}$, $\vec c=\{-3,12,6\}$;

б) $\vec a=\{3,-2,1\}$, $\vec b=\{2,1,2\}$, $\vec c=\{3,-1,-2\}$?

Ж: а) комиланар; б) нокомпланар.

7. $\vec a=\{3,4,0\}$, $\vec b=\{0,-4,1\}$, $\vec c=\{0,2,5\}$ векторлар қандай учлик ташкил этади?

Ж: чап учлик.

8. Пирамиданинг учлари берилган:
A (2, 3, 1), B (4, 1, —2), C (6, 3, 7), D (—5, —4, 8).

Учбурчакнинг D учидан туширилган баландлиги узунлигини топинг.

Ж: 11 узун. бирл.

6- мустақил иш

1. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ни ҳисобланг.

Ж: ± 30.

2. Учбурчакнинг учлари берилган:
$A\ (1,\ -1,\ 2)$, $B\ (5,\ -6,\ 2)$, $C\ (1,\ 3,\ -1)$.
Унинг B учидан AC томонига туширилган баландлигининг узунлигини ҳисобланг.

Ж: 5 узун. бирл.

3. $A\ (4,\ 2,\ -3)$ нуқтага қўйилган $\vec{F}=\{2,\ -4,\ 5\}$ кучнинг $B(3,\ 2,\ -1)$ нуқтага нисбатан куч моментини топинг.

Ж: $\vec{M}=\{-4,\ 3,\ 4\}$.

4. Учлари $A\ (2,\ -1,\ 1)$, $B\ (5,\ 5,\ 4)$, $C\ (3,\ 2,\ -1)$, $D\ (4,\ 1,\ 3)$ нуқталарда бўлган пирамида ҳажмини ҳисобланг.

Ж: 3 куб бирл.

2- назорат иши

1. $ABCD$ параллелограммда P ва N нуқталар BC ва CD томонларнинг ўрталаридир. $\overrightarrow{AP}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$ эканлиги маълум бўлса, векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ифодаланг:

1.1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.
1.2. $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{DN}$.
1.3. $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.4. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.5. $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.6. $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.7. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.8. $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.9. $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NC}$.
1.10. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.11. $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.12. $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{PC}$.
1.13. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.14. $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.15. $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.16. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.
1.17. $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{BN}$.
1.18. $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.19. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.20. $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AB}$.
1.21. $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AC}$.
1.22. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$.
1.23. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DN}$.
1.24. $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{BC}$.
1.25. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.26. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DN}$.
1.27. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NB}$.
1.28. $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$.
1.29. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BP}$.
1.30. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}$.

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлар берилган. а) $\vec{d}$ векторнинг $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар орқали ёйилмасини, б) $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ векторнинг $\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}$ вектор йўналишидаги проекциясини топинг:

2.1. $\vec{a}=\{3,\ 2,\ -4\}$, $\vec{b}=\{-2,\ -7,\ 1\}$,
$\vec{c}=\{6,\ 20,\ -3\}$, $\vec{d}=\{-1,\ 4,\ 3\}$;
$\alpha=4$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$, $\delta=6$.

2.2. $\vec{a}=\{14,\ 9,\ -1\}$, $\vec{b}=\{5,\ 7,\ -2\}$,
$\vec{c}=\{-3,\ 1,\ 3\}$, $\vec{d}=\{1,\ -4,\ 6\}$;
$\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=-4$, $\delta=-2$.

2.3. $\vec{a}=\{1,\ -3,\ 1\}$, $\vec{b}=\{-2,\ -4,\ 3\}$,
$\vec{c}=\{0,\ -2,\ 3\}$, $\vec{d}=\{-8,\ -10,\ 13\}$;
$\alpha=6$, $\beta=-7$, $\gamma=-1$, $\delta=-3$.

2.4. $\vec{a}=\{-3,\ -6,\ 7\}$, $\vec{b}=\{1,\ 3,\ 1\}$,
$\vec{c}=\{4,\ 5,\ 1\}$, $\vec{d}=\{7,\ 3,\ 8\}$;
$\alpha=-3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, $\delta=-6$.

2.5. $\vec{a}=\{4,\ -5,\ -1\}$, $\vec{b}=\{-2,\ 4,\ 1\}$,
$\vec{c}=\{3,\ -1,\ 2\}$, $\vec{d}=\{1,\ -11,\ -9\}$;
$\alpha=-3$; $\beta=5$, $\gamma=1$, $\delta=7$.

2.6. $\vec{a}=\{2,\ 3,\ 4\}$, $\vec{b}=\{-4,\ 3,\ -1\}$.
$\vec{c}=\{3,\ 1,\ 2\}$, $\vec{d}=\{4,\ 4,\ 9\}$;
$\alpha=5$, $\beta=-8$, $\gamma=-2$, $\delta=3$.

2.7. $\vec{a}=\{4,\ -3,\ 2\}$, $\vec{b}=\{3,\ 2,\ -7\}$,
$\vec{c}=\{-2,\ 5,\ 1\}$, $\vec{d}=\{-4,\ 22,\ -13\}$;
$\alpha=-5$, $\beta=-7$, $\gamma=-3$, $\delta=2$.

2.8. $\vec{a}=\{-6,\ 4,\ 5\}$, $\vec{b}=\{-5,\ 3,\ -1\}$,
$\vec{c}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\vec{d}=\{3,\ -9,\ 2\}$;
$\alpha=2$, $\beta=-6$, $\gamma=4$, $\delta=5$.

2.9. $\vec{a}=\{-4,\ 3,\ -4\}$, $\vec{b}=\{3,\ -5,\ 6\}$,
$\vec{c}=\{7,\ 2,\ 1\}$, $\vec{d}=\{-9,\ -16,\ 12\}$;
$\alpha=6$, $\beta=4$, $\gamma=2$, $\delta=-7$.

2.10. $\vec{a}=\{4,\ -7,\ 4\}$, $\vec{b}=\{-3,\ 2,\ 1\}$,
$\vec{c}=\{9,\ 5,\ 3\}$, $\vec{d}=\{10,\ 13,\ -8\}$.
$\alpha=7$, $\beta=2$, $\gamma=-6$, $\delta=-5$.

2.11. $\vec{a}=\{-4,\ -2,\ 7\}$, $\vec{b}=\{-3,\ 3,\ 4\}$,
$\vec{c}=\{-1,\ 1,\ 2\}$, $\vec{d}=\{2,\ -14,\ 0\}$;
$\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=-5$, $\delta=3$.

2.12. $\vec{a}=\{-7,\ 4,\ -3\}$, $\vec{b}=\{2,\ -5,\ 1\}$,
$\vec{c}=\{5,\ 3,\ 2\}$, $\vec{d}=\{3,\ 12,\ 1\}$;
$\alpha=3$, $\beta=-1$, $\gamma=-5$, $\delta=4$.

2.13. $\vec{a}=\{6,\ -2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{-2,\ 7,\ -5\}$,
$\vec{c}=\{3,\ 5,\ 4\}$, $\vec{d}=\{-5,\ 26,\ 5\}$;
$\alpha=6$, $\beta=2$, $\gamma=-3$, $\delta=7$.

2.14. $\vec{a}=\{-3, 4, 5\}$, $\vec{b}=\{5, 1, -2\}$,
$\vec{c}=\{7, 2, 1\}$, $\vec{d}=\{10, 17, 15\}$;
$\alpha=5$, $\beta=-2$, $\gamma=3$, $\delta=4$.

2.15. $\vec{a}=\{1, 7, 2\}$, $\vec{b}=\{-3, 4, -5\}$,
$\vec{c}=\{1, 3, 6\}$, $\vec{d}=\{-8, -10, -10\}$;
$\alpha=4$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=-5$.

2.16. $\vec{a}=\{-5, -3, -1\}$, $\vec{b}=\{3, -6, 2\}$,
$\vec{c}=\{-2, 1, 3\}$, $\vec{d}=\{7, 22, 2\}$;
$\alpha=2$, $\beta=5$, $\gamma=-3$, $\delta=4$.

2.17. $\vec{a}=\{2, -4, 5\}$, $\vec{b}=\{-3, 1, -8\}$,
$\vec{c}=\{4, 2, 3\}$, $\vec{d}=\{5, 15, -1\}$,
$\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=-3$, $\delta=2$.

2.18. $\vec{a}=\{-1, -3, 4\}$, $\vec{b}=\{-3, 2, 1\}$,
$\vec{c}=\{6, 1, -3\}$, $\vec{d}=\{-3, -19, 14\}$;
$\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=3$, $\delta=4$.

2.19. $\vec{a}=\{1, -2, 5\}$, $\vec{b}=\{-2, 4, 1\}$,
$\vec{c}=\{3, 1, -3\}$, $\vec{d}=\{11, 6, 5\}$;
$\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=-4$, $\delta=-2$.

2.20. $\vec{a}=\{3, -4, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, 2, -3\}$,
$\vec{c}=\{5, 3, 1\}$, $\vec{d}=\{11, 26, -9\}$;
$\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=-3$, $\delta=6$.

2.21. $\vec{a}=\{4, -5, -3\}$, $\vec{b}=\{-2, 3, 1\}$,
$\vec{c}=\{3, -1, 2\}$, $\vec{d}=\{26, -23, -1\}$;
$\alpha=2$, $\beta=4$, $\gamma=-3$, $\delta=5$.

2.22. $\vec{a}=\{-5, -4, 0\}$, $\vec{b}=\{4, -3, -2\}$,
$\vec{c}=\{0, 2, -3\}$, $\vec{d}=\{6, -14, -17\}$;
$\alpha=5$, $\beta=1$, $\gamma=-2$, $\delta=-3$.

2.23. $\vec{a}=\{4, -3, 5\}$, $\vec{b}=\{-2, 1, -3\}$,
$\vec{c}=\{6, 1, 2\}$, $\vec{d}=\{-6, 11, -12\}$;
$\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=1$, $\delta=-4$.

2.24. $\vec{a}=\{-4, 3, 5\}$, $\vec{b}=\{2, 7, -3\}$,
$\vec{c}=\{-3, 0, 1\}$, $\vec{d}=\{-7, 37, 4\}$;
$\alpha=-2$, $\beta=-4$, $\gamma=2$, $\delta=3$.

2.25. $\vec{a}=\{-4, 0, 3\}$, $\vec{b}=\{-7, -2, -4\}$,
$\vec{c}=\{3, 1, 2\}$, $\vec{d}=\{0, 5, 22\}$;
$\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=-3$, $\delta=4$.

2.26. $\vec{a}=\{2, -1, 0\}$, $\vec{b}=\{-5, -3, 4\}$,
$\vec{c}=\{1, -1, 1\}$, $\vec{d}=\{-3, -2, -3\}$;
$\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=-4$, $\delta=5$.

2.27. $\vec{a}=\{3, -2, -4\}$, $\vec{b}=\{-2, 5, 0\}$,
$\vec{c}=\{1, 3, 4\}$, $\vec{d}=\{7, 10, -12\}$;
$\alpha=-4$, $\beta=-6$, $\gamma=2$, $\delta=5$.

2.28. $\vec{a}=\{-6, 3, -1\}$, $\vec{b}=\{2, -3, -5\}$,
$\vec{c}=\{1, 1, 2\}$, $\vec{d}=\{-1, -5, -15\}$;
$\alpha=-1$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$, $\delta=5$.

2.29. $\vec{a}=\{4, 5, -3\}$, $\vec{b}=\{-3, 0, -2\}$,
$\vec{c}=\{2, -1, 4\}$, $\vec{d}=\{3, 1, 7\}$;
$\alpha=-1$, $\beta=4$, $\gamma=3$, $\delta=-2$.

2.30. $\vec{a}=\{2, -1, 3\}$, $\vec{b}=\{-3, 5, 2\}$,
$\vec{c}=\{5, 4, 1\}$, $\vec{d}=\{-10, -11, 11\}$;
$\alpha=6$, $\beta=3$, $\gamma=-4$, $\delta=-5$.

3. $ABCD$ пирамиданинг учлари берилган.

а) Пирамиданинг берилган қирралари орасидаги бурчак косинусини топинг;

б) пирамиданинг берилган ёғи юзини топинг:

3.1. $A\ (6, -4, 1)$, $B\ (6, 3, -1)$, $C\ (2, 5, 7)$, $D\ (-4, -2, 3)$;
а) AB ва AC; б) DBC.

3.2. $A\ (6, 4, -7)$, $B\ (5, 7, -4)$, $C\ (-5, -4, 2)$, $D\ (4, 2, 3)$;
а) BC ва BD; б) ACD.

3.3. $A\ (-2, 8, 7)$, $B\ (6, -2, -3)$, $C\ (8, 2, -3)$, $D\ (3, 5, 3)$;
а) CA ва CD; б) BAD.

3.4. $A\ (4, 4, 3)$, $B\ (2, -4, 5)$, $C\ (-1, 3\ -4)$, $D\ (4, -7, -9)$;
а) DA ва DB; б) ABC.

3.5. $A\ (-5, -3, 2)$, $B\ (4, -2, -4)$, $C\ (5, 7, 2)$, $D\ (1, 3, 4)$;
а) AB ва AD; б) CBD.

3.6. $A\ (-5, 6, 4)$, $B\ (-6, 2, 4)$, $C\ (9, -5, 3)$, $D\ (7, 2, -8)$;
а) BC ва BA; б) DAC.

3.7. $A\ (1, -9, 7)$, $B\ (3, -5, 1)$, $C\ (-9, 3, -5)$, $D\ (2, 4, 7)$;
а) CB ва CD; б) ABD.

3.8. $A\ (4, -2, 9)$, $B\ (3, 5, -1)$, $C\ (5, 1, 7)$, $D\ (-6, -3, 5)$;
а) DA ва DC; б) ABC.

3.9. $A\ (4, 1, 2)$, $B\ (1, -5, 4)$, $C\ (9, -7, -6)$, $D\ (-1, -5, -2)$;
а) AC ва AD; б) BCD.

3.10. $A\ (2, -5, 1)$, $B\ (3, -6, -7)$, $C\ (-9, -6, 7)$, $D\ (7, 2, 5)$;
а) BD ва BA; б) CAD.

3.11. $A\ (2, -5, -3)$, $B\ (9, 7, 3)$, $C\ (8, 7, 1)$, $D\ (-2, -1, 7)$;
а) CA ва CB; б) ABD.

3.12. $A\ (-7, 4, 3)$, $B\ (0, -4, 8)$, $C\ (-3, 1, 5)$, $D\ (-5, -6, -7)$;
а) DB ва DC; б) ABC.

3.13. $A\ (-9, 2, 6)$, $B\ (-7, 2, 3)$, $C\ (5, -6, -4)$, $D\ (4, -4, 5)$;
а) AB ва AC; б) DBC.

3.14. $A\ (-3, 0, 4)$, $B\ (8, -6, 5)$, $C\ (4, -4, -3)$, $D\ (6, 3, 5)$;
а) BC ва BD; б) ACD.

3.15. $A\ (-3, 8, 2)$, $B\ (-8, 2, 4)$, $C\ (3, -7, 5)$, $D\ (5, 4, -6)$;
а) CA ва CD; б) BCD.

3.16. $A\ (5, -3, 9)$, $B\ (8, -5, 1)$, $C\ (-7, 5, -3)$, $D\ (4, 2, 5)$;
а) DA ва DC; б) BAC.

3.17. $A\ (5, -1, 6)$, $B\ (-6, 7, 5)$, $C\ (2, 1, 3)$, $D\ (-3, -5, -4)$;
а) AC ва AD; б) BCD.

3.18. $A\ (1, 2, 3)$, $B\ (3, -3, 2)$, $C\ (7, -5, 4)$, $D\ (-3, -7, -4)$;
а) BD ва BA; б) CAD.

3.19. $A\ (4, -3, 1)$, $B\ (0, -3, -5)$, $C\ (-3, -2, 1)$, $D\ (9, 4, 7)$;
а) CA ва CB; б) ABD.

3.20. $A\ (5, -4, -2)$, $B\ (7, 5, 1)$, $C\ (3, 2, -4)$, $D\ (-2, -5, 3)$;
а) DB ва DC; б) ABC.

3.21. $A\ (-7, 2, 3)$, $B\ (0, -2, 6)$, $C\ (-1, 3, 7)$, $D\ (-3, -4, -5)$;
а) AB ва AD; б) CBD.

3.22. $A\ (-7, 6, 4)$, $B\ (-4, 1, 1)$, $C\ (3, -2, -6)$, $D\ (6, -2, 3)$;
а) BC ва BA; б) ACD.

3.23. $A\ (-4, 1, 5)$, $B\ (5, -3, 2)$, $C\ (3, -5, -4)$, $D\ (8, 5, 7)$;
а) DA ва DC; б) ABD.

3.24. $A\ (-5, 4, 2)$, $B\ (-4, 6, 2)$, $C\ (1, -5, 3)$, $D)\ (3, 6, -4)$;
а) DA ва DC; б) BAC.

3.25. $A\ (3, -5, 6)$, $B\ (6, -3, 4)$, $C\ (-5, 3, -2)$, $D\ (2, 4, 3)$;
а) AB ва AC; б) DBC.

3.26. $A\ (4, -2, 8)$, $B\ (-2, 2, 3)$, $C\ (6, 4, 1)$, $D\ (-4, -3, -5)$;
а) BC ва BD; б) ACD.

3.27. $A\ (-3, 2, 4)$, $B\ (-2, 5, 3)$, $C\ (4, -2, -3)$, $D\ (1, 4, 2)$;
а) CA ва CD; б) BAD.

3.28. $A\ (-4, 4, 3)$, $B\ (4, -3, -2)$, $C\ (6, 4, -1)$, $D\ (1, 3, 1)$;
а) DA ва DB; б) CAB.

3.29. $A\ (2, 2, 1)$, $B\ (4, -2, 3)$, $C\ (-3, 5, -2)$, $D\ (6, 5, -7)$;
а) AC ва AD; б) BCD.

3.30. $A\ (-3, -6, 3)$, $B\ (6, -3, -2)$, $C\ (1, 2, 1)$, $D\ (5, 4, 3)$;
а) BD ва BA; б) CAD.

2- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар базис ҳосил қилишини текширинг. $\vec d$ векторнинг шу базисдаги ёйилмасини топинг:

1.1. $\vec a=\{0, 3, 1\}$, $\vec b=\{1, -2, 0\}$, $\vec c=\{1, 0, 1\}$, $\vec d=\{2, 7, 5\}$.
1.2. $\vec a=\{-1, 0, 1\}$, $\vec b=\{3, -1, 2\}$, $\vec c=\{0, 1, 5\}$, $\vec d=\{8, -7, -13\}$.
1.3. $\vec a=\{4, 0, 1\}$, $\vec b=\{3, 1, -1\}$, $\vec c=\{0, -2, 1\}$, $\vec d=\{0, -8, 9\}$.

1.4. $\vec a=\{1, 2, -1\}$, $\vec b=\{-3, 0, 2\}$, $\vec c=\{1, 1, 4\}$, $\vec d=\{-13, 2, 18\}$.
1.5. $\vec a=\{-1, 1, 1\}$, $\vec b=\{3, 2, 0\}$, $\vec c=\{1, -1, 2\}$, $\vec d=\{11, -1, -4\}$.
1.6. $\vec a=\{2, -1, 0\}$, $\vec b=\{1, -1, 2\}$, $\vec c=\{0, 3, 1\}$, $\vec d=\{-1, 7, 0\}$.
1.7. $\vec a=\{4, 2, 1\}$, $\vec b=\{1, 0, 1\}$, $\vec c=\{2, 1, 0\}$, $\vec d=\{3, 1, 3\}$.
1.8. $\vec a=\{-3. 2, 5\}$, $\vec b=\{1, -1, 0\}$, $\vec c=\{2, 1, 0\}$, $\vec d=\{-9, 3, 15\}$.
1.9. $\vec a=\{1, 3, 0\}$, $\vec b=\{0, -2, 1\}$, $\vec c=\{1, 0, 1\}$, $\vec d=\{8, 9, 4\}$.
1.10. $\vec a=\{-1, 1, 0\}$, $\vec b=\{3, 2, -1\}$, $\vec c=\{0, 5, 1\}$, $\vec d=\{5, 0, -3\}$.
1.11. $\vec a=\{4, 1, 0\}$, $\vec b=\{3, -1, 1\}$, $\vec c=\{0, 1, -2\}$, $\vec d=\{1, -4, 1\}$.
1.12. $\vec a=\{1, -1, 2\}$, $\vec b=\{-3, 2, 0\}$, $\vec c=\{1, 2, -1\}$, $\vec d=\{8, 8, 7\}$.
1.13. $\vec a=\{-1, 1, 1\}$, $\vec b=\{3, 0, 2\}$, $\vec c=\{1, 2, -1\}$, $\vec d=\{8, -5, 7\}$.
1.14. $\vec a=\{2, 0, -1\}$, $\vec b=\{1, 2, -1\}$, $\vec c=\{0, 1, 3\}$, $\vec d=\{5, -4, 5\}$.
1.15. $\vec a=\{4, 1, 2\}$, $\vec b=\{1, 1, 0\}$, $\vec c=\{2, 0, 1\}$, $\vec d=\{3, 5, 0\}$.
1.16. $\vec a=\{2, 5, -3\}$, $\vec b=\{-1, 0, 1\}$, $\vec c=\{1, 0, 2\}$, $\vec d=\{-3, -5, 7\}$.
1.17. $\vec a=\{1, 0, 3\}$, $\vec b=\{0, 1, -2\}$, $\vec c=\{1, 1, 0\}$, $\vec d=\{7, -1, 19\}$.
1.18. $\vec a=\{0, -1, 1\}$, $\vec b=\{-1, 3, 2\}$, $\vec c=\{1, 0, 5\}$, $\vec d=\{5, -15, 0\}$.
1.19. $\vec a=\{1, 0, 4\}$, $\vec b=\{-1, 1, 3\}$, $\vec c=\{1, -2, 0\}$, $\vec d=\{-6, 2, 0\}$.
1.20. $\vec a=\{2, 1, -1\}$, $\vec b=\{0, -3, 2\}$, $\vec c=\{1, 1, 4\}$, $\vec d=\{-6, -14, -9\}$.
1.21. $\vec a=\{1, 0, 4\}$, $\vec b=\{-1, 1, 3\}$, $\vec c=\{1, -2, 0\}$, $\vec d=\{0, 7, 29\}$.
1.22. $\vec a=\{2, 1, -1\}$, $\vec b=\{0, -3, 2\}$, $\vec c=\{1, 1, 4\}$, $\vec d=\{4, -9, -14\}$.
1.23. $\vec a=\{2, 0, 3\}$, $\vec b=\{1, 1, -1\}$, $\vec c=\{-1, 2, 1\}$, $\vec d=\{-11, 11, -14\}$.
1.24. $\vec a=\{1, -2, 1\}$, $\vec b=\{-1, 0, 2\}$, $\vec c=\{-3, 1, 0\}$, $\vec d=\{16, -19, 10\}$.
1.25. $\vec a=\{1, 0, 2\}$, $\vec b=\{3, -3, 4\}$, $\vec c=\{0, 1, 1\}$, $\vec d=\{-16, 13, -25\}$.
1.26. $\vec a=\{3, 1, 0\}$, $\vec b=\{1, 2, 2\}$, $\vec c=\{1, 0, -1\}$, $\vec d=\{6, 7, 9\}$.
1.27. $\vec a=\{1, 0, -1\}$, $\vec b=\{3, -1, 2\}$, $\vec c=\{0, 1, 5\}$, $\vec d=\{-11, 10, 1\}$.
1.28. $\vec a=\{1, 0, 4\}$, $\vec b=\{-1, 3, 1\}$, $\vec c=\{1, 0, -2\}$, $\vec d=\{-1, 15, 33\}$.
1.29. $\vec a=\{1, 2, -1\}$, $\vec b=\{-3, 0, 2\}$, $\vec c=\{1, -1, 4\}$, $\vec d=\{-7, 16, -25\}$.
1.30. $\vec a=\{1, -1, 1\}$, $\vec b=\{2, 3, 0\}$, $\vec c=\{-1, 1, 2\}$, $\vec d=\{-1, -4, 10\}$.

2. A, B ва C нуқталарнинг координаталари берилган.
а) $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар орасидаги бурчак косинусини;
б) $\alpha\vec a+\beta\vec b$ векторнинг $\vec a$ вектор йўналишидаги проекциясини топинг:

2.1. $A\ (9, 10, 1)$, $B\ (7, 6, -1)$, $C\ (4, 0, -4)$;
$\vec a=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$, $\vec b=4\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$; $\alpha=1$, $\beta=2$.

2.2. $A\ (0, 2, 1)$, $B\ (1, 2, 0)$, $C\ (0, 3, -1)$;
$\vec a=3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}$, $\vec b=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BC}$; $\alpha=-1$, $\beta=2$.

2.3. $A\ (0, 4, 8),\ B\ (-5, 4, -2),\ C\ (-1, 4, 1);$
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB};\ \alpha=-2,\ \beta=3.$

2.4. $A\ (3, 0, 1),\ B\ (-2, 3, 2),\ C\ (1, 1, -2);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=6\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{AC};\ \alpha=2,\ \beta=-3.$

2.5. $A\ (4, 1, -3),\ B\ (5, 1, -2),\ C\ (-1, 3, 3);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB},\ \vec{b}=7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BC};\ \alpha=\beta=3.$

2.6. $A\ (4, 1, 1),\ B\ (3, 1, 2),\ C\ (0, 1, -2);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA},\ \vec{b}=6\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC};\ \alpha=3,\ \beta=2.$

2.7. $A\ (-3, 4, -5),\ B\ (0, 1, -2),\ C\ (-1, 2, 3);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=5\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BA};\ \alpha=-2,\ \beta=5.$

2.8. $A\ (7, 5, -2),\ B\ (6, 0, 0),\ C\ (7, 2, 2);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{CB}+5\overrightarrow{AC};\ \alpha=-4,\ \beta=2.$

2.9. $A\ (-3, -7, -3),\ B\ (-1, -3, -1),\ C\ (2, 3, 2);$
$\vec{a}=2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB};\ \alpha=-3,\ \beta=1.$

2.10. $A\ (2, -1, 8),\ B\ (3, 1, 7),\ C\ (2, 0, 7);$
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=6\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC};\ \alpha=5,\ \beta=6.$

2.11. $A\ (-1, -1, 8),\ B\ (4, -1, -2),\ C\ (0, -1, 1);$
$\vec{a}=6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AB};\ \alpha=-4,\ \beta=3.$

2.12. $A\ (-2, 4, -2),\ B\ (3, 1, 0),\ C\ (0, 3, -4);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{CA};\ \alpha=3,\ \beta=-6.$

2.13. $A\ (1, 1, 4),\ B\ (-2, 1, 5),\ C\ (-1, 3, 3);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB};\ \alpha=-5,\ \beta=3.$

2.14. $A\ (4, 2, 6),\ B\ (2, 2, 8),\ C\ (-4, 2, 0);$
$\vec{a}=5\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BA};\ \alpha=9,\ \beta=12.$

2.15. $A\ (15, -12, 0),\ B\ (6, -3, 0),\ C\ (9, -6, 3);$
$\vec{a}=\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC};\ \alpha=-7,\ \beta=6.$

2.16. $A\ (-1, -5, -2),\ B\ (0, -6, 4),\ C\ (-1, -8, 2);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=5\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB};\ \alpha=-3,\ \beta=4.$

2.17. $A\ (-1, -10, -5),\ B\ (1, -6, -3),\ C\ (0, 0, 4);$
$\vec{a}=2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC};\ \alpha=4,\ \beta=-6.$

2.18. $A\ (-3, 3, 7),\ B\ (-2, 3, 6),\ C\ (-3, 2, 6);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{BA};\ \alpha=-3,\ \beta=8.$

2.19. $A\ (2, -2, -8),\ B\ (5, -2, -4),\ C\ (1, -2, -1);$
$\vec{a}=5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB};\ \alpha=-4,\ \beta=1.$

2.20. $A\ (1, 2, 4),\ B\ (-4, -1, 6),\ C\ (-1, 1, 2);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{CB};\ \alpha=3,\ \beta=-5.$

2.21. $A\ (1, 1, 4),\ B\ (-2, 5, 1),\ C\ (-1, 3, 3);$
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AB};\ \alpha=3,\ \beta=-4.$

2.22. $A\ (0, 1, -2),\ B\ (3, 1, 2),\ C\ (4, 1, 1);$
$\vec{a}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BA},\ \vec{b}=3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AB};\ \alpha=-2,\ \beta=6.$

2.23. $A\ (6, -8, 10),\ B\ (0, -2, 4),\ C\ (2, -4, 6);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{CB},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AB};\ \alpha=2,\ \beta=8.$

2.24. $A\ (0, 3, 2),\ B\ (-2, -1, 0),\ C\ (-5, -7, -3);$
$\vec{a}=5\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA},\ \vec{b}=6\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC};\ \alpha=-2,\ \beta=5.$

2.25. $A\ (-1, 4, 6),\ B\ (0, 2, 5),\ C\ (-1, 3, 5);$
$\vec{a}=8\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=2\overrightarrow{BC}-6\overrightarrow{AB};\ \alpha=-3,\ \beta=-4.$

2.26. $A\ (1, -2, 3),\ B\ (4, -2, -1),\ C\ (0, -2, 4);$
$\vec{a}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC};\ \alpha=2,\ \beta=1.$

2.27. $A\ (-1, 1, 1),\ B\ (-6, 4, 3),\ C\ (-3, 2, -1);$
$\vec{a}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB};\ \alpha=4,\ \beta=-6.$

2.28. $A\ (1, 1, 4),\ B\ (-2, 5, 5),\ C\ (-1, 3, 3);$
$\vec{a}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CA};\ \alpha=-2,\ \beta=6.$

2.29. $A\ (-3, -1, -2),\ B\ (-4, -1, -1),\ C\ (0, -1, 2);$
$\vec{a}=3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC};\ \alpha=-6,\ \beta=4.$

2.30. $A\ (5, -4, 3),\ B\ (2, -1, 0),\ C\ (3, -2, 1);$
$\vec{a}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CA};\ \alpha=-5,\ \beta=3.$

3. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \alpha, \beta$ лар маълум бўлса, $\vec{c}_1=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$ ва $\vec{c}_2=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$ векторларнинг коллинеар бўлиши-бўлмаслигини текшнринг:

3.1. $\vec{a}=\{4, -3, 1\};\ \vec{b}=\{-5, 0, 2\};\ \alpha_1=-2,\ \beta_1=5;\ \alpha_2=-5,\ \beta_2=2.$
3.2. $\vec{a}=\{-3, 0, 5\};\ \vec{b}=\{-7, 2, 4\};\ \alpha_1=-2,\ \beta_1=6;\ \alpha_2=-3,\ \beta_2=6.$
3.3. $\vec{a}=\{0, -1, 2\};\ \vec{b}=\{4, 3, -1\};\ \alpha_1=-3,\ \beta_1=1;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=6.$
3.4. $\vec{a}=\{7, 1, -3\};\ \vec{b}=\{8, 0, 5\};\ \alpha_1=-9,\ \beta_1=12;\ \alpha_2=-4,\ \beta_2=3.$
3.5. $\vec{a}=\{8, 3, -1\};\ \vec{b}=\{6, -1, 2\};\ \alpha_1=-5,\ \beta_1=2;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=5.$
3.6. $\vec{a}=\{3, -1, 0\};\ \vec{b}=\{9, 2, 4\};\ \alpha_1=-3,\ \beta_1=4;\ \alpha_2=4,\ \beta_2=-3.$
3.7. $\vec{a}=\{-2, 1, 7\};\ \vec{b}=\{3, 5, -9\};\ \alpha_1=5,\ \beta_1=3;\ \alpha_2=-1,\ \beta_2=2.$
3.8. $\vec{a}=\{7, 0, 6\};\ \vec{b}=\{-2, -1, 5\};\ \alpha_1=4,\ \beta_1=-6;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=3.$
3.9. $\vec{a}=\{-6, -7, 3\};\ \vec{b}=\{4, -1, 2\};\ \alpha_1=-2,\ \beta_1=3;\ \alpha_2=-3,\ \beta_2=2.$
3.10. $\vec{a}=\{-1, 6, 4\};\ \vec{b}=\{0, 7, 3\};\ \alpha_1=-7,\ \beta_1=5;\ \alpha_2=2,\ \beta_2=3.$
3.11. $\vec{a}=\{5, 3, 7\};\ \vec{b}=\{4, -2, 1\};\ \alpha_1=1,\ \beta_1=-2;\ \alpha_2=-3,\ \beta_2=6.$
3.12. $\vec{a}=\{10, 7, 5\};\ \vec{b}=\{6, -1, 3\};\ \alpha_1=1,\ \beta_1=-2;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=4.$
3.13. $\vec{a}=\{3, 1, 4\};\ \vec{b}=\{-1, 3, 8\};\ \alpha_1=6,\ \beta_1=-10;\ \alpha_2=-3,\ \beta_2=5.$
3.14. $\vec{a}=\{3, 4, 6\},\ \vec{b}=\{-2, 0, 5\};\ \alpha_1=4,\ \beta_1=3;\ \alpha_2=3,\ \beta_2=-2.$
3.15. $\vec{a}=\{3, 4, 5\},\ \vec{b}=\{-2, 9, 7\};\ \alpha_1=4,\ \beta_1=-1;\ \alpha_2=-1,\ \beta_2=4.$
3.16. $\vec{a}=\{1, -7, 2\},\ \vec{b}=\{-1, 2, -1\};\ \alpha_1=1,\ \beta_1=-3;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=6.$
3.17. $\vec{a}=\{4, -3, 1\},\ \vec{b}=\{0, 7, 3\};\ \alpha_1=1,\ \beta_1=2;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=4.$
3.18. $\vec{a}=\{2, 5, -3\},\ \vec{b}=\{-1, 7, -2\};\ \alpha_1=2,\ \beta_1=3;\ \alpha_2=3,\ \beta_2=2.$
3.19. $\vec{a}=\{1, -2, 1\},\ \vec{b}=\{-2, 3, 0\};\ \alpha_1=5,\ \beta_1=3;\ \alpha_2=-2,\ \beta_2=5.$
3.20. $\vec{a}=\{3, 2, 7\},\ \vec{b}=\{-1, 0, 5\};\ \alpha_1=3,\ \beta_1=-6;\ \alpha_2=-1,\ \beta_2=2.$

3.21. $\vec{a}=\{0, -2, 6\}$, $\vec{b}=\{2, 4, -1\}$; $\alpha_1=3$, $\beta_1=-6$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=-2$.
3.22. $\vec{a}=\{5, 0, 1\}$, $\vec{b}=\{-2, -3, -2\}$; $\alpha_1=-3$, $\beta_1=-1$; $\alpha_2=9$, $\beta_2=3$.
3.23. $\vec{a}=\{1, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, 4, 3\}$; $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$; $\alpha_2=-3$, $\beta_2=6$.
3.24. $\vec{a}=\{0, -1, 3\}$, $\vec{b}=\{5, -2, 1\}$; $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$; $\alpha_2=-2$, $\beta_2=4$.
3.25. $\vec{a}=\{-1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{-2, 4, 1\}$; $\alpha_1=2$, $\beta_1=4$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$.
3.26. $\vec{a}=\{7, 9, 5\}$, $\vec{b}=\{4, 5, 3\}$; $\alpha_1=-2$, $\beta_1=3$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=-2$.
3.27. $\vec{a}=\{-1, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{-3, 2, 1\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=8$; $\alpha_2=3$, $\beta_2=4$.
3.28. $\vec{a}=\{7, -2, 1\}$, $\vec{b}=\{1, 4, -2\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=2$; $\alpha_2=3$, $\beta_2=5$.
3.29. $\vec{a}=\{5, 3, -2\}$, $\vec{b}=\{1, 0, 1\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=3$; $\alpha_2=2$, $\beta_2=1$.
3.30. $\vec{a}=\{-1, 0, 3\}$, $\vec{b}=\{3, -2, 1\}$; $\alpha_1=3$, $\beta_1=-1$; $\alpha_2=4$, $\beta_2=2$.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар бўлиш-бўлмаслигини аниқланг:

4.1. $\vec{a}=\{9, 5, 8\}$, $\vec{b}=\{4, 3, 3\}$, $\vec{c}=\{5, 3, 4\}$.
4.2. $\vec{a}=\{6, 11, 8\}$, $\vec{b}=\{0, 1, 1\}$, $\vec{c}=\{2, 4, 3\}$.
4.3. $\vec{a}=\{-4, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{-7, -3, 1\}$, $\vec{c}=\{-6, -1, 4\}$.
4.4. $\vec{a}=\{4, 2, 4\}$, $\vec{b}=\{-5, -4, -5\}$, $\vec{c}=\{0, 1, 3\}$.
4.5. $\vec{a}=\{-1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{6, 1, 8\}$, $\vec{c}=\{3, 0, 3\}$.
4.6. $\vec{a}=\{8, -3, 1\}$, $\vec{b}=\{3, 0, 1\}$, $\vec{c}=\{4, -1, 1\}$.
4.7. $\vec{a}=\{2, 1, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\vec{c}=\{4, 3, 6\}$.
4.8. $\vec{a}=\{6, 2, 6\}$, $\vec{b}=\{-9, -4, -9\}$, $\vec{c}=\{1, 1, 4\}$.
4.9. $\vec{a}=\{-1, 0, 3\}$, $\vec{b}=\{6, 7, -4\}$, $\vec{c}=\{3, 3, -3\}$.
4.10. $\vec{a}=\{-1, 4, -2\}$, $\vec{b}=\{-1, 2, 0\}$, $\vec{c}=\{-5, 10, -7\}$.
4.11. $\vec{a}=\{2, 2, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, 0, -1\}$, $\vec{c}=\{1, 3, 2\}$.
4.12. $\vec{a}=\{-1, 1, 3\}$, $\vec{b}=\{4, 3, 2\}$, $\vec{c}=\{1, 2, 3\}$.
4.13. $\vec{a}=\{1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{-1, 1, -1\}$, $\vec{c}=\{2, 5, 1\}$.
4.14. $\vec{a}=\{4, 3, 2\}$, $\vec{b}=\{1, 2, 3\}$, $\vec{c}=\{-3, -1, -1\}$.
4.15. $\vec{a}=\{1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{1, -2, 1\}$, $\vec{c}=\{1, 3, 3\}$.
4.16. $\vec{a}=\{-1, 2, 5\}$, $\vec{b}=\{0, -1, -2\}$, $\vec{c}=\{-1, 1, 3\}$.
4.17. $\vec{a}=\{2, 2, 2\}$, $\vec{b}=\{1, -2, 1\}$, $\vec{c}=\{1, 3, 4\}$.
4.18. $\vec{a}=\{-1, 0, 2\}$, $\vec{b}=\{4, 7, 6\}$, $\vec{c}=\{1, 3, 4\}$.
4.19. $\vec{a}=\{3, 2, 1\}$, $\vec{b}=\{-7, -3, 1\}$, $\vec{c}=\{1, 2, 3\}$.
4.20. $\vec{a}=\{1, 2, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, 0, -2\}$, $\vec{c}=\{2, 7, 3\}$.
4.21. $\vec{a}=\{17, -6, 2\}$, $\vec{b}=\{1, 0, 1\}$, $\vec{c}=\{6, -2, 1\}$.
4.22. $\vec{a}=\{2, 1, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\vec{c}=\{4, 3, 6\}$.
4.23. $\vec{a}=\{4, 2, 4\}$, $\vec{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\vec{c}=\{4, 3, 7\}$.
4.24. $\vec{a}=\{-1, 0, 2\}$, $\vec{b}=\{5, 7, 4\}$, $\vec{c}=\{2, 3, 2\}$.
4.25. $\vec{a}=\{4, 2, 4\}$, $\vec{b}=\{-1, 0, -1\}$, $\vec{c}=\{4, 3, 5\}$.
4.26. $\vec{a}=\{3, 4, 2\}$, $\vec{b}=\{-3, -2, -2\}$, $\vec{c}=\{5, 10, 3\}$.
4.27. $\vec{a}=\{4, 7, 6\}$, $\vec{b}=\{1, 3, 4\}$, $\vec{c}=\{-3, -4, -2\}$.
4.28. $\vec{a}=\{-2, 3, 8\}$, $\vec{b}=\{-1, 0, 1\}$, $\vec{c}=\{-1, 1, 3\}$.
4.29. $\vec{a}=\{2, 1, 2\}$, $\vec{b}=\{-3, -3, 3\}$, $\vec{c}=\{2, 2, 4\}$.
4.30. $\vec{a}=\{-1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{5, 2, 9\}$, $\vec{c}=\{2, 1, 4\}$.

[illegible]нинг учлари A, B, C, D берилган.
[illegible]тилган ёқ юзини; б) пирамиданинг l қирраси ва берилган
[illegible] ўтувчи кесим юзини; в) пирамиданинг ҳажмини
[illegible]

[illegible] $0, 3)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, -1, 1)$, $D(0, 2, 1)$;
[illegible] ABC; б) $l=AD$, B ва C.
[illegible] $1, 2)$, $B(1, 2, 2)$, $C(1, 2, 1)$, $D(2, 0, 1)$;
[illegible] BCD; б) $l=BA$, C ва D.
[illegible] $(-4, -5, 0)$, $B(6, 1, 2)$, $C(1, 0, 1)$, $D(-3, 2, 1)$;
а) ACD; б) $l=CB$, A ва D.
[illegible] $A(2, -1, 1)$, $B(-3, 0, 6)$, $C(-5, 3, -2)$, $D(-1, 10, 3)$;
а) ABD; б) $l=CD$, A ва B.
[illegible] $A(1, -3, 7)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(-4, 2, 1)$, $D(4, 2, -1)$;
а) ABC; б) $l=BD$, A ва C.
[illegible] 1, [illegible]$)$, $B(5, -1, 2)$, $C(2, 1, 4)$, $D(1, 3, 0)$;
[illegible] б) $l=AC$, B ва D.
[illegible]$)$, $B(1, 0, 3)$, $C(2, -1, 4)$, $D(0, 3, 1)$;
[illegible] $l=AB$, C ва D.
[illegible]$)$, $B(-4, 1, 3)$, $C(2, 3, 0)$, $D(-1, -1, -2)$;
[illegible] $l=BC$, A ва D.
[illegible]$)$, $B(-1, -3, 0)$, $C(4, 1, 2)$, $D(6, -5, -3)$;
[illegible] б) $l=CD$, A ва B.
[illegible] $-10)$, $B(3, 3, 1)$, $C(0, -6, 5)$, $D(-3, -4, 2)$;
[illegible] BCD; б) $l=AD$, B ва C.
5.11. $A(-3, 0, -4)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 2, 2)$, $D(6, 3, 1)$;
а) ACD; б) $l=BD$, A ва C.
5.12. $A(-4, 2, 5)$, $B(8, 5, -10)$, $C(0, -3, 2)$, $D(6, 2, -4)$;
а) ABD; б) $l=AC$, B ва D.
5.13. $A(1, 2, -4)$, $B(1, 3, 3)$, $C(-2, -1, 7)$, $D(4, 2, 7)$;
а) ABC; б) $l=AD$, B ва C.
5.14. $A(6, -3, -6)$, $B(2, -3, -7)$, $C(2, 5, -1)$, $D(4, 1, 2)$;
а) BCD; б) $l=AB$, C ва D.
5.15. $A(7, 6, -10)$, $B(-3, 6, 3)$, $C(-3, 0, -6)$, $D(2, -5, -1)$;
а) ACD; б) $l=CB$, A ва D.
5.16. $A(3, -6, -1)$, $B(-9, -5, 1)$, $C(5, 3, -2)$, $D(-1, -1, 0)$;
а) ABD; б) $l=CD$, A ва B.
5.17. $A(1, 1, -1)$, $B(4, 2, 1)$, $C(0, 5, 2)$, $D(0, 2, 5)$;
а) ABC; б) $l=BD$, A ва C.
5.18. $A(-7, 9, -10)$, $B(-6, 0, 5)$, $C(1, 2, 1)$, $D(-2, -1, 2)$;
а) BCD; б) $l=AC$, B ва D.
5.19. $A(6, -4, 1)$, $B(-4, -8, 4)$, $C(1, 7, -1)$, $D(-4, 0, -2)$;
а) ACD; б) $l=AB$, C ва D.
5.20. $A(-1, 2, -2)$, $B(-3, -6, -2)$, $C(2, -3, -5)$, $D(5, 4, 14)$;
а) ABD; б) $l=BC$, A ва D.

5.21. $A(-9, 4, 8)$, $B(6, 2, 5)$, $C(-3, 0, 3)$, $D(0, 2, 1)$;
а) ABC; б) $l=CD$, A ва B.

5.22. $A(5, 2, -4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, -1, 2)$;
а) BCD; б) $l=AD$, B ва C.

5.23. $A(-2, 0, -1)$, $B(4, -2, 2)$, $C(3, 1, -1)$, $D(2, 1, 1)$;
а) ACD; б) $l=BD$, A ва C.

5.24. $A(-3, 5, 7)$, $B(7, 3, 6)$, $C(-2, 1, 4)$, $D(1, 3, 2)$;
а) ABD; б) $l=AC$, B ва D.

5.25. $A(-8, 9, 5)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$, $D(-1, 1, 1)$;
а) ABC; б) $l=AD$, B ва C.

5.26. $A(-12, 8, -4)$, $B(3, 7, -2)$, $C(3, 6, -3)$, $D(-7, 5, 1)$;
а) BCD; б) $l=AB$, C ва D.

5.27. $A(4, 5, 2)$, $B(0, -2, -5)$, $C(-4, 5, 1)$, $D(-7, 4, -3)$;
а) ACD; б) $l=CB$, A ва D.

5.28. $A(5, 4, 3)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(0, -1, 4)$, $D(-3, 2, -1)$;
а) ABD; б) $l=CD$, A ва B.

5.29. $A(-6, 2, 8)$, $B(1, -5, 0)$, $C(0, 1, -2)$, $D(3, -1, 4)$;
а) ABC; б) $l=BD$, A ва C.

5.30. $A(-4, -2, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(3, 0, -2)$, $D(1, -1, 1)$;
а) BCD; б) $l=AC$, B ва D.

7- §. Текисликнинг тенгламаси. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш. Тўғри чизиқнинг тенгламаси

1.7.1. *Oxyz* тўғри бурчакли координаталар системасида ҳар қандай текислик тенгламасини x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан қуйидаги чизиқли тенглама шаклида ёзиш мумкин:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Бу тенглама текисликнинг *умумий тенгламаси* дейилади. Бу ерда A, B, C коэффициентлар берилган текисликка перпендикуляр бўлган ва унинг *нормал вектори* деб аталувчи $\vec{n}=\{A, B, C\}$ векторнинг координаталаридир. Текисликнинг фазодаги ҳолати A, B, C коэффициентлари ва озод ҳадининг қийматларига боғлиқ. Хусусан, агар:

I. $D=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+By+Cz=0$ ва текислик координаталар бошидан ўтади.

II. а) $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+By+D=0$ ва текислик Oz ўқига параллел бўлади;

б) $B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+Cz+D=0$ ва текислик Oy ўқига параллел бўлади;

в) $A=0$ бўлса, у ҳолда $By+Cz+D=0$ ва текислик Ox ўқига параллел бўлади.

III. а) $D=0$, $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+By=0$ ва текислик Oz ўқи орқали ўтади,

б) $D=0$, $B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+Cz=0$ ва текислик Oy ўқи орқали ўтади,

в) $D=0$, $A=0$ бўлса, у ҳолда $By+Cz=0$ ва текислик Ox ўқи орқали ўтади.

IV. а) $C=0$, $B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+D=0$ ва текислик Oyz координаталар текислигига параллел (ёки Ox ўққа перпендикуляр) бўлади;

б) $C=0$, $A=0$ бўлса, у ҳолда $By+D=0$ ва текислик Oxz координаталар текислигига параллел (ёки Oy ўққа перпендикуляр) бўлади;

в) $A=0$, $B=0$ бўлса, у ҳолда $Cz+D=0$ ва текислик Oxy координаталар текислигига параллел (ёки Oz ўққа перпендикуляр) бўлади.

V. а) $D=0$, $A=0$ ва $B=0$ бўлса, у ҳолда $Cz=0$ ёки $z=0$ ва текислик Oxy координаталар текислиги билан устма-уст тушади;

б) $D=0$, $A=0$ ва $C=0$ бўлса, у ҳолда $By=0$ ёки $y=0$ ва текислик Oxz координаталар текислиги билан устма-уст тушади;

в) $D=0$, $B=0$ ва $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax=0$ ёки $x=0$ ва текислик Oyz текислик билан устма-уст тушади.

1.7.2. Қуйида маълум шартларни қаноатлантирувчи текисликлар тенгламалари келтирилган:

а) берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва берилган $\vec{n}=\{A, B, C\}$ нормал векторга эга текислик тенгламаси:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

б) текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

бунда a, b, c — текисликнинг мос координата ўқларидан кесадиган кесмалари;

в) берилган учта $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ва $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

1.7.3. Тўғри чизиқнинг фазода берилиш усулига қараб унинг тенгламаси турлича бўлиши мумкин:

а) берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{s}=\{l, m, p\}$ йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизиқнинг каноник шаклдаги тенгламалари

3.21. $\vec a=\{0, -2, 6\}$, $\vec b=\{2, 4, -1\}$; $\alpha_1=3$, $\beta_1=-6$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=-2$.
3.22. $\vec a=\{5, 0, 1\}$, $\vec b=\{-2, -3, -2\}$; $\alpha_1=-3$, $\beta_1=-1$; $\alpha_2=9$, $\beta_2=3$.
3.23. $\vec a=\{1, -1, 2\}$, $\vec b=\{-1, 4, 3\}$; $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$; $\alpha_2=-3$, $\beta_2=6$.
3.24. $\vec a=\{0, -1, 3\}$, $\vec b=\{5, -2, 1\}$; $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$; $\alpha_2=-2$, $\beta_2=4$.
3.25. $\vec a=\{-1, 1, 1\}$, $\vec b=\{-2, 4, 1\}$; $\alpha_1=2$, $\beta_1=4$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$.
3.26. $\vec a=\{7, 9, 5\}$, $\vec b=\{4, 5, 3\}$; $\alpha_1=-2$, $\beta_1=3$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=-2$.
3.27. $\vec a=\{-1, -1, 2\}$, $\vec b=\{-3, 2, 1\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=8$; $\alpha_2=3$, $\beta_2=4$.
3.28. $\vec a=\{7, -2, 1\}$, $\vec b=\{1, 4, -2\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=2$; $\alpha_2=3$, $\beta_2=5$.
3.29. $\vec a=\{5, 3, -2\}$, $\vec b=\{1, 0, 1\}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=3$; $\alpha_2=2$, $\beta_2=1$.
3.30. $\vec a=\{-1, 0, 3\}$, $\vec b=\{3, -2, 1\}$; $\alpha_1=3$, $\beta_1=-1$; $\alpha_2=4$, $\beta_2=2$.

4. $\vec a$, $\vec b$ ва $\vec c$ векторлар компланар бўлиш-бўлмаслигини аниқланг:

4.1. $\vec a=\{9, 5, 8\}$, $\vec b=\{4, 3, 3\}$, $\vec c=\{5, 3, 4\}$.
4.2. $\vec a=\{6, 11, 8\}$, $\vec b=\{0, 1, 1\}$, $\vec c=\{2, 4, 3\}$.
4.3. $\vec a=\{-4, -1, 2\}$, $\vec b=\{-7, -3, 1\}$, $\vec c=\{-6, -1, 4\}$.
4.4. $\vec a=\{4, 2, 4\}$, $\vec b=\{-5, -4, -5\}$, $\vec c=\{0, 1, 3\}$.
4.5. $\vec a=\{-1, 1, 1\}$, $\vec b=\{6, 1, 8\}$, $\vec c=\{3, 0, 3\}$.
4.6. $\vec a=\{8, -3, 1\}$, $\vec b=\{3, 0, 1\}$, $\vec c=\{4, -1, 1\}$.
4.7. $\vec a=\{2, 1, 2\}$, $\vec b=\{-1, -2, -1\}$, $\vec c=\{4, 3, 6\}$.
4.8. $\vec a=\{6, 2, 6\}$, $\vec b=\{-9, -4, -9\}$, $\vec c=\{1, 1, 4\}$.
4.9. $\vec a=\{-1, 0, 3\}$, $\vec b=\{6, 7, -4\}$, $\vec c=\{3, 3, -3\}$.
4.10. $\vec a=\{-1, 4, -2\}$, $\vec b=\{-1, 2, 0\}$, $\vec c=\{-5, 10, -7\}$.
4.11. $\vec a=\{2, 2, 2\}$, $\vec b=\{-1, 0, -1\}$, $\vec c=\{1, 3, 2\}$.
4.12. $\vec a=\{-1, 1, 3\}$, $\vec b=\{4, 3, 2\}$, $\vec c=\{1, 2, 3\}$.
4.13. $\vec a=\{1, 1, 1\}$, $\vec b=\{-1, 1, -1\}$, $\vec c=\{2, 5, 1\}$.
4.14. $\vec a=\{4, 3, 2\}$, $\vec b=\{1, 2, 3\}$, $\vec c=\{-3, -1, -1\}$.
4.15. $\vec a=\{1, 1, 1\}$, $\vec b=\{1, -2, 1\}$, $\vec c=\{1, 3, 3\}$.
4.16. $\vec a=\{-1, 2, 5\}$, $\vec b=\{0, -1, -2\}$, $\vec c=\{-1, 1, 3\}$.
4.17. $\vec a=\{2, 2, 2\}$, $\vec b=\{1, -2, 1\}$, $\vec c=\{1, 3, 4\}$.
4.18. $\vec a=\{-1, 0, 2\}$, $\vec b=\{4, 7, 6\}$, $\vec c=\{1, 3, 4\}$.
4.19. $\vec a=\{3, 2, 1\}$, $\vec b=\{-7, -3, 1\}$, $\vec c=\{1, 2, 3\}$.
4.20. $\vec a=\{1, 2, 2\}$, $\vec b=\{-1, 0, -2\}$, $\vec c=\{2, 7, 3\}$.
4.21. $\vec a=\{17, -6, 2\}$, $\vec b=\{1, 0, 1\}$, $\vec c=\{6, -2, 1\}$.
4.22. $\vec a=\{2, 1, 2\}$, $\vec b=\{-1, -2, -1\}$, $\vec c=\{4, 3, 6\}$.
4.23. $\vec a=\{4, 2, 4\}$, $\vec b=\{-1, -2, -1\}$, $\vec c=\{4, 3, 7\}$.
4.24. $\vec a=\{-1, 0, 2\}$, $\vec b=\{5, 7, 4\}$, $\vec c=\{2, 3, 2\}$.
4.25. $\vec a=\{4, 2, 4\}$, $\vec b=\{-1, 0, -1\}$, $\vec c=\{4, 3, 5\}$.
4.26. $\vec a=\{3, 4, 2\}$, $\vec b=\{-3, -2, -2\}$, $\vec c=\{5, 10, 3\}$.
4.27. $\vec a=\{4, 7, 6\}$, $\vec b=\{1, 3, 4\}$, $\vec c=\{-3, -4, -2\}$.
4.28. $\vec a=\{-2, 3, 8\}$, $\vec b=\{-1, 0, 1\}$, $\vec c=\{-1, 1, 3\}$.
4.29. $\vec a=\{2, 1, 2\}$, $\vec b=\{-3, -3, 3\}$, $\vec c=\{2, 2, 4\}$.
4.30. $\vec a=\{-1, 1, 1\}$, $\vec b=\{5, 2, 9\}$, $\vec c=\{2, 1, 4\}$.

5. Пирамиданинг учлари A, B, C, D берилган.

а) Кўрсатилган ёқ юзини; б) пирамиданинг l қирраси ва берилган иккита учидан ўтувчи кесим юзини; в) пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг:

5.1. $A(1, 0, -3)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(2, -1, 1)$, $D(0, 2, 1)$;
а) ABC; б) $l=AD$, B ва C.
5.2. $A(0, 1, 2)$, $B(1, -2, 2)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 0, 1)$;
а) BCD; б) $l=BA$, C ва D.
5.3. $A(-4, -5, 0)$, $B(6, -1, 2)$, $C(1, 0, 1)$, $D(-3, 2, 1)$;
а) ACD; б) $l=CB$, A ва D.
5.4. $A(2, -1, 1)$, $B(-3, 0, -6)$, $C(-5, 3, -2)$, $D(-1, 10, 3)$;
а) ABD; б) $l=CD$, A ва B.
5.5. $A(1, -3, 7)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(-4, -2, 1)$, $D(4, 2, -1)$;
а) ABC; б) $l=BD$, A ва C.
5.6. $A(-4, 1, 3)$, $B(5, -1, 2)$, $C(2, 1, -4)$, $D(1, -3, 0)$;
а) BCD; б) $l=AC$, B ва D.
5.7. $A(5, 3, -4)$, $B(1, 0, 3)$, $C(2, -1, 4)$, $D(0, 3, 1)$;
а) ACD; б) $l=AB$, C ва D.
5.8. $A(3, 7, -4)$, $B(-4, 1, 3)$, $C(2, 3, 0)$, $D(-1, -1, -2)$;
а) ABD; б) $l=BC$, A ва D.
5.9. $A(-8, 2, -5)$, $B(-1, -3, 0)$, $C(-4, 1, 2)$, $D(6, -5, -3)$;
а) ABC; б) $l=CD$, A ва B.
5.10. $A(7, -8, -10)$, $B(-3, 3, -1)$, $C(0, -6, 5)$, $D(-3, -4, 2)$;
а) BCD; б) $l=AD$, B ва C.
5.11. $A(-3, 6, -4)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 2)$, $D(6, 3, 1)$;
а) ACD; б) $l=BD$, A ва C.
5.12. $A(-4, 2, -5)$, $B(8, 5, -10)$, $C(0, -3, 2)$, $D(6, 2, -4)$;
а) ABD; б) $l=AC$, B ва D.
5.13. $A(1, 2, -4)$, $B(1, 3, 3)$, $C(-2, -1, 7)$, $D(4, 2, 7)$;
а) ABC; б) $l=AD$, B ва C.
5.14. $A(6, -3, -6)$, $B(2, -3, -7)$, $C(2, 5, -1)$, $D(4, 1, 2)$;
а) BCD; б) $l=AB$, C ва D.
5.15. $A(7, 6, -10)$, $B(-3, 6, 3)$, $C(-3, 0, -6)$, $D(2, -5, -1)$;
а) ACD; б) $l=CB$, A ва D.
5.16. $A(3, -6, -1)$, $B(-9, -5, 1)$, $C(5, 3, -2)$, $D(-1, -1, 0)$;
а) ABD; б) $l=CD$, A ва B.
5.17. $A(1, 1, -1)$, $B(4, 2, 1)$, $C(0, 5, 2)$, $D(0, 2, 5)$;
а) ABC; б) $l=BD$, A ва C.
5.18. $A(-7, 9, -10)$, $B(-6, 0, 5)$, $C(1, 2, 1)$, $D(-2, -1, 2)$;
а) BCD; б) $l=AC$, B ва D.
5.19. $A(6, -4, 1)$, $B(-4, -8, 4)$, $C(1, 7, -1)$, $D(-4, 0, -2)$;
а) ACD; б) $l=AB$, C ва D.
5.20. $A(-1, 2, -2)$, $B(-3, -6, -2)$, $C(2, -3, -5)$, $D(5, 4, 14)$;
а) ABD; б) $l=BC$, A ва D.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p};$$

б) тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$$

бунда t — параметр;

в) берилган икки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

г) фазодаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

бунда $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

Бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}$ ушбу

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ A_1&B_1&C_1\\ A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$$

формула бўйича аниқланади.

1.7.4. $Ax+By+Cz+D=0$ ва $z=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғи Oxy текисликда ётувчи

$$Ax+By+C=0$$

тўғри чизиқдан иборат бўлади. Бу тенглама текисликдаги *тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси* дейилади. Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган $\vec{n}=\{A, B\}$ вектор тўғри чизиқнинг *нормал вектори* дейилади. Текисликдаги тўғри чизиқнинг тенгламалари:

а) берилган $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи ва берилган $\vec{n}=\{A, B\}$ нормал векторга эга тўғри чизиқ тенгламаси

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$$

б) тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},$$

бунда $\vec{s}=\{l, m\}$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори, $M_0(x_0, y_0)$ — тўғри чизиқда ётувчи берилган нуқта;

в) тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y=kx+b,$$

бунда b — тўғри чизиқнинг Oy ўқдан кесадиган кесмаси; k — тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти: $k=\operatorname{tg}\alpha$ (α — тўғри чизиқ билан Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак);

г) $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи ва k бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

д) тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

бунда a ва b — тўғри чизиқнинг координаталар ўқларидан кесадиган кесмаси;

е) берилган икки $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Мисол: $M_0(-2;\ 1;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи $\vec{s}=\{1;\ -1;\ 2\}$ векторга параллел тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

Ечиш. $\vec{s}$ вектор тўғри чизиққа параллел бўлгани учун у тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади. Шу сабабли, тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$ га асосан, изланаётган тўғри чизиқ тенгламалари

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

кўринишда бўлади.

7-дарсхона топшириғи

Қуйидаги текислик тенгламасини тузинг ва тегишли шаклни чизинг:

а) $M_0(7, -3, 5)$ нуқтадан ўтувчи ва Oxz координаталар текислигига параллел текислик;

б) Oz ўқ ва $M_0(-3, 1, -2)$ нуқта орқали ўтувчи текислик;

в) Ox ўққа параллел ҳамда икки $M_1(4, 0, -2)$ ва $M_2(5, 1, 7)$ нуқтадан ўтувчи текислик;

г) $M_0(2, 1, -1)$ нуқтадан ўтувчи ва нормал вектори $\vec{n}=\{1, -2, 3\}$ бўлган текислик;

д) $M_0(3, 4, -5)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда $\vec{a}=\{3, 1, -1\}$ ва $\vec{b}=\{1, 2, 1\}$ векторларга иараллел бўлган.

Ж: а) $y+3=0$; б) $x+3y=0$; в) $9y-z-2=0$; г) $x-2y+3z+$ $+3=0$; д) $x+4y+7z+16=0$.

2. $M(-1, 2, 1)$, $N(2, 3, -2)$ ва $P(3, 4, 2)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

Ж: $7x-15y+2z+7=0$.

3. $M_0(7, -5, 1)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $x+y+z-3=0$.

4. Фазода умумий тенгламалари

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+2z+4=0, \\ 3x+y-5z-8=0 \end{array}\right\}$$

билан берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ж: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{11}=\frac{z}{4}$.

5. $M_0(2, 0, -3)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги шартни қаноатлантирувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг: а) $\vec{s}=\{2, 3, -4\}$ векторга параллел; б) $M_1(-3, 1, 4)$ нуқтадан ўтувчи.

Ж: а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+4}{-4}$; б) $\frac{x-2}{-5}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{7}$.

6. Берилган тенгламалари бўйича тўғри чизиқнинг шаклини чизинг, унинг k бурчак коэффициентини ва координаталар ўқларидан кесадиган a ва b кесмаларини топинг:

а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-8=0$;
в) $3x+8y+16=0$; г) $3x-y=0$.

Ж: а) $k=2$; $a=-\frac{3}{2}$; $b=3$; б) $k=-\frac{5}{2}$; $a=\frac{8}{5}$; $b=4$; в) $k=-\frac{3}{8}$; $a=-\frac{16}{3}$; $b=-2$; г) $k=3$; $a=b=0$.

7. Қуйидаги тўғри чизиқлар тенгламаларини тузинг:

а) $M_0(3, -1)$ нуқтадан ўтувчи ва ординаталар ўқига параллел;

б) $M_0(3, -1)$ нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқига параллел;

в) $M_0(3, -1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{a}=\{3, -2\}$ векторга параллел;

г) $M_0(3, -1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{b}=\{1, -4\}$ векторга перпендикуляр.

Ж: а) $x=3$; б) $y=-1$; в) $2x+3y-3=0$; г) $x-4y-7=0$.

7-мустақил иш

1. Иккита $M_1(3, -1, 2)$ ва $M_2(4, -2, -1)$ нуқта берилган. M_1 нуқтадан ўтувчи ва M_1M_2 векторга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $x-y-3z+2=0$.

2. $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$ ва $M_3(2, 0, 2)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $3x+3y+z-8=0$.

3. Учбурчакнинг учлари берилган: $M(3, 6, -7)$, $N(-5, 2, 3)$ ва $P(4, -7, -2)$. P учидан ўтказилган медиананинг параметрик тенгламасини тузинг.

Ж: $\left\{\begin{array}{l} x=5t+4, \\ y=-11t-7, \\ z=-2. \end{array}\right.$

4. Ушбу

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{array}\right.$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини тузинг.

Ж: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$.

5. $2x+2y-5=0$ тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчагини топинг.

Ж: 135°.

6. Учбурчак томонларининг ўрталари берилган: $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3, -4)$. Учбурчак томонлари тенгламаларини тузинг.

Ж: $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

7. Учбурчакнинг учлари берилган: $M_1(2,\ 1)$, $M_2(-1,\ -1)$ ва $M_3(3,\ 2)$. Учбурчакнинг баландликлари тенгламаларини тузинг.

Ж: $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$.

8-§. Текисликлар ва тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашуви. Текисликлар орасидаги бурчак. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак. Нуқтадан тўғри чизиққача ва текисликкача бўлган масофа

1.8.1. Текисликлар $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак қуйидаги формула асосида ҳисобланади:

$$\cos\varphi=\frac{\vec n_1\cdot\vec n_2}{|\vec n_1|\cdot|\vec n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

бунда $\vec n_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ ва $\vec n_2=\{A_2,\ B_2,\ C_3\}$ — берилган текисликларнинг нормал векторлари.

а) Агар текисликлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec n_1\cdot\vec n_2=0$ ёки $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

б) Агар текисликлар параллел бўлса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

в) Агар текисликлар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

г) $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтадан $Ax+By+Cz+D=0$ текисликкача бўлган d масофа:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

1.8.2. Тўғри чизиқлар

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

ва

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

каноник тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак қуйидаги формуладан топилади:

$$\cos\varphi=\frac{\vec s_1\cdot\vec s_2}{|\vec s_1|\cdot|\vec s_2|}=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}.$$

а) Агар тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec s_1\cdot\vec s_2=0$ ёки $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$.

б) Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

в) Агар тўғри чизиқлар устма-уст тушса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$, шу билан бирга

$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{p_1}.$$

г) Агар тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & p_1\\ l_2 & m_2 & p_2\end{vmatrix}=0.$$

д) Агар тўғри чизиқлар айқаш бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & p_1\\ l_2 & m_2 & p_2\end{vmatrix}\neq0.$$

$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиққача бўлган масофа қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$d=\frac{|\vec s\times\overline{M_1M_0}|}{|\vec s|},$$

бунда $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқта шу тўғри чизиққа тегишли ва $\vec s=\{l,\ m,\ p\}$ унинг йўналтирувчи вектори.

Икки айқаш

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{ва}\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа d масофа қуйидагича аниқланади:

$$d=\frac{|\overline{M_1M_2}\cdot\vec s_1\cdot\vec s_2|}{|\vec s_1\times\vec s_2|},$$

бунда $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталар мос равишда бу тўғри чизиқларга тегишли, $\vec s_1=\{l_1,\ m_1,\ p_1\}$ ва $\vec s_2=\{l_2,\ m_2,\ p_2\}$ лар эса уларнинг йўналтирувчи векторлари.

Мисол. $x-2y+2z-8=0$ ва $x+z-6=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Икки текислик орасидаги бурчак формуласига кўра:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{1\cdot1+(-2)\cdot0+2\cdot1}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бундан $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^\circ$ келиб чиқади.

1.8.3. $Ax+By+Cz+D=0$ текислик билан $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{Al+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}},$$

бунда $\vec{n}=\{A,\ B,\ C\}$ — текисликнинг нормал вектори, $\vec{s}=\{l,\ m,\ p\}$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори.

а) Агар текислик билан тўғри чизиқ перпендикуляр бўлса, $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар коллинеар ёки $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$ бўлади.

б) Агар текислик билан тўғри чизиқ параллел бўлса, у ҳолда $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар перпендикуляр ёки $Al+Bm+Cp\neq0$ бўлади.

в) Агар текислик билан тўғри чизиқ устма-уст тушса, у ҳолда $Al+Bm+Cp=0$, шу билан бирга $Ax_0+Bx_0+Cz_0+D=0$ бўлади.

г) Агар текислик билан тўғри чизиқ кесишса, у ҳолда

$$Al+Bm+Cp\neq0.$$

1.8.4. Текисликдаги тўғри чизиқлар

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ва } A_2x+B_2y+C_2=0$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

бунда $\vec{n}_1=\{A_1,\ B_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2,\ B_2\}$ — мос равишда берилган тўғри чизиқларнинг нормал векторлари.

а) Агар бу тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0.$$

б) Агар бу тўғри чизиқлар параллел бўлса, у ҳолда

$$A_1/A_2=B_1/B_2.$$

в) Агар бу тўғри чизиқлар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Текисликдаги тўғри чизиқлар

$$y=k_1x+b_1 \text{ ва } y=k_2x+b_2$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Бу тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти $k_1\cdot k_2=-1$ дан иборат, параллеллик шарти эса $k_1=k_2$ бўлади.

$M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан $Ax+By+C=0$ тўғри чизиққача бўлган d масофа ушбу

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

8- дарс хона топшириғи

1. Координаталар бошидан ўтувчи $2x-y+3z-1=0$ ва $x+2y+z=0$ текисликларга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $7x-y-5z=0$.

2. $P(-1,\ 1,\ -2)$ нуқтадан $M_1(1,\ -1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 1,\ 3)$ ва $M_3(4,\ -5,\ -2)$ нуқталар орқали ўтувчи текисликкача бўлган d масофани ҳисобланг.

Ж: $d=4$ узун. бирл.

3. Ушбу

$$\begin{cases}x-y-4z-5=0,\\2x+y-2z-4=0\end{cases} \text{ ва } \begin{cases}x-6y-6z+2=0,\\2x+2y+9z-1=0\end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак косинусини ҳисобланг.

Ж: $\cos\varphi=\pm\frac{4}{21}$.

4. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро ҳолатини аниқланг, улар кесишган ҳолда, кесишиш нуқтаси координаталарини топинг:

а) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$,

б) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$, $x+2y-4z+1=0$,

в) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$, $3x-y+2z-5=0$.

Ж: а) параллел; б) тўғри чизиқ текисликда ётади; в) $M(2,\ 3,\ 1)$

нуқтада кесишади.

5. $M_1(5, 4, 6)$ ва $M_2(-2, -17, -8)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан $P(2, -5, 7)$ нуқтага симметрик Q нуқтани топинг.

Ж: $Q(4, -1, -3)$.

6. Учбурчакнинг $A(-10, -13)$ ва $B(-2, 3)$ учлари берилган. Унинг C учидан AB томонга ўтказилган медианасига B учидан туширилган перпендикуляр узунлигини ҳисобланг.

Ж: 4 узун, бирл.

8- мустақил иш

1. $M_1(1, -1, 2)$ ва $M_2(3, 1, 1)$ нуқталардан ўтувчи $x-2y+$ $+3z+5=0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $4x-y-2z-9=0$.

2. Ушбу тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботланг:

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$$

3. Ушбу

$$2x-3y+6z-14=0 \text{ ва } 4x-6y+12z+21=0$$

текисликлар орасидаги d масофани ҳисобланг.

Ж: $d=3{,}5$ узунлик бирлиги.

4. Ушбу

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \text{ ва } \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$$

тўғри чизиқлар l нинг қандай қийматида кесишади?

Ж: $l=3$.

5. Ушбу

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \text{ ва } \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$$

тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофанн ҳисобланг.

Ж: 13 узунлик бирлиги.

6. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва $x+4y-$ $-3z+7=0$ текисликка перпенднкуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $11x-17y-19z+10=0$.

7. $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ тўғри чизиқнинг $4x-3y+7z-7=0$ текисликда ётишини исботланг.

8. $A(5, -1)$ нуқта томонларидан бири $4x-3y-7=0$ тўғри чизиқда ётувчи квадратнинг учидир. Шу квадратнинг қолган томонлари тенгламаларини тузинг.

Ж: иккнта квадрат масала шартини қаноатлантиради:

а) $3x+4y-11=0, \quad 4x-3y-23=0, \quad 3x+4y-27=0;$

б) $3x+4y-11=0, \quad 4x-3y-23=0, \quad 3x+4y+5=0.$

3- назорат иши

1. ABC учбурчак учларининг коордннаталари бернлган.

а) C учдан ўтказилган меднана тенгламасини тузинг ва унинг узунлигини топинг;

б) A учдан ўтказилган баландлнк тенгламасини тузинг ва шу баландлик узунлигини топинг;

в) B бурчак биссектрисаси тенгламасини тузинг ва унинг узунлигини топинг.

1.1. $A(4, 1)$, $B(0, -2)$, $C(-5, 10)$.
1.2. $A(-7, 3)$, $B(5, -2)$, $C(8, 2)$.
1.3. $A(5, -1)$, $B(1, -4)$, $C(-4, 8)$.
1.4. $A(-14, 6)$, $B(-2, 1)$, $C(1, 5)$.
1.5. $A(6, 0)$, $B(2, -3)$, $C(-3, 9)$.
1.6. $A(-9, 2)$, $B(3, -3)$, $C(6, 1)$.
1.7. $A(7, -4)$, $B(3, -7)$, $C(-2, 5)$.
1.8. $A(-8, 4)$, $B(4, -1)$, $C(7, 3)$.
1.9. $A(3, -3)$, $B(-1, -6)$, $C(-6, 6)$.
1.10. $A(-6, 5)$, $B(6, 0)$, $C(9, 4)$.
1.11. $A(4, 11)$, $B(-1, -1)$, $C(7, 5)$.
1.12. $A(3, 13)$, $B(-2, 1)$, $C(6, 7)$.
1.13. $A(7, 11)$, $B(2, -1)$, $C(10, 5)$.
1.14. $A(6, 13)$, $B(1, 1)$, $C(9, 7)$.
1.15. $A(4, 14)$, $B(-1, 2)$, $C(7, 8)$.
1.16. $A(6, 10)$, $B(1, -2)$, $C(9, 4)$.
1.17. $A(4, 13)$, $B(-1, 1)$, $C(7, 7)$.
1.18. $A(6, 11)$, $B(1, -1)$, $C(9, 5)$.

1.19. $A(4, 10)$, $B(-1, -2)$, $C(7, 4)$.
1.20. $A(6, 14)$, $B(1, 2)$, $C(9, 8)$.
1.21. $A(-10, -1)$, $B(-6, -4)$, $C(6, 1)$.
1.22. $A(18, 8)$, $B(12, 0)$, $C(0, 5)$.
1.23. $A(-6, -3)$, $B(-2, -6)$, $C(10, -1)$.
1.24. $A(14, 10)$, $B(8, 2)$, $C(-4, 7)$.
1.25. $A(-2, -1)$, $B(2, -4)$, $C(14, 1)$.
1.26. $A(8, 7)$, $B(2, -1)$, $C(-10, 4)$.
1.27. $A(1, 0)$, $B(5, -3)$, $C(17, 2)$.
1.28. $A(20, 2)$, $B(14, -6)$, $C(26, -1)$.
1.29. $A(-1, 7)$, $B(3, 4)$, $C(15, 9)$.
1.30. $A(7, 6)$, $B(1, 2)$, $C(-11, 3)$.

2. M, N, P, Q нуқталарнинг координаталари берилган.

а) N, P, Q нуқталардан ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлган ва M нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг;

б) M нуқтадан N, P, Q нуқталар орқали ўтувчи текисликкача бўлган масофани топинг:

2.1. $M(1, 7, 5)$, $N(2, 3, 5)$, $P(-1, 12, -4)$, $Q(4, 6, 4)$.
2.2. $M(2, -4, 3)$, $N(3, 1, 4)$, $P(6, 2, -3)$, $Q(2, -2, 3)$.
2.3. $M(1, 1, 1)$, $N(2, 2, 5)$, $P(3, 2, 2)$, $Q(2, 0, 3)$.
2.4. $M(5, 3, -2)$, $N(2, 4, 4)$, $P(1, 3, 5)$, $Q(2, 0, 2)$.
2.5. $M(5, 2, 6)$, $N(0, 1, -4)$, $P(1, 8, 3)$, $Q(4, 2, 1)$.
2.6. $M(6, 3, 4)$, $N(2, 5, 1)$, $P(4, -1, 2)$, $Q(1, 1, 1)$.
2.7. $M(1, 1, 3)$, $N(4, 1, 6)$, $P(2, 2, 1)$, $Q(5, 2, 3)$.
2.8. $M(4, 1, 6)$, $N(1, 1, 3)$, $P(5, 2, 3)$, $Q(2, 2, 1)$.
2.9. $M(2, 2, 1)$, $N(5, 2, 3)$, $P(1, 1, 3)$, $Q(4, 1, 6)$.
2.10. $M(5, 2, 3)$, $N(2, 2, 1)$, $P(4, 1, 5)$, $Q(1, 1, 3)$.
2.11. $M(7, 3, 0)$, $N(2, 4, 7)$, $P(5, 4, 7)$, $Q(6, 6, 2)$.
2.12. $M(7, 9, 6)$, $N(4, 5, 7)$, $P(9, 4, 4)$, $Q(7, 5, 3)$.
2.13. $M(1, 2, 6)$, $N(4, 2, 0)$, $P(4, 6, 6)$, $Q(6, 1, 1)$.

2.14. $M(5, 8, 2)$, $N(3, 5, 10)$, $P(3, 8, 4)$, $Q(5, 5, 4)$.
2.15. $M(3, 9, 8)$, $N(4, 6, 3)$, $P(4, 1, 5)$, $Q(0, 7, 1)$.
2.16. $M(6, 9, 2)$, $N(5, 7, 8)$, $P(-3, 7, 1)$, $Q(9, 5, 5)$.
2.17. $M(3, 6, 7)$, $N(4, 9, 3)$, $P(7, 6, 3)$, $Q(2, 4, 3)$.
2.18. $M(6, 4, 8)$, $N(1, 9, 9)$, $P(5, 8, 3)$, $Q(3, 5, 4)$.
2.19. $M(8, 5, 8)$, $N(1, 7, 3)$, $P(6, 9, 1)$, $Q(3, 3, 9)$.
2.20. $M(0, 4, -1)$, $N(-1, 1, 6)$, $P(-1, 6, 1)$, $Q(3, 1, 4)$.
2.21. $M(1, 3, -1)$, $N(0, 0, 6)$, $P(0, 0, 0)$, $Q(4, 0, 4)$.
2.22. $M(4, -1, 3)$, $N(-3, 1, 1)$, $P(2, 3, -4)$, $Q(-1, -3, 4)$.
2.23. $M(3, -1, 4)$, $N(-2, 4, 5)$, $P(2, 3, -1)$, $Q(0, 0, 0)$.
2.24. $M(5, 2, 4)$, $N(3, 2, -4)$, $P(2, -5, 3)$, $Q(2, 4, -1)$.
2.25. $M(3, 4, -2)$, $N(-6, 2, -3)$, $P(-6, 2, -3)$, $Q(2, 2, 4)$.
2.26. $M(-1, 3, 1)$, $N(-4, 1, -4)$, $P(0, -5, 0)$, $Q(0, 0, -2)$.
2.27. $M(6, 3, -3)$, $N(2, 3, 5)$, $P(3, -2, 6)$, $Q(2, 2, -5)$.
2.28. $M(0, -1, 2)$, $N(5, -2, -1)$, $P(3, 3, 4)$, $Q(3, -1, -2)$.
2.29. $M(3, 3, 4)$, $N(3, -1, -2)$, $P(5, -2, -1)$, $Q(0, -1, 2)$.
2.30. $M(2, -5, 3)$, $N(5, 2, 4)$, $P(-5, 6, -1)$, $Q(3, 2, -4)$.

3. Берилган A нуқта ва берилган

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{p}$$

тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг:

3.1. $A(3, -2, 1)$, $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{4}$.
3.2. $A(4, 5, -2)$, $\frac{x+1}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{-2}$.
3.3. $A(-3, 1, 2)$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.
3.4. $A(-1, 2, 1)$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{2}$.
3.5. $A(2, 1, 2)$, $\frac{x+7}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{8}$.

3.6. $A(-2,\ 3,\ 1)$, $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+5}{4}$.

3.7. $A(-4,\ -1,\ 2)$, $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

3.8. $A(-3,\ 0,\ 2)$, $\frac{x}{5}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+4}{-3}$.

3.9. $A(1,\ 2,\ 3)$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+6}{-2}$.

3.10. $A(1,\ -1,\ -2)$, $\frac{x}{-4}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{5}$.

3.11. $A(-3,\ 2,\ 4)$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-3}$.

3.12. $A(4,\ -3,\ 1)$, $\frac{x-5}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z}{5}$.

3.13. $A(4,\ 5,\ 1)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-3}$.

3.14. $A(4,\ 2,\ -2)$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}$.

3.15. $A(0,\ 2,\ 1)$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$.

3.16. $A(5,\ -1,\ 2)$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-4}$.

3.17. $A(4,\ 2,\ -1)$, $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{3}$.

3.18. $A(-1,\ 4,\ 5)$, $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{4}$.

3.19. $A(-4,\ -1,\ 2)$, $\frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-3}$.

3.20. $A(2,\ 5,\ -1)$, $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{-1}$.

3.21. $A(5,\ 0,\ 4)$, $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

3.22. $A(-4,\ 5,\ 3)$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-2}{2}$.

3.23. $A(3,\ 0,\ 2)$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{5}$.

3.24. $A(-5,\ 3,\ -4)$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{6}=\frac{z}{-3}$.

3.25. $A(4,\ 3,\ 1)$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$.

3.26. $A(-4,\ 1,\ -3)$, $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{3}$.

3.27. $A(2,\ 3,\ 0)$, $\frac{x+3}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$.

3.28. $A(-5,\ 2,\ -1)$, $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-3}$.

3.29. $A(6,\ 2,\ 0)$, $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+4}{-3}$.

3.30. $A(-6,\ 3,\ 2)$, $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{-3}$.

3- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. *ABC* учбурчакнинг учлари берилган. Куйидагиларни топинг: а) *AB* томон тенгламасини;

б) *C* учидан *AB* томонга туширилган баландлик тенгламасини;

в) *A* учидан *BC* томонга туширилган медиана тенгламасини;

г) «б» ва «в» бандларда топилган баландлик билан медиананинг кесишган нуқтасини;

д) *C* нуқтадан ўтувчи *AB* томонга параллел тўғри чизиқ тенгламасини;

е) *C* нуқтадан *AB* тўғри чизиққача бўлган масофани.

1.1. $A(4,\ -5)$, $B\ (6,\ 9)$, $C(-4,\ -1)$.

1.2. $A(1,\ -3)$, $B\ (-5,\ 4)$, $C(-2,\ 10)$.

1.3. $A(1,\ 8)$, $B\ (-5,\ -4)$, $C(-1,\ -3)$.

1.4. $A(0,\ 4)$, $B\ (5,\ -3)$, $C(-6,\ -2)$.

1.5. $A(6,\ -4)$, $B\ (-8,\ 3)$, $C(-2,\ -7)$.

1.6. $A(2,\ 3)$, $B\ (-4,\ -7)$, $C(2,\ 0)$.

1.7. $A(-4,\ -8)$, $B\ (4,\ 1)$, $C(0,\ 7)$.

1.8. $A(4,\ -2)$, $B\ (7,\ 0)$, $C(-3,\ 1)$.

1.9. $A(4,\ 1)$, $B\ (-2,\ 8)$, $C(1,\ -5)$.

1.10. $A(4,\ 0)$, $B\ (1,\ -3)$, $C(5,\ 2)$.

1.11. $A(7,\ 10)$, $B\ (1,\ 3)$, $C(4,\ -2)$.

1.12. $A(8,\ 6)$, $B\ (1,\ 3)$, $C(-2,\ -3)$.

1.13. $A(11,\ -3)$, $B\ (-1,\ -3)$, $C(7,\ 1)$.

1.14. *A* (5, 9), *B* (4, −1), *C* (0, 1).

1.15. *A* (7, 3), *B* (1, 7), *C* (−2, 1).

1.16. *A* (1, 6), *B* (6, 1), *C* (−3, −2).

1.17. *A* (2, 6), *B* (6, −6), *C* (2, −4).

1.18. *A* (10, 1), *B* (3, 7), *C* (−3, 4).

1.19. *A* (8, 3), *B* (2, 8), *C* (−4, 4).

1.20. *A* (7, 7), *B* (−7, 5), *C* (−3, −3).

1.21. *A* (3, −3), *B* (4, 3), *C* (−6, 1).

1.22. *A* (6, 2), *B* (−6, 8), *C* (2, −4).

1.23. *A* (7, 5), *B* (−4, 0), *C* (2, −5).

1.24. *A* (8, −1), *B* (2, 6), *C* (−4, 4).

1.25. *A* (−5, 0), *B* (2, −6), *C* (8, −3).

1.26. *A* (1, −4), *B* (−1, 10), *C* (−9, 6).

1.27. *A* (−3, 7), *B* (−1, 3), *C* (2, −4).

1.28. *A* (10, 4), *B* (−4, 6), *C* (−1, 3).

1.29. *A* (2, −6), *B* (3, 11), *C* (−1, 3).

1.30. *A* (−5, 5), *B* (4, −7), *C* (−2, −7).

2. *ABCD* пирамиданинг учлари берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) *ABC* текислик тенгламасини;

б) *AB* қирра тенгламасини;

в) *D* учидан ўтувчи *ABC* ўққа перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини;

г) *C* учидан ўтувчи *AB* қиррага параллел тўғри чизиқ тенгламасини;

д) *D* учидан ўтувчи *AB* қиррага перпендикуляр текислик тенгламасини;

е) *AD* қирра билан *ABC* ёқ орасидаги бурчак синусини;

ж) *ABC* ва *ABD* ёқлар орасидаги бурчак косинусини;

з) *D* учдан *ABC* ёққача бўлган масофани.

2.1. *A* (7, 3, 5), *B* (5, 3, 2), *C* (10, 2, 4), *D* (7, −2, 1).

2.2. *A* (−8, −6, −3), *B* (4, 2, 1), *C* (0, 5, 2), *D* (0, 2, 5).

2.3. *A* (7, −3, 14), *B* (−6, 0, 5), *C* (1, 2, 1), *D* (−2, −1, 2).

2.4. *A* (5, 5, −6,), *B* (−4, −8, 4), *C* (1, 7, −1), *D* (−4, 0, −2).

2.5. *A* (7, −8, −1), *B* (−3, −6, −2), *C* (2, −3, −5), *D* (5, 4, 14).

2.6. *A* (16, −8, −13), *B* (6, 2, 5), *C* (−3, 0, 3), *D* (0, 2, 1).

2.7. *A* (7, 3, −5), *B* (1, 2, 3), *C* (−1, 2, 1), *D* (2, −1, 2).

2.8. *A* (8, 3, 2), *B* (4, −2, 2), *C* (3, 1, −1), *D* (2, 1, 1).

2.9. *A* (8, −4, −5), *B* (7, 3, 6), *C* (−2, 1, 4), *D* (1, 3, 2).

2.10. *A* (6, −7, −3), *B* (1, 2, 3), *C* (1, 3, 2), *D* (2, 1, 1).

2.11. *A* (−12, 7, −1), *B* (0, −2, −5), *C* (−4, 5, 1), *D* (−7, 4, −3).

2.12. *A* (−5, −6, 1), *B* (−2, 1, 2), *C* (0, −1, 4), *D* (−3, 2, −1).

2.13. *A* (−1, 0, −7), *B* (4, −5, 3), *C* (−2, 1, −9), *D* (1, −1, −3).

2.14. *A* (2, 4, −2), *B* (−1, 1, 2), *C* (3, 0, −2), *D* (1, −1, 1).

2.15. *A* (4, −1, 2), *B* (−1, 1, 0), *C* (2, −1, 1), *D* (0, 2, 1).

2.16. *A* (16, −9, −5), *B* (1, −2, 2), *C* (−1, 2, 1), *D* (2, 0, 1).

2.17. *A* (−9, −2, 3), *B* (6, −1, −2), *C* (1, 0, 1), *D* (−3, 2, 1).

2.18. *A* (−10, 7, −6), *B* (−3, 0, −6), *C* (−5, 3, −2), *D* (−1, 10, 3).

2.19. *A* (5, 3, −2), *B* (−1, 0, 3), *C* (−4, −2, −1), *D* (4, 2, −1).

2.20. *A* (−5, 4, −3), *B* (5, −1, 2), *C* (2, 1, −4), *D* (1, −3, 0).

2.21. *A* (0, 3, 4), *B* (1, 0, 3), *C* (2, −1, 4), *D* (0, 3, 1).

2.22. *A* (−16, 20, −21), *B* (−4, 1, 3), *C* (2, 3, 0), *D* (−1, −1, −2).

2.23. *A* (2, −1, 1), *B* (3, 7, −2), *C* (3, 6, −3), *D* (−7, 5, 1).

2.24. *A* (8, −10, 2), *B* (−3, 3, −1), *C* (0, −6, 5), *D* (−3, −4, 2).

2.25. *A* (7, 2, −3), *B* (4, 1, 1), *C* (2, 1, 2), *D* (2, −1, 1).

2.26. *A* (5, −4, 5), *B* (1, 0, −1), *C* (1, 2, 2), *D* (6, 3, 1).

2.27. *A* (8, 1, −12), *B* (8, 5, −10), *C* (0, −3, 2), *D* (6, 2, −4).

2.28. *A* (8, 1, 10), *B* (−1, −2, −5), *C* (−2, −1, 7), *D* (4, 2, 7).

2.29. *A* (8, 1, −3), *B* (2, −3, −7), *C* (−2, 5, 3), *D* (4, 1, 2).

2.30. *A* (−7, −8, 10), *B* (−3, 6, 3), *C* (−3, 0, −6), *D* (2, −5, −1).

3. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини ёзинг:

3.1. $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ 3x+3y+z-1=0, \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} x-3y+z+3=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 6x-5y+3z+8=0, \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} 2x-4y-2z+4=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ 5x+3y+2z-4=0, \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ 8x-5y-3z-1=0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x+3y+2z+14=0, \\ 5x+3y+2z-4=0, \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x+y+z+11=0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y+z+6=0, \end{cases}$ **3.10.** $\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ 6x-y-4z-3=0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x-5y-z+5=0, \\ x+5y-2z+3=0, \end{cases}$ **3.12.** $\begin{cases} x-y+z+2=0, \\ 7x+y+z-5=0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-z+8=0, \end{cases}$ **3.14.** $\begin{cases} 2x-y-3z-2=0, \\ 3x-y-2z-1=0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x+7y-4z-5=0, \\ 2x-7y+2z+8=0, \end{cases}$ **3.16.** $\begin{cases} 2x-y+z+6=0, \\ 3x+y+2z-4=0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x-y+z-2=0, \\ 6x+y-4z+8=0, \end{cases}$ **3.18.** $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z+4=0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x-2y-z+4=0, \\ 6x+2y+3z+4=0, \end{cases}$ **3.20.** $\begin{cases} 2x-y-3z-8=0, \\ 2x-5y+2z-4=0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x+3y+2z-6=0, \end{cases}$ **3.22.** $\begin{cases} x-2y+z+4=0, \\ 2x+2y+z-4=0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ 5x-3y-z+8=0, \end{cases}$ **3.24.** $\begin{cases} x-y+2z+2=0, \\ x-3y-z+4=0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ x-4y-2z+3=0, \end{cases}$ **3.26.** $\begin{cases} 2x-4y+3z+4=0, \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ 3x-y-2z+7=0, \end{cases}$ **3.28.** $\begin{cases} 2x-4y+3z+4=0, \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 2x-3y+z-8=0, \end{cases}$ **3.30.** $\begin{cases} 3x-y+2z-4=0, \\ 2x+3y-2z+6=0. \end{cases}$

4. Берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуктасини топинг:

4.1. $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{10}$, $x+2y-2z+25=0.$

4.2. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2}$, $2x-7y-3z-21=0.$

4.3. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}$, $5x-2y-z-13=0.$

4.4. $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{3}$, $4x-y+3z+6=0.$

4.5. $\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{6}$, $5x-2y+3z-3=0.$

4.6. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{-2}$, $5x-2y+3z-3=0.$

4.7. $\frac{x-8}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$, $4x+9y+5z=0.$

4.8. $\frac{x+8}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$, $6x-y-4z-3=0.$

4.9. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-5}{-1}$, $5x-7y-3z+11=0.$

4.10. $\frac{x+5}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}$, $3x+7y+z+11=0.$

4.11. $\frac{x+5}{12}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z-1}{8}$, $3x-2y-z-6=0.$

4.12. $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{-2}$, $4x-5y+2z+24=0.$

4.13. $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $7x+4y+3z-16=0.$

4.14. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, $3x+4y-5z+20=0.$

4.15. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $7x-3y+2z-28=0.$

4.16. $\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-3}{-1}$, $4x+y-7z-19=0.$

4.17. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $5x-3y+z-36=0.$

4.18. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+3}{1}$, $4x-y+5z+3=0.$

4.19. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$, $x-2y-z+2=0.$

4.20. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$, $4x+2y-3z+8=0.$

4.21. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $x-2y-4z+11=0.$

4.22. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+2}{1}$, $5x+3y-2z+7=0.$

4.23. $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$, $3x-y+2z+23=0$.

4.24. $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{2}$, $4x-2y+z-19=0$.

4.25. $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}$, $3x-2y+z-8=0$.

4.26. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $5x+2y+z-15=0$.

4.27. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-1}{-1}$, $7x+3y+z-25=0$.

4.28. $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}$, $4x-y+2z=0$.

4.29. $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{1}$, $5x-y-3z+10=0$.

4.30. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}$, $x+3y-5z-21=0$.

9- §. Эллипс, гипербола ва параболанннг каноник тенгламалари

1.9.1. *Эллипс* деб текисликдаги шундай нуқталар тўиламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридаи шу текисликнинг *фокуслар* деб аталувчи икки иуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас микдордир.

Фокуслари Ox ўқда координаталар бошига нисбатан симметрик ётувчи эллипснинг (10- шакл) каноник тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$

Бунда a ва b эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари узунликлари. Фокуслар орасидаги масофани $2c$ десак, $c^2=a^2-b^2$ муносабат ўринли. Эллипсиинг эксцентриситети деб

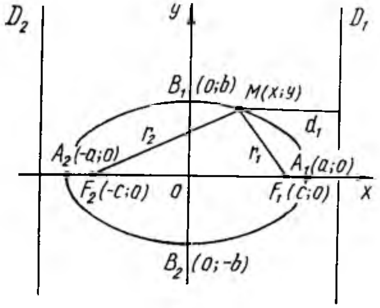
$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

га айтилади.

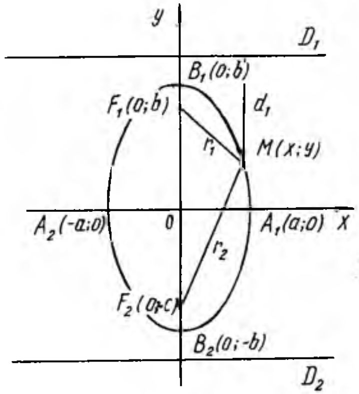
Эллипснинг $M(x, y)$ нуктасидаи фокусларигача бўлган масофалар (r_1 ва r_2 билан белгиланади) унинг *фокал радиуслари* дейилади.

Тенгламалари

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{a^2}{c}, \ a>b,$$



10- шакл



11- шакл

дан иборат иккита тўғри чизиқ эллипснинг *директрисалари* дейилади ва улар ушбу хоссага эга:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Агар $a<b$ бўлса, у ҳолда эллипснинг фокуслари Oy ўқда ётади (11- шакл), $2b$ унинг катта ўқи, эксцентриситети эса $\varepsilon=\frac{c}{b}$ бўлади, бунда $c^2=b^2-a^2$. Директрисалари тенгламалари:

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}=\pm\frac{b^2}{c}.$$

Агар $a=b$ бўлса, эллипс радиуси a, маркази координаталар бошида бўлган $x^2+y^2=a^2$ айланадан иборат бўлади.

1.9.2. *Гипербола* деб текисликдаги шундай нуқталар тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг *фокуслар* деб аталувчи икки нуқтасигача бўлган масофалар айирмаларининг абсолют қийматлари ўзгармас миқдордир.

Фокуслари Ox ўқда координаталар бошига нисбатаи симметрик ҳолда ётувчи гиперболанинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишга эга. Бунда a — гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи узунлиги; b — мавҳум ярим ўқи узунлиги. Агар фокуслар орасидаги масофани $2c$ десак, $b^2=c^2-a^2$ бўлади.

Гипербола *эксцентриситети* деб

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$$

га айтилади.

Гиперболанинг *фокал радиуслари* деб, унинг $M(x, y)$ нуқтасидан фокусларигача бўлган масофаларига (r_1 ва r_2 билан белгиланади) айтилади.

Гиперболанинг *директрисалари* деб, тенгламалари

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{a^2}{c}$$

дан иборат бўлган ва қуйидаги хоссаларга эга иккита тўғри чизиққа айтилади:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Гипербола тенгламалари $y=\pm\frac{b}{a}x$ дан иборат иккита асимптотага эга.

Агар $a=b$ бўлса, гипербола *тенг томонли гипербола* дейилади ва унинг тенгламаси

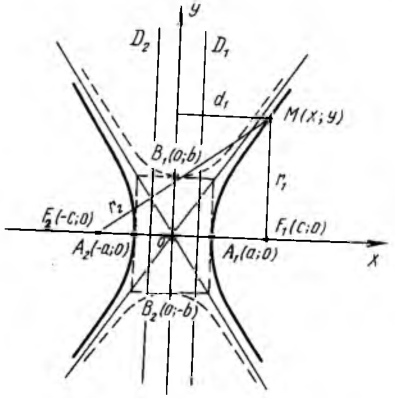
$$x^2-y^2=a^2$$

кўринишни олади, асимптоталари тенгламаси эса $y=\pm x$ дан иборат бўлади.

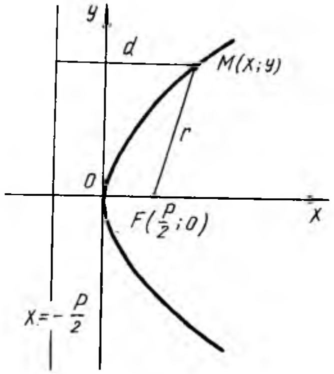
Агар гиперболанинг асимптоталари Oy ўқда координаталар бошига нисбатан симметрик ётса, у ҳолда унинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{ёки} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

кўринишни олади. Гиперболанинг эксцентриситети $\varepsilon=\frac{c}{b}$, директрисалари $y=\pm\frac{b}{c}=\pm\frac{b^2}{c}$, асимптоталари $y=\pm\frac{b}{a}x$ бўлади.



12- шакл



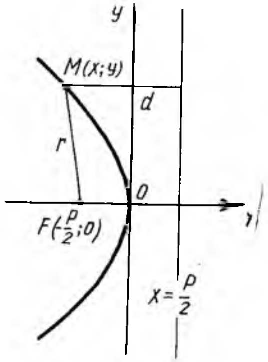
13- шакл

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ва} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

гиперболалар *қўшма гиперболалар* дейилади (12- шакл).

1.9.3. *Фокус* деб аталувчи берилган нуқтадан ва *директриса* деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётувчи текисликдаги нуқталар тўплами *парабола* дейилади.

Учи координаталар бошида ётувчи, симметрия ўқи Ox ўқдан иборат бўлган параболанинг каноник тенгламаси



14- шакл

$$y^2=2px$$

кўринишга эга (13- шакл). Бунда $p>0$ (парабола параметри) — фокусдан директрисагача бўлган масофа. Директрисанинг тенгламаси $x=-\frac{p}{2}$ кўринишга эга.

Агар r — параболанинг $M(x, y)$ нуқтасидан парабола фокусигача бўлган масофа, d — шу $M(x, y)$ нуқтадан директрисагача бўлган масофаси бўлса, у ҳолда унинг эксцентриситети

$$\varepsilon=\frac{r}{d}=1.$$

Учи координаталар бошида, симметрия ўқи Oy бўлган параболанинг каноник тенгламаси ушбу кўринишга эга (14- шакл):

$$x^2=2py \quad (p>0).$$

Унинг директрисаси тенгламаси эса: $y=\frac{p}{2}$.

Мисол. Фокуслари орасидаги масофа 10 га ва мавҳум ярим ўқи 3 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $b=3$ ва $2c=10$, бундан $c=5$ ва $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$ келиб чиқади. Демак, изланаётган каноник тенглама

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

кўринишда бўлади.

1.9.4. Ушбу

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0),$$
$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$$

тенгламалар мос равишда марказлари $C(x_0,\ y_0)$ нуқтада бўлган айлана, эллипс, гипербола ва учи $C(x_0,\ y_0)$ нуқтада ётувчи параболаларни аниқлайди.

9- дарсхона топшириғи

1. $9x^2+25y^2=225$ эллипс берилган. Унинг ярим ўқларини, фокуслари координаталарини, эксцентриситети, директрисалари тенгламаларини топинг ва шаклини чизинг.

Ж: $a=5$, $b=3$; $F_1(4,\ 0)$; $F_2(-4,\ 0)$; $\varepsilon=0{,}8$; $x=\pm\frac{25}{4}$.

2. $16x^2-9y^2=144$ гипербола берилган. Унинг ярим ўқини, фокуслари координаталарини, эксцентриситетини, директрисаси ва асимптоталари тенгламасини топинг. Шаклини чизинг. Ж: $a=3$, $b=4$, $F_1(5,\ 0)$ ва $F_2(-5,\ 0)$; $\varepsilon=\frac{5}{3}$; $x=\pm\frac{9}{5}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$.

3. $y^2=6x$ парабола берилган. Унинг p параметрини, директрисаси тенгламасини топинг ва шаклини чизинг.

Ж: $p=3$, $F\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$; $x=-\frac{3}{2}$.

4. Фокуслари абсцисса ўқида ётувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи эллипснинг каноник тенгламасини тузинг:

а) унинг кичик ўқи 24 га, фокуслар орасидаги масофа 10 га тенг;

б) директрисалари орасидаги масофа 32 га, эксцентриситети 0,5 га тенг.

5. Эллипснинг фокуслари ординаталар ўқида ётиб,

а) унинг кичик ўқи 16 га, эксцентриситети эса 0,6 га тенг;

б) унинг фокуслари орасидаги масофа 6 га ва директрисалари орасидаги масофа $16\frac{2}{3}$ га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

6. Гиперболанинг фокуслари абсциссалар ўқида ётиб,

а) унинг фокуслари орасидаги масофа 6 га ва эксцентриситети 1,5 га тенг;

б) унинг ҳақиқий ярим ўқи 5 га тенг, учлари эса марказни билан фокуси орасидаги масофани тенг иккига бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

7. Гиперболанинг фокуслари Oy ўқида ётиб,

а) асимптоталари тенгламалари $y=\pm\frac{12}{5}x$ ва учлари орасидаги масофа 48 га тенг;

б) фокуслари орасидаги масофа 10 га, эксцентриситети $\frac{5}{3}$ га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

8. Параболанинг каноник тенгламасини тузинг:

а) параболанинг фокуси $F(0,\ 4)$; б) парабола Ox ўққа нисбатан симметрик ва $A(9,\ 6)$ нуқтадан ўтади.

9. Чизиқлар тенгламаларини соддалаштиринг, уларнинг турини аниқланг, параметрларини топинг ва шаклини чизинг:

а) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$;
б) $2x^2+5y^2+8x-10y-17=0$;
в) $x^2-6y-12x+36y-48=0$;
г) $x^2-8x+2y+18=0$;
д) $y^2-4x+4y+16=0$.

9- мустақил иш

1. $x^2+4y^2=4$ эллипс фокусларидан ўтувчи ва маркази эллипснинг юқори учида бўлган айлана тенгламасини тузинг.

Ж: $x^2+(y-1)^2=4$.

2. а) Катта ўқи 6 га тенг, фокуси эса $F(\sqrt{5},0)$ нуқтада бўлган эллипс;

б) мавҳум ўқи 4 га тенг ва фокуси $F(-\sqrt{13},0)$ нуқтада бўлган гипербола;

в) директрисаси $y=-3$ бўлган параболаининг каноник тенгламасини тузинг.

Ж: а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $x^2=12y$.

3. Ҳар бир нуқтасидан $A(3,\ 2)$ нуқтагача бўлган масофа $B(-1,\ 0)$ нуқтагача бўлган масофадан 3 марта ортиқ бўлган чизиқ тенгламасини тузинг.

$$Ж:\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16}.$$

10- §. Иккиичи тартибли сиртларнииг каноник тенгламалари

1.10.1. Иккинчи тартибли сиртлар:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — уч ўқли эллипсоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — бир паллали гиперболоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ икки паллали гиперболоид;

$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ эллиптик параболоид (p ва q ларнинг ишоралари бир хил);

$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ — гиперболик параболоид (p ва q ларнинг ишоралари бир хил);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — конус;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптик цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболик цилиндр;

$y^2=2px$ — параболик цилиндр.

Айланиш сиртлари дастлабки тўртта иккинчи тартибли сиртнинг хусусий ҳолидир:

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — айланиш эллипсоиди;

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — бир паллали айланиш гиперболоиди;

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — икки паллали айланиш гиперболоиди;

$x^2+y^2=2pz$ — айланиш параболоиди.

10-дарсхона топшириғи

1. Берилган тенгламалар билан аниқланувчи сиртларнинг шаклини чизинг.

а) $4x^2+y^2+2z^2=2$;
б) $2x^2+9y^2-2z^2=36$;
в) $4x^2+y^2-8z^2=-16$;
г) $2y=4x^2+z^2$;
д) $x^2+4z^2=4$;
е) $y^2-4z=0$.

2. Сирт турини аниқланг ва унинг шаклини чизинг:

а) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$;
б) $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$;
в) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$;
г) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.

10-мустақил иш

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг шаклини чизинг:

1. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$ ва $z=0$;
2. $z=y^2$, $x^2+y^2=9$ ва $z=0$;
3. $z^2=4-y$ ва $x^2+y^2=4y$.

4-назорат иши

1. Чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва унинг шаклини чизинг:

1.1. а) $4x^2+2y^2-16x+4y+10=0$;
б) $5x^2-6y^2+30x+12y+9=0$;
в) $x^2+10x-4y+33=0$.

1.2. а) $3x^2+5y^2+6x-20y+8=0$;
б) $4x^2-y^2+16x+12=0$;
в) $y^2+3x+10y+46=0$.

1.3. а) $x^2+2y^2+6x-4y+9=0$;
б) $x^2-4y^2-2x+16y-19=0$.
в) $x^2-4x+2y-2=0$.

1.4. а) $x^2+4y^2+16y+12=0$;
б) $2x^2-3y^2-12x-18y-15=0$;
в) $y^2+8x+10y+9=0$.

1.5. а) $6x^2+5y^2-10y-25=0$;
б) $5x^2-6y^2-5x-25=0$;
в) $x^2+8x-9y-29=0$.

1.6. а) $5x^2+6y^2-10x-25=0$;
б) $6x^2-5y^2+10y-35=0$;
в) $y^2-16x-6y+25=0$.

1.7. а) $2x^2+3y^2-12x+18y+39=0$;
б) $x^2-4y^2-16y-20=0$;
в) $x^2+8x-2y+14=0$.

1.8. а) $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$;
б) $x^2-2y^2+6x+4y+5=0$;
в) $y^2+x-4y+2=0$.

1.9. а) $4x^2+y^2+16x+12=0$;
б) $3x^2-5y^2+6x+20y-32=0$;
в) $x^2+6x+5y-6=0$.

1.10. а) $5x^2+6y^2+30x-12y+21=0$;
б) $4x^2-2y^2-8x-4y+6=0$;
в) $y^2-2x+6y+17=0$.

1.11. а) $16x^2+9y^2+96x-18y+9=0$;
б) $16x^2-9y^2-160x-36y+220=0$;
в) $x^2-4x+5y+14=0$.

1.12. а) $4x^2+5y^2-24x+70y+181=0$;
б) $4x^2-16y^2-72x-64y+196=0$;
в) $y^2-6x+2y-11=0$.

1.13. а) $3x^2+2y^2-6x-12y+15=0$;
б) $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$;
в) $x^2-8x-3y+19=0$.

1.14. а) $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$;
б) $2x^2-y^2+4x+4y-10=0$;
в) $y^2-5x+6y+4=0$.

1.15. а) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$;
б) $4x^2-25y^2-24x-100y-164=0$;
в) $x^2-6x+5y-6=0$.

1.16. а) $6x^2+5y^2+12x-20y-4=0$;
б) $25x^2-9y^2-100x-36y-161=0$;
в) $y^2-3x-2y+7=0$.

1.17. а) $5x^2+3y^2+20x+24y+53=0$;
б) $5x^2-8y^2+30x+16y-3=0$;
в) $x^2-7y+12x+50=0$.

1.18. а) $3x^2+4y^2-12x-16y+16=0$;
б) $8x^2-9y^2-16x+36y-100=0$;
в) $y^2-4x+4y+8=0$.

1.19. а) $4x^2+5y^2+24x+10y+21=0$;
б) $9x^2-5y^2-36x-30y-54=0$;
в) $x^2-3y-14x+31=0$.

1.20. а) $16x^2+9y^2-64x-18y-71=0$;
б) $9x^2-4y^2+18x+24y-63=0$;
в) $y^2+2x-6y+11=0$.

1.21. а) $9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$;
б) $16x^2-9y^2-64x+18y-62=0$;
в) $x^2+4y+10x-3=0$.

1.22. а) $9x^2-5y^2-18x+30y+36=0$;
б) $4x^2-5y^2+24x-10y+11=0$;
в) $y^2+3x+10y+28=0$.

1.23. а) $8x^2+9y^2-16x-36y-28=0$;
б) $3x^2-4y^2-12x+16y-16=0$;
в) $x^2+4y-4x+24=0$.

1.24. а) $5x^2+8y^2+30x-16y+13=0$;
б) $6x^2-5y^2+12x+20y-44=0$;
в) $y^2+5x+8y+1=0$.

1.25. а) $25x^2+9y^2-100x+36y-89=0$;
б) $5x^2-3y^2+20x-24y-43=0$;
в) $x^2-4y+2x+9=0$.

1.26. а) $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$;
б) $16x^2-25y^2-32x+100y-484=0$;
в) $y^2+6x-8y+22=0$.

1.27. а) $5x^2+6y^2+20x-12y-4=0$;
б) $9x^2-16y^2-54x-32y-79=0$;
в) $x^2-4y-6x+1=0$.

1.28. а) $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$;
б) $8x^2-5y^2-32x+10y-13=0$;
в) $y^2-3x+10y+16=0$.

1.29. а) $9x^2+16y^2-54x+32y-47=0$;
б) $5x^2-6y^2+20x+12y-16=0$;
в) $x^2+3y+10x+19=0$.

1.30. а) $16x^2+25y^2-32x-100y-284=0$;
б) $4x^2-9y^2-36x-36y-36=0$;
в) $y^2+5x+6y-1=0$.

2. Сирт турини аникланг:

2.1. $x^2+2y^2+4z^2=4$.
2.2. $x^2+4y^2=4$.
2.3. $x^2-2y^2-4z^2=4$.
2.4. $4x^2-5z^2=20$.
2.5. $9x^2-2y+z^2=18$.
2.6. $y^2-4x=0$.
2.7. $4x^2+2z^2-y=0$.
2.8. $4x^2+5y=0$.

2.9. $3y^2-2z^2+3x=0.$

2.10. $6y^2-z=0.$

2.11. $6x^2+y^2+3z^2=18.$

2.12. $x^2+4z=0.$

2.13. $4x^2+y^2-3z^2=12.$

2.14. $5z^2-x=0.$

2.15. $5x^2-y^2-z^2=5.$

2.16. $2z^2+5y=0.$

2.17. $3x^2+y^2-2z=0.$

2.18. $4x^2+3z^2=12.$

2.19. $2y^2+z-3x^2=0.$

2.20. $2y^2+5z^2=10.$

2.21. $9x^2+3y^2+5z^2=45.$

2.22. $3z^2-4y^2=12.$

2.23. $6x^2-3y^2+z^2=6.$

2.24. $x^2-4y^2=4.$

2.25. $4x^2-9y^2-2z^2=18.$

2.26. $3y^2-x^2=3.$

2.27. $3y^2+5z^2-15x=0.$

2.28. $4y^2-5z^2=20.$

2.29. $4z^2-3x^2-12y=0.$

2.30. $3z^2-4x^2=12.$

4- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Қуйидагилар маълум:
A, B — эгри чизиқда ётувчи нуқталар;
F — фокус;
a — катта ярим ўқ (ёки ҳақиқий ярим ўқ);
b — кичик (ёки мавҳум) ярим ўқ;
ε — эксцентриситет;
$y=\pm kx$ — гипербола асимптоталари тенгламалари;
D — эгри чизиқ директрисаси;
$2c$ — фокус масофаси.

а) эллипснинг; б) гиперболанинг; в) параболанинг каноник тенгламасини тузинг:

1.1. а) $a=9$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{17}}{9}$; б) $b=7$; $F(-\sqrt{130}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy, $A(-4, 32)$.

1.2. $b=3$, $F(-\sqrt{55}, 0)$; б) $a=8$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$; в) D: $x=3$.

1.3. $A(5, \frac{5}{6}\sqrt{11})$, $B(-4, \frac{5\sqrt{5}}{3})$; б) $k=\frac{2}{7}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{53}}{7}$; в) D:$y=-4$.

1.4. а) $\varepsilon=\frac{4}{5}$, $A(-4, \frac{9}{5})$; б) $A(-5, \frac{9}{4})$ ва $B(\frac{20}{3}, -4)$; в) симметрия ўқи Ox, $A(-6, 10)$.

1.5. а) $2a=18$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{77}}{9}$; б) $k=\frac{6}{7}$; $c=\sqrt{85}$; в) D: $y=5$.

1.6. а) $b=5$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$; б) $k=\frac{4}{7}$; $2a=14$, в) D: $x=-3$.

1.7. а) $a=6$, $\varepsilon=\frac{7\sqrt{3}}{2}$; б) $b=1$, $F(-\sqrt{17}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy, $A(-4, -10)$.

1.8. а) $b=4$, $F(-3, 0)$; б) $a=3$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$; в) D: $x=8$.

1.9. а) $A(-3\sqrt{5}, 4)$ ва $B(6, -2\sqrt{5})$; б) $k=\frac{5}{9}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{106}}{9}$; в) D:$y=-16$.

1.10. а) $\varepsilon=\frac{\sqrt{39}}{8}$; $A(-4, \frac{5\sqrt{3}}{2})$; б) $A(-6, \frac{7\sqrt{7}}{4})$ ва $B(\frac{16\sqrt{6}}{7}, 5)$, в) симметрия ўқи Ox, $A(-3, 6)$.

1.11. а) $2a=12$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $k=\frac{1}{3}$, $2c=4\sqrt{10}$; в) D:$y=8$.

1.12. а) $b=2$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $k=\frac{1}{3}$, $2a=18$; в) D:$x=-5$.

1.13. а) $a=9$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{65}}{9}$; б) $b=4$, $F(-4\sqrt{5}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy, $A(-3, 4)$.

1.14. а) $b=2$, $F(-2\sqrt{15}, 0)$; б) $a=5$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{29}}{5}$; в) D:$x=\frac{5}{8}$.

1.15. а) $A(-3, \frac{6}{7}\sqrt{10})$ ва $B(\frac{7}{3}\sqrt{5}, -2)$; б) $k=\frac{1}{3}$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{3}$; в) D:$y=-\frac{3}{8}$.

1.16. а) $\varepsilon=\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $A(6, -\frac{7\sqrt{5}}{3})$; б) $A(-\frac{9\sqrt{5}}{2}, 4)$ ва $B(3, -\frac{8\sqrt{10}}{3})$; в) симметрия ўқи Ox, $A(-3, 8)$.

1.17. а) $2a=16$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$; б) $k=\frac{3}{8}$, $2c=2\sqrt{73}$; в) D:$y=6$.

1.18. а) $b=2$, $\varepsilon=\frac{3\sqrt{5}}{7}$, б) $k=\frac{5}{6}$, $2a=12$; в) D:$x=-\frac{5}{9}$.

1.19. а) $a=4$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$; б) $b=3$, $F(-\sqrt{34}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy, $A(-3, -4)$.

1.20. а) $b=6$, $F(\sqrt{13}, 0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{85}}{9}$; в) D:$x=6$.

1.21. а) $a(4, -\frac{4\sqrt{33}}{7})$ ва $B(-\frac{7\sqrt{7}}{4}, 3)$; б) $k=\frac{5}{7}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{74}}{7}$; в) D:$y=-6$.

1.22. а) $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $A(-3, \frac{\sqrt{7}}{4})$; б) $A(8, -\sqrt{17})$ ва $B(10, 4)$; в) D:$y=-8$.

1.23. а) $2a=6$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $k=\frac{4}{5}$, $2c=2\sqrt{41}$; в) симметрия ўқи Ox, $A(-2, 6)$.

1.24. а) $b=5$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{14}}{9}$; б) $k=\frac{2}{3}$, $2a=18$; в) D:$x=-5$.

1.25. а) $a=8$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{8}$; б) $b=5$, $F(-\sqrt{89}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy, $A(-2, 6)$.

1.26. а) $b=2$, $F(-4\sqrt{2}, 0)$; б) $a=6$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$; в) $D{:}x=9$.

1.27. а) $A(6, -\sqrt{5})$ ва $B(-3\sqrt{5}, 2)$; б) $k=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $D{:}y=-3$.

1.28. а) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(-6, -\sqrt{7})$; б) $A(10, \frac{4\sqrt{19}}{9})$, $(B\frac{9\sqrt{5}}{2}, -2)$; в) $D{:}y=9$.

1.29. а) $2a=10$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}$; б) $k=\frac{1}{4}$, $2c=4\sqrt{17}$; в) симметрия ўқи Ox, $A(3, -5)$.

1.30. а) $b=1$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $k=\frac{3}{7}$, $2a=14$; в) $D{:}x=-\frac{3}{4}$.

2. Ҳар бир N нуктаси қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган чизиқларнинг тенгламасини тузинг:

2.1. N нуқта $A(0, -4)$ нуқтадан ва $y+2=0$ тўғри чизиқдан бир хил узоқлашган.

2.2. N нуқтадан $A(-1, 3)$ ва $B(7,3)$ нуқталаргача бўлган масофалар йиғиидиси ўзгармас миқдор, ҳамда $C(6, \frac{27}{5})$ нуқта изланаётган чизиққа тегишлн.

2.3. N нуқтадан $A(8, 0)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x-2=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта катта.

2.4. N нуқтадан координаталар бошигача ва $A(0, -4)$ нуқтагача бўлган масофалар квадратлари йиғиидиси 16 га тенг.

2.5. N нуқта $A(-4, 3)$ ва $B(1, -2)$ нуқталардаи бир хил узоқлашган.

2.6. N нуқта $A(0, 2)$ нуқтага $B(0, 6)$ нуқтага қараганда икки марта яқин туради.

2.7. N нуқта $x+6=0$ тўғри чизиқ ва координаталар бошидан бир хил узоқлашган.

2.8. N нуқтадан $A(0, 4)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $y-36=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан уч марта кичик.

2.9. N нуқтадан $A(0, -1)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $y+9=0$ тўғри чнзиққача бўлган масофадан уч марта ортиқ.

2.10. N нуқта ординаталар ўқидан ва $A(2, 0)$ нуқтадан бир хил узоқлашган.

2.11. N нуқта $A(5, -1)$ ва $B(0, 4)$ нуқталардан бир хил узоқлашган.

2.12. N нуқтадан $A(0, 1)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $B(0, 4)$ нуқтагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.13. N нуқтадан координаталар бошигача ва $A(5, 0)$ нуқтагача бўлган масофалар нисбати 2:1 га тенг.

2.14. N нуқтадан $A(-1, 1)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x+4=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.15. N нуқтадан $x-1=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа ундан $A(4, 1)$ нуқтагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.16. N нуқтадан $A(2, 0)$ нуқтагача ва $5x+8=0$ тўғри чизиққача бўлган масофалар нисбати 5:4 га тенг.

2.17. N нукта координаталар бошидан ва $x+4=0$ тўғри чизиқдан бир хил узоқлашган.

2.18. N нуқтадан $A(-8, 1)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x+2=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта катта.

2.19. N нуқта $A(2, 2)$ нуқтадан ва абсциссалар ўқидан бир хил узоқлашган.

2.20. N нуқтадан $A(3, 0)$ нуқтагача бўлган масофа ундан ординаталар ўқигача бўлган масофадан икки марта катта.

2.21. N нуқтадан координаталар бошигача ва $3x+16=0$ тўғри чизиққача бўлган масофалар нисбати 3:5 га тенг.

2.22. N нуқтадан $A(1, 0)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $B(-2, 0)$ нуқтагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.23. N нуқтадан координаталар бошигача ва $A(0, 5)$ нуқтагача масофалар нисбати 3:2 га тенг.

2.24. N нуқтадан $A(0, 1)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $y-4=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.25. N нуқта $A(4, 2)$ нуқтадан ва ординаталар ўқидан бир хил узоқлашган.

2.26. N нуқтадан $A(4, 0)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x-1=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта катта.

2.27. N нуқтадан $A(1, 4)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x+7=0$ чизиққача бўлган масофадан уч марта катта.

2.28. N нуқтадан $A(4, 0)$ ва $B(-2, 2)$ нуқталаргача бўлган масофалар квадратлари йиғиндиси 28 га тенг.

2.29. N нуқтадан $A(-1, 7)$ нуқтагача бўлган масофа ундан $x-8=0$ тўғри чизиққача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.30. N нуқтадан $A(3, -2)$ ва $B(4, 6)$ нуқталаргача масофалар нисбати 3:5 га тенг.

3. Сирт номини аниқланг ва шаклини чизинг:

3.1. а) $4x^2+4y^2+5z^2-20=0$; б) $9x^2+4y^2=36$.
3.2. а) $5x^2+5y^2-6z^2-30=0$; б) $z^2=4x-3$.
3.3. а) $4x^2-3y^2+2z^2-24=0$; б) $2x^2-3z^2=6$.
3.4. а) $5x^2+y^2-3z=0$; б) $z^2=2y+4$.
3.5. а) $x^2+4z^2-6y=0$; б) $4x^2+3z^2=12$.
3.6. а) $8x^2-y^2+4z^2+32=0$; б) $3y^2+2z^2=6$.
3.7. а) $6x^2+5y^2-10z^2-30=0$; б) $5x^2-4z^2=20$.
3.8. а) $2x^2-2y^2+5z^2-10=0$; б) $4z^2+3x=12$.
3.9. а) $3y^2+5z^2-5x=0$; б) $z^2-2y+3=0$.
3.10. а) $5x^2+6y^2+15z^2-30=0$; б) $8x^2+5y^2-40=0$.
3.11. а) $3x^2+5y^2-4z=0$; б) $5x^2+4z^2=20$.
3.12. а) $9x^2+12y^2+4z^2-72=0$; б) $4x^2-3y^2=12$.
3.13. а) $10x^2-9y^2-15z^2-90=0$; б) $y^2=2z$.

3.14. а) $6z^2-3y^2-2x^2-18=0$; б) $3y^2-4z^2=12$.
3.15. а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $x^2-4z^2=10$.
3.16. а) $4x^2+z^2-2y=0$; б) $y^2=x+3$.
3.17. а) $2y^2+6z^2=3x$; б) $z^2=x-4$.
3.18. а) $4x^2-12y^2+3z^2-24=0$; б) $3x^2+z^2=30$.
3.19. а) $2x^2+4y^2-5z^2=0$; б) $7x^2-5y^2=35$.
3.20. а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $x^2+4z^2=4$.
3.21. а) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; б) $3z^2-2x=6$.
3.22. а) $x^2-6y^2+z^2-12=0$; б) $2x^2-3z^2=6$.
3.23. а) $3z^2+9y^2-x=0$; б) $3x^2+5z^2=15$.
3.24. а) $y-4z^2=3x^2$; б) $x^2-4z^2=4$.
3.25. а) $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; б) $2x^2+3z^2=6$.
3.26. а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $2x^2-6y^2=12$.
3.27. а) $3x^2+12y^2+4z^2-48=0$; б) $2y^2+3z=6$.
3.28. а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $4y^2+3z^2=12$.
3.29. а) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$; б) $3y^2-2x^2=6$.
3.30. а) $4x^2+9y^2+36z^2=72$; б) $2y^2-3x=12$.

2-боб

МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КИРИШ

1-§. Элементар функциялар

2.1.1. Агар x миқдорнинг бирор D тўпламдан олинган ҳар бир қийматига бирор E тўпламдан олинган y миқдорнинг бирдан-бир аниқ қиймати мос қўйилган бўлса, у ҳолда y ўзгарувчи миқдор x ўзгарувчи миқдорнинг *функцияси* дейилади.

x миқдор эркли ўзгарувчи ёки *аргумент*, y миқдор эса боғлиқ ўзгарувчи ёки *функция* дейилади. Функцияни белгилаш учун ушбу ёзувлардан фойдаланилади:

$$y=f(x),\ y=y(x),\ y=\varphi(x)$$

ва ҳ. к.

x ўзгарувчининг $f(x)$ функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва $D(f)$ кўринишда белгиланади. $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ даги қиймати, бунда $x_0 \in D(f)$, функциянинг *хусусий қиймати* дейилади ва y_0 ёки $f(x_0)$ кўринишда белгиланади. Шундай қилиб,

$$y_0=f(x_0) \text{ ёки } y|_{x=x_0}=y_0.$$

Функциянинг қабул қиладиган қийматлари тўплами унинг *ўзгариш соҳаси* дейилади ва $E(f)$ билан белгиланади.

Oxy текисликнинг $y=f(x)$ муносабатни қаноатлантирувчи $M(x, y)$ нуқталари тўплами $y=f(x)$ функциянинг *графиги* дейилади.

2.1.2. Агар $y=f(x)$ функция $D(f)$ соҳани $E(f)$ соҳага ўзаро бир қийматли акслантирса, у ҳолда x ни y орқали бир қийматли ифодалаш мумкин:

$$x=\varphi(y).$$

Ҳосил бўлган функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан *тескари функция* дейилади.

$y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ функциялар *ўзаро тескари* функциялардир.

$x=\varphi(y)$ тескари функцияни, одатда, x ва y ларнинг ўринларини алмаштириш билан стандарт кўринишда ёзилади.

$$y=\varphi(x).$$

Ўзаро тескари $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функцияларнинг графиклари биринчи ва учинчи координата чоракларининг биссектрисасига нисбатан симметрик. $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $y=\varphi(x)$ тескари функциянинг қийматлари соҳаси бўлади.

$u=\varphi(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси D, қийматлар соҳаси V бўлсин, $y=f(u)$ функциянинг аниқланиш соҳаси V бўлиб, ўзгариш соҳаси I бўлсин, у ҳолда $y=f(\varphi(x))$ аниқланиш соҳаси D ва ўзгариш соҳаси I бўлган мураккаб функция ёки f ва φ функцияларнинг *композицияси* дейилади.

u ўзгарувчи *оралиқ ўзгарувчи* дейилади. $y=f(x)$ кўринишидаги фуикция *ошкор функция* дейилади. $F(x, y)=0$ кўринишдаги тенглама ҳам, умуман айтганда x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни беради. Бу ҳолда таърифга кўра y ўзгарувчи x нинг *ошкормас* функцияси бўлади. Масалан, $x^2+y^2=4$ тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди. Аниқланиш соҳаси $D(f)$ координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $f(x)$ функция x нинг ҳар қандай $x\in D(f)$ қиймати учун $f(-x)=f(x)$ (ёки $f(-x)=-f(x)$) муносабат бажарилса, *жуфт* (ёки *тоқ*) функция дейилади.

Жуфт фуикция графиги ординатлар ўқига нисбатан симметрик, тоқ функция графиги эса координатлар бошига иисбатан симметрикдир.

Агар $T>0$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб, ҳар бир $x\in D(f)$ ва $(x+T)\in D(f)$ да $f(x+T)=f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ функция *даврий функция* дейилади.

Айтилган хоссага эга бўлган T ларнинг энг кичиги T_0 *функциянинг даври* дейилади.

2.1.3. Қуйидаги функциялар *асосий элементар функциялар* дейилади:

а) $y=x^{\alpha}$ даражали функция, бунда $\alpha\in R$; $D(f)$ ва $E(f)$ лар α га боғлиқ;

б) $y=a^x$ кўрсаткичли функция, бунда $a>0$ ва $a\neq 1$; $D(f)=R$ ва $E(f)=(0, +\infty)$;

в) $y=\log_a x$ логарифмик функция, бунда $a>0$, $a\neq 1$; $D(f)=(0, +\infty)$ ва $E(f)=R$;

г) тригонометрик функциялар:

$y=\sin x$, $D(f)=R$ ва $E(f)=[-1, 1]$; $T_0=2\pi$;

$y=\cos x$, $D(f)=R$ ва $E(f)=[-1, 1]$; $T_0=2\pi$;

$y=\operatorname{tg} x$, $D(f)=\{x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\}$ ва $E(f)=R$; $T_0=\pi$;

$y=\operatorname{ctg} x$, $D(f)=\{x\neq\pi k,\ k\in Z\}$ ва $E(f)=R$; $T_0=\pi$.

$y=\sec x$, $D(f)=\{x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\}$ ва

$E(f)=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$; $T_0=2\pi$.

$y=\operatorname{cosec} x$, $D(f)=\{x\neq\pi k,\ k\in Z\}$ ва
$E(f)=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$; $T_0=2\pi$.

д) тескари тригонометрик функциялар:

$y=\arcsin x$, $D(f)=[-1, 1]$ ва $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$y=\arccos x$, $D(f)=[-1, 1]$ ва $E(f)=[0, \pi]$;

$y=\operatorname{arctg} x$, $D(f)=R$ ва $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$y=\operatorname{arcctg} x$, $D(f)=R$ ва $E(f)=(0, \pi)$;

$y=\operatorname{arcsec} x$, $D(f)=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ ва $E(f)=\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y=\operatorname{arccosec} x$, $D(f)=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ ва $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)\cup$
$\cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Элементар функция деб асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ёрдамида тузилган мураккаб функцияларга айтилади.

1- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги функцияларнииг аниқланиш соҳасини топииг:

а) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; б) $y=\arcsin\frac{x-2}{2}$;

в) $y=\frac{1}{\lg(4-x^2)}$; г) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$.

Ж: а) $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$; б) $[0, 4]$;
в) $(-2, -\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3}, \sqrt{3})\cup(\sqrt{3}, 2)$; г) $[-5, -\pi)\cup(0, \pi)$

2. Қуйидаги функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг:

а) $y=\sqrt{16-x^2}$; б) $y=3\cos x-1$; в) $y=3^{-x^2}$.

Ж: а) $[0,4]$; б) $[-4, 2]$; в) $(0; 1]$.

3. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг:

а) $y=x^4\sin 3x$; б) $y=x^4-x^2+x$; в) $y=\lg\cos x$.

Ж: а) тоқ; б) тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас; в) жуфт.

4. Қуйидаги функцияларнинг даврларини топинг:

а) $y=\sin 5x$; б) $y=\lg\cos 2x$; в) $y=\operatorname{tg}3x+\cos 4x$.

Ж: а) $\frac{2\pi}{5}$; б) π; в) π.

5. Мураккаб функцияларни асосий элементар функцияларнинг композициялари тарзида ифодаланг:

а) $y=\sqrt[5]{\operatorname{arctg}\sqrt{3x^2}}$; б) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2-1}}{4x}$.

1- мустақил иш

1. Функцияларнинг аниқланиш соха рини топинг:

а) $y=\lg(3^{4x}-9)$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$;

в) $y=\lg(-x^2-4x+5)$.

Ж: а) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; б) $(-\infty, 1)\cup(5, +$; в) $(-5, 1)$.

2. Берилгаи функцияларга мос келувчи тескари функцияларни топинг. Берилган ва топилган тескари фуикция графикларини чизинг:

а) $y=x^2$, агар $x\leqslant 0$;

б) $y=\begin{cases} -x, & \text{агар } x<1, \\ x^2-2, & \text{агар } x\geqslant 1; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x, & \text{агар } x\leqslant 0; \\ x^2, & \text{агар } x>0; \end{cases}$

г) $y=\sqrt{1-x^2}$, агар $x\in[-1, 0]$;

д) $y=\begin{cases} x, & \text{агар } x<1, \\ x^2, & \text{агар } 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x, & \text{агар } x>4. \end{cases}$

3. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

б) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

в) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

г) $y=2^x+2^{-x}$.

Ж: а) жуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) жуфт.

2- §. Элементар функцияларнинг графиклари

$f(x)$ фуикция графигиии чизишда ҳар хил усуллар қўлланилади: нуқталар бўйича, графиклар билан амаллар бажариш, графикларни алмаштириш. $f(x)$ функция графигидан фойдаланиб содда алмаштиришлар ёрдамида мураккаброқ фуикциялар графикларини ҳосил қилиш мумкии.

а) $y=f(x-a)$ функциянинг графиги $y=f(x)$ функция графигидаи, бу графикни Ox ўқ бўйлаб $a>0$ да ўнгга, $a<0$ бўлганда эса чапга a бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

б) $y=f(x)+b$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўқ бўйлаб $b>0$ да юқорига, $b<0$ да пастга b бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

в) $y=f(kx)$ $(k\neq 0, k\neq 1)$ функциянинг графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нуқталари ординаталариии сақлаган ҳолда $|k|<1$ да абсциссаларини $\frac{1}{|k|}$ марта чўзиш билан, $|k|>1$ да эса абсциссаларини $|k|$ марта сиқиш билан ҳосил қилинади.

г) $y=mf(x)$ $(m\neq 0, m\neq 1)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нуқталари мос абсциссалариии сақлаган ҳолда ординаталарини $|m|<1$ да $\frac{1}{|m|}$ марта қисиш, $|m|>1$ да эса $|m|$ марта чўзиш орқали ҳосил қилинади.

д) $y=f(-x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

е) $y=-f(x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидаи, бу графикни Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

ж) $y=|f(x)|$ функция графиги Ox ўқнинг $f(x)\geqslant 0$ бўладиган қисмларида $y=f(x)$ функция графиги билан бир хил бўлади. Ox ўқнинг $f(x)<0$ бўладиган қисмида бу графикни $y=f(x)$ функция графигини Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

Мисол. $y=-2\sin(2x+2)$ функциянинг графигини $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб чизинг.

Ечиш. $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизиш қуйидаги шакл алмаштиришлар орқали амалга оширилади:

$$y_1=\sin 2x_1,\ y_2=-2\sin 2x_2,$$
$$y=-2\sin 2(x+1)=-2\sin(2x+2).$$

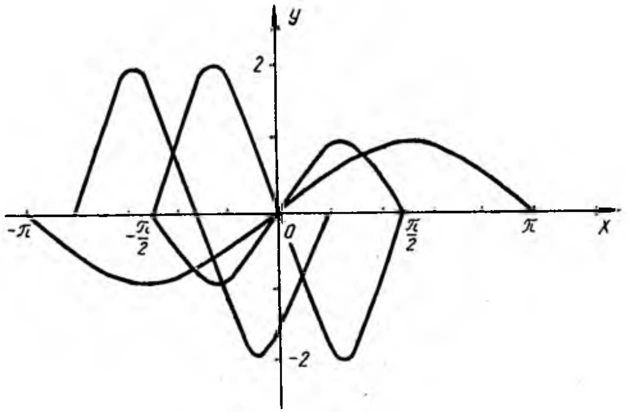
Геометрик нуқтаи назардан бу 15- шаклдаги ясашларга олиб келади.

1. $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ ораликда $y=\sin x$ синусоидани чизамиз.

2. Синусоидада бир нечта нуқта белгилаймиз ва ординаталарини ўзгартирмай, абсциссаларини икки марта камайтирамиз: $x_1=\frac{1}{2}x$, $y_1=y$. Ҳосил бўлган нуқталарни силлиқ чизиқ билан бирлаштириб, $y_1=\sin 2x_1$ функцияиинг графигини чизамиз.

3. Ҳосил бўлган графикдаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини 2 марта орттирамиз ва уларнинг ишораларини алмаштирамиз: $y_2=-2y_1$, $x_2=x_1$. Ҳосил бўлган нуқталарни силлиқ чизиқ билан бирлаштириб, $y_2=-2\sin x_2$ функциянинг графигини чизамиз.

4. Охирги графикни абсциссалар ўқи бўйича (-1) га кўчирамиз: $x=x_2-1$, $y=y_2$. Ҳосил қилинган нуқталарни силлиқ чизиқ билан бирлаштириб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизамиз (15- шакл).



15- шакл

2- дарсхона топшириғи

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y=2\sin(2x-1)$.
2. $y=-\mathrm{ctg}|x+1|$.
3. $y=1+\lg(x+2)$.
4. $y=\log_2|1-x|$.
5. $y=-\sqrt{x^2-4x+4}$.
6. $y=1-3^{|x|}$.
7. $y=|x^2-7x+12|$.

2- мустақил иш

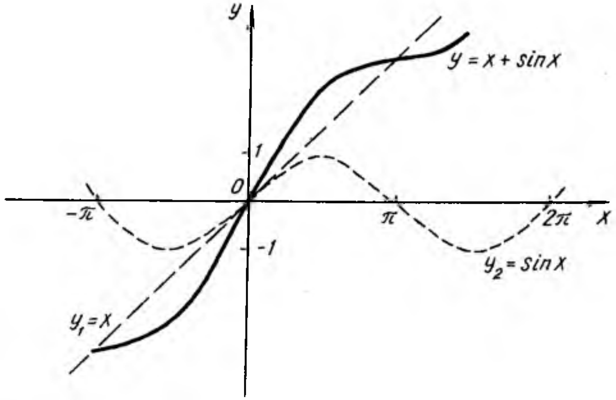
Функциялар графикларини чизинг:

1. $y=|3x+4-x^2|$.
2. $y=|\log_2(2x-1)|$.
3. $y=2(x-1)^3$.
4. $y=2\cos\frac{x-\pi}{3}$.
5. $y=\sin^2 x$.
6. $y=1-2^{-x}$.

3- §. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг графиклари

Асосий элементар функциялар хоссаларидан фойдаланиб, уларнинг графикларини билган ҳолда, катта ҳисоблаш ишларини бажармай туриб, бошқа функцияларнинг мураккаб графикларини чизишни графикларнинг комбинациясига (йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасига) келтириш мумкин.

2.3.1. Шундай ҳоллар бўладики, $y=f(x)$ функция графигини графиклари осонгина чизиладиган $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ функциялар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин бўлади. Унда $y=f(x)$ функция графигини чизиш мос ординаталарни геометрик қўшишга келтирилади: $y=y_1+y_2$.



16- шакл

Шуни таъкидлаймизки, икки функция айирмасини икки функциянинг тегишли йиғиндисига келтириш мумкин.

$$y=f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)+(-f_2(x)).$$

1- мисол. Ушбу

$$y=x+\sin x$$

функция графигини чизинг.

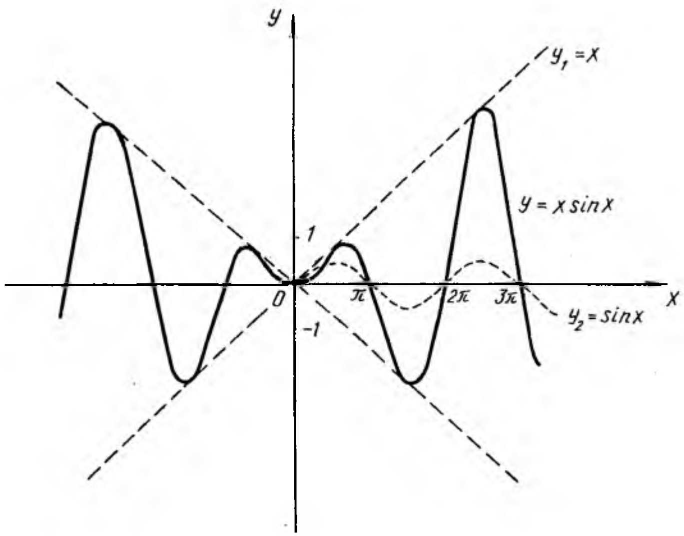
Ечиш. $y_1=x$ ва $y_2=\sin x$ деб олиб, битта чизманинг ўзида қўшилувчи функциялар графикларини чизамиз (пунктир чизиқлар).

Шу функциялар графикларини кесадиган бир қатор вертикал тўғри чизиқлар ўтказамиз. Шундан кейин бу графикларнинг мос ординаталарини геометрик қўшиб, изланаётган графикнинг бир қатор нуқталарини топамиз, бу нуқталарни узлуксиз эгри чизиқ билан бирлаштириб, изланаётган графикни ясаймиз (16- шаклдаги туташ чизиқ). Ҳосил бўлган график, тақрибий бўлади.

2.3.2. Ординаталарни геометрик кўпайтириш анча қийин. Аммо, шунга қарамай, агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ функциялар графикларини олдиндан ясаб олинса, икки функциянинг $y=f_1(x)\cdot f_2(x)$ кўпайтмасини таҳлил қилиш кўпинча осонлашади. Таҳлил қилишда y_1 ва y_2 функциялар 0, 1 ва -1 га тенг бўладиган нуқталарга алоҳида эътибор бериш керак.

2- мисол. $y=x\cdot\sin x$ функция графигини чизинг.

Ечиш. Берилган функция иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси сифатида жуфт функция бўлишини пайқаймиз ва шу сабабли таҳлилни $x\geqslant 0$ лар учун ўтказамиз. $y_1=x$ ва $y_2=\sin x$ графикларини (пунктир чизиқлар) битта чизмада чизамиз (17- шакл).



17- шакл

$y_2=\sin x=0$ бўладиган нуқталарда $y=y_1\cdot y_2=0$ га эга бўламиз.

$y_2=\sin x=1$ бўладиган нуқталарда $y=y_1\cdot y_2=x$ га эга бўламиз.

$y_2=\sin x=-1$ бўладиган нуқталарда $y=y_1\cdot y_2=-y_1=-x$ ($y_3=-x$ функция графигини чизамиз).

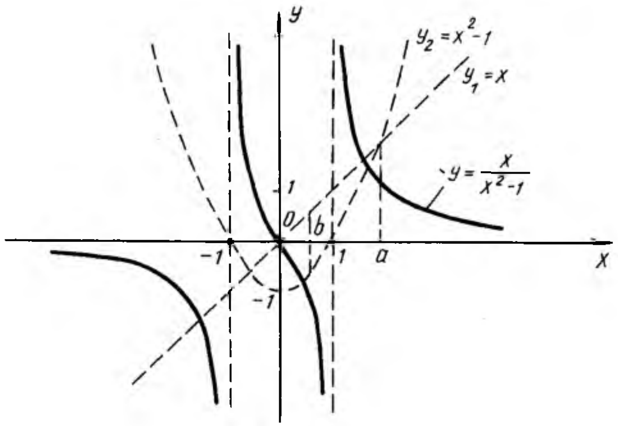
Бир қатор шуидай нуқталарни белгилаб ва оралиқ нуқталар учун $|y|=|x\sin x|<|x|$ эканини ҳисобга олиб, $x\geqslant 0$ лар учун излаиаётгаи графикка (туташ чизиқ) эга бўламиз. $x<0$ да берилган функция жуфт функция бўлгани учун график Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш билаи ҳосил қилинади (17- шакл).

2.3.3. Икки функциянинг кўпайтмаси ҳақида айтилган мулоҳазаларнинг ҳаммаси икки функциянинг

$$y=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

бўлинмаси учун ҳам бир хилда тегишлидир.

Битта чизманинг ўзида $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ функциялар графикларини чизиб, уларни таҳлил қилиш йўли билан $y=\frac{y_1}{y}$ бўлинма x га боғлиқ ҳолда қандай ўзгаришини текширамиз ва шу йўл билан изланаётган графикнинг умумий кўринишига эга бўламиз. Таҳлил қилишда асосий эътиборни y_1 ва y_2 функциялар қийматлари 0, 1 ва -1 га теиг бўладиган нуқталарга, улар ўзаро тенг бўладиган ёки ишоралари билан фарқ қиладиган нуқталарга қаратиш керак.



18- шакл

3- мисол. $y=\frac{x}{x^2-1}$ фуикция графигини чизинг.

Ечиш. Функция ток, шу сабабли $x\geqslant 0$ лар учунгина таҳлил қиламиз.

$y_1=x$ ва $y_2=x^2-1$ деб олиб, бу фуикцияларнииг $x\geqslant 0$ даги графикларини (пуиктир чизиқ) чизамиз.

Эслатма: а) $x=0$ да $y_1=0$, шу сабабли, $\frac{y_1}{y_2}=0$;

б) бирор $x=a$ да $y_1=y_2$ бўлиб, $y=\frac{y_1}{y_2}=1$ бўлиши равшан;

в) бирор $x=b$ да $y_1=-y_2$ бўлиб, $y=\frac{y_1}{y_2}=-1$ бўлиши равшан;

г) $x=1$ да $y_2=0$, $y_1=1$, шу сабабли $x=1$ тўғри чизиқ вертикал асимптотадир.

д) $x\to\infty$ да $y\to 0$ мусбатлигнча қолади, яъни абсциссалар ўқи горизонтал асимптота бўлишини кўрамиз. Бу фикрларнинг ҳаммасини бирлаштириб графикнинг умумий кўринишига (туташ чизиқ) эга бўламиз.

$y=\frac{x}{x^2-1}$ функциянинг тоқ эканлиги туфайли $x<0$ да график координаталар бошига нисбатан симметрик акслантиришдан иборат бўлади (18- шакл).

3- дарсхона топшириғи

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y=x^3+2x^2$.
2 $y=2^x+\sin x$.
3. $y=\sin 2x+2\cos x$.
4. $y=x^3\cos x$.
5. $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

3- мустақил иш

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y=x+\mathrm{arctg}x$.
2. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.
3. $y=x+\cos x$.
4. $y=x\cdot\cos x$.
5. $y=\frac{e^{-x}}{\sin x}$.

4- §. Кетма-кетликнинг лимити. Функциянинг лимити

2.4.1. Натурал сонлар тўпламида аниқланган функция *сонли кетма-кетлик* дейилади ва $\{x_n\}$ кўринишда белгиланади.

Агар шундай M мусбат сон мавжуд бўлиб, ҳар қандай натурал сон n учун

$$|x_n|\leqslant M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *чегараланган кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1}>x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *ўсувчи кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1}<x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

Фақат ўсувчи ёки камаювчи кетма-кетлик *монотон кетма-кетлик* дейилади.

Агар исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $N=N(\varepsilon)>0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $n\geqslant N$ лар учун

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, ўзгармас a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a .$$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи,* акс ҳолда *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

Ҳар қандай чегараланган ва монотон кетма-кетлик лимитга эга.

1-мисол. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$ эканлигини исбот қилинг ва $N(\varepsilon)$ ни аниқланг.

Ечиш. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ сони мавжуд бўлсаки, барча $n\geqslant N(\varepsilon)$ лар учун

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n+3}{2n+1}-1\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, лимитнинг таърифига кўра қўйилган масала ҳал бўлади. Юқоридаги тенгсизлик қуйидагига тенг кучли:

$$\frac{2}{2n+1}<\varepsilon ,$$

бундан

$$2n+1>\frac{2}{\varepsilon} \text{ ёки } n>\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon} .$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $N=N(\varepsilon)=\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$.

2.4.2. Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон мавжуд бўлиб, $|x-a|<\delta$ да $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x\to a$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b .$$

Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $N=N(\varepsilon)>0$ сон мавжуд бўлиб, барча $|x|>N$ лар учун $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b .$$

Агар ихтиёрий $M>0$ учун шундай $\delta=\delta(M)>0$ мавжуд бўлиб, $|x-a|<\delta$ да $|f(x)|>M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $x\to a$ да *чексиз катта* дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty .$$

Агар $x\to a$ да $x>a$ бўлса, у ҳолда $x\to a+0$ белги, агар $x\to a$ да $x<a$ бўлса, у ҳолда $x\to a-0$ белги қўлланилади. $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги *чап* ва *ўнг лимитлари* деб мос равишда

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0}f(x) \text{ ва } f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

сонларга айтилади.

$f(x)$ функциянинг $x \to a$ даги лимити мавжуд бўлиши учун $f(a-0)=f(a+0)$ бўлиши зарур ва етарли.

2.4.3. Лимитлар ҳақида қуйидаги теоремалар ўринли (лимитга ўтиш қоидалари):

а) Агар C ўзгармас бўлса,

$$\lim_{x \to a} C = C .$$

б) Агар $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ва $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ мавжуд бўлса,

$$\lim_{x \to a} (f(x)+\varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) .$$

в) Агар $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ва $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

тенглик ўринли.

г) Агар $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ва $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$$

тенглик ўринли.

Агар бу теоремаларнинг шартлари бажарилмаса, у ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ кўринишидаги *аниқмасликлар* пайдо бўлиши мумкин. Бу аниқмасликлар баъзи ҳолларда алгебраик алмаштиришлар ёрдамида очилади.

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+5n-1}{n^2+3} .$$

Ечиш. Бу мисолда касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади, яъни $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Касрнинг сурат ва махражини n^2 га бўлсак:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+5n-1}{n^2+3} = \lim_{n \to \infty} \frac{3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3 .$$

3-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} .$$

Ечиш. Бунда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. $(n+2)!=(n+1)!(n+2)$ ва $(n+3)!=(n+1)!(n+3)(n+2)$ алмаштиришларни бажарсак:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+2} = 0 .$$

4-дарсхона топшириғи

1. $\{x_n\}=\{\frac{3n}{n+3}\}$ кетма-кетлик $a=3$ лимитга эга эканлигини исбот қилинг ва $N(\varepsilon)$ ни аниқланг.

2. Қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$. Ж: 0 .

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2-4n+8}{4n^2+5n-9}$. Ж: ∞ .

в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$. Ж: 1 .

г) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$. Ж: $\frac{3}{2}$.

д) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$. Ж: -7 .

е) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$. Ж: $\frac{5}{2}$.

4-мустақил иш

Қуйидаги лимитларни топинг:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$. Ж: $-\infty$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$. Ж: 1

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$. Ж: 0.

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$. Ж: ∞.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$. Ж: 3.

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^3+8}\,(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$. Ж: $\frac{3}{2}$.

5- §. Функциянинг лимитини ҳисоблаш

Функциянинг лимитини амалда ҳисоблаш олдинги параграфда баён қилинган теоремалар ва баъзи шакл алмаштиришларга асосланади.

1- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Ечиш. $x\to 2$ да касрнинг сурати $3\cdot 2-2=4$ га, махражи эса $2^2+1=5$ га интилади. Демак,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-2}{x^2+1}=\frac{4}{5}.$$

2- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}.$$

Ечиш. Бу мисолда касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам $x\to 1$ да нолга интилади. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Қасрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратсак:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

3- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right).$$

Ечиш. $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}.$$

4- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x^2+2x}.$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Қасрнинг сурати ва махражини $(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})$ ифодага кўпайтирсак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(x+2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x(x+2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

5- дарсхона топшириғи

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^8-1}{2x^3+3x^2+5}$. Ж: ∞.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$. Ж: 2.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. Ж: -1.
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-1}$. Ж: $-\frac{1}{3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$. Ж: $\frac{3}{5}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{8x-7}-3}$. Ж: $-\frac{3}{16}$.

5- мустақил иш

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. Ж: $\frac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$. Ж: $\frac{3}{4}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Ж: 3.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. Ж: -1.

5. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$. Ж: $\frac{1}{148}$.

6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$. Ж: 0.

7. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$. Ж: ∞.

6- §. Бириичи ва иккиичи ажойиб лимитлар

Кўпгииа лимитларни топишда қуйидаги маълум формулалардан фойдаланилади:

$\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ — *биринчи ажойиб лимит;*

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ — *иккинчи ажойиб лимит.*

Мисоллар ечганда қуйидаги тенгликларни назарда тутиш фойдали:

$$\lim_{\alpha\to0}(1+k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0).$$

1- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}.$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Биринчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\sin3x}{3x}=3\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}=3.$$

2- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}.$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. $\frac{\pi}{2}-x=z$ белгилаш киритсак, у ҳолда $x\to\frac{\pi}{2}$ да $z\to0$ бўлади. Ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{z\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\pi-\pi+2z}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{2}.$$

3- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}.$$

Ечиш. Қасрнинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратиб оламиз:

$$\frac{2x+1}{2x-3}=\frac{(2x-3)+4}{2x-3}=1+\frac{4}{2x-3}.$$

Шундай қилиб, $x\to\infty$ да берилган функция асоси бирга интилувчи, кўрсаткичи эса чексизликка интилувчи даражани ифодалайди, яъни 1^∞ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Функцияни иккинчи ажойиб лимитдан фойдалаииш мумкин бўладиган қилиб ўзгартирамиз:

$$\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{4x-1}=\left[\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}}.$$

$x\to\infty$ да $\frac{4}{2x-3}\to0$ бўлгани сабабли иккинчи ажойиб лимитга кўра:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}=e.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}=8$ экаиини ҳисобга олиб, узил-кесил

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=e^8$ эканини топамиз.

6- дарсхона топшириғи

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 5x}$. Ж: $\frac{18}{5}$.
2. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Ж: $-\frac{3}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$. Ж: $e^{-\frac{2}{3}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{3x}$. Ж: $\frac{4}{3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{3x}$. Ж: $\frac{1}{3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{4}{x-1}}$. Ж: e^{-8}.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{\sin 2x}$. Ж: $\frac{3}{2}\ln 2$.

6- мустақил иш

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}5x}$. Ж: $\frac{3}{5}$.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$. Ж: $\frac{1}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$. Ж: $\frac{1}{e}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\,(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))$. Ж: 2.

7- §. Эквивалент чексиз кичик функциялар ва улар ёрдамида лимитларни ҳисоблаш

Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ $x\to x_0$ ҳолда чексиз кичик функциялар бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

бўлса, у ҳолда улар *эквивалент* дейилади ва $x\to x_0$ да $\alpha(x)\sim\beta(x)$ каби белгиланади. Масалан, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, шу сабабли $x\to 0$ да $\sin x\sim x$.

Шунга ўхшаш $x\to 0$ да қуйидаги чексиз кичик функциялар эквивалентдир:

$$\arcsin x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ \mathrm{tg}x\sim x,$$

$$\mathrm{arctg}x\sim x,\ e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,$$
$$\ln(1+x)\sim x,\ (1+x)^m-1\sim mx \text{ ва ҳ. к.}$$

Иккита чексиз кичик функциялар нисбатининг лимити уларга эквивалент чексиз кичик функциялар нисбатининг лимитига тенг, яъни агар $x\to x_0$ да $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ ва $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

1-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\mathrm{tg}^2 3x}.$$

Ечиш. Ушбу $1-\cos 4x\sim 8x^2$, $\mathrm{tg}^2 3x\sim 9x^2$ эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдалансак:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\mathrm{tg}^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{9x^2}=\frac{8}{9}.$$

2-мисол. Лимитни ҳисоблаиг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}.$$

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражини 2 га бўлиб, сўнгра уларни эквивалеит чексиз кичик функциялар билан алмаштирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x}-1}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{16}x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(1+\frac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}x}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{16}x}=\frac{8}{5}.$$

7- дарсхона топшириғи

Қуйидаги лимитларни эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдаланиб ҳисобланг:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 4(x-2)}{x^2-3x+2}$. Ж: 4.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\mathrm{tg}5x}$. Ж: $\frac{3}{5}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{\sin 8x}$. Ж: $-\frac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin 2x}-1}{\sqrt{1+4x}-1}$. Ж: ln3.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$. Ж: $-\frac{2}{3\ln 2}$.

7- мустақил иш

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$. Ж: 4.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi(1+\frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}$. Ж: $\frac{\pi}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}3x}$. Ж: $-\frac{5}{3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$. Ж: $\frac{1}{4}$.
5. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$. Ж: $\frac{1}{2\ln^2 3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{\sin 7x-\sin 2x}$. Ж: $\frac{1}{5}\ln\frac{8}{9}$.

8- §. Чексиз кичик функцияларни таққослаш

$x\to x_0$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик функциялар бўлсин. Бу функцияларни таққослаш учун улар нисбатининг $x\to x_0$ даги лимити ҳисобланади:

а) Агар $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан *юқори тартибли чексиз кичик функция* дейилади ва $\alpha=o(\beta)$ каби белгиланади.

б) Агар $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан *қуйи тартибли чексиз кичик функция* дейилади. Равшанки бу ҳолда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$ ёки $\beta=o(\alpha)$.

в) Агар $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ ва A чекли сон бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ *бир хил тартибли чексиз кичик функциялар* дейилади.

Хусусан, агар $A=1$ бўлса, у ҳолда эквивалент чексиз кичик функцияларга эга бўламиз.

г) Агар $\alpha(x)^k$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлиб, $k>0$ бўлса, у ҳолда $\beta(x)$ чексиз кичик функция $\alpha(x)$ га нисбатан k-тартибга эга дейилади.

Мисол. $x\to 0$ да $y=\sqrt{1+x\sin x}-1$ чексиз кичик функциянинг x га нисбатан тартибини аниқланг.

Ечиш. $\frac{y}{x^k}$ нисбатнинг $x\to 0$ даги лимитини қараймиз ва k нинг бу лимит мавжуд ва нолдан фарқли бўладиган қийматини аниқлаймиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}{x^k\cdot(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-1}{x^k(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^k(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{k-2}(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{2-k},\ \text{чунки}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+1)=2.$$

Равшанки $k=2$ да $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=1$. Демак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x^2}=\frac{1}{2}$. Шундай қилиб, y ва x^2 чексиз кичик миқдорларнинг тартиби бир хил. Шу сабабли y миқдор x чексиз кичик миқдорга нисбатан *иккинчи тартибли* ($k=2$) чексиз кичик миқдор бўлади.

8- дарсхона топшириғи

1. $x\to 0$ да $\alpha=x\sin^2 x$ ва $\beta=2x\sin x$ чексиз кичик функцияларни таққосланг. Ж: $\alpha=o(\beta)$.
2. $x\to 0$ да $\alpha=x\ \ln(1+x)$ ва $\beta=x\sin x$ чексиз кичик функцияларни таққосланг. Ж: $\alpha\sim\beta$.
3. $x\to 1$ да $\alpha=1-x$ ва $\beta=1-\sqrt[3]{x}$ чексиз кичик функцияларнинг бир хил тартибли бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Булар эквивалеит бўладими?
4. $x\to 0$ да чексиз кичик бўлган $y=\frac{7x^{10}}{x^3+1}$ нинг x га нисбатан тартибини аниқланг. Ж: $k=10$.

8- мустақил иш

1. $x=0$ да $\alpha=x^2\sin^2 x$ ва $\beta=x\cdot\operatorname{tg}x$ чексиз кичик функцияларни таққосланг. Ж: $\alpha=o(\beta)$.
2. $x=0$ да $\alpha=a^x-1$ ва $\beta=x\ \ln a$ чексиз кичик функцияларни таққосланг. Ж: $\alpha\sim\beta$.
3. $x\to\frac{\pi}{2}$ да $\alpha=\sec x-\operatorname{tg}x$ ва $\beta=\pi-2x$ функциялар бир хил тартибли чексиз кичик бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Улар эквивалеит бўладими?
4. а) $y=\sqrt{1+x^3}-1$ ва б) $y=1-\cos x$ чексиз кичик функцияларнинг x чексиз кичикка нисбатининг тартибини аниқланг. Ж: а) $k=3$; б) $k=2$.

9- §. Функциянинг узлуксизлиги. Функциянинг узилиш нуқталари ва уларнинг турлари. Функциянинг ноли

2.9.1. Агар x_0 ва унинг атрофида аниқланган $y=f(x)$ функция шу нуқтада чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги қуйидаги таъриф юқоридаги таърифга тенг кучлидир.

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиб, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$$

бўлса, у ҳолда функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. Бу ерда $\Delta x=x-x_0$ ва $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — мос равишда аргумент ва функция орттирмалари.

$f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун узлуксизликнинг қуйидаги шартлари бажарилиши зарур ва етарлидир:

а) функция x_0 нуқта ва унинг атрофида аниқланган;

б) функциянинг $x=x_0$ нуқтадаги чап ва ўнг лимитлари тенг: $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;

в) $x=x_0$ нуқтадаги бир томонли лимитлар $f(x_0)$ га тенг, яъни $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

2.9.2. $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг атрофида аниқланган, аммо бу нуқтанинг ўзида узлуксизлик шартларидан ақалли биттаси бажарилмаса, бу функция x_0 нуқтада *узилишга эга* дейилади.

Агар $f(x)$ функция учун *чекли* бир томонли $f(x_0-0)$ ва $f(x_0+0)$ лимитлар мавжуд бўлса ва, шу билан бирга, $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ сонлар ўзаро тенг бўлмаса, у ҳолда x_0 нуқта *1- тур узилиш нуқтаси* дейилади.

Хусусан, агар $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ бўлса, у ҳолда x_0 *бартараф қилинадиган узилиш нуқтаси* дейилади.

Агар $f(x_0-0)$ ёки $f(x_0+0)$ бир томонли лимитлардан ақалли биттаси ∞ га тенг бўлса, x_0 нуқта *2- тур узилиш нуқтаси* дейилади.

2.9.3. Агар функция оралиқнинг ҳамма нуқтасида узлуксиз бўлса, у шу оралиқда *узлуксиз* дейилади. Элементар функцияларнинг ҳаммаси ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиздир.

2.9.4. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда:

а) $f(x)\pm\varphi(x)$; б) $f(x)\cdot\varphi(x)$; в) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$ функциялар ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўладилар.

Агар $f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у

а) шу кесмада чегараланган;

б) шу кесмада энг кичик ва энг катта қийматларга эришади;

в) берилган иккита қиймати орасидаги барча қийматларни қабул қилади, яъни агар $f(\alpha)=A$, $f(\beta)=B$ $(a<\alpha<\beta\leqslant b)$ ва $A\neq B$ бўлса, у ҳолда A ва B орасида ётган C сони ҳар қандай бўлганда ҳам x нинг ақалли битта $x=\gamma$ $(\alpha<\gamma<\beta)$ қиймати топиладики, $f(\gamma)=C$ бўлади.

Хусусан, агар $f(\alpha)$ ва $f(\beta)$ ҳар хил ишорали бўлса (яъни $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ бўлса), шундай $x=\gamma$ $(\alpha<\gamma<\beta)$ қиймат топиладики, унда $f(\gamma)=0$ бўлади.

$f(\gamma)=0$ бўладиган $x=\gamma$ нуқта функциянинг *ноли* дейилади.

Бу агар $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ бўлса, $f(x)=0$ тенглама $(\alpha,\ \beta)$ оралиқда ақалли битта илдизга эга бўлишини билдиради.

Бу хоссадан $f(x)$ функция нолини ўз ичига олган оралиқни топишда фойдаланилади.

9- дарсхона топшириғи

1. $y=\frac{x}{x-4}$ функциянинг узилиш нуқтасини топинг ва узилиш турини аниқланг.

2. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$ функциянинг узилиш нуқтасини топинг ва узилиш турини аниқланг.

3. a нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & \text{агар} \quad x\neq 3,\\ a, & \text{агар} \quad x=3\end{cases}$$

функция $x=3$ нуқтада узлуксиз бўлади? Функция графигини чизинг.

4. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}, & \text{агар} \quad x\leqslant 2,\\ x, & \text{агар} \quad x>2\end{cases}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг ва узилиш турини аниқланг. Функция графигини чизинг.

5. $x^5-3x=1$ тенглама $[1;\ 2]$ кесмада ақалли битта илдизга эга эканига ишонч ҳосил қилинг.

9- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}\,, & \text{агар} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-2x, & \text{агар} \quad 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & \text{агар} \quad 2{,}5\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг. Функция графигини чизинг.

2. a нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{агар} \quad x\leqslant 1,\\ 3-ax^2, & \text{агар} \quad x>1\end{cases}$$

функция узлуксиз бўлади? Функция графигини чизинг.

3. Ушбу

$$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

функциянинг узилиш нуқталари туриин аниқланг.

4. $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ функциянинг узилиш нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг.

5. $x\cdot 2^x=1$ тенглама ақалли битта 1 дан катта бўлмаган мусбат илдизга эга бўлишини кўрсатинг.

5- назорат иши

1. Лимитларни топинг:

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-6}{2x^3-7x^2+2}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x+1}{x+3x^2+2x^4}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{x^4+5x^2+1}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+x}{4x^3+3x-5}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+3x-4x^2}{2x^2-x+4}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+1}{2x^4+x^2+5}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x+4x^2}{6+5x-3x^2}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+4}{6x^3+x-5}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2-x}{x^2-x^3+3x^4}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-4x^2+5}{2x^3-3x^2+1}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-3x^2+7}{3x^5+4x^3-2}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+3}{5x^2-3x+2}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^2+2}{x^4-3x}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{6x^3+3x-7}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x^2-x^4}{4+x^2+5x^4}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-7x+5}{2+x-4x^2}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7-4x^5+3}{x+3x^5-6x^7}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x-1}{3x^2+5x-2}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^6-1}{4x^4-5x^5}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+3}{3-4x-10x^3}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-5}{4x^3-7}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-3x^2+1}{1+3x^2-x^4}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-4x+1}{3x^3+2x^2-5}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{5x^2+3x-8}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x+2}{5x^3+4x^2-3}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^5-5x^2+7}{1-2x-5x^5}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-2}{6-2x-3x^2}$.

2. Кўрсатилган лимитларни топинг:

2.1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+4}{x^3-8}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{x^3-27}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+4x-3}{5x^2+4x-1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-6x-45}{x^2-2x-15}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-12x+20}{x^2+x-6}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{6+x-x^2}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+x-2}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^2+3x-1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-9x+10}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2+x-x^2}{x^3-3x^2-2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-3x-10}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-3x-35}{x^2-3x-10}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-x-3}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-x-10}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+3x+15}{2x^2+5x-3}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^3+1}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2+7x-2}{5x^2+3x-14}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{12+x-x^2}{2x^2-3x-9}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-2}{2x^2-x-3}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+8x+4}{3x^2+x-14}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{40+2x-3x^2}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+x-4}{x^2+3x+2}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2+5x-14}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{2x^2-x-1}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{4x^2+7x-2}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x-5}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-6x-27}{3x^2+10x+3}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$.

3. Кўрсатилган лимитларни топинг:

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-15}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}{x^2+5x-14}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{8-x}-\sqrt{4-5x}}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{7+x}}{x^2+4x-5}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2-x-21}{\sqrt{7+x}-\sqrt{1-x}}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-3x+2}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{5x+1}-4}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}{4x^2+3x-1}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{x^2-8x+15}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}{x^2-4x-5}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-\sqrt{12-x}}{x^2+3x-4}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{9-2x}}{3x^2-2x-8}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-10}}{x^2-16}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{x^2-2x-3}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{\sqrt{8+x}-\sqrt{4x+5}}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-2}}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x^2-7x-8}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{7+2x}-3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-11}}{x^2+3x-40}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{2x+9}}{x^3+64}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{x^2-9}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{\sqrt{4-3x}-\sqrt{6-x}}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x}}$. ✓ 3

4. Кўрсатилган лимитларни топинг:

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{2x^2}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{4x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot \mathrm{tg}x}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin x+\sin 7x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{3\sin 3x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{3x^2}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{4x^2}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot \arcsin x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc\,tg}2x}{\mathrm{tg}3x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x\cdot \sin x}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\right)$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\mathrm{tg}x}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin 3x+\sin x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \mathrm{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{1-\cos 3x}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{1-\cos 2x}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \mathrm{tg}4x}{\mathrm{arc\,tg}3x}$.

5. Кўрсатилган лимитларни топинг:

5.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$

5.2. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-3)\,[\ln(x+2)-$
$-\ln(x-1)\,].$

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x-1}.$

5.5. $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}.$

5.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\,[\ln(2x+3)-$
$-\ln(2x-1)\,].$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x-3}.$

5.8. $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}.$

5.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\,[\ln(x+2)-$
$-\ln x].$

5.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-5}.$

5.11. $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}.$

5.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)\,[\ln(x+5)-$
$-\ln x].$

5.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{4x+3}.$

5.14. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}.$

5.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\,[\ln(3x+4)-$
$-\ln 3x].$

5.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{2x-7}.$

5.17. $\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{x}{x^2-1}}.$

5.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\,[\ln\,(2x-1)-$
$-\ln\,(2x+1)\,].$

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-5x}{2-5x}\right)^{4x+5}.$

5.20. $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}.$

5.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\,[\ln(1-x)-$
$-\ln(2-x)\,].$

5.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x-5}\right)^{4x+3}.$

5.23. $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{x^2}{x-1}}.$

5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)\,[\ln(2-3x)-$
$-\ln(5-3x)\,].$

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x-1}.$

5.26. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}(3-5x)^{\frac{4x}{5x-2}}.$

5.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)\,[\ln\,(1-3x)-$
$-\ln\,(2-3x)\,].$

5.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{5-2x}\right)^{3-2x}.$

5.29. $\lim\limits_{x\to-1}(4x+5)^{\frac{3x}{x^2-1}}.$

5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)\,[\ln(3-2x)-$
$-\ln(5-2x)\,].$

5- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Кўрсатилган лимитларни топинг:

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4+x^2+1}\,).$

1.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x).$

1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\,).$

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-x+4}\,).$

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+3x^2+1}-x^2).$

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\,).$

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\,).$

1.8. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2}\,).$

1.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\,).$

1.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x\,(x-1}\,).$

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x^4+1)\,(x^2-1)}-\sqrt{x^6-1}\,).$

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+1)\,(x^2+2)}-\sqrt{(x^2-1)\,(x^2-2)}\,).$

1.13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x^3+1)\,(x^2+3)}-\sqrt{x\,(x^4+2)}\,).$

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+8}\,(\sqrt{x^3-2}-\sqrt{x^3-1}\,).$

1.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x\,(x+5)}-x).$

1.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\,).$

1.17. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\,).$

1.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x).$

1.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$.

1.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{4-x^3}\right)$.

1.22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^5-8}-x\sqrt{x(x^2+5)}\right)$.

1.23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)}-\sqrt{x^4-9}\right)$.

1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-5}\right)$.

1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

1.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}\right)$.

1.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)(x+2)}\right)$.

1.30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{(x-2)(x+3)}\right)$.

2. Кўрсатилган лимитларни топинг:

2.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+4x^2-5}{x^3+2x^2-x-2}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^4-3x-1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x+3}{x^4+3x^2-4}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2}{x^3+3x^2-4}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-2x^2-1}{4x^3+x-5}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+3x^2-x-2}{2x^4-3x^2+1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-2x^3-1}{x^3-4x^2+3}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+5x^2-2x-4}{2x^3-3x^2+1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-x^2-4x-4}{3x^2-x-10}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x+12}{x^3+3x^2-4}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x^2-3x-4}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{8x^4-6x^2-x-1}{x^3-3x^2+2}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^3-2x+1}{4x^3+2x^2-x+1}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^2-x-10}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{2x^2+3x-2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^3-3x^2-2}{4x^3+x^2-5}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{9x^3-3x^2-4x-2}{3x^2-2x-1}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3-2x+3}{3x^4-x^2-2}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2-x+2}{3x^2-4x-4}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^3-5x^2-1}{5x^3+2x^2-4x-3}$. ✓

2.23. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^4-2x^2-1}{4x^2+3x-1}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2}{4x^2+3x-10}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{8x^3-3x^2-5}{4x^4-3x^2-1}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-x^2-2}{2x^4-x-1}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4x-5}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^3-x^2+x-1}$.

3. Кўрсатилган лимитларни топинг:

3.1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-16}}{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x+4}}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x-5}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+1}}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3x-2}}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{2x-7}}{\sqrt{1+2x}-3}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{10+3x}}{\sqrt{2-x}-2}$.

3.11. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x^2+2\sqrt[3]{x}}.$$

3.12. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}.$$

3.13. $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{\sqrt[3]{4-2x}-2}.$$

3.14. $$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+25}}{\sqrt[3]{x}+2}.$$

3.15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27-3x+x^2}-3}{x^2-3x}.$$

3.16. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2-2x+4}-2}{\sqrt{9-x}-3}.$$

3.17. $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{3}\,x+1-\sqrt{9+2x}}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

3.18. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{2x+3}-3}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+6}}.$$

3.19. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{2x^2-3x+5}-2}.$$

3.20. $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{3+2x}}{x^3+x^2}.$$

3.21. $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}-2}.$$

3.22. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+6}}{x^2-9}.$$

3.23. $$\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{2x+13}-\sqrt{8+x}}{\sqrt{4-x}-3}.$$

3.24. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-10}}.$$

3.25. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-3}}.$$

3.26. $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{6+2x}}{\sqrt{8-x}-3}.$$

3.27. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

3.28. $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{3x+1}-4}.$$

3.29. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}.$$

3.30. $$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1-2x}}.$$

4. Кўрсатилган лимитларни топинг:

4.1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+2x+1}\right)^{x^2-1}.$$

4.2. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x+5}{3x^2+2x-1}\right)^{4x^2-1}.$$

4.3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-5}{2x^2-3x+4}\right)^{3x-2}.$$

4.4. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x-7}{4x^2-2x+9}\right)^{3x^2+1}.$$

4.5. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5x+3}{2x^2+3x-5}\right)^{4x-3}.$$

4.6. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-x+5}{6x^2+3x-5}\right)^{4-3x}.$$

4.7. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\right)^{3x-5}.$$

4.8. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3x-2}{5x^2-2x+3}\right)^{4x^2-3}.$$

4.9. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-5}\right)^{1-3x}.$$

4.10. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3x-1}{5x^2+3x+3}\right)^{-x^2+3}.$$

4.11. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-x+5}{4x^2-2x+7}\right)^{3-2x}.$$

4.12. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2-4x+5}{7x^2+8x-5}\right)^{3x^2-7}.$$

4.13. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-5}{2x^2-3x+7}\right)^{3x^2+4}.$$

4.14. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2+10x-6}{7x^2-6x+16}\right)^{x^2-4}.$$

4.15. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-3x+8}{6x^2+4x-9}\right)^{3x^2-8}.$$

4.16. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-3x+1}{3x^2+5x-6}\right)^{2x^2-1}.$$

4.17. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+8x-6}{3x^2-9x+7}\right)^{4-3x^2}.$$

4.18. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-4x-9}{5x^2+6x-8}\right)^{4-x^2}.$$

4.19. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-9x+8}{6x^2+9x-4}\right)^{3-4x^2}.$$

4.20. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x-8}\right)^{1-x}.$$

4.21. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2+5x-4}\right)^{6-3x^2}.$$

4.22. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-4}{x^2-3x-5}\right)^{3-x^2}.$$

4.23. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+9x-6}{x^2+8x+8}\right)^{3-2x^2}.$$

4.24. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-5x+8}{6x^2+2x-7}\right)^{3x-5}.$$

4.25. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-5x+4}{4x^2+9x+3}\right)^{4x+1}.$$

4.26. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2-8x-9}{7x^2+10x-8}\right)^{4-x}.$$

4.27. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+9x-6}{3x^2-8x+8}\right)^{3x^2-5}.$$

4.28. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2+3x-8}{7x^2+8x-10}\right)^{4-3x}.$$

4.29. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+10x-6}{5x^2-16x+8}\right)^{1-x^2}.$$

4.30. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+8x-9}{6x^2-4x-3}\right)^{3x-5}.$$

5. Кўрсатилган лимитларни ҳисобланг:

5.1. $$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{\sin 3x+2x}.$$

5.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}.$$

5.3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x^2}{3^{5x}-5^{3x}}.$$

5.4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7(x+\pi)}{e^{3x}-1}.$$

5.5. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg} x^3}.$$

5.6. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos 2x-\cos x}.$$

5.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{e^{3x}-e^{-x}}.$$

5.8. $$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2\pi(x+1)}{\ln(1+2x)}.$$

5.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin3x-\operatorname{tg}2x}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\ln(1-3x)}{4\operatorname{arc\,tg}4x}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{5x}}{\sin x+\sin x^2}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^x-5^{-2x}}{2\arcsin x-x^2}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x}{\ln(e-x)-1}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^{2x}-5^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arc\,tg}x}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos2x)}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos2x}{\sin^2x}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{\ln(x+1)}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2^x-1}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin7\pi x}{\sin8\pi x}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin5x}{\operatorname{tg}3x}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin2\pi x}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos2x}{\ln\cos4x}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos2x}$. ✓ с

6. Берилган функциянинг узилиш нуқталарини (агар улар мавжуд бўлса) топинг. Унинг чизмасини чизинг.

6.1. $$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ x^3, & \text{агар } 0<x\leqslant1 \text{ бўлса,}\\ x+1, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.2. $$f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ 1-x, & \text{агар } 0<x\leqslant2 \text{ бўлса,}\\ x^2, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.3. $$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ x^2, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса,}\\ 2x, & \text{агар } x\geqslant2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.4. $$f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ x+1, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant4 \text{ бўлса,}\\ 3+\sqrt{x}, & \text{агар } x>4 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.5. $$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{агар } x\leqslant1 \text{ бўлса,}\\ 2x, & \text{агар } 1<x<3 \text{ бўлса,}\\ x+2, & \text{агар } x\geqslant3 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.6. $$f(x)=\begin{cases} x+4, & \text{агар } x<1 \text{ бўлса,}\\ x^2+2, & \text{агар } 1\leqslant x<3 \text{ бўлса,}\\ 2x, & \text{агар } x\geqslant3 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.7. $$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса,}\\ x-2, & \text{агар } x\geqslant2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.8. $$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ (x+1)^2, & \text{агар } 0<x\leqslant2 \text{ бўлса,}\\ 4-x, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.9. $$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{агар } x\leqslant-1 \text{ бўлса,}\\ x^2+1, & \text{агар } -1<x\leqslant1 \text{ бўлса,}\\ 3-x, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.10. $$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ -(x-1)^2, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса,}\\ x-3, & \text{агар } x\geqslant2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.11. $$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & \text{агар } x\leqslant-1 \text{ бўлса,}\\ (x+1)^3, & \text{агар } -1<x<0 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } x\geqslant0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.12. $$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{агар } x\leqslant0 \text{ бўлса,}\\ x^2, & \text{агар } 0<x\leqslant2 \text{ бўлса,}\\ x+1, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.13. $$f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ x+1, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant4 \text{ бўлса,}\\ 3+x, & \text{агар } x>4 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

6.14. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ -2, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.15. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ x^3, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ x+4, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.16. $$f(x)=\begin{cases}2, & \text{агар } x<-1 \text{ бўлса},\\ 1-x, & \text{агар } -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ бўлса},\\ \ln x, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.17. $$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса},\\ \cos x, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant \pi \text{ бўлса},\\ 1-x, & \text{агар } x>\pi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.18. $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant -1 \text{ бўлса},\\ x^2-1, & \text{агар } -1<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ 2x, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.19. $$f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ -x^2+4, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса},\\ x-2, & \text{агар } x\geqslant 2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.20. $$f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{агар } x\leqslant 1 \text{ бўлса},\\ x^2+2, & \text{агар } 1<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ -2x, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.21. $$f(x)=\begin{cases}x, & \text{агар } x\leqslant 1 \text{ бўлса},\\ (x-2)^2, & \text{агар } 1<x<3 \text{ бўлса},\\ 6-x, & \text{агар } x\geqslant 3 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.22. $$f(x)=\begin{cases}3x+4, & \text{агар } x\leqslant -1 \text{ бўлса},\\ x^2-2, & \text{агар } -1<x<2 \text{ бўлса},\\ x, & \text{агар } x\geqslant 2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.23. $$f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{агар } x\leqslant -2 \text{ бўлса},\\ x^3, & \text{агар } -2<x\leqslant 1 \text{ бўлса},\\ 2, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.24. $$f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса},\\ \mathrm{in}\,x, & \text{агар } 0\leqslant x<\pi \text{ бўлса},\\ 3, & \text{агар } x\geqslant \pi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.25. $$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{агар } x\leqslant -1 \text{ бўлса},\\ x^2+1, & \text{агар } -1<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ 2x, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.26. $$f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ 2^x, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ x+3, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.27. $$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса},\\ x, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.28. $$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{агар } x\leqslant \frac{\pi}{2} \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } \frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ бўлса},\\ 2, & \text{агар } x\geqslant \pi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.29. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ x^2+1, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса},\\ x+1, & \text{агар } x\geqslant 2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

6.30. $$f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса},\\ 1, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса},\\ x^2-2, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

7. Функциянинг узилиш нуқталарини топинг. Функциянинг узилиш нуқтаси атрофидаги шаклини чизинг.

7.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$.

7.2. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}$.

7.3. $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$.

7.4. $f(x)=8^{\frac{3}{4-x}}$.

7.5. $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$.

7.6. $f(x)=6^{\frac{1}{2-x}}$.

7.7. $f(x)=5^{\frac{3}{x-8}}$.

7.8. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$.

7.9. $f(x)=4^{\frac{2}{x-6}}$.

7.10. $f(x)=4^{\frac{2}{5-x}}$.

7.11. $f(x)=9^{\frac{3}{4-x}}$.

7.12. $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$.

7.13. $f(x)=7^{\frac{2}{3-x}}$.

7.14. $f(x)=7^{\frac{2}{x+5}}$.

7.15. $f(x)=6^{\frac{1}{x-1}}$.

7.16. $f(x)=9^{\frac{1}{x+2}}$.

7.17. $f(x)=5^{\frac{7}{2-x}}$.

7.18. $f(x)=6^{\frac{3}{x+1}}$.

7.19. $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$.

7.20. $f(x)=8^{\frac{1}{x+4}}$.

7.21. $f(x)=3^{\frac{2}{x-8}}$.

7.22. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}$.

7.23. $f(x)=5^{\frac{3}{4-x}}$.

7.24. $f(x)=5^{\frac{4}{x+3}}$.

7.25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$.

7.26. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$.

7.27. $f(x)=4^{\frac{3}{3-x}}$.

7.28. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}$.

7.29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$.

7.30. $f(x)=4^{\frac{3}{x+2}}$.

3- боб

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1- §. Ҳосила. Ҳосилалар жадвали

3.1.1. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги лимити мавжуд бўлса, бу лимит $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *ҳосиласи* дейилади.

Ҳосиланинг белгиланиши:

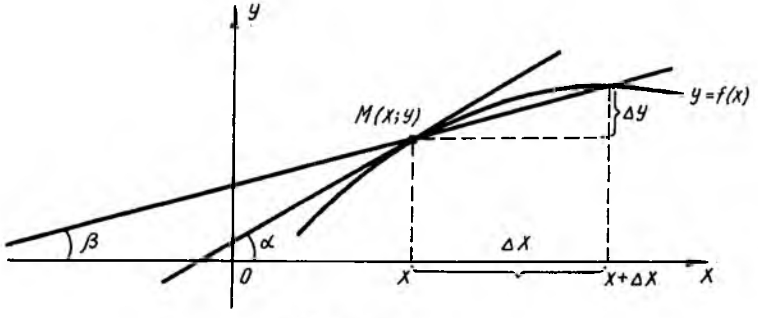
$$y' \text{ ёки } f'(x_0) \text{ ёки } \frac{dy}{dx} \text{ ёки } \frac{df}{dx}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада ***дифференциалланувчи*** дейилади, ҳосилани топиш жараёни ***дифференциаллаш*** дейилади.

3.1.2. Геометрик нуқтаи назардан $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи унинг графигига $M(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг (19- шакл).



19- шакл

$y=f(x)$ эгри чизиққа $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада ўтказилган *уринма тенгламаси* ушбу кўринишга эга:

$$y-y_0=f'(x_0)\ (x-x_0),$$

бунда $y_0=f(x_0)$.

$y=f(x)$ функция графигига уриниш нуқтаси $M_0(x_0, y_0)$ да ўтказилган ***нормалнинг тенгламаси*** ушбу кўринишга эга:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \text{ агар } f'(x_0)\neq 0 \text{ бўлса,}$$

$$x=x_0, \text{ агар } f'(x_0)=0 \text{ бўлса.}$$

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиқлар $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада кесишсин, бу нуқтадаги улар орасидаги бурчак деб $M_0(x_0, y_0)$ да уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади ва у қуйидаги формуладан топилади:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f'_2(x_0)-f'_1(x_0)}{1+f'_2(x_0)\cdot f'_1(x_0)}.$$

3.1.3. x — эркли ўзгарувчи, $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ дифференциалланувчи функциялар, C — ўзгармас сон бўлсин, у ҳолда қуйидаги дифференциаллаш қоидалари ўринли:

1. $C'=0$.
2. $x'=1$.
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.
5. $(Cu)'=Cu'$.
6. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.
7. $\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}$.

8. Агар $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, яъни $y=f(\varphi(x))$ — мураккаб функция бўлса, у ҳолда:

$$y'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

9. Агар $y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ — ўзаро тескари функциялар бўлса, у ҳолда $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$.

3.1.4. Ҳосилалар жадвали:

1. $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u' \quad (\alpha\in R)$.
2. $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.
3. $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$.
4. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.
5. $(e^u)'=e^u\cdot u'$.
6. $(u^v)'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v'$.
7. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$.
8. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.

9. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
10. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
11. $(\operatorname{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.
12. $(\operatorname{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.
13. $(\sec u)'=\frac{\sin u}{\cos^2 u}\cdot u'=\operatorname{tg}u\cdot\sec u\cdot u'$.
14. $(\operatorname{cosec}u)'=-\frac{\cos u}{\sin^2 u}\cdot u'=-\operatorname{ctg}u\cdot\operatorname{cosec}u\cdot u'$.
15. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
16. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
17. $(\operatorname{arctg}u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.
18. $(\operatorname{arcctg}u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.
19. $(\operatorname{arcsec}u)'=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot u'$.
20. $(\operatorname{arccosec}u)'=-\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot u'$.
21. $(\operatorname{sh}u)'=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)'=\operatorname{ch}u\cdot u'$.
22. $(\operatorname{ch}u)'=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)'=\operatorname{sh}u\cdot u'$.
23. $(\operatorname{th}u)'=\left(\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}\right)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u'$.
24. $(\operatorname{cth}u)'=\left(\frac{\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}u}\right)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u'$.

1-мисол. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y=\frac{2x+1}{x+3}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. x га Δx орттирма бериб, Δy орттирмани топамиз:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+3}-\frac{2x-1}{x+3}=$$

$$=\frac{(2x+2\Delta x-1)\ (x+3)-(x+\Delta x+3)\ (2x-1)}{(x+\Delta x+3)\ (x+3)}=\frac{7\Delta x}{(x+\Delta x+3)\ (x+3)}.$$

Δy нинг Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{7}{(x+\Delta x+3)\ (x+3)}\ .$$

$\Delta x\to 0$ да шу нисбатнинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7}{(x+\Delta x+3)\ (x+3)}\ =\frac{7}{(x+3)^2}\ .$$

Шундай қилиб, ҳосиланинг таърифига кўра:

$$y'=\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)'=\frac{7}{(x+3)^2}\ .$$

2-мисол. $y=|x|$ функция ҳар қандай x да узлуксиз. $x=0$ да бу функция дифференциалланмаслигига ишонч ҳосил қилинг.

Ечиш. $x=0$ нуқтада аргументга Δx орттирма берамиз, у ҳолда функция Δy орттирма олади:

$$\Delta y=|\Delta x|=\begin{cases}-\Delta x, & \text{агар}\quad \Delta x<0\quad \text{бўлса,}\\ \ \ \Delta x, & \text{агар}\quad \Delta x>0\quad \text{бўлса;}\end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \text{агар}\quad \Delta x<0\quad \text{бўлса,}\\ \ \ 1, & \text{агар}\quad \Delta x>0\quad \text{бўлса.}\end{cases}$$

Демак, $x=0$ нуқтада $y=|x|$ функция ҳосилага эга эмас, чунки $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг $\Delta x\to 0$ даги лимити мавжуд эмас.

3-мисол. $y=8-x^2$ ва $y=x^2$ параболаларнинг кесишиш бурчакларини топинг.

Ечиш. Параболалар тенгламаларини биргаликда ечиб, уларнинг кесишиш нуқталари $A(2, 4)$ ва $B(-2, 4)$ ни топамиз. Параболалар тенгламаларини дифференциаллаймиз: $y'=-2x$, $y'=2x$. Бу ҳосилаларнинг A ва B нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз ва эгри чизиқлар орасидаги бурчак формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{4+4}{1-16}=-\frac{8}{15}\ \text{ва}\ \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-4-4}{1-16}=\frac{8}{15}\ .$$

Бундан: $\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{8}{15}\right)$ ва $\varphi_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{15}$.

3.1.5. $y=f(x)$ функциянинг *логарифмик ҳосиласи* деб, шу функциянииг логарифмидан олинган ҳосилага айтилади, яъни:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}\ .$$

Функцияни олдиндан логарифмлашдан фойдаланиш баъзан унинг ҳосиласини топишни осонлаштиради. Функцияни логарифмлаш ва дифференциаллашни кетма-кет қўллаш *логарифмик дифференциаллаш* деб аталади.

4-мисол. Функция ҳосиласини топинг:

$$y=\sqrt[3]{x^2}\ \cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x.$$

Ечиш. Бу функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x.$$

Тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3}{\sin x}\cdot\cos x-\frac{2\sin x}{\cos x}\ ,$$

бундан

$$y'=y\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x\right).$$

1-дарсхона топшириғи

1. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y=\frac{4x^2-1}{x^2+1}$ функция ҳосиласини топинг.

Ж: $y'=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$.

2. $y=\sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтада узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқланг.

3. $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ эгри чизиққа абсциссаси $x_0=-1$ бўлган нуқтада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

Ж: $y=\sqrt[3]{4}\ (x+1)$ ва $y=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)$.

4. $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ эгри чизиқлар қандай бурчак остида кесишади?

Ж: $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70°30'$.

5. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини диффереициаллаш қоидалари ва формулаларини қўллаб топинг:

а) $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$;　б) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;　г) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

д) $y=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$;　е) $y=\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x+3x$.

1- мустақил иш

1. $y=\frac{8}{4+x^2}$ эгри чизиққа $x_0=2$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузииг.

Ж: $y=-\frac{x}{2}+2$ ва $y=2x-3$.

2. $y=\frac{3x-2}{4x+7}$ функция ҳосиласии таърифдан фойдаланиб топинг.

Ж: $\frac{29}{(4x+7)^2}$.

3. Қуйидаги фуикцияларнинг ҳосиласии топинг:

а) $y=\frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$;   б) $y=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

в) $y=3x\sin^3 x+3\cos x-\cos^3 x$;   г) $y=\mathrm{tg}^4\frac{x}{2}-\mathrm{ctg}^4\frac{x}{2}$;

д) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$;   е) $y=\mathrm{cosec}^2\frac{x}{2}$.

2- дарсхона топшириғи

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини дифференциаллаш қоидалари ва формулаларидан фойдаланиб топинг:

1. а) $y=x^2\sin 2x$;   б) $y=e^{4x}\mathrm{tg}2x$;

в) $y=\sqrt[3]{x^3+\sin^3 x}$;   г) $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\mathrm{ctg}^2 3x$;

д) $y=3^{-\cos^3 3x}$;   е) $y=e^{-\arcsin\sqrt{x}}$.

2. а) $y=(3x^3-\mathrm{ctg}^4 x)^3$;   б) $y=\ln^3(\sqrt{x}-2^{-x^2})$;

в) $y=\ln\mathrm{tg}\sqrt{x}$;   г) $y=e^{-\sqrt{x^2-3x+3}}$;

д) $y=\mathrm{sh}^2 x^3$;   е) $y=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{1+x^2}$.

3. а) $y=(2^{x^3}-\mathrm{tg}^4 2x)^3$;   б) $y=x^3\mathrm{th}^3 x$;

в) $y=\lg^4(x^5-\sin^5 2x)$;   г) $y=\mathrm{arc\,ctg}\sqrt{1+e^{-x^2}}$;

д) $y=(\sin 2x)^{\cos 4x}$;   е) $y=(x^2+1)^{\mathrm{ctg}2x}$.

4. а) $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;   б) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$

2- мустақил иш

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топииг:

1. а) $y=x^2\cdot\cos^3 2x$;   б) $y=\sqrt{\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin^2 x}}$;

в) $y=(3^{\sin 2x}-\cos 3x)^2$;   г) $y=e^{x^2}\cdot\cos^2 x$.

2. а) $y=x^3\cdot e^{\mathrm{ctg}3x}$;   б) $y=(\sin^3 3x+\cos^3 2x)^2$;

в) $y=\ln\mathrm{arctg}e^{-x}$;   г) $y=\sin^3 3x\cdot\mathrm{tg}^2 2x$.

3. а) $y=x\cdot\mathrm{ctg}^2 4x$;   б) $y=(x^3+\mathrm{ctg}^3 2x)^2$;

в) $y=\cos(x^4-\mathrm{tg}^4 x)$;   г) $y=\cos 2x\cdot e^{-2x}$.

4. а) $y=\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$;   б) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$;

в) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;   г) $y=\frac{2^x\cdot(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$.

2- §. Юқори тартибли ҳосилалар

3.2.1. $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли* ёки *иккинчи ҳосиласи* деб унинг биринчи тартибли ҳосиласидан олингаи ҳосилага, яъни $(y')'$ га айтилади.

Иккинчи тартибли ҳосила қуйидагиларниig бири билан белгиланади:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$y=f(x)$ фуикциянинг *n-тартибли* ёки *n-ҳосиласи* деб униг $(n-1)$-тартибли ҳосиласидан олииган ҳосилага айтилади. n-тартибли ҳосила учун ушбу белгилашлардан бири қўллаиилади:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Белгилашга кўра

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'.$$

1- мисол. $y=\ln x$ функциянинг n- тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш. n марта кетма-кет дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y'=\frac{1}{x},\ y''=-\frac{1}{x^2},\ y'''=\frac{2}{x^3},\ y^{\mathrm{IV}}=-\frac{2\cdot3}{x^4},\ \ldots,$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^n}(n-1)!$$

3.2.2. x ўзгарувчининг y функцияси ошкормас шаклда $F(x, y)=0$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда y' ҳосилани топиш учун $F(x, y)=0$ тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган y' га нисбатан чизиқли тенгламадан ҳосилани топиш керак. Иккинчи ва ундан юқорироқ тартибли ҳосилалар ҳам шу каби топилади.

2-мисол. Ошкормас ҳолда

$$x^2+y^2=64$$

тенглама билан берилган y функциянинг y' ва y'' ҳосилаларини топинг.

Ечиш. y ўзгарувчи x нинг функцияси деб ҳисоблаб, берилган тенгламанинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз: $2x+2y\cdot y'=0$. Бундан $y'=-\frac{x}{y}$. Топилган биринчи y' ҳосилани яна x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y''=(y')'=-\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Энди $y'=-\frac{x}{y}$ эканини ҳисобга олиб,

$$y''=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $y''=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$ ёки $y''=-\frac{64}{y^3}$, чунки шартга кўра $x^2+y^2=64$.

3.2.3. Агар y функциянинг x аргументга боғлиқлиги

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан параметрик шаклда берилган бўлса, у ҳолда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{x^2}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x=8\cos t, \\ y=8\sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Юқорида келтирилган формуладан фойдаланиб, қуйидагиларни осон топамиз:

$$x'_t=-8\ \sin t,\ y'_t=8\ \cos t;$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{8\cos t}{-8\sin t}=-\mathrm{ctg}\,t;$$

$$y''_{x^2}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=(-\mathrm{ctg}\,t)'_t\cdot\frac{1}{-8\sin t}=-\frac{1}{8\cdot\sin^3 t}.$$

3-дарсхона топшириғи

1. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. $y=\frac{1+x}{1-x}$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

3. Қуйидаги тенгламалар билан ошкормас ҳолда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

а) $y^2=2px$; б) $y=x+\mathrm{arctg}\,y$.

4. Параметрик тенгламалар билан берилган функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

а) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

5. Ушбу

$$\begin{cases} x=\frac{5t}{1+t^2}, \\ y=\frac{5t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиққа $M_0(2,\ 4)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини топинг.

3-мустақил иш

1. а) $y=\frac{x^2}{4}(2\ln x-3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$ теиглама билан ошкормас ҳолда берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. *а*) $y=x^2\sin(5x-3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топииг.

в) $x^3+y^3-3xy=0$ тенглама билан ошкормас ҳолда берилгаи y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

3. а) $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x=\mathrm{sh}^2 t, \\ y=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билаи берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $x^4-xy+y^4=1$ тенглама билаи ошкормас ҳолда берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топииг.

3- §. Функциянинг дифференциали

3.3.1. $y=f(x)$ функциянинг дифференциали деб, унинг орттирмасининг эркли ўзгарувчи x нинг орттирмасига нисбатан чизиқли бўлган бош қисмига айтилади.

$y=f(x)$ функциянинг дифференциали dy билан белгиланади. Функциянииг дифференциали уиниг ҳосиласи билан эркли ўзгарувчи орттирмасининг кўпайтмасига тенг:

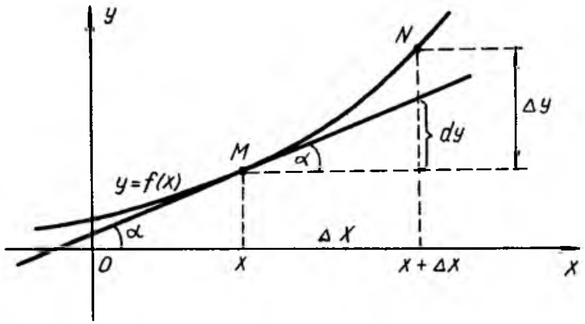
$$dy=f'(x)\Delta x \quad \text{ёки} \quad dy=y'\cdot\Delta x.$$

Равшанки, $dx=\Delta x$. Шу сабабли

$$dy=f'(x)dx \quad \text{ёки} \quad dy=y'dx.$$

Дифференциал геометрик жиҳатдаи $y=f(x)$ функция графигига $M(x,\ y)$ нуқтада ўтказилгаи уринма ординатасининг орттирмасига тенг (20- шакл).

Функциянинг дифференциали dy уиинг Δy орттирмасидан Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади.



20- шакл

3.3.2. Агар $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар диффереициалланувчи бўлса, у ҳолда дифференциалнинг таърифи ва дифференциаллаш қоидаларидан бевосита диффереициалнинг асосий хоссаларига эга бўламиз:

1. $d(C)=0$, бунда C — ўзгармас.
2. $d(Cu)=Cdu$.
3. $d(u\pm v)=du\pm dv$.
4. $d(u\cdot v)=udv+vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$, бунда $v\neq 0$.
6. $df(u)=f'_u(u)\cdot u'dx=f'(u)du$.

1-мисол. $y=\mathrm{tg}^4 2x$ функция дифференциалиии топииг.

Ечиш. Олдин берилган фуикциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y'=8\mathrm{tg}^3 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}=8\mathrm{tg}^3 2x\sec^2 2x\,.$$

У ҳолда $dy=8\mathrm{tg}^3 2x\cdot\sec^2 2xdx$.

3.3.3. $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб биринчи тартибли дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади ва

$$d^2y=d(dy)$$

каби белгиланади.

$y=f(x)$ функциянинг *n- тартибли дифференциали* деб $(n-1)$-тартибли дифференциалдан олинган дифференцналга айтилади, яъни:

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

$y=f(x)$ функция берилган бўлиб, бунда x — эркли ўзгарувчи бўлса, у ҳолда унинг юқори тартибли дифференциаллари ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$d^2y=y''dx^2,\ d^3y=y'''dx^3,\ \ldots\ ,\ d^ny=y^{(n)}dx^n.$$

2-мисол. $y=x(\ln x-1)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y'=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x,\ y''=\frac{1}{x}.$$

Демак, $dy=\ln x dx$, $d^2y=\frac{1}{x}dx^2$.

3.3.4. Функциянинг dy дифференциали унинг Δy орттирмасидан $\Delta x=dx$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади, шу сабабли $\Delta y\approx dy$ ёки

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,$$

бундан

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

формулага эга бўламиз, бу формула функция қийматларини тақрибий ҳисоблашларда қўлланилади.

3-мисол. arcsin 0,51 нинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Ечиш. $y=\arcsin x$ функцияни қараймиз: $x=0{,}5$, $\Delta x=0{,}01$ деб олиб ва $\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+(\arcsin x)'\Delta x$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\arcsin 0{,}51\approx\arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=$$

$$=\frac{\pi}{6}+0{,}011\approx 0{,}534.$$

Шундай қилиб, $\arcsin 0{,}51\approx 0{,}534$ радиан.

4-дарсхона топшириғи

1. $y=2x^3+5x^2$ функция берилган. Унинг:

а) орттирмасини топинг;

б) орттирмасининг бош қисмини топинг.

Ж: а) $\Delta y=(6x^2+10x)\Delta x+(6x+5)\Delta x^2+2\Delta x^3$;

б) $dy=(6x^2+10x)\Delta x$.

2. Қуйидаги функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг:

а) $y=\sqrt{1+x^2}$; б) $y=\arcsin\frac{1}{x}$; в) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

3. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциалларини топинг:

а) $y=e^{-x^3}$; б) $y=x(\ln x-1)$; в) $y=\arccos x$.

4. Қуйидаги функцияларнинг учинчи тартибли дифференциалларини ҳисобланг:

а) $y=\cos^2 2x$; б) $y=(2x-3)^3$; в) $y=\frac{\ln x}{x}$.

5. Қуйидаги функцияларнинг тақрибий қийматларини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг:

а) $x=1{,}03$ да $y=x^3-4x^2+5x+3$;

б) $x=0{,}2$ да $y=\sqrt{1+x}$.

Ж: а) 5,00; б) 1,10.

6. $\sqrt[4]{17}$ нинг тақрибий қийматини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг.

Ж: 2,03.

4-мустақил иш

1. Агар

а) $y=x^3\ln x$; б) $y=e^{-3x}\cdot\cos 2x$

бўлса, dy, d^2y, d^3y дифференциалларни ҳисобланг.

2. Функцияларнинг тақрибий қийматларини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг:

а) $x=0{,}1$ да $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

б) $x=0{,}98$ да $y=\sqrt{x^2-7x+10}$.

Ж: а) 1,03; б) 2,09.

4-§. Ролл, Лагранж, Коши теоремалари. Лопиталь қоидаси

3.4.1. Ролл теоремаси. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) оралиқда дифференциалланувчи ва $f(a)=f(b)$ бўлса, у ҳолда ақалли битта шундай $x=c$ $(a<c<b)$ нуқта мавжудки, унда $f'(c)=0$ бўлади.

Бу теорема ҳосиланинг ноллари ёки илдизлари ҳақидаги теорема ҳам дейилади.

Лагранж теоремаси. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) оралиқда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда ақалли битта шундай $x=c$ $(a<c<b)$ нуқта мавжудки,

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

бўлади.

Бу теорема чекли айирмалар ҳақидаги теорема ҳам дейилади.

Коши теоремаси. Агар $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) ораликда дифференциалланувчи, шу билан бирга бу ораликда $\varphi'(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда ақалли битта шундай $x=c(a<c<b)$ нуқта мавжудки,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

бўлади, бунда $\varphi(b)\neq\varphi(a)$.

1-мисол. $[1,5]$ кесмада $f(x)=x^2-6x+100$ функция учун Ролл теоремаси ўринлими? x нинг қандай қийматида $f'(x)=0$ бўлади?

Ечиш. $f(x)$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз, дифференциалланувчи ва унинг $[1, 5]$ кесма охирларидаги қийматлари тенг: $f(1)=f(5)=95$ бўлгани учун Ролл теоремаси шартлари бажарилади. x нинг $f'(x)=0$ бўладиган қиймати $f'(x)=2x-6=0$ тенгламадан аниқланади, яъни $x=3$.

2-мисол. $f(x)=2x-x^2$ эгри чизиқнинг AB ёйида шундай M нуқтани топингки, бу нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринма AB ватарга параллел бўлсин, бунда $A(1, 1)$ ва B $(3, -3)$.

Ечиш. $f(x)=2x-x^2$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз ва дифференциалланувчи. Изланаётган M нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шартга кўра $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ га тенг, иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра иккита $a=1$ ва $b=3$ қиймат орасида

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x=c$ қиймат мавжуд, бунда $f'(x)=2-2x$. Тегишли қийматларни қўйсак,

$$f(3)-f(1)=(3-1)f'(c)$$

ёки

$$(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)=(3-1)\ (2-2c).$$

Бу охирги тенгламани c га нисбатан ечсак, $c=2$, $f(2)=0$. Шундай қилиб, M нуқта $(2, 0)$ координаталарга эга.

3-мисол. $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$ функция учун $[0;\ 10]$ кесмада Лагранж теоремаси ўринлими?

Ечиш. $f(x)$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз, аммо унинг $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-8}}$ ҳосиласи $(0;\ 10)$ оралиқнинг $x=8$ нуқтасида мавжуд эмас, шунга кўра Лагранж теоремаси ўринли эмас.

3.4.2. Аниқмасликларни очишнинг Лопиталь қоидаси ($\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш).

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида (x_0 нуқтанинг ўзидан ташқари) дифференциалланувчи ва $\varphi'(x)\neq 0$ бўлсин. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ ёки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

$x\to\infty$ да ҳам Лопиталь қоидаси ўринли.

$0\cdot\infty$ ёки $\infty-\infty$ шаклидаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилиб, сўнгра Лопиталь қоидасидан фойдаланилади.

0^0, ∞^0 ёки 1^∞ кўринишдаги аниқмасликлар логарифмлаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

4-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ни топинг.

Ечиш. Ифоданинг сурати ва махражи $x\to 0$ да нолга интилади, шу сабабли $\frac{0}{0}$ шаклидаги аниқмасликка эгамиз. Лопиталь қоидасидан фойдалансак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Бу ерда Лопиталь қоидаси икки марта қўлланилди.

5-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$ ни топинг.

Ечиш. $0\cdot\infty$ шаклидаги аниқмасликка эгамиз, $x^2\ln x$ кўпайтмани $\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$ бўлинма шаклида ифодаласак, натижада $\frac{\infty}{\infty}$ шаклидаги аниқмасликка эга бўламиз. Лопиталь қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

6-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$ ни топинг.

Ечиш. 0^0 шаклидаги аинқмасликка эгамиз. Берилган функцияни y билан белгилаб: $y=(\sin x)^x$, буни логарифмлаймиз:

$$\ln y=x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Лопиталь қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right) = 0\,.$$

Шундай қилиб, $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

5- дарсхона топшириғи

1. $[-1;\ 0]$ ва $[0;\ 1]$ кесмаларда $f(x) = x - x^3$ функция учун Ролл теоремаси ўринлими? Агар ўринли бўлса, у ҳолда x нинг тегишли қийматларини топинг.

Ж: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ функция илдизлари орасида ҳосиланинг илдизи борлигини текширинг.

3. $[-1,\ 2]$ кесмада $\frac{4}{x}$ ва $1 - \sqrt[3]{x^2}$ функцияларга Лагранж теоремасини қўллаб бўладими?

4. Қайси нуқтада $f(x) = 4 - x^2$ функцияга ўтказилган уринма $A(-2, 0)$ ва $B(1, 3)$ нуқталарни тортиб турувчи ватарга параллел?

Ж: $(-0{,}5;\ 3{,}75)$ нуқтада.

5. $f(x) = x^3$ ва $\varphi(x) = x^2$ функциялар учун Коши формуласини ёзинг ва c нуқтани топинг.

6. Лопиталь қоидасидан фойдаланиб, лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x - \sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x)^{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x} - 1}{\sin 3x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$;

Ж: а) $\frac{7}{2}$; б) 3; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 0; е) 1; ж) 3.

5- мустақил иш

1. $[-1;\ 1]$ кесмада $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ функция учун Ролл теоремасини қўллаб бўладими?

2. Ушбу
а) $f(x) = \operatorname{arctg}x$ функция учун $[0;\ 1]$ кесмада;
б) $f(x) = \arcsin x$ функция учун $[0;\ 1]$ кесмада;
в) $f(x) = \ln x$ функция учун $[1;\ 2]$ кесмада Лагранж формуласини ёзинг ва $x = c$ ни топинг.

Ж: а) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; б) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$; в) $\frac{1}{\ln 2}$.

3. Ушбу

а) $\sin x$ ва $\cos x$ функциялар учун $[0;\ \frac{\pi}{2}]$ кесмада;

б) x^2 ва $\sqrt{x}$ функциялар учун $[1;\ 4]$ кесмада Коши формуласини ёзинг ва $x = c$ ни топинг.

Ж: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2}$.

4. Лопиталь қоидасидан фойдаланиб қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1 - x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Ж: а) 2; б) ∞; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) 1; е) 2.

5- §. Тейлор формуласи

3.5.1. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида $(n+1)$- тартибгача ҳосилаларга эга бўлса ($(n+1)$- тартибли ҳосила ҳам киради), у ҳолда бу атрофнинг ҳар қандай x нуқтаси учун n- тартибли Тейлор формуласи ўринли:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\ ,$$

бунда $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Тейлор формуласининг Лагранж шаклидаги *қолдиқ ҳади* дейилади, ξ нуқта x ва x_0 нуқталар орасида ётади, яъни $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ ва $0<\theta<1$.

1-мисол. $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ кўпҳадни $(x-2)$ иккиҳаднинг бутун мусбат даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. Масалани ҳал қилиш учуи кўпҳадни ва унинг ҳосилаларининг $x_0=2$ нуқтадаги қийматларини топиш керак. Тегишли ҳисоблашларни бажарамиз:

$$f'(x)=3x^2-4x+3;\ f''(x)=6x-4;\ f'''(x)=6;\ n\geqslant 4 \text{ учун } f^{(n)}(x)=0.$$

Бундан: $f(2)=11$; $f'(2)=7$; $f''(2)=8$; $f'''(2)=6$.

Демак,

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+5=11+\frac{7}{1!}(x-2)+\frac{8}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3$$

ёки

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

2-мисол. $x_0=-1$ да $f(x)=e^x$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

Ечиш. Барча n лар учун $f^{(n)}(x)=e^x$ ва $f^{(n)}(-1)=\frac{1}{e}$ экани равшан.

Демак,

$$e^x=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\,\frac{x+1}{1!}+\frac{1}{e}\,\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{1}{e}\,\frac{(x+1)^3}{3!}+R_3(x),$$

шу билан бирга $R_3(x)=e^{\xi}\frac{(x+1)^4}{4!}$, бу ерда ξ нуқта x ва -1 орасида ётади ёки

$$\xi=-1+\theta(x+1),\ 0<\theta<1.$$

3.5.2. Агар Тейлор формуласида $x_0=0$ олинса, у ҳолда, n-тартибли Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

бунда $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ — қолдиқ ҳад, ξ нуқта x ва 0 нуқталар орасида ётади, яъни $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

Баъзи функцияларнинг Маклорен формуласи бўйича ёйилмасини келтирамиз:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$
$$+(-1)^n\cos\theta x\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\cos\theta x\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1}\cdot x^{n+1}.$$

$f(x)=(1+x)^m$ функциянинг ёйилмаси *биномиал ёйилма* дейилади.

3-мисол. Маклорен формуласи ёрдамида $f(x)=\ln(1+x)$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. $f(0)=0$ экани равшан. Берилган фуикциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2};\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3};$$
$$f^{(IV)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4};\ \ldots;\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Шундай қилиб,

$$f'(0)=1;\quad f''(0)=-1;\quad f'''(0)=2!;\quad f^{(IV)}(0)=-3!,\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!;\ f^{(n+1)}(x)\ \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Буларии Маклорен формуласига қўйсак,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3\cdot 2!}{3!}-\frac{x^4\cdot 3!}{4!}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+R_n(x)$$

ёки

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$. Бу ерда қолдиқ ҳад $R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$, ξ нуқта эса 0 ва x нуқталар орасида ётади.

6- дарсхона топшириғи

1. $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ кўпҳадни $x+1$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

Ж: $f(x)=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3$.

2. $x_0=1$ нуқтада $f(x)=\sqrt{x}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

$$Ж:\ f(x)=1-\frac{x-1}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3+R_3(x),$$

бу ерда $R_3(x)=\frac{35}{128}\ \frac{(x-1)^4}{\xi^{\frac{9}{2}}}$.

3. $f(x)=\mathrm{tg}x$ функция учун иккинчи тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

$$Ж:\ f(x)=x+\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1+2\sin^2\xi}{\cos^4\xi}.$$

4. $f(x)=xe^x$ функция учун n- тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

$$Ж:\ f(x)=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\xi+n+1)e^{\xi x}.$$

6- мустақил иш

1. Кўпҳадлар ёйилмасини ёзинг:

а) $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ ни $(x-1)$ иккиҳад даражалари бўйича;

б) $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ кўпҳадни $(x-4)$ иккиҳад даражалари бўйича.

2. а) $x_0=2$ нуқтада $f(x)=\frac{x}{x-1}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг;

б) $x_0=1$ нуқтада $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

3. а) $f(x)=\arcsin x$ функция учун учинчи тартибли Маклорен формуласини ёзинг;

б) $f(x)=\sin^2 x$ функция учун $2n$- тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

6- §. Тақрибий ҳисоблашларга Тейлор формуласининг татбиқи

Тейлор формуласи ихтиёрий $f(x)$ функцияни

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпҳад шаклида тақрибий ифодалаш имконини беради. Бу кўпҳад n- тартибли *Тейлор кўпҳади* дейилади. Хусусан, $x_0=0$ да n- тартибли *Маклорен кўпҳадига* эга бўламиз.

Баъзи функцияларнинг Маклорен кўпҳади шаклидаги тақрибий ифодаларини келтирамиз:

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$(1+x)^m\approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

$n=1$, 2, 3 деб олиб, қуйидаги тақрибий формулаларга эга бўламиз:

$$e^x=1+x;\ e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2};\ e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6};$$

$$\sin x\approx x,\ \sin x\approx x-\frac{x^3}{6};\ \sin x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120};$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2};\ \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24};\ \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+$$
$$+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720};$$

$$(1+x)^m\approx 1+mx;\ (1+x)^m\approx 1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2;$$

$$(1+x)^m\approx 1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3.$$

Келтирилган функцияларнинг ҳар бири учун тақрибий формулалар аниқликнинг ортиб бориши тартибида берилган.

Тейлор (Маклорен) формуласи функциялар қийматларини берилган аниқликда ҳисоблашларда қўлланилади.

Масалан, $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги қийматини хатолиги ε дан катта бўлмайдиган аниқликда ҳисоблаш учун Тейлор кўпҳадини шундай k- тартибгача олиш керакки, бу k сон $|R_n(a)|<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи n ларнинг энг кичиги қилиб танланади.

1- мисол. e сонини 0,0001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. $x=a=1$ эканлигини ҳисобга олсак, Маклорен формуласига кўра:

$$e=f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1).$$

n нинг $R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 0{,}0001$ шартни қаноатлантирувчи энг кичик қиймати $k=6$ бўлади, бунда $0<\xi<1$. Демак,

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!}=2{,}718\,.$$

2-мисол. $\sqrt[3]{29}$ нинг қийматини 0,001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Берилган илдизни бундай ифодалаймиз:

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ушбу биномнал ёйилмадан фойдаланамиз:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)\,.$$

Бу ерда

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1},\ 0<\xi<1\,.$$

$R_n(x)$ нинг қийматини ўрнига қўйиб,

$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$ тақрибий тенгликка эга бўламиз. $R_n(x)$ хатоликни $|x|<1$ ва етарлича катта n ларда исталганча кичик қилиш мумкин.

$x=\frac{2}{27}$ ва $m=\frac{1}{3}$ деб олсак,

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\ldots+R_n\left(\frac{2}{27}\right)\right).$$

Ҳисоблашларнинг кетма-кет хатоликлари катталиги $3|R_n|$ ни баҳолаб, топамиз:

$$3|R_1| < \frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2} < 0{,}002,\quad 3|R_2| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0{,}0003\,.$$

Демак, берилган аниқликда ҳисоблаш учун учта ҳадни ($k=3$) олиш етарли экан, яъни

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1+0{,}024-0{,}0006) = 3{,}072\,.$$

7-дарсхона топшириғи

1. $y=\frac{x}{x-1}$ функция учун $x_0=2$ нуқтада учинчи тартибли Тейлор кўпҳадини ёзинг. Берилган функция ва унинг кўпҳади графикларини чизинг.

2. $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$ тақрибий формуладан фойдаланиб $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ ни топинг ва хатоликни баҳоланг.

Ж: $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0{,}78$; $\varepsilon<0{,}01$.

3. Қуйидагиларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\cos 41°$; б) $\sqrt[3]{121}$.

Ж: а) 0,754; б) 4,946.

7-мустақил иш

1. $f(x)=\arcsin x$ функция учун учинчи тартибли Маклорен кўпҳадини ёзинг. Берилган функция ва унинг кўпҳади графикларини ясанг.

2. Қуйидагиларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\sqrt[7]{129}$; в) $\sin 36°$.

Ж: а) 1,395; б) 2,002; в) 0,587.

4- боб

ФУНКЦИЯЛАРНИ ҲОСИЛАЛАР ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

1- §. Бириччи тартибли ҳосила ёрдамида функцияларнинг экстремумларини текшириш

4.1.1. Агар (a, b) оралиқнинг $x_2>x_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталари учун $f(x_2)>f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) оралиқда *ўсувчи* дейилади.

Агар (a, b) оралиқнинг $x_2>x_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталари учун $f(x_2)<f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) оралиқда *камаювчи* дейилади.

Оралиқда ўсувчи ёки камаювчи функциялар *монотон функциялар* дейилади.

Монотонликнинг зарурий шартлари:

1. Агар (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция ўсувчи бўлса, у ҳолда $f'(x)>0$.

2. Агар (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция камаювчи бўлса, у ҳолда $f'(x)<0$.

Монотонликнинг етарлилик шартлари.

1. Агар (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция мусбат ҳосилага эга бўлса, яъни $f'(x)>0$, у ҳолда функция шу оралиқда *ўсувчи функция* бўлади.

2. Агар (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция манфий ҳосилага эга бўлса, яъни $f'(x)<0$, функция шу оралиқда *камаювчи функция* бўлади.

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенг ёки узилишга эга бўладиган нуқталари *критик нуқталар* дейилади.

Энг содда ҳолларда $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини чекли сондаги критик нуқталар билан чегараланган монотонлик оралиқларга бўлиш мумкин.

4.1.2. Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x\neq x_0$ нуқтаси учун $f(x)<f(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимумга эришади* дейилади.

Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x\neq x_0$ нуқтаси учун $f(x)>f(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада *минимумга эришади* дейилади.

Функция максимум ёки минимумга эришадиган нуқталар унинг *экстремум* нуқталари дейилади. Функциянинг экстремум нуқталаридаги қийматлари функциянинг *экстремал* (*максимал* ёки *минимал*) *қийматлари* дейилади.

Экстремумнинг зарурий шарти. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0)$ нолга теиг ёки мавжуд бўлмайди.

Аммо ҳар қандай критик нуқта ҳам экстремум нуқтаси бўлавермайди.

Экстремумнинг етарлилик шарти. Агар x_0 нуқта $y=f(x)$ функциянинг критик нуқтаси бўлиб, функциянинг ҳосиласи бу нуқтадан ўтишда ишорасини *ўзгартирса,* у ҳолда x_0 — бу функциянинг *экстремум нуқтаси* бўлади, шу билан бирга:

1. Агар x_0 нуқтадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуқтада функция максимумга эришади.

2. Агар x_0 нуқтадан чаидан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуқтада функция минимумга эришади.

Шундай қилиб, монотонлик оралиқларини ва функция экстремумини топиш учун олдин функциянинг аниқланиш соҳасини критик иуқталар ёрдамида монотонлик оралиқларига бўлиш ва уларда ҳосила ишорасини текшириш керак.

Шундан кейин монотонлик ва экстремумнинг етарлилик шартларидан фойдаланиб, ўсиш ва камайиш оралиқларини, максимум ва минимум нуқталарини топиш ҳамда функцияниинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаб, натижаларни тегишли жадвалга ёзиш керак.

1- мисол. $y=x^3-3x^2$ функциянинг монотонлик оралиқларини ва экстремумларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аниқлаииш соҳаси — бутун Ox ўқи бўлиб, унинг ҳосиласи $y'=3x(x-2)$.

Ҳосилани нолга тенглаштириб, критик нуқталарни топамиз: $x_1=0$ ва $x_2=2$. Ox ўқи бу нуқталар билан учта оралиққа бўлинади: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ ва $(2; +\infty)$.

Бу оралиқларда ҳосиланинг ишорасини текшириб, натижаларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	—	0	+
y	↗	max 0	↘	min —4	↗

$y_{max}=f(0)=0^3-3\cdot0^2=0$; $y_{min}=f(2)=2^3-3\cdot2^2=-4$.

4.1.3. $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзининг *энг кичик* $(m=y_{\text{э кич}})$ ёки энг катта $(M=y_{\text{э, кат}})$ қийматларига (a, b) ораликда ётувчи критик нуқталарида ёки $[a, b]$ кесманинг охирларида эришади.

2- мисол. $y=x^4-2x^2+3$ функциянинг $[-3; 2]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласи: $y'=4(x^3-x)$. $y'=0$ шартдан $x_1=0$, $x_2=1$ ва $x_3=-1$.

Критик нуқталарнинг ҳаммаси $(-3; 2)$ оралиққа тегишли. Берилган функциянинг бу нуқталардаги ва кесманинг охирларидаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y(0)=3,\ y(1)=2,\ y(-1)=2,\ y(-3)=66,\ y(2)=11.$$

Шундай қилиб, $[-3; 2]$ кесмада $y_{\text{э. кат}}=66$, $y_{\text{э. кич}}=2$.

1- дарсхона топшириғи

1. Функцияларнинг монотонлик оралиқларини топинг:

а) $y=2-3x+x^3$; б) $y=x(1+\sqrt{x})$;

в) $y=x-2\sin x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Ж: а) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ўсади, $(-1, 1)$ да камаяди;

б) $[0, +\infty)$ да ўсувчи;

в) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ да ўсувчи; $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ва $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ да камаювчи.

2. Функциянинг экстремумларини топинг:

а) $y=\frac{x^2}{x-2}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{\ln x}{x}$.

Ж: а) $x=0$ да $y_{\max}=0$; $x=4$ да $y_{\min}=8$;

б) $x=1$ да $y_{\min}=2$; $x=0$ да $y_{\max}=-2$;

в) $x=e$ да $y_{\max}=\frac{1}{e}$.

3. Ушбу

а) $y=\frac{x-1}{x+1}$ функциянинг $[0, 4]$ кесмадаги;

б) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ функциянинг $[0, 1]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Ж: а) $M=0{,}6$, $m=-1$; б) $M=\frac{\pi}{4}$, $m=0$.

1- мустақил иш

1. Функцияларнинг монотонлик оралиқлари ва экстремум нуқталарини топинг:

а) $y=x\sqrt{1-x^2}$; б) $y=x-2\ln x$; в) $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$.

Ж: а) $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ да камаювчи; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да ўсувчи, $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$;

б) $(0, 2)$ да камаювчи; $(2, +\infty)$ да ўсувчи; $y_{\min}=$ $=y(2)=2(1-\ln 2)\approx 0{,}61$;

в) $(0, +\infty)$ да ўсувчи.

2. Ушбу

а) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

б) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

в) $y=x+2\sqrt{x}$ нинг $[0, 4]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:

Ж. а) $y_{\max}=1$, $y_{\min}=0{,}6$;

б) $y_{\max}=2$, $y_{\min}=\sqrt[3]{2}$;

в) $y_{\max}=8$, $y_{\min}=0$.

2- §. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Эгилиш нуқталари. Асимптоталар

4.2.1. $y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *пастда* ётса, у ҳолда функция графиги *қавариқ* дейилади.

$y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *юқорида* ётса, у ҳолда функция графиги *ботиқ* дейилади.

Функция графигининг қавариқ қисмини ботиқ қисмидан ажратувчи M_0 $(x_0, f(x_0))$ нуқта графикнинг эгилиш нуқтаси дейилади.

Функция графигининг қавариқ ёки ботиқ бўлишининг етарлилик шартлари. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий, яъни $f''(x)<0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги қавариқ бўлади.

Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x)>0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги ботиқ бўлади.

Қавариқлик оралиғини ботиқлик оралиғидан ажратиб турувчи эгилиш нуқтасидан ўтишда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ишорасини ўзгартиради. Бундай нукталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ё нолга тенг, ёки мавжуд бўлмайди.

$f''(x)=0$ ёки $f''(x)$ мавжуд бўлмайдиган нуқталар *иккинчи тур критик нуқталар* дейилади.

Эгилиш нуқталари мавжуд бўлишининг етарлилик шарти. Агар x_0 нуқта $y=f(x)$ функция учун иккинчи тур критик нуқта бўлса ва $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила бу нуқтадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, у ҳолда бу функция графигининг x_0 абсциссали нуқтаси эгилиш нуқтаси бўлади.

Демак, функция графигининг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топиш учун олдин функция аниқланиш соҳасини иккинчи тур критик нуқталар билан оралиқларга бўлиш ва бу оралиқларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириш керак. Шундан кейин етарлилик шартларидан фойдаланиб, қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва эгилиш нуқталари аниқланади.

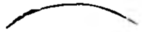
1-мисол. $y=xe^x$ функциянинг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси бутун Ox ўқдан иборат. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y'=e^x(1+x); \qquad y''=e^x(2+x).$$

Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенглаштириб, иккинчи тур критик нуқтани топамиз: $x=-2$. Ox ўқ бу нуқта билан иккита оралиққа бўлинади: $(-\infty;\ -2)$, $(-2,\ +\infty)$.

Бу оралиқларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириб, ушбу жадвални тузамиз:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y		$-2e^{-2}$	

$x=-2$ да графикда ординатаси $y=-2e^{-2}$ бўлган эгилиш нуқтасига эга бўламиз.

4.2.2. Агар $y=f(x)$ функция графигидаги нуқта шу график бўйлаб чексиз узоқлашганда ундан бирор тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилса, бу тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* деб аталади.

Агар $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ бўлса, $x=a$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигининг *вертикал асимптотаси* дейилади.

Агар

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ ва } b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

ёки

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ ва } b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$$

лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y=kx+b$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функциянинг *оғма асимптотаси* дейилади.

Хусусан, $k=0$ да *горизонтал асимптотага* эга бўламиз.

2-мисол. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ функциянинг асимптоталарини топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$ бўлгани учун $x=-2$ вертикал асимптота бўлади. Оғма асимптоталарни топамиз:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=-4.$$

Шундай қилиб, оғма асимптотанинг тенгламаси $y=x-4$ кўринишга эга.

2-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг:

а) $y=x^5+5x-6$; б) $y=(x-4)^5+4x+4$; в) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ж: а) $(-\infty,\ 0)$ да қавариқ; $(0,\ +\infty)$ да ботиқ; эгилиш нуқтаси: $M_0(0,\ 6)$;

б) $(-\infty, 4)$ да ботиқ; $(4,\ +\infty)$ да қавариқ; эгилиш нуқтаси: $M_0(4,\ 20)$;

в) $(-\infty,\ -1)$ ва $(1,\ +\infty)$ да ботиқ; $(-1,\ 1)$ да қавариқ; эгилиш нуқталари: $M_1\left(-1,\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ва $M_2\left(1,\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$; б) $y=3x+\operatorname{arctg}5x$; в) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$.

Ж: а) $x=2$ ва $y=1$;

б) $y=3x+\frac{\pi}{2}$ $(x\to+\infty$ да) ва $y=3x-\frac{\pi}{2}$ $(x\to-\infty$ да);

в) $x=0$, $y=2x$, $x=-1$ $(x\to-1+0$ да).

2- мустақил иш

1. Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик ораликларини ва эгилиш нуқталарини топинг:

а) $y = \ln(1+x^2)$; б) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Ж: a) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да қавариқ; $(-1, 1)$ да ботиқ; эгилиш нуқталари: $M_1(1, \ln 2)$ ва $M_2(-1, \ln 2)$.

б) $(-\infty, 0)$ да қавариқ; $(0, +\infty)$ да ботиқ; эгилиш нуқтаси: $O(0,0)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y = \frac{x^3}{4(x+1)^2}$.

Ж: а) $x = \pm 1$, $y = \pm x$; б) $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3- §. Функцияларнинг графикларини чизиш

$y = f(x)$ функция графигини чизишда олдин унинг асосий хусусиятларини аниқлаб олиш керак. Бунинг учун қуйидагиларга амал қилинади:

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси топилади.
2. Функциянинг жуфт-тоқлиги ва даврийлиги текширилади.
3. Функция графигининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари топилади.
4. Функциянинг ишораси ўзгармайдиган оралиқлари топилади.
5. Функция графигининг асимптоталари топилади.
6. Функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари ва унинг экстремумлари топилади.
7. Эгри чизиқнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва унинг эгилиш нуқталари топилади.

Мисол. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ функцияни текширинг ва унинг графигини чизинг.

Ечиш. 1. Функциянинг аниқланиш соҳаси:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. Функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, даврий ҳам эмас.

3. Графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз:

Ox ўқ билан: $\frac{x^3+4}{x^2} = 0$, бундан $x = -\sqrt[3]{4}$, яъни $A(-\sqrt[3]{4}, 0)$ — Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси.

$x \neq 0$ бўлгани учун график Oy ўқ билан кесишмайди.

4. Функциянинг ишораси ўзгармайдиган оралиқларини топамиз: $x < -\sqrt[4]{3}$ да функция манфий (график Ox ўқдан пастда жойлашган); $x > -\sqrt[4]{3}$ да функция мусбат (функция графиги Ox ўқдан юқорида жойлашган).

5. Функциянинг асимптоталарини топамиз.

Oy ўқ, яъни $x = 0$ тўғри чизиқ эгри чизиқнинг вертикал асимптотасидир, чунки

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty .$$

$y = kx + b$ оғма асимптотани аниқлаш учун k ва b ни топамиз:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1 ,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0 .$$

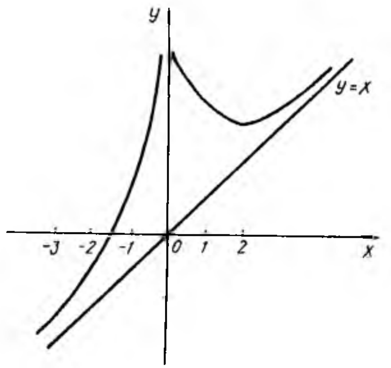
Демак $y = x$ чизиқ оғма асимптота экан.

6. Функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини ва унинг экстремумларини биринчи тартибли ҳосила $y' = \frac{x^3-8}{x^3}$ дан фойдаланиб, $y' = 0$ ва $y' = \infty$ тенгламалардан эса критик нуқталарни топамиз: $x_1 = 2$ ва $x_2 = 0$ (функциянинг узилиш нуқтаси).

Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	∞	−		+
y	↗		↘	3	↗
		узилиш нуқтаси		min	

7. $y'' = \frac{24}{x^4}$ иккинчи тартибли ҳосиладан фойдаланиб, эгри чизиқнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топамиз. Иккинчи тартибли ҳосила ҳамма жойда мусбат, шу боис функция графиги ботиқ, эгилиш нуқталари йўқ. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ функция графигини чизамиз (21- шакл).



21- шакл

3- дарсхона топшириғи

Функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графикларини чизинг:

1. $y=\frac{8}{x^2-4}$. 2. $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$. 3. $y=x\cdot e^{-x}$ 4. $y=\frac{x}{\ln x}$.

3- мустақил иш

Функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графикларини чизинг:

1. $y=\frac{x}{x^2-4}$. 2 . $y=\ln(x^2+2x+2)$. 3. $y=(3-x)e^{2-x}$.

6- назорат иши

1. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

1.1. $y=3\left(\frac{x^4}{2}-x^2\right)$.

1.2. $y=x^3-9x^2+24x-15$.

1.3. $y=x^5-\frac{5}{3}x^3$.

1.4. $y=2x^3+3x^2-12x-5$.

1.5. $y=(x-3)^2(x-2)$.

1.6. $y=x^4-8x^3+16x^2$.

1.7. $y=x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{x^4}{4}$.

1.8. $y=\frac{1}{10}(2x^3-6x^2-18x+15)$.

1.9. $y=x^5-x^3-2x$.

1.10. $y=1-x^2-\frac{x^4}{8}$.

1.11. $y=-4x+x^3$.

1.12. $y=(x+1)(x-2)^2$.

1.13. $y=x^3-3x^2+4$.

1.14. $y=x^3-9x^2+24x-7$.

1.15. $y=x^4-8x^2+16$.

1.16. $y=-4x^3+6x^2-3x-\frac{1}{2}$.

1.17. $y=x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2$.

1.18. $y=\frac{1}{10}(x^4-12x)$.

1.19. $y=x^4-2x^2+3$.

1.20 $y=(x+2)(x-1)^2$.

1.21. $y=x^3-3x^2+2$.

1.22. $y=8+2x^2-x^4$.

1.23. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$.

1.24. $y=2x^3-15x^2+36x$.

1.25. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}$.

1.26. $y=2x^3+3x^2-1$.

1.27. $y=x^4-10x^2+9$.

1.28. $y=\frac{x^4}{2}-4x^2$.

1.29. $y=3x^4+4x^3+1$.

1.30. $y=(x+3)(x-2)^2$.

2. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

2.1. $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$.

2.2. $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

2.3. $y=\frac{2x^2}{4x^2-1}$.

2.4. $y=\frac{2x+1}{x^2}$.

2.5. $y=\frac{1}{x^2-9}$.

2.6. $y=\frac{4x^2}{x^2-1}$.

2.7. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.

2.8. $y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.

2.9. $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

2.10. $y=\frac{x^2+4x+1}{x^2}$.

2.11. $y=\frac{x^2+16}{4x}$.

2.12. $y=\frac{3x}{1+x^2}$.

2.13. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$.

2.14. $y=\frac{5x^2}{x^2-25}$.

2.15. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

2.16. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

2.17. $y=\frac{x^3+1}{x^2}$.

2.18. $y=\frac{x}{3-x^2}$.

2.19. $y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$.

2.20. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

2.21. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

2.22. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

2.23. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

2.24. $y=\frac{2}{x^2+x+1}$.

2.25. $y=\frac{x^3-1}{4x^2}$.

2.26. $y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.

2.27. $y=\frac{x^3+16}{x}$.

2.28. $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

2.29. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

2.30. $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$.

3. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

3.1. $y = \frac{e^{x-1}}{x-1}$.

3.2. $y = \ln\frac{x}{x-2} - 2$.

3.3. $y = (x-2)e^{3-x}$.

3.4. $y = \ln(2x^2+3)$.

3.5. $y = \frac{1}{e^x-1}$.

3.6. $y = x - \ln(x+1)$.

3.7. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

3.8. $y = x\ln x$.

3.9. $y = x^3e^{-x}$.

3.10. $y = \ln(x^2-4)$.

3.11. $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$.

3.12. $y = 2\ln\frac{x+3}{x} - 3$.

3.13. $y = (4-x)e^{x-3}$.

3.14. $y = \ln(x^2-2x+6)$.

3.15. $y = \frac{1}{e^{2x}-1}$.

3.16. $y = x - \ln x$.

3.17. $y = e^{\frac{1}{x-3}}$.

3.18. $y = 1 - \ln^3 x$.

3.19. $y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

3.20. $y = \ln(x^2-4) + x$.

3.21. $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

3.22. $y = \ln\frac{x}{x+5} - 1$.

3.23. $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$.

3.24. $y = -x\ln^2 x$.

3.25. $y = \frac{1}{e^{3x}-1}$.

3.26. $y = x - \ln(1+x^2)$.

3.27. $y = e^{\frac{1}{x+4}}$.

3.28. $y = x^2\ln x$.

3.29. $y = x^3e^{x+1}$.

3.30. $y = x^2 - 2\ln x$.

5- боб

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ВЕКТОР ВА КОМПЛЕКС ФУНКЦИЯЛАРИ

1- §. Скаляр аргументнинг вектор функциясини дифференциаллаш

5.1.1. Агар $t \in D \subset R$ ўзгарувчининг ҳар бир қийматига маълум $\vec{a}$ вектор тўғри келса, у ҳолда бу вектор t скаляр аргументнинг *вектор функцияси* дейилади ва буидай белгиланади:

$$\vec{a} = \vec{a}(t).$$

$\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор функциянинг берилиши учта скаляр функция: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — $\vec{a}$ вектор координаталарининг берилишига тенг кучли:

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

ёки қисқача: $\vec{a} = \{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$.

Агар ўзгарувчи $\vec{a}$ векторнинг боши координаталар боши билан устма-уст тушса, яъни у $M(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг радиус-вектори бўлса, у ҳолда вектор функция бундай белгиланади:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

$\vec{r}$ векторнинг охири фазода чизадиган L чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор функциянинг *годографи* дейилади. Координаталар боши *годограф қутби* дейилади.

Агар $\vec{r}$ векторнинг модулигина ўзгарса-ю, йўналиши ўзгаришсиз қолса, годограф қутбдан чиқадиган нур бўлади.

Агар $\vec{r}$ векторнинг модули ўзгаришсиз ($|\vec{r}| = \text{const}$) қолса-ю, унинг йўналишигина ўзгарса, у ҳолда маркази қутбда, радиуси эса $|\vec{r}|$ га тенг бўлган сферада ётувчи чизиқ годограф бўлади.

Фазодаги ҳамма чизиқни бирор векторнинг годографи дейиш мумкин.

Годографнинг параметрик тенгламалари ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

бу ерда t ўзгарувчи *параметр* дейилади.

5.1.2. $\dot a=\dot a(t)$ вектор функциянинг t параметр бўйича ҳосиласи янги вектор функция бўлиб, ушбу тенглик билан аниқланади:

$$\frac{d\vec a}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec a}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec a(t+\Delta t)-\vec a(t)}{\Delta t}.$$

$$\vec a=\vec a(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}.$$

Вектор функциянинг ҳосиласи ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\frac{d\vec a}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec i+\frac{da_y}{dt}\vec j+\frac{da_z}{dt}\vec k.$$

Вектор функцияни дифференциаллашнинг асосий қоидаларини келтирамиз (бунда $\vec a=\vec a(t)$, $\vec b=\vec b(t)$):

1. $\frac{d}{dt}(\vec a\pm\vec b)=\frac{d\vec a}{dt}\pm\frac{d\vec b}{dt}$.

2. $\frac{d\vec c}{dt}=0$, бу ерда $\vec c$ — ўзгармас вектор.

3. $\frac{d}{dt}(\alpha\vec a)=\alpha\frac{d\vec a}{dt}$, бу ерда α — ўзгармас сон.

4. $\frac{d}{dt}(\varphi\vec a)=\vec a\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\frac{d\vec a}{dt}$, бу ерда $\varphi=\varphi(t)$ — t нинг скаляр функцияси.

5. $\frac{d}{dt}(\vec a\cdot\vec b)=\vec a\cdot\frac{d\vec b}{dt}+\frac{d\vec a}{dt}\cdot\vec b$.

6. $\frac{d}{dt}(\vec a\times\vec b)=\left(\frac{d\vec a}{dt}\times\vec b\right)+\left(\vec a\times\frac{d\vec b}{dt}\right)$.

7. $\frac{d}{dt}\vec a(\varphi(t))=\frac{d\vec a}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, бу ерда $\varphi=\varphi(t)$ — t нинг скаляр функцияси.

Агар $\vec r=\vec r(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec r}{dt}$ ҳосила вектор бўлиб, $\vec r(t)$ вектор функциянинг годографига ўтказилган уринма бўйлаб t параметрнинг ўсиши тарафига йўналган бўлади.

1-мисол. $\vec r=(t^2-1)\vec i+(t+1)\vec j+t^3\vec k$ вектор функциянинг $t=1$ даги бирлик уринма векторини топинг.

Ечиш. $\vec r$ векторнинг годографига уринма бирлик векторни топамиз:

$$\frac{d\vec r}{dt}=2t\vec i+\vec j+3t^2\vec k.$$

Бу векторнинг модулини ҳисоблаймиз:

$$\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|=\sqrt{4t^2+1+9t^4}.$$

$\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|$ нинг $t=1$ даги қиймати $\sqrt{14}$ га тенг, $\left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_{t=1}=2\vec i+\vec j+3\vec k$.

Шундай қилиб, изланаётган бирлик вектор бундай ёзилади:

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec i+\vec j+3\vec k).$$

2-мисол. $\vec r(t)=\vec i\cos t+\vec j\sin t+\vec k$ ва $\frac{d\vec r}{dt}$ векторлар ўзаро перпендикуляр векторлар эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган скаляр аргументли функция ҳосиласини топамиз: $\frac{d\vec r}{dt}=-\vec i\sin t+\vec j\cos t$. Энди $\vec r(t)$ ва $\frac{d\vec r}{dt}$ векторларнинг $\vec r\cdot\frac{d\vec r}{dt}$ — скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз.

$\vec r\cdot\frac{d\vec r}{dt}=-\cos t\cdot\sin t+\sin t\cdot\cos t=0$. Демак, $\vec r$ ва $\frac{d\vec r}{dt}$ векторлар ўзаро перпендикуляр экан.

1-дарсхона топшириғи

1. Вектор функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

а) $\vec r=\sin t\cdot\vec i+\cos^2t\cdot\vec j+\sin t\cos t\cdot\vec k$;

б) $\vec r=(t+\cos t)\vec i+t\vec j+\sin t\cdot\vec k$;

в) $r=e^t\vec i+\cos t\cdot\vec j+(t^2+1)\vec k$.

Ж: а) $\frac{d\vec r}{dt}=\cos t\vec i-\sin 2t\vec j+\cos 2t\vec k$;

б) $\frac{d\vec r}{dt}=(1-\sin t)\vec i+\vec j+\cos t\cdot\vec k$;

в) $\frac{d\vec r}{dt}=e^t\vec i-\sin t\vec j+2t\vec k$.

2. Ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t вақтдаги радиус-вектори $r(t)=a(t-\sin t)\vec i+a(1-\cos t)\vec j$ тенглама билан берилган. $t=\frac{\pi}{2}$ ва $t=\pi$ лар учун $\frac{d\vec r}{dt}$ векторини топинг.

Ж: $a(\vec i+\vec j)$; $2a\vec i$.

3. $\vec r=e^{2t}\vec i-(t+8)^{\frac{4}{3}}\vec j$ вектор функция годографига $t=0$ даги бирлик уринма векторни топинг.

Ж: $0{,}6\ \vec i-0{,}8\ \vec j$.

1-мустақил иш

1. Вектор функциянинг ҳосиласини топинг:

$$\vec r = i\text{ch}^2t + \vec j\text{sh}t\text{ch}t + \vec k\text{sh}^2t.$$

Ж: $\frac{d\vec r}{dt} = \text{sh}2t\,\vec i + \vec j\text{ch}t + \vec k\text{sh}2t$.

2. Агар $\vec r = \vec i\text{sh}t + \vec j\text{ch}t + \vec k\sqrt{\text{ch}^2t - 3\text{sh}^2t}$ бўлса, $\frac{d(\vec r^2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: 0.

3. Агар $\vec r_1 = \vec it + \vec jt^2 + \vec kt^3$, $\vec r_2 = it^2 + \vec jt^3 + \vec kt$ бўлса, $\frac{d(\vec r_1 \times \vec r_2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: $\frac{d(\vec r_1 \times \vec r_2)}{dt} = 3(t^2 - 2t^5)\vec i + (5t^4 - 2t)\vec j$.

4. $\vec r = 2t\cdot\vec i + \vec j\ln t + \vec k\cdot t^2$ вектор функциянинг $t=1$ даги уринма векторининг йўналтирувчи косинусларини топинг:

Ж: $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

2-§. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг татбиқи

5.2.1. Кинематикада моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда унинг $\vec r$ радиус-вектори t вақтнинг функцияси бўлиб, $\vec r = \vec r(t)$ тенглама *ҳаракат тенгламаси* дейилади, $\vec r = \vec r(t)$ вектор-функциянинг годографи ҳаракат йўлининг шаклини (траекториясини) аниқлайди.

Агар t скаляр аргумент вақт деб қаралса, у ҳолда $\frac{d\vec r}{dt} = \vec v$ — $\vec r$ вектор охирининг тезлик вектори, $\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec w$ эса тезланиш вектори дейилади.

1-мисол. Моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаси $\vec r = 2(t - \sin t)\vec i + 2(1 - \cos t)\vec j$ кўринишда берилган. Ихтиёрий вақтдаги тезлик ва тезланишни топинг.

Ечиш. $\vec v$ тезлик ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = 2(1 - \cos t)\vec i + 2\sin t\cdot\vec j.$$

Тезланиш эса,

$$\vec w = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{d\vec v}{dt} = 2\sin t\vec i + 2\cos t\vec j.$$

5.2.2. $\vec r = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$ фазовий эгри чизиқнинг t_0 параметрга мос келадиган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасидаги уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x - x_0}{\dot x_0} = \frac{y - y_0}{\dot y_0} = \frac{z - z_0}{\dot z_0},$$

бу ерда $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$,

$$\dot x_0 = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \quad \dot y_0 = \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \quad \dot z_0 = \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=t_0};$$

x, y, z — уринма нуқтасининг ўзгарувчи координаталари.

Уриниш нуқтасидан ўтиб, уринмага перпендикуляр бўлган текислик *нормал текислик* дейилади.

Эгри чизиқнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасидаги нормал текислик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\dot x_0(x - x_0) + \dot y_0(y - y_0) + \dot z_0(z - z_0) = 0.$$

2-мисол. Параметр $t = \frac{\pi}{4}$ га тенг бўлганда $x = a\sin^2t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2t$ фазовий эгри чизиққа ўтказилган уринма ва нормал текисликларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Тегишли ҳосилаларни топамиз:

$$\dot x = a\cdot\sin 2t, \dot y = b\cos 2t, \dot z = -c\sin 2t.$$

$t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада $x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}, z_0 = \frac{c}{2}$; $\dot x_0 = a$, $\dot y_0 = 0$; $\dot z_0 = -c$ бўлади, демак, уринманинг тенгламаси:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c},$$

нормал текислик тенгламаси:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$$

ёки

$$ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0.$$

Шундай қилиб, уринма Oy ўққа перпендикуляр, нормал текислик эса Oy ўққа параллел экан.

2- дарсхона топшириғи

1. Ҳаракатдаги моддий нуқтанинг радиус-вектори $\vec r=4t\vec i-3t\vec j$ тенглама билан берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини топинг.

Ж: $\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=4\vec i-3\vec j$; $\vec w=\frac{d\vec v}{dt}=\vec 0$.

2. Моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаси $\vec r=3t\vec i+(4t-t^2)\vec j$ кўринишда берилган. Унинг тезлиги ва тезланишини топинг.

Ж: $\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=3\vec i+2(2-t)\vec j$; $\vec w=\frac{d\vec v}{dt}=-2\vec j$.

3. $\vec r=a\cos t\vec i+b\sin t\vec j$ ҳаракат тенгламаси берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини топинг.

Ж: $\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=-a\sin t\cdot\vec i+b\cos t\cdot\vec j$;

$$\vec w=\frac{d\vec v}{dt}=-a\cos t\vec i-b\sin t\cdot\vec j.$$

4. Берилган нуқтадан ўтувчи уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг:

а) $x=4\sin^2 t$, $y=2\sin 2t$, $z=2\cos^2 t$, $t=0$ да;

б) $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$, $t=2$ да;

в) $x=a\cdot\operatorname{ch}t$, $y=a\cdot\operatorname{sh}t$, $z=at$, $t=0$ да.

Ж: а) $\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{0}$ (уринма),

$y=0$ (нормал текислик);

б) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{8}{3}}{2}=\frac{z-4}{4}$, $3x+6y+12z-70=0$;

в) $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$,

$y+z=0.$

2- мустақил иш

1. $\vec r=2\cos t\cdot\vec i+\sin t\cdot\vec k$ ҳаракат тенгламаси берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқланг.

Ж: $\vec v=-2\sin t\cdot\vec i+\cos t\cdot\vec k$,

$\vec w=-2\cos t\cdot\vec i-\sin t\cdot\vec k$.

2. Ҳаракат тенгламаси берилган: $\vec r=(2t^2-3)\vec i-3t\vec j+(4t^2-5)\vec k$. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқланг.

Ж: $\vec v=4t\vec i-6t\vec j+8t\vec k$;

$\vec w=4\vec i-6\vec j+8\vec k$.

3. Моддий нуқта ҳаракатининг $\vec r=\cos^3 t\cdot\vec i+\sin^2 t\cdot\vec j$ тенгламасини билган ҳолда, унинг параметрнинг $t=\frac{\pi}{6}$ ва $t=\frac{\pi}{4}$ қийматлардаги тезлик ва тезланиш векторларини топинг.

Ж: $t=\frac{\pi}{6}$ да: $\vec v=-\frac{9}{8}\vec i+\frac{3\sqrt3}{8}\vec j$,

$$\vec w=-\frac{3\sqrt3}{8}\vec i+\frac{15}{6}\vec j;$$

$t=\frac{\pi}{4}$ да: $\vec v=-\frac{3\sqrt2}{4}\vec i+\frac{3\sqrt2}{4}\vec j$,

$$\vec w=\frac{3\sqrt2}{4}\vec i+\frac{3\sqrt2}{4}\vec j.$$

4. Эгри чизиққа берилган нуқтада ўтказилган уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг.

а) $x=\cos^2\frac{t}{2}$, $y=\sin t$, $z=\sin\frac{t}{2}$, $t=\pi$ да;

б) $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $t=1$ да.

Ж: а) $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$; $y=0$;

б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$, $x+2y+3z-6=0$.

6- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Биринчи тартибли ҳосилаии топинг:

1.1. $y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[5]{(6x-1)^2}$.

1.2. $y=\frac{2x}{\sqrt{1+x}}-4\sqrt{1+x}$.

1.3. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

1.4. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

1.5. $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$.

1.6. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

1.7 $y=5\sqrt[5]{4x+3}-\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1.8. $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\frac{5}{x}}$.

1.9. $y=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

1.10. $y=x+\sqrt[5]{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$.

1.11. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.12. $y=\frac{x-1}{x+1}\sqrt{x^2-6}$.

1.13. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1.14. $y=\frac{2}{\sqrt{x^3-x+1}}$.

1.15. $y=\frac{5}{\sqrt[4]{(2-x^2)^3}}$.

1.16. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}$.

1.17. $y=2\sqrt[3]{(2-x^3)^2}$.

1.18. $y=\sqrt[4]{x\sqrt{x^{2}+1}}$.

1.19. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^{2}}}$.

1.20. $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+x^{4}}{1-x^{4}}}$.

1.21. $y=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^{2}}}$.

1.22. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x+4}}+\dfrac{12}{\sqrt[4]{x^{3}+10}}$.

1.23. $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^{2}}}$.

1.24. $y=\sqrt{\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-1}}$.

1.25. $y=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{2}$.

1.26. $y=\sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^{2}}$.

1.27. $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$.

1.28. $y=\left(\dfrac{x}{3-4x}\right)^{3}$.

1.29. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

1.30. $y=\dfrac{9}{\sqrt[6]{x^{2}-4x-5}}$.

2. Биринчи тартибли y' хосилани топинг:

2.1. $y=\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$.

2.2. $y=\sin^{3}2x$.

2.3. $y=e^{1+\ln^{2}x}$.

2.4. $y=\mathrm{tg}\ln\sqrt{x}$.

2.5. $y=\sin\sqrt{1+x^{2}}$.

2.6. $y=\cos\ln^{2}x$.

2.7 $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$.

2.8. $y=\sqrt{1+\ln^{2}x}$.

2.9. $y=x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$.

2.10. $y=e^{-x^{2}}\cos^{3}(2x+3)$.

2.11. $y=\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

2.12. $y=\sin^{2}3x$.

2.13. $y=\sqrt{1-\ln^{3}x}$.

2.14. $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$.

2.15. $y=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{3}x-\mathrm{tg}x+x$.

2.16. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}}-x$.

2.17. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$.

2.18. $y=\ln(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}})$.

2.19. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^{2}-1}}$.

2.20. $y=\mathrm{tg}^{2}(x^{3}+1)$

2.21. $y=\sqrt[3]{\mathrm{tg}^{2}3x}$.

2.22. $y=5^{-\frac{1}{\sin^{2}x}}$.

2.23. $y=\sin^{6}10x+\cos^{6}10x$.

2.24. $y=\sqrt[3]{\mathrm{tg}6x+1}$.

2.25. $y=e^{\sin x-\cos x}\cdot(\sin x+\cos x)$.

2.26. $y=\dfrac{\sin^{2}\frac{x}{4}}{1+\cos^{2}\frac{x}{4}}$.

2.27. $y=e^{2x}(3\sin 2x-\cos 2x)$.

2.28. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1-\sin 4x}$.

2.29. $y=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1+\mathrm{tg}5x}{1-\mathrm{tg}5x}$.

2.30. $y=\dfrac{1}{\sin^{2}10x}$.

3. Биринчи тартибли y' ҳосилани топинг:

3.1. $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

3.2. $y=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}}$.

3.3. $y=\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

3.4. $y=3^{\cos^{2}x}$.

3.5. $y=\ln\mathrm{ctg}\sqrt[3]{x}$.

3.6. $y=(e^{\sin x}-1)^{2}$.

3.7. $y=x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$.

3.8. $y=e^{\frac{1}{x^{2}}}$.

3.9. $y=e^{-\cos^{4}5x}$.

3.10. $y=x\cdot\mathrm{arctg}^{3}5x+\ln\mathrm{tg}x$.

3.11. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$.

3.12. $y=x^{2}e^{-2x}$.

3.13. $y=2^{\frac{1}{x}}$.

3.14. $y=x\cdot\ln^{2}x$.

3.15. $y=3e^{\sin^{2}x}$.

3.16. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3.17. $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$.

3.18. $y=7^{x^{2}+2x}$.

3.19. $y=e^{-x}\cdot\ln x$.

3.20. $y=\dfrac{x}{\sqrt{8-x^{2}}}$.

3.21. $y=\dfrac{2}{5}\ln^{2}(3\mathrm{ctg}5x+2)$.

3.22. $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{10}{e^{5x}-e^{-5x}}}$.

3.23. $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^{2}-2x}}$.

3.24. $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}+e^{4x}}$.

3.25. $y=\ln\sqrt[3]{3\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+4}$.

3.26. $y=\ln(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})$.

3.27. $y=(1+\ln\sin 2x)^{2}$.

3.28. $y=\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$.

3.29. $y=\ln^{3}\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right)$.

3.30. $y=\ln\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$.

4. Биринчи тартибли y' ҳосилаии топинг:

4.1. $y=x^{\frac{2}{x}}$.

4.2. $y=x^{e^{x}}$.

4.3. $y=x^{\arcsin x}$.

4.4. $y=(\cos x)^{\cos x}$.

4.5. $y=x^{\frac{1}{x^{2}}}$.

4.6. $y=(\ln x)^{x}$.

4.7. $y=2x^{\sqrt{x}}$.

4.8. $y=(\cos x)^{x^{2}}$.

4.9. $y=(\sin x)^{\cos x}$.

4.10. $y=(\mathrm{arctg}2x)^{\sin x}$.

4.11. $y=x^{\arccos x}$.

4.12. $y=x^{\mathrm{tg}x}$.

4.13. $y=(\ln(5x-4))^{\mathrm{arcctg}x}$.

4.14. $y=(\sin(7x+4))^{\arccos x}$.

4.15. $y=(\arcsin 2x)^{\mathrm{ctg}(x+1)}$.

4.16. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$.

4.17. $y=(\sqrt{3x+2})^{\mathrm{arcctg}3x}$.

4.18. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.

4.19. $y=(\mathrm{ctg}2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$.

4.20. $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$.

4.21. $y=(\mathrm{tg}3x^4)^{\sqrt{x+3}}$.

4.22. $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$.

4.23. $y=(\mathrm{arctg}2x)^{\sin x}$.

4.24. $y=(\ln(7x+4))^{\mathrm{tg}x}$.

4.25. $y=(\ln(7x-5))^{\mathrm{arctg}2x}$.

4.26. $y=(\arcsin(2+x))^{\ln(x+3)}$.

4.27. $y=(\arccos(x+2))^{\mathrm{tg}3x}$.

4.28. $y=(\arcsin 5x)^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$.

4.29. $y=(\mathrm{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$.

4.30. $y=(\mathrm{ctg}3x^4)^{\sqrt{x-3}}$.

5. Ошкормас ҳолда қуйидаги тенгламалар билан берилган функцияларнинг биринчи тартибли y' ҳосиласини топинг:

5.1. $x\sin 2y-y\cos 2x=10$.

5.2. $(e^y-x)^2=x^2+4$.

5.3. $x\cdot\mathrm{tg}y-x^2+y^2=4$.

5.4. $y-x^2=\mathrm{arctg}y$.

5.5. $e^{xy}-x^2+y^3=0$.

5.6. $y=x+x\sin y$.

5.7. $e^{2y}-e^{-3x}+\frac{y}{x}=1$.

5.8. $e^y+3x^2e^{-y}=4x$.

5.9. $\ln(x^2+y^2)+\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=0$.

5.10. $x\sin y-y\cos x=0$.

5.11. $3^{x+y}-xy\ln 3=15$.

5.12. $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

5.13. $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$.

5.14. $\cos(x-y)-2x+4y=0$.

5.15. $xe^y+ye^x=xy$.

5.16. $\cos xy=\frac{y}{x}$.

5.17. $xy+\ln y-2\ln x=0$.

5.18. $e^{x+y}=\sin\frac{y}{x}$.

5.19. $(x+y)^2-(x-2y)^3=0$.

5.20. $y\ln x-x\ln y=x+y$.

5.21. $y^3-3y+6x=0$.

5.22. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5y$.

5.23. $x^2+y^3-10x+y=0$.

5.24. $x^2=6y-y^3$.

5.25. $x^2-2xy+y^3=1$.

5.26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3+\frac{1}{4}y^2$.

5.27. $y^3-3x^3y+9=0$.

5.28. $y\sin x=\cos y$.

5.29. $y^4-4x^2y+9=0$.

5.30. $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=\sqrt[3]{4}$.

6. Берилган функциянинг биринчи тартибли y' ва иккинчи тартибли y'' ҳосилаларини топинг:

6.1. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6.2. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

6.3. $y=x^3\ln x$.

6.4. $y=\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

6.5. $y=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

6.6. $y=xe^{x^2}$.

6.7. $y=x\cdot\mathrm{arctg}x$.

6.8. $y=x-\mathrm{arctg}x$.

6.9. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

6.10. $y=\mathrm{arcctg}x$.

6.11. $y=\frac{x-1}{x+1}e^{-x}$.

6.12. $y=\mathrm{arctg}x^2$.

6.13. $y=x^2\ln x$.

6.14. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$.

6.15. $y=\ln\mathrm{ctg}4x$.

6.16. $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

6.17. $y=\cos^2 x$.

6.18. $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

6.19. $y=x\cdot e^{-x}$.

6.20. $y=\ln(\ln x)$.

6.21. $y=(1+x^2)\,\mathrm{arctg}x$.

6.22. $y=e^{\sqrt{x}}$.

6.23. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

6.24. $y=\sqrt{4-x^2}$.

6.25. $y=\frac{1}{4+\sqrt{x}}$.

6.26. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$.

6.27. $y=x^x$.

6.28. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

6.29. $y=\ln(x+\sqrt{x})$.

6.30. $y=e^{-x}\sin x$.

7. Параметрик кўринишда берилган y функциянинг x бўйича биринчи тартибли y' ва иккинчи тартибли y'' ҳосилаларини топинг:

7.1. $\begin{cases} x=\ln\cos 2t, \\ y=\sin^2 2t. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} x=1-e^{3t}, \\ y=\frac{1}{3}(e^{3t}+e^{-3t}). \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x=\frac{1-t}{t^2}, \\ y=\frac{1+t}{t^2}. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} x=\sin^3 4t, \\ y=\frac{1}{2}\cos^3 4t. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t, \\ y=\ln(t^2+1). \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} x=\mathrm{tg}t, \\ y=\frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\mathrm{arctg}t. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} x=\frac{\sin t}{1+\sin t}, \\ y=\frac{\cos t}{1+\sin t}. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} x=4-e^{-2t}, \\ y=\dfrac{3}{e^{2t}+1}. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\sin 3t. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} x=\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=\cos t. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\cos t. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t, \\ y=2\ln\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x=t^2+1; \\ y=e^{t^3}. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

7.23. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} x=t^5+2t, \\ y=t^3+8t-1. \end{cases}$

7.25. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$

7.27. $\begin{cases} x=t^2+t+1, \\ y=t^3+t. \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

7.29. $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} x=2\cos^3 2t, \\ y=\sin^3 2t. \end{cases}$

3- §. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. Эйлер формулалари

5.3.1. $z=x+iy$ кўринишдаги ифода *комплекс сон* дейилади, бунда x ва y — ҳақиқий сонлар, i эса $i^2=-1$ тенглик билан аниқланади ва у *мавҳум бирлик* деб аталади.

x ва y сонлар z комплекс соннинг мос равишда *ҳақиқий* ва *комплекс қисми* дейилади ва $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ кўринишда белгиланади.

Агар $y=0$ бўлса, $z=x$ — ҳақиқий сон, агар $x=0$ бўлса, $z=iy$ — соф мавҳум сон бўлади. Шундай қилиб, ҳақиқий ва мавҳум сонлар z комплекс соннинг хусусий ҳолидир.

Агар $z_1=x_1+iy_1$, ва $z_2=x_2+iy_2$ икки комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмлари тенг бўлса, яъни $x_1=x_2$ ва $y_1=y_2$ бўлса, бу комплекс сонлар тенг дейилади, яъни $z_1=z_2$.

Мавҳум қисмларининг ишораси билангина фарқ қилувчи $z=x+iy$ ва $\bar{z}=x-iy$ комплекс сонлар *қўшма комплекс сонлар* дейилади.

5.3.2. Агар $z_1=x_1+iy_1$ ва $z_2=x_2+iy_2$ иккита комплекс сон берилган бўлса, улар устида алгебраик амаллар қуйидагича бажарилади:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+$$
$$+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+$$
$$+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Комплекс сонларни даражага кўтариш иккиҳадни даражага кўтариш каби бажарилади, бунда i сонининг даражалари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1 \text{ ва ҳ. к.}$$

Умуман, $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$.

1-мисол. Ушбу $z_1=3-i$, $z_2=-2+3i$, $z_3=4+3i$ комплекс сонлар берилган бўлсин. $z=\dfrac{z_1-z_2\cdot z_3}{z_1^3+z_3}$ ни ҳисобланг.

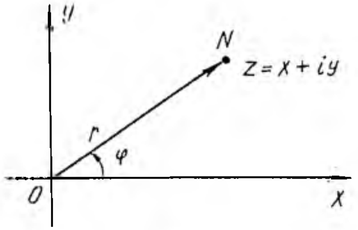
Ечиш. Кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$z_2\cdot z_3=(-2+3i)(4+3i)=(-8-9)+i(12-6)=-17+6i;$$
$$z_1-z_2\cdot z_3=(3-i)-(-17+6i)=(3+17)+i(-1-6)=20-7i;$$
$$z_1^3=(3-i)^3=27-27i+9i^2-i^3=(27-9)+i(-27+1)=18-26i;$$
$$z_1^3+z_3=(18-26i)+(4+3i)=(18+4)+i(-26+3)=22-23i.$$

Шундай қилиб,

$$z=\frac{20-7i}{22-23i}=\frac{(20-7i)(22+23i)}{(22-23i)(22+23i)}=\frac{(440+161)+i(460-154)}{22^2+23^2}=$$
$$=\frac{601}{1013}+i\frac{306}{1013}.$$

5.3.3. Ҳар бир $z=x+iy$ комплекс сон геометрик жиҳатдан Oxy координаталар текислигининг (x, y) нуқтаси ёки $\overrightarrow{ON}$ вектори билан тасвирланади. Комплекс сон тасвирланадиган Oxy текислиги *комплекс текислик* дейилади ва (z) каби белгиланади. $z=x$ ҳақиқий сонлар *ҳақиқий ўқ* деб аталувчи Ox ўқ нуқталари билан тасвирланади. Соф мавҳум $z=iy$ сонлар *мавҳум ўқ* деб аталувчи Oy ўқнинг нуқталари билан тасвирланади.



22- шакл

z комплекс сонига мос келувчи N нуқтанинг ҳолатини r ва φ қутб координаталари билан ҳам аниқлаш мумкин (22- шакл). Бунда координаталар бошидан N нуқтагача бўлган масофага тенг $r=|\overrightarrow{ON}|$ сони *комплекс соннинг модули* дейилади ва $|z|$ билан белгиланади; $\overrightarrow{ON}$ векторнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган φ бурчак *комплекс соннинг аргументи* дейилади ва у $\operatorname{Arg} z$ деб белгиланади.

Ҳар қандай $z=x+iy$ комплекс сон учун қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$

бунда $\varphi=\arg z$ нинг бош қиймати $0\leqslant\arg z<2\pi$ шартни қаноатлантиради.

2- мисол. $z=-\sqrt{3}+i$ комплекс сонниннг модули ва аргументини топинг.

Ечиш. $x=-\sqrt{3},\ y=1$ бўлганлиги учун $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$. $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламадан φ аргументни топамиз:

$$\varphi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

Шундай қилиб, $r=2,\ \varphi=\frac{5\pi}{6}$.

5.3.4. Комплекс соннинг $z=x+iy$ кўринишдаги ифодаси комплекс соннинг *алгебраик шакли* дейилади.

Комплекс соннинг $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ кўринишдаги ифодаси унинг *тригонометрик шакли* дейилади.

Эйлернинг

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$$

формуласидан фойдаланиб, комплекс сон ёзилишининг *кўрсаткичли шаклига* эга бўламиз:

$$z=re^{i\varphi}.$$

2- мисолда $z=-\sqrt{3}+i$ комплекс сонннинг модули $r=2$ ва аргументи $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ эканини аниқлаган эдик.

Шуларни инобатга олсак, бу соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли шакллари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\quad z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

5.3.5. Комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, улардан илдиз чиқаришда комплекс сон ёзилишининг тригонометрик ва кўрсаткичли шаклларидан фойдаланилади:

Агар

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

бўлса, ушбу формулалар ўринлидир:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$
$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n\cdot e^{in\varphi}.$$

Охирги формула *Муавр формуласи* дейилади.

Тригонометрик ёки кўрсаткичли шаклдаги комплекс сондан n даражали илдиз чиқариш учун ушбу формуладан фойдаланилади:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+$$
$$+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}.$$

k га $0, 1, 2, \ldots, n-1$ қийматлар бериб, илдизнинг n та ҳар хил қийматларига эга бўламиз (бунда $\sqrt[n]{r}$ арифметик илдиз).

Илдизнинг барча n та қийматларини тасвирловчи нуқталарнинг геометрик талқини маркази қутбда, радиуси $\sqrt[n]{r}$ бўлган айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг учларини англатишидан иборатдир.

3- м и с о л. $(-\sqrt{3}+i)^6$ ни ҳисобланг.

Ечиш. 2- мисол ва Муавр формуласидан фойдаланиб қуйидаги ечимга эга бўламиз:

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 6+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)=2^6e^{5\pi i}=$$

$$=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=-64.$$

4- м и с о л. $\sqrt[3]{-1}$ ни топинг.

Ечиш. $z=-1$ сон учун $r=1$, $\varphi=\pi$. Шу сабабли унинг тригонометрик шакли қуйидагича ёзилади:

$$z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

n- даражали илдиз чиқариш формуласидан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$w_k=\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}=$$

$$=e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{3}}, \text{ бунда } k=0,\ 1,\ 2.$$

k га кетма-кет 0, 1, 2 қийматларни бериб, илдизнинг учала қийматини топамиз:

$$w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}=-1,$$

$$w_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=e^{\frac{5\pi i}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3.6. Эйлернинг

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

формуласи даража кўрсаткичи комплекс ўзгарувчидан иборат кўрсаткичли функцияни тригонометрик функциялар орқали ифодалайди. Тригонометрик функциялар $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ кўрсаткичли функциялар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

3- дарсхона топшириғи

1. Агар $z_1=1-i$, $z_2=3+4i$, $z_3=-1+3i$ бўлса, $z=\dfrac{z_1+3z_2}{z_1z_2-z_3^2}$ нинг қийматини ҳисобланг.

Ж: $\frac{227}{274}+\frac{99}{274}i.$

2. $z_1=3-2i$; $z_2=4+i$; $z_3=-2+i$ комплекс сонлар берилган.

$$z=\frac{z_1(z_2-z_3)}{z_3^3+z_1}$$

ни ҳисобланг.

Ж: $-\frac{45}{41}-\frac{87}{41}i.$

3. (z) комплекс текисликда қуйида берилган шартларни қаноатлантирувчи $z=x+iy$ нуқталар соҳасини аниқланг:

а) $0<\text{Re}3zi<2$; б) $\text{Im}(iz)\geqslant 2$;

в) $|z-3+4i|<3$; г) $1<|z-i|2$;

д) $2<|z|<3$,

$$0\leqslant \arg z\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

4. Қуйидаги комплекс сонларни тригонометрик ва кўрсаткичли шаклларда ифодаланг:

а) $z_1=3-3i$; б) $z_2=-1-i$; в) $z_3=-i$; г) $z_4=-2$.

Ж: а) $z_1=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$;

б) $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$;

в) $z_3=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}i}$;

г) $z_4=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{\pi i}$.

5. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $\sqrt[6]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

Ж: а) $k=0$, $w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$;

$k=1$, $w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

$k=2$, $w_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$;

$k=3$, $w_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$;

$k=4$, $w_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

$k=5$, $w_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$;

б) $k=0,\quad w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$;

$k=1,\quad w_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$;

$k=2,\quad w_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

в) $k=0,\quad w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

$k=1,\quad w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

$k=2,\quad w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$;

$k=3,\quad w_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

3- мустақил иш

1. Агар $z_1=i-1,\ z_2=-2+i,\ z_3=3-4i$ бўлса,

$$z=\frac{z_1(z_2+z_3^2)}{z_1-z_2}$$

ни топинг.

Ж: $\frac{64}{5}-\frac{38}{5}i$.

2. Агар $z_1=-3+i,\ z_2=4-i,\ z_3=1+3i$ бўлса,

$$z=\frac{z_1+z_2z_3}{z_2^3-z_3}$$

ни топинг.

Ж: $-\frac{396}{5101}+\frac{812}{5101}i$.

3. (z) комплекс текисликда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $z=x+iy$ нуқталар соҳасини аниқланг:

а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}>1$; б) $\operatorname{Im}(2iz)>3$;

в) $3<|z+1-2i|<4$; г) $\frac{\pi}{2}\leqslant \arg z<\pi$,

$$3<|z|<4.$$

4. Комплекс сонларни тригонометрик ва кўрсаткичли шаклда ифодаланг:

а) $z_1=\frac{2}{1+i}$; б) $z_2=-\sqrt{3}-i$;

в) $z_3=-\frac{1}{3}$; г) $z_4=1+\sqrt{3}i$.

Ж: а) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$;

б) $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$;

в) $z_3=\frac{1}{3}(\cos\pi+i\sin\pi)=\frac{1}{3}e^{\pi i}$;

г) $z_4=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

5. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[8]{1}$; в) $\sqrt[4]{-1}$.

Ж: а) $k=0,\ w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

$k=1,\ w_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$;

б) $k=0,\ w_0=\cos 0°+i\sin 0°$;

$k=1,\ w_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

$k=2,\ w_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

$k=3,\ w_3=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$;

$k=4,\ w_4=\cos\pi+i\sin\pi$;

$k=5,\ w_5=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$;

$k=6,\ w_6=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

$k=7,\ w_7=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$;

в) $k=0,\ w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

$k=1,\ w_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$;

$k=2,\ w_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$;

$k=3,\ w_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$;

6- боб

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ИНТЕГРАЛ ҲИСОБИ

1- §. Аниқмас интеграл ва интеграллашнинг содда усуллари

6.1.1. Бирор оралиқда аниқланган $f(x)$ функция учун бу оралиқнинг ҳамма қийматларида

$$F'(x)=f(x) \text{ ёки } dF(x)=f(x)dx$$

шарт бажарилса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $F(x)+C$ $f(x)$ нинг ҳамма бошланғич функциялари тўплами бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас. Шунга кўра берилган $f(x)$ функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функцияси бир-биридан ихтиёрий ўзгармасга фарқ қилади.

$f(x)$ (ёки $f(x)dx$ ифода)дан олинган аниқмас интеграл деб, бу функциянинг барча $F(x)+C$ бошланғич функциялари тўпламига айтилади ва бундай белгиланади: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Аниқмас интегрални топиш жараёни *интеграллаш* дейилади.

6.1.2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари (интеграллаш қоидалари):

а) $(\int f(x)dx)'=f(x)$;

б) $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$;

в) $\int dF(x)=F(x)+C$;

г) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k — ўзгармас);

д) $\int(f(x)\pm\varphi(x))dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx$;

е) агар $\int f(x)dx=F(x)+C$ ва $u=\Phi(x)$ ҳар қандай дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда:

$$\int f(u)\,du=F(u)+C.$$

6.1.3. Аниқмас интеграллар жадвали:

1. $\int du=u+C.$
2. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1.$

3. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C.$
4. $\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C.$
5. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C.$
6. $\int e^{u}du=e^{u}+C.$
7. $\int\sin u\,du=-\cos u+C.$
8. $\int\cos u\,du=\sin u+C.$
9. $\int\frac{du}{\cos^{2}u}=\text{tg}\,u+C.$
10. $\int\frac{du}{\sin^{2}u}=-\text{ctg}\,u+C.$
11. $\int\text{tg}\,u\,du=-\ln|\cos u|+C.$
12. $\int\text{ctg}\,u\,du=\ln|\sin u|+C.$
13. $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\text{tg}\frac{u}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\sin u}-\text{ctg}\,u\right|+C.$
14. $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\cos u}+\text{tg}\,u\right|+C.$
15. $\int\frac{du}{a^{2}+u^{2}}=\frac{1}{a}\text{arc ctg}\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\text{arcctg}\frac{u}{a}+C.$
16. $\int\frac{du}{a^{2}-u^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C.$
17. $\int\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\text{arc sin}\frac{u}{a}+C=-\text{arc cos}\frac{u}{a}+C.$
18. $\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+C.$

Интеграллаш натижасининг тўғрилиги топилган бошланғич функцияни дифференциаллаш билан текширилади. Келтирилган жадвалда u эркли ўзгарувчини, шунингдек, дифференциалланувчи функцияни ифодалайди.

6.1.4. Интеграллашнинг қуйидаги содда усулларини келтирамиз:

а) интеграл остидаги функцияни содда функциялар йиғиндисига ёйиш ва интегралларнинг хоссаларидан фойдаланиш усули;

б) дифференциал белгиси остига киритиш усули. Масалан:

$dx=\frac{1}{k}d(kx+a)$, агар a, k — ўзгармас бўлса;

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^{2}),\ \cos xdx=d(\sin x),$$
$$\frac{dx}{x}=d(\ln x),\ \frac{dx}{\cos^{2}x}=d(\text{tg}x),\ \frac{dx}{1+x^{2}}=$$
$$=d(\text{arc tg}x) \text{ ва ҳ. к.}$$

1-**мисол.** $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функцияни шаклан алмаштириб, аниқмас интегралнинг д) хоссасидан фойдалансак:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \left[\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right]dx=$$

$$=\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\text{arc tg}x+C.$$

2-**мисол.** $\int 4\cos^2\frac{x}{2}\,dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функцияни даражани пасайтириш формуласидан фойдаланиб алмаштирамиз:

$$2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x.$$

Сўнгра аниқмас интегралнинг г) ва д) хоссаларидан фойдалансак,

$$\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx=\int 2(1+\cos x)\,dx=2\int (1+\cos x)\,dx=$$

$$=2\int dx+2\int \cos x\,dx=2x+2\sin x+C.$$

3-**мисол.** Аниқмас интегрални топинг:

$$\int 3^x\cdot e^{3x}dx.$$

Ечиш. $\int 3^x\cdot e^{3x}dx=\int (3\cdot e^3)^x dx=\frac{(3e^3)^x}{\ln\,(3e^3)}+C.$

4-**мисол.** Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-5)}}\ .$$

Ечиш. Дифференциал остига киритиш усулини қўллаймиз. Бунинг учун $dx=\frac{1}{3}d(3x-5)$ деб олиб, жадвалдаги (4) интегралдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}=\frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{\sqrt{3x-5}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x-5}+C.$$

5-**мисол.** Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{x-\text{arc sin}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ечиш. Ейиш ва дифференциал белгиси остига киритиш усулларидан биргаликда фойдаланамиз:

$$\int \frac{x-\text{arc sin}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}-\int \frac{\text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\int \text{arc sin}x\,d(\text{arc sin}x)=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\,\text{arc sin}^2x+C.$$

6-**мисол.** Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+4}\,dx.$$

Ечиш. $\int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+4}\,dx=\int \frac{d(x^3-2x^2+4)}{x^3-2x^2+4}=$

$$=\ln|x^3-2x^2+4|+C.$$

1-дарсхона топшириғи

Аниқмас интегралларни топинг, интеграллаш натижаларини дифференциаллаш билан текширинг:

1. $\int \left(4x^5-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{5}{x^e}\right)dx.$
2. $\int (\text{tg}x+\text{ctg}x)^2dx.$
3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx.$
4. $\int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}\,dx.$
5. $\int \frac{dx}{(3x-4)^5}\ .$
6. $\int \text{tg}4xdx.$
7. $\int \frac{x^2dx}{1+x^3}\ .$
8. $\int \frac{3^x}{\sqrt{9-9^x}}\,dx.$
9. $\int \frac{\sqrt{\text{arc tg}x-x}}{1+x^2}\,dx.$
10. $\int \frac{\sin^2x}{\cos^4x}\,dx.$
11. $\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}\ .$
12. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}\ .$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\ .$
14. $\int \cos^3xdx.$
15. $\int \sin^2xdx.$

1- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг, интеграллаш натижаларини дифференциаллаш билан текширинг:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$.

2. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}dx$.

4. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$.

5. $\int e^{4-5x^2}xdx$.

6. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx$.

7. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx$.

8. $\int \frac{e^{3x}dx}{4-e^{6x}}$.

9. $\int \sin^2(2x-1)\,dx$.

10. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3}dx$.

11. $\int \sin 3x \cos x dx$.

12. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.

2- §. Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш

6.2.1. Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш қуйидагича амалга оширилади:

а) $x=\varphi(t)$, бунда $\varphi(t)$ — янги ўзгарувчи t нинг дифференциалланувчи функцияси бўлсин. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt;$$

б) $\Psi(x)=t$, бунда t — янги ўзгарувчи. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt.$$

Иккала ҳолда ҳам интеграллашдан кейин ўзгарувчи x га қайтиш керак.

1- мисол. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. $x=a\sin t$ десак, $dx=a\cos tdt$ бўлади ва аниқмас интеграл ушбу кўринишни олади:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=$$

$$=\int\sqrt{a^2\cdot\cos^2 t}\cdot a\cos tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2tdt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\int\cos 2tdt=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2td(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Энди

$$t=\arcsin\frac{x}{a}\ \text{ва}\ \sin 2t=2\sin t\cos t=$$

$$=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

тенгликлардан фойдаланиб эски ўзгарувчи x га қайтамиз:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\cdot 2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

2- мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$$

Ечиш. $x=a\operatorname{tg}t$ деб белгиласак, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ бўлади. Буни ҳисобга олиб аниқмас интегрални топамиз:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t+a^2}}{a^2\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{adt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t\cdot\cos t}=$$

$$=\int\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt+\int\frac{dt}{\cos t}=$$

$$=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}+\int\frac{dt}{\cos t}=-\frac{1}{\sin t}+\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\operatorname{tg}t\right|+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}}+\ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}+\frac{x}{a}\right|+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right|+C.$$

3- мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$$

Ечиш. Илдиз остидаги ифодани t^2 билан белгиласак,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\left\{\begin{matrix}2x-9=t^2; & t=\sqrt{2x-9};\\ x=\frac{1}{2}(t^2+9); & dx=tdt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+9)\cdot t}=2\int\frac{dt}{9+t^2}=\frac{2}{3}\text{arc tg}\,\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\,\text{arc tg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C.$$

4-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Ечиш. $t=\frac{1}{x+1}$ янги ўзгарувчини киритамиз:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\left\{\begin{matrix}t=\frac{1}{x+1}; \; x=\frac{1}{t}-1;\\ dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\frac{1}{t}-1-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+t-2t^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}=\text{arc cos}\,\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=$$

$$=\text{arc cos}\frac{2t+1}{\sqrt{5}}+C=\text{arc cos}\,\frac{\frac{2}{x+1}+1}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\text{arc cos}\,\frac{x+3}{\sqrt{5}\,(x+1)}+C.$$

6.2.2. Бўлаклаб интеграллаш усули

$$\int udv=uv-\int vdu$$

формулага асосланади, бунда u ва v $-x$ нинг интегралланувчи функциялари.

Бу усул ҳар хил синфдаги функциялар кўпайтмаларини интеграллашда фойдаланилади:

$$\int P_n\,(x)e^{\alpha x}dx,\ \int P_n\,(x)\cos axdx,\ \int P_n\,(x)\sin axdx,$$
$$\int P_n\,(x)\,\text{arc tg}x\;dx,\ \int P_n\,(x)\,\text{arc sin}xdx,$$
$$\int P_n\,(x)\cos x\;dx,\ \int P_n\,(x)\,\ln xdx.$$

Дастлабки учта интегралда u учун $P_n(x)$ кўпҳад қабул қилинади, охирги тўртта интегралда эса u учун arctg$x$, arc sin$x$, arc cos$x$, ln$x$ қабул қилинади.

Баъзи ҳолларда бўлаклаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллаш зарур бўлади. .

5-мисол. $\int xe^{-5x}dx$ ни топинг.

Ечиш. $u=x$ ва $dv=e^{-5x}dx$ деб оламиз, у ҳолда

$$\int xe^{-5x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x, \; du=dx,\\ dv=e^{-5x}dx, \; v=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{x}{5}e^{-5x}-\frac{1}{25}e^{-5x}+C.$$

v ни топишда интеграллаш доимийсини ҳар доим нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин.

6-мисол. $\int \text{arc tg}\;xdx$ ни топинг.

Ечиш. $u=\text{arc tg}x$ деб оламиз, у ҳолда

$$\int \text{arc tg}xdx=\left\{\begin{matrix}u=\text{arc tg}x, \; du=\frac{dx}{1+x^2},\\ dv=dx, \; v=\int dx=x\end{matrix}\right\}=$$

$$=x\cdot\text{arc tg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\cdot\text{arc tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=x\cdot\text{arctg}x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C.$$

7-мисол. $\int(x^2+1)\cos xdx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бу мисолда бўлаклаб интеграллаш формуласини икки марта қўллашга тўғри келади.

$$\int(x^2+1)\cos xdx=\left\{\begin{matrix}u=x^2+1, \; du=2xdx;\\ dv=\cos xdx, \; v=\sin x\end{matrix}\right\}=$$

$$=(x^2+1)\sin x-2(-x\cdot\cos x+\int\cos xdx)=$$

$$=(x^2+1)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C=$$

$$=2x\cos x+(x^2-1)\,\sin x+C.$$

8-мисол. Аниқмас интегрални ҳисобланг:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx.$$

Ечиш. Бу интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаймиз.

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx=\left\{\begin{matrix}u=e^{\alpha x}, \; du=\alpha e^{\alpha x}dx;\\ dv=\cos\beta xdx, \; v=\frac{1}{\beta}\sin\beta x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=e^{\alpha x},\ du=\alpha\cdot e^{\alpha x}dx \\ dv=\sin\beta x dx,\ v=-\frac{1}{\beta}\cos\beta x \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Бунда

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$$

деб ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$I=\frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I.$$

Бу тенгламани I га нисбатан ечсак,

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)+C.$$

2- дарсхона топшириғи

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.	Ж: $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left\|1+\sqrt[3]{x+1}\right\|$
2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.	Ж: $x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+$ $+6x^{\frac{1}{6}}+6\ln\left\|\sqrt[6]{x}-1\right\|+C.$
3. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.	Ж: $C-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$.
4. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.	Ж: $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$.
5. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$.	Ж: $C-\ln\left\|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right\|$.
6. $\int x\cdot\mathrm{arc\,tg}x dx$	Ж: $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}+C$.
7. $\int\frac{xdx}{\sin^2x}$.	Ж: $C-x\cdot\mathrm{ctg}x+\ln\|\sin x\|$.

8. $\int\arcsin x dx$	Ж: $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.
9. $\int\frac{\ln^3x}{x^2}dx$.	Ж: $C-\frac{1}{x}(\ln^3x+3\ln^2x+6\ln x+6)$.
10. $\int x^2\sin x dx$.	Ж: $C-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$.
11. $\int\sin\ln x dx$	Ж: $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.
12. $\int\sqrt{4+x^2}dx$.	Ж: $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\|x+\sqrt{4+x^2}\|+C$.

2- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int x\sqrt{x-1}dx$.	Ж: $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$.
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.	Ж: $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\|1+\sqrt[4]{x}\|+C$.
3. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.	Ж: $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$.
4. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$.	Ж: $C-\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right\|$.
5. $\int\ln(x^2+1)dx$.	Ж: $x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x+C$.
6. $\int\frac{x\cos x}{\sin^3x}dx$.	Ж: $C-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2x}+\mathrm{ctg}x\right)$.
7. $\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot x^2dx$.	Ж: $C-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)$.
8. $\int\cos\ln x dx$.	Ж: $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

3- §. Каср-рационал функцияни энг содда касрларга ёйиш. Рационал функцияларни интеграллаш

6.3.1. Иккита кўпҳаднинг нисбатига тенг

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

функция *каср-рационал функция* ёки *рационал каср* дейилади, бунда m ва n $Q_m(x)$ ва $P_n(x)$ кўпҳадларнинг даража кўрсаткичлари бўлиб, улар натурал сонлардир. $m<n$ да $R(x)$ каср-рационал функция *тўғри каср,* $m\geqslant n$ да эса *нотўғри каср* дейилади.

Қуйидаги тўғри касрлар *энг содда касрлар* дейилади:

I. $\dfrac{A}{x-\alpha}$.

II. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, бунда $k\geqslant 2$ — бутун сон.

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, бунда $D=p^2-4q<0$.

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, бунда $s\geqslant 2$ — бутун сон, $D=p^2-4q<0$.

Юқоридаги касрларда A, B, p, q, α — ҳақиқий сонлар.

6.3.2. Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад ҳақиқий сонлар тўпламида ушбу кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_p)^{k_p}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ $P_n(x)$ кўпҳаднинг мос равишда $k_1, \ldots, k_p$ каррали ҳақиқий илдизлари, ҳамма квадрат учҳадлар учун дискриминант $D_i<0$ $(i=\overline{1, l})$; $k_1+\ldots+k_p+2s_1+\ldots+2s_l=n$; $k_1,\ldots,k_p$, $s_1,\ldots$, s_l — натурал сонлар; a_0 — $P_n(x)$ кўпҳадда x^n олдидаги коэффициент.

Агар $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ тўғри рационал касрнинг махражи $P_n(x)$ юқорида кўрсатилгандек ифодаланган бўлса, у ҳолда бундай касрни I — IV кўринишдаги энг содда рационал касрлар йиғиндисига ёйиш мумкин. Бу ёйилмада $P_n(x)$ кўпҳаднинг ҳар бир k каррали α илдизига, яъни $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги кўпайтувчига, ушбу k та касрлар йиғиндиси мос келади:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

$P_n(x)$ кўпҳаднинг s каррали комплекс қўшма илдизининг ҳар бир жуфтига, яъни $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги кўпайтувчига ушбу s та касрдан иборат йиғинди мос келади:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Ёйилмадаги A_i, N_i, M_i коэффициентларни топишда хусусий қийматлар усули ёки номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланилади. Баъзан бу икки усул биргаликда қўлланилади.

$R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал каср *нотўғри каср* бўлган ҳолда бутун қисмини ажратиб, сўнгра тўғри каср қисми юқоридаги каби энг содда касрларга ёйилади.

1-мисол. Ушбу

$$R(x)=\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}$$

рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндисига ёйинг.

Ечиш. Берилган $R(x)$ рационал каср тўғри каср. Махражнинг ҳамма илдизлари (3, —4, 1) бир каррали (оддий) ва ҳақиқий, шунинг учун

$$R(x)=\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x-1)},$$

бунда A, B, C — аниқланиши керак бўлган коэффициентлар. Тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтириб, иккала қисмнинг ҳам махражларини ташлаб юборсак:

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+$$
$$+B(x-3)(x-1)+C(x-3)(x+4).$$

а) *Хусусий қийматлар усулининг* мазмуни шундаки, унда ҳосил бўлган айниятга x нинг ҳар хил (одатда махражнинг ҳақиқий илдизлари) қийматлари қўйилади. Қаралаётган мисолда бу қуйидагича амалга оширилади:

$$\begin{array}{r|l} x=3 & 42=14A, \\ x=-4 & 175=35B, \\ -x=1 & 70=-10C. \end{array}$$

Ҳосил қилинган тенгламалар системасидан $A=3$, $B=5$, $C=7$. Шундай қилиб,

$$R(x)=\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x+4}+\frac{7}{x-1}.$$

б) *Номаълум коэффициентлар усулининг* моҳияти шундаки, унда ҳосил бўлган айниятда x нинг ўнгдаги ва чапдаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси тузилади, яъни:

$$\begin{array}{l|r} x^2: & 15=A+B+C, \\ x: & -4=3A-4B+C, \\ x^0: & -81=-4A+3B-12D. \end{array}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечиб, $A=3$, $B=5$, $C=7$ эканини топамиз.

2-мисол. Ушбу рационал касрни содда касрлар йиғиндисига ёйинг:

$$R(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Е ч и ш. Тўғри рационал касрни қуйидагича ёямиз:

$$R(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

Бундан

$$x=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1).$$

Коэффициентларни топиш учун юқорида баён қилинган иккала усулдан ҳам биргаликда фойдаланамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1=4A, \\ x=-1 & -1=-2C, \\ x^2\text{да} & 0=A+B. \end{array}$$

Системани ечсак, $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$.

Демак,

$$R(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}.$$

3- м и с о л. Қуйидаги рационал касрни содда касрларга ёйинг:

$$R(x)=\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}.$$

Е ч и ш. Рационал каср тўғри касрдир, уни энг содда касрларга ёямиз:

$$R(x)=\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}+$$
$$+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Ушбу

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=A(x^2+2x+3)^2+$$
$$+(Bx+C)\ (x+1)(x^2+2x+3)+(Dx+E)\ (x+1).$$

тенгликдан фойдаланиб номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 4=4A, \\ x^4\text{ да} & 1=A+B \\ x^3\text{ да} & 4=4A+2B+C, \\ x^2\text{ да} & 11=10A+3B+3C+D \\ x\text{ да} & 12=12A+B+5C+D+E. \end{array}$$

Тенгламалар системасини ечсак,

$$A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=1,\ E=-1.$$

Демак,

$$R(x)=\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

6.3.3. Тўғри рационал касрларни интеграллаш энг содда касрларни интеграллашга келтирилади.

I. $\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C.$

II. $\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k}=\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}+C.$

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\text{arc tg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV. $$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s}=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^s}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^s},$$

бунда

$a^2=q-\frac{p^2}{4}$, $t=x+\frac{p}{2}$ белгилашлар киритиб, иккинчи интеграл $I_s=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$ кўринишга келтирилади ва у қуйидаги рекуррент формула ёрдамида топилади:

$$I_s=\frac{t}{2(s-1)a^2(t^2+a^2)^{s-1}}+\frac{2s-3}{2(s-1)a^2}I_{s-1}.$$

4- м и с о л. Интегрални ҳисобланг: $\int\frac{3x-1}{x^2+4x+8}dx.$

Е ч и ш.

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+6-1}{x^2-4x+8}dx=$$
$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8|+5\int\frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8|+\frac{5}{2}\text{arc tg}\,\frac{x-2}{2}+C.$$

5 мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx.$$

Ечиш. $$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-3+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2}-$$

$$-\int\frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+10}-I_2.$$

Бунда $I_2=\int\frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2}$, $s=2$, $u=x+1$ ва $a^2=9$ деб белгилаб, юқоридаги рекуррент формуладан фойдаланамиз:

$$I_2=\int\frac{du}{(u^2+9)^2}=\frac{1}{2\cdot9\cdot1}\left(\frac{u}{u^2+9}+(2\cdot2-3)I_1\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{u}{u^2+9}+\int\frac{du}{u^2+9}\right)=\frac{1}{18}\left(\frac{u}{u^2+9}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right).$$

Ўзгарувчи x га қайтсак,

$$I_2=\frac{1}{18}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2+9}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+10}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\right).$$

Шундай қилиб,

$$\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}-$$

$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

6.3.4. $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал касрни интеграллашдан олдин қуйидаги алгебраик алмаштиришлар ва ҳисоблашлар бажарилади:

а) берилган каср тўғри каср эканини текшириш; агар каср нотўғри бўлса, у ҳолда унинг бутун қисмини ажратиш, яъни

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$$

шаклга келтириш, бунда $q(x)$ — кўпҳад, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ эса тўғри рационал каср;

б) касрнинг махражи $P_n(x)$ ни $(x-\alpha)^k$ ва $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги чизиқли ва квадрат кўпайтувчиларга ажратиш ($p^2-4q<0$);

в) тўғри рационал касрни энг содда касрлар йиғиндисига ёйиш;

г) ёйилманинг коэффициентларини ҳисоблаш.

6- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx.$$

Ечиш. Берилган рационал каср нотўғри каср бўлганлиги учун унинг бутун қисмини ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} \underline{x^5-8x^3+16x} & x \\ 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}=$$

$$=x+\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндисига ёямиз:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}.$$

Махражлардан қутулсак,

$$8x^3-16x+1=A(x+2)^2(x-2)+B(x+2)^2+$$
$$+C(x-2)^2(x+2)+D(x-2)^2.$$

Номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 33=16B, \\ x=-2 & -31=16D, \\ x^3\text{ да} & 8=A+C \\ x^2\text{ да} & 0=2A+B-2C+D. \end{array}$$

Бу системани ечиб, коэффициентларни топамиз:

$$A=\frac{127}{32},\quad B=\frac{33}{16},\quad C=\frac{129}{32},\quad D=-\frac{31}{16}.$$

Демак,

$$\int \frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16}=\int\left(x+\frac{\frac{127}{32}}{x-2}+\frac{\frac{33}{16}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{129}{32}}{x+2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{31}{16}}{(x+2)^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{127}{32}\ln|x-2|-\frac{33}{16(x-2)}+$$

$$+\frac{129}{32}\ln|x+2|+\frac{31}{16(x+2)}+C.$$

3- дарсхона топшириғи

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx.$ Ж: $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{1}{3}\ln\frac{|x|^3}{(x-2)^2(x+1)}+C.$

2. $\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx.$ Ж: $C-\frac{2}{x-1}+\ln\frac{|x|^3}{|x-1|}.$

3. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$ Ж: $C-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}.$

4. $\int\frac{xdx}{x^3+1}.$ Ж: $C+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

5. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}.$ Ж: $C+\frac{2}{3\sqrt{7}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{3}\text{arctg}(x+2).$

6. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$ Ж: $C+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}+$

$$+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

3- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$ Ж: $5x+\ln x^2(x+2)^4|x-2|^3+C.$

2. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$ Ж: $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+$

$$+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C.$$

3. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ Ж: $C-\frac{1}{x-2}-\text{arctg}(x-2).$

4. $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$ Ж: $C-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+$

$$+\frac{1}{2}\text{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

5. $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$ Ж: $\frac{x+2}{2(x^2+1)}+2\text{arctg}x+\ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}+C.$

6. $\int\frac{(x+1)^4dx}{(x^2+2x+2)^3}.$ Ж: $\frac{3}{8}\text{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$

4- §. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интеграллар

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишидаги интеграллар (R — $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал функция) $\text{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштириш ёрдамида рационал функцияларнинг интегралларига (3- §) келтирилади. Чунки,

$$\sin x=\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\text{arctg}t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Бундай алмаштириш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шу сабабли баъзи хусусий ҳолларда кўрсатилган хилдаги интегралларни топишда қуйидаги содда ўрнига қўйишлардан фойдаланилади:

а) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда $\cos x=t$ ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради;

б) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\cos x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда интеграл $\sin x=t$ ўрнига қўйиш билан рационал функцияларни интеграллашга келтирилади;

в) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, яъни

$$R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда бу функция $\operatorname{tg}x=t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади. Бу ҳолда

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2},$$

$$x=\operatorname{arctg}t\ ;\ dx=\frac{dt}{1+t^2};$$

г) агар $R(\operatorname{tg}x)$ бўлса, у ҳолда интеграл остидаги ифода яна $\operatorname{tg}x=t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади.

1- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}.$$

Ечиш. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб, интегрални топамиз:

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left\{\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=C-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}.$$

2- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)}{\cos 2x}dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ га нисбатан ток функция, шунинг учун $\cos x=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx=\left\{\begin{matrix}\cos x=t;\ \sin^2 x=1-t^2,\\ \sin x dx=-dt;\ \cos 2x=2t^2-1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{\cos 2x}dx=\int\frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{(2t^2-4)dt}{2t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2t^2-1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,t-1}{\sqrt{2}\,t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\cos x-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

3- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\cos x$ га нисбатан ток функция, шу сабабли $\sin x=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\sin x=t,\ \cos^2 x=1-t^2\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2+t^4}dt=\int\frac{t^4-3t^2+2}{t^4+t^2}dt.$$

Энди нотўғри рационал касрнинг бутун қисмини ажратиб ва тўғри рационал касрни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\int\frac{t^4-3t^2+2}{t^4+t^2}dt=\int\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt=t-\frac{2}{t}-6\operatorname{arctg}t+C.$$

Шундай қилиб, эски ўзгарувчига қайтсак:

$$\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

4- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+3}.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, шу сабабли $\operatorname{tg}x=t$ деб оламиз:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+3}=\left\{\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t;\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\\ x=\operatorname{arctg}t;\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+3}=$$

$$=\int\frac{dt}{3+4t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{(\sqrt{3})^2+(2t)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C.$$

5- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{1+\text{tg}x}.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция фақат tg$x$ га боғлиқ бўлгани учун tg$x=t$ деб оламиз:

$$\int\frac{dx}{1+\text{tg}x}=\left\{\begin{array}{l}\text{tg}x=t,\ \ x=\text{arctg}t,\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int\frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}.$$

Интеграл остидаги функцияни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}=\int\left(\frac{1}{2(1+t)}-\frac{t-1}{2(1+t^2)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1+t^2|+\frac{1}{2}\text{arctg}t+C.$$

Эски ўзгарувчи x га қайтсак,

$$\int\frac{dx}{1+\text{tg}x}=\frac{1}{2}\ln|1+\text{tg}x|-\frac{1}{4}\ln(1+\text{tg}^2x)+\frac{1}{2}x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{tg}x}{\sqrt{1+\text{tg}^2x}}\right|+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|\cos x(1+\text{tg}x)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C.$$

4- дарсхона топшириғи

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. Ж: $\frac{1}{5}\ln\left|5\text{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$.
2. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$. Ж: $\frac{1}{2}\text{arctg}\left(2\text{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.
3. $\int\frac{\cos^3x\,dx}{\sin^2x+\sin x}$ Ж: $\ln|\sin x|-\sin x+C$.
4. $\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2x-1)}$. Ж: $\ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+C$.
5. $\int\frac{dx}{4-3\cos^2x+5\sin^2x}$. Ж: $\frac{1}{3}\text{arctg}(3\,\text{tg}x)+C$.
6. $\int\frac{\sin^2x\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$. Ж: $\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C$.

7. $\int\frac{dx}{4+\text{tg}x+4\text{ctg}x}$. Ж: $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\text{tg}x+2|+\frac{2}{5(\text{tg}x+2)}-$

$$-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C.$$

8. $\int\frac{(2\text{tg}x+3)\,dt}{\sin^2x+2\cos^2x}$. Ж: $\ln(\text{tg}^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.

4- мустақил иш

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$. Ж: $\frac{2}{3}\text{arctg}\frac{5\text{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.
2. $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$. Ж: $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.
3. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2x-6\sin x+5}$. Ж: $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}+C$.
4. $\int\frac{dx}{1+3\cos^2x}$. Ж: $\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{2}\right)+C$.
5. $\int\frac{dx}{3\sin^2x+5\cos^2x}$. Ж: $\frac{1}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{\sqrt{3}\,\text{tg}x}{\sqrt{5}}+C$.
6. $\int\frac{1+\text{tg}x}{1-\text{tg}x}dx$. Ж: $C-\ln|\cos x-\sin x|$.

5- §. Таркибида тригонометрик фуикциялар бўлган баъзи нитеграллар

6.5.1. $\int\sin^nx\cos^mx\,dx$ кўринишидаги интеграллар қуйидагича топилади:

а) агар $n>0$ тоқ бўлса, $\cos x=t$, $\sin x\,dx=-dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

1-мисол. Интегрални топинг:

$$\int\sin^3x\cdot\cos^2x\,dx.$$

Ечиш. $\sin^3x$ даражада битта $\sin x$ кўпайтувчини ажратамиз ва уни дифференциал остига киритамиз:

$$\int\sin^3x\cdot\cos^2x\,dx=\int\sin^2x\cos^2x\sin x\,dx=$$

$$=-\int\sin^2x\cos^2x\,d\,(\cos x)=-\int(1-\cos^2x)\,\cos^2x\,d(\cos x)=$$

$$=-\int(\cos^2x-\cos^4x)\,d(\cos x)=C-\frac{1}{3}\cos^3x+\frac{1}{5}\cos^5x;$$

б) агар $m>0$ тоқ бўлса, у ҳолда $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

2-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$$

Ечиш.

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^{4/3} x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^{3/4} x} =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^{4/3} x} = \int \left(\sin^{-\frac{4}{3}} x - \sin^{\frac{2}{3}} x\right) d(\sin x) =$$

$$= -3\sin^{-\frac{1}{3}} x - \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x + C = C - \frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}.$$

в) агар $m, n \geqslant 0$ жуфт бўлсалар, у ҳолда

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ формулалардан фойдаланган ҳолда икkиланган бурчакларга ўтиб, синус ва косинуснинг даражасини пасайтириш керак.

3-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \sin^4 x dx.$$

Ечиш.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}(x - \sin 2x +$$

$$+ \int \cos^2 2x dx) = \frac{1}{4}(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x) dx) =$$

$$= \frac{1}{4}(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

г) агар $m, n \leqslant 0$ ва улардан бири тоқ бўлса, у ҳолда сурат ва махражни $\sin x$ ёки $\cos x$ га, буларнинг қайсиниси тоқ даражадалигига қараб, қўшимча кўпайтириш усулидан фойдаланиш керак.

4-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C = \ln\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

д) агар $m+n<0$ ва жуфт бўлса, у ҳолда $\mathrm{tg}x = t$ ёки $\mathrm{ctg}x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Агар бунда $m<0$ ва $n<0$ бўлса, у ҳолда сунъий усул қўлланиши мумкин, бунинг учун суратдаги 1 ии $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^k = 1$ «тригонометрик бир»га алмаштириш керак. Бу формулада $k = \frac{|m+n|}{2} - 1$.

5-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx.$$

Ечиш. Бунда $m = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{13}{3}$, $m+n = -4 < 0$.

$$\int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = t, \ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right\} = \int \frac{\mathrm{tg}^{\frac{1}{3}} x dx}{\cos^2 x \cos^2 x} = \int \frac{t^{\frac{1}{3}} dt}{\frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int t^{\frac{1}{3}}(1+t^2) dt = \int \left(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{7}{3}}\right) dt = \int t^{\frac{1}{3}} dt + \int t^{\frac{7}{3}} dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} +$$

$$+ \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} + C = \frac{3}{4}\mathrm{tg}^{\frac{4}{3}} x + \frac{3}{10}\mathrm{tg}^{\frac{10}{3}} x + C.$$

6-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

Ечиш. Бунда $m = -2$, $n = -4$, $m+n = -6 < 0$, $k = \frac{|m+n|}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$. Шундай қилиб:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) dx}{\sin^2 x \cos^4 x} =$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{2dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \cos^2 x} + 2\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x d(\mathrm{tg}x) + 2\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + 2\,\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.$$

6.5.2. $\int \mathrm{tg}^n x\, dx$ ва $\int \mathrm{ctg}^n x\, dx$ шаклдаги интеграллар, бунда $n > 0$ — бутун сон.

Бу хил интегралларни топишда tg^2x ёки ctg^2x кўпайтувчилар ажратилади ва улар $\mathrm{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1$ ва $\mathrm{ctg}^2x=\frac{1}{\sin^2x}-1$ формулалар бўйича алмаштирилади, бу формулалар тангенс ва котангенс даражаларини кетма-кет пасайтиради. Бу хил интегралларни $\mathrm{tg}x=t$ ёки $\mathrm{ctg}x=t$ ўрнига қўйишлар ёрдамида ҳам топиш мумкин.

7-мисол. Интегралии топинг:

$$\int \mathrm{tg}^4x\,dx.$$

Ечиш. Бу мисолга юқоридаги усулни қўллаймиз:

1-усул. $$\int \mathrm{tg}^4xdx=\int \mathrm{tg}^2x\cdot\mathrm{tg}^2xdx=\int \mathrm{tg}^2x\frac{dx}{\cos^2x}-\int \mathrm{tg}^2xdx=$$

$$=\int \mathrm{tg}^2xd(\mathrm{tg}x)-\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx==\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x-\mathrm{tg}x+x+C.$$

2-усул.

$$\int\mathrm{tg}^4xdx=\begin{cases}\mathrm{tg}x=t,\\ x=\mathrm{arctg}t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{cases}=\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=\int\frac{(t^4-1)+1}{1+t^2}dt=$$

$$=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}t+C=\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}-\mathrm{tg}x+x+C.$$

6.5.3. $\int\sec^nx\,dx$ ва $\int\mathrm{cosec}^nx\,dx$ кўринишдаги интеграллар. Иккита ҳолни кўрамиз:

а) агар n тоқ бўлса, у ҳолда $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштиришдан фойдаланилади;

б) агар n жуфт бўлса, у ҳолда $\mathrm{tg}x=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланилади ёки $\sec^2x$, ёки cosec^2x кўпайтувчи ажратилиб, $\sec^2xdx=d(\mathrm{tg}x)$ ёки $\mathrm{cosec}^2x=d(\mathrm{ctg}x)$ деб олииади, қолган даражалар эса

$$\sec^2x=1+\mathrm{tg}^2x \text{ ёки } \mathrm{cosec}^2x=1+\mathrm{ctg}^2x$$

формулалар бўйича алмаштирилади.

8-мисол. Интегралии топинг:

$$\int\frac{dx}{\sin^3x}.$$

Ечиш. $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ универсал ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int\frac{dx}{\sin^3x}=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t;\\ x=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t)^2}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^4-1}{8t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\mathrm{tg}^4\frac{x}{2}-1}{8\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+$$

$$+\frac{\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)\cdot1}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot8\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+C.$$

9-мисол. $\int\frac{dx}{\cos^6x}$ интегрални топииг.

Ечиш. $\frac{1}{\cos^2x}$ кўпайтувчини ажратамиз ва $\frac{dx}{\cos^2x}=d(\mathrm{tg}x)$ деб оламиз.

$$\int\frac{dx}{\cos^6x}=\int\frac{1}{\cos^4x}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2}x\right)^2d(\mathrm{tg}x)=\int(1+\mathrm{tg}^2x)^2d(\mathrm{tg}x)=$$

$$\int(1+2\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)d(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}x+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3x+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5x+C.$$

6.5.4. $\int\sin mx\cdot\cos nxdx$, $\int\cos mx\cdot\cos nxdx$, $\int\sin mx\cdot\sin nxdx$ кўринишдаги иитеграллар қуйидаги маълум тригонометрик формулалардан фойдаланилса, осон ҳисобланади:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Бу формулалар тригонометрик фуикциялар кўпайтмасини йиғинди шаклида ифодалаш имконини беради.

10-мисол. $\int\sin2x\cos5xdx$ интегрални топинг.

Ечиш. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғинди билаи алмаштирамиз:

$$\int\sin2x\cos5xdx=\frac{1}{2}\int(\sin7x+\sin(-3x)dx=\frac{1}{2}\int\sin7xdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin3xdx=-\frac{1}{14}\cos7x+\frac{1}{6}\cos3x+C.$$

11- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx.$$

Ечиш. Келтирилган формулаларни икки марта қўллаймиз:

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos\ (-x))\ \cos\ 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 3x\ \cos 4dx + \frac{1}{2}\int \cos x \cos\ 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\ (\cos 7x + \cos(-x))dx + \frac{1}{4}\int\ (\cos 5x + \cos\ (-3x))\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C.$$

5- дарсхона топшириғи

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx.$ Ж: $C + \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x}.$
2. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x}\, dx.$ Ж: $\frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^{18} x} - \frac{5}{8}\sqrt[5]{\cos^8 x} - \frac{5}{28}\sqrt[5]{\cos^{28} x} + C.$
3. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx.$ Ж: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$ Ж: $\frac{(\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}^4 x + 10\mathrm{tg}^2 x + 1)}{3\mathrm{tg}^3 x} + C.$
5. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}.$ Ж: $\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C.$
6. $\int \mathrm{tg}^3 x dx.$ Ж: $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ Ж: $C - \mathrm{ctg} x - \frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x.$
8. $\int \cos x \cdot \cos^2 3x dx.$ Ж: $C + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{20}\sin 5x.$

5- мустақил иш

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \sin^3 x dx.$ Ж: $C - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$
2. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$ Ж: $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C.$
3. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}.$ Ж: $C - \frac{1}{2\mathrm{tg}^2 x} + 3\ln|\mathrm{tg} x| + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x.$
4. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$ Ж: $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln|\mathrm{tg} x + \sec x| + C.$
5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ Ж: $\mathrm{tg} x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C.$
6. $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$ Ж: $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

6-§. Иррационал ифодаларни интеграллаш

6.6.1. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$

кўринишдаги интеграллар (R — рационал функция ва m_1, n_1, m_2, n_2 — бутун сонлар) $\frac{ax+b}{cx+d} = t^S$ ўрнига қўйиш ёрдамида интегралланади, бунда s — n_1, n_2, ... сонларнинг энг кичик умумий карралиси (ЭКУК), яъни $s =$ ЭКУК$(n_1, n, \ldots)$.

Хусусан, $\int R(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_2}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots)\, dx$ кўринишдаги интеграллар $ax + b = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида топилади, $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots)\, dx$ кўриинишдаги интеграллар эса $x = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида янги ўзгарувчи t нинг рационал функцияси интегралига келтирилади, бунда умумий ҳолдагидек, $s =$ ЭКУК$(n_1, n_2, \ldots)$.

1- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}.$$

Ечиш. ЭКУК $(2, 3)=6$, шунинг учун:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\left\{\begin{array}{l} 2x+1=t^6; \\ x=\frac{1}{2}(t^6-1);\ dx=3t^5dt \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}(t+1)^2+\ln|t-1|+C=$$

$$=\{t=\sqrt[6]{2x=1}\}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right)^2+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

6.6.2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ кўринишдаги интеграллар (R — рационал функция) квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратилганидан ва ўзгарувчи $z=x+\frac{b}{2a}$ деб олинганидан кейин қуйидаги кўринишдаги интегралларданбирига келтирилади:

а) $\int R\left(z, \sqrt{m^2-z^2}\right)dz,$

б) $\int R\left(z, \sqrt{m^2+z^2}\right)dz,$

в) $\int R\left(z, \sqrt{z^2-m^2}\right)dz.$

Агар

а) $z=m\sin t$ ёки $z=m\cos t$;

б) $z=m\operatorname{tg} t$ ёки $z=m\operatorname{ctg} t$;

в) $z=m\sec t$ ёки $z=m\operatorname{cosec} t$

тригонометрик ўрнига қўйишлардан фойдаланилса, бу интеграллар $\int R(\sin t, \cos t)dt$ кўринишдаги интегралларга келтирилади.

2- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}.$$

Ечиш. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз ва янги z ўзгарувчини киритамиз. Шундан кейин юқорида келтирилган б) тригонометрик ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{[(x+2)^2+3]^3}}=\left\{\begin{array}{l} x+2=z, \\ dx=dz \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2+3)^3}}=\left\{\begin{array}{l} z=\sqrt{3}\operatorname{tg} t, \\ dz=\frac{\sqrt{3}\,dt}{\cos^2 t} \end{array}\right\}=\int\frac{\frac{\sqrt{3}\,dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{(3\operatorname{tg}^2 t+3)^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+\frac{\frac{z}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{3}}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{z}{\sqrt{3+z^2}}+C=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{3+(x+2)^2}}+C=\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}+C.$$

6.6.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграл квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратиш йўли билан $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ ёки $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$ жадвал интегралларидан бирига келтирилади.

3- мисол. Интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Ечиш. Квадрат учҳадни ушбу кўринишга келтирамиз: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Бундан фойдаланиб, интегрални топамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

6.6.4. $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграллар суратдан квадрат учҳаднинг ҳосиласини ажратиш натижасида иккита интегралга келтирилади: улардан бири $\int\frac{du}{\sqrt{u}}$ жадвал интеграли, иккинчиси эса 6.6.3- бандда қаралган интегралдир.

4- мисол. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$ интегралини топинг.

Ечиш. Суратда интеграл остидаги ифоданинг ҳосиласини ажратамиз:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx=\int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{6x-x^2-8}}\,dx+13\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{6x-x^2-8}+13\arcsin(x-3)+C.$$

6.6.5. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграллар $\frac{1}{x-\alpha}=t$ ўрнига қўйиш ёрдамида 6.6.3- бандда қаралган интегралга келтирилади.

5- мисол. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x-3}}$ интегрални топинг.

Ечиш. $\frac{1}{x+1}=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x+1}=t; & x=\frac{1}{t}-1; \\ x+1=\frac{1}{t}; & dx=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\int \frac{t\cdot\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=C-\ln\left|\, t+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{t^2+t+1}\right|=C-\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|.$$

6.6.6. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ кўринишдаги интеграллар (m, n, p — рационал сонлар) дифференциал биномлари интеграллари деб аталиб, учта ҳолдагина элементар функциялар орқали ифодаланади:

а) агар p — бутун сон бўлса, у ҳолда интеграл $x=t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида (бунда s — касрлар махражлари m ва n нинг энг кичик умумий карралиси) рационал функция интегралига келтирилади;

б) агар $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, у ҳолда интеграл $a+bx^n=t^s$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади, бунда s — p касрнинг махражи;

в) $\frac{m+1}{n}+p$ — бутун сон бўлса, у ҳолда $a+bx^n=t^s\cdot x^n$ деб оламиз, буида s — p касрнинг махражи.

6- мисол. $\int \sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^2dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $p=2$ — бутун сон, демак, биринчи а) ҳолга эгамиз:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left\{\begin{matrix}m=\frac{1}{3}, \; n=\frac{1}{2}; \\ s=\text{ЭКУК}(2,3)=6, \; x=t^6, dx=6t^5dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int t^2(2+t^3)^2 6t^5dt=6\int(4t^7+4t^{10}+t^{13})\,dt=$$

$$=6\left(\frac{1}{2}t^8+\frac{4}{11}t^{11}+\frac{1}{14}t^{14}\right)+C=\left\{t=\sqrt[6]{x}\right\}=$$

$$=3\sqrt[3]{x^4}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}=\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$$

7- мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Ечиш. Бунда $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=\left(-\frac{2}{3}+1\right):\frac{1}{3}=$ $=1$ — бутун сон. Иккинчи б) ҳолга эгамиз:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left\{\begin{matrix}1+x^{\frac{1}{3}}=t^2; & \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=2tdt \\ x^{\frac{1}{3}}=t^2-1 & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int 6t^2dt=2t^3+C=2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3}+C.$$

8- мисол. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ интегрални топинг:

Ечиш. Бунда $p=-\frac{1}{2}$ $m=-11$, $n=4$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=$ $=-\frac{5}{2}$ — каср сон, аммо $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3$ — бутун сон.

Учинчи в) ҳолга эгамиз:

$$\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx=\left\{\begin{array}{l}1+x^4=t^2\cdot x^4,\\ x=\dfrac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}};\ dx=-\dfrac{tdt}{2(t^2-1)^{5/4}}\end{array}\right\}=$$

$$=\int-\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{4}(-11)}\cdot\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{tdt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{\frac{11}{4}}\cdot\frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2dt=$$

$$=C-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}=C-\frac{\sqrt{(1+x^4)^5}}{10x^{10}}+\frac{\sqrt{(1+x^4)^3}}{3x^6}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}.$$

6- дарсхона топшириғи

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}.$

Ж: $C-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|.$

2. $\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$ Ж: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

3. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$ Ж: $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.\right.$

4. $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx.$

Ж: $3\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C.$

5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$ Ж: $C-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}.$

6. $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}.$ Ж: $C+\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}.$ Ж: $C-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}.$

8. $\int\sqrt[3]{x}\ \sqrt[4]{2+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Ж: $\frac{2}{3}\left(\sqrt[4]{2+\sqrt[3]{x^2}}\right)^9-\frac{12}{5}\left(\sqrt[4]{2+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5+C.$

9. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ Ж: $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$

10. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx.$ Ж: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C.$

6- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}\,(\sqrt[4]{x+3}-1)}$. Ж: $4\sqrt[4]{x+3}+4\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|+C.$

2. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx.$

Ж: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot$ Ж: $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

4. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}.$ Ж: $C-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}.$

5. $\int\sqrt{1-2x-x^2}dx.$ Ж: $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

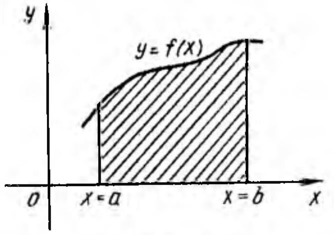
6. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}.$ Ж: $C+\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

7. $\int\sqrt[3]{x}\ \sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$ Ж: $\frac{21}{32}\sqrt[7]{\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)^8}+C.$

7-§. Аниқ интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласи. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш

6.7.1. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу кесмани $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ нуқталар билан n та қисмга бўламиз. Ҳар бир (x_{i-1}, x_i) оралиқдан ихтиёрий ξ_i нуқтани оламиз ва ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$



23- шакл

бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ушбу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ кўринишдаги йиғинди *интеграл йиғинди,* бу йиғиндининг $\max\Delta x_i \to 0$ даги лимитини, агар бу лимит мавжуд бўлса, $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган *аниқ интеграл* дейилади ва

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

кўринишда белгиланади. Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи функция* дейилади. a ва b сонлар мос равишда интеграллашнинг *қуйи* ва *юқори чегаралари* дейилади.

Функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиши учун униг шу кесмада узлуксиз бўлиши етарли.

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл геометрик жиҳатдан $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ва $x = b$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция кўринишидаги шаклнинг юзини ифодалайди (23- шакл).

6.7.2. Аниқ интегралнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

а) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

б) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

в) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$;

г) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$.

д) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, бунда k — ўзгармас;

е) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$;

ж) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geqslant g(x)$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant$

$\geqslant \int_a^b g(x)\,dx$;

з) агар m ва M мос равишда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қиймати бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

тенгсизлик ўринли (аниқ интегрални баҳолаш ҳақидаги теорема);

и) $\int_a^b f(x)\,dx = f'(c)(b-a)$, бунда $c \in (a, b)$ (ўрта қиймат ҳақидаги теорема).

6.7.3. Агар $F(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбництнинг қуйидаги формуласи ўринли:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Бу формуладан аниқ интегралларни ҳисоблашда фойдаланилади.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг: $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Ечиш. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2.$

2-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\,d(\cos x) =$

$$= -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{2}{3}.$$

6.7.4. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, $x = \varphi(t)$ функция эса дифференциалланувчи бўлиб, шу билан бирга $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Кўпинча $x=\varphi(t)$ ўрнига қўйиш ўрнига $t=\psi(x)$ тескари алмаштиришдан фойдаланилади. Бу ҳолда интеграллашнинг янги чегаралари α ва β бевосита $\alpha=\psi(a)$ ва $\beta=\psi(b)$ тенгликлардан топилади. Бунда интеграллаш чегараларини алмаштиришни қуйидаги жадвал шаклида ёзиш қулай:

x	t
a	α
b	β

3- мисол. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x=\sin t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \end{matrix}\ \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \hline 1 & \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=(-\mathrm{ctg}\,t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}.$$

4- мисол. $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $t=\sqrt{x+1}$ формула бўйича ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x+1}, \\ x=t^2-1, \end{matrix}\ dx=2tdt\ \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 8 & 3 \\ \hline \end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{2}^{3} \frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int\limits_{2}^{3}(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{2}^{3}=$$

$$=2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{32}{3}.$$

6.7.5. Агар $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар ва уларнинг ҳосилалари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{b} udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int\limits_{a}^{b} vdu$$

тенглик ўринли (бўлаклаб интеграллаш формуласи).

5- мисол. $\int\limits_{1}^{e} x\ln^2 xdx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз:

$$\int\limits_{1}^{e} x\ln^2 xdx=\left\{\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\cdot\frac{dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e} x\ln xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{e}-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{e} xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{e} xdx=\frac{x^2}{4}\Big|_{1}^{e}=\frac{1}{4}(e^2-1).$$

7- дарсхона топшириғи

Интегралларни ҳисобланг:

1.	$\int\limits_{0}^{1}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx.$	Ж: $\frac{19}{15}$.
2.	$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{2x-1}.$	Ж: $\frac{1}{2}\ln 3$.
3.	$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$	Ж: $\frac{\pi}{4}$.
4.	$\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$	Ж: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
5.	$\int\limits_{1}^{6}\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}.$	Ж: $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$.

6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$. Ж: $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx$. Ж: $4-\pi$.

8. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. Ж: $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin^4 x dx$. Ж: $\frac{4}{25}\left(e^{\frac{3\pi}{4}}+1\right)$.

10. $\int\limits_{0}^{1} x\cdot \operatorname{arctg} x dx$. Ж: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

7- мустақил иш

Аниқ интегралларни ҳисобланг:

1. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}dx$. Ж: $\frac{11}{2}+7\ln 2$.

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. Ж: $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$. Ж: $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

4. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$. Ж: $2\ln 2-\frac{1}{2}$.

5. $\int\limits_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$. Ж: $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$.

6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$. Ж: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x dx$. Ж: $\frac{\pi^2-8}{32}$.

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$. Ж: $\pi\sqrt{2}-4$.

8- §. Ясси фигураларнинг юзларини ҳисоблаш

6.8.1. $y=f(x)$ функция графиги, $x=a$, $x=b$ иккита тўғри чизиқ ва Ox ўқ билан чегараланган фигура *эгри чизиқли трапеция* дейилади.

Бундай эгри чизиқли трапециянинг юзи $f(x)\geqslant 0$ бўлса,

$$S=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} ydx$$

формула бўйича ҳисобланади (24- шакл).

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ $(f_2(x)\geqslant f_1(x))$ эгри чизиқлар ва $x=a$ ҳамда $x=b$ иккита тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S=\int\limits_{a}^{b}[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

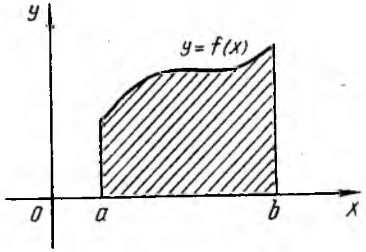
формула бўйича ҳисобланади (25- шакл).

Агар эгри чизиқли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=d$ тўғри чизиқлар ва Oy ўқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи $f(y)\geqslant 0$ учун

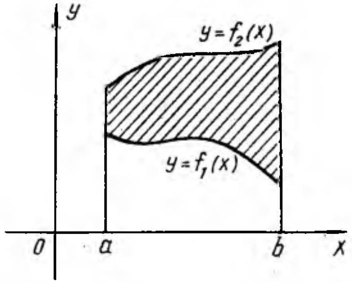
$$S=\int\limits_{c}^{d} f(y)dy=\int\limits_{c}^{d} xdy$$

формула бўйича ҳисобланади (26- шакл).

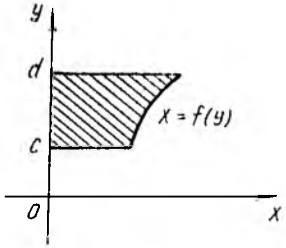
$x_1=f_1(y)$ ва $x=f_2(y)$ $(f_2(y)\geqslant f_1(y))$ эгри чизиқлар, $y=c$ ва $y=d$ иккита тўғри чизиқ билан чегараланган фигура юзи



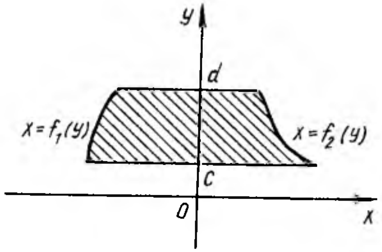
24- шакл



25- шакл



26- шакл



27- шакл

$$S=\int\limits_{c}^{d}(f_2(y)-f_1(y))\,dy$$

формула бўйича ҳисобланади (27- шакл).

6.8.2. Агар эгри чизиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда шу эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,dx(t)$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда t_1 ва t_2 $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ $(y(t)\geqslant 0)$ тенгламалардан аниқланади.

6.8.3. $r=r(\varphi)$ функция графиги ва $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ иккита нур билан чегараланган фигура *эгри чизиқли сектор* дейилади, бунда φ ва r — қутб координаталари (28- шакл). Эгри чизиқли секторнинг юзи

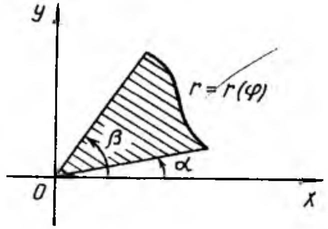
$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi$$

формула бўйича ҳисобланади.

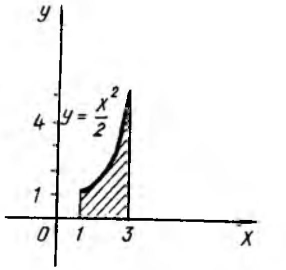
1- мисол. $y=\frac{x^2}{2}$ парабола, $x=1$, $x=3$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Аввал шаклни чизамиз (29- шакл). Изланаётган юз ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$S=\int\limits_{a}^{b} y\,dx=\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^3}{6}\Big|_1^3=\frac{1}{6}(3^3-1^3)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\ \text{(кв. бирл.)}.$$



28- шакл



29- шакл

2- мисол. $x=2-y-y^2$ эгри чизиқ ва ординаталар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

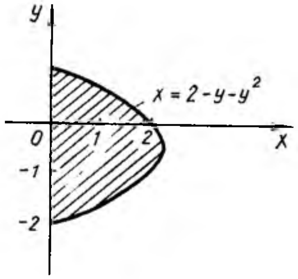
Ечиш. Фигура Oy ўққа ёпишиб туради (30- шакл), унинг юзи $S=\int\limits_{c}^{d} x\,dy$ формула бўйича ҳисобланади.

$$S=\int\limits_{c}^{d} x\,dy=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,dy=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=$$

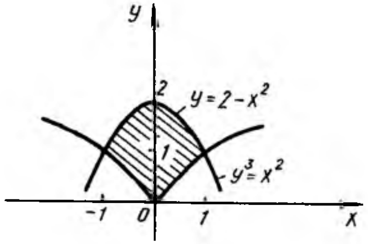
$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}\ \text{(кв. бирл.)}.$$

3- мисол. $y=2-x^2$ ва $y^3=x^2$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасини ечиб, эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз: $A(-1, 1)$ ва $B(1, 1)$. Интеграллаш чегаралари бўлиб $x=-1$ ва $x=1$ хизмат қилади. Фигура юзи $S=\int\limits_{c}^{d}(f_2(x)-f_1(x))\,dx$ формула бўйича ҳисобланади (31- шакл).



30- шакл



31- шакл

$$S=\int_{c}^{d}(f_2(x)-f_1(x))dx=\int_{-1}^{1}(2-x^2-\sqrt[3]{x^2})dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)-$$

$$-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)=\frac{16}{15}+\frac{16}{15}=\frac{32}{15}\text{ (кв. бирл.)}.$$

4- мисол. Эллипснинг

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$$

параметрик тенгламаларидан фойдаланиб, унинг юзини топинг.

Ечиш. Эллипснинг симметриклигидан фойдаланиб, изланаётган юзнинг тўртдан бирини ҳисоблаймиз (32- шакл). $x=a\cos t$ тенгламада $x=0$ ва $x=a$ деб олсак, ушбу интеграллаш чегараларига эга бўламиз: $t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=0$. Ҳисоблаймиз:

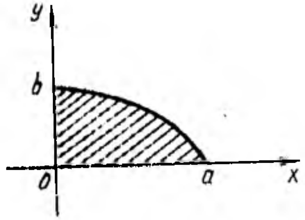
$$\frac{1}{4}S=\int_{t_1}^{t_2}ydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2tdt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2t)dt=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}.$$

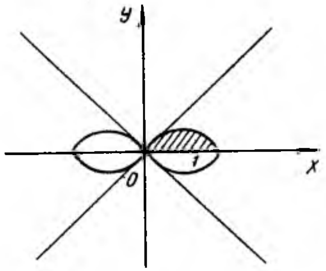
Демак, бутун фигуранинг юзи

$$S=\pi ab\text{ (кв. бирл.)}.$$

5- мисол. $r^2=2\cos2\varphi$ Бернулли лемнискатаси билан чегараланган фигура юзини топинг.



32- шакл



33- шакл

Ечиш. Эгри чизиқнинг симметриклигидан фойдаланиб, олдин изланаётган юзнинг тўртдан бирини топамиз (33- шакл). Изланаётган юзнинг тўртдан бир қисми φ нинг 0 дан $\frac{\pi}{4}$ гача ўзгаришига тўғри келади.

Фигура юзини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}2\cos2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, изланаётган юз: $S=\frac{1}{2}$ (кв. бирл.).

8- дарсхона топшириғи

Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y=4x-x^2$ ва Ox ўқ билан. Ж: $\frac{32}{3}$ (кв. бирл.).
2. $y=(x-1)^2$ ва $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ Ж: $\frac{10}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+\sqrt{8})\approx$ $\approx4{,}58$ (кв. бирл.).
3. $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$ (бир аркаси) ва $y=0$. Ж: 12π (кв. бирл.).
4. $r=2a\cos\varphi$ ва $r=2a\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

   Ж: $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$ (кв. бирл.) .
5. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$. Ж: $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ (кв. бирл.).
6. $y=x^2+4x$, $y=x+4$. Ж: $\frac{125}{6}$ (кв. бирл.).
7. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $y=x$, $y=-x\sqrt{3}$. Ж: $\frac{25\pi}{24}$ (кв. бирл.) .
8. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$. Ж: $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ (кв. бирл.) .

8- мустақил иш

Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y=-x^2$, $x+y+2=0$. Ж: 4,5 (кв. бирл.).
2. $xy=20$, $x^2+y^2=4$ (I чорак). Ж: $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41}+$ $+20\ln 0{,}8$ (кв. бирл.).
3. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Ж: $\frac{3}{8}\pi a^2$ (кв. бирл.).
4. $x=2t$, $y=4t^2-6t$ ва $y=0$. Ж: $\frac{9}{2}$ (кв. бирл.).
5. $r=a\sin 3\varphi$ (битта ҳалқа). Ж: $\frac{\pi a^2}{12}$ (кв. бирл.).
6. $r=a\cos\varphi$, $r=2a\cos\varphi$. Ж: $\frac{3}{2}\pi a^2$ (кв. бирл.).

9- §. Эгри чнзиқ ёйлари узунликларини ҳисоблаш

Агар тўғри бурчакли координаталарда $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада силлиқ (яъни $y'=f'(x)$ ҳосила узлуксиз) бўлса, у ҳолда бу эгри чизиқ мос ёйининг узунлиги

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Эгри чизиқ

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, бу эгри чизнқнинг $t\in[t_1, t_2]$ параметрнинг моиотон ўзгаришига мос ёйининг узунлиги

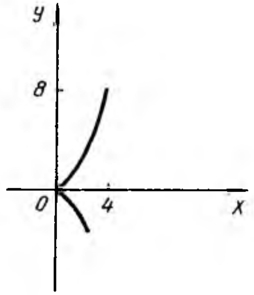
$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

формула билан ҳисобланади.

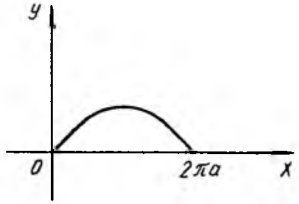
Агар силлиқ эгри чизиқ кутб координаталарда $r=r(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда ёй узунлиги

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

формула билан ҳисобланади.



34- шакл



35- шакл

1- мисол. $y^2=x^3$ ярим кубик параболанинг координаталар бошидан $A(4, 8)$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

Ечиш. Аввал шаклни чизамиз (34- шакл). Парабола тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$y=x^{\frac{3}{2}},\ y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Формулага кўра:

$$l=\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$$
$$=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\ \text{(узун. бирл.)}.$$

2- мисол. Битта циклоида узунлигини топинг:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Ечиш. Циклоиданинг барча аркаси бир хил, қайси арка бўйлаб t параметр 0 дан 2π гача ўзгарса, ўша аркани оламиз (35- шакл):

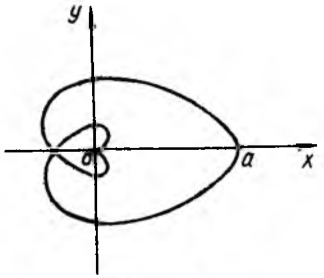
$$x'=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t.$$

Шу сабабли:

$$l=\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\;dt=a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$
$$=2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a\ \text{(узун. бирл.)}.$$

3- мисол. $r=a\sin^4\frac{\varphi}{4}$ ёпиқ эгри чизиқнинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган функция жуфт функция. Шу сабабли берилган эгри чизиқ қутб ўқига нисбатан симметрик. Нуқта бутун эгри



36- шакл

чизиқни φ 0 дан 4π гача ўзгарганда чизади, шунга кўра эгри чизиқнинг ярми φ 0 дан 2π гача ўзгарганда чизилади (36- шакл). $r'=a\sin^3\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{4}{\varphi}$. Демак,

$$\frac{l}{2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^8\frac{\varphi}{4}+a^2\sin^6\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}d\varphi=-4a\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\varphi}{4}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)=$$

$$=-4a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)=-4a\left(\cos\frac{\varphi}{4}-\frac{\cos^3\frac{\varphi}{4}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=4a\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}a.$$ Демак, $l=\frac{16}{3}a$ (узун. бирл.).

9- дарсхона топшириғи

Эгри чизиқлар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y=\ln\sin x$, $x=\frac{\pi}{3}$ дан $x=\frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{1}{2}\ln 3$ (узун. бирл.).
2. $y=\frac{2}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари орасидаги. Ж: $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$ (узун. бирл.).
3. $x=\frac{1}{3}t^3-t$, $y=t^2+2$, $t=0$ дан $t=3$ гача. Ж: 12 (узун. бирл.).
4. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\cdot\sin t$, $t=0$ дан $t=\ln\pi$ гача. Ж: $\sqrt{2}$ $(\pi-1)$ (узун. бирл.).
5. $r=\varphi^2$, $\varphi=0$ дан $\varphi=\pi$ гача. Ж: $[(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8]\cdot\frac{1}{3}$ (узун. бирл.).
6. $r=a\sin\theta$. Ж: πa (узун. бирл.).

9- мустақил иш

Эгри чизиқлар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$ дан $x=1$ гача. Ж: 0,5 $[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$(узун. бирл.).
2. $y=1-\ln\cos x$, $x=0$ дан $x=\frac{\pi}{6}$ гача. Ж: $\frac{1}{2}\ln 3$ (узун. бирл.).
3. $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$, $t=0$ дан $t=\frac{\pi}{2}$ гача. Ж: 5π (узун. бирл.).
4. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$. Ж: $16a$ (узун. бирл.).
5. $r=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $\varphi=0$ дан $\varphi=\frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{a}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$ (узун. бирл.).
6. $r=1-\cos\varphi$. Ж: 8 (узун. бирл.).

10- §. Ҳажмларни ҳисоблаш

6.10.1. Агар $S(x)$ юз жисмнинг Ox ўққа перпендикуляр текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган кесими бўлиб, $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция бўлса, жисмнинг ҳажми

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.2. $y=f(x)$ эгри чизиқ ва $x=a$, $x=b$, $y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция Ox ўқи атрофида айлантирилса, у ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

формула билан ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқи атрофида айлантирилса, у ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V=2\pi\int_a^b xydx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.3. Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ (буида $f_1(x)\geqslant f_2(x)$) эгри чизиқлар ҳамда $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқ атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V=2\pi\int_a^b x(y_2-y_1)\,dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

6.10.4. Агар эгри чизиқли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=\alpha$ тўғри чизиқлар ва Oy ўқи билан чегараланса, бу фигуранинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V=\pi\int_c^d x^2dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг мос ҳажми

$$V=2\pi\int_c^d xydy$$

формула бўйича аниқланади.

6.10.5. Агар $x_1=f_1(y)$ ва $x_2=f_2(y)$ (бунда $x_2\geqslant x_1\geqslant 0$) эгри чизиқлар ва $y=c$, $y=d$ тўғри чизиқлар билан чегаралаиган фигура Oy ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V=\pi\int_c^d (x_2^2-x_1^2)\,dy$$

формула бўйича топилади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг мос ҳажми ушбуга тенг бўлади:

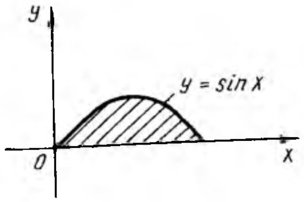
$$V=2\pi\int_c^d y(x_2-x_1)\,dy\,.$$

6.10.6. Агар эгри чизиқ параметрик ёки кутб координаталарда берилса, у ҳолда келтирилган формулаларда мос ўринга қўйишларни бажариш керак бўлади.

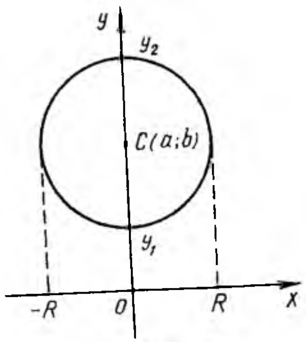
1-мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ҳажмини топинг.

Ечиш. Эллипсоиднинг Ox ўққа перпендикуляр бирор текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимининг ярим ўқлари

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad\text{ва}\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$



37- шакл



38- шакл

бўлган

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

эллипсдир. Демак, кесим юзи (8- §, 4- мисол):

$$S(x)=\pi b_1c_1=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

бунда x ўзгарувчи $-a$ дан a гача ўзгаради. Шунга кўра эллипсоиднинг ҳажми ушбуга тенг:

$$V=\int_{-a}^{a}S'(x)\,dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi bc\left[\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)-\left(-a+\frac{a^3}{3a^2}\right)\right]=\frac{4}{3}\pi abc\ \text{(куб бирл.)}\,.$$

2- мисол. $y=\sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлқини ва Ox ўқнинг $[0,\ \pi]$ кесмаси билан чегараланган фигуранинг а) Ox ўқи атрофида ва б) Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини ҳисобланг (37- шакл).

Ечиш. а) $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^\pi \sin^2xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos2x)\,dx=$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2}(\pi)=\frac{\pi^2}{2}\ \text{(куб бирл.)}\,.$$

б) $V=2\pi\int\limits_0^{\pi} xydx=2\pi\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin xdx=$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin xdx,\ v=-\cos x\end{matrix}\right\}=2\pi\left(-x\cdot\cos x\,\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos xdx\right)=$$

$$=2\pi(-\pi\cos\pi+\sin x\,\Big|_0^{\pi})=2\pi^2(\text{куб. бирл.})\ .$$

3- мисол. $x^2+(y-b)^2\leqslant R^2(b>R)$ доиранинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган торнинг ҳажмини топинг (38- шакл).

Ечиш. $x^2+(y-b)^2=R^2$ айлана тенгламасидан:

$$y_1=b-\sqrt{R^2-x^2}\ ,$$
$$y_2=b+\sqrt{R^2-x^2}\ ,$$

Шунинг учун

$$V=\pi\int\limits_a^b(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int\limits_{-R}^{R}[(b+\sqrt{R^2-x^2})^2-(b-\sqrt{R^2-x^2})^2]dx=$$

$$=4\pi b\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left\{\begin{matrix} x=R\sin t, \\ \\ dx=R\cos tdt,\end{matrix}\ \ \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline -R & -\frac{\pi}{2} \\ \hline R & \frac{\pi}{2} \\ \hline\end{array}\right\}=$$

$$=4\pi b\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2t}\cdot R\cos tdt=$$

$$=4\pi bR^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2tdt=2\pi bR^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

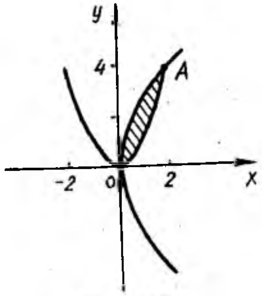
$$=2\pi bR^2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2bR^2(\text{куб. бирл.}).$$

4- мисол. $y=x^2$ ва $8x-y^2$ параболалар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг (39- шакл).

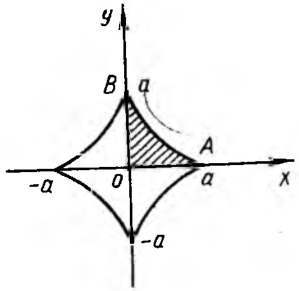
Ечиш.

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=8x\end{cases}$$

тенгламалар системасидан параболаларнинг кесишиш нуқталарини топамиз: $O(0,\ 0)$ ва $A(2,\ 4)$.



39- шакл



40- шакл

$x_2(y)=\sqrt{y}\geqslant x_1(y)=\frac{y^2}{8}$ га эгамиз, ўзгарувчи y 0 дан 4 гача ўзгаради. Демак,

$$V=\pi\int\limits_c^d(x_2^2-x_1^2)\,dy=\pi\int\limits_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{320}\right)\Big|_0^4=\pi\left(8-\frac{32}{10}\right)=\frac{24\pi}{5}(\text{куб бирл.})\ .$$

5- мисол. $\begin{cases} x=a\cos^3t, \\ y=a\sin^3t\end{cases}$ астроида билан чегараланган фигуранинг Ox ўқи атрофида айлантирилишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг (40- шакл).

Ечиш. Изланаётган ҳажм OAB фигурани айлантиришдан ҳосил бўлган ҳажмнинг иккиланганига тенг. Шунинг учун

$$V=2\pi\int\limits_0^a y^2dx\ .$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$V=2\pi\int\limits_0^a y^2dx=\left\{\begin{matrix} x=a\cos^3t \\ dx=-3a\cos^2t\cdot\sin tdt, \\ y'=a\sin^3t.\end{matrix}\ \ \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline a & 0 \\ \hline\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}a^2\sin^6t(-3a\cos^2t\sin t)\,dt=6\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7t\cos^2tdt=$$

$$=-6\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2t)^3\cos^2td(\cos t)=-6\pi a^3\left(\frac{1}{3}\cos^3t-\frac{3}{5}\cos^5t+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{7}\cos^7t-\frac{1}{9}\cos^9t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3(\text{куб бирл.}).$$

10- дарсхона топшириғи

1. $x=2$ ва $x=3$ текисликлар билан $x^2+y^2+z^2=16$ шардан киркилган шар қатламининг ҳажмини ҳисобланг: Ж: $\frac{29}{3}\pi$ (куб. бирл.)

2. Координата ўқлари ва $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ парабола билан чегараланган юзни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{\pi a^3}{15}$(куб бирл.) .

3. $y=\sin x$ синусоида ёйи, ординаталар ўқи ва $y=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$ (куб бирл.) .

4. $y=\frac{1}{4}x^2+2$ парабола ва $5x-8y+14=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{891\pi}{1280}$ (куб. бирл.) .

5. Ушбу $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоиданинг бир аркасини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $5a^3\pi^2$ (куб бирл.).

10- мустақил иш

1. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ ва $z=1$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\pi\sqrt{2}$ (куб бирл.).

2. а) $y=\frac{64}{x^2+16}$ ва $x^2=8y$, б) $y^2=x$ ва $x^2=y$ чизиқлар билан чегараланган фигураларни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: а) $\frac{16\pi}{5}(5\pi+8)$ (куб. бирл.);б) $0{,}3\pi$ (куб. бирл.) .

3. а) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; б) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: а) $\frac{64}{5}\pi$ (куб. бирл.); б) $\frac{64}{3}\pi$ (куб. бирл.) .

4. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган фигурани: а) Oy ўқи атрофида; б) фигуранинг симметрия ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: а) $6\pi^3a^3$(куб. бирл.); б) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$ (куб. бирл.) .

11- §. Хосмас интеграллар, яқинлашиши хосмас интегрални ҳисоблаш.

Интегралланиш чегаралари чексиз бўлган интеграллар ёки чегараланмаган функциялардан олинган интеграллар *хосмас интеграллар* дейилади:

6.11.1. $[a, +\infty)$ ораликда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциядан олинган интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

Агар шу лимит мавжуд бўлиб, чекли бўлса, хосмас интеграл *яқинлашувчи*, акс ҳолда хосмас интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=F(+\infty)-F(a), \text{ бунда } F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x) .$$

Қуйндаги интеграллар ҳам шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{N_1\to-\infty}\int_{N_1}^{b} f(x)\,dx+\lim_{N_2\to+\infty}\int_b^{N_2} f(x)\,dx .$$

1- мисол. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ хосмас интегрални ҳисобланг (бунда α — ўзгармас мусбат сон).

Ечиш. Таърифга кўра:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-\alpha x}dx=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right)\Big|_0^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha N}+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^{\alpha N}}\right)=\frac{1}{\alpha}.$$

Демак, берилган интеграл яқинлашувчи.

2-мисол. $\alpha>0$ нинг қандай қийматларида

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

интеграл яқинлашувчи, қандай қийматларида узоқлашувчи эканини аниқланг.

Ечиш. $\alpha=1$ деб фараз қиламиз, у ҳолда:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{dx}{x}=\lim_{N\to+\infty}\ln x\,\Big|_1^N=\lim_{N\to+\infty}\ln N=\infty\,.$$

Демак, берилган интеграл узоқлашувчи. Энди $\alpha\neq1$ деб фараз қиламиз, у ҳолда:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}\,\Big|_1^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\,(N^{1-\alpha}-1)\,.$$

Демак, $\alpha>1$ да

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$

яъни берилган интеграл яқинлашувчи, $0<\alpha<1$ да эса $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$, яъни берилган интеграл узоқлашувчи. Шундай қилиб, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ хосмас интеграл $\alpha>1$ да яқинлашувчи ва $0<\alpha\leqslant1$ да узоқлашувчи.

6.11.2. 2-мисолдаги интеграл интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини *таққослаш аломатларидан* фойдаланишда қўлланилади.

1. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар барча $x\geqslant a$ лар учун аниқланган ва $[a,\ +\infty)$ да интегралланувчи ҳамда барча $x\geqslant a$ лар учун $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ бўлса, у ҳолда

а) $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигидан $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи экани келиб чиқади, шу билан бирга

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\leqslant\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\,;$$

б) $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчанлигидан $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи экани келиб чиқади.

2. Агар $f(x)$ функция барча x лар учун аниқланган ва $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашади; бу ҳолда у *абсолют яқинлашувчи интеграл* дейилади, бунда

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)|dx\,.$$

3. Агар $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграли *шартли яқинлашувчи интеграл* дейилади.

3-мисол. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{3x^4+2x^2+1}$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $f(x)=\frac{1}{3x^4+2x^2+1}<\frac{1}{3x^4}<\frac{1}{x^4}=\varphi(x)$ $(x\geqslant1$ да) ва $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4}$ интеграл яқинлашувчи (2-мисол, $\alpha=4>1$) бўлгани учун берилган интеграл ҳам яқинлашувчи (таққослаш аломати асосида).

4-мисол. $\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Е ч и ш. $x \geqslant 1$ да $f(x)=e^{-x^2}<e^{-x}=\varphi(x)$ ва $\int\limits_1^{\infty} e^{-x}dx$ интеграл яқинлашувчи (1- мисол, $\alpha=1$) бўлгани сабабли берилган интеграл яқинлашувчи.

5- м и с о л. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x-\sin^2 x}$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Е ч и ш. $x \geqslant 1$ да $f(x)=\frac{1}{x-\sin^2 x}>\frac{1}{x}=\varphi(x)$ ва $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ интеграл узоқлашувчи (2- мисол, $\alpha=1$), шунга кўра $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x-\sin^2 x}$ интеграл узоқлашувчи.

6.11.3. $[a,\ b]$ оралиқда узлуксиз, b нуқтада узилишга эга $f(x)$ функциядан олинган хосмас интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

Агар бу лимит мавжуд бўлиб, у чекли бўлса хосмас интеграл *яқинлашувчи,* акс ҳолда хосмас интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

бунда $F(b)=\lim\limits_{x\to b} F(x)$.

Агар функция a нуқтада ёки $[a,\ b]$ оралиқнинг бирор ички c нуқтасида узилишга эга бўлса ҳам интеграл юқоридагига ўхшаш аниқланади:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx$$

ва

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx\,.$$

6- м и с о л. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ хосмас интегрални ҳисобланг:

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция $x=1$ нуқтада узилишга эга. Демак, таърифга кўра,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1-1+\varepsilon}-\sqrt{1-0}\right)=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)=2\,,$$

демак, берилган интеграл яқинлашувчи.

7- м и с о л. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (α — ўзгармас мусбат сон) хосмас интегралнинг яқинлашиш ва узоқлашиш шартларини топинг.

Е ч и ш. Интеграл остидаги фуикция $x=0$ нуқтада узилишга эга. Агар $\alpha=1$ бўлса, у ҳолда ушбуга эгамиз:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\,\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\infty\,,$$

яъни интеграл узоқлашувчи.

Агар $\alpha\neq1$ бўлса, у ҳолда:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right)\,.$$

Демак, $0<\alpha<1$ да қуйидагиларга эгамиз: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$, яъни интеграл яқинлашувчи; $\alpha>1$ да эса $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\infty$, яъни интеграл узоқлашувчи.

Шундай қилиб, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ хосмас интеграл $0<\alpha<1$ да яқинлашувчи, $\alpha\geqslant1$ да узоқлашувчи.

6.11.4. Охирги мисол натижасидан *таққослаш аломатларида* фойдаланилади:

1. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $a\leqslant x<b$ оралиқда аниқланган ҳамда $[a,\ b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ кесмада интегралланувчи ва агар $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ бўлса, у ҳолда:

а) $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигидан $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчанлиги келиб чиқади, бунда $\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant$ $\leqslant\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$;

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчанлигидан $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2. Агар $f(x)$ функция $[a,\ b)$ ораликда аниқланган ва $[a,\ b-\varepsilon]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигидан $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчанлиги келиб чиқади. Бу ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл *абсолют яқинлашувчи интеграл* дейилади.

3. Агар $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи, $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл *шартли яқинлашувчи интеграл* дейилади.

8-мисол. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2x^3}$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция $x=0$ нуқтада узилишга эга.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2x^3}<\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\varphi(x)$$

ва $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ интеграл яқинлашади (7-мисол, $\alpha=\frac{1}{3}<1$), демак, берилган интеграл ҳам яқинлашади.

11-дарсхона топшириғи

I. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоқлашувчи эканини аниқланг.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$. Ж: $\frac{\pi^2}{8}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$. Ж: $\frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Ж: $\frac{\pi}{6}$.

4. $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Ж: 1.

5. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Ж: узоқлашади.

6. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$. Ж: π.

II. Интегралларнинг яқинлашувчанлигини текширинг:

7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. Ж: узоқлашувчи.

8. $\int\limits_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$. Ж: яқинлашувчи.

9. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$. Ж: узоқлашувчи.

10. $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$. Ж: яқинлашувчи.

11-мустақил иш

1. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоқлашувчанлигини аниқланг:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. Ж: $1-\ln 2$.

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Ж: узоқлашувчи.

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$. Ж: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

г) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. Ж: $\frac{8}{3}$.

д) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. Ж: $-\frac{2}{e}$.

е) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$. Ж: узоқлашувчи

2. Интегралларнинг яқинлашувчанлигини текширинг:

а) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ Ж: узоқлашувчи.

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Ж: яқинлашувчи.

7- назорат иши

1. Аниқмас интегрални топинг:

1.1. $\int x^3\ln xdx$.

1.2. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

1.3. $\int x\mathrm{arctg}xdx$.

1.4. $\int \sqrt{x}\ln xdx$.

1.5. $\int x^2e^{-2x}dx$.

1.6. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

1.7. $\int x^2\cos 5xdx$.

1.8. $\int \ln^2 xdx$.

1.9. $\int x\arcsin xdx$.

1.10. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$.

1.11. $\int \ln(4x^2+1)dx$.

1.12. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

1.13. $\int x\sin^2 xdx$.

1.14. $\int x\cdot\mathrm{tg}^2xdx$.

1.15. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

1.16. $\int \frac{x\sin xdx}{\cos^2 x}$.

1.17. $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$.

1.18. $\int \frac{\ln^2 xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

1.19. $\int x\cdot\ln^2 xdx$.

1.20. $\int x^3\ln^2 xdx$.

1.21. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

1.22. $\int (x^2+2)e^{\frac{x}{2}}dx$.

1.23. $\int (x+3)^2\sin 2xdx$.

1.24. $\int \ln(x^2+4)dx$.

1.25. $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx$.

1.26. $\int x\cdot\arcsin\frac{1}{x}dx$.

1.27. $\int x\cdot 3^{\frac{x}{2}}dx$.

1.28. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-1}}dx$.

1.29. $\int x^3\cdot\mathrm{arctg}xdx$.

1.30. $\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}dx$.

2. Аниқмас интегрални топинг:

2.1. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$.

2.2. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

2.3. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$.

2.4. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$.

2.5. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$.

2.6. $\int \frac{x+1}{3+4x-x^2}dx$.

2.7. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$.

2.8. $\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx$.

2.9. $\int \frac{8x+3}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

2.10. $\int \frac{x-7}{x^2+4x+13}dx$.

2.11. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$.

2.12. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+6x+1}}dx$.

2.13. $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+13}dx$.

2.14. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3-x^2+2x}}dx$.

2.15. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$.

2.16. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{15-4x^2+4x}}dx$.

2.17. $\int \frac{4x-3}{5x^2+6x+18}dx$.

2.18. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

2.19. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$.

2.20. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

2.21. $\int \frac{x-8}{5-4x+4x^2}dx$.

2.22. $\int \frac{x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx$.

2.23. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$.

2.24. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}dx$.

2.25. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$.

2.26. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$.

2.27. $\int \frac{2x-5}{x^2+6x+13}dx$.

2.28. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$.

2.29. $\int \frac{2x+3}{15-4x^2+4x}dx$.

2.30. $\int \frac{x-5}{\sqrt{6+4x-x^2}}dx$.

3. Аниқмас интегрални топинг:

3.1. $\int\frac{dx}{4x^3+x}$.

3.2. $\int\frac{x-1}{x^3+1}dx$.

3.3. $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

3.4. $\int\frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$.

3.5. $\int\frac{x^2dx}{x^4-16}$.

3.6. $\int\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$.

3.7. $\int\frac{x-2}{x^4+4x^2}dx$.

3.8. $\int\frac{2x^2-3x-12}{x^3+x^2-6x}dx$.

3.9. $\int\frac{x^4dx}{x^4+6x^2+8}$.

3.10. $\int\frac{6x^4-1}{2x^3-x+1}dx$.

3.11. $\int\frac{x-1}{2x^3+3x^2+x}dx$.

3.12. $\int\frac{x+4}{x^3+6x^2+9x}dx$.

3.13. $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$.

3.14. $\int\frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}$.

3.15. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x+8}dx$.

3.16. $\int\frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.

3.17. $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}$.

3.18. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$.

3.19. $\int\frac{dx}{x^4-x^3+x^2-x}$.

3.20. $\int\frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}$.

3.21. $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

3.22. $\int\frac{x-1}{x^3+x}dx$.

3.23. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$.

3.24. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x+8}dx$.

3.25. $\int\frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$.

3.26. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

3.27. $\int\frac{dx}{4x^3-x}$.

3.28. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

3.29. $\int\frac{dx}{x^3-8}$.

3.30. $\int\frac{x+5}{x^4+2x^3+x^2}dx$.

4. Аниқмас интегрални топинг:

4.1. $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

4.2. $\int\frac{\sqrt[5]{x}-1}{1+\sqrt{x}}dx$.

4.3. $\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}-1}dx$.

4.4. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx$.

4.5. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

4.6. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

4.7. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+2}$.

4.8. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

4.9. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

4.10. $\int\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$.

4.11. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$.

4.12. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

4.13. $\int\frac{xdx}{(2+5x)\sqrt{2+5x}}$.

4.14. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{5x-1}}$.

4.15. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

4.16. $\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

4.17. $\int\frac{dx}{3\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[3]{x^2}}$.

4.18. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

4.19. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x^3}-1)}$.

4.20. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}(1+\sqrt[3]{x-2})}$.

4.21. $\int\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

4.22. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

4.23. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

4.24. $\int\frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$.

4.25. $\int\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

4.26. $\int\frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$.

4.27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}(1+\sqrt[3]{x+3})}$.

4.28. $\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

4.29. $\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$.

4.30. $\int\frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+4)}dx$.

5. Аниқмас интегрални топинг:

5.1. $\int\frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$.

5.2. $\int\frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

5.3. $\int\frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

5.4. $\int\frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$.

5.5. $\int\frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

5.6. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

5.7. $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^{2}}\,dx$.

5.8. $\int \frac{8+\mathrm{tg}x}{18\sin^{2}x+2\cos^{2}x}dx$.

5.9. $\int \frac{1+\mathrm{ctg}x}{(\sin x+2\cos x)^{2}}\,dx$.

5.10. $\int \frac{6+\mathrm{tg}x}{9\sin^{2}x+4\cos^{2}x}dx$.

5.11. $\int \frac{5\mathrm{tg}x+2}{2\sin 2x+5}\,dx$.

5.12. $\int \frac{36dx}{(6-\mathrm{tg}x)\sin 2x}$.

5.13. $\int \frac{\mathrm{tg}^{2}x}{4+3\cos 2x}\,dx$.

5.14. $\int \frac{\sin^{3}x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

5.15. $\int \frac{\sin^{3}x}{\cos^{4}x}\,dx$.

5.16. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^{3}x}\,dx$.

5.17. $\int \frac{dx}{\sin^{3}x}$.

5.18. $\int \sin^{4}\frac{x}{2}dx$.

5.19. $\int \cos^{5}xdx$.

5.20. $\int \cos^{2}x\sin^{4}xdx$.

5.21. $\int \mathrm{ctg}^{3}xdx$.

5.22. $\int \mathrm{tg}^{4}xdx$.

5.23. $\int \cos^{4}x\sin^{2}xdx$.

5.24. $\int \frac{dx}{\sin^{6}x}$.

5.25. $\int \sin^{6}xdx$.

5.26. $\int \sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3xdx$.

5.27 $\int \frac{\mathrm{tg}x+2}{\sin^{2}x+2\cos^{2}x-3}dx$.

5.28. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

5.29. $\int \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin 2x}$.

5.30. $\int \frac{\cos xdx}{(1-\cos x)^{3}}$.

7- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1.1. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^{3}-1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx$.

1.2. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{8x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^{2}}\,dx$.

1.3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x\cdot\ln\cos xdx$.

1.4. $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^{2}+\ln x^{2}}{x}dx$.

1.5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{3}dx}{(x^{2}+1)^{2}}$.

1.6. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^{2}+1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx$.

1.7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{3}dx}{x^{2}+1}$.

1.8. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctg}x)^{4}}{1+x^{2}}\,dx$.

1.9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^{4}+1}$.

1.10. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{tg}(x+1)}{\cos^{2}(x+1)}\,dx$.

1.11. $\int\limits_{e+1}^{e^{2}+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$.

1.12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{3}dx}{\sqrt{4-x^{8}}}$.

1.13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{3\sin^{2}x}\sin 2xdx$.

1.14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{3}x\sqrt{\sin x}\,dx$.

1.15. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2^{3\mathrm{arctg}2x}dx}{1+4x^{2}}$.

1.16. $\int\limits_{e}^{e^{2}} \frac{\ln^{3}x+3}{x\ln x}\,dx$.

1.17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^{2}x+2}}$

1.18. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{3}dx}{1+x^{8}}$.

1.19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2}x(2\mathrm{tg}x+1)}$.

1.20. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^{2}x}}\,dx$.

1.21. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}\,dx$.

1.22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{3x}dx}{16+e^{6x}}$.

1.23. $\int\limits_{0}^{1} x^{2}e^{-2x^{3}}dx$.

1.24. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^{4}}}$.

1.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2^{x}dx}{\sqrt{4+4^{x}}}$.

1.26. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{x}dx}{e^{x}+e^{-x}}$.

1.27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{3}dx}{\cos^{2}x^{4}}$.

1.28. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}\,dx$.

1.29. $\int\limits_{\frac{\pi^{2}}{9}}^{\pi^{2}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1.30. $\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{xdx}{\sin^{2}x^{2}}$.

2. Аниқ интегрални ҳисобланг:

2.1. $\int\limits_{0}^{\pi} (x^{2}-3x+2)\sin xdx$.

2.2. $\int\limits_{4}^{0} (x^{2}+7x+12)\cos xdx$.

2.3. $\int\limits_{2}^{3}(x-1)^{3}\ln^{2}(x-1)\,dx.$

2.4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2}-5x+6)\sin3x\,dx.$

2.5. $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^{2}+4x+7)\cos2x\,dx.$

2.6. $\int\limits_{-1}^{1}x^{2}e^{-\frac{x}{2}}dx.$

2.7. $\int\limits_{-3}^{0}(x^{2}+6x+9)\sin2x\,dx.$

2.8. $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^{2}+9x+11)\cos3x\,dx.$

2.9. $\int\limits_{1}^{2}x\ln^{2}x\,dx.$

2.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-5x^{2})\sin x\,dx.$

2.11. $\int\limits_{0}^{\pi}(8x^{2}+16x+17)\cos4x\,dx.$

2.12. $\int\limits_{0}^{1}x^{2}e^{3x}dx.$

2.13. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3}(3x-x^{2})\sin2x\,dx.$

2.14. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^{2}+5)\cos2x\,dx.$

2.15. $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)^{3}\ln^{2}(x+2)\,dx.$

2.16. $\int\limits_{0}^{1}x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

2.17. $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^{2})\cos4x\,dx.$

2.18. $\int\limits_{-2}^{0}(x^{2}+2)e^{\frac{x}{2}}dx.$

2.19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}x^{2}\sin4x\,dx.$

2.20. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos x\,dx.$

2.21. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx.$

2.22. $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\ln^{2}(x+1)\,dx.$

2.23. $\int\limits_{0}^{3}(x^{2}-3x)\sin2x\,dx.$

2.24. $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^{2}\cos3x\,dx.$

2.25. $\int\limits_{1}^{e}\sqrt{x}\cdot\ln^{2}x\,dx.$

2.26. $\int\limits_{1}^{1}\arcsin(1-x)\,dx.$

2.27. $\int\limits_{-1}^{0}(x^{2}+2x+1)\sin3x\,dx.$

2.28. $\int\limits_{-2}^{0}(x^{2}+5x+6)\cos2x\,dx.$

2.29. $\int\limits_{1}^{8}\frac{\ln^{2}x\,dx}{\sqrt[3]{x^{2}}}.$

2.30. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{9}}\frac{x\,dx}{\cos^{2}3x}.$

3. Аниқ интегрални ҳисобланг:

3.1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arc\,tg}3}\frac{1+\mathrm{ctg}x}{(\sin x+2\cos x)^{2}}dx.$

3.2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}.$

3.3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^{8}x\,dx$

3.4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{6\sin^{2}x}{3\cos2x-4}dx.$

3.5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^{2}}dx.$

3.6. $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^{6}\frac{x}{4}\cos^{2}\frac{x}{4}dx.$

3.7. $\int\limits_{0}^{\mathrm{arc\,tg}2}\frac{12+\mathrm{tg}x}{3\sin^{2}x+12\cos^{2}x}dx.$

3.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}.$

3.9. $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^{2}x\cos^{6}x\,dx$

3.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(7+3\mathrm{tg}x)\,dx}{(\sin x+2\cos x)^{2}}.$

3.11. $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx.$

3.12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{5}x\,dx.$

3.13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\mathrm{tg}x+2}{2\sin2x+5}dx.$

3.14. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}.$

3.15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4-7\mathrm{tg}x}{2+3\mathrm{tg}x}dx.$

3.16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{3}2x\,dx.$

3.17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx.$

3.18. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^{3}x\,dx.$

3.19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}^{2}x}{4+3\cos2x}dx.$

3.20. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}.$

3.21. $\int\limits_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4}\, dx.$

3.22. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\, dx.$

3.23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}.$

3.24. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4}\, dx.$

3.25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg}x-22}{4-\operatorname{tg}x}\, dx.$

3.26. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}.$

3.27. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x\, dx.$

3.28. $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} \frac{8+\operatorname{tg}x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\, dx.$

3.29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}.$

3.30. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x\, dx.$

4. Аниқ интегрални ҳисоблаҥг:

4.1. $\int\limits_{\frac{-5}{3}}^{1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}\, dx.$

4.2. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx.$

4.3. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\, dx.$

4.4. $\int\limits_1^2 \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\, dx.$

4.5. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx.$

4.6. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$

4.7. $\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\, dx.$

4.8. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$

4.9. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

4.10. $\int\limits_1^{64} \frac{(2+\sqrt[3]{x})\,dx}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}.$

4.11. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

4.12. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\, dx.$

4.13. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\, dx.$

4.14. $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}.$

4.15. $\int\limits_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

4.16. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\, dx.$

4.17. $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\, dx.$

4.18. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx.$

4.19. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

4.20. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}.$

4.21. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

4.22. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

4.23. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

4.24. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$

4.25. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$

4.26. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}.$

4.27. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$

4.28. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

4.29. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

4.30. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx.$

5. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

5.1. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5};$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\, dx.$

5.2. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}\, dx;$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}.$

5.3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}\, dx;$

б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$

5.4. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}};$

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$

5.5. а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

б) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

5.7. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$;

б) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

5.9. а) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin x\,dx$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

5.11. а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

5.13. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

5.15. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

5.17. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

5.6. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{4x^2+4x+5}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

5.8. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2x)}$;

б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

5.10. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2-4x}$;

б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

5.12. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$;

б) $\int\limits_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}\;x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

5.14. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(2x-1)^2}$;

5.16. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{6x^2-5x+1}$;

б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(4-x^2)^3}}$.

5.18. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4-1}}$;

б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

5.19. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{1-x^4}$.

5.21. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x\,dx}{16x^4-1}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$.

5.23. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

5.25. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$.

5.27. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2-4x+5}$;

б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}$.

5.29. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{16x^4+1}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}x^2\ln x\,dx$.

б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

5.20. а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

5.22. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

5.24. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

5.26. а) $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}}\frac{dx}{(5x-1)^2}$.

5.28. а) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-3x}x\,dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

5.30. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{16x^4+1}$;

б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

6. Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

6.1. $x=4-(y-1)^2,\ x=y^2-4y-3.$

6.2. $x=2\sqrt{2}\cos t,\ y=3\sqrt{2}\sin t\ (y\geqslant 3).$

6.3. $r=6\cos 3\varphi,\ r\geqslant 3.$

6.4. $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

6.5. $x=8\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t\ (x\geqslant 3\sqrt{3}).$

6.6. $r=\cos\varphi,\ r=\sin\varphi\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

6.7. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$

6.8. $x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t)\ (0<x<8\pi,\ y\geqslant 4).$

6.9. $r=4\cos 3\varphi.$

6.10. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

6.11. $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=4\sqrt{2}\sin t\ (y\geqslant 4).$

6.12. $r=2(1-\cos\varphi),$

6.13. $y=(x-1)^2,\ y^2=x-1.$

6.14. $x=24\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t\ (x\geqslant 9\sqrt{3}).$

6.15. $r^2=2\sin 2\varphi.$

6.16. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$

6.17. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t\ (0<x<2\pi,\ y\geqslant 1).$

6.18. $r=3\sin 4\varphi.$

6.19. $xy=4,\ x-y=5.$

6.20. $x=6\cos t,\ y=4\sin t.$

6.21. $r=2(1+\cos\varphi).$

6.22. $y^2=16-8x,\ y^2=24x+48.$

6.23. $x=32\cos^3 t,\ y=\sin^3 t\ (x\geqslant 4).$

6.24. $r=2\sin 3\varphi.$

6.25. $y=x^2-3x,\ 3x+y-4=0.$

6.26. $x=6(t-\sin t),\ y=6(1-\cos t)\ (0<x<12\pi,\ y\geqslant 9).$

6.27. $r=4\sin 3\varphi\,(r\geqslant 2).$

6.28. $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=\frac{x^2}{2}.$

6.29. $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t.$

6.30. $r=\cos 2\varphi.$

7. Берилган чизиқ ёйининг узунлигини ҳисобланг:

7.1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{7}{9}.$

7.2. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$

7.3. $r=1-\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant-\frac{\pi}{6}.$

7.4. $y=1-\ln\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}.$

7.5. $x=2(t-\sin t),\ y=2\ (1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$

7.6. $r=8(1-\cos\varphi),\ -\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant 0.$

7.7. $x=e^t(\cos t+\sin t),\ y=e^t(\cos t-\sin t),\ 0\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}.$

7.8. $y=e^x+13,\ \ln\sqrt{15}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{24}.$

7.9. $r=3e^{\frac{3\pi}{4}},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$

7.10. $x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t),\ \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}.$

7.11. $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

7.12. $r=8\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}.$

7.13. $x=10\cos^3 t,\ y=10\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$

7.14. $y=\frac{1}{2}(1-e^x-e^{-x}),\ 0\leqslant x\leqslant 3.$

7.15. $r=4\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{3}{4}.$

7.16. $x=5\cos^2 t,\ y=5\sin^2 t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$

7.17. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{15}.$

7.18. $r=7(1-\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}.$

7.19. $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ \pi\leqslant t\leqslant 2\pi.$

7.20. $y=-\ln\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}.$

7.21. $r=2(1-\cos\varphi),\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant-\frac{\pi}{2}.$

7.22. $x=3(2\cos t-\cos 2t),\ y=3(2\sin t-\sin 2t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

7.23. $y=2-e^x,\ \ln\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{8}.$

7.24. $r=4e^{\frac{4\varphi}{3}},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}.$

7.25. $x=8\cos^3 t,\ y=8\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{6}.$

7.26. $y=1-\ln(x^2-1),\ 3\leqslant x\leqslant 4.$

7.27. $r=6(1+\sin\varphi), \ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant 0.$

7.28. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{3}.$

7.29. $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}, \ 0\leqslant x\leqslant 2.$

7.30. $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}.$

8. Функциялар графиклари билан чегараланган фигурани берилган координата ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг:

8.1. $y=(x-1)^2, \ x=0, \ x=2, \ y=0 \ (Oy).$
8.2. $y=-x^2+5x-6, \ y=0 \ (Ox).$
8.3. $x=3\cos^2 t, \ y=4\sin^2 t, \ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right) (Oy).$
8.4. $y^2=(x-1)^3, \ x=2 \ (Ox).$
8.5. $y=x^3, \ y=x \ (Oy).$
8.6. $x=6(t-\sin t), \ y=6(1-\cos t) \ (Ox).$
8.7. $y=x^2-2x+1, \ x=2, \ y=0 \ (Oy).$
8.8. $y=2x-x^2, \ y=0, \ 2x^2-4x+y=0 \ (Ox).$
8.9. $x=2\cos t, \ y=5\sin t \ (Oy).$
8.10. $y=3\sin x, \ y=\sin x \ (0\leqslant x\leqslant\pi) \ (Ox).$
8.11. $y=\arcsin x, \ y=\arccos x, \ y=0 \ (Oy).$
8.12. $x=7\cos^3 t, \ y=7\sin^3 t \ (Ox).$
8.13. $y=(x-1)^2, \ y=1 \ (Oy).$
8.14. $x=\sqrt[3]{y-2}, \ x=1, \ y=1 \ (Ox).$
8.15. $x=\sqrt{3}\cos t, \ y=2\sin t \ (Oy).$
8.16. $y=2x-x^2, \ y=-x+2 \ (Ox).$
8.17. $y=\sqrt{x-1}, \ y=0, \ y=1, \ x=0{,}5 \ (Oy).$
8.18. $x=2(t-\sin t), \ y=2\ (1-\cos t) \ (Ox).$
8.19. $y=x^2+1, \ y=x, \ x=0, \ x=1 \ (Oy).$
8.20. $y=e^{1-x}, \ y=0, \ x=0, \ x=1 \ (Ox).$
8.21. $x=2\cos t, \ y=6\sin t \ (Oy).$
8.22. $y^2=4x, \ x^2=4y \ (Ox).$
8.23. $y=2-\frac{x^2}{2}, \ x+y=2 \ (Oy).$

8.24. $y=\cos^3 t, \ y=\sin^3 t \ (Ox).$
8.25. $y=5\cos x, \ y=\cos x, \ x\geqslant 0 \ (Ox).$
8.26. $y=\ln x, \ x=2, \ y=0 \ (Oy).$
8.27. $x=3\cos t, \ y=8\sin t \ (Oy).$
8.28. $y=x^2, \ y^2-x=0 \ (Ox).$
8.29. $y=\arccos\frac{x}{5}, y=\arccos\frac{x}{3}, \ y=0 \ (Oy).$
8.30. $y=e^x, \ x=0, \ y=0, \ x=1 \ (Ox).$

7-боб

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари ва тўлиқ дифференциали

7.1.1. Агар бирор D тўпламнинг ҳар бир (x, y) ҳақиқий сонлар жуфтлиги бирор қоида билан E тўпламдаги ягона z ҳақиқий сонга мос қўйилган бўлса, у ҳолда D тўпламда икки ўзгарувчининг функцияси z аниқланган дейилади ва қуйидаги кўринишларда белгиланади:

$$z=f(x, y),\ z=z(x, y) \text{ ва ҳ. к.}$$

D тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан $z=f(x, y)$ функциянинг $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасидаги тасвири (функциянинг графиги) бирор сиртдан иборатдир.

Исталган чекли сондаги ўзгарувчининг функцияси ҳам юқоридаги каби аниқланади.

1-мисол. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция $4-x^2-y^2\geqslant0$, яъни $x^2+y^2\leqslant 4$ шартда ҳақиқий қийматлар қабул қилади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси маркази координаталар бошида бўлган, радиуси 2 га тенг доирадан иборат.

2-мисол. $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция $1-x^2-y^2-z^2>0$, яъни $x^2+y^2+z^2<1$ шартда аниқланган. Бинобарин, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси маркази координаталар бошида, радиуси 1 га тенг шар бўлади, буида шар сирти (сфера) аниқланиш соҳасига кирмайди.

7.1.2. Агар x ўзгарувчига бирор Δx орттирма бериб, y ни ўзгаришсиз қолдирсак, у ҳолда $z=f(x, y)$ функция $\Delta_x z$ орттирма олади, бу орттирма z функциянинг x ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси дейилади:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y).$$

Худди шундай, y ўзгарувчи Δy орттирма олиб, x ўзгаришсиз қолса, у ҳолда z функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Агар $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ чекли лимит мавжуд бўлса, у $z=f(x, y)$ функциянинг эркли ўзгарувчи x бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial x}$ ёки $f'_x(x, y)$ билан белгиланади. Демак,

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y).$$

Агар $\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ чекли лимит мавжуд бўлса, у $z=f(x, y)$ функциянинг эркли ўзгарувчи y бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $f'_y(x, y)$ билан белгиланади.

Хусусий ҳосилалар учун бир ўзгарувчи функциясини дифференциаллашнинг қоида ва формулалари сақланади.

Исталган чекли сондаги эркли ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам юқоридагидек аниқланади.

3-мисол. $z=\arcsin\frac{x}{y}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. y ни ўзгармас деб, x бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Энди x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

4-мисол. $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}(-2z)=-\frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

7.1.3. Агар x ва y ўзгарувчилар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олса, у ҳолда $z=f(x, y)$ функция $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ тўлиқ орттирма олади. Бу тўлиқ орттирманинг Δx ва Δy ларга нисбатан чизиқли бўлган бош қисми функциянинг тўлиқ дифференциали дейилади ва dz орқали белгиланади.

$z=f(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

бу ерда $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Тўлиқ дифференциалдан кўпинча функциянинг тақрибий қийматларини ҳисоблаш учун фойдаланилади, чунки $\Delta z\approx dz$, яъни

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x, y)+\Delta z.$$

5-мисол. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топинг.

Ечиш. Дастлаб хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тўлиқ дифференциал формуласига кўра:

$$dz=\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

6-мисол. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Демак, тўлиқ дифференциал:

$$dz=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

7-мисол. $1{,}02^{3{,}01}$ ни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $z=x^y$ функцияни қараймиз. Унинг $x=1$ ва $y=3$ даги қиймати $z=1^3=1$ га тенг.

$z=x^y$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топамиз:

$$dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y.$$

$x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$ ва $\Delta y=0{,}01$. Шунинг учун $dz=3\cdot1^2\cdot0{,}02+1^3\ln1\cdot0{,}01=0{,}06$ бўлади. У ҳолда изланаётган қиймат:

$$(1{,}02)^{3{,}01}\approx f(x, y)+dz=1+0{,}06=1{,}06.$$

1-дарсхона топшириғи

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$; б) $z=\arcsin(x+y)$;

в) $z=\ln(y^2-2x+4)$; г) $u=\frac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z=x^3+y^3-3axy$; б) $z=\frac{x-y}{x+y}$;

в) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$; г) $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

д) $z=\ln\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right|$; е) $z=\ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$;

ж) $u=z^{xy}$; з) $u=(xy)^z$.

3. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг:

а) $z=\ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}$; б) $z=\ln(x^2+y^2)$;

в) $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; г) $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{xy}{z^2}$.

4. Тақрибий ҳисобланг:

а) $\ln(0{,}09^3+0{,}99^3)$; б) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

Ж: а) $-0{,}03$; б) 4, 998.

1-мустақил иш

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг.

а) $z=\ln(y-x)$; б) $z=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$;

в) $r = \ln\sqrt{\frac{y}{x}}$; г) $u = \sqrt{x+y+z}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$; б) $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{1+x^2}$;

в) $z = y\cdot x^y$; г) $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$;

д) $u = x + \frac{x-y}{y-z}$.

3. Функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг:

а) $z = \ln\cos\frac{x}{y}$; б) $z = \ln(y + \sqrt{x^2+y^2})$; в) $u = \frac{z}{x^2+y^2}$.

4. Тақрибий ҳисобланг:

а) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$; б) $\sin 28°\cdot\cos 61°$.

Ж: а) 2,95; б) 0,227.

2-§. Мураккаб функцияиинг ҳосилалари. Ошкормас функциянинг ҳосилаларн

7.2.1. Агар $z=f(x, y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $z=f(x(t), y(t))$ мураккаб функциянинг ҳосиласи ушбу формула бўйича топилади:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Агар $z=f(x, y)$, $y=y(x)$ бўлса, у ҳолда $z=f(x, y(x))$ дан x бўйича тўлиқ ҳосила қуйидаги формула бўйича топилади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Худди шунингдек, $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ бўлса, у ҳолда $z=f(x, y)$ нинг хусусий ҳосилалари қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

1-мисол. Агар $x=e^t$ ва $y=\ln t$ бўлса, $z=\frac{x}{y}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{tye^t - x}{y^2\cdot t}.$$

2-мисол. Агар $y=x^2$ бўлса, $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ функциянинг тўлиқ ҳосиласини топинг.

Ечиш. Тўлиқ ҳосила формуласига кўра:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2x =$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-y}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Хусусий ҳосила: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

3-мисол. Агар $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$ бўлса, $z=\ln(x^2+y^2)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot v + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{v} =$

$$= \frac{2}{x^2+y^2}(x\cdot v + \frac{y}{v}) = \frac{2}{u};\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} =$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot u + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) = \frac{2}{x^2+y^2}\left(xu - \frac{yu}{v^2}\right) = \frac{2(v^4-1)}{(v^1+1)v}.$$

7.2.2. Агар $F(x, y)=0$ тенглама бирор $y(x)$ функцияни ошкормас кўринишда аниқласа ва $F'_y(x, y)\neq 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринлидир:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Агар $F(x, y, z)=0$ тенглама икки ўзгарувчили $z(x, y)$ функцияни ошкормас кўринишда аниқласа ва $F'_z(x, y, z)\neq 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

4-мисол. Ошкормас кўринишда

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$$

тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y)$ орқали белгилаймиз ва хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y) = 3(x^2+y^2)^2 2x - 6x = ((x^2+y^2)^2 - 1)\cdot 6x;$$

$$F'_y(x, y) = 3(x^2+y^2)2y - 6y = ((x^2+y^2-1)\cdot 6y.$$

Демак, $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{6x((x^2+y^2)^2-1)}{6y((x^2+y^2)^2-1)}=-\frac{x}{y}.$

5 мисол. Ошкормас кўринишда $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$ тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x=(x, y, z)=2x;\ F'_y(x, y, z)=-4y-z+1;\ F'_z(x, y, z)=6z-y.$$

Демак,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2x}{6z-y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Агар $z=\ln\frac{u}{v}$, бу ерда $u=\text{tg}^2x$, $v=\text{ctg}^2x$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

2. Агар $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, бу ерда $y=3x+1$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

3. Агар $z=x^2y$, бу ерда $y=\cos x$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

4. Агар $z=u^2\ln v$, бу ерда $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топинг.

5. Агар $z=x^2y-y^2x$, бу ерда $x=u\cos v$ ва $y=u\sin v$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ ни топинг.

6. Агар $w=\ln(x^3+y^3-z^3)$, бу ерда $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$, $z=e^{uv}$ бўлса, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ ни топинг.

7. Ошкормас кўринишда

а) $\sin xy-e^{xy}-x^2y=0$; б) $y^x=x^y$ тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

8. Ошкормас кўринишда

а) $e^z=xyz$; б) $z^3+3xyz=a^3$

тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

2- мустақил иш

1. Агар $z=\arcsin(x-y)$, бу ерда $x=3t$, $y=4t^3$ бўлса, $\frac{dz}{dt}$ ни топинг.

2. Агар $z=\text{arc tg}xy$, бу ерда $y=e^x$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

3. Агар $z=u^2+v^2$, бу ерда $u=x+y$, $v=x-y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

4. Агар $z=u^2v-v^2u$, бу ерда $u=x\sin y$, $v=y\cos x$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

5. Ошкормас кўринишда

а) $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$; б) $y\sin x-\cos(x-y)=0$

тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

6. Ошкормас кўринишда

а) $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$; б) $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=0$

тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

3- §. Уринма текислик ва сиртга нормал. Юқори тартибли ҳосилалар. Тейлор формуласи

7.3.1. Сиртга M_0 нуқтада ўтказилган *уринма текислик* деб сиртда M_0 нуқта орқали ўтказилган барча эгри чизиқларга ўтказилган уринмалар жойлашган текисликка айтилади.

Сиртга M_0 нуқтадаги нормал деб M_0 нуқтадан ўтувчи ва бу нуқтада ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиққа айтилади.

Агар сирт $z=f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада бу сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси:

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)\ (x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)\ (y-y_0).$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта орқали сиртга ўтказилган нормалнинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Агар сирт $F(x, y, z)=0$ тенглама билан ошкормас кўринишда берилган бўлса, сиртнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик тенгламаси

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\ (x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)\ (y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)\ (z-z_0)=0$$

кўринишда, нормал тенгламаси эса

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

кўринишда бўлади.

1- мисол. $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ сиртга $M_0(1, 1, 1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1 \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2.$$

Бу ҳосилаларнинг $M_0(1, 1, 1)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}=2-2-1=-1 \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}=-2+2+2=2.$$

Шундай қилиб, $f'_x(1, 1)=-1, f'_y(1, 1)=2$. Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1) \text{ ёки } x-2y+z=0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

2- мисол. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ сиртга M_0 $(1, 2, -1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y, z)=3x^2+yz; \quad F'_y(x, y, z)=3y^2+xz;$$
$$F'_z(x, y, z)=3z^2+xy.$$

Ҳосилаларнинг $M_0(1, 2, -1)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(1, 2, -1)=3-2=1; \quad F'_y(1, 2, -1)=12-1=11;$$
$$F'_z(1, 2, -1)=3+2=5.$$

Шундай қилиб, уринма текислик тенгламаси:

$$1(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0 \text{ ёки } x+11y+5z-18=0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}.$$

7.3.2. $z=f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=z''_{xy}=f_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x, y) .$$

$f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* дейилади. Аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлган нуқталарда уларнинг қийматлари тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шундай аниқланади.

Ушбу $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича ва $(n-m)$ марта y ўзгарувчи бўйича дифференциаллангаинини билдиради.

3- мисол. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Дастлаб биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Иккинчи марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Кейинги иккита ифодани таққослаб, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

7.3.3. Агар $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқта атрофида $(n+1)$-тартиблигача $(n+1$- тартиблиси ҳам) узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қаралаётган нуқта атрофида ушбу Тейлор формуласи ўринлидир:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}[f'_x(x_0,y_0)\ (x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\ (y-y_0)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,\ y_0)\,(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\,(x-x_0)\,(y-y_0)+$$
$$+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\,(y-y_0)^2]+\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\ \frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+$$
$$+R_n(x,\ y),$$

бу ерда $R_n(x,\ y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f(x_0+\theta(x-$ $-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0)),\ 0<\theta<1.$

Тейлор формуласининг $x_0=y_0=0$ бўлгандаги хусусий ҳоли *Маклорен формуласи* дейилади.

4-мисол. $z=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y-4$ функцияни $P_0(2,\ -1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

Ечиш. Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини ва уларнинг $P_0(2,\ -1)$ нуқтадаги қийматларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$f(x,\ y)=x^3-5x^2+y^2+10x+5y-4-xy,$	$f(2,\ -1)=2;$
$f'_x(x,\ y)=3x^2-10x-y+10,$	$f'_x(2,\ -1)=3;$
$f'_y(x,\ y)=-x+2y+5,$	$f'_y(2,\ -1)=1;$
$f''_{xx}(x,\ y)=6x-10,$	$f''_{xx}(2,\ -1)=2;$
$f''_{xy}(x,\ y)=-1,$	$f''_{xy}(2,\ -1)=-1;$
$f''_{yy}(x,\ y)=2,$	$f''_{yy}(2,\ -1)=2;$
$f'''_{xxx}(x,\ y)=6,$	$f'_{xxx}(2,\ -1)=6.$

Кейинги барча ҳосилалар айнан нолга тенг. Топилганларни Тейлор формуласига қўйиб, изланаётган ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$z=f(x,\ y)=2+3(x-2)+(y+1)+(x-2)^2-(x-2)\ (y+1)+$$
$$+(y+1)^2+(x-2)^3.$$

3-дарсхона топшириғи

1. Берилган сиртга берилган $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг:

а) $z=1+x^2+y^2,$ $M_0(1,\ 1,\ 3);$
б) $x^2+y^2-z^2=-1,$ $M_0(2,\ 2,\ 3);$
в) $z=\ln(x^2+y^2),$ $M_0(1,\ 0,\ 0);$
г) $x^2+z^2-5yz+3y=46,$ $M_0(1,\ 2,\ -3).$

2. Берилган функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг ва аралаш хусусий ҳосилалари тенг ёки тенг эмаслигини текширинг:

а) $z=xy+\frac{y}{x};$
б) $z=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}};$
в) $z=xe^{-xy};$
г) $z=y^x;$
д) $z=\ln(x^2+y^2);$
е) $z=\text{arc}\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$
ж) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$
з) $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z.$

3. $z=e^{xy}$ функция

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2z$$

тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

4. $z=x^y$ функция

$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=(1+y\ \ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$$

тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

5. $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

6. $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ функция $P_0\ (-2,\ 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

7. $f(x,\ y)=e^x\sin y$ функцияни учинчи тартибли ҳадларгача (улар ҳам киради) Маклорен формуласи бўйича ёйинг.

3-мустақил иш

1. Берилган сиртга берилган $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг:

а) $z=1+x^2+y^2,\ M_0(2,\ -1,\ 6);$
б) $x^2-y^2-z^2+xz+4x+5=0,\ M_0(-2,\ 1,\ 0).$

2. Берилган функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг ва аралаш хусусий ҳосилалар тенг ёки тенг эмаслигини текширинг:

а) $z=\text{tg}\sqrt{xy};$
б) $z=\ln(3xy-4);$
в) $z=\sin\sqrt{x^3y};$
г) $z=\text{arctg}(2x-y).$

3. Берилган функциялар кўрсатилган тенгламаларни қаноатлантиришини текширинг:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0,\qquad z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+t^2}};$

б) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0,\qquad z=\frac{y^2}{3x}+\text{arc}\sin(xy).$

4. $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$ функцияни $P_0(1, 2)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

5. $f(x, y)=e^{x+y}$ функцияни $P_0(1, -1)$ нуқта атрофида учинчи тартибли ҳадлар (улар ҳам киради)гача Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

4- §. Бир неча ўзгарувчи фуикциясининг экстремумлари

7.4.1. Агар $z=f(x, y)$ функциянииг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирор атрофидаги исталган $P(x, y)$ нуқтасидаги қийматидан катта, яъни $f(x_0. , y_0)>f(x, y)$ бўлса, $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада *максимумга* эга дейилади.

Агар $z=f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирорта атрофидаги исталган $P(x, y)$ нуқтасидаги қийматидан кичик бўлса, яъни $f(x_0, y_0)<f(x, y)$ бўлса, $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада *минимумга* эга дейилади.

Функциянинг максимуми ёки минимуми унинг *экстремуми* дейилади. Функция экстремумга эга бўлган нуқта унинг *экстремум нуқтаси* дейилади.

7.4.2. Экстремумнинг зарурий шартлари: агар $P_0(x_0,y_0)$ нуқта узлуксиз $z=f(x, y)$ функциянинг экстремум иуқтаси бўлса, у ҳолда $f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$ бўлади ёки бу ҳосилаларниig ақалли биттаси мавжуд бўлмайди.

Бу шартлар бажариладиган нуқталар *критик нуқталар* дейилади. Ҳар қандай критик нуқта ҳам экстремум иуқтаси бўлавермайди.

7.4.3. Иккинчи тартибли ҳосилаларнинг $P_0(x_0, y_0)$ критик нуқтадаги қийматларини

$$A=f''_{xx}(x_0, y_0);\ B=f''_{xy}(x_0, y_0);\ C=f''_{yy}(x_0, y_0)$$

орқали белгилаймиз ва $\Delta=AC-B^2$ дискриминантни тузамиз.

Экстремумнинг етарли шарти.

а) агар $\Delta>0$ бўлса, $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ иуқтада экстремумга эга бўлиб, бунда $A<0$ (ёки $C<0$) бўлганда P_0 нуқта максимум нуқтаси, $A>0$ (ёки $C>0$) бўлганда минимум нуқтаси бўлади;

б) агар $\Delta<0$ бўлса, P_0 нуқтада экстремум мавжуд эмас;

в) агар $\Delta=0$ бўлса, экстремум мавжуд бўлиши ҳам, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

1- мисол. $z=xy(x+y-2)$ функциянинг экстремумларини топинг.

Ечиш. Функция бутун Oxy текисликда аниқланган.

Критик нуқталарни қуйидаги тенгламалардан топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2-2y=0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy-2x=0.$$

Бу системани ечиб, тўртта критик нуқтани топамиз: $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(0, 2)$, $P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар.

$$f''_{xx}(x, y)=2y;\ f''_{xy}(x, y)=2x+2y-2;\ f''_{yy}(x, y)=2x.$$

Ҳар бир критик нуқтадаги дискриминантни ҳисоблаймиз:

а) $P_1(0,0)$ нуқтада: $\Delta=AC-B^2=(2\cdot0)\cdot(2\cdot0)-(2\cdot0+2\cdot0-2)^2=-4<0$, демак экстремум йўқ (экстремумнинг етарли шартига мувофиқ);

б) $P_2(2, 0)$ нуқтада: $\Delta=-4<0$, демак экстремум мавжуд эмас;

в) $P_3(0, 2)$ нуқтада: $\Delta=-4<0$, демак экстремум мавжуд эмас;

г) $P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ нуқтада: $\Delta=\frac{12}{9}>0$, $A=\frac{4}{3}>0$, демак функциянинг минимум нуқтасига эгамиз, бу нуқтада $z_{\min}=f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}$.

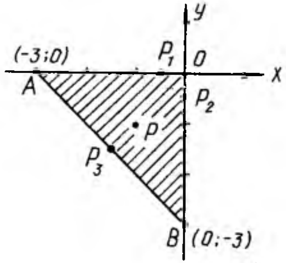
7.4.4. Чегаралангаи ёпиқ $\bar{D}$ соҳада дифференциалланувчи функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига ё $\bar{D}$ соҳа ичида ётувчи критик нуқтада, ё бу соҳа чегарасида эришади.

Ёпиқ $\bar{D}$ соҳада функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш учун: а) соҳа ичида ва унинг чегарасида ётган барча критик нуқталар топилади; б) функциянииг бу нуқталардаги ва чегарадаги қийматлари ҳисобланади; в) топилган қийматлар орасидан энг катта ва энг кичик қийматлар топилади.

2- мисол. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ функциянинг $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, $x+y\geqslant -3$ соҳадаги энг катта ва эиг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. D соҳа AOB учбурчакдан иборат (41- шакл).

а) Ушбу системадан соҳа ичидаги критик иуқталарни топамиз:



41- шакл

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+1=0; \\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0. \end{cases}$$

Бу ердан: $x=-1$, $y=-1$, демак, $P_0(-1, -1)$ нуқтага эгамиз.

б) Функцияни соҳа чегарасида текширамиз. Тенгламаси $y=0$ бўлган AO чегарада $z=x^2+x$ функцияга эгамиз; критик нуқталарнинг абсциссаларини $z'_x=2x+1=0$ тенгламадан аниқлаймиз: $x=-\frac{1}{2}$. Демак критик нуқта: $P_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Тенгламаси $x=0$ бўлган BO чегарада $z=y^2+y$ функцияга эгамиз; критик иуқталарнинг ординаталарини $z'_y=2y+1=0$ тенгламадан топамиз: $y=-\frac{1}{2}$. Демак, критик нуқта $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Тенгламаси $y=-3-x$

бўлган AB чегарада $z=3x^2+9x+6$ функцияга эгамиз; критик нуқталарнинг абсциссларини $z'_x=6x+9=0$ тенгламадан топамиз: $x=-\frac{3}{2}$. AB тенгламасидан $y=-\frac{3}{2}$. Демак, критик нуқта: $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

в) Берилган функциянинг P_0, P_1, P_2, P_3 критик нуқталардаги ҳамда чегаралар туташадиган A, B ва O нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z_0=f(P_0)=f(-1, 1)=-1;$$
$$z_1=f(P_1)=f\left(-\frac{1}{2}, 0\right)=-\frac{1}{4};$$
$$z_2=f(P_2)=f\left(0, -\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4};$$
$$z_3=f(P_3)=f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4};$$
$$z_4=f(O)=f(0, 0)=0;$$
$$z_5=f(A)=f(-3, 0)=6;$$
$$z_6=f(B)=f(0, -3)=6.$$

г) Функциянинг топилган барча қийматларини таққослаб, $z_{\text{энг кат.}}=f(A)=f(B)=6$ ва $z_{\text{энг кич.}}=f(P_0)=-1$ деган хулосага келамиз.

4- дарсхона топшириғи

1. Функцияларни экстремумга текшириш:

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;
б) $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$;
в) $z=xy^2(1-x-y)$;
г) $z=x^3+y^3-15xy$.

Ж: а) $z_{\min}=-9$; в) $z_{\max}=\frac{1}{64}$;
б) $z_{\max}=282$; г) $z_{\min}=-125$.

2. Функцияларнинг кўрсатилган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

а) $z=x^2-xy+y^2-4x$; $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, 2x+3y\leqslant 12$;
б) $z=x^2+3y^2+x-y$; $x\leqslant 1,\ y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 1$.

Ж: а) $z_{\text{энг кич.}}=-\frac{16}{3}$; $z_{\text{энг кат.}}=16$;
б) $z_{\text{энг кич.}}=1$; $z_{\text{энг кат.}}=4$.

4- мустақил иш

1. Функцияларни экстремумга текширинг:

а) $z=(x-1)^2+2y^2$;
б) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;
в) $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

Ж: а) $z_{\min}=0$; б) $z_{\min}=-1$; в) $z_{\max}=8e^{-2}$;

2. Функциянинг кўрсатилган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

а) $z=x^2+2xy-4x+8y$; $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x\leqslant 1,\ y\leqslant 2$;
б) $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5$; $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 3$.

Ж: а) $z_{\text{энг кич.}}=-3$, $z_{\text{энг кат.}}=17$;
б) $z_{\text{энг кич.}}=-9$, $z_{\text{энг кат.}}=5$.

5- §. Шартли экстремум

$z=f(x, y)$ функциянинг *шартли экстремуми* деб бу функциянинг x ва y ўзгарувчиларнинг *боғланиш тенгламаси* деб аталувчи $\varphi(x, y)=0$ тенглама билан боғланганлик шартида эришадиган экстремумига айтилади.

Ушбу $\Phi(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$ функция *Лагранж функцияси* дейилади, бу ерда λ — бирор ўзгармас кўпайтувчи. Шартли экстремумни топиш $\Phi(x, y, \lambda)$ функциясининг оддий экстремумини излашга келтирилади. Лагранж функцияси экстремумининг зарурий шарти қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0 \end{cases} \text{ёки} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \\ \varphi(x, y)=0. \end{cases}$$

Агар $P_0(x_0, y_0)$, λ_0 — бу системанинг исталган ечими ва

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & \Phi''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & \Phi''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

бўлса, $\Delta<0$ да $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада шартли максимумга, $\Delta>0$ да шартли минимумга эга бўлади.

Мисол. $z=x+2y$ функциянинг x ва y ўзгарувчилар $x^2+y^2=5$ тенглама билан боғланган шартдаги экстремумини топинг.

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз:

$$\Phi(x, y, \lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5).$$

Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=1+2x\lambda,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=2+2y\lambda,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=x^2+y^2-5.$$

$\Phi(x, y, \lambda)$ функция учун экстремумнинг зарурий шартлари ушбу тенгламалар системасини беради:

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0, \\ 2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, иккита:

$$x_1=-1,\quad y_1=-2,\quad \lambda_1=\frac{1}{2}$$

ва

$$x_2=1,\quad y_2=2,\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

ечимларни топамиз.

Энди

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=2\lambda;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2\lambda;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

1) $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $x_1=-1$, $y_1=-2$ да

$$\Delta_1=-\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=20>0,$$

яъни функция $P_1(-1,\ -2)$ нуқтада шартли минимумга эга: $z_{\min}=-1-4=-5$;

2) $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $y_2=2$ да

$$\Delta_2=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-20<0,$$

яъни функция $P_2(1,\ 2)$ нуқтада шартли максимумга эга: $z_{\max}=1+2\cdot 2=5$.

5- дарсхона топшириғи

Функциянинг шартли экстремумини топинг:

1. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$; $x+y+3=0$ шартда.
   Ж: $x=y=-\frac{3}{2}$ да $z_{\min}=-\frac{19}{4}$.
2. $z=xy$; $2x+3y-5=0$ шартда.
   Ж: $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{5}{6}$ да $z_{\max}=\frac{25}{24}$.
3. $z=x^2+y^2$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ шартда.
   Ж: $x=\frac{36}{25}$, $y=\frac{48}{25}$ да $z_{\min}=\frac{144}{25}$.
4. $z=6-4x-3y$; $x^2+y^2=1$ шартда.
   Ж: $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ да $z_{\max}=11$; $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$ да $z_{\min}=1$.
5. $z=\cos^2x+\cos^2y$; $y-x=\frac{\pi}{4}$ шартда.
   Ж: $x=\frac{7\pi}{8}+\pi k$, $y=\frac{9\pi}{8}+\pi k$ да $z_{\max}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$;
   $x=\frac{3\pi}{8}+\pi k$, $y=\frac{5\pi}{8}+\pi k$ да $z_{\min}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
6. $z=x+y$; $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$ шартда.
   Ж: $x=y=-2$ да $z_{\max}=-4$;
   $x=y=2$ да $z_{\min}=4$.

5- мустақил иш

Функциянинг шартли экстремумини топинг:

1. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $x+y=2$ шартда.
   Ж: $x=y=1$ да $z_{\min}=2$.
2. $z=\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2=1$ шартда.
   Ж: $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $z_{\min}=-1-2\sqrt{2}$;
   $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $z_{\max}=1-2\sqrt{2}$;
3. $z=xy^2$; $x+2y=1$ шартда.
   Ж: $x=y=1$ да $z_{\min}=0$; $x=y=\frac{1}{3}$ да $z_{\max}=\frac{1}{27}$.
4. $z=2x+y$; $x^2+y^2=1$ шартда.
   Ж: $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ да $z_{\min}=-\sqrt{5}$;

$x=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$ да $z_{\max}=\sqrt{5}$.

5. $z=xy$; $x+y=1$ шартда.

Ж: $x=y=\frac{1}{2}$ да $z_{\max}=\frac{1}{4}$.

8- назорат иши

1. Берилган функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1.1. $z=\ln(-x-y)$.
1.3. $z=\sqrt{x^2+y^2-2x}$.
1.5. $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.
1.7. $z=\ln(y-x^2)$.
1.9. $z=\ln(x^2+y)$.
1.11. $z=\frac{3xy}{2x-5y}$.
1.13. $z=\sqrt{y^2+x^2}$.
1.15. $z=\frac{3x}{6-x^2-y^2}$.
1.17. $z=\frac{4xy}{x^2-y^2}$.
1.19. $z=\arccos(x+y)$.
1.21. $z=\ln(y^2-x^2)$.
1.23. $z=\frac{3}{6-x^2-y^2}$.
1.25. $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$.
1.27. $z=\ln(2x-y)$.
1.29. $z=\frac{4xy}{x-3y+1}$.

1.2. $z=\arccos\frac{y+1}{x}$.
1.4. $z=\frac{1}{\sqrt{y^2-4x+8}}$.
1.6. $z=\arcsin\frac{x}{y^2}$.
1.8. $z=\frac{1}{\sqrt{4x-y^2}}$.
1.10. $z=\sqrt{x^2+2y+y^2}$.
1.12. $z=\arcsin(x-y)$.
1.14. $z=\ln(4-x^2-y^2)$.
1.16. $z=\sqrt{x^2+y^2-8}$.
1.18. $z=e^{\sqrt{x^2+y^2-5}}$.
1.20. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.
1.22. $z=\arcsin\frac{x}{y}$.
1.24. $z=\arccos(x+2y)$.
1.26. $z=\sqrt{1-x-y}$.
1.28. $z=\arcsin(2x-y)$.
1.30. $z=\frac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+2}$.

2. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг ва $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ эканини текширинг:

2.1. $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$.
2.3. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
2.5. $z=e^{-x-3y}\cdot\sin(x+3y)$.
2.7. $z=e^{\frac{x}{y}}$.

2.2. $z=\ln(x+e^{-y})$.
2.4. $z=e^{xy}$.
2.6. $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$.
2.8. $z=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

2.9. $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$.
2.11. $z=\operatorname{ctg}(x+y)$.
2.13. $z=\arcsin(x-y)$.
2.15. $z=\operatorname{tg}xy^2$.
2.17. $z=\operatorname{arcctg}(x-4y)$.
2.19. $z=\cos(3x^2-y^2)$.
2.21. $z=\arccos(x-5y)$.
2.23. $z=\arcsin(4x+y)$.
2.25. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.
2.27. $z=e^{\sqrt{x+y}}$.
2.29. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$.

2.10. $z=\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.
2.12. $z=\sin(x^2-y)$.
2.14. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.
2.16. $z=\ln(3xy-4)$.
2.18. $z=\ln(5x^2-3y^2)$.
2.20. $z=\sin\sqrt{xy}$.
2.22. $z=e^{x^2-y^2}$.
2.24. $z=\ln(4x^2-5y^2)$.
2.26. $z=\cos(x^2y^2-5)$.
2.28. $z=\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$.
2.30. $z=e^{2x^2+y^2}$.

3. Берилган $z=f(x, y)$ мураккаб функциянинг кўрсатилган ҳосиласини топинг:

3.1. $z=e^{y-2x}$, $y=\ln\sin t$, $x=\cos t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.2. $r=\arccos(3x-y)$, $x=4t$, $y=3t^2$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.3. $z=u^3\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=2x-3y$. $\frac{\partial z}{\partial x}=?$

3.4. $z=\operatorname{arcctg}xy$, $y=e^{\cos^3 x}$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.5. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y=x^2$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.6. $z=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.7. $z=\ln(e^x-e^{-y})$, $x=t^2$, $y=t^3$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.8. $z=u^2\ln v$, $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$. $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3.9. $z=x^y$, $y=\ln\sin x$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.10. $z=\ln(e^x+e^y)$, $y=\frac{1}{3}x^3+x$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.11. $z=\frac{x^2}{y+1}$, $x=1-2t$, $y=\operatorname{arctg}t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.12. $z=\sqrt{x+y^2+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.13. $z=u^2v-v^2u$, $u=x\sin y$, $v=y\cos x$. $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3.14. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, $y=e^{(x+1)^2}$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.15. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, $y=3x+1$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.16. $z=\arcsin\frac{x^2}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.17. $z=u^2+v^2$, $u=x-y^2$, $v=x^2+y$. $\frac{\partial z}{\partial x}=?$

3.18. $z=\mathrm{arcctg}\,xy$, $y=e^{2x}$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.19. $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.20. $z=x^2e^y$, $x=\cos t$, $y=\sin t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.21. $z=x^y$, $x=e^t$, $y=\ln t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.22. $z=\ln(u^2-v^2)$, $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3.23. $z=\ln(e^x-e^y)$, $y=x^3+1$. $\frac{dz}{dx}=?$

3.24. $z=e^{y-2x}$, $x=\sin t$, $y=t^3$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.25. $z=\ln(e^{-x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.26. $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.27. $z=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3y-2x$. $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3.28. $z=xy^2$, $y=\sin x$. $\frac{\partial z}{dx}=?$

3.29. $z=\arccos\frac{2x}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$. $\frac{dz}{dt}=?$

3.30. $z=\frac{x^2}{y+1}$, $x=1-2t$, $y=\mathrm{arctg}\,t$. $\frac{dz}{dt}=?$

4. Ошкормас кўринишда берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг:

4.1. $z^2=xy-z+x^2-4$.
4.2. $x^2+y^2-xz+yz-3x=11$.
4.3. $x^2+y^2-2z^2-2y=0$.
4.4. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0$.
4.5. $\ln z=x+2y-z+\ln 3$.
4.6. $x^3+3xyz-z^3=27$.
4.7. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17$.
4.8. $x^2+2y^2+3z^2=59$.
4.9. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3$.
4.10. $x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0$.

4.11. $x^2+y^2+z^2+6z-4x+9=0$.
4.12. $x^2+y^2-xz-yz=0$.
4.13. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y=15$.
4.14. $e^z-xyz-x+1=0$.
4.15. $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4$.
4.16. $z^3+3yzx+3y=7$.
4.17. $e^z+x+2y+z=4$.
4.18. $x^2+y^2+z^2-2xz=2$.
4.19. $x+y+z+2=xyz$.
4.20. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\frac{\pi}{2}$.
4.21. $x^2+y^2+z^2+2xz=5$.
4.22. $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=\frac{3}{2}$.
4.23. $y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z$.
4.24. $x+y+z=e^z$.
4.25. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.
4.26. $x-z\ln\frac{z}{y}=0$.
4.27. $xy+yz+xz=1$.
4.28. $e^z-xyz=0$.
4.29. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.
4.30. $2x^2-y^2+z^2-4z+y=13$.

5. Қуйидаги функцияларни экстремумга текширинг:

5.1. $z=2(x+y)-x^2-y^2$.
5.2. $z=xy(12-x-y)$.
5.3. $z=(x-5)^2+y^2+1$.
5.4. $z=x^2-xy+y^2+x-y+1$.
5.5. $z=x^2+3(y+2)^2$.
5.6. $z=x^2-xy+y^2+3x-6y+20$.
5.7. $z=(x-2)^2+2y^2-10$.
5.8. $z=3x^3+3y^2-9xy+10$.
5.9. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.
5.10. $z=xy-3x^2-2y^2$.
5.11. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.
5.12. $z=2xy-5x^2-3y^2+2$.
5.13. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.
5.14. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.
5.15. $z=(x-1)^2+2y^2$.
5.16. $z=x^3+8y^3-6xy+1$.
5.17. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.
5.18. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.
5.19. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.
5.20. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.
5.21. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.
5.22. $z=2xy-2x^2-4y^2$.

5.23. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$.

5.24. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

5.25. $z=x^2+y^2-xy+x+y$.

5.26. $z=xy-x^2-y^2+9$.

5.27. $z=x^3+y^3-3xy$.

5.28. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

5.29. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

5.30. $z=xy(6-x-y)$.

6. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган ёпиқ соҳада $z=f(x, y)$ функциянинг энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:

6.1. $z=x^2-y^2-x+y$; $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1$.

6.2. $z=-3x^2+2y^2+12x-4y$; $y=0,\ x=0,\ 3x+4y=12$.

6.3. $z=x^2+2xy-4x+8y$; $x=0,\ y=0,\ 5x-3y+45=0$.

6.4. $z=x^2+2xy-y^2-4x$; $x=3,\ y=0,\ y=x+1$.

6.5. $z=2xy-3x^2-2y^2+5$; $x+y=5,\ x=-1,\ y=-1$.

6.6. $z=x^2-xy+5$; $y=0,\ x^2+y=1$.

6.7. $z=3y-2x-xy$; $x=0,\ y=0{,}3x-4y=12$.

6.8. $z=x^2-4xy+y^2+6y$; $y=x,\ y=0,\ x=4$.

6.9. $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$; $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2$.

6.10. $z=3xy-6x^2-6y^2+15x$; $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1$.

6.11. $z=x^2+6xy-x+3y$; $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=3$.

6.12. $z=5xy-y^2$; $x=4,\ y^2=5x+5$.

6.13. $z=x^2+2xy-10$; $y=0,\ y=x^2-4$.

6.14. $z=x^2y$; $y=0,\ y=1-x^2$.

6.15. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$; $x=-3,\ y=0,\ x+y+1=0$.

6.16. $z=x^2+2xy+4x-y^2$; $x=0,\ y=0,\ x+y+2=0$.

6.17. $z=xy-2x-y$; $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=4$.

6.18. $z=x^2+2xy+y^2-2x+2y$; $x=2,\ y=0,\ y=x+2$.

6.19. $z=x^3+y^3-3xy$; $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$.

6.20. $z=x^2+xy-2$; $y=0,\ y=4x^2-4$.

6.21. $z=5x^2-3xy+y^2+4$; $x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1$.

6.22. $z=\frac{1}{2}x^2-xy$; $y=3,\ y=\frac{x^2}{3}$.

6.23. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$; $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$.

6.24. $z=1+xy^2$; $x=0,\ x=1,\ y=-1,\ y=2$.

6.25. $z=4-2x^2-y^2$; $x^2+y^2\leqslant 1$.

6.26. $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x$; $x=0,\ y=2,\ y=2x$.

6.27. $z=x^2+xy$; $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=3$.

6.28. $z=2x+y-xy$; $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=4$.

6.29. $z=x^2+2xy-y^2-4x$; $x=3,\ y=0,\ x-y+1=0$.

6.30. $z=4(x-y)-x^2-y^2$; $x=0,\ x+2y=4,\ x-2y=4$.

8-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Умумий тушунчалар. Ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

8.1.1. Эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг ҳосила (дифференциал)ларини боғловчи

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$$

муносабат *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Дифференциал тенгламага кирувчи ҳосила (дифференциал)ларнинг энг юқори тартиби дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечими деб, тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган дифференциалланувчи $y=\varphi(x)$ функцияга айтилади.

Бундай тенглама учун Коши масаласи бошланғич шартлар деб аталувчи ушбу

$$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир.

n-тартибли оддий дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, тенгламанинг тартиби қанча бўлса, шунча ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган шундай $y=\varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$ функцияга айтиладики, бу функция учун қуйидаги шартлар бажарилади:

а) y функция $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг исталган қийматларида берилган тенгламани қаноатлантиради;

б) бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматини топиш мумкинки, бу қийматларда $y=\varphi(x, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)$ ечим бошланғич шартларни қаноатлантиради.

8.1.2. Ушбу

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$$

кўринишдаги тенглама *ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама* дейилади. Унинг ўзига хос томони шундаки, dx олдида фақат x га боғлиқ кўпайтувчи, dy олдида эса фақат y га боғлиқ кўпайтувчи туради. Бу тенгламанинг ечими уни ҳадма-ҳад интеграллаш йўли билан аниқланади:

$$\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy=C.$$

Дифференциал тенгламанинг ошкормас ҳолда ифодаланган ечими бу тенгламанинг *интеграли* дейилади.

Интеграллаш доимийси C ни ечим учун қулай кўринишда танлаш мумкин.

1-мисол. $\mathrm{tg}x\,dx-\mathrm{ctg}y\,dy=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда ўзгарувчилари ажралган тенгламага эгамиз. Уни ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\int\mathrm{tg}x\,dx-\int\mathrm{ctg}y\,dy=C$$

ёки

$$-\ln|\cos x|-\ln|\sin y|=-\ln\bar{C},$$

бу ерда интеграллаш доимийси C ни $-\ln\bar{c}$, яъни $C=-\ln\bar{C}$ орқали белгилаш қулайдир, бу ердан $\ln\sin y\cdot\cos x=\ln C$ ёки $\sin y\times\times\cos x=C$ — умумий интеграл.

8.1.3. Ушбу

$$M_1(x)\cdot M_2(y)dx+N_1(x)\cdot N_2(y)dy=0$$

тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади. Бу кўринишдаги тенглама $M_2(y)\cdot N_1(x)\neq0$ га бўлиш натижасида ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага келтирилади.

2-мисол. Ушбу

$$(1+x^2)dy+ydx=0$$

тенгламанинг $y|_{x=1}=1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эгамиз. Тенгламани

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0$$

кўринишга келтириб, интеграллаймиз:

$$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{1+x^2}=C\ \text{ёки}\ \ln|y|+\mathrm{arctg}x=C.$$

Тенгламанинг интегралини ҳосил қилдик. Берилган $y|_{x=1}=1$ бошланғич шартдан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармас C ни топамиз:

$$\ln 1+\mathrm{arctg}1=C$$

яъни $C=\frac{\pi}{4}$. Демак, $\ln y+\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{4}$, бу ердан изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$y=e^{\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}x}.$$

8.1.4. Агар $f(x,y)$ функцияда x ва y ўзгарувчилар мос равишда tx ва ty га алмаштирилганда (t — ихтиёрий параметр)

$$f(tx,\ ty)=f(x,\ y)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $f(x,y)$ функция *бир жинсли функция* деб аталади.

Бир жинсли функция $f(x,y)$ ни

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $y'=f(x,y)$ дифференциал тенгламада $f(x,y)$ бир жинсли функция бўлса, бундай тенглама *бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади. Бир жинсли дифференциал тенгламалар

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишга келтирилади ва $y=u\cdot x$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтирилади ($u=u(x)$ номаълум функция):

$$xdu=(\varphi(u)-u)dx.$$

3-мисол. Ушбу

$$(x^2+2xy)dx+xydy=0$$

тенгламанинг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $y'=-\frac{x^2+2xy}{xy}$ кўринишга келтирамиз. $f(x,y)=-\frac{x^2+2xy}{xy}$ бир жинсли функция. $y=ux$, $y'=u'x+u$ ўрнига қўйишни бажарамиз. У ҳолда берилган тенглама

$$u'x+u=-\frac{x^2+2ux^2}{ux^2}\ \text{ёки}\ u'x+u=-\frac{1+2u}{u}$$

кўринишга келади, бу ердан

$$u'x=-\frac{1+2u+u^2}{u}\ \text{ёки}\ u'x=-\frac{(1+u)^2}{u}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз: $\frac{udu}{(1+u)^2}=-\frac{dx}{x}$. Интеграллаб, топамиз:

$$\int\frac{udu}{(1+u)^2}=C-\int\frac{dx}{x}\ \text{ёки}\ \int\frac{(u+1)-1}{(1+u)^2}du=C-\ln|x|.$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln|1+u|+\frac{1}{1+u}=\ln\bar{C}-\ln x\ \text{ёки}\ \frac{1}{1+u}=\ln\frac{C}{x(1+u)}.$$

$u=\frac{y}{x}$ эканлигини ҳисобга олиб, $\frac{x}{x+y}=\ln\frac{C}{x+y}$ ни ҳосил қиламиз.

8.1.5. Ушбу

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

кўринишдаги тенглама $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ бўлганда

$$x=x_1+\alpha,\ y=y_1+\beta$$

ўрнига қўйиш ёрдамида бир жинсли тенглама кўринишига келтирилади, бу ерда α, β — $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталари. Агар $a_1b_2-a_2b_1=0$ бўлса, у ҳолда $a_1x+b_1y=t$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилар ажратилади.

4-мисол. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}.$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ бўлгани учун бу тенглама бир жинсли тенгламага келтирилиши мумкин. Ушбу

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топамиз: $x=\alpha=-1$; $y=\beta=1$. Энди

$$x=x_1-1,\quad dx=dx_1,$$
$$y=y_1+1,\quad dy=dy_1,$$

деб, тенгламада ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{2x_1+y_1}{x_1+2y_1}.$$

Ҳосил қилинган бу бир жинсли тенгламада $y_1=ux_1$ белгилаш киритсак, $y_1'=u'x_1+u$ бўлади. У ҳолда

$$u'x_1+u=-\frac{2x_1+ux_1}{x_1+2ux_1}\ \text{ёки}\ u'x_1+u=-\frac{2+u}{1+2u}.$$

Натижада ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз:

$$u'x_1=-\frac{2(u^2+u+1)}{1+2u}\ \text{ёки}\ \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1}=-\frac{2dx_1}{x_1}.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$\ln|u^2+u+1|=-2\ln|x_1|+\ln C$$

ёкн

$$u^2+u+1=\frac{C}{x_1^2}.$$

x_1 ва y_1 ўзгарувчиларга қайтсак,

$$\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2+\frac{y_1}{x_1}+1=\frac{C}{x_1^2}\ \text{ёки}\ y_1^2+x_1y_1+x_1^2=C.$$

$x_1=x+1$, $y_1=y-1$ алмаштиришларни ҳисобга олиб, ечимни x ва y ўзгарувчиларга нисбатан ёзамиз:

$$(y-1)^2+(y-1)(x+1)+(x+1)^2=C$$

ёки оддий шакл алмаштиришлардан сўнг

$$x^2+xy+y^2+x-y=\bar{C}$$

кўринишдаги умумий ечнмга эга бўламиз.

1-дарсхона топшириғи

1. Келтирилган $y(x, C)$ функциялар (C — ихтиёрий ўзгармас) мос равишда берилган дифференциал тенгламаларнинг ечими бўладими:

а) $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$, $x^2y'+(1-2x)y=x^2$;
б) $y=Ce^x-e^{-x}$, $xy''+2y'-xy=0$;
в) $x^2+y^4=Cy^2$, $xydx=(x^2-y^4)dy$;
Жавоб: а) ҳа; б) йўқ; в) ҳа.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $(1+x^2)y'+1+y^2=0$;
б) $(x^2+x)y'=2y+1$;
в) $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$;
г) $xy'+2\sqrt{xy}=y$;
д) $(x-2y-3)y'+(2x+y-1)=0$;
е) $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$.

Ж: а) $y=\frac{C-x}{1+Cx}$; б) $2y+1=\frac{Cx^2}{(1+x)^2}$;

в) $y^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}$; г) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x},\ x>0\ \text{да}, \\ \sqrt{\frac{y}{x}}=\ln Cx,\ x<0\ \text{да}; \end{cases}$

д) $x^2+xy-y^2-x+3y=C$; е) $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

3. Коши масаласини ечинг:

а) $\sec^2x\ \mathrm{tg}y dx+\sec^2y\ \mathrm{tg}x dy=0$; $y|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$;

б) $xy'-y=x\ \mathrm{tg}\frac{y}{x}$; $y|_{x=1}=\frac{\pi}{2}$;

в) $2(x+y)y'+(3x+3y-1)=0$; $y|_{x=0}=2$.
Ж: а) $\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y=1$; б) $y=x\arcsin x$;
в) $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.

1- мустақил иш

1. Келтирилган $y(x, C)$ функциялар (C — ихтиёрий ўзгармас) мос равишда берилган дифференциал тенгламаларнинг ечими бўладими:

а) $e^{\frac{y}{x}}=Cy$; $\quad xyy'-y^2=x^2y'$;

б) $y=Cx+\frac{1}{C}$; $xy'-y+\frac{1}{y}=0$?

Жавоб: а) ҳа; б) йўқ.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топииг:

а) $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dx+(\sqrt{xy}+\sqrt{y})dy=0$;

б) $xy\cdot y'=y^2+2x^2$; в) $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

Ж: а) $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln|(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)|=C$;

б) $y^2=4x^2\ln Cx$; в) $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

3. Қоши масаласини ечинг:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}+y'=0$; $y|_{x=\frac{\pi}{4}}=0$;

б) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$; $y|_{x=1}=0$;

в) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$.

Ж: а) $\sqrt{2}\sin x+\sin y-\cos y=0$;

б) $y=-x\ln|1-\ln x|$; в) $(x+y-1)^2=C(x-y+3)$.

2- §. Чизиқли, Бернулли, тўлиқ дифференциалли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

8.2.1. Ушбу

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

кўринишдаги тенглама *чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари. Агар $Q(x)\not\equiv 0$ бўлса, тенглама *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама,* агар $Q(x)\equiv 0$ бўлса, *чизиқли бир жинсли тенглама* дейилади.

$y=u(x)v(x)$ ўрнига қўйиш (бу ерда u ва v номаълум функциялар) ёрдамида тенглама

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$$

ёки

$$u'v+u[v'+P(x)v]=Q(x)$$

кўринишга келтирилади.

u ва v функциялардан бири (масалан, v) ихтиёрий танлаб олиниши мумкинлигидан фойдаланиб, v функцияни охирги тенгламада қавс ичида турган $(v'+Pv)$ ифода нолга тенг бўладиган қилиб олинади. У ҳолда иккинчи иомаълум функция u ни топиш учун $u'v=Q(x)$ теигламани ечиш кифоя.

Шундай қилиб, берилган тенглама $y=uv$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган ушбу иккита тенгламага келтирилади:

$$v'+P(x)v=0,$$
$$u'v=Q(x).$$

Буларни интеграллаб берилган тенгламанинг умумий ечими топилади:

$$y=e^{-\int pdx}(C+\int Qe^{\int pdx}dx).$$

Баъзан дифференциал тенглама y нинг функцияси x га иисбатан чизиқли бўлган, яъни

$$x'+p(y)x=q(y)$$

кўринишга келтирилиши мумкин. Бу тенглама $x=uv$ ўрнига қўйиш орқали юқоридагидек ечилади.

1- мисол. Ушбу

$$(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1)$$

тенгламанинг умумий ечимини топииг.

Ечиш. Тенгламани $(x^2-x)\neq 0$ га бўлиб, ушбу кўринишга келтирамиз:

$$y'+\frac{y}{x^2-x}=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x}$$

ёки

$$y'+\frac{y}{x(x-1)}=\frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Тенглама чизиқли бўлиб, бу ерда $P(x)=\frac{1}{x(x-1)}$, $Q(x)=\frac{x(2x-1)}{x-1}$. $y=uv$, $y'=u'v+uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x(x-1)}\right)=\frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

u нинг олдидаги кўпайтувчини нолга тенглаб

$$\begin{cases} v'+\frac{v}{x(x-1)}=0, \\ u'v=\frac{x(2x-1)}{x-1} \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Дастлаб биринчи тенгламанинг исталган хусусий ечимини топамиз:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x(x-1)} \quad \text{ёки} \quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}dx.$$

Бундан

$$\ln|v| = -\ln|x-1| + \ln x$$

ёки

$$v = \frac{x}{x-1}.$$

Топилган v функцияни системанинг иккинчи тенгламасига қўямиз:

$$u'\frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1},$$

бу ердан $u' = 2x-1$. Интегралласак:

$$u = x^2 - x + C.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = uv = \frac{x(x^2-x+C)}{x-1}.$$

2-мисол. $(2x-y^2)y' = 2y$ тенгламанинг $y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартини қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама x га нисбатан чизиқлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$(2x-y^2)\frac{1}{x'} = 2y$, ёки $2x-y^2 = 2x'y$, ёки $x' - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2}$ (бу ерда $p(y) = -\frac{1}{y}$, $q(y) = -\frac{y}{2}$).

$x = uv$, $x' = u'v + uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{y}{2},$$

бу ердан ушбу иккита тенгламага эга бўламиз:

$$v' - \frac{v}{y} = 0 \text{ ва } u'v = -\frac{y}{2}.$$

Биринчи тенгламани ечиб, топамиз:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \text{ ёки } v = y.$$

Иккинчи тенгламага $v = y$ ни қўямиз:

$$u'y = -\frac{y}{2}, \text{ ёки } u' = -\frac{1}{2}, \text{ ёки } u = C - \frac{y}{2}.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$x = uv = y\left(C - \frac{y}{2}\right).$$

$y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартдан

$$1 = C - \frac{1}{2} \text{ ёки } C = \frac{3}{2}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими $x = \frac{1}{2}y\,(3-y)$.

8.2.2. Ушбу

$$y' + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бу тенгламада α — const, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $P(x)$ ва $Q(x)$ функциялар x нинг узлуксиз функциялари. Янги $z = y^{1-\alpha}$ функция киритилиб, Бернулли тенгламаси 8.2.1 бандда кўриб чиқилган

$$z' + (1-\alpha)zP(x) = (1-\alpha)Q(x)$$

чизиқли тенгламага келтирилади.

Бернулли тенгламасини янги z ўзгарувчи киритмай, чизиқли тенглама сифатида $y = uv$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин.

3-мисол. $y' + \frac{y}{x} = y^2\frac{\ln x}{x}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама Бернулли тенгламаси бўлиб, бу ерда $\alpha = 2$. $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ ўрнига қўйишни бажарамиз, натижада:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2v^2\frac{\ln x}{x}.$$

u, v функцияларни топиш учун ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2v^2\frac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани интеграллаб, $v = \frac{1}{x}$ хусусий ечимни оламиз, уни иккинчи тенгламага қўйсак,

$$u' = \frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}u^2$$

га эга бўламиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

ёки

$$-\frac{1}{u} = \int\frac{\ln x}{x^2}dx,$$

бу ерда

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} s=\ln x, \, ds=\frac{dx}{x} \\ dt=\frac{1}{x^2}, \, t=-\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C\,.$$

Демак, $-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C$, бу ердан $u=\frac{x}{Cx+1+\ln x}$.

Берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими:

$$y=uv=\frac{1}{Cx+1+\ln x}.$$

8.2.3. Агар

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$$

кўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x,\ y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du=M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy$$

бўлса, у ҳолда бундай тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади.

Юқоридаги тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак.

Тўлиқ дифференциалли тенглама таърифидан $du=0$, бундан $u(x,\ y)=C$ эканлиги келиб чиқади (C — ихтиёрий ўзгармас).

$u(x,\ y)$ ни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $dy=0$ эканидан $du=M(x,\ y)dx$ бўлади. Бу тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u=\int M(x,\ y)dx+\varphi(y)\,.$$

Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x,\ y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,\ y)$.

$$\int\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,\ y)$$

ёки

$$\varphi'(y)=N(x,\ y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx.$$

Бу ифодани y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:

$$\varphi(y)=\int\Bigl(N(x,\ y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\Bigr)dy+C.$$

Демак,

$$u(x,\ y)=\int M(x,\ y)dx+\int(N(x,\ y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx)dy+C.$$

Бу ифодани ихтиёрий ўзгармасга тенглаб, тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

4-мисол. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда $M(x,\ y)=3x^2+6xy^2$, $N(x,\ y)=6x^2y+4y^3$.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy,\ \text{яъни}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,\ y)$ бўлганлиги сабабли

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2.$$

Бу тенгликни x бўйича интеграллаймиз:

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)\,.$$

Бундан

$$\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-6x^2y.$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,\ y)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\varphi'(y)=6x^2y+4y^3-6x^2y=4y^3.$$

Бундан

$$\varphi(y)=y^4+C.$$

Демак,

$$u=x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

ёки

$$x^2+3x^2y^2+y^4=C.$$

2-дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y'-\frac{1-2x}{x^2}y=1$;

б) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

в) $y'=\frac{1}{2x-y^2}$;

г) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$;

д) $y'-y\mathrm{tg}x+y^2\cos x=0$;

е) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2x}$;

ж) $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$;

з) $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$.

Ж: а) $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$;
б) $y=(x+C)(1+x^2)$;
в) $x=Ce^2y+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$;
г) $x=y\ln y+\frac{C}{y}$;
д) $y(x+C)=\sec x$;
е) $y=\left(\frac{C+\ln|\cos x|}{x}+\mathrm{tg}x\right)^2$;
ж) $\frac{1}{2}x^2+x\sin y-\cos y=C$;
з) $xy+e^x\sin y=C$.

2. Коши масаласини ечинг:
а) $y'-y\,\mathrm{tg}x=\sec x$; $y|_{x=0}=0$;
б) $2xydx+(y-x^2)dy=0$; $y|_{x=-2}=4$;
в) $(y^2+2y+x^2)y'+2x=0$; $y|_{x=1}=0$;
г) $x+ye^x+(y+e^x)y'=0$; $y|_{x=0}=4$.

Ж: а) $y=\frac{x}{\cos x}$; б) $x^2-y\ln\frac{4e}{y}$;
в) $x^2+y^2=e^{-y}$; г) $x^2+y^2+2ye^x=24$.

2- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y'=e^{2x}-e^xy$;
б) $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$;
в) $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$;
г) $xdx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$;
д) $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$.

Ж: а) $y=Ce^{-e^x}+e^x-1$;
б) $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$;
в) $y=\frac{1}{(1+x)(C+\ln|1+x|)}$;
г) $x^2+y^2(C-y^2)$;
д) $x+\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=C$.

2. Коши масаласини ечинг:
а) $y'=2y-x+e^x$; $y|_{x=0}=-1$;
б) $y^2dx=(x+ye^{-\frac{1}{y}})dy$; $y|_{x=0}=-3$;
в) $y'-7y=e^{3x}y^2$; $y|_{x=0}=2$;
г) $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$; $y|_{x=1}=1$.

Ж: а) $y=\frac{1}{2}x-e^x+\frac{1}{4}(1-e^{2x})$;
б) $x=e^{-\frac{1}{y}}(3+y)$; в) $y=\frac{10e^{7x}}{e^{10x}-6}$;
г) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=1+\frac{\pi}{4}$.

3- §. Юқори тартибли диффереициал тенгламалар

8.3.1. $y^{(n)}=f(x)$ кўринишдаги тенглама ўнг томонни кетма-кет n марта интеграллаш ёрдамида ечилади.

1- мисол. $y''=xe^{-x}$ теигламанинг $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламаии кетма-кет иитеграллаб, умумий ечимиии топамиз:

$$y'=\int xe^{-x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x} \end{matrix}\right\}=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int(C_1-xe^{-x}-e^{-x})dx=C_1x-(-xe^{-x}-e^{-x})+e^{-x}+C_2$$

ёки $y=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2$.

Бошланғич шартлардан

$$\begin{cases} 1=2+C_2, \\ 0=-1+C_1, \end{cases}$$

бу системанинг ечимлари $C_1=1$ ва $C_2=-1$. Шундай қилиб, берилган бошланғич шартларни қаноатлаитирувчи хусусий ечим:

$$y=xe^{-x}+2e^{-x}+x-1.$$

8.3.2. $y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\dots,y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламада номаълум функция ва унинг $(k-1)$-тартибгача ҳосилалари қатнашмайди. Бундай тенгламанинг тартибини $y^{(k)}=p(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида пасайтириш мумкин.

2- мисол. $y''=\frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}$ тенгламанинг умумий ечимиии топинг.

Ечиш. $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$ деб, берилган тенгламани

$$p'=\frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}$$

кўринишга келтирамиз. Биринчи тартибли бир жинсли теигламани ҳосил қилдик. Энди $p=ux$, $p'=u'x+u$ деб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'x+u=u\ln u \text{ ёки } \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Унинг ечими

$$\ln|\ln u-1|=\ln x+\ln C_1 \text{ ёки } \ln u-1=Cx,$$

бу ердан $u=e^{C_1x+1}$. Дастлабки y ўзгарувчига қайтиб,

$$y'=p=ux=xe^{C_1x+1} \text{ ёки } y'=xe^{C_1x+1}$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламани интеграллаб, умумий ечимни топамиз:

$$y=\int xe^{C_1x+1}dx=\left\{\begin{array}{ll} s=x, & ds=dx, \\ dt=e^{C_1x+1}dt, & t=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1} \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

8.3.3. $y^{(n)}=f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламада x эркли ўзгарувчи қатнашмайди. Бундай тенгламанинг тартибини $y'=p(y)$ ўрнига қўйиш орқали пасайтириш мумкин.

3- мисол. $y''=\frac{1+y'^2}{y}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y'=p(y)$, $y''=p'p$ ўрнига қўйишни амалга оширсак, тенглама

$$p'p=\frac{1+p^2}{y}$$

кўринишга келади. Бу — ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, топамиз:

$$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y} \text{ ёки } \frac{1}{2}\ln|1+p^2|=\ln|y|+\ln C_1,$$

бу ердан

$$1+p^2=C_1^2y^2 \text{ ёки } p=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

y ўзгарувчига қайтсак

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1} \text{ ёки } \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx.$$

бундан,

$$\frac{1}{C_1}\ln|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}|=\pm(x+C_2).$$

3- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $y'''\sin^4x=\sin 2x$;

б) $y''=\ln x$;

в) $(1-x^2)y''-xy'=2$;

г) $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$;

д) $y''(2y+3)-2y'^2=0$;

е) $yy''^1-y'^2=y^2\ln y$.

Ж: а) $y=\ln\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$;

б) $y=\frac{x^2}{2}(\ln x-\frac{3}{2})+C_1x+C_2$;

в) $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2$;

г) $y=(1+C_1^{-2})\ln(C_1x+1)-C_1^{-1}x+C_2$;

д) $0{,}5\ln(2y+3)=C_1x+C_2$;

е) $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y'''=xe^{-x}$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=2$, $y''|_{x=0}=2$;

б) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$; $y|_{x=2}=1$, $y'|_{x=2}=-1$;

в) $yy''-y'^2=0$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$.

Ж: а) $y=-(x+3)\cdot e^{-x}+\frac{3}{2}x^2+3$;

б) $y=(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8)\cdot\frac{1}{24}$;

в) $y=e^{2x}$.

3- мустақил иш

1. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $y''=\frac{y'}{x}+x$;

б) $y''=\mathrm{arctg}\,x$;

в) $yy''=(y')^2$;

г) $y''=2\sin x cos^2x-\sin^3x$;

д) $y''-2\mathrm{ctg}\,x\cdot y'=\sin^3x$;

е) $2yy''-3(y')^2=4y^2$.

Ж: а) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$;

б) $y=\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

в) $y=C_1e^{C_2x}$; г) $y=\frac{1}{3}\sin^3x+C_1x+C_2$;

д) $y=-\frac{1}{3}\sin^3x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2$;

е) $y\cos^2(x+C_1)=C_2$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y'''=x\sin x$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$; $y''|_{x=0}=2$;

б) $xy''+x(y')^2-y'=0$; $y|_{x=2}=2$, $y'|_{x=2}=1$;

в) $yy''=(y')^2-(y')^3$; $y|_{x=1}=1$; $y'|_{x=1}=-1$.

Ж: а) $y=x\cos x-3\sin x+x^2+2x$;

б) $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$; в) $y-x=2\ln|y|$.

4-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли тенгламалар

8.4.1. Ушбу

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_n(x)y=0$$

кўринишдаги тенглама *n-тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бу ерда $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ бирор $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз функциялар бўлиб, улар тенгламанинг *коэффициентлари* дейилади.

Агар y_1, y_2, ..., y_n функциялар n-тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал теигламанинг $[a, b]$ оралиқда аниқлангаи чизиқли эркли ечимлари бўлса, у ҳолда унинг умумий ечими

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$$

кўринишда ёзилади.

Чизиқли эркли ечимлар *ечимларнинг фундаментал системаси* дейилади.

8.4.2. Агар n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг a_1, a_2, ..., a_n коэффициентлари ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда хусусий ечимлар $y=e^{kx}$ кўринишда изланади. Бу ердаги k n-тартибли чизиқли бир жинсли диффереициал теигламанинг характеристик тенгламаси деб аталувчи ушбу

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_n=0$$

тенгламанинг илдизлари бўлади.

Характеристик тенглама n та k_1, k_2, ..., k_n илдизларга эга. Бу илдизларнинг характерига кўра уларга мос хусусий ечимлар қуйидагича бўлади:

а) характеристик теигламанинг ҳар бир ҳақиқий содда k илдизига e^{kx} хусусий ечим мос келади;

б) ҳар бир m каррали ҳақиқий илдизга m та чизиқли эркли e^{kx}, xe^{kx}, ..., $x^{m-1}e^{kx}$ ечимлар мос келади;

в) комплекс қўшма содда илдизларнинг ҳар бир $k_1=\alpha+i\beta$ ва $k_2=\alpha-i\beta$ жуфтига иккита чизиқли эркли $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $e^{\alpha x}\sin\beta x$ хусусий ечим мос келади;

г) карралиги r га тенг бўлган комплекс қўшма илдизларнинг ҳар бир $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ жуфтига $2r$ та ушбу чизиқли эркли хусусий ечимлар мос келади;

$$e^{\alpha x}\cos\beta,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ ...,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ...,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Олинган хусусий ечимлар — ечимларнинг фундаментал системасининг чизиқли комбинацияси

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

ни тузиб, ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими ҳосил қилинади.

1-мисол. $y''-7y'+6y=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^2-7k+6=0,$$

унинг илдизлари $k_1=1$ ва $k_2=6$ — ҳақиқий ва оддий, демак, берилган тенгламанинг хусусий чизиқли эркли ечимлари (фундаментал ечимлар системаси): $y_1=e^x$ ва $y_2=e^{6x}$; тенгламанинг умумий ечими эса

$$y=C_1e^x+C_2e^{6x}$$

бўлади.

2-мисол. $y^{IV}-13y''+36y=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^4-13k^2+36=0.$$

унинг илдизлари $k_{1,2}=\pm3$, $k_{3,4}=\pm2$ — ҳақиқий ва оддий. Бу илдизларга ушбу хусусий чизиқли эркли ечимлар мос келади:

$$y_1=e^{3x},\ y_2=e^{-3x},\ y_3=e^{2x},\ y_4=e^{-2x}.$$

Умумий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}.$$

3-мисол. $y^{V}-16y'=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^5-16k=0,$$

унинг ечимлари: $k_1=0$, $k_{2,3}=\pm2$ — ҳақиқий, $k_{4,5}=\pm2i$ — комплекс қўшма $(\alpha=0,\ \beta=2)$. Фундаментал ечимлар системасини ёзамиз:

$$y_1=e^{0x}=1,\ y_2=e^{2x},\ y_3=e^{-2x},\ y_4=e^{0x}\cos2x=\cos2x,\ y_5=\sin2x.$$

Умумий ечим:

$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos2x+C_5\sin2x.$$

4-мисол. $y''-y'-2x=0$ тенгламанинг $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2-k-2=0$ қуйидаги илдизларга эга: $k_1=2$, $k_2=-1$. Демак, умумий ечим

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$$

кўринишда бўлади. Унинг ҳосиласи:

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}.$$

Бошланғич шартларни умумий ечимга ва унинг ҳосиласига қўйиб, C_1 ва C_2 га нисбатан ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2, \\ 3=2C_1-C_2, \end{cases}$$

бу ердан $C_1=1$, $C_2=-1$. Демак, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$y=e^{2x}-e^{-x}.$$

5- мисол. $y''-4y'+5y=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $k^2-4k+5=0$ характеристик тенглама $k_{1,2}=2\pm i$ қўшма-комплекс илдизларга эга. Буларга мос фундаментал ечимлар системаси қуйидагича бўлади:

$$y_1=e^{2x}\cos x, \quad y_2=e^{2x}\sin x.$$

Умумий ечим:

$$y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x \text{ ёки } y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

6- мисол. $y^{IV}+2y'''+y''=0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$k^4+2k^3+k^2=0$, бу тенглама $k_{1,2}=0$ $(m=2)$; $k_{3,4}=-1$ $(m=2)$ каррали илдизларга эга. Буларга мос фундаментал ечимлар системаси

$$y_1=e^{0x}=1; \; y_2=x\cdot 1=x; \; y_3=e^{-x}, \; y_4=xe^{-x}$$

кўринишга эга бўлади. Демак, умумий ечим

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$$

ёки

$$y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x).$$

4- дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y''+4y'+3y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $y''+4y'+8y=0$.

Ж: а) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$;
б) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$;
в) $y=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

2. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y^{VI}-13y^{IV}+36y''=0$; б) $y^{IV}-8y''+16y=0$;

в) $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$; г) $y'''-3y''+3y'-y=0$;
д) $64y^{VIII}+48y^{VI}+12y^{IV}+y''=0$.

Ж: а) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}+C_5+C_6x$;
б) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{-2x}(C_3+C_4x)$;
в) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)+C_3+C_4x+C_5x^2$;
г) $y=e^{x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$;
д) $y=\cos\frac{x}{2}(C_1+C_2x+C_3x^2)+\sin\frac{x}{2}(C_4+C_5x+C_6x^2)+$
$+C_7+C_8x$.

3. Коши масаласини ечинг.

а) $y''+4y'+29y=0$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=15$;

б) $y^{V}=y'$; $y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=1$; $y''|_{x=0}=0$; $y'''|_{x=0}=1$;

$y^{IV}|_{x=0}=2$.

Ж: а) $y=3e^{-2x}\sin 5x$;
б) $y=e^{x}+\cos x-2$.

4- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:
а) $4y'''-8y'+5y=0$; в) $y^{IV}-6y''+9y=0$;
б) $3y''-2y'-8y=0$; г) $y^{IV}+y''=0$.

Ж: а) $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$;

б) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4x}{3}}$;

в) $y=e^{\sqrt{3}x}(C_1+C_2x)+e^{-\sqrt{3}x}(C_3+C_4x)$;

г) $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x$.

2. Коши масаласини ечинг.

а) $y''-2y'+y=0$; $y|_{x=2}=1$, $y'|_{x=2}=-2$;
б) $y'''-y'=0$; $y|_{x=0}=3$, $y'|_{x=0}=-1$; $y''|_{x=0}=1$.
Ж: а) $y=(7-3x)e^{x-2}$; б) $y=2+e^{-x}$.

5- §. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар

Ушбу

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x),$$

бу ерда $f(x)\not\equiv 0$, a_1 ..., a_n — ўзгармас сонлар, кўринишдаги тенглама *n- тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал* тенглама дейилади.

Берилган бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y=Y+\bar{y}$ формулага кўра аниқланади, бу ерда Y — мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, $\bar{y}$ — берилган бир жиисли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими.

Бу тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимлари тенгламаниинг ўнг томони ушбу

$$f(x)=e^{\gamma x}[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x]$$

махсус кўринишга эга бўлганда аниқмас коэффициентлар усули билан топилади. Бу ерда γ ва δ — берилгаи сонлар, $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ — мос равишда n- ва m- даражали маълум кўпҳадлар. Бу ҳолда берилган тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y}$ қуйидаги кўринишда изланади:

$$\bar{y}=x^r e^{\gamma x}[u_l(x)\cos\delta x+v_l(x)\sin\delta x],$$

бу ерда r

$$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+...+p_n=0$$

характеристик тенгламанинг $\gamma+\delta_i$ илдизнниинг карралилиги (агар характеристик тенглама буидай илднзга эга бўлмаса, $r=0$); $u_l(x)$ ва $v_l(x)$ — l- даражали кўпҳадлар, шу билаи бирга l сони m ва n ларнинг каттасига тенг.

$u_l(x)$ ва $v_l(x)$ кўпҳадлариинг коэффициентлари берилган тенгламада y ўрнига y ни қўйгандан сўнг уиинг чап ва ўнг томонларидаги ўхшаш ҳадлар коэффициентлариии бир-бирига тенглаш натижасида ҳосил бўлган алгебраик тенгламалар системасидан топилади.

Агар берилган бир жинсли бўлмаган чизиқли тенглмада $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ бўлса, унинг хусусий ечнми $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$ бўлади, бу ерда y_1 — ўнг томони $f_1(x)$ бўлган берилган тенгламанинг хусусий ечими, y_2 эса ўнг томони $f_2(x)$ бўлган бу тенгламанинг хусусий ечими.

1-мисол. Ушбу

$$y^{\mathrm{IV}}-3y''=9x^2$$

чизиқли тенгламанинг умумий ечимиии топинг.

Ечиш. $k^4-3k^2=0$ характеристик тенглама $k_1=k_2=0$, $k_{3,4}=\pm\sqrt{3}$ илдизларга эга, буларга ушбу $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{\sqrt{3}x}$, $y_4=e^{-\sqrt{3}x}$ фуидаментал ечимлар системаси мос келади, бу ердан мос бир жинсли теигламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$Y=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}.$$

Берилган тенгламада $f(x)=9x^2$, $\gamma=0$, $\delta=0$, шунинг учун $\gamma+i\delta=0$. Бу сон характеристик тенгламанинг иккала $k_1=k_2=0$ илдизлари билан бир хилдир, шунинг учун $r=2$ ва хусусий ечим $\bar{y}$ ни

$$\bar{y}=(Ax^2+Bx+C)x^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2$$

кўринишда излаймиз.

$\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{y}'''$, $\bar{y}^{\mathrm{IV}}$ ҳосилаларни топамиз ва уларни қуйидаги схема бўйича жойлаштирамиз (тик чизиқнинг чап томонига тенгламада булар олдида турган коэффициентларни ёзиб чиқамиз):

$$\begin{array}{r|l}
0 & \bar{y}=Ax^4+Bx^3+Cx^2, \\
0 & \bar{y}'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx, \\
-3 & \bar{y}''=12Ax^2+6Bx+2C, \\
0 & \bar{y}'''=24Ax+6B, \\
1 & \bar{y}^{\mathrm{IV}}=24A.
\end{array}$$

Топилганларни тенгламага қўямиз:

$$\bar{y}^{\mathrm{IV}}-3\bar{y}''=-36Ax^2-18Bx-6C+24A=9x^2.$$

Бу ерда чап ва ўиг томонда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C ларни топиш учун алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & -36A=9, \\
x & -18B=0, \\
x^0 & \quad 6C+24A=0,
\end{array}$$

бу ердан $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=-1$.

Демак, $\bar{y}$ хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\bar{y}=-\frac{1}{4}x^4-Cx^2.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y=Y+\bar{y}=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}-\frac{1}{4}x^4-Cx^2.$$

2-мисол. Ушбу

$$y''-7y'+6y=xe^x;\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3.$$

Коши масаласиии ечинг.

Ечиш. $k^2-7k+6=0$ характеристик тенглама $k_1=1$, $k_2=6$ илдизларга эга, шунинг учун мос бир жинсли тенглама $y''-7y'+6y=0$ нинг умумий ечими $Y=C_1e^x+C_2e^{6x}$ функциядан иборат.

Тенгламанинг ўнг томони $f(x)=xe^x$, $\gamma=1$, $\delta=0$, $\gamma+i\delta=1=k$, шунинг учун $r=1$; $P_1(x)=x$, демак, хусусий ечим y ни

$$\bar{y}=xe^x(Ax+B)\ \text{ёки}\ \bar{y}=e^x(Ax^2+Bx)$$

кўринишда излаймиз.

1- мисолдаги каби топамиз:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y=e^x(Ax^2+Bx), \\ -7 & y'=e^x(Ax^2+Bx+2Ax+B), \\ 1 & y''=e^x(Ax^2+Bx+2Ax+B+2Ax+B+2A). \end{array}$$

Тенгламага қўямиз:

$$\bar{y}''-7\bar{y}'+6\bar{y}=e^x(6A-7A+A)x^2+e^x(6B+7B-14A+B+4A)x+$$
$$+e^x(-7B+2B+2A)=xe^x.$$

Бу айниятииг иккала томонини $e^x\neq0$ га бўлиб ва чап ҳамда ўнг томонда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0=0, \\ x & -10A=1, \quad \text{бу ердан } A=-\frac{1}{10},\ B=-\frac{1}{25}. \\ x^0 & 2A-5B=0, \end{array}$$

Демак, хусусий ечим: $\bar{y}=e^x\left(-\frac{x^2}{10}-\frac{x}{25}\right).$

Умумий ечим: $y=C_1e^x+C_2e^{6x}-e^x\left(\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}\right).$

Коши масаласини ечиш учун y' ни топамиз:

$$y'=C_1e^x+6C_2^{6x}-e^x\left(\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}+\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

Бошланғич шартлардан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармаслар C_1 ва C_2 ларни топиш учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$1=C_1+C_2, \qquad\qquad 1=C_1+C_2,$$
$$3=C_1+6C_2-\frac{1}{25} \text{ ёки } \frac{76}{25}=C_1+6C_2,$$

бу ердаи $C_1=\frac{74}{125}$, $C_2=\frac{51}{125}$.

Демак, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=\frac{74}{125}e^x+\frac{51}{125}e^{6x}-e^x\left(\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}\right).$$

3- мисол. Ушбу

$$y''+y=(x^2-1)e^{-x}+\sin x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $k^2+1=0$ характеристик тенглама $k_{1,2}=\pm i$ ($\alpha=0$, $\beta=1$) мавҳум илдизларга эга, демак, мос бир жинсли тенгламанинг у умумий ечими $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ функция кўриинишида бўлади. Тенгламанинг ўнг томони ушбу $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг йиғиндисидан иборат:

$$f_1(x)=(x^2-1)e^{-x};\ f_2(x)=\sin x,$$

шуиинг учун тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимини $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$ кўринишда излаймиз.

$\bar{y}_1$ учун:

$$f_1(x)=(x^2-1)e^{-x},\ \gamma=-1,\ \delta=0;\ \gamma+i\delta=-1\neq k_1,\ k_2,$$

демак, $r=0$ ва $\bar{y}_1=(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$.

$\bar{y}_2$ учуи:

$$f_2(x)=\sin x,\ \gamma=0,\ \delta=1;\ \gamma=i\delta=i=k_1\neq k_2,$$

демак, $r=1$ ва $\bar{y}_2=(D\sin x+E\cos x)x$.

Шундай қилиб,

$$\begin{array}{r|l} 1 & \bar{y}=e^{-x}(Ax^2+Bx+C)+(Dx\sin x+Ex\cos x), \\ 0 & \bar{y}'=e^{-x}(-Ax^2-Bx-C+2Ax+B)+\sin x(D-Ex)+\cos x(E+Dx), \\ 1 & \bar{y}''=e^{-x}(Ax^2+Bx+C-2Ax-B-2Ax-B+2A)+ \\ & +\sin x(-E-E-Dx)+\cos x(D-Ex+D). \end{array}$$

Топилганларни тенгламага қўямиз:

$$\bar{y}''+\bar{y}'=e^{-x}(A+A)x^2+e^{-x}(B+B-2A-2A)x+e^x(C+C-$$
$$-B-B+2A)+\sin x(Dx-2E-Dx)+\cos x(Ex+2D-Ex)=$$
$$=(x^2-1)e^{-x}+\sin x.$$

Охирги айниятнинг чап ва ўнг томонларидаги бир хил ҳадлар олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C, D, E ларни топамиз:

$$\begin{array}{r|l} x^2e^{-x} & 1=2A, \\ xe^{-x} & 0=2B-4A, \\ x^0e^{-x} & -1=2C-2B+2A, \\ \sin x & 1=-2E, \\ \cos x & 0=2D, \end{array}$$

бу ердан $A=\frac{1}{2}$, $B=1$, $C=0$, $D=0$, $E=-\frac{1}{2}$. Бинобарин $\bar{y}$ хусусий ечим $\bar{y}=e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{x}{2}\cos x$ функциядан, умумий ечим эса

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{x}{2}\cos x$$

функциядан иборат бўлади.

5- дарсхона топшириғи

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$;
б) $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$;
в) $y''+3y'-10y=xe^{-2x}$;
г) $y''-2y'+2y=e^x\sin x$,
д) $y^{\mathrm{IV}}-y=xe^x+\cos x$;
е) $y''-3y'+2y=3x+5\sin 2x$;
ж) $y''-4y'+4y=8(x^2+e^{2x}+\sin 2x)$.

Ж: а) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{64}(24x^2+52x+41)$;

б) $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+\frac{1}{102}(14\cos x+5\sin x)$;

в) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}$;

г) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{2}xe^x\cos x$;

д) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x+\frac{x^2-3x}{8}e^x-\frac{x}{4}\sin x$;

е) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$;

ж) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+2x^2+4x+3+4xe^{2x}+\cos 2x$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y'''-y'=3(2-x^2)$; $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=1$;
б) $y''+y=-\sin 2x$; $y|_{x=\pi}=y'|_{x=\pi}=1$.

Ж: а) $y=e^x+x^3$; б) $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin x-\cos x$.

5- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y''-3y'+2y=x-e^{-2x}+1$;
б) $2y''+5y'=29x\sin x$;
в) $y''-4y'+4y=\sin x\cdot\cos 2x$.

Ж: а) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

б) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5x}{2}}+\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

в) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{169}(-\frac{5}{2}\sin 3x+6\cos 3x)-$

$-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-2$;
б) $y'''-y'=-2x$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=2$;
в) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$; $y|_{x=\pi}=\pi e^{\pi}$, $y'|_{x=\pi}=e^{\pi}$.

Ж: а) $y=4(e^x-e^{2x})+\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}$;

б) $y=e^x-e^{-x}+x^2$;
в) $y=e^x[(2x-\pi-1)\sin x-\pi\cos x]$.

6- §. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламаларда ўзгармасни вариациялаш усули

Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани ечишнинг умумий усули ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усулидан иборат.

Агар мос бир жинсли тенгламанинг y_1, y_2, ..., y_n фундаментал ечимлар системаси маълум бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда топилиши мумкин:

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n,$$

бу ерда $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ функциялар ушбу тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0. \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2(x)y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

Иккинчи тартибли

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y''=f(x)$$

тенглама учун мос система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases}$$

1- мисол. $y''+y=\operatorname{tg}x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $k^2+1=0$ характеристик тенглама $k_{1,2}=\pm i$ илдизларга эга, шунинг учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ бўлади.

Берилган тенгламанинг хусусий ечимини аниқмас коэффициентлар усули ёрдамида топиб бўлмайди. Шунинг учун ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усулидан фойдаланамиз, яъни умумий ечимни

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ функциялар

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

системадан топилади. Системани ечсак:

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},\quad C_2'(x) = \sin x .$$

Интеграллашдан сўнг қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + \bar{C}_2,$$

бу ерда $\bar{C}_1$ ва $\bar{C}_2$ — ихтиёрий интеграллаш ўзгармаслари.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \left(\bar{C}_1 + \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x + (\bar{C}_2 - \cos x)\sin x$$

ёки

$$y = \bar{C}_1\cos x + \bar{C}_2\sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| .$$

6- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимини ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули ёрдамида топинг:

а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2}$; б) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$;

в) $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$; г) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

Ж: а) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + xe^x \ln|x|$;

б) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$;

в) $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$;

г) $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2)e^{-2x}$.

2. Коши масаласини ечинг:

$$y'' + y' = \frac{1}{\sin x};\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1,\ y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 .$$

Ж: $y = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$.

6- мустақил иш

I. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ж: $y = (C_1 + \sqrt{4-x^2} + \arcsin\frac{x}{2} + C_2 x)e^x$.

2. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Ж: $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \ln\left|\cos x + \right.$

$\left. + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \cdot \arcsin(\sqrt{2}\sin x)$.

3: $y'' - y' = -e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

Ж: $y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2}e^x(\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}}) +$

$+ \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}$.

II. Коши масаласини ечинг:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x};\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0;\ y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

Ж: $y = -\cos 2x \ln|\sin x| - x\sin 2x - \cos^2 x$.

8- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

1.1. $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$.

1.2. $(3+e^x)yy' = e^x$.

1.3. $y\ln y + xy' = 0$.

1.4. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.5. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

1.6. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$.

1.7. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$.

1.8. $xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$.

1.9. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.10. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$.

1.11. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.

1.12. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$.

1.13. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

1.14. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0.$

1.15. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0.$

1.16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$

1.17. $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx.$

1.18. $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0.$

1.19. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

1.20. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0.$

1.21. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$

1.22. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx.$

1.23. $y(1+\ln y)+xy'=0.$

1.24. $(1+e^x)yy'=e^x.$

1.25. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$

1.26. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

1.27. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$

1.28. $(1+e^x)y'=ye^x.$

1.29. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0.$

1.30. $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

2.1. $(2x-y)dx+(x+y)dy=0.$

2.2. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0.$

2.3. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx.$

2.4. $y'=\frac{x+y}{x-y}.$

2.5. $(y^2-xy)dx+$
$+(x^2-2xy)\ dy=0.$

2.6. $x\ln\frac{x}{y}dy-ydx=0.$

2.7. $(xye^{\frac{x}{y}}+y^2)dx=x^2e^{\frac{x}{y}}dy.$

2.8. $(x-y)ydx-x^2dy=0.$

2.9. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx.$

2.10. $(x^2-y^2)dx=2xydy.$

2.11. $y^2dx=(xy-x^2)dy.$

2.12. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$

2.13. $xy+y^2(2x^2+xy)y'.$

2.14. $xyy'=y^2+2x^2.$

2.15. $2xy'\cdot y=x^2+y^2.$

2.16. $(5xy-x^2)y'-5y^2=0.$

2.17. $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y.$

2.18. $4y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+5.$

2.19. $xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y.$

2.20. $y'(2x^2+2xy)=x^2+2xy-y^2.$

2.21. $xy'=\frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$

2.22. $y'=\frac{x+2y}{2x-y}.$

2.23. $xy'=y(\ln\frac{y}{x}-1).$

2.24. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$

2.25. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}.$

2.26. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}.$

2.27. $xy'=y-\sec^{\frac{y}{x}}.$

2.28. $xy'=y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right).$

2.29. $y'=\frac{x^2+xy-3y^2}{3x^2-2xy}.$

2.30. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y.$

3. Коши масаласини ечинг:

3.1. $xy'-y=x^2\cos x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

3.2. $xy'+y=x^3;\ y(1)=0.$

3.3. $y'\cos x+y\sin x=1;\ y(0)=1.$

3.4. $y'+2xy=xe^{-x^2};\ y(0)=-1.$

3.5. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2};\ y(1)=1.$

3.6. $y'-y\cos x=\sin 2x;\ y(0)=-1.$

3.7. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3;\ y(0)=\frac{1}{2}.$

3.8. $y'+2xy=-2x^3;\ y(1)=e^{-1}.$

3.9. $y'+\frac{2y}{x}=x^3;\ y(1)=-\frac{5}{6}.$

3.10. $y'-\frac{y}{x}=x^2;\ y(1)=0.$

3.11. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2\ln x}{x};\ y(1)=1.$

3.12. $y'+\frac{y}{x}=\sin x;\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}.$

3.13. $y'-\frac{y}{x}=x\sin x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

3.14. $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2x;\ y(-1)=\frac{3}{2}.$

3.15. $y'-\frac{y}{x+1}=e^x(x+1);\ y(0)=1.$

3.16. $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2};\ y(0)=\frac{2}{3}.$

3.17. $y'-\frac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2;\ y(0)=1.$

3.18. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\cos^2x;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$

3.19. $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;\ y(0)=0.$

3.20. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2;\ y(1)=3.$

3.21. $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x};\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}.$

3.22. $xy'+y=\ln x+1;\ y(1)=0.$

3.23. $y'\operatorname{ctg}x - y = 2\cos^2 x\operatorname{ctg}x;\ y(0) = 0$.

3.24. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x};\ y(1) = 0.$

3.25. $(xy' - 1)\ln x = 2y;\ y(e) = 0.$

3.26. $y = x(y' - x\cos x);\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.27. $xy' - 2y = 2x^4;\ y(1) = 0.$

3.28. $y' + y\operatorname{tg}x + \sin x;\ y(0) = 0$.

3.29. $(x^2+1)y' + 4xy = 3;\ y(0) = 0.$

3.30. $y' + \frac{1-x}{1+x}\ y = \frac{e^{-x}}{1-x};\ y(0) = \ln 5$.

4. Коши масаласининг ечимини топинг:

4.1. $y' - y\operatorname{tg}x = -\frac{2}{3}y^4\sin x;\ y(0) = 1$.

4.2. $y' - y = xy^2;\ y(0) = 1$.

4.3. $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2;\ y(0) = 1$.

4.4. $y' - y = 2xy^2;\ y(0) = \frac{1}{2}$.

4.5. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}\cdot e^{-2x^2};\ y(0) = -1$.

4.6. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x;\ y(1) = 1.$

4.7. $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2; y(0) = 1$.

4.8. $y'x + y = \frac{xy^2}{3};\ y(1) = 3$.

4.9. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1};\ y(0) = 2.$

4.10. $y' + 4x^2y = 4y^2e^{4x}(1-x^2);\ y(0) = -1.$

4.11. $2(y' + xy) = (x-1)e^x - y^2;\ y(0) = 2$.

4.12. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1};\ y(0) = 1.$

4.13. $y' + xy = (x-1)e^xy^2;\ y(0) = 1.$

4.14. $xy' + y = y^2\ln x;\ y(1) = 1.$

4.15. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1};\ y(0) = 1.$

4.16. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x);\ y(0) = 1.$

4.17. $2(xy' + y) = xy^2;\ y(1) = 2.$

4.18. $xy' + y = 2y^2\ln x;\ y(1) = \frac{1}{2}$.

4.19. $3(xy' + y) = y^2\ln x;\ y(1) = 3.$

4.20. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4;\ y(1) = 1.$

4.21. $y' + 2xy = 2x^3y^3;\ y(0) = \sqrt{2}.$

4.22. $2(y' + y) = xy^2;\ y(0) = 2.$

4.23. $y' + y = xy^2;\ y(0) = 1.$

4.24. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2;\ y(0) = 1.$

4.25. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2;\ y(0) = 2.$

4.26. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3;\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.27. $2xy' - 3y = -(20x^2+12)y^3;\ y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4.28. $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3;\ y(1) = \sqrt{2}.$

4.29. $2(xy' + y) = y^2\ln x;\ y(1) = 2.$

4.30. $xy' + y = xy^2;\ y(1) = 1.$

5. Дифференциал тенгламанинг умумий интегралини топинг:

5.1. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + \operatorname{tg}x)dy = 0.$

5.2. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$.

5.3. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$.

5.4. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$

5.5. $(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$.

5.6. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$

5.7. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$

5.8. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$

5.9. $e^ydx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$

5.10. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}\ dy = 0$.

5.11. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$.

5.12. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$.

5.13. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.

5.14. $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$

5.15. $\frac{1+xy}{x^2y}\ dx\ + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$.

5.16. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0$.

5.17. $(\cos(x+y^2)+\sin x)\,dx+2y\cos(x+y^2)\,dy=0.$

5.18. $(6xy^2+4x^3)\,dx+(6x^2y+y)^2dy=0.$

5.19. $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cdot\cos\frac{2x}{y}dy=0.$

5.20. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$

5.21. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

5.22. $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0.$

5.23. $(5xy^2-x^3)\,dx+(5x^2y-y)\,dy=0.$

5.24. $\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}=0.$

5.25. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)\,dy=0.$

5.26. $(3x^2y+2y+3)\,dx+(x^3+2x+3y^2)\,dy=0.$

5.27. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0.$

5.28. $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0.$

5.29. $xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2y)\,dy=0.$

5.30. $\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0.$

6. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

6.1. $y'''+y''\mathrm{tg}x=0.$

6.2. $y'''x\ln x=y''.$

6.3. $y''=-\frac{x}{y}.$

6.4. $x^2y''+xy'=1.$

6.5. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1).$

6.6. $y''\mathrm{ctg}x+y'=2.$

6.7. $xy'''+y''=\frac{1}{\sqrt{x}}.$

6.8. $xy'''-2y''=\frac{2}{x^2}.$

6.9. $x^4y''+x^3y'=4.$

6.10. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x.$

6.11. $\mathrm{tg}x\cdot y''-y'+\frac{1}{\sin x}=0.$

6.12. $(1+x^2)\,y''+2xy'=x^3.$

6.13. $y'''\cdot\mathrm{ctg}2x+2y''=0.$

6.14. $\mathrm{tg}x\cdot y'''=2y''.$

6.15. $x^2y''+xy'=1.$

6.16. $y''+2xy'^2=0.$

6.17. $xy''=y'+x^2.$

6.18. $xy'''-y''=\frac{1}{x}.$

6.19. $xy'''+y''=1.$

6.20 $(x+1)\,y'''+y''=x+1.$

6.21. $xy'''+2y''=0.$

6.22. $xy'''+y''+x=0.$

6.23. $y'''\mathrm{tg}5x=5y''.$

6.24. $(1+\sin x)\,y'''=y''\cos x.$

6.25. $x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}.$

6.26. $y'''\mathrm{tg}x=y''+1.$

6.27. $x^5y'''+x^4y''=1.$

6.28. $xy''+y'=\ln x.$

6.29. $xy''-y'=2x^2e^x.$

6.30. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}.$

7. Коши масаласини ечинг:

7.1. $y''y^3+1=0;\ y(1)=-1,\ y'(1)=-1.$

7.2. $1+y'^2=yy'';\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

7.3. $y''y^3+36=0;\ y(0)=3,\ y'(0)=2.$

7.4. $4y^3y''=y^4-1;\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

7.5. $y''=18y^3;\ y(1)=1,\ y'(1)=3.$

7.6. $y''=2-y;\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$

7.7. $y^{12}+2yy''=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.8. $y''y^3+9=0;\ y(1)=1,\ y'(1)=3.$

7.9. $4y^3y''=y^4-16;\ y(0)=2\sqrt{2};\ y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

7.10. $yy''+y^{12}=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.11. $y^3y''=4(y^4-1);\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=\sqrt{2}.$

7.12. $yy''-2y^{12}=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

7.13. $y''+2yy^{12}=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.14 $y''\mathrm{tg}y=2y^{12};\ y(1)=\frac{\pi}{2},\ y'(1)=2.$

7.15. $y''y^3+25=0;\ y(2)=-5,\ y'(2)=-1.$

7.16. $y(1-\ln y)\,y''+(1+\ln y)\,y^{12}=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.17. $y''(1+y)=y^{12}+y';\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$

7.18. $y''+18\sin y\cos^3y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=3.$

7.19. $2yy''=y^{12};\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.20. $y''y^3+4=0;\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2.$

7.21. $y''(1+y)=5y^{12};\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

7.22. $yy''-y^{12}=y^4;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7.23. $y''=y'e^y;\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

7.24. $y''=32y^3;\ y(4)=1,\ y'(4)=4.$

7.25. $y'=-\frac{1}{2y^3};\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=\sqrt{2}.$

7.26. $y^3y''=y^4-16;\ y(0)=2\sqrt{2},\ y'(0)=\sqrt{2}.$

7.27. $4y''^2=1+y^{12};\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

7.28. $y''=1-y^{12};\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

7.29. $y''(2y+3)=2y^{12};\ y(0)=0,\ y'(0)=3.$

7.30. $yy''-2yy'\ln y=y^{12};\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

8.1. $y^{IV}+y'''=12x+6;$

8.2. $y^{IV}+2y'''+y''=2-3x^2;$

8.3. $y^{IV}+2y'''+y''=4x^2;$

8.4. $y'''+3y''+2y'=1-x^2;$

8.5. $y'''+y''=5x^2-1;$

8.6. $y'''+y''=49-24x^2;$

8.7. $y'''-5y''+6y^{I}=6x^2+2x-5;$

8.8. $y'''-y''=6x^2+3x;$

8.9. $y^{IV}+4y'''+4y''=x-x^2;$

8.10. $y'''-2y''=3x^2+x-4;$

8.11. $y'''-y'=x^2+x;$

8.12. $7y'''-y''=12x.$

8.13. $y'''-13y''+12y'=x-1;$

8.14. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=2x;$

8.15. $y'''+3y''+2y'=3x^2+2x;$

8.16. $y^{IV}+y'''=x;$

8.17. $y^{IV}-y'''=5(x+2)^2.$

8.18. $y'''-y'=3x^2-2x+1.$

8.19. $y'''-y''=6x+5;$

8.20. $y^{IV}-2y'''+y''=2x(1-x);$

8.21. $y'''-y''=4x^2-3x+2;$

8.22. $y'''+3y''+2y'=x^2+2x+3;$

8.23. $y^{IV}+2y'''+y''=x^2+x+1;$

8.24. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=x-3;$

8.25. $y'''-5y''+6y'=(x-1)^2;$

8.26. $y^{V}-y^{IV}=2x+3;$

8.27. $y^{IV}+2y'''+y''=12x^2-6x;$

8.28. $y^{IV}+6y'''+9y''=3x-1;$

8.29. $3y^{IV}+y'''=6x-1.$

8.30. $y'''-13y''+12y'=18x^2-39.$

9. Дифференциал тенгламанииг умумий ечимини топинг:

9.1. $y'''+4y''+3y'=4(1-x)e^{-x};$

9.2. $y'''-4y''-3y'=-4xe^x;$

9.3. $y'''-3y'-2y=-4xe^x;$

9.4. $y'''-y''-9y'+9y=(12-16x)e^x.$

9.5. $y'''-5y''+7y'-3y=(20-16x)e^{-x}.$

9.6. $y'''+y''-y'-y=(8x+4)e^x.$

9.7. $y'''+6y''+9y'=(16x+24)e^x.$

9.8. $y'''+3y''+2y'=(1-2x)e^{-x}.$

9.9. $y'''+6y''-3y'=(4x+2)e^x.$

9.10. $y'''+2y''+y'=(18x+21)e^{2x}.$

9.11. $y'''+2y''-3y'=(8x+6)e^x.$

9.12. $y'''-y''-4y'+4y=(7-6x)e^x.$

9.13. $y'''-4y''+4y'=(x-1)e^x.$

9.14. $y'''-2y''-3y'=(8x-14)e^{-x}.$

9.15. $y'''-3y''-y'+3y=(4-8x)e^x.$

9.16. $y'''-5y''+8y'-4y=(2x-5)e^x.$

9.17. $y'''+5y''+7y'+3y=(16x+20)e^x.$

9.18. $y'''+4y''+4y'=(9x+15)e^x.$

9.19. $y'''-3y'+4y=(18x-21)e^{-x}.$

9.20. $y'''-y''-5y'-3y=-(8x+4)e^x.$

9.21. $y'''+y''-2y'=(6x+5)e^x.$

9.22. $y'''-2y''+y'=(2x+5)e^{2x}.$

9.23. $y'''-7y''+15y'-9y=(8x-12)e^x.$

9.24. $y'''-y''-2y'=(6x-11)e^{-x}.$

9.25. $y'''-y''-y'+y=(3x+7)e^{2x}.$

9.26. $y'''-6y''+9y'=4xe^x.$

9.27. $y'''+4y''+5y'+2y=(12x+16)e^x.$

9.28. $y'''-3y''+2y'=(1-2x)e^x.$

9.29. $y'''-5y''+3y'+9y=e^{-x}(32x-32).$

9.30. $y'''-3y'+2y=(4x+9)e^{2x}.$

10. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

10.1. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x.$

10.2. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\cdot\sin 4x.$

10.3. $y''-4y'+8y=e^x(-\sin x+2\cos x).$

10.4. $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x).$

10.5. $y''+2y'+5y=-2\sin x.$

10.6. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos 5x.$

10.7. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\cdot\sin 6x.$

10.8. $y''-4y'+8y=e^x\cdot(-3\sin x+4\cos x).$

10.9. $y''+y=2\cos 7x-3\sin 7x.$

10.10. $y''+2y'=-2e^{x}\cdot(\sin x+\cos x).$

10.11. $y''+2y'=10e^{x}\cdot(\sin x+\cos x).$

10.12. $y''+2y'+5y=-\cos x.$

10.13. $y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x.$

10.14. $y''-4y'+4y=e^{2x}\cdot\sin 5x.$

10.15. $y''+4y=e^{2x}\cos 3x.$

10.16. $y''-4y'+8y=e^{x}\cdot(2\sin x-\cos x).$

10.17. $y''+2y'+5y=-\sin 2x.$

10.18. $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x.$

10.19. $y''+2y'=3e^{x}\cdot(\sin x+\cos x).$

10.20. $y''-4y'+8y=e^{x}\cdot(5\sin x-3\cos x).$

10.21. $y''+2y'+5y=-17\sin 2x.$

10.22. $y''+2y'=e^{x}(\sin x+\cos x).$

10.23. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos x.$

10.24. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos 8x.$

10.25. $y''-4y'+4y=e^{2x}\cdot\sin 3x.$

10.26. $y''-4y'+8y=e^{x}\cdot(3\sin x+5\cos x).$

10.27. $y''+2y'+5y=10\cos x.$

10.28. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos 4x.$

10.29. $y''+2y'=6e^{x}(\sin x+\cos x).$

10.30. $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x.$

11. Коши масаласини ечинг:

11.1. $y''+y=\frac{1}{\sin x};\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

11.2. $y''-2y'=\frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}};\ y(0)=\ln 4,\ y'(0)=\ln 4-2.$

11.3. $y''-6y'+8y=\frac{4}{2+e^{-2x}};\ y\ (0)=1+3\ \ln 3,\ y'(0)=10\ \ln 3.$

11.4. $y''-3y'+2y=\frac{e^{x}}{1+e^{-x}};\ y\ (0)=0,\ y'(0)=0.$

11.5. $y''+16y=\frac{16}{\cos 4x};\ y\ (0)=3,\ y'(0)=0.$

11.6. $y''+y=4\mathrm{ctg}\,x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.$

11.7. $y''+\pi^{2}y=\frac{\pi^{2}}{\cos\pi x};\ y(0)=+3,\ y'(0)=0.$

11.8. $y''+6y'+8y=\frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}};\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

11.9. $y''+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{2};\ y(\pi)=2,\ y'(\pi)=\frac{1}{2}.$

11.10. $y''+y=\frac{1}{\cos x};\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

11.11. $y''+3y'=\frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}};\ y(0)=\ln 4;\ y'(0)=3(1-\ln 2).$

11.12. $y''+9y=\frac{9}{\sin 3x};\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=4,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{2}.$

11.13. $y''-3y'+2y=\frac{1}{2+e^{-x}};\ y(0)=1+3\ln 3,\ y'(0)=5\ln 3.$

11.14. $y''+4y=8\mathrm{ctg}\,2x;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=5,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$

11.15. $y''+9y=\frac{9}{\cos 3x};\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

11.16. $y''+3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^{x}};\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

11.17. $y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}};\ y(0)=1+2\ln 2,\ y'(0)=6\ln 2.$

11.18. $y''-y'=\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}};\ y(0)=\ln 27,\ y'(0)=\ln 9-1.$

11.19. $y''+4y=\frac{4}{\sin 2x};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi.$

11.20. $y''-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}};\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

11.21. $y''+4y=4\mathrm{ctg}\,2x;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.$

11.22. $y''+4y=\frac{4}{\cos 2x};\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$

11.23. $y''+\pi^{2}y=\frac{\pi^{2}}{\sin\pi x};\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{2}}{2}.$

11.24. $y''-3y'+2y=\frac{1}{3+e^{-x}};\ y(0)=1+8\ln 2,\ y'(0)=14\ln 2.$

11.25. $y''+y'=\frac{e^{x}}{2+e^{x}};\ y(0)=\ln 27,\ y'(0)=1-\ln 9.$

11.26. $y''-6y'+8y=\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}};\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

11.27. $y''+y=2\mathrm{ctg}\,x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$

11.28. $y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}};\ y(0)=4\ \ln 4;\ y^{1}(0)=3(3\ln 4-1)$

11.29. $y''+16y=\frac{16}{\sin 4x};\ y\left(\frac{\pi}{8}\right)=3,\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\pi.$

11.30. $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}};\ y(0)=1+2\ \ln 2,\ y'(0)=3\ \ln 2.$

7- §. Дифференциал тенгламалар системаларини ечиш

8.7.1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2'=f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_n'=f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системаси *нормал система* дейилади, бу ерда $y_1, y_2, ..., y_n$ — эркли ўзгарувчи x нинг номаълум функциялари.

Бу системани қаноатлантирувчи $y_1=\varphi_1(x), y_2=\varphi_2(x), ..., y_n=\varphi_n(x)$ функциялар системаси бу *системанинг ечими* дейилади.

Берилган дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласи шундай ечимни топишдан иборатки, бу ечим $x=x_0$ да берилган $y_1|_{x=x_0}=y_{10}$, $y_2|_{x=x_0}=y_{20}, ..., y_n|_{x=x_0}=y_{n0}$ бошланғич шартларни қаноатлантирсин.

Нормал системанинг *умумий ечими* деб n та $C_1, C_2, ..., C_n$ ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2=\varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_n=\varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

функциялар системасига айтилади. Бу ечим берилган тенгламани ихтиёрий ўзгармасларнинг ҳар қандай мумкин бўлган қийматларида айниятга айлантиради ва берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб танланса, Коши масаласининг ечими бўлади.

Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг мумкин бўлган баъзи қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

8.7.2. Нормал системани ечишнинг усулларидан бири номаълум функцияларни йўқотиш усули бўлиб, у n та дифференциал тенгламалар системасини бир номаълум функцияли битта n-тартибли дифференциал тенгламага келтиради.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'=y+z, \\ z'=y-z \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасини $y|_{x=0}=2$, $z|_{x=0}=0$ бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. Номаълум функция z ни йўқотиш учун биринчи тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y''=y'+z',$$

бу ерда z' ўрнига унинг иккинчи тенгламадан аниқланган ифодасини қўямиз:

$$y''=y'+y-z.$$

Энди z ўрнига унинг биринчи тенгламадан олинган ифодасини қўйсак,

$$y''-2y=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг $k^2-2=0$ характеристик тенгламаси $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ илдизларга эга.

Демак, умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}.$$

z учун умумий ечимни системанинг биринчи тенгламасидан топамиз:

$$z=y'-y=C_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}x}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}x}.$$

Ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз:

$$C_1+C_2=2,$$
$$C_1(\sqrt{2}-1)-C_2(\sqrt{2}+1)=0.$$

Бу ердан:

$$C_1=\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \quad C_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Шундай қилиб, биз излаётган хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{\sqrt{2}x}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}x},$$
$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}x}.$$

8.7.3. Агар дифференциал тенгламалар нормал системасининг ўнг томонлари номаълум $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияларга нисбатан чизиқли функциялар бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси *чизиқли система* дейилади. n та номаълум $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялар қатнашган коэффициентлари ўзгармас бўлган, n та чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Бу системаниг ечими

$$y_1=\alpha_1 e^{kx},\ y_2=\alpha_2 e^{kx},\ \ldots,\ y_n=\alpha_n e^{kx}$$

кўринишда изланади. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ларни берилган дифференциал тенгламалар системасига қўйиб, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\ \alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\alpha_n = 0. \end{cases}$$

k қуйидаги n- даражали тенгламадан топилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 .$$

Бу тенглама берилган дифференциал тенгламалар системасининг характеристик тенгламаси дейилади. k нинг турли қийматларига α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ларнинг маълум тўплами мос келади. Характеристик тенгламанинг илдизлари турлича бўлсин: $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

У ҳолда k_1 илдизга бирорта $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{n1}$ тўплам мос келиб, унга биринчи ечим тўғри келади:

$$y_{11}=\alpha_{11}e^{k_1x},\ y_{21}=\alpha_{21}e^{k_1x},\ldots,\ y_{n1}=\alpha_{n1}e^{k_1x}.$$

Шунга ўхшаш k_2 илдизга $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2n}$ тўплам мос келади, унга ўз навбатида иккинчи ечим тўғри келади:

$$y_{12}=\alpha_{12}e^{k_2x},\ y_{22}=\alpha_{22}e^{k_2x},\ldots,\ y_{n2}=\alpha_{n2}e^{k_2x}.$$

k_n илдизга $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}$ тўплам мос келади ва унга n- ечим тўғри келади:

$$y_{1n}=\alpha_{1n}e^{k_nx},\ y_{2n}=\alpha_{n2}e^{k_nx},\ldots,\ y_{nn}=\alpha_{nn}e^{k_nx}$$

Фундаментал ечимлар системасини ҳосил қилдик. Умумий ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1y_{11} + C_2y_{12} + \ldots + C_ny_{1n}, \\ y_2 &= C_1y_{21} + C_2y_{22} + \ldots + C_ny_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1y_{n1} + C_2y_{n2} + \ldots + C_ny_{nn}. \end{aligned}$$

2- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = 7y + 3z, \\ z' = 6y + 4z \end{cases}$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни $y=\alpha e^{kx}$, $z=\beta e^{kx}$ кўринишда излаймиз.

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 7-k & 3 \\ 6 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } k^2-11k+10=0.$$

Унинг илдизлари: $k_1=1$, $k_2=10$ — ҳақиқий ва ҳар хил сонлар.

а) $k_1=1$ да α ва β ларни топиш учун тузиладиган система қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} (7-1)\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + (4-1)\beta = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Унинг битта $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$ ечимини олайлик. $k_1=1$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$ га мос хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1=e^x,\ z_1=-2e^x.$$

б) $k_2=10$ да α ва β лар қуйидаги системадан топилади:

$$\begin{cases} (7-10)\ \alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + (4-10)\beta = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha - 6\beta = 0. \end{cases}$$

Бу тенгламанинг $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$ ечимини олайлик. $k_2=10$, $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$ га мос хусусий ечим

$$y_2=e^{10x},\ z_2=e^{10x}$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, бу ҳолда фундаментал система қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x,\ y_2 = e^{10x}, \\ z_1 &= -2e^x,\ z_2 = e^{10x}. \end{aligned}$$

Умумий ечим:

$$\begin{matrix} y=C_1y_1+C_2y_2, & \text{ёки} & y=C_1e^x+C_2e^{10x}, \\ z=C_1z_1+C_2z_2 & & z=-2C_1e^x+C_2e^{10x}. \end{matrix}$$

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'=-7y+z, \\ z'=-2y-5z \end{cases}$$

системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$y=\alpha e^{kx},\ z=\beta e^{kx}.$$

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix}=0 \text{ ёки } k^2+12k+37=0.$$

Унинг илдизлари: $k_{1,2}=-6\pm i$ — комплекс сонлар. $k_1=-6+i$ учун α ва β лар қуйидаги системадан топилади:

$$\begin{cases} (-7+6-i)\ \alpha+\beta=0, \\ -2\alpha+(-5+6-i)\beta=0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} (-1-i)\ \alpha+\beta=0, \\ -2\alpha+(1-i)\beta=0. \end{cases}$$

Система $\beta=(1+i)\ \alpha$ тенгламага келтирилади. Бу ердан $\alpha_1=1$ десак, $\beta_1=1+i$. $k_1=-6+i$, $\alpha=1$, $\beta=1+i$ сонларга мос хусусий ечим:

$$y_1=e^{(-6+i)x}=e^{-6x+ix}=e^{-6x}(\cos x+i\sin x)=e^{-6x}\cos x+ie^{-6x}\sin x\ ;$$

$$z_1=(1+i)e^{(-6+i)x}=(1+i)e^{-6x}(\cos x+i\sin x)=e^{-6x}(\cos x-\sin x+$$
$$+i(\cos x+\sin x))=e^{-6x}(\cos x-\sin x)+ie^{-6x}(\cos x+\sin x)\ .$$

Юқорида топилган хусусий ечимда унинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини алоҳида-алоҳида олиб, иккита ечимни ҳосил қиламиз, улар берилган дифференциал тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари системасини ҳосил қилади:

$$\bar{y}_1=e^{-6x}\cdot\cos x,\ \bar{y}_2=e^{-6x}\cdot\sin x,$$
$$\bar{z}_1=e^{-6x}(\cos x-\sin x),\ \bar{z}_2=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

У ҳолда берилган системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{matrix} y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2, & \text{ёки} & y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x), \\ z=C_1\bar{z}_1+C_2\bar{z}_2 & & z=e^{6x}(C_1(\cos x-\sin x)+C_2(\cos x+\sin x)). \end{matrix}$$

Характеристик тенгламанинг иккинчи: $k_2=-6-i$ илдизидан фойдалансак, яна шу ечимларни ҳосил қиламиз.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'=5y-z, \\ z'=y+3z \end{cases}$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Системанинг характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=0 \text{ ёки } k^2-8k+16=0$$

каррали илдизларга эга: $k_1=k_2=4$.

$k=4$ икки каррали илдизга мос хусусий ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y=e^{4x}(\alpha_1x+\alpha_2),$$
$$z=e^{4x}(\beta_1x+\beta_2).$$

α ва β ларни топиш учун y, z, y', z' ларни берилган системага қўямиз:

$$\alpha_1+4(\alpha_1x+\alpha_2)=5(\alpha_1x+\alpha_2)-(\beta_1x+\beta_2),$$
$$\beta_1+4(\beta_1x+\beta_2)=(\alpha_1x+\alpha_2)+3(\beta_1x+\beta_2).$$

x нинг олдидаги коэффициентларни ва озод ҳадларни тенглаб, қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4\alpha_1=5\alpha_1-\beta_1 \\ 4\beta_1=\alpha_1+3\beta_1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} \alpha_1+4\alpha_2=5\alpha_2-\beta_2, \\ \beta_1+4\beta_2=\alpha_2+3\beta_2. \end{cases}$$

Бу ердан:

$\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2-\beta_2=\alpha_1=\beta_1$. Энди $\alpha_1=C_1$, $\alpha_2=C_2$ (C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар) деб, $\beta_1=C_1$, $\beta_2=C_2-C_1$ ни топамиз. Демак, системанинг умумий ечими

$$y=e^{4x}(C_1x+C_2),$$
$$z=e^{4x}(C_1x+C_2-C_1)$$

кўринишда бўлади.

7-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги бир жинсли системаларнинг умумий ечимини номаълумларни йўқотиш усулидан фойдаланмай топинг:

а) $\begin{cases} y' = -7y + z, \\ z' = -2y - 5z, \end{cases}$ в) $\begin{cases} y' = y - z + w \\ z' = y + z - w \\ w' = 2y - z. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 3y + z; \end{cases}$

Ж: а) $y = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$
$z = e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x - (C_1 - C_2)\sin x);$

б) $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$
$z = e^x(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x);$

в) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x},$
$z = C_1e^x - 3C_3e^{-x},$
$w = C_1e^x + C_2e^{2x} - 5C_3e^{-x}.$

2. Тенгламалар системасининг умумий ечимини номаълумларни йўқотиш усули билан топинг:

а) $\begin{cases} y' = -5y + 2z + e^x, \\ z' = y + 6z + e^{-2x}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y' = 5y + 2z - 3w, \\ z' = 4y + 5z - 4w, \\ w' = 6y + 4z - 4w. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = 3y - 2z + x, \\ z' = 3y - 4z; \end{cases}$

Ж: а) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x},$

$z = \frac{1}{2}C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x} + \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x};$

б) $y = 2C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18},$

$z = C_1e^{2x} + 3C_2e^{-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12};$

в) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x},$
$z = C_1e^x + 2C_3e^{3x},$
$w = 2C_1e^x + C_2e^{2x} + 2C_3e^{3x}.$

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечинг:

а) $\begin{cases} y' = w + z - y, \\ z' = w + y - z, \quad y|_{x=0} = 1, \ z|_{x=0} = w \ |_{x=0} = 0; \\ w' = y + z + w, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = z + w, \\ z' = w + y, \quad y|_{x=0} = -1, \ z|_{x=0} = 1, \ w|_{x=0} = 0. \\ w' = y + z, \end{cases}$

Ж: а) $y = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x},$

$z = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x},$

$w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x};$

б) $y = -e^{-x}, \ z = e^{-x}, \ w = 0.$

7- мустақил иш

1. Дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

а) $\begin{cases} y' = z + \mathrm{tg}^2x - 1, \\ z' = -y + \mathrm{tg}x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = y + z - \cos x, \\ z' = -2y - z + \sin x + \cos x. \end{cases}$

Ж: а) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \mathrm{tg}x,$
$z = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2;$

б) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x,$
$z = (C_2 - C_1)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x + x(\cos x + \sin x).$

2. Коши масаласини ечинг:

а) $\begin{cases} y' = -2y - z + \sin x, \\ z' = 4y + 2z + \cos x; \end{cases} \quad y|_{x=0} = -1, \ z|_{x=0} = 0.$

б) $y' = 4y + z + 36x;$
$z' = -2y + z + 2e^x; \quad y|_{x=0} = 0, \ z|_{x=0} = 1.$

Ж: а) $y = 2\sin x - 1,$ б) $y = 10e^{2x} - 8e^{3x} - e^x + 6x - 1,$
$z = 2 - 3\sin x - 2\cos x;$ $z = -20e^{2x} + 8e^{3x} + 3e^x + 12x + 10.$

9- боб

ҚАТОРЛАР. ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШЛАРИ

1- §. Сонли қаторлар

9.1.1. Сонли u_1, u_2, ..., u_n, ... кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

кўринишдаги йиғинди *сонли қатор* дейилади, u_1, u_2,..., u_n,.. сонлар *қаторнинг ҳадлари,* қаторнинг n- ҳади u_n эса қаторнинг *умумий ҳади* деб аталади.

Сонли қаторнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси S_n орқали белгиланади ва қаторнинг n- *хусусий йиғиндиси* дейилади:

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n.$$

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$— чекли лимит мавжуд бўлса, қатор *яқинлашувчи,* S — унинг *йиғиндиси* дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ бўлса, ёки мавжуд бўлмаса, қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Қуйидаги

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}+\ldots$$

ифода *қаторнинг n-қолдиғи* дейилади.

Геометрик прогрессиянинг ҳадларидан тузилган

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

қатор $|q|\geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи, $|q|<1$ бўлганда яқинлашувчидир (бунда у $S=\frac{a}{1-q}$ йиғиндига эга).

Ушбу

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

қатор *гармоник қатор* деб аталади, у узоқлашувчидир.

Умумлашган гармоник қатор (ёки Дирихле қатори) деб аталувчи

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

қатор $p\leqslant 1$ да узоқлашувчи, $p>1$ да яқинлашувчидир.

Қаторнинг яқинлашувчи бўлишининг *зарурий шарти:* Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қатор яқинлашса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Қатор узоқлашувчи бўлишининг (қатор узоқлашишининг) *етарли шарти:* Агар $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қатор узоқлашади.

Мисол. Ушбу қаторнинг йиғиндисини топинг:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots.$$

Ечиш. Қаторнинг умумий ҳади $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Бундан

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)\ .$$

Бу ерда кетма-кет $n=1$, $n=2$, $n=3$ қийматларни бериб, ҳосил бўлган чизиқли тенгламалар системасини ечиб, $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

ёки

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Бу ердан:

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right);$$

$$u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right);$$

$$u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right);$$

$$u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right);$$

....

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

т.

қатор мах-

Чап ва ўнг томонларни жамлаймиз:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$. Демак, қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S=\frac{1}{4}$ га тенг.

9.1.2. Яқннлашувчи қаторларнинг хоссалари:

а) Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda u_n$ (λ—ўзгармас сон) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси $\lambda\cdot S$ га тенг бўлади;

б) агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, йиғиндилари мос равишда S ҳамда δ га тенг бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $(S\pm\delta)$ га тенг бўлади;

в) агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унда исталган чекли сондаги ҳадларни ташлаб юбориш ёки унга чекли сондаги ҳадларни қўшиш натижасида ҳосил бўлган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

1- дарсхона топшириғи

Қаторларнинг яқинлашувчи эканини исбот қилинг ва уларнинг йиғиндисини топинг.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Ж: $S=\frac{1}{2}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. Ж: $S=\frac{1}{3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$. Ж: $S=\frac{3}{2}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$. Ж: $S=\frac{1}{8}$.

1- мустақил иш

Қаторларнинг яқинлашувчи эканини исбот қилинг ва йиғиндисини топинг.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. Ж: $S=\frac{11}{18}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. Ж: $S=\frac{1}{6}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$. Ж: $S=\frac{5}{4}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Ж: $S=1$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. Ж: $S=\frac{23}{90}$.

2- §. Мусбат ҳадлн қаторларниг яқинлашиш ва узоқлашиш аломатлари

9.2.1. Таққослаш аломати. Агар мусбат ҳадли иккита $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қатор берилган бўлиб, бирор N номердан бошлаб $u_n\leqslant v_n$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қаторнинг яқинлашишидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ қаторнинг ҳам яқинлашиши келиб чиқади;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ қаторнинг узоқлашишидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қаторнинг ҳам узоқлашиши келиб чиқади.

1- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. $u_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}=v_n$ эканлиги равшан. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ қатор махражи $q=\frac{1}{2}<1$ бўлган геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисидан иборат ва у яқинлашувчи. Таққослаш аломатига кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчидир.

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Барча $n\geqslant 3$ учун $u_n=\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}=v_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармоник қаторнинг узоқлашувчанлигидан ва таққослаш аломатидан берилган қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

9.2.2. Таққослашнинг лимит аломати. Агар ҳадлари мусбат иккита $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қатор берилган бўлиб, чекли ва мусбат $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда иккала қатор бир вақтда яқинлашади ёки бир вақтда узоқлашади.

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторни гармоник $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатор билан таққослаймиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}>0.$$

Гармоник қатор узоқлашувчи эканидан берилган қаторнинг ҳам узоқлашувчи экани келиб чиқади.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Таққослашнинг лимит аломатини қўллашда махражи $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессиядан фойдаланамиз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n+1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=1>0$$

ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун $(q=\frac{1}{2}<1)$ берилган қатор ҳам яқинлашади.

9.2.3. Даламбер аломати. Агар мусбат ҳадли $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=d$ мавжуд бўлса, у ҳолда бу қатор $d<1$ да яқинлашади, $d>1$ бўлганда узоқлашади.

5-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Бу ерда $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$ ва $u_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$,

шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Демак, берилган қатор яқинлашади.

9.2.4. Коши аломати. Агар мусбат ҳадли $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$ мавжуд бўлса, бу қатор $C<1$ бўлганда яқинлашади, $C>1$ да узоқлашади.

6-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. $u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1\ .$$

Демак, берилган қатор узоқлашади.

9.2.5. Кошининг интеграл аломати. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u$ қаторнинг ҳадлари мусбат ва ўсмайдиган бўлиб, $x>1$ да аниқланган, узулуксиз, мусбат ва манотон камаювчи $f(x)$ функция учун $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2\ldots$, $f(n)=u_n\ldots$ тенгламалар ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

хосмас интеграл яқиилашса, берилган қатор ҳам яқинлашади ва аксинча, хосмас интеграл узоқлашса, қатор ҳам узоқлашади.

7- мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$ қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Ечиш. $f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ деб олайлик. Бу функция Кошининг интеграл аломатининг барча талабларини қондиради.

$$\int_1^{\infty}\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{d(1+x^2)}{(x^2+1)^2}=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Big|_1^N=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{N^2+1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашади, шунинг учун берилган қатор ҳам яқинлашади.

2- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текшириг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$. Ж: яқинлашади.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$. Ж: узоқлашади.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$. Ж: узоқлашади.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$. Ж: яқинлашади.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. Ж: яқинлашади.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Ж: узоқлашади.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Ж: яқинлашади.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. Ж: яқинлашади.

2. Исбот қилинг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

2- мустақил иш

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$. Ж: узоқлашади.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. Ж: яқинлашади.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}$. Ж: яқинлашади.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$. Ж: узоқлашади.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$. Ж: яқинлашади.

3- §. Ўзгарувчи ишорали қаторлар

9.3.1. Ҳадларининг ишоралари турлича бўлгаи қатор *ўзгарувчи ишорали қатор* дейилади. Қаторнинг ҳар бир мусбат ҳадидан кейин манфий ҳад ва ҳар бир манфий ҳадидан кейии мусбат ҳад келса, бундай қатор *ишоралари навбатланувчи қатор* дейилади. Ишораси навбатлаиувчи қаторни бундай ёзиш мумкин.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots(u_n>0)\ .$$

Лейбниц аломати. Агар ишоралари навбатлашувчи қаторда қатор ҳадларининг абсолют қийматлари камаювчи, яъни

$$u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$$

бўлиб, унинг умумий ҳади u_n нолга интилса: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, у ҳолда бу қатор яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси S ушбу $0<S<u_1$ шартни қаноатлантиради.

Ишораси навбатланувчи қатор қолдиғи $|R_n|<u_{n+1}$ тенгсизлик билан баҳолаиади.

1- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчанлнгини текширинг.

Ечиш. Берилгаи қатор учун Лейбниц аломатининг шартлари бажарилаяпти, яъни

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$$

ва

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Шу сабабли қатор яқинлашади.

9.3.2. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар. Ўзгарувчи ишорали $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ қатор берилган бўлиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

Агар ўзгарувчи ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда берилган ўзгарувчи ишорали қатор *шартли яқинлашувчи қатор* дейилади.

2- мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}=\frac{\sin\alpha}{1^3}+\frac{\sin 2\alpha}{2^3}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^3}+\ldots$

қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қаторни қараймиз. $|\sin n\alpha|\leqslant 1$ бўлганлиги учун

$$u_n=\frac{|\sin n\alpha|}{n^3}\leqslant\frac{1}{n^3}=v_n$$

ни ҳосил қиламиз. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ қатор яқинлашувчидир, чунки у умумлашган гармоник қатор бўлиб, $p=3>1$. Таққослаш аломатига кўра, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қатор ҳам яқинлашувчи. Демак, берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}$ қатор абсолют яқинлашувчидир.

3- дарсхона топшириғи

Қуйидаги қаторларнинг шартли ёки абсолют яқинлашишини текширинг:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{3n-1}$. Ж: узоқлашувчи.

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Ж: абсолют яқинлашувчи.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$. Ж: абсолют яқинлашувчи.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$. Ж: узоқлашувчи.

3- мустақил иш

Қаторларнинг шартли ва абсолют яқинлашишини текширинг:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{n^2+1}$. Ж: абсолют яқинлашувчи.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ж: шартли яқинлашувчи.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3^n}{n^2}$. Ж: узоқлашувчи.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$. Ж: шартли яқинлашувчи.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+4}$. Ж: абсолют яқннлашувчи.

4- §. Фуикционал қаторлар, улариинг яқинлашиш соҳаси

9.4.1. Ҳадлари x нинг функцияларидан иборат бўлган

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

қатор *функционал қатор* дейилади.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашса, функционал қатор $x=x_0$ *нуқтада яқинлашувчи* дейиладн. x нинг $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор яқинлашувчи бўладиган барча қийматлари тўпламн функционал қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ йиғинди функционал қаторнинг *n- қисмий йиғиндиси* дейилади. $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ функция функционал қаторнинг *йиғиндиси* деб, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ айирма эса *қатор қолдиғи* деб аталадн.

1- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\ldots+\frac{1}{1+x^{2x}}+\ldots$$

фуикционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Е ч и ш. Қаторнинг умумий ҳади: $u_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$. Агар $|x|<1$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1$, бироқ, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ бўлгани учун, қатор узоқлашувчидир.

Агар $|x|=1$ бўлса, яна узоқлашувчи

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз.

Агар $|x|>1$ бўлса, у ҳолда берилган қаторнинг ҳадлари ушбу

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^2n}+\ldots$$

чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларидан кичик бўлади, демак таққослаш аломатига кўра, қатор яқинлашади.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқиилашиш соҳаси $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ дан иборат бўлади.

9.4.2. Агар яқинлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ фуикционал қатор учун ҳар қандай $\varepsilon>0$ берилганда ҳам шундай $N(\varepsilon)$ номер топиш мумкин бўлсаки, $n\geqslant N$ бўлганда $[a,\ b]$ кесмадаги исталган x учун $|R_n(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, берилган функциоал қатор $[a,\ b]$ да *текис яқинлашувчи* дейилади.

Функциоиал қаторнинг текис яқинлашувчи бўлишининг Вейерштрасс аломати: агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор учун ҳадлари мусбат сонли шундай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ қатор мавжуд бўлиб, $x\in[a,\ b]$ да $|u_n(x)|\leqslant c_n$ бўлса, у ҳолда функционал қатор бу $[a,\ b]$ кесмада текис яқинлашади.

2-м и с о л. Ушбу

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^4+2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2n}+n}+\ldots$$

қатор x нинг барча қийматларида текис яқиилашишини исбот қилинг.

Е ч и ш. Лейбниц аломатига кўра берилган ишораси навбатлашувчи қатор x нинг исталган қийматларида яқинлашади, шуиинг учун бу қаторнинг қолдиғи $|R_n(x)|<u_{n+1}(x)$, яъни $|R_n(x)|<$ $<\frac{1}{x^{2n+2}+n+1}<\frac{1}{n+1}$ тенгсизлик ёрдамида баҳоланади.

Равшанки, исталган $\varepsilon>0$ учун шундай N номер танлаш мумкинки, барча $n>N$ ва исталган x учун $|R_n(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Шундай қилиб, берилган қатор текис яқинлашади.

3- мисол. Вейерштрасс аломати ёрдамида

$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$ қатор барча x лар учун текис яқинлашишини исбот қилинг.

Ечиш.

$|u_n(x)|=|\frac{\cos nx}{n^2}|\leqslant\frac{1}{n^2}$ ва $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун берилган қатор барча x лар учун текис яқинлашади.

9.4.3. Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари:

а) агар текис яқинлашувчи функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, унинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам бу кесмада узлуксиз бўлади;

б) агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, қатор бу кесмада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx=\int\limits_a^b u_1(x)\,dx+\int\limits_a^b u_2(x)\,dx+\ldots+\int\limits_a^b u_n(x)\,dx+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx,$$

бу ерда $S(x)$ — қатор йиғиндиси;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада аниқланган ва бу кесмада $u'_n(x)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу кесмада берилган қатор яқинлашувчи ва унинг ҳадлари ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)=u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots+u'_n(x)$$

қатор текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам $[a, b]$ кесмада ҳосилага эга бўлади ва

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

4- мисол. Ушбу

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{x}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

қаторга қаторларни ҳадма-ҳад дифференциаллаш тўғрисидаги хоссани татбиқ қилиш мумкинми?

Ечиш. Берилган қаторни яқинлашувчи

$$x+\frac{x}{2^{3/2}}+\frac{x}{3^{3/2}}+\ldots+\frac{x}{n^{3/2}}+\ldots$$

қатор билан таққослаймиз (исталган тайин x да).

Етарлича катта n ларда $\operatorname{arctg}\frac{x}{n3/2}\sim\frac{x}{n^{3/2}}$ бўлгани учун ва таққослашнинг лимит аломатига кўра берилган қатор ҳам яқинлашади. Берилган қатор умумий ҳадининг ҳосиласини топамиз:

$$u'_n(x)=\frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}$$

Ҳосилалардан тузилган қатор қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{1}{x^2+1^3}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+3^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\ldots+\frac{n\sqrt{n}}{x^2+n^3}+\ldots$$

Бу қаторнинг ҳадлари яқинлашувчи

$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$ қаторнинг мос ҳадларидан кичик эканини кўрамиз. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра ҳосилалардан тузилган қатор $(-\infty,+\infty)$ оралиқда текис яқинлашади, бинобарин, қаторларни дифференциаллаш хоссасини берилган қаторга қўллаш мумкин.

4- дарсхона топшириғи

1. Қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)x}$.

Ж: а) $-1<x<1$; б) $\frac{1}{e}<x<e$; в) $x\neq\pm1$; г) $-\infty<x<+\infty$;

д) $-8\leqslant x<2$; е) $0<x<+\infty$.

2. Ушбу

$$\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^4+\ldots$$

қатор $[-1, 1]$ кесмада текис яқинлашишини кўрсатинг.

3. Қаторларнинг текис яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$.

Ж: а) $-\infty<x<+\infty$; б) $-\infty<x<+\infty$.

4- мустақил иш

1. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$;

б) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}+\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+\ldots+\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}+\ldots$;

в) $x\mathrm{tg}\frac{x}{2}+x^2\mathrm{tg}\frac{x}{4}+\ldots+x^n\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$.

Ж: а) $1<x<+\infty$;
б) $-\infty<x<+\infty$;
в) $-2<x<2$.

2. Ушбу

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots+\frac{x^n}{2^{n-1}}+\ldots$$

қаторнинг $(-2,\ 2)$ оралиқда текис яқинлашишини текширинг.

3. Ушбу

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cos 3x+\frac{1}{2^3}\cos 4x+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx+\ldots$$

қаторни $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]$ кесмада ҳадма-ҳад интеграллаш мумкинми?

Ж: Мумкин, чунки берилган қатор $(-\infty,\ +\infty)$ да текис яқинлашувчидир.

5- §. Даражали қаторлар

9.5.1. Ушбу

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

кўринишдаги функционал қатор *даражали қатор* дейилади. Бу ерда $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ — ўзгармас сонлар даражали қаторнинг *коэффициентлари* дейилади.

Хусусий ҳолда, $x_0=0$ да ушбу даражали қаторга эга бўламиз:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n .$$

Абель теоремаси. а) Агар $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ даражали қатор бирорта $x=x_1\neq 0$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда у x нинг $|x|<|x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматида абсолют яқинлашади;

б) агар $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ даражали қатор бирорта $x=x_1$ қийматда узоқлашса, у ҳолда у x нинг $|x|>|x_1|$ шартни қаноатлантирувчи исталган қийматларида узоқлашади.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ даражали қатор учун шундай $(-R,\ R)$ оралиқ мавжудки, у мазкур оралиқ ичида абсолют яқинлашиб, ундан ташқарида эса узоқлашади; бу оралиқ *қаторнинг яқинлашиш оралиғи* дейилади. R сони *яқинлашиш радиуси* дейилади, у хусусий ҳолларда 0 ёки ∞ га тенг бўлиши ҳам мумкин. Яқинлашиш оралиғининг четки нуқталари $x=\pm R$ да даражали қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши масаласи алоҳида ҳал қилинади.

9.5.2. Агар қаторнинг барча $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ \ldots$ коэффициентлари нолга тенг бўлмаса, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ушбу формула орқали аниқланади:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ ёки } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Агар қатор фақат жуфт ёки тоқ даражаларни ўз ичига олса ёки даражалари каррали бўлса, ва ҳ.к., у ҳолда яқинлашиш оралиғи бевосита Даламбер ёки Коши аломатларидан фойдаланиб топилади.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{np}$ қатор учун яқинлашиш радиуси қуйидагича топилади:

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \text{ ёки } R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} .$$

1-мисол. Қуйидаги қаторнинг яқинлашишини текширинг:

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots$$

Ечиш. Бу ерда $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Демак, берилган даражали қатор $(-1,\ 1)$ ораликда абсолют яқинлашади, $(-\infty;\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ да эса узоқлашади. Берилган қаторнинг бу ораликнинг четка нуқталарида яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини аниқлаймиз. $x=1$ бўлганда берилган қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ кўринишдаги гармоник узоқлашувчи қатор бўлади. $x=-1$ да эса $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қаторни ҳосил қиламиз, бу қатор яқинлашади, чунки у Лейбниц аломати шартларини қаноатлантиради.

Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1,\ 1)$.

2- мисол. Ушбу

$$1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\frac{x^9}{10^3}+\ldots+\frac{x^{3n}}{10^n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $a_n=\frac{1}{10^n}$, шунинг учун яқинлашиш радиусини

$$R=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}10}=\sqrt[3]{10}$$

формуладан топамиз. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш оралиғи $(-\sqrt[3]{10},\ \sqrt[3]{10})$ бўлади. Қаторнинг яқинлашишини ораликнинг четка нуқталарида текширамиз. Агар $x=\sqrt[3]{10}$ бўлса, қатор $1+1+1+\ldots$ кўринишга эга бўлиб, бу қатор узоқлашади. Агар $x=-\sqrt[3]{10}$ бўлса, қатор $1-1+1-\ldots$ кўринишда бўлиб, у ҳам узоқлашади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\sqrt[3]{10},\ \sqrt[3]{10})$.

3- мисол. Қуйидаги

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Ечиш. $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

Қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)!}{n!\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Демак, берилган қатор бутун сон ўқида яқинлашади.

9.5.3. Агар умумий кўринишдаги

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

қатор берилган бўлса, унинг яқинлашиш радиуси R олдинги формулалар билан аниқланаверади, яқинлашиш оралиғи эса маркази $x=x_0$ нуқтада бўлган $(x_0-R,\ x_0+R)$ оралиқ бўлади.

4- мисол. Ушбу

$$1-\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^2}{4\sqrt{3}}-\frac{(x-2)^3}{8\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$$

қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Ечиш. Қаторнинг яқинлашнш радиусини топамиз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}{1}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}=2.$$

Демак, қатор $(0;\ 4)$ ораликда абсолют яқинлашади.

$x=0$ да $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ қаторни ҳосил қиламиз, у узоқлашади, чунки унинг ҳадлари узоқлашувчи гармоник қаторнинг ҳадларидан катта $\left(u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n+1}=v_n\right)$.

$x=4$ да $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ қаторни ҳосил қиламиз, у Лейбниц аломатига кўра яқинлашади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(0,4]$.

9.5.4. Даражали каторларнинг хоссалари:

а) якинлашиш оралиғининг ичида ётувчи ҳар қандай $[a, b]$ кесмада даражали катор текис якинлашади. Унинг йиғиндиси якинлашиш оралиғида узлуксиз функция бўлади;

б) даражали каторларни уларнинг якинлашиш оралиғида ҳадма-ҳад интеграллаш ва дифференциаллаш мумкин.

5- мисол. Ушбу

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

каторнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. Каторнинг якинлашиш радиусини топамиз:

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n+1)}{(2n-1)\cdot 1}}=1.$$

Демак, $(-1, 1)$ ораликда катор якинлашади, шунинг учун уни якинлашиш оралиғида ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин. Берилган каторнинг йиғиндисини $S(x)$ оркали белгиласак,

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+\ldots$$

Ҳосил килинган катор — геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси ва у $(-1, 1)$ ораликда якинлашади, унинг йиғиндиси: $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

Хосилалардан тузилган каторни интеграллаб, берилган каторнинг йиғиндисини топамиз:

$$S(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ (|x|<1).$$

5- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги даражали каторларнинг якинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^{n-1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$.

Ж: а) $-\infty<x<+\infty$; б) $1<x<3$; в) $x=0$; г) $1<x<2$; д) $x=0$; е) $-e<x<e$; ж) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $-1<x<1$.

2. Қатор йиғиндисини топииг.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Ж: а) $\frac{1}{(x-1)^2}$, $|x|<1$; б) $-\ln(1-x)$, $(-1\leqslant x<1)$;
в) $\operatorname{arctg}x$, $|x|\leqslant 1$.

5- мустақил иш

1. Даражали каторнинг якинлашиш соҳасини топинг.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

Ж: а) $2<x\leqslant 8$; б) $2<x<4$; в) $-e<x<e$;
г) $-\infty<x<+\infty$.

2. Қатор йиғиндисини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.

Ж: а) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$; б) $\frac{2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

6- §. Функцияларни Тейлор ва Маклорен каторларга ёйиш

9.6.1. Агар $y=f(x)$ функция $x=x_0$ нукта атрофида $(n+1)$-тартиблигача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда куйидаги Тейлор формуласи ўринлидир.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

бу ерда $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\;(0<\theta<1)$. $R_n(x)$ — Тейлор формуласининг Лагранж шаклидаги (3- боб, 16- §) *қолдиқ ҳади* дейилади.

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпҳад $y=f(x)$ функциянинг *n- даражали Тейлор кўпҳади* дейилади.

$x=0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли — Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

бу ерда $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n\;(0<\theta<1)$.

9.6.2. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтанинг бирорта атрофида

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан ушбу

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

ва

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

чексиз қаторлар ҳосил бўлади. Буларнинг биринчиси *Тейлор қатори*, иккинчиси *Маклорен қатори* дейилади. Бу қаторлар x нинг $\underset{n\to\infty}{R}{}_n(x)=0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

1- мисол. $y=x^4-3x^2+2x+2$ функцияни $(x-1)$ иккиҳад даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. $x_0=1$ учун Тейлор формуласидан фойдаланамиз. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0=1$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$y(1)=2;$
$y'(1)=(4x^3-6x+2)|_{x=1}=0;$
$y''(1)=(12x^2-6)|_{x=1}=6;$
$y'''(1)=24x|_{x=1}=24;$
$y^{\mathrm{IV}}=24;$
$y^{\mathrm{V}}=0$ ва ҳ. к.

Демак,

$$y\quad x^4-3x^2+2x+2=2+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4$$

ёки

$$y=x^4-3x^2+2x+2=2+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4.$$

2- мисол. $y=\frac{1}{x}$ функция учун $x_0=1$ нуқтада n- даражали Тейлор кўпҳадини ёзинг.

Ечиш. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0=1$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$y(1)=1;$

$y'(1)=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1;$

$y''(1)=\frac{1\cdot2}{x^3}\Big|_{x=1}=\frac{1\cdot2}{1}=2!$

$y'''(1)=-\frac{1\cdot2\cdot3}{x^4}\Big|_{x=1}=-3!$

$y^{\mathrm{IV}}(1)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{x^5}\Big|_{x=1}=4!,\ldots,y^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\Big|_{x=1}=(-1)^n n!$

Демак, Тейлор кўпҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$P_n(x)=1-\frac{x-1}{1!}+\frac{2!}{2!}(x-1)^2-\frac{3!}{3!}(x-1)^3+\frac{4!}{4!}(x-1)^4+\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^n n!}{n!}(x-1)^n=1-(x-1)+$$
$$+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\ldots+(-1)^n(x-1)^n.$$

Берилган функция учун қолдиқ ҳад

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\theta(x-1))^{n+2}}(x-1)^{n+1},\;0<\theta<1$$

кўринишда бўлади.

3- мисол. $y=2^x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

Ечиш. Ҳосилаларнинг $x=0$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$y(0)=1;\; y'(0)=2^x\ln2|_{x=0}=\ln2;\; y''(0)=2^x\ln^2 2|_{x=0}=\ln^2 2;$
$y'''(0)=2^x\ln^3 2|_{x=0}=\ln^3 2,\ldots,$
$y^n(0)=2^x\ln^n 2|_{x=0}=\ln^n 2.$

Маклорен қаторини тузамиз:

$$y=2^x=1+x\ln2+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\frac{\ln^3 2}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots$$

Топилган қаторнинг яқинлашиш радиусини аниқлаймиз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{\ln^n 2\ln 2}\cdot\frac{\ln^n 2}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln 2}=\infty.$$

Демак, қатор сонлар ўқининг барча нуқталарида абсолют яқинлашади.

$R_n\ (x)$ қолдиқ ҳад:

$$R_n(x)=\frac{\ln^{n+1}2}{(n+1)!}\cdot 2^{\theta x}\cdot x^{n+1},\ 0<0<1.$$

$0<\ln 2<1$ бўлгани учуи тайин x учун ушбу тенгсизлик ўринлидир:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\ln^{n+1}2\cdot 2^{0x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot 2^x.$$

Бироқ исталган x учун $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ (5.2- §, 3- мисол), шунинг учун $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ (исталган x да). Бу — топилган қатор йиғиндиси, исталган x ларда ҳақиқатан ҳам 2^x га тенглигини билдиради.

6- дарсхона топшириғи

1. $f(x)=x^5-4x+2x^3+2x+1$ кўпҳадни $(x+1)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

2. $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ кўпҳадни $(x-4)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

3. $f(x)=\ln x$ функцияни $x_0=1$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

4. $f(x)=\sqrt{x^3}$ функцияни $x_0=1$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

5. $f(x)=\frac{1}{x+1}$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

6- мустақил иш

1. $f(x)=x^{10}-3x^5+1$ функцияни $(x-1)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

2. $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияни $x_0=3$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг ва яқинлашиш соҳасини топинг.

3. $f(x)=x^2e^x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг ва яқинлашиш соҳасини топинг.

7- §. Баъзи функцияларнинг Тейлор ва Маклорен қаторлари

9.7.1. Баъзи функцияларнинг Маклорен қаторига ёйилмаларини келтирамиз:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad -1<x\leqslant 1;$$

$$(1+x)^m=1-\frac{m}{1!}x+$$

$$+\frac{m(m-1)^2}{2!}x^2-\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\quad -1<x<1.$$

Бу ерда ҳар қайси қатор учуи соҳа кўрсатилган бўлиб, унда даражали қатор тегишли функцияга яқинлашади. Охирги қатор *биномиал қатор* дейилади.

9.7.2. Умумий ҳолда функцияларни даражали қаторга ёйиш бевосита Тейлор ва Маклорен қаторларидан фойдаланишга асосланган. Бироқ, амалда кўпгина функцияларнинг даражали қаторларини олдинги бандда келтирилган формулалардан ёки геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиб топиш мумкин. Баъзаи қаторга ёйишда ҳадма-ҳад дифференциаллаш ёки интеграллашдан ҳам фойдаланиш мумкин.

1- мисол. $f(x)=e^{-x^2}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқорида e^x учун келтирилган қатор формуласида x ўриига $-x^2$ ни қўйсак,

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Топилган қатор исталган x ларда яқиилашади.

2- мисол. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқоридаги $\cos x$ учун келтирилган қаторда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$$

Бу қатор исталган x ларда яқинлашувчидир, бироқ $\cos\sqrt{x}$ функция $x<0$ да аниқланмаганлигини ҳисобга олсак, топилган қатор $\cos\sqrt{x}$ га фақат $0\leqslant x<+\infty$ да яқинлашади.

3- мисол. $f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

Ечнш. Берилган функцияни энг содда рационал касрлар йиғиндиснга ажратамиз:

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{3}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}.$$

Маълумкн, $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ қатор $-1<x<1$ да яқинлашади.

$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$ қатор эса $-1<\frac{x}{2}<1$ ёкн $-2<x<2$ да яқинлашади. Шунннг учун янги

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$$

қатор берилган функцияга $-1<x<1$ да яқинлашадн.

7- дарсхона топшириғи

Берилган функцияларни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

1. $f(x)=e^{-2x}$;
2. $f(x)=x\cos 3x$;
3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;
4. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \text{ да},\\ 1, & x=0 \text{ да};\end{cases}$
5. $f(x)=\ln(10+x)$;
6. $f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}$;
7. $f(x)=\arcsin x$.

7- мустақил иш

Берилган функцияларни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг:

1. $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$;
2. $f(x)=\frac{6}{8+2x-x^2}$;
3. $f(x)=\ln(1+x-12x^2)$;
4. $f(x)=2x\cos^2\frac{x}{2}-x$;
5. $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$.

8- §. Даражали қаторларининг татбиқи

9.8.1. Функция қийматнни тақрибий ҳисоблаш. Баъзи ҳолларда функциянинг тақрибий қийматини берилган аниқлнкда ҳисоблаш учун унинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланилади.

1- мисол. e сонини 0,00001 гача аниқлик билан топинг.

Ечиш. $x=1$ да e^x нинг қаторга ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

n сонни шундай аниқлаймизки,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

тақрибий тенгликнинг хатолиги 0,00001 дан ошмасин. Қолдиқни баҳолаймиз:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\frac{n}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

Энди

$$R<\frac{1}{n!n}<0{,}00001$$

тенгсизликни ечиб, $n\geqslant 8$ ни топамиз. Демак,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}.$$

Бунн ҳисоблаб, талаб қилинган аниқликдаги жавобни оламиз:

$$e\approx 2{,}71828.$$

2- мисол. $\sqrt[3]{130}$ ни 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. Равшанки,

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}.$$

Аввал танишган биноминал қатордан фойдаланамиз $\left(m=\frac{1}{3},\ x=0{,}04\right)$:

$$\sqrt{130}=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}0{,}04^2+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}0{,}04^3+\ldots\Bigg]=5\Bigg[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}0{,}04^2+$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}0{,}04^3-\ldots\Bigg]==5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2-\frac{1}{9}\cdot 0{,}008+\frac{5}{81}\cdot 0{,}00032-\ldots$$

Бу ишоралари навбатланувчи қатор Лейбниц аломатини қаноатлантиради, шунинг учун қолдиқ: $|R_n|<u_{n+1}$. Мазкур ҳолда тўртинчи ҳад $\frac{5}{81}\cdot 0{,}00032<0{,}001$, демак, $\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009$, яъни

$$\sqrt[3]{130}\approx 5{,}066.$$

9.8.2. Интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш. Интеграл остидаги $f(x)$ функцияни даражали қаторга ёйиб, даражали қаторларни интеграллаш тўғрисидаги теоремани қўллаб, $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ интегрални даражали қатор кўринишда тасвирлаш ҳамда унинг қийматини бу қаторнинг яқинлашиш оралиғидаги x нинг ҳар қандай қийматида берилган аниқлик билан ҳисоблаш мумкин.

3-мисол. $\int e^{-x^2}dx$ интегрални топинг.

Ечиш. e^{-x^2} функцияни даражали қаторга ёямиз:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots .$$

У бутун сонлар ўқида яқинлашади, демак, уни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин:

$$\int e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots .$$

Даражали қаторни интеграллашда унинг яқинлашиш оралиғи ўзгармаганлиги сабабли, ҳосил қилинган қатор ҳам бутун сонлар ўқида яқинлашади.

4-мисол. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ ни 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. $\sin x$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланамиз (у ерда x ни x^2 билан алмаштирамиз):

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots .$$

Қатор бутун сонлар ўқида яқинлашади, шунинг учун уни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин, яъни

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx=\int\limits_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)(2n-1)!}+\ldots .$$

Ҳосил қилинган ишоралари навбатланувчи қаторнинг учинчи ҳади 0,001 дан кичик, шунинг учун

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}=0{,}295.$$

9.8.3. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш. Агар дифференциал тенгламани элементар функциялар ёрдамида аниқ интеграллаб бўлмаса, унинг ечимини Тейлор ёки Маклореннинг даражали қатори кўринишида излаш қулайдир.

5-мисол. Ушбу

$$y'=y^3-x,\ y\Big|_{x=0}=1$$

дифференциал тенглама ечимининг даражали қаторга ёйилмасининг дастлабки бешта ҳадини топинг.

Ечиш. Ечимни даражали қатор кўринишида излаймиз:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{y^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

$x=0$ да қуйидагига эгамиз:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

Берилган $y'=y^3-x$ дифференциал тенгламадан $y'(0)=1^3-0=1$ ни топамиз. Берилган тенгламани дифференциаллаймиз ва ҳосилаларнинг $x_0=0$ даги қийматини ҳисоблаймиз:

$y''=3y^2\cdot y'-1,\quad y''(0)=2;$

$y'''=6y\cdot y'^2+3y^2\cdot y'',\quad y'''(0)=12;$

$y^{IV}=6y'^3+18y\cdot y'\cdot y''+3y^2\cdot y''',\quad y^{IV}(0)=78$ ва ҳ.к.

Топилган қийматларни қаторга қўйиб, изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$y(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{3!}x^3+\frac{78}{4!}x^4+\ldots=$$

$$=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\ldots$$

8- дарсхона топшириғи

1. Даражали қаторлар ёрдамида қуйидаги миқдорларни 0,0001 гача аниқлик билан тақрибий ҳисобланг:

а) $\frac{1}{e}$; б) $\sin 12°$; в) $\sqrt[3]{520}$; г) $\ln 1{,}1$.

Ж: а) 0,3679; б) 8,0411; в) 0,2094; г) 0,0953.

2. Қуйидаги аниқ интегралларни даражали қаторлар ёрдамида 0,01 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

Ж: а) 0,248; б) 0,098; в) 0,102.

3. Аниқмас интегралларни даражали қатор кўринишида топинг ва ҳосил қилинган қаторларнинг яқинлашиш соҳасини кўрсатинг:

а) $\int\frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\frac{e^x}{x^2}dx$.

Ж: а) $-\infty<x<+\infty$; б) $-\infty<x<0$ ва $0<x<+\infty$.

4. Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи дифференциал тенгламалар ечимларининг даражали қаторга ёйилмасининг дастлабки бешта ҳадини ёзинг:

а) $y'=2\cos x-xy^2$, $\quad y(0)=1$;
б) $y''=-2xy$, $\quad y(0)=y'(0)\ =1$;
в) $y'=2y+x-1$, $\quad y(1)=1$.

8- мустақил иш

1. Даражали қаторлар ёрдамида 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\sin 1°$; б) $\sqrt[3]{70}$; в) $\cos 1°$.

Ж: а) 0,841; б) 4,125; в) 1,000.

2. Қуйидаги аниқ интегралларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$; б) $\int\limits_0^{4}e^{\frac{1}{x}}dx$.

Ж: а) 0,508; б) 2,835.

3. Дифференциал тенглама ечимининг даражали қаторга ёйилмасининг дастлабки учта ҳадини топинг:

а) $y'=x^2-y$, $y(1)=1$; б) $y'=x^2y+y^3$, $y(0)=1$.

9- §. Фурье қаторлари

9.9.1. Агар $y=f(x)$ функция (a, b) оралиқда чегараланган (яъни $a<x<b$ да $|f(x)|<M$, бу ерда M — ўзгармас) ва бўлакли — монотон (яъни (a, b) оралиқни ҳар бирида бу функция монотон бўлган чекли сондаги оралиқларга ажратиш мумкин) бўлса, у ҳолда бу функция (a, b) оралиқда Дирихле шартларини қаноатлантиради дейилади.

9.9.2. Агар $y=f(x)$ функция узунлиги 2π га тенг $(-\pi, \pi)$ оралиқда Дирихле шартларини қаноатлантирса, у ҳолда бу оралиқнинг $f(x)$ узлуксиз бўлган ҳар қандай x нуқтасида функцияни Фурье тригонометрик қаторига ёйиш мумкин, яъни

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

бу ерда a_n, b_n — Фурье коэффициентлари бўлиб, улар қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,...).$$

Агар $x\in(-\pi, \pi)$ нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлса, Фурье қатори йиғиндиси $S(x)$ функциянинг чап ва ўнг лимитларининг ўрта арифметигига тенг:

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Оралиқ охирлари $x=\pi$ ва $x=-\pi$ нуқталарда;

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)].$$

9.9.3. Агар $f(x)$ — жуфт (яъни $f(-x)=f(x)$) бўлса, у ҳолда Фурье қаторида фақат косинуслар қатнашади, чунки барча $b_n=0$ бўлиб, $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$ бўлади. Агар $f(x)$ функция ток (яъни $f(-x)=-f(x)$) бўлса, Фурье қаторида фақат синуслар қатнашади, чунки барча $a_n=0$ бўлиб, $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin xdx$ бўлади.

9.9.4. $(0, \pi)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция $(-\pi, 0)$ оралиққа ё жуфт, ё тоқ функция каби давом эттирилиши мумкин. Демак, уни зарур бўлса, $(0, \pi)$ оралиқда косинуслар ёки синуслар бўйича тўлиқ бўлмаган Фурье қаторнга ёйиш мумкин.

9.9.5. Даври 2π бўлган ҳар қандай даврий $f(x)$ функция ва исталган $a\in R$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx.$$

бўлгани учун Фурье коэффициентларини қуйидаги формулалар бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

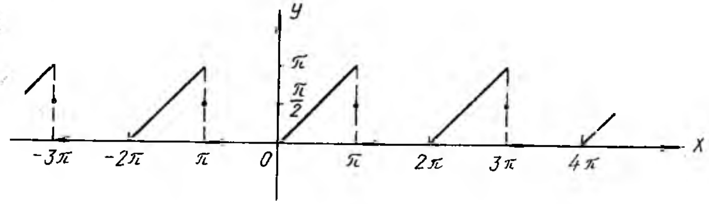
бу ерда $n = 0, 1, 2...$

1-мисол. Даври 2π бўлган ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } -\pi < x < 0 \text{ бўлса}, \\ x, \text{ агар } \ 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ечиш. Берилган функция бўлакли узлуксиз ва чегараланган бўлгани учун уни Фурье қаторига ёйиш мумкин (42- шакл).



42- шакл

Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \cos nx\,dx, \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

n жуфт бўлганда, $a_n = 0$; n — тоқ бўлганда

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \sin nx\,dx, \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos \pi n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Топнлган коэффнциентлардан фойдаланиб, Фурье қаторини тузамиз:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

Бу қатор берилган функцияга барча $x \neq (2n-1)\pi$ ларда яқинлашади. $x = (2n-1)\pi$ нуқталарда қатор йиғиндиси

$$S((2n-1)\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

формула бўйича ҳисобланади (42- шаклга қаранг.).

9.9.6. Агар $f(x)$ функция узунлиги $2l$ бўлган бирор $(-l, l)$ оралиқда Дирихле шартларини қаноатлантирса, функциянинг бу оралиққа тегишли узлуксизлик нуқталарида функцияни Фурье қаторига ёйиш мумкин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

бу ерда

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$f(x)$ функциянинг узилиш нуқталарида ва оралиқ охирлари $x = \pm l$ да Фурье қатори йиғиндиси $(-\pi, \pi)$ оралиқда ёйиш ҳолидаги каби аниқланади.

9.9.7. $f(x)$. функцияни $2l$ узунликдаги ихтиёрий $(a,\ a+2l)$ ораликда Фурье каторига ёйганда a_n ва b_n коэффициентлар учун формулаларда интеграллаш чегараларини мос равишда a ва $a+2l$ билан алмаштириш зарур.

9.9.8. Жуфт ёки тоқ функцияни $(-l,\ l)$ ораликда Фурье каторига ёйишда Фурье коэффициентлари $(-\pi,\ \pi)$ ораликда бўлгани каби соддалашади.

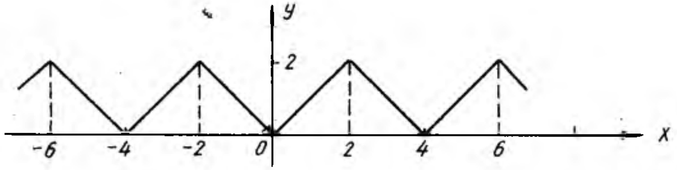
9.9.9. $(0,\ l)$ да берилган $f(x)$ функцияни $(-l,\ l)$ да косинуслар ёки синуслар бўйича Фурье қаторига ёйиш мумкин.

2- мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{агар } -2\leqslant x<0 \text{ бўлса},\\ x, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ечиш. Функция Дирихле шартларини қаноатлантиради (43- шакл).



43- шакл

Берилган функция жуфт, шунинг учун у фақат косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйилади, барча $b_n=0$. a_n коэффициентларни топамиз $(l=2)$:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{array}{c}u=x,\ du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx,\\ v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\ \Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\ \Big|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}((-1)^n-1);$$

n — жуфт бўлганда $a_n=0$; n — тоқ бўлганда $a_n=\frac{-8}{\pi^2n^2}$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2.$$

Берилган функциянинг Фурье қатори қуйидаги кўринишда бўлади:

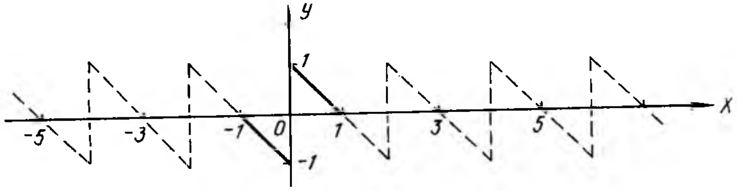
$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2}x.$$

3- мисол. $f(x)=1-x$ функцияни $[0,\ 1]$ кесмада синуслар бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Берилган функцияни $[-1,\ 0)$ ораликда тоқ функция сифатида давом эттирамиз, яъни

$$f(x)=\begin{cases}-1-x, & \text{агар } -1\leqslant x<0 \text{ бўлса},\\ 1-x, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

деймиз (44- шакл).



44- шакл

Тоқ функциялар учун барча $a_n=0$. Энди b_n $(l=1)$ ларни топамиз:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=2\int_0^1(1-x)\sin\frac{\pi nx}{1}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}u=1-x,\ du=-dx,\\ dv=\sin\pi nxdx\ \ v=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\end{array}\right\}=2\left(\frac{1}{\pi n}-\frac{1}{\pi^2n^2}\sin nx\ \Big|_0^1\right)=\frac{2}{\pi n}.$$

Топилган коэффициентларни Фурье қаторига қўйиб, синуслар бўйича ушбу қаторни ҳосил қиламиз:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\pi nx.$$

9- дарсхона топшириғи

1. $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ ораликда $f(x)=x$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ж: $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

2. Ушбу функцияни Фурье қаторига ёйинг:

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{агар } -\pi\leqslant x<0 \text{ бўлса},\\ 3x, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant\pi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Ж: $f(x)=\frac{5\pi}{4}-\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right)$

3. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{агар } -2<x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ -1, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2}x-\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right).$$

4. $f(x)=x^2$ функцияни $(0, \pi)$ ораликда синуслар бўйича Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right]\sin nx.$$

5. $f(x)=1-2x$ функцияни $[0, 1]$ да косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

9- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{агар } -\pi<x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } 0<x\leqslant\pi \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=-1+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

2. $f(x)=|x|$ функцияни $[-1, 1]$ да Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

3. $f(x)=\sin x$ функцияни $[0, \pi]$ да косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-(2n)^2}.$$

4. $f(x)=1-\frac{x}{2}$ функцияни $[0, 2]$ да синуслар бўйича Фурье қаторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}.$$

10- §. Фурье интеграли

9.10.1. Агар $y=f(x)$ фунция Ox ўқининг исталган чекли оралигида Дирихле шартларини қаноатлантирса ва бутун ўқ бўйича абсолют интегралланувчи бўлса (яъни $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интеграл яқинлашса), унинг учун Фурьенинг интеграл формуласи ўринлидир:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du.$$

I тур узилиш нуқталарида $f(x)$ нинг қиймати учун аввалгидек,

$$\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$$

қабул қилинади, бу ерда x_0 — узилиш нуқтасининг абсциссаси.

Фурье интегралини комплекс шаклда ҳам ёзиш мумкин:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{iz(u-x)}du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izu}f(u)\,du.$$

Жуфт фуикция учун Фурье интеграли қуйидагича бўлади:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos zdz\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\cos zudu,$$

тоқ функциянинг Фурье интеграли:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin zxdz\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\sin zudu.$$

9.10.2. Қуйидаги

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)\,dx$$

муносабат билан аниқланган $F(z)$ функция $f(x)$ функциянинг *Фурье алмаштириши* дейилади.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}F(z)\,dz$$

муносабат эса *Фурьенинг тескари алмаштириш формуласи* дейилади.

Хусусий ҳолда

а) $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos zx dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_c(z)\cos zx dx$$

(бу формулалар Фурьенинг косинус-алмаштиришлари дейилади);

б) $f(x)$ функция тоқ бўлса,

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin zx dx,$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_s(z)\sin zx dz$$

(бу формулалар Фурьенинг синус алмаштиришлари дейилади).

Фурьенинг синус ва косинус алмаштиришлари фақат Ox нинг мусбат ярим ўқида берилган, бу ярим ўқи бўйлаб абсолют интегралланувчи ва унинг исталган чекли кесмасида Дирихле шартларини қаноатлантирувчи функцияларгагина қўлланиши мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x<-1 \text{ да } 0, \\ -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2} \text{ да } x+1, \\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \text{ да } 1, \\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \text{ да}, -x+1, \\ x>1 \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топинг.

Ечиш. Ушбу

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{izu}du.$$

Фурье алмаштириши формуласига кўра

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{izu}du+\int_{-1}^{-1/2}(u+1)e^{izu}du+\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot e^{izu}du+\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}(-u+1)e^{izu}du+\int_{1}^{+\infty} 0\cdot e^{izu}du\right]$$

Равшанки, биринчи ва охирги интеграллар нолга тенг. Қолган интегралларни мос равишда I_1, I_2 ва I_3 орқали белгилаб, ҳисоблаймиз:

$$I_1=\int_{-1}^{-1/2}(u+1)e^{izu}du=\left\{\begin{matrix} s=u+1,\ ds=du, \\ dt=e^{izudu},\ t=\frac{e^{izu}}{iz}\end{matrix}\right\}=\left(\frac{1}{iz}(u+1)e^{izu}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{iz}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{-\frac{1}{2}iz}-\frac{1}{z^2}e^{-iz}=\frac{1}{2iz}e^{-\frac{iz}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{-\frac{iz}{2}}-\frac{1}{z^2}e^{-iz};$$

$$I_2=\int_{-1/2}^{1/2}e^{izu}du=\frac{1}{iz}e^{izu}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{iz}(e^{1/2iz}-e^{-1/2\,iz})=\frac{2\sin\frac{z}{2}}{z};$$

$$I_3=\int_{1/2}^{1}(-u+1)e^{izu}du=\left\{\begin{matrix} s=-u+1, ds=-du, \\ dt=e^{izu}du, t=\frac{1}{iz}e^{izu}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left(\frac{1}{iz}(-u+1)e^{izu}+\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right)\Big|_{1/2}^{1}=\frac{1}{i^2z^2}e^{iz}-\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{iz}{2}}-$$

$$-\frac{1}{i^2z^2}e^{\frac{iz}{2}}=-\frac{1}{z^2}e^{iz}-\frac{1}{2zi}e^{\frac{iz}{2}}-\frac{1}{z^2}e^{\frac{iz}{2}}.$$

Шундай қилиб,

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2iz}e^{-\frac{iz}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{-\frac{iz}{2}}-\frac{1}{z^2}e^{-iz}+\frac{2\sin\frac{z}{2}}{z}-\frac{1}{z^2}e^{iz}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2zi}e^{\frac{iz}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{\frac{iz}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2\cos z}{z^2}+\frac{\sin\frac{z}{2}}{z}+\frac{2\cos\frac{z}{2}}{z^2}\right]$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} 0\leqslant x<a \text{ да } 1, \\ x=a \text{ да } \frac{1}{2}, \\ x>a \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг косинус ва синус алмаштиришларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг косинус-алмаштиришини топамиз:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\cos zu du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^a\cos zu du+\right.$$

$$\left.+\int_a^{+\infty}0\cdot\cos zu du\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos zu du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin az}{z}$$

Энди синус алмаштиришини топамиз:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(u)\ zudu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_0^a \sin zudu+\int\limits_0^{+\infty} 0\cdot\sin zudu\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a \sin zudu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos az}{z}.$$

Ўз навбатида $f_c(z)$ ва $f_s(z)$ функцияларга косинус- ва синус-алмаштиришларни қўллаб, $f(x)$ функциянинг ўзини топамиз, яъни

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin az}{z}\cos xzdz=\begin{cases}0\leqslant x<a \text{ да } 1;\\ x=a \text{ да } \frac{1}{2};\\ x>a \text{ да } 0;\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos az}{z}\sin xzdz=\begin{cases}0\leqslant x<a \text{ да } 1;\\ x=a \text{ да } \frac{1}{2};\\ x>a \text{ да } 0.\end{cases}$$

10- дарсхона топшириғи

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}|x|\leqslant\pi \text{ да } \cos\frac{x}{2},\\ |x|>\pi \text{ да } 0\end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топииг.

Ж: $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cdot\cos\pi z.$

2. $f(x)=e^{-x}(x\geqslant 0)$ функциянииг косиус ва синус алмаштиришларини топинг.

Ж: $f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{z^2+1}$, $f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{z}{z^2+1}$.

10- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-1\leqslant x<0 \text{ да } e^{-x},\\ 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ да } e^{x},\\ |x|>1 \text{ да } 0\end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришиии топинг.

Ж: $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{ze-\sin z-z\cos z}{e(1+z^2)}$.

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2} \text{ да } -1,\\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \text{ да } 0,\\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \text{ да } 1\end{cases}$$

функциянинг Фурье синус ва косинус алмаштиришларини топинг.

Ж: $f_c(z)=\frac{\sin z-\sin\frac{z}{2}}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $f_s(z)=\frac{\cos\frac{z}{2}-\cos z}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

9- назорат иши

1. Қаторнинг яқинлашувчанлигини исбот қилинг ва йиғиндисини топинг:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$.

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+11n+30}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$.

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

1.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$.

1.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+32n+63}$.

1.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

1.11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$.

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+15n+4}$.

1.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+24n+35}$.

1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+15n+56}$.

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

1.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+16n+15}$.

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$.

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+13n+42}$.

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$.

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+20}$.

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+21n+10}$.

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-12}$.

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$.

1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n}$.

1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+5}$.

2. Қаторнинг яқинлашишини текширинг:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}+n-1}$.

2.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$.

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}$.

2.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

2.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+3n}{5^n+n}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

2.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^5\frac{\sigma}{n}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Қаторнинг яқинлашишини текширинг:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2-1)}{n!}$.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot(n+1)!}$.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot2^n}}$.

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{5^n(n+1)!}$.

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$.

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$.

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n+1)!}$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$.

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$.

3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$.

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{3^n}$.

3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$.

3.30. $\sum\limits_{n=}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\,\mathrm{tg}\frac{1}{5^n}$.

4. Қаторнинг яқинлашишини текширинг:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{n+2}{2n+3}\right)^n$.

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^{n^2}$.

4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$.

4.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

4.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

4.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$.

4.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n}\right)^{3n}$.

4.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$.

4.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

4.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5\cdot3^n}{(2n+1)^n}$.

4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$.

4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$.

4.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

4.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$.

4.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$.

4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2n+1}\right)^n$.

4.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n (n-1)^2$.

4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\cdot e^{-n}$.

4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)^n$.

4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-}\right)^n$.

4.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n (n+1)^3$.

4.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

5. Ишоралари навбатланувчи қаторнинг шартли ва абсолют яқинлашишини текширинг:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$.

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot5^n}$.

5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot2n^2}{n^4-n^2+1}$.

5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.

5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{12^n}$.

5.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^n}$.

5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.

5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln (2n)}$.

5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+2}}$.

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$.

5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.

5.22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{tg} \frac{1}{n}$.

5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

5.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n^4}$

5.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}$.

5.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{s}$[illegible]$\frac{\text{[illegible]}}{6n}$.

5.28. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

5.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$.

5.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

6. Қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{3}}}{n!} x^n$.

6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

6.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{3}} x^n}{n!}$.

6.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

6.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n$.

6.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n(n^2+1)}$.

6.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6}\right)^n \cdot x^n$.

6.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} x^n$.

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$.

6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n} x$.

6.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$.

6.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)^n} x^n$.

6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$.

6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} x^n$.

6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3n}$.

6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$.

6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$.

6.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$.

6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{(n+1)^n}$.

6.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} x^n$.

6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

6.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

6.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, x^n}{!}$.

6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$.

6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$.

6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

6.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$.

6.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

10-боб

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Декарт координаталарида икки ўлчовли интегралларни ҳисоблаш

10.1.1. $z=f(x, y)=f(P)$ функция L чизиқ билан чегараланган ёпиқ D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n — D соҳани n та элементар бўлакларга бўлиш натижасида ҳосил бўлган юзчалар бўлсин. Ҳар қайси Δs_i элементар соҳада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i)$ нуқтани танлаймиз ва функциянинг P_i нуқтадаги қийматини ҳисоблаб, ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$f(P_i)\cdot\Delta s_i=f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Шундай кўпайтмаларнинг барчасининг

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i=\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

йиғиндиси $z=f(x, y)=f(P)$ функция учун D соҳадаги *интеграл йиғинди* дейилади.

Δs_i элементар юзчалар сони чексиз орттирилса, у ҳолда улар диаметрларининг энг каттаси нолга интилгандаги интеграл йиғиндининг лимити $z=f(x, y)$ функциядан D соҳа бўйича олинган *икки ўлчовли интеграл* дейилади ва бундай белгиланади:

$$\iint\limits_D f(P)\,ds \quad \text{ёки} \quad \iint\limits_D f(x, y)\,ds.$$

Шундай қилиб,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds=\lim_{\max\operatorname{diam}\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i.$$

Бунда D — интеграллаш соҳаси, $f(x, y)$ интеграл остидаги функция, ds — юз элементи дейилади. Декарт координаталарида $ds=dxdy$ бўлганлиги учун икки ўлчовли интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds=\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$$

бўлади.

Агар $f(x, y)\geqslant 0$ бўлиб, v — пастдан интеграллаш соҳаси D билан, юқоридан D га проекцияланувчи $z=f(x, y)$ сиртнинг бўлаги билан, ён томондан эса ясовчилари Oz ўққа параллел ва йўналтирувчиси D соҳа чегараси L дан иборат цилиндрик сирт билан чегараланган жисм ҳажми бўлсин. У ҳолда

$$v=\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy.$$

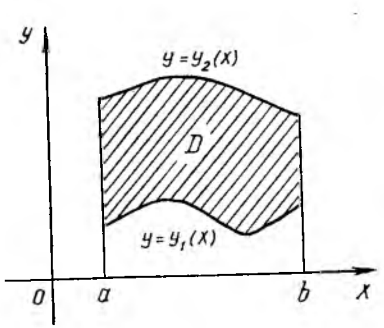
Агар $f(x, y)\equiv 1$ бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интегралнинг қиймати сон жиҳатдан интеграллаш соҳаси D нинг s юзига тенг бўлади, яъни

$$\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_D ds=s.$$

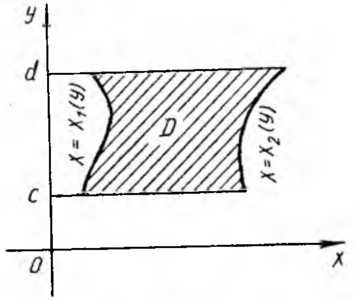
Агар $f(x, y)$ функция D соҳага жойлашган пластинка массаси тақсимланишининг зичлигини ифодаласа, у ҳолда икки ўлчовли интеграл шу пластинка моддасининг массаси M ни беради:

$$M=\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy=\iint\limits_D f(x, y)\,ds.$$

10.1.2. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш иккита аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади.



45- шакл



46- шакл

Агар D соҳа $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ функцияларнинг графиклари ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган (45- шакл), яъни

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x) \end{cases}$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Бу ерда

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

ички интеграл деб аталади ва уни ҳисоблашда x ни ўзгармас деб, интеграллаш y бўйича олиб борилади. Ички интегрални ҳисоблаш натижаси *ташқи интеграл* учун интеграл ости функцияси бўлади.

Агар D соҳа қуйидаги

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d \\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2\,(y) \end{cases}$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса (46- шакл) икки ўлчовли интеграл ушбу

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx\right]dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

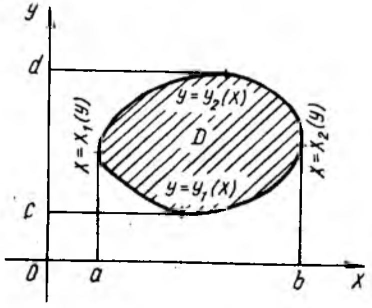
формула ёрдамида иккита аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

Агар D соҳа 47- шаклда кўрсатилгандагидек $x=a$, $y=c$, $x=b$, $y=d$ чизиқлар билан фақат битта нуқтада кесишса, у ҳолда икки ўлчовли интегрални ҳисоблашда юқорида келтирилган ҳар иккала формуладан ҳам фойдаланиш мумкин бўлиб,

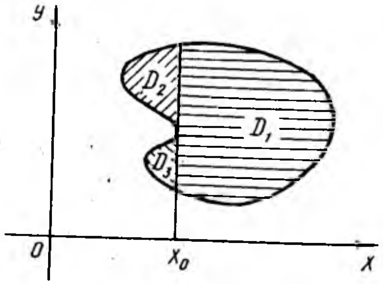
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар интеграллаш соҳаси 48- шаклда кўрсатилгандагидек контурга эга бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун соҳа $x=x_0$ чизиқ билан бўлакларга бўлиниб, юқоридаги формулалардан фойдаланилади.



47- шакл



48- шакл

1- мисол. Икки ўлчовли интегрални ҳисобланг:

$$\iint_D (x-y)\,dxdy,$$

бу ерда D соҳа $y=2-x^2$ ва $y=2x-1$ чизиқлар билан чегараланган.

Ечиш. D соҳани чизамиз (49- шакл). Учи $A(0,\ 2)$ да бўлган $y=2-x^2$ парабола Oy ўққа нисбатан симметрик бўлиб, $y=2x-1$ тўғри чизиқ билан иккита: $B\ (1,\ 1)$ ва $C\ (-3,\ -7)$ нуқталарда кесишади. Интеграллаш соҳаси D ушбу тенгсизликлар системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x-1 \leqslant y \leqslant 2-x^2. \end{cases}$$

Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint_D (x-y)\,dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy = \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]\Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[x(2-x^2) - \frac{1}{2}\,(2-x^2)^2 - x(2x-1) + \frac{1}{2}\,(2x-1)^2\right] dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]\Big|_{-3}^{1} = \frac{64}{15}.$$

2- мисол. Ушбу

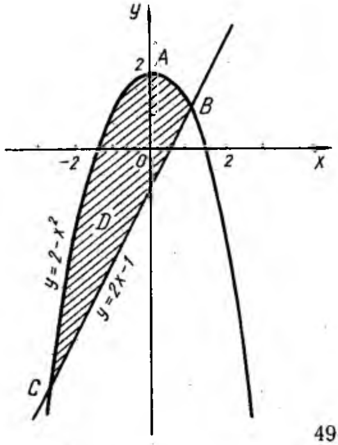
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$$

интегралда интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

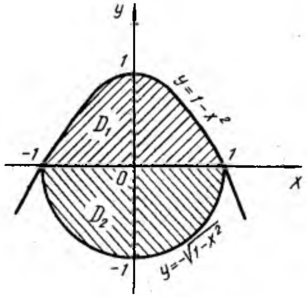
Ечиш. Интеграллаш соҳаси D ушбу тенгсизликлар системаси орқали аниқланади:

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1-x^2. \end{cases}$$

Бу соҳани чизамиз (50- шакл) ва уни D_1 ва D_2 соҳаларга ажратамиз. Бу соҳалар қуйидаги тенгсизликлар системалари билан аниқланадилар:



49- шакл



50- шакл

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1,\\ -\sqrt{1-y}\leqslant x\leqslant+\sqrt{1-y};\end{cases}\quad D_2:\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 0,\\ -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant+\sqrt{1-y^2}\end{cases}.$$

У ҳолда

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx.$$

1- дарсхона топшириғи

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_1^3 dx\int_{x^3}^{x}(x-y)\,dy$; б) $\int_0^4 dx\int_1^e x\ln y\,dy$;

в) $\int_{-3}^{8}dy\int_{y^2-4}^{5}(x+2y)\,dx$.

Ж: а) $112\frac{8}{105}$; б) 8; в) $50\frac{2}{5}$.

2. Икки ўлчовли $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ интегралнинг интеграллаш соҳаси D:

а) $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$ ва $3x-2y+1=0$ тўғри чизиқлар билан;

б) $x^2+y^2-4y=0$ чизиқ билан;

в) $y=x^2+1$, $x=0$, $x+y=4$ чизиқлар билан чегараланган. Ички ва ташқи интегралларнинг интеграллаш чегараларини аниқланг.

3. Қуйидаги икки ўлчовли интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

а) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\,dx$; б) $\int_1^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)\,dy$;

в) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\,dx$.

4. Қуйидаги интегралларни ҳисоблаиг:

а) $\iint\limits_D(x^2+y)\,dxdy$, бу ерда D соҳа $y=x^2$ ва $y^2=x$ чизиқлар билан чегараланган.

б) $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, бу ерда D соҳа $x=2$, $y=x$, $xy=1$ чизиқлар билан чегараланган.

Ж: а) $\frac{33}{140}$; б) $\frac{9}{4}$.

5. $y=x^2-2x$, $y=x$ чизиқлар билан чегараланган юзни ҳисобланг:

Ж: 9/2 кв. бирл.

6. $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: $\frac{1}{6}$ куб бирл.

7. Агар $x=(y-1)^2$, $y=x-1$ чизиқлар билан чегараланган моддий пластинка массаси тақсимланишиниг зичлиги $\gamma=y$ бўлса, унинг массасини аниқланг.

Ж: $\frac{27}{4}$ масса бирл.

1- мустақил иш

1. Қуйидаги икки ўлчовли интегралларни ҳисобланг:

а) $\iint\limits_D(\cos 2x+\sin y)\,dxdy$, бу ерда D соҳа $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган;

б) $\iint\limits_D y\ln x\,dxdy$, бу ерда D соҳа $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган.

в) $\iint\limits_D\sin(x+y)\,dxdy$, бу ерда D соҳа $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=x$ чизиқлар билан чегараланган.

г) $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, бу ерда D соҳа—учлари $A(2, 3)$, $B(2, 7)$, $C(4, 5)$ нуқталарда бўлган учбурчак.

Ж: а) $\frac{1}{4}(\pi+1-2\sqrt{2})$; б) $\frac{5}{8}(2\ln 2-1)$; в) 1; г) 26.

2. Интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

а) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\,dy$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$;

в) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$;

г) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x, y)\,dy$;

д) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3. $y=2-x$, $y^2=4x+4$ чизиқлар билан чегараланган юзни ҳисобланг.

Ж: $\frac{64}{3}$ кв. бирл.

4. $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+y+z=4$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: 4π куб. бирл.

2-§. Декарт координаталарида уч ўлчовли интегралларни ҳисоблаш

10.2.1. $f(x, y, z)=f(P)$ функция о сирт билан чегараланган ёпиқ фазовий Ω соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин; Δv_1, Δv_2, … , Δv_n—Ω соҳани n та бўлакларга бўлиш натижасида ҳосил бўлган соҳаларнинг ҳажмлари бўлсин, ҳар қайси Δv_i соҳачада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқтани танлаймиз ва функциянинг P_i нуқтадаги қийматини ҳисоблаб, ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$f(P_i)\cdot\Delta v_i=f(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta v_i.$$

Қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{n} f(P)\Delta v_i \text{ ёки } \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

йиғинди $f(x, y, z)=f(P)$ функция учун Ω соҳа бўйича *интеграл йиғинди* дейилади.

$f(x, y, z)=f(P)$ функциянинг Ω соҳа бўйича *уч ўлчовли интеграли* деб интеграл йиғиндининг элементар соҳалар диаметрларининг энг каттаси нолга интилади деган шартдаги лимитига айтилади:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dv=\lim_{\max\operatorname{diam}\Delta v_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i.$$

Декарт координаталарида уч ўлчовли интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ кўринишда ёзилади.

10.2.2. Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш учта аниқ интегрални ёки битта икки ўлчовли ва битта аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади.

Агар Ω соҳа, ушбу

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b, \\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), \\ z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y) \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан аниқланган бўлса (51-шакл), у ҳолда уч ўлчовли интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

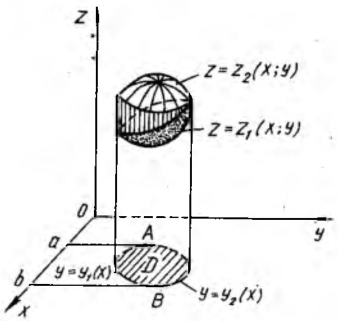
ёки

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dx.$$

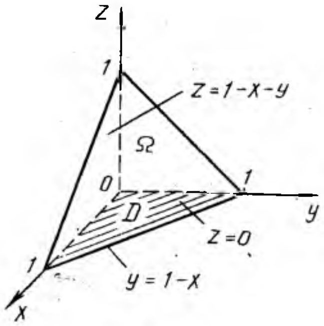
Мисол. Ушбу $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда Ω соҳа $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$ текисликлар билан чегараланган.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси Ω ни чизамиз (52-шакл). Бу соҳа ушбу тенгсизликлар системаси орқали аниқланади:

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant 1-x, \\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y. \end{cases}$$



51- шакл



52- шакл

Берилган уч ўлчовли интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} zdz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int\limits_0^1(-(1-x)^3)dx=\frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{24}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Уч каррали интегралларни ҳисобланг:

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} x^3y^3zdz.$

Ж: $\frac{1}{110}.$

2. $\int\limits_0^{e-1} dx\int\limits_0^{e-x-1} dy\int\limits_e^{x+y+e}\frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)\ (x+y-e)}\ dz.$

3. $\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$ — уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $z=xy$ гиперболик параболоид ҳамда $x+y=1$ ва $z=0\,(z\geqslant 0)$ текисликлар билан чегараланган.

Ж: $\frac{1}{180}.$

4. $\iiint\limits_{\Omega} y\cos\,(z+x)\ dxdydz$ уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y=\sqrt{x}$ цилиндр ва $y=0,\ z=0$ ҳамда $x+z=\frac{\pi}{2}$ текисликлар билан чегараланган.

Ж: $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$

2- мустақил иш

Уч каррали интегралларни ҳисобланг:

1. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{2x} dy\int\limits_0^{\sqrt{xy}} zdz.$

Ж: $\frac{81}{4}.$

2. $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$— уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy$ ва $z=0$ сиртлар билан чегараланган.

Ж: $\frac{1}{96}.$

3. $\iiint\limits_{\Omega}(2x+y)\,dxdydz$— уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y=x,\ x=1,\ z=1,$ ва $z=1+x^2+y^2$ сиртлар билан чегараланган.

Ж: $\frac{41}{60}.$

3- §. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш

10.3.1. Икки каррали интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ да ўзгарувчиларни алмаштириш қуйидаги

$$x=x\ (u,\ v),\ y=y\ (u,\ v)$$

муносабатлар ёрдамида амалга оширилади. Бу ерда $x\ (u,\ v)$ ва $y\ (u,\ v)$ D соҳада узлуксиз биринчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга функциялар. Юқоридаги муносабатлардан u ва v ўзгарувчиларни ягона усул билан

$$u=u\ (x,\ y),\ v=v\ (x,\ y)$$

кўринишда топиш мумкин бўлсин. У ҳолда Oxy координаталар текислигидаги D соҳанинг ҳар бир $P(x,y)$ нуқтасига янги O_1uv тўғри бурчакли координаталар системасидаги бирор $\bar{P}(u,\ v)$ нуқта мос келади. Ҳамма $\bar{P}(u,v)$ нуқталар тўплами бирор ёпиқ $\bar{D}$ соҳани ҳосил қилади.

Агар *Якобиан*

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл учун ушбу ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ўринлидир:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\bar{D}} f(x(u, v), y(u, v))\,|I|\,dudv.$$

1-мисол. Ушбу икки ўлчовли интегрални ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\iint\limits_{D} (x+y)\, dxdy,$$

бу ерда $D: y=x-1$, $y=x+2$, $y=-x-2$ ва $y=-x+3$ чизиқлар билан чегараланган соҳа.

Ечиш. Oxy текисликдаги D соҳани чизамиз (53-шакл) ва

$$\begin{cases} u=y-x, \\ v=y+x \end{cases}$$

янги ўзгарувчилар киритамиз. У ҳолда Oxy текисликнинг $y=x-1$ ва $y=x+2$ тўғри чизиқларига O_1uv текисликнинг мос ҳолда $u=-1$ ва $u=2$ тўғри чизиқлари, $y=-x-2$ ва $y=-x+3$ тўғри чизиқларига эса $v=-2$ ва $v=3$ тўғри чизиқлар мос келади. D соҳа аксланадиган янги $\bar{D}$ соҳани чизамиз (54-шакл).

x ва y ўзгарувчиларни u ва v лар орқали ифодалаб,

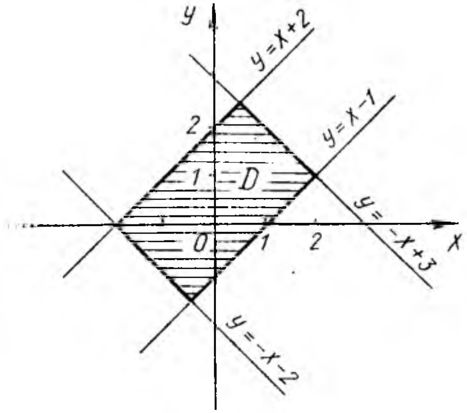
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(v-u), \\ y=\frac{1}{2}(v+u) \end{cases}$$

Якобианни ҳисоблаймиз:

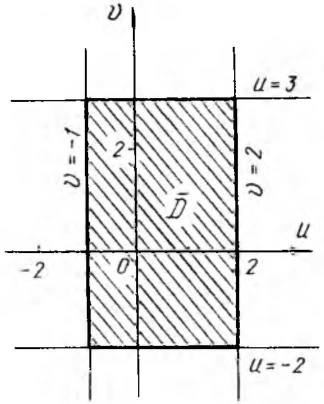
$$\bar{I}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

яъни

$$|I|=\frac{1}{2}.$$



53-шакл



54-шакл

Интеграллаш соҳаси $\bar{D}$ қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали аниқланади:

$$\begin{cases} -1 \leqslant u \leqslant 2, \\ -2 \leqslant v \leqslant 3. \end{cases}$$

Демак,

$$\iint\limits_{D} (x+y)\, dxdy = \iint\limits_{\bar{D}} \frac{1}{2} v\, dudv = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} du \int\limits_{-2}^{3} v dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2} v^2 \Big|_{-2}^{3}\right) du = \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{2} (9-4)\, du = \frac{5}{4} u \Big|_{-1}^{2} = \frac{15}{4}.$$

10.3.2. Маълумки, тўғри бурчакли x, y ва қутб r, φ координаталар ўзаро

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

муносабатлар билан боғланган. Бу ерда $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Икки ўлчовли интегралда тўғри бурчакли координаталардан қутб координаталарга ўтиш қуйидаги формула орқали амалга оширилади:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\bar{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi.$$

Интеграллаш чегаралари O қутбнинг вазиятига боғлиқ бўлади.

а) Агар O қутб $\varphi=\alpha$ ва $\varphi=\beta\,(\alpha<\beta)$ нурлар ҳамда $r=r_1(\varphi)$ ва $r=r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi)<r_2(\varphi))$ чизиқлар билан чегараланган D соҳа ташқа-

рисида ётса, икки ўлчовли интеграл қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr.$$

б) Агар O қутб D соҳа ичида жойлашган бўлса ва бу соҳа чегараси қутб координаталар системасида $r=r(\varphi)$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл ушбу формула бўйича ҳисоблаиади:

$$\iint\limits_D f\ (x, y)\,dxdy=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{r(\varphi)}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ rdr.$$

в) Агар O қутб $\varphi=\alpha$ ва $\varphi=\beta(\alpha<\beta)$ нурлар билан чегараланган D соҳа чегарасида ётса, шу билан бирга, чегаранинг қутб координаталар системасида тенгламаси $r=r(\varphi)$ кўринишда бўлса, икки ўлчовли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{0}^{r(\varphi)}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr.$$

2- мисол. Ушбу икки ўлчовли иитегралии ҳисобланг:

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

бу ерда D соҳа $x^2+y^2\leqslant a^2$ доиранинг биринчи чораги.

Ечиш. Агар интеграллаш соҳаси D доира ёки унинг бўлаги бўлса, кўп интеграллар қутб координаталарида осон ҳисобланади. Бизнинг ҳолда O қутб D соҳа чегарасида жойлашган (б) ҳол). D соҳа қутб координаталар системасида ушбу тенгсизликлар системаси орқали аниқланади (55- шакл):

$$\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0\leqslant r\leqslant a\end{cases}$$

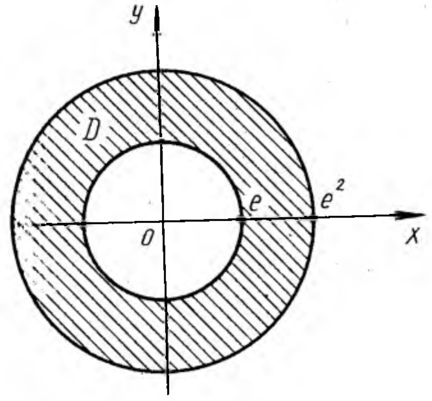
Демак,

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi=\iint\limits_D r^2drd\varphi=$$

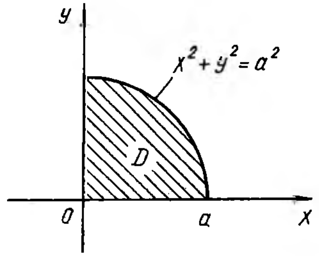
$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a r^2dr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a\right)d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2}a^3d\varphi=\frac{a^3}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^3}{6}.$$

3- мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)\ dxdy,$$



55- шакл



56- шакл

бу ерда D соҳа $x^2+y^2=e^2$ ва $x^2+y^2=e^4$ доиралар орасидаги ҳалқадан иборат.

Ечиш. D соҳани чизамиз (56- шакл). Қутб координаталарида D соҳа чегараси $r=e$ ва $r=e^2$ кўринишга эга. O қутб чегарадаи ташқарида ётади (а) ҳол).

Интегралда қутб координаталарига ўтамиз:

$$\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)\,dxdy=\iint\limits_D\ln r^2\cdot rdrd\varphi=2\iint\limits_D r\ln rdrd\varphi=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_e^{e^2}\ln rdr.$$

Ички интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_e^{e^2}r\ln rdr=\left\{\begin{matrix}u=\ln r;\ du=\frac{1}{r}\,dr\\ dv=rdr;\ v=\frac{1}{2}r^2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\,r^2\ln r\ \Big|_e^{e^2}-$$

$$\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{2}\,r^2\frac{1}{r}\,dr=\frac{1}{2}\ (e^4\ln e^2-e^2\ln e)-\frac{1}{2}\int\limits_e^{e^2}rdr=$$

$$=\frac{1}{2}\ (2e^4-e^2)-\frac{1}{4}r^2\Big|_e^{e^2}=\frac{1}{2}\ (2e^4-e^2)-$$

$$-\frac{1}{4}\ (e^4-e^2)=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2=\frac{e^2}{4}\ (3e^2-1).$$

Шундай қилиб,

$$\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)\,dxdy=2\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^2}{4}(3e^2-1)\,d\varphi=\frac{1}{2}e^2(3e^2-1)\int\limits_0^{2\pi}d\psi=$$

$$=\frac{1}{2}e^2(3e^2-1)\,\varphi\ \Big|_0^{2\pi}=\pi e^2\ (3e^2-1).$$

3- дарсхона топшириғи

Қуйидаги икки ўлчовли интегралларни қутб координаталар системасига ўтиб, ҳисобланг:

а) $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, бу ерда D соҳа $x^2+y^2\leqslant\pi^2$ доира;

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, бу ерда D соҳа $y=\sqrt{1-x^2}$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган;

в) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, бу ерда D соҳа $x^2+y^2=2ax$ чизиқ билан чегараланган;

г) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, бу ерда D соҳа $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$ ва $x^2+y^2=\pi^2$. чизиқлар билан чегараланган.

Ж: а) $2\pi^3$; б) $\frac{1}{2}\pi\ln2$; в) $\frac{3}{2}\pi a^4$; г) 3π.

2. Икки ўлчовли интегрални ҳисобланг:

$\iint\limits_D (x+y)xdxdy$, бу ерда D соҳа $2x+y=1$, $x-y=2$, $2x+y=3$, $x-y=-1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган.

Ж: 2,5.

3. $r=a\sin2\varphi$, $a>0$ чизиқ билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

Ж: $\pi a^2/2$ кв. бирл.

3- мустақил иш

1. Қуйидаги интегралларни қутб координаталарига ўтиб ҳисобланг:

а) $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, бу ерда D соҳа $x^2+y^2=a^2$ ва $x^2+y^2=4a^2$ чизиқлар билан чегараланган;

б) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, бу ерда D соҳа $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}\,x$ чизиқлар билан чегараланган ҳалқанинг бир қисми.

Ж: а) $\frac{14}{3}\pi a^3$; б) $\frac{1}{6}\pi^2$.

2. Агар D соҳа $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадрат бўлса,

$$\iint\limits_D (x+y)^3\,(x-y)^2\,dxdy$$

интегрални ҳисобланг.

Ж: $\frac{20}{3}$.

11-боб

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

11.1.1. $f(x, y)=f(P)$ функция AB ясси силлиқ эгри чизиқнинг барча нуқталарида аниқланган ва узлуксиз бўлсин; бу ёйни узунликлари $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ бўлган n та элементар ёйчаларга бўламиз. Ҳар қайси i-бўлакда ихтиёрий $P_i\ (x_i, y_i)$ нуқтани танлаб олиб, функциянинг P_i нуқтадаги қийматини мос элементар ёйча узунлигига кўпайтирамиз. Бу кўпайтмаларнинг ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i \text{ ёки } \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$$

кўринишидаги йиғиндиси $f(x, y)=f(P)$ функция учун AB ёй бўйича *интеграл йиғинди* дейилади.

Бу интеграл йиғиндининг элементар ёйчалар узунликларининг энг каттаси нолга интилгандаги лимити *биринчи тур эгри чизиқли интеграл* ёки *ёй узунлиги бўйича эгри чизиқли интеграл* дейилади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$$

ёки

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(P)\,dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i.$$

Агар $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ фазода берилган бўлиб, бу эгри чизиқ бўйлаб узлуксиз $f(x, y, z)=f(P)$ функция берилган бўлса, у ҳолда:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)\,dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$$

ёки

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(P)\,dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i.$$

Биринчи тур эгри чизиқли интеграл $\overset{\smile}{AB}$ ёй қайси йўналишда ўтилишига боғлиқ эмас, яъни

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(P)\,dl=\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(P)\,dl.$$

11.1.2. Биринчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади:

а) Агар ясси $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, эгри чизиқли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ фазода $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ тенгламалар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt.$$

б) Агар $\overset{\smile}{AB}$ ясси эгри чизиқ $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ тенглама билан берилган бўлса, эгри чизиқли интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dl=\int_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

в) Агар $\overset{\smile}{AB}$ ясси эгри чизиқ $x=x(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ тенглама билан берилган бўлса, эгри чизиқли интеграл

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dl=\int_{c}^{d} f(x(y), y)\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

1-мисол. Ушбу эгри чизиқли интегрални ҳисобланг:

$$\int\limits_{L} (x-y)\,dl,$$

бу ерда L — тўғри чизиқнинг $A(0, 0)$ дан $B(4, 3)$ гача бўлаги.

Ечиш. AB тўғри чизиқ $y=\frac{3}{4}x$ кўринишга эга. $y'=\frac{3}{4}$ ни топамиз. Демак,

$$\int\limits_L (x-y)\,dl=\int\limits_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\,\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=\int\limits_0^4 \frac{1}{4}x\cdot\frac{5}{4}dx=$$

$$=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}.$$

2-мисол. $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда $L: x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ винт чизиғининг биринчи ўрами.

Ечиш. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз: $\dot{x}=\cos t-t\sin t$, $\dot{y}=\sin t+t\cos t$, $\dot{z}=1$. У ҳолда

$$\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,dl=\int\limits_0^{2\pi}(2t-\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t})\times$$

$$\times\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}(2t-t)\,\sqrt{2+t^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2+t^2)^3}\,\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}\,(\sqrt{(2+4\pi^2)^3}-\sqrt{2^3})=\frac{\sqrt{2^3}}{3}(\sqrt{(1+2\pi^2)^3}-1).$$

11.1.3. $P(x,\ y)$ ва $Q(x,\ y)$ функциялар бирор ясси силлиқ $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг барча нуқталарида аниқланган ва узлуксиз бўлсин; $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \dots,\ \Delta x_n$ ва $\Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \dots,\ \Delta y_n$ элементар ёйчаларнинг (11.1.1. банд) Ox ва Oy ўқларга проекциялари бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{i=1}^{n}[P(x_i,\ y_i)\Delta x_i+Q(x_i,\ y_i)\Delta y_i]$$

йиғинди $P(x,\ y)$ ва $Q(x,\ y)$ функциялар учун *координаталар бўйича интеграл йиғинди* дейилади.

Бу интеграл йиғиндининг $\max\Delta x_i\to 0$ ва $\max\Delta y_i\to 0$ даги лимити $\breve{AB}$ ёй йўналиши бўйича *иккинчи тур эгри чизиқли интеграл* ёки *координаталар бўйича эгри чизиқли интеграл* дейилади:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,\ y_i)\Delta x_i+Q(x_i,\ y_i)\Delta y_i.$$

Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлининг йўналишига боғлиқ, яъни

$$\int\limits_{\breve{BA}} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=-\int\limits_{\breve{AB}} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy.$$

Агар интеграллаш йўли ёпиқ эгри чизиқдан иборат бўлса, у ҳолда ёпиқ контур бўйича эгри чизиқли интеграл айланиб ўтиш йўналишини кўрсатиб

$$\oint P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy$$

каби белгиланади.

Агар ёпиқ контурни айланиб ўтиш соат мили ҳаракатига қарама-қарши бўлса, у мусбат дейилади (бунда контур билан чегараланган соҳа чап томонда қолади). Бунга тескари айланиб ўтиш манфий дейилади. Келгусида, агар таъкидлаб ўтилмаган бўлса, контурни айланиб ўтиш йўналишини мусбат деб олаверамиз.

11.1.4. Иккинчи тур интегрални ҳисоблаш ҳам аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади:

а) Агар ясси $\breve{AB}$ эгри чизиқ $x=x\,(t),\ \ y=y\,(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлиб, t параметр йўлнинг бошланиши A га мос t_A қийматдан, йўл охири B га мос t_B қийматгача ўзгарса, иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\int\limits_{t_A}^{t_B}[P(x(t),\ y(t))\dot{x}(t)+$$

$$+Q(x(t),\ y(t))\dot{y}(t)]dt.$$

$\breve{AB}$ эгри чизиқ фазода $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{AB} P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{t_A}^{t_B}[P(x(t),\ y\ (t)\ z(t))\dot{x}(t)+Q(x\ (t),\ y(t),\ z(t))\dot{y}(t)+$$

$$+R(x(t),\ y(t),\ z(t))\dot{z}(t)]dt.$$

б) Агар ясси $\breve{AB}$ эгри чизиқ $y=y(x)$ тенглама билан берилган бўлиб, x ўзгарувчи йўл бошланиши A га мос a қийматдан йўл охири B га мос b қийматгача ўзгарса, эгри чизиқли интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\int\limits_a^b[P(x,\ y(x))+Q(x,\ y(x))\,y'(x)]dx.$$

в) Агар ясси $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $x=x(y)$ тенглама билан берилган бўлиб, y ўзгарувчи йўл бошланиши A га мос c қийматдан йўл охири B га мос d қийматгача ўзгарса, эгри чизиқли интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_{c}^{d}[P(x(y), y)\,x'(y)+Q(x(y), y)]dy.$$

3- мисол. Ушбу эгри чизиқли интегрални ҳисобланг:

$$\int_{L} y^2dx+x^2dy,$$

бу ерда L контур $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипснинг соат мили ҳаракати бўйича айланиб ўтиладиган юқори ярми (57- шакл).

Ечиш. Йўлнинг бошланиши параметрнинг $t_A=\pi$ қийматига мос A нуқтада жойлашган; йўл охири параметрнинг $t_B=0$ қийматига мос B нуқтада жойлашган. Шундай қилиб, қуйидагига эгамиз:

$$\int_{L} y^2dx+x^2dy=\int_{\overset{\smile}{AB}} y^2dx+x^2dy=\int_{\pi}^{0}[b^2\sin^2t(-a\sin t)+$$

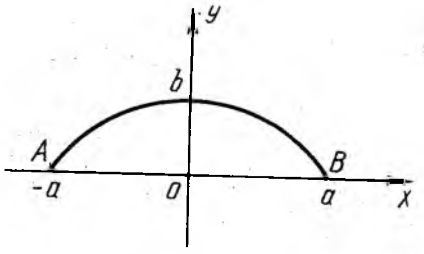
$$+a^2\cos^2t\cdot b\cos t]dt=-ab^2\int_{\pi}^{0}\sin^3tdt+a^2b\int_{\pi}^{0}\cos^3tdt=$$

$$=ab^2\int_{0}^{\pi}\sin^3tdt-a^2b\int_{0}^{\pi}\cos^3tdt=-ab^2\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2t)\,d(\cos t)-$$

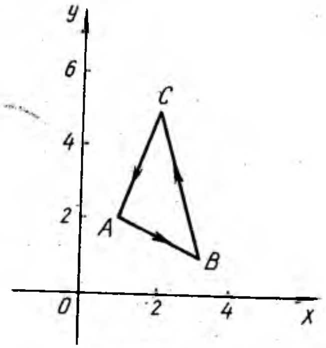
$$-a^2b\int_{0}^{\pi}(1-\sin^2t)\,d(\sin t)=-ab^2(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3t)\Big|_0^{\pi}-$$

$$-a^2b\,(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3t)\Big|_0^{\pi}=-ab^2(-1+\frac{1}{3}-1+$$

$$+\frac{1}{3})=\frac{4}{3}ab^2.$$



57- шакл



58- шакл

1 мисол. Ушбу эгри чизиқли интегралии ҳисобланг:

$$\oint_{L} 2xdy-3ydx\,,$$

бу ерда L — учлари $A(1, 2)$, B $(3, 1)$, C $(2, 5)$ нуқталарда бўлган учбурчак контури (58- шакл).

Ечиш. Контур ушбу тенгламалар билан берилган кесмалардан тузилган:

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ — AB нинг тенгламаси;

$y=-4x+13-BC$ нинг теигламаси;

$y=3x-1-$ AC нинг тенгламаси.

Қуйидагига эгамиз:

$$\oint(2xdy-3ydx)=\int_{AB}2xdy-3ydx+$$

$$+\int_{BC}2xdy-3ydx+\int_{CA}2xdy-3ydx\,.$$

Ҳар қайси интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{AB}2xdy-3ydx=\int_{1}^{3}\Big(2x\Big(-\frac{1}{2}\Big)-3\Big(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\Big)\Big)dx=$$

$$=\int_{1}^{3}\Big(-x+\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}\Big)dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(x-15)\,dx=\frac{1}{4}(x-15)^2\Big|_1^3=$$

$$=\frac{1}{4}(12^2-14^2)=\frac{1}{4}\cdot 26\cdot(-2)=-13\,;$$

$$\int_{BC}(2xdy-3ydx)=\int_{3}^{2}(2x(-4)-3\cdot(-4x+13))\,dx=$$

$$=\int_{3}^{2}(-8x+12x-39)\,dx=\int_{3}^{2}(4x-39)\,dx=(2x^2-39x)\,|_3^2=$$

$$=(8-78-18+117)=29\,;$$

$$\int_{CA}(2xdy-3ydx)=\int_{2}^{1}(2x\cdot 3-3(3x-1)\,dx=\int_{2}^{1}(6x-9x+3)\,dx=$$

$$=3\int_{2}^{1}(1-x)\,dx=3\Big(x+\frac{1}{2}x^2\Big)\Big|_2^1=3\Big(1+\frac{1}{2}-2-2\Big)=-\frac{15}{2}\,.$$

Шундай қилиб,

$$\oint_{L}(2xdy-3ydx)=\frac{17}{2}\,.$$

1- дарсхона топшириғи

1. $\int\limits_{L}\frac{dl}{x-y}$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $y=\frac{1}{2}x-2$ тўғри чизиқнинг $A(0, -2)$ ва $B(4, 0)$ нуқталар орасидаги кесмаси.
Ж: $\sqrt{5}\ln 2$.

2. $\int\limits_{L}y^2dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ циклоиданинг биринчи арки. Ж: $\frac{256}{15}a^3$.

3. $\int\limits_{L}xydl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L — учлари $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$ нуқталарда бўлган тўғри тўртбурчак контури. Ж: 24.

4. $\int\limits_{L}xyzdl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур тўғри чизиқнинг $A(1, 0, 1)$ ва B $(2, 2, 3)$ нуқталар орасидаги кесмаси.
Ж: 12.

5. $\int\limits_{l}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $y=x^2$ параболанинг $A(1, 1)$ нуқтадан $B(2, 4)$ нуқтагача ёйи. Ж: $40\frac{19}{30}$.

6. $\oint\limits_{L}ydx-xdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур мусбат йўналишда айланиб ўтиладиган $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипс.
Ж: $-2\pi ab$.

7. Агар L $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нуқталарни туташтирувчи чизиқ:
а) $y=x$; б) $y=x^2$; в) $y^2=x$; г) $y=x^3$
тенгламалар билан берилган бўлса,
$\int\limits_{L}xydx+(y-x)dy$ интегрални ҳисобланг.

Ж.: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{17}{30}$; г) $-\frac{1}{20}$.

8. $\int\limits_{L}xdx+ydy+(x+y-1)dz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L $A(1, 1, 1)$ ва $B(2, 3, 4)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси. Ж: 13.

1- мустақил иш

Эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

1. $\int\limits_{L}xdl$, бу ерда L $O(0, 0)$ ва $A(1, 2)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси. Ж: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. $\int\limits_{l}x^2ydl$, бу ерда L $x^2+y^2=9$ айлананинг биринчи квадрантда ётувчи қисми. Ж 27.

3. $\int\limits_{L}\frac{dl}{x+y}$, бу ерда L $y=x+2$ тўғри чизиқнинг $A(2, 3)$ ва B $(3, 5)$ нуқталарини туташтирувчи кесмаси.
Ж: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\int\limits_{L}(x+y)dx+(x-y)dy$, бу ерда L $y=x^2$ параболанинг A $(-1, 1)$ ва B $(1, 1)$ нуқталар орасидаги бўлаги.
Ж: 2.

5. $\int\limits_{L}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, бу ерда L OAB синиқ чизиқ бўлиб, $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, B $(4, 2)$. Ж: $\frac{136}{3}$.

6. $\oint\limits_{L}ydx+2xdy$, бу ерда L томонлари $2x+3y=\pm 6$, $2x-3y=\pm 6$ тўғри чизиқларда ётувчи, соат мили ҳаракатига тескари йўналишда айланиб ўтиладиган ромб контури. Ж: 12.

2- §. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интегралларнинг татбиқи

11.2.1. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида эгри чизиқ ёйининг узунлигини, моддий ёй массасини, цилиндрик сирт юзини ҳисоблаш мумкин:

а) $\int\limits_{\breve{AB}}dl=l_{AB}$, бу ерда l_{AB} $\breve{AB}$ ёй узунлиги (биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг геометрик маъноси);

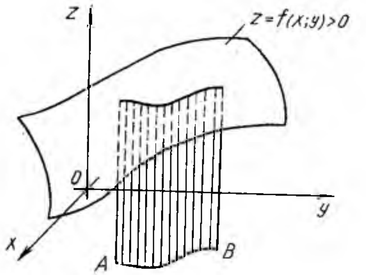
б) $\int\limits_{\breve{AB}}f(x, y, z)dl=m$, бу ерда m — моддий $\breve{AB}$ ёй массаси, $f(x, y, z)=\gamma$ — бу ёйнинг чизиқли зичлиги (эгри чизиқли интегралнинг механик маъноси);

в) $\int\limits_{\breve{AB}}f(x, y)dl=S$, бу ерда S — ясовчилари Oz ўққа параллел ва $\breve{AB}$ ёй нуқталаридан ўтувчи, пастдан бу ёй билан, юқоридан цилиндрик сиртнинг $z=f(x, y)$ $(f(x, y)>0)$ сирт билан кесишиш чизиғи билан, ён томонлардан эса A ва B нуқталардан Oz

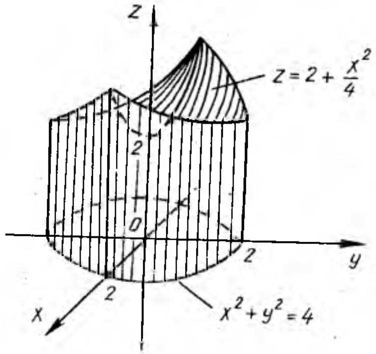
ўққа параллел ўтган чизиқлар билан чегаралангаи цилиндрик сиртнинг юзи (59- шакл).

1- мисол. $x^2+y^2=4$ цилиндрик сиртнинг Oxy текислик ва $z=2+\frac{x^2}{2}$ сирт орасидаги қисмининг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Шаклни чизамиз (60- шакл).



59- шакл



60- шакл

Цилиндрик сиртнинг изланаётган юзи S ушбу интеграл билан ифодаланади:

$$S=\int_L\left(2+\frac{x^2}{2}\right)dl,$$

бу ерда L Oxy текисликдаги айлана: $x^2+y^2=4$, $z=0$ ёки параметрик шаклда: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\leqslant t<2\pi$.

У ҳолда $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{(1-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=2dt$
Демак,

$$S=\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{2}\cdot 4\cos^2 t\right)2dt=4\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos 2t\right)dt=4\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=6\cdot 2\pi=12\pi \text{ кв. бирл.}$$

11.2.2. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида шаклнинг юзини, куч ишини, функцияни унинг маълум тўлиқ дифференциали бўйича топиш мумкин.

а) $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=A$, бу ерда A $\vec{F}=P(x,\ y)\vec{i}+Q(x,\ y)\vec{j}$ куч бажарган иш, бу куч таъсирида жисм $\breve{AB}$ йўл бўйича кўчади (иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг механик маъноси).

б) $\frac{1}{2}\oint\limits_L(xdy-ydx)=S$, бу ерда S — ёпиқ L контур билан чегараланган фигура юзи.

2- мисол. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ эллипс билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

Ечиш. $S=\frac{1}{2}\oint\limits_L(xdy-ydx)$ формуладан фойдаланамиз.

$$dx=-a\sin t\,dt,\ dy=b\cos t\,dt.$$

Демак, $S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t(-a\sin t))\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}ab(\cos^2 t+$

$+\sin^2 t)\,dt=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt=\pi ab$ кв. бирл.

11.2.3. Агар L D соҳанинг чегараси бўлса ва $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ функциялар ёпиқ $\bar{D}$ соҳада ўзларининг хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлсалар, у ҳолда ушбу Грин формуласи ўринлидир:

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

бу ерда L контурни айланиб чиқиш шундай танланадики, D соҳа чап томонда қолади (мусбат йўналиш).

Агар бирор D соҳада Грин формуласи шартлари бажарилса, қуйидаги тасдиқлар тенг кучлидир:

а) $\oint\limits_l Pdx+Qdy=0$, бунда l D соҳада жойлашган исталган ёпиқ контур.

б) $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx+Qdy$ интеграл A ва B нуқталарни туташтирувчи интеграллаш йўлига боғлиқ эмас, бу ерда $\breve{AB}$ D соҳага тегишли.

в) $Pdx+Qdy=du(x,\ y)$, бу ерда $du(x,\ y)$ $u(x,\ y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали.

г) D соҳанинг ҳамма нуқталарида $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

Агар $du(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ бўлса, $u(x, y)$ функция

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy+C$$

ёки

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy+C$$

формула ёрдамида аниқланади, бу ерда $M_0(x_0, y_0)$ ва $M(x, y)$ нуқталар D соҳага тегишли, C — ихтиёрий ўзгармас.

3-мисол. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint_L y(1-x^2)dx+$ $+(1+y^2)xdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $x^2+y^2=4$ айланадан иборат бўлиб, у мусбат йўналишда айланиб ўтилади.

Ечиш. Грин формуласи бўйича икки ўлчовли интегралга ўтамиз:

$$\oint_L y(1-x^2)dx+(1+y^2)dy=\iint_D(1+y^2-1+x^2)dxdy=$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy,$$

бу ерда D соҳа $x^2+y^2\leqslant 4$ тенгсизлик билан аниқланадиган доира. Интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталарига ўтамиз:

$$\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\iint_{D'}(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\iint_{D'}r^3drd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^3dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(r^4|_0^2)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}16d\varphi=8\pi.$$

4-мисол. Ушбу

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

дифференциал ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали эканини кўрсатинг ва бу функцияни топинг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:

$$P(x, y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\ Q(x, y)=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2};$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, бинобарин, берилган ифода ҳақиқатан ҳам бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидир.

Демак, $M_0(x_0, y_0)$ деб $M_0(1, 1)$ ни олиб, қуйидагини топамиз:

$$u(x, y)=\int_1^x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy=$$

$$=\left(\ln|x|+\frac{x}{y}\right)\Big|_1^x+\left(2\ln y+\frac{1}{y}\right)\Big|_1^y=\ln|x|+\frac{x}{y}-\frac{1}{y}+$$

$$+2\ln|y|+\frac{1}{y}-1+C=\ln|x|+2\ln|y|+\frac{x}{y}+\bar{C}.$$

2-дарсхона топшириғи

1. $x=\cos t$, $y=\sin t$ айлана ёйининг массасини аниқланг. Унинг (x, y) нуқтадаги чизиқли зичлиги y га тенг. Ж: 2 масса бирл.

2. R радиусли доиравий цилиндр билан худди шундай цилиндр тўғри бурчак остида (ўқлари тўғри бурчак остида) кесишади. Кесимда ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг. Ж: $8R^2$ кв. бирл.

3. а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроида билан;

б) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг биринчи аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

Ж: а) $3\pi a^2$ кв. бирл.; б) $3\pi a^2$ кв. бирл.

4. Тўлиқ дифференциали бўйича $u(x, y)$ функцияни топинг:

а) $du=(2x-3xy^2+2y)dx+(2x-3x^2y+2y)dy$;

б) $du=(\arcsin x-x\ln y)dx-\left(\arcsin y+\frac{x^2}{2y}\right)dy$.

5. $\vec{F}=(x^2+y^2+1)\vec{i}+2xy\vec{j}$ кучнинг $y=x^2$ параболанинг $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нуқталар орасидаги ёйи бўйича бажарган ишини ҳисобланг.

Ж: $\frac{196}{105}$ иш. бирл.

6. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L учлари $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, C $(1, 3)$ бўлган учбурчак контури. Натижани бевосита интеграллаш билан текширинг. Ж: $-\frac{4}{3}$

2-мустақил иш

1. $x^2+y^2=R^2$ цилиндрик сиртнинг Oxy текислик ва $z=\frac{xy}{2R}$ сирт орасиға жойлашган қисмининг юзини ҳисобланг. Ж: R^2 кв. бирл.

2. $y=x^2$ ва $y=\sqrt{x}$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг. Ж: $\frac{1}{3}$ кв. бирл.

3. Берилган тўлиқ дифференциали

$$du=\frac{(x+2y)\,dx+ydy}{(x+y)^2}$$

бўйича $u(x,\ y)$ функцияни топинг.

4. $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ кучнинг $A(0,\ 0)$ ва $B(2,\ 1)$ нуқталарни туташтирувчи йўлда бажарган ишини ҳисобланг. Ж: 4 иш бирл.

5. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dx$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L — учлари $A(3,\ 0)$, $B(3,\ 3)$, $C(0,\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак контури. Ж: 18.

3- §. Сирт интеграллари

11.3.1. σ — бирорта силлиқ сирт ва $f(x,\ y,\ z)=f(M)$ функция σ сиртда узлуксиз бўлсин; $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ лар σ сиртиинг элементар сиртларга бўлиниши бўлиб, улариинг юзларини ҳам шу символлар билан белгилайлик; ҳар қайси элементар сиртда ихтиёрий $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ нуқта танлаймиз ва ушбу $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta\sigma_i$ интеграл йиғиндини тузамиз.

Элементар сиртларнииг диаметрининг энг каттаси нолга интилганда интеграл йиғинди интиладиган лимит *биринчи тур сирт интеграли* (ёки *сирт юзи бўйича интеграл*) дейилади:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma=\lim_{\max\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta\sigma_i$$

ёки

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)\,d\sigma=\lim_{\max\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta\sigma_i\,.$$

Сирт иитегралининг қиймати σ сиртнинг қайси томони танлаиишига боғлиқ эмас.

Аниқ интегралнинг барча хоссалари биринчи тур сирт интеграллари учун ўринлидир. Агар σ сиртнинг Oxy текисликка проекцияси σ_{xy} бир қийматли бўлса, яъни Oz ўққа параллел ҳар қаидай тўғри чизиқ σ сиртни фақат битта нуқтада кесса, мос биринчи тур сирт интегралини ҳисоблашни ушбу формула орқали икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,\ y,\ z(x,\ y))\,\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy\,,$$

бу ерда $z=z(x,\ y)$ — σ сиртнинг тенгламаси. Равшанки, $\iint\limits_{\sigma} d\sigma=S$, бу ерда S — σ сиртнинг юзи, $\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma=M$, бу ерда M — σ сиртнинг массаси, $f(x,\ y,\ z)=\gamma$ — σ сиртнинг сиртий зичлиги.

1-мисол. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — $x^2+y^2=z^2$ конус сиртнинг $z=0$ ва $z=1$ текисликлар орасидаги қисми.

Ечиш. Берилган σ сирт тенгламасидан унинг қаралаётган қисми учун $z=\sqrt{x^2+y^2}$ эканини кўрамиз. Қуйидагиларга эгамиз:

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Демак,

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{xy}}(x^2+y^2)\,\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\,\iint\limits_{\sigma_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy\,.$$

Икки ўлчовли интегралнинг иитеграллаш соҳаси σ_{xy} $x^2+y^2\leqslant 1$ доирадан иборат (конус сиртнинг Oxy текисликка проекцияси). Икки ўлчовли интегралда қутб координаталарига ўтамиз:

$$\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}} r^3drd\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{1} r^3d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right)d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.$$

11.3.2. σ силлиқ сиртнинг ҳар бир нуқтасидан $\vec{n}$ нормал вектори ўтказилган томони *мусбат*, бошқа томони (агар у мавжуд бўлса) эса *манфий* томон дейилади.

Хусусан, агар σ сирт ёпиқ бўлса ва Ω фазонинг бирор соҳасини чегаралаcа, у ҳолда сиртиинг мусбат ёки *ташқи томони* деб унинг нормал векторлар Ω соҳадан йўналган томони, манфий ёки *ички томони* деб унинг нормал векторлари Ω соҳага йўиалган томони айтилади. Мусбат (ташқи) ва манфий (ички) томонлари мавжуд бўлган сиртлар *икки томонлама сиртлар* дейилади. Улар учун қуйидаги хосса ўринлидир. Агар $\vec{n}$ нормал векторнинг асосини бундай сиртда ётувчи исталган ёпиқ L контур бўйлаб узлуксиз кўчирилса, дастлабки нуқтага қайтганда n нинг йўналиши дастлабки йўналиш билан бир хил бўлади.

Бир томонлама сиртлар учун n нормал векторнинг бундай кўчиши дастлабки нуқтага қайтилганда $(-\vec{n})$ векторга олиб келади. Маълум томони танланган σ сирт *ориентацияланган* дейилади.

11.3.3. σ^+ — бирор силлиқ сирт бўлиб, унда $\vec{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ йўналиш билан характерланувчи мусбат томон танланган бўлсин; $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ узлуксиз функциялар бўлсин, у ҳолда мос иккинчи тур сирт интеграли қуйидагича ифодаланади:

$$\iint\limits_{\sigma^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma .$$

Бу формула биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро боғлайди. Сиртнинг бошқа σ^- томонига ўтилганда бу интеграл ишорасини қарама-қаршисига ўзгартиради. Агар σ сирт $z=z(x, y)$ тенглама билан ошкор ҳолда берилган бўлса, у ҳолда $\vec{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинуслари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm|\vec{n}|}\cdot\frac{\partial z}{\partial x};\ \cos\beta=\frac{1}{\pm|\vec{n}|}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\ \cos\gamma=\frac{1}{\pm|\vec{n}|},$$

бу ерда $|\vec{n}|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ ва ишора танлаш сирт томони билан мувофиқлашган бўлиши керак.

Агар σ сирт тенгламаси $F(x, y, z)=0$ ошкормас ҳолда берилган бўлса, бу сирт нормали $\vec{n}$ нинг йўналтирувчи косинуслари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$\cos\alpha=\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial F}{\partial x},\ \cos\beta=\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial F}{\partial y},\ \cos\gamma=\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial F}{\partial z},$$

бу ерда $D=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ ва илдиз олдидаги ишорани танлаш сирт томони билан мувофиқлаштирилиши керак.

Иккинчи тур сирт интеграли, шунингдек, *координаталар бўйича сирт интеграли* деб ҳам аталади.

Иккинчи тур сирт интегралини ҳисоблашни бевосита икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин.

Агар σ сирт $z=z(x, y)$ тенгламага эга бўлса, у ҳолда иккинчи тур сирт интеграли қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy=\pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy,$$

бу ерда σ_{xy} сирт σ нинг Oxy текисликка проекцияси.

$\pm$ ишоралар сиртнинг иккита турли томонларига мос келади; бунда «+» ишора танланган томонда $\cos\gamma>0$ бўлганда, «—» эса $\cos\gamma<0$ бўлганда олинади.

σ сирт $y=y(x, z)$ ёки $x=x(y, z)$ тенгламалар билан берилган ҳолларда қолган интеграллар ҳам худди юқоридагидек ҳисобланади:

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\,dzdx=\pm\iint\limits_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dzdx,$$

бу ерда σ_{xz} — сирт σ нинг Oxz текисликка проекцияси, «+» ишора танланган томонда $\cos\beta>0$ бўлганда, «—» ишора эса $\cos\beta<0$ бўлганда олинади;

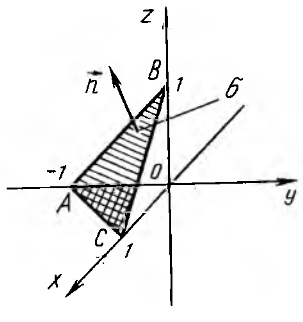
$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz=\pm\iint\limits_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz,$$

бу ерда σ_{yz} — сирт σ нинг Oyz текисликка проекцияси; «+» ишора танланган томонда $\cos\alpha>0$ бўлганда, «—» ишора эса $\cos\alpha<0$ бўлганда олинади.

2-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$I=\iint\limits_{\sigma} zdxdy+xdxdz+ydydz,$$

бу ерда $\sigma x\quad y+z=1$ текисликнинг координата текисликлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчак; сиртнинг танланган томонида нормаль Oz ўқи билан ўткир бурчак ташкил этади.



61-шакл

Ечиш. Шаклни чизамиз ва интеграллаш томонини $\vec{n}$ нормаль ёрдамида танлашни кўрсатамиз (61-шакл).

$z=1-x+y$ сирт тенгламасига эгамиз, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}=1, \cos\gamma>0,$ шунинг учун

$$\cos\alpha=-\frac{-1}{\sqrt{1+1+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Берилган интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$I=\iint\limits_{\sigma^+} zdxdy+xdxdz+ydydz=\iint\limits_{\sigma}\left(y\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-x\frac{1}{\sqrt{3}}+z\frac{1}{\sqrt{3}}\right)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma}((y-x)+z)\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(y-x+(1-x+y))\sqrt{1+1+1}\,dxdy=$$

$=\iint\limits_{\sigma_{xy}}(2y-2x+1)\,dxdy$, бу ерда σ_{xy} σ сирт (σABC) нинг Oxy

текисликка проекцияси (ΔAOC). Икки ўлчовли интегралда чегар ларни қўйиб чиқамиз:

$$I=\iint\limits_{\sigma_{xy}}(2y-2x+1)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{0}(2y-2x+1)\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(2y-2x+1)^2\Big|_{x-1}^{0}dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1((1-2x)^2-1)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{8}\frac{(1-2x)^3}{3}-\frac{x}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=-\frac{1}{6}.$$

3- дасрхона топшириғи

1. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ сир $9x^2+9y^2=16z^2$ конус сиртининг $z=0$ ва $z=3$ текислика орасидаги қисми. Ж: $\frac{160\pi}{3}$.

2. $\iint\limits_{\sigma}xyzd\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ сирт $x+y+z=1$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисми. Ж: $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ яримсферанинг массасини ҳисобланг. Унинг ҳар бир нуқтасидаги сиртий зичлиги $\gamma=x^2y^2$ га тенг деб олинг. Ж: $\frac{128\pi}{15}$ масса бирл.

4. $\iint\limits_{\sigma}yzdxdy+xzdydz+xydxdz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — биринчи октантда жойлашган ҳамда $x^2+y^2=R^2$ цилиндр ва $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=R$ текисликлардан тузилган сиртнинг ташқи томони. Ж: $R^4\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{8}\right)$.

5. $\iint\limits_{\sigma}xdydz+z^3dxdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ— $x^2+y^2+z^2=1$ сферанинг ташқи томони. Ж: $\frac{32\pi}{15}$.

3- мустақил иш

1. $\iint\limits_{\sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\,d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ— $6x+4y+3z-12=0$ текисликиинг биринчи октантда ётувчи қисми. Ж: $\frac{4}{\sqrt{61}}$.

2. $\iint\limits_{\sigma}x^2y^2d\sigma$ интегрални ҳисоблаиг, бу ерда σ $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ яримсфера. Ж: $\frac{2\pi R}{15}$.

3. $\iint\limits_{\sigma}(y+2z)\,dxdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — биринчи октантда жойлашган $6x+3y+2z=6$ текисликнинг юқориги қисми. Ж: $\frac{3}{8}$.

4. $\iint\limits_{\sigma}zdydz+(3y-x)\,dxdz-zdxdy$ интегрални ҳисоблаиг, бу ерда σ— $z=0$, $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2+2$ сиртлар билан чегараланган жисм сиртининг ташқи томони. Ж: 5π.

10- назорат иши

1. Интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

1.1. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2}f(x,y)\,dy.$

1.2. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y^2}^{y^2+2}f(x,y)\,dx.$

1.3. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)\,dy.$

1.4. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{1-\frac{1}{2}x}^{3-\frac{1}{2}x^2}f(x,y)\,dy.$

1.5. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{1}{2}y+1}^{\frac{3}{2}y+4}f(x,y)\,dx.$

1.6. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y+1}^{4-y^2}f(x,y)\,dx.$

1.7. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{3}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{25-y^2}}f(x,y)\,dx.$

1.8. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}}f(x,y)\,dy.$

1.9. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{1}{2}y+1}^{7-y}f(x,y)\,dx.$

1.10. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)\,dy.$

1.11. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x^2}^{3-x}f(x,y)\,dy.$

1.12. $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} dy\int\limits_{2y^2}^{y+3}f(x,y)\,dx.$

1.13. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{2x^2}^{x+3}f(x,y)\,dy.$

1.14. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y^2}^{3-y}f(x,y)\,dx.$

1.15. $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x, y)\,dy.$

1.16. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x, y)\,dx.$

1.17. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy.$

1.18. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x, y)\,dx.$

1.19. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x, y)\,dy.$

1.20. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\,dx.$

1.21. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy.$

1.22. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy.$

1.23. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{4}} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy.$

1.24. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} f(x, y)\,dx.$

1.25. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x, y)\,dx.$

1.26. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x, y)\,dx.$

1.27. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3-x} f(x, y)\,dy.$

1.28. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$

1.29. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2+1} f(x, y)\,dy.$

1.30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x, y)\,dy.$

2. Берилган чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг:

2.1. $y=\frac{3}{x},\ y=4e^x,$
$y=3,\ y=4.$

2.2. $x=8-y^2,$
$x=-2y.$

2.3. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

2.4. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

2.5. $y^2-6y+x^2=0,$

2.6. $y=\frac{3}{x},\ y=8e^x.$
$y=3,\ y=8.$

2.7. $y^2-8y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\,x.$

2.8. $y=\frac{\sqrt{x}}{2},\ y=\frac{1}{2x},$
$x=16.$

2.9. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

2.10. $x=5-y^2,$
$x=-4y.$

2.11. $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

2.12. $y=\frac{3}{2}\sqrt{x},$
$y=\frac{3}{2x},\ x=9.$

2.13. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\,x.$

2.14. $y=3\sqrt{x},\ y=\frac{3}{x},$
$x=4.$

2.15. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\,x.$

2.16. $y=\frac{2}{x},\ y=5e^x,$
$y=2,\ y=5.$

2.17. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

2.18. $y=32-x^2,$
$y=-4x.$

2.19. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

2.20. $y=20-x^2,$
$y=-8x.$

2.21. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x.$

2.22. $y=\frac{25}{4}-x^2,$
$y=x-\frac{5}{2}.$

2.23. $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

2.24. $y=\sqrt{x},\ y=\frac{1}{x},$
$x=16.$

2.25. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

2.26. $y=\frac{2}{x},\ y=7e^x,$
$y=2,\ y=7.$

2.27. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}\,x,\ x=0.$

2.28. $x=27-y^2,$
$x=-6y.$

2.29. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0.$

2.30. $y=11-x^2,$
$y=-10x.$

3. Сиртий зичлиги γ маълум бўлса, берилган эгри чизиқлар билан чегараланган D пластинканииг массасини топинг:

3.1. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$

3.2. $x=1,\ y=0,$ $y^2=4x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=7x^2+y.$

3.3. $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=2(x^2+y^2).$

3.4. $y^2=4x,\ x=1,$ $y=0\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{2}+5y.$

3.5. $x=2,\ y=0,$ $y^2=2x(y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{8}+2y.$

3.6. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$

3.7. $x=2,\ y=0,$ $y^2=\frac{x}{2}\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{2}+6y.$

3.8. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0),$ $\gamma=\frac{2x-3y}{x^2+y^2}.$

3.9. $x=1,\ y=0.$ $y^2=4x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=x+3y^2.$

3.10. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0)$ $\gamma=\frac{x-y}{x^2+y^2}.$

3.11. $x=1,\ y=0,\ y^2=x,$ $(y\geqslant 0), \gamma=3x+6y^2.$

3.12. $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,$ $x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\leqslant 0),$ $\gamma=\frac{2y-x}{x^2+y^2}.$

3.13. $x=2,\ y=0,\ y^2=\frac{x}{2}$ $(y\geqslant 0),\ \gamma=2x+3y^2.$

3.14. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{2y-3x}{x^2+y^2}.$

3.15. $x=\frac{1}{2},\ y=0,$ $y^2=8x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=7x+3y^2.$

3.16. $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{2y-5x}{x^2+y^2}.$

3.17. $x=1,\ y=0,$ $y^2=4x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=7x^2+2y.$

3.18. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{x+3y}{x^2+y^2}.$

3.19. $x=2,\ y^2=2x,$ $y=0\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{4}+\frac{y}{2}.$

3.20. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$ $\gamma=\frac{x+2y}{x^2+y^2}.$

3.21. $x=2,\ y=0,$ $y^2=2x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{4}+y.$

3.22. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0),$ $\gamma=\frac{2x-y}{x^2+y^2}.$

3.23. $x=2,\ y=0,$ $y^2=\frac{x}{2}\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{7x^2}{2}+8y.$

3.24. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0),$ $\gamma=\frac{x-4y}{x^2+y^2}$

3.25. $x=1,\ y=0,$ $y^2=4x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=6x+3y^2.$

3.26. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0),$ $\gamma=\frac{3x-y}{x^2+y^2}.$

3.27. $x=2,\ y=0,$ $y^2=\frac{x}{2}\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=4x+6y^2.$

3.28. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,$ $x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{y-4x}{x^2+y^2}.$

3.29. $x=\frac{1}{2},\ y=0,$ $y^2=2x\ (y\geqslant 0),$ $\gamma=4x+9y^2.$

3.30. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,$ $x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0),$ $\gamma=\frac{y-2x}{x^2+y^2}.$

4. Эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

4.1. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, бу ерда L — $x^2+y^2=4x$ айлана.

4.2. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})\,dl$, бу ерда L — $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ астроиданинг $A(1,\ 0)$ ва $B(0,\ 1)$ нуқталар орасидаги ёйи.

4.3. $\int\limits_L xy\,dl$, бу ерда L — томонлари $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$ бўлган квадрат контури.

4.4. $\int\limits_L y^2\,dl$, бу ерда L — $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ циклоиданинг биринчи арки.

4.5. $\int\limits_L xy\,dl$, бу ерда L — учлари $A(2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(4,\ 3)$, $D(2,\ 3)$ дан нборат тўғри тўртбурчак контури.

4.6. $\int\limits_L y\,dl$, бу ерда L — $y^2=2x$ параболанинг $x^2=2y$ парабола кесган ёйи.

4.7. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, бу ерда L — тўғри чизиқнинг $A(4,\ 0)$, $B(6, 1)$ нуқталар орасидаги кесмаси.

4.8. $\int\limits_L (x^2+y^2)2dl$, бу ерда L — $r=2$ айлананинг биричи чораги.

4.9. $\int\limits_L (x-y)dl$, бу ерда L — $x^2+y^2=2x$ айлана.

4.10. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, бу ерда L — $x^2+y^2=2x$ айлана.

4.11. $\int\limits_L xydl$, бу ерда L — учлари $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 4)$, $D(0, 4)$ = бўлган тўғри тўртбурчак контури.

4.12. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, бу ерда L — $x^2+y^2=4$ айлана.

4.13. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, бу ерда L — $O(0, 0)$ ва $B(2, 2)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

4.14. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, бу ерда L — $A(-1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

4.15. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, бу ерда L — $A(0,\ 4)$ ва $B(4,\ 0)$ нуқталар орасида жойлашган тўғри чизиқ кесмаси.

4.16. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, бу ерда L — $r=2(1+\cos\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ кардиоида ёйи.

4.17. $\int\limits_L ydl$, бу ерда L — $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ астроиданинг $A(1, 0)$ ва $B(0,\ 1)$ нуқталар орасидаги ёйи.

4.18. $\int\limits_L ydl$, бу ерда L — $y^2=\frac{2}{3}x$ параболанинг $O(0,\ \ 0)$ ва $A\left(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ нуқталар орасидаги ёйи.

4.19. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, бу ерда L — $A(1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нуқталар орасидаги тўғри чизиқ кесмаси.

4.20. $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, бу ерда L — $r=(1+\cos\varphi)$, $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ кардиоида ёйи.

4.21. $\int\limits_L xydl$, бу ерда L — учлари $O(0,\ 0)$, $A(5,\ 0)$, $B(5,\ 3)$, $C(0, 3)$ бўлган тўғри тўртбурчак контури.

4.22. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, бу ерда L — $x^2+y^2=2y$ айлана.

4.23. $\int\limits_L (x+y)dl$, бу ерда L — $r^2=\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ Бернулли лемнискатасининг ёйи.

4.24. $\int\limits_L (x+y)dl$, бу ерда L — учлари $O(0,\ 0)$, $A(-1,\ 0)$, $B(0,1)$ бўлган учбурчак контури.

4.25. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, бу ерда L — $r=4$ айлананинг биринчи чораги.

4.26. $\int\limits_L (x+y)dl$, бу ерда L — учлари $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$ бўлган учбурчак контури.

4.27. $\int\limits_L xydl$, бу ерда L — учлари $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 2)$, $C(0, 2)$ бўлган тўғри тўртбурчак контури.

4.28. $\int\limits_L \frac{(y^2-x^2)xy}{(x^2+y^2)}\,dl$, бу ерда L — $r=9\sin 2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ эгри чизиқ ёйи.

4.29. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, бу ерда L — $O(0,\ 0)$ ва $A(1,\ 2)$ нуқталарни туташирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

4.30. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, бу ерда L — $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ циклоиданинг биринчи арки.

5. Эгри чизиқли интегрални ҳисобланг:

5.1. $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, бу ерда AB — $y=x^2$ параболанинг $A(-1,\ 1)$ дан $B(1,\ 1)$ гача ёйи.

5.2. $\int\limits_{AB} \frac{x^2dy-y^2dx}{3\sqrt{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, бу ерда AB — $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ астроиданинг $A(2,\ 0)$ дан $B(0,\ 2)$ нуқтагача ёйи.

5.3. $\int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx+2xydy$, бу ерда AB — $y+x^3$ кубик параболанинг $A(0,\ 0)$ дан $B(1,\ 1)$ нуқтагача ёйи.

5.4. $\oint\limits_L (x+2y)\,dx+(x-y)\,dy$, бу ерда L — $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ айлана (айланиб ўтиш мусбат).

5.5. $\oint\limits_L (x^2y-x)\,dx+(y^2x-2y)\,dy$, бу ерда L — $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ эллипс ёйи (айланиб ўтиш мусбат).

5.6. $\int\limits_L (xy-1)\,dx+x^2y\,dy$, бу ерда L — $x=\cos t$, $y=2\sin t$ эллипснинг $A(1,\ 0)$ нуқтадан $B(0,\ 2)$ нуқтагача ёйи.

5.7. $\int\limits_{OBA} 2xy\,dx-x^2dy$, бу ерда OBA — $O(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $A(2,\ 1)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиқ.

5.8. $\int\limits_{AB} (x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, бу ерда AB — $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 4)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

5.9. $\int\limits_L \cos y\,dx-\sin x\,dy$, бу ерда L — AB тўғри чизиқ кесмаси $A(2\pi,\ -2\pi)$, $B(-2\pi;\ 2\pi)$.

5.10. $\int\limits_L \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, бу ерда L — AB тўғри чизиқ кесмаси $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 6)$.

5.11. $\int\limits_L xy\,dx+(y-x)\,dy$, бу ерда L — $y=x^3$ кубик параболанинг $A(0,\ 0)$ нуқтадан $B(1,\ 1)$ нуқтагача ёйи.

5.12. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dx+(x+y^2)\,dy$, бу ерда L — ABC синиқ чизиқ $A(1,\ 2)$, $B(3,\ -2)$, $C(3,\ 5)$.

5.13. $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, бу ерда L — $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипснинг соат мили бўйича айланиб ўтилган юқори ярми.

5.14. $\int\limits_L (xy-y^2)\,dx+x\,dy$, бу ерда L - $y=2\sqrt{x}$ параболанинг $0(0, 0)$ нуқтадан $B(1,\ 2)$ нуқтагача ёйи.

5.15. $\int\limits_L x\,dx+xy\,dy$, бу ерда L — $x^2+y^2=2x$ айлананинг контурни мусбат айланиб чиққандаги юқориги ярми.

5.16. $\int\limits_L (x-y)\,dx+dy$, бу ерда L — $x^2+y^2=R^2$ айлананинг контурни мусбат йўналишда айланиб чиққандаги юқориги ярми.

5.17. $\oint\limits_L (x^2-y)\,dx$, бу ерда L контур $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ тўғри чизиқлар ҳосил қилган тўғри тўртбурчак (контурни айланиб ўтиш йўналиши мусбат).

5.18. $\int\limits_L 4x\sin^2y\,dx+y\cos 2x\,dy$, бу ерда L — $O(0,\ 0)$ ва $B(3, 6)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

5.19. $\oint\limits_L y\,dx-x\,dy$, бу ерда L — $x=6\cos t$, $y=4\sin t$ эллипснинг контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат бўлгандаги ёйи.

5.20. $\int\limits_L 2xy\,dx-x^2dy$, бу ерда L — $x=2y^2$ параболанинг $O(0, 0)$ нуқтадан $A(2,\ 1)$ нуқтагача ёйи.

5.21. $\int\limits_L (x, y-x)\,dx+\frac{1}{2}x^2dy$, бу ерда L — $y^2=4x$ параболанинг $A(0,\ 0)$ нуқтадан $B(1,\ 2)$ нуқтагача ёйи.

5.22. $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, бу ерда L — учлари $A(0,\ 0)$, $B(1, 0)$, $C(0,\ 1)$ бўлган учбурчак контури (контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат).

5.23. $\int\limits_L (xy-x)\,dx+\frac{x^2}{2}dy$, бу ерда L — ABO синиқ чизиқ: $O(0, 0)$, $A(1,\ 2)$, $B(\frac{1}{2}, 3)$; контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат.

5.24. $\int\limits_L (xy-y^2)\,dx+x\,dy$, бу ерда L — $O(0,0)$ нуқтадан $A(1, 2)$ нуқтагача тўғри чизиқ кесмаси.

5.25. $\int\limits_L x\,dy-y\,dx$, бу ерда L — $y=x^3$ кубик параболанинг $O(0, 0)$ нуқтадан $A(2,\ 8)$ нуқтагача ёйи.

5.26. $\int\limits_L 2xy\,dx-x^2dy$, бу ерда L — $y=\frac{x^2}{4}$ параболанинг $A(0, 0)$ нуқтадан $B(2,\ 1)$ нуқтагача ёйи (бўлаги).

5.27. $\int\limits_L (xy-x)\,dx+\frac{x^2}{2}dy$, бу ерда L — $y=4x^2$ параболанинг $O(0, 0)$ нуқтадан $A(1,\ 4)$ нуқтагача ёйи.

5.28. $\int\limits_L (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, бу ерда L — $y=x^2$ параболанинг $A(-1,\ 1)$ нуқтадан $B(1,\ 1)$ нуқтагача ёйи.

5.29. $\oint\limits_L x\,dy-y\,dx$, бу ерда L — учлари $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак контури (контурни айланиб ўтиш йўналиши мусбат).

5.30. $\int\limits_L (x^2+y)\,dx+(x+y^2)\,dy$, бу ерда L — ABC синиқ чизиқ: $A(2,\ 0)$, $B(5,\ 3)$, $C(5,\ 0)$.

6. Берилган ифодалар $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали эканлигини кўрсатинг. Эгри чизиқли интеграл ёрдамида $u(x, y)$ функцияни топинг:

6.1. $(10xy^3+12x^3+6)\,dx+(15x^2y-5)\,ydy.$

6.2. $(y^2e^{xy^2}+6x-8)\,dx+(2xye^{xy^2}-8y)\,dy.$

6.3. $(\cos x\cdot\cos y+6x+3)\,dx+(18y^2-\sin x\cdot\sin y)\,dy.$

6.4. $\left(\sin x+\frac{\cos x\cos y}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\frac{\sin y}{\sin x}-\cos y\right)dy\,.$

6.5. $\left(\frac{1}{y-1}-\frac{y}{(x-1)^2}-1\right)dx+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy\,.$

6.6. $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy\,.$

6.7. $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\cos x}{y-1}+3x^2\right)dx+\frac{1-\sin x}{(y-1)^2}\,dy\,.$

6.8. $\left(2\cos 2x\cos 3y-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-3\sin 2x\sin 3y\right)dy\,.$

6.9. $\left(e^{-x}-\frac{2}{x^3y}\right)dx+\left(\sin 3y-\frac{1}{x^2y^2}\right)dy\,.$

6.10. $(xye^{x^2y}+\cos 2x+x^2)\,dx+\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2y}+y\right)dy\,.$

6.11. $\left(\frac{1}{x+y}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-3\right)dy\,.$

6.12. $(x+y\cdot\sin^2 y)\,dx+(1+x\sin^2 y+xy\sin 2y)\,dy\,.$

6.13. $\frac{1-2y}{x^2y}dx+\frac{1-x}{xy^2}dy\,.$

6.14. $\left(e^{-x}-\frac{2}{yx^3}\right)dx+\left(\sin 3y-\frac{1}{x^2y^2}\right)dy\,.$

6.15. $\left(2xy-\frac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\frac{2}{y^3}\right)dy\,.$

6.16. $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\cos x}{y-1}\right)dx+\frac{1-\sin x}{(y-1)^2}\,dy\,.$

6.17. $\left(\ln y+\frac{y}{x}-x\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy\,.$

6.18. $\left(2\cos 2x\cdot\cos 3y-\frac{1}{x}\right)dx-\left(\frac{2}{y}-3\sin 2x\cdot\sin 3y\right)dy\,.$

6.19. $\left(\frac{2}{x^2}+\cos^2 y\right)dx+(y-x\sin 2y)\,dy\,.$

6.20. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{1-x}{y^2}dy=0\,.$

6.21. $(\sin^2 y-y\cdot\sin 2x)\,dx+(x\sin 2y+\cos^2 x+1)\,dy\,.$

6.22. $\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy\,.$

6.23. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy\,.$

6.24. $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy\,.$

6.25. $\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{y^2x}dy\,.$

6.26. $\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{1}{y}\right)dy\,.$

6.27. $\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-y\right)dy\,.$

6.28. $(y\cos xy+2x-3y)\,dx+(x\cos xy-3x+4y)\,dy\,.$

6.29. $(5y+\cos x+6xy^2)\,dx+(5x+6x^2y)\,dy\,.$

6.30. $(y-\sin x)\,dx+(x-2y\cos y^2)\,dy\,.$

12-боб

ВЕКТОР АНАЛИЗИ

1-§. Скаляр майдон. Сатҳ чизиқлари ва сиртлари. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент. Вектор майдон. Вектор чизиқлар

12.1.1. Агар фазодаги бирор D соҳанинг ҳар бир $M=M(x, y, z)$ нуктасида $u=u(M)=f(x, y, z)$ скаляр функция берилган бўлса, у ҳолда бу соҳада *скаляр майдон берилган* дейилади. $u=f(x, y, z)$ функция *майдон функцияси* дейилади.

Агар D соҳа текисликка тегишли бўлса, скаляр майдон *ясси майдон* дейилади.

Скаляр майдоннинг $u(x, y, z)=C$ (C — ўзгармас сон) тенглама билан аниқланган қисми *сатҳ сирти* дейилади. $u(x, y)=C$ тенглама ясси скаляр майдоннинг *сатҳ чизиғини* аниқлайди.

Агар $\vec{l}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$ — бирор l йўналишдаги бирлик вектор бўлса, у ҳолда скаляр майдоннинг дифференциалланувчи $u=f(x, y, z)$ функциясининг l йўналиш бўйича ҳосиласи $\frac{\partial u}{\partial l}$ қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формула билан аниқланади.

Скаляр майдон функцияси $u=f(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\,,$$

бу ерда $\vec{l}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

$u=f(x, y, z)$ скаляр майдоннинг градиенти деб, қуйидаги

$$\text{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

векторга айтилади.

$u=f(x, y, z)$ функциянинг берилган нуқтадаги градиенти билан бу нуқтадаги йўналиш бўйича ҳосила орасида қуйидаги муносабат билан ифодаланувчи боғланиш мавжуд:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad}u\cdot\vec{l} \text{ ёки } \frac{\partial u}{\partial l}=\text{пр}_{\vec{l}}\text{grad}u\,.$$

Градиент қуйидаги хоссаларга эга:

а) $\text{grad}(u_1+u_2)=\text{grad}u_1+\text{grad}u_2$;
б) $\text{grad}Cu=C\text{grad}u$ ($C=\text{const}$);
в) $\text{grad}(u_1\cdot u_2)=u_1\text{grad}u_2+u_2\text{grad}u_1$.

1-мисол. $u=xy^2z^3$ функция ва M (3, 2, 1), N (5, 4, 2) нуқта берилган. Бу функциянинг M нуқтадаги $\overline{MN}$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

Ечиш. u функциянинг M (3, 2, 1) нуқтадаги хусусий ҳосилалари:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=y^2z^3|_M=2^2\cdot1^3=4\,;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=2xyz^3|_M=2\cdot3\cdot2\cdot1^3=12\,;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=3xy^2z^2|_M=3\cdot3\cdot2^2\cdot1^2=36\,.$$

$\overline{MN}$ вектор билан йўналиши бир хил бўлган $\vec{l}$ бирлик вектор

$$\vec{l}=\frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|}$$

га тенг, бу ерда

$$\overline{MN}=(5-3)\vec{i}+(4-2)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\,,$$

$|\overline{MN}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$. Демак,

$$\vec{l}=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}\,.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=4\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+36\cdot\frac{1}{3}=\frac{68}{3}\,.$$

2-мисол. $u=\ln(x^2+y^2)$ функциянинг M (3, 4) нуқтадаги u функция градиенти йўналишидаги ҳосиласини топинг.

Ечиш. Бу ерда $\vec{l}$ вектор функциянинг $M(3, 4)$ нуқтадаги градиенти билан бир хил йўналган, шунинг учун $\frac{\partial u}{\partial l}=|\text{grad}u|$.

$M(3, 4)$ нуқтадаги хусусий ҳосилалар:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_M=\frac{6}{25};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_M=\frac{8}{25}\,.$$

Демак,

$$\text{grad}u|_M=\frac{6}{25}\vec{i}+\frac{8}{25}\vec{j}\,.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}.$$

12.1.2. Агар фазодаги D соҳанинг ҳар бир $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқтасида $\vec{a}(M)=\{P,\ Q,\ R\}$ вектор (бу ерда $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,\ y,\ z)$ — скаляр функциялар) аниқланган бўлса, у ҳолда D соҳада *вектор майдон берилган* дейилади.

Вектор майдоннинг *вектор чизиғи* деб шундай чизиққа айтиладики, унинг ҳар бир нуқтасида уринманинг йўналиши шу нуқтага мос келган $\vec{a}(M)$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Сирт бўлагининг нуқталари орқали ўтувчи ҳамма вектор чизиқлар тўплами *вектор найчалари* дейилади.

Вектор чизиқлари ушбу дифференциал тенгламалар системасидан аниқланади:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Координаталари вақтга боғлиқ бўлмаган майдон (скаляр ёки вектор) *стационар* ёки *барқарор майдон* дейилади.

3-мисол. $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+b\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1,0,0)$ нуқтадан ўтадиган вектор чизиғини топинг.

Ечиш. $P(x,\ y,\ z)=-y$, $Q(x,\ y,\ z)=x$, $R(x,\ y,\ z)=b$ эканлигини ҳисобга олиб, вектор чизиқларнинг ушбу

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}$$

дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Уларни ечамиз:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x},\\[2mm] \dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{b},\end{cases}\qquad \begin{cases}xdx+ydy=0,\\[2mm] \dfrac{dz}{b}=\dfrac{dy}{x},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=C_1^2,\\[2mm] \dfrac{dz}{b}=\dfrac{dy}{x}\end{cases}$$

ёки параметрик шаклда:

$$\begin{aligned}&x=C_1\cos t,\\ &y=C_1\sin t,\\ &\frac{dz}{b}=\frac{C_1\cos t dt}{C_1\cos t}\end{aligned}\qquad \begin{cases}x=C_1\cos t,\\ y=C_1\sin t,\\ z=bt+C_2.\end{cases}$$

Вектор майдони дивергенциясининг асосий хоссалари:

а) $\operatorname{div}(\vec{a}+b)=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$;

б) $\operatorname{div}\vec{c}=0$, агар $\vec{c}$ — ўзгармас вектор бўлса;

в) $\operatorname{div}f\vec{a}=f\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}f$,

бу ерда $f=f(x,\ y,\ z)$ — скаляр функция.

12.2.2. Сирт орқали оқиб ўтадиган оқимни ҳисоблашга мисоллар кўрамиз.

1-мисол. $\vec{a}=x\vec{i}-2y\vec{j}+z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x+2y+3z-6=0$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган юқори қисми бўйича оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Текисликнинг нормал бирлик вектори $\vec{n}^0=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$ бўлади. $\vec{a}$ вектор оқимини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\Pi=\oint\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}^0d\sigma=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint_{\sigma}(x-4y+3z)\,d\sigma.$$

Бу ерда

$$z=\frac{1}{3}(6-x-2y),\ d\sigma=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}\,dxdy.$$

Шундай қилиб,

$$\Pi=\frac{1}{3}\iint_D(x-4y+6-x-2y)\,dxdy=\frac{1}{3}\iint_D(6-6y)\,dxdy=$$

$$=2\int_0^3dy\int_0^{6-2y}(1-y)\,dx=2\int_0^3(1-y)\,(6-2y)\,dy=2\int_0^3(6-8y+2y^2)\,dy=$$

$$=4\int_0^3(y^2-4y+3)\,dy=4\left(\frac{1}{3}y^3-2y^2+3y\right)\Big|_0^3=$$

$$=4\left(\frac{27}{3}-18+9\right)=0.$$

2-мисол. $\vec{a}=xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2+z^2=a^2$ шар сирти бўйича унинг ташқи томонига оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Сирт ёпиқ бўлгани учун $\vec{a}$ вектор майдоннинг шар сирти йича ташқи томонига оқими П ни Остроградский — Гаусс рмуласи бўйича топамиз:

$$\Pi=\oint\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}^0d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\,dxdydz.$$

ч ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар мида сферик координаталарга ўтамиз:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\ \sin\varphi,\ z=r\cos\theta,$$

$$dxdydz=r^2\sin\theta drd\varphi d\theta,$$

$$0\leqslant r\leqslant a,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

У ҳолда

$$\Pi=\iiint\limits_{\Omega} r^4\sin\theta drd\varphi d\theta=\int\limits_0^a r^4dr\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4a^5\pi}{5}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. $\vec{a}=(x-3z)\vec{i}+(x+2y+z)\vec{j}+(4x+y)\vec{k}$ вектор майдоннинг $x+y+z=2$ текисликнинг биринчи октантда ётган юқори қисми бўйича оқимини ҳисобланг. Ж: $\frac{26}{3}$.

2. $\vec{a}=8x\vec{i}+11y\vec{j}+17z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x+2y+3z=1$ текисликнинг бириичи октантда жойлашган қисми бўйича оқимини ҳисобланг. Нормал Oz ўқи билан ўткир бурчак ҳосил қилади. Ж: 1.

3. $\vec{a}=(xy+z^2)\vec{i}+(yz+x^2)\vec{j}+(zx+y^2)\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1,3,-5)$ нуқтадаги дивергенциясини ҳисобланг. Ж; -1.

4. $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z^2\vec{k}$ вектор майдонннhг $x^2+y^2=1$, $z=0$ ва $z=2$ сиртлар билан чегараланган цилиндрик жисм сирти бўйича ташқи нормал йўналишида оқимини ҳисобланг. Ж: -4π.

2- мустақил иш

1. Вектор майдоннинг дивергенциясини топинг.

а) $\vec{a}\approx \text{xy}^2\vec{i}+x^2y\vec{j}+z^3\vec{k}$, $M(1,\ -1{,}3)$ нуқтада;

б) grad u, бу ерда $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$;

в) grad $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Вектор майдоннинг П оқимини ҳисобланг:

а) $\vec{a}=x\vec{i}+3y\vec{j}+2z\vec{k}$ нинг $x+y+z=1$ текисликнинг биринчи октантда ётган юқориги қисми бўйича;

б) $\vec{a}=3x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$ нинг $9-z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган бирор жисм бўйича ташқи нормал йўналишида;

в) $\vec{a}=2x\vec{i}+z\vec{k}$ нинг $z=3x^2+2y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ сиртлар бўйича чегараланган сиртга ташқи нормал бўйича.

Ж: а) 1; б) $\frac{81\pi}{8}$; в) 20.

3- §. Вектор майдонидаги чизиқли интеграл. Циркуляция. Вектор майдои ротори. Стокс теоремаси. Циркуляцияни ҳисоблаш.

$\vec{a}=\{P,\ Q,\ R\}$ векторнинг L эгри чизиқ бўйича *чизиқли интеграли* деб бу L эгри чизиқ бўйича вектор майдон бажарган ишни аниқловчи ушбу эгри чизиқли интегралга айтилади:

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_L\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

Агар L коитур ёпиқ бўлса, чизиқли интеграл $\vec{a}$ вектор майдоннинг бу контур бўйича *циркуляцияси* дейилади.

Ёпиқ эгри чизиқ L фазода бирор σ сиртни чегаралаган бўлиб, бу сиртда $\vec{a}=\{P,\ Q,\ R\}$ вектор берилган бўлсин, у ҳолда циркуляция ва сирт интегралини боғловчи ушбу *Стокс формуласи* ўринлидир:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\sigma}\Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+$$
$$+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big)d\sigma,$$

бу ерда $\vec{n}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ — интеграллаш бажарилаётган σ сирт томони нормалининг бирлик вектори, бунда σ сиртнинг шу томони бўйича L контурни айланиб ўтиш мусбат бўлиши керак.

Грин формуласи Стокс формуласининг L эгри чизиқ ва σ сирт Oxy текисликда ётган ҳолдаги хусусий ҳолидир.

$\vec{a}=\{P,\ Q,\ R\}$ вектор майдоннинг *ротори* ёки *уюрмаси* деб ушбу

$$\text{rot}\vec{a}=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\vec{i}+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\vec{j}+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\vec{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

векторга айтилади.

Вектор шаклида Стокс формуласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\oint\limits_L\vec{a}d\vec{r}=\iint\limits_{\sigma}\vec{n}^0\cdot\text{rot}\vec{a}d\sigma$$

Вектор майдони роторининг баъзи хоссалари:

а) $\text{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\text{rot}\vec{a}+\text{rot}\vec{b}$;

б) $\text{rot}\vec{c}=\vec{o}$, бу ерда $\vec{c}$ — доимий (ўзгармас) вектор;

в) $\text{rot}(\varphi\vec{a})=\varphi\,\text{rot}\vec{a}+\text{grad}\,\varphi\cdot\vec{a}$, бу ерда $\varphi=\varphi(x,y,z)$ скаляр функция.

1-мисол. $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$ чизиқли тезлик вектор майдонининг фазонинг ихтиёрий $M(x,\ y,\ z)$ нуқтасидаги роторини топинг.

Ечиш. Чизиқли тезлик вектори $\vec{v}$ ни ҳисоблаймиз:

$$v=\vec{w}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ w_x & w_y & w_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=(w_yz-w_zy)\vec{i}+$$

$$+(w_zx-w_xz)\vec{j}+(w_xy-w_yx)\vec{k}.$$

Демак,

$$\text{rot}\vec{v}=2w_x\vec{i}+2w_y\vec{j}+w_z\vec{k}=2\vec{w}.$$

2-мисол. $\vec{a}=y\vec{i}+x^2\vec{j}-z\vec{k}$ вектор майдонининг L: $x^2+y^2=4$, $z=3$ айлана бўйича бирлик вектор $\vec{k}$ га нисбатан айланиб мусбат йўналишда ўтишнинг циркуляциясини икки усул билан:

а) циркуляция таърифидан фойдаланиб;

б) Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. Чизма чизиб, унда нормалнинг бирлик вектор $n^0=\vec{k}$ йўналишини ва контурни айланиш йўналишини кўрсатамиз (62- шакл).

а) Айлананинг параметрик тенгламалари:

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=3,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Изланаётган C циркуляцияни таърифдан фойдаланиб топамиз:

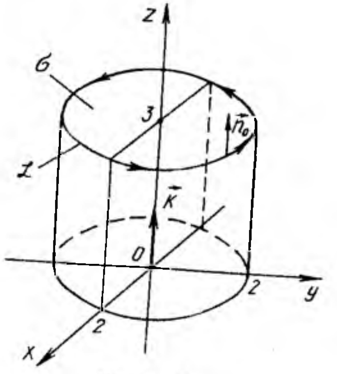
$$C=\oint\limits_{n} ydx+x^2dy-zdz=\int\limits_0^{2\pi}[2\sin t(-2\sin tdt)+$$

$$+4\cos^2t\cdot 2\cos tdt-3\cdot 0]=8\int\limits_0^{2\pi}\cos^3tdt-$$

$$-4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2tdt=8\int\limits_0^{2\pi}(1-\sin^2t)\ d\ (\sin t)-$$

$$-2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=8\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3t\right)\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=-4\pi\ .$$



Шакл- 62

б) Шартга кўра: $\vec{n}^0=\vec{k}$, $\text{rot}\vec{a}=(2x-1)\vec{k}$. Сток формуласига кўра:

$$C=\iint\limits_{\sigma}\text{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{xy}}(2x-1)\,dxdy=\iint\limits_{\sigma_{xy}}(2r\cos\varphi-1)\,rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}(2r\cos\varphi-1)\,rdr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}r^3\cos\varphi-\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^2d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}\cos\varphi-2\right)d\varphi=\left(\frac{8}{3}\sin\varphi-2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=-4\pi\ .$$

(Икки ўлчовли интегрални ҳисоблашда қутб координаталарига ўтилди.)

3- дарсхона топшириғи

1. $\vec{a}=xyz\vec{i}+(x+y+z)\vec{j}+(x^2+y^2+z^2)\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1,$ $-1,\ 2)$ нуқтадаги роторини топинг. Ж: $\text{rot}\vec{a}=-3\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

майдоннинг бир паллали $2x^2-y^2+$
2. $\vec{a}=y\vec{i}-2z\vec{j}+x\vec{k}$ вектор текислик кесишидан ҳосил бўлган
$+z^2=R^2$ гиперболоидни $y=x$ Натижани Стокс формуэллипс бўйича циркуляциясини топинг.
ласи ёрдамида текширинг. Ж: $\pm 3\pi R^2$.
3. $\vec{a}=zy^2\vec{i}+xz^2\vec{j}+yx^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x=y^2+z^2$ параболоидни $x=9$ текислик билан кесишиш контури бўйича $\vec{n}^0=\vec{i}$ ортга нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг.
Ж: 729π.
4. $\vec{a}=-y\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2-z^2=0$ конуснинг
$z=1$ текислик билан кесишиш чизиғи L бўйича $\vec{n}^0=\vec{k}$ ортга нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг. Ж: π.

3- мустақил иш

1. $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2+z^2=4$ сферанинг $\sqrt{x^2+y^2}=z$ конус билан кесишиш чизиғи L бўйича $\vec{n}^0=\vec{k}$ ортга
ҳисобланг.
нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини
2. $\vec{a}=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+y^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$
ярим сферанинг $x^2+y^2=16$ цилиндр билан кесишиш чизиғи
L бўйича $\vec{n}^0=\vec{k}$ ортга нисбатан мусбат йўналишда айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг.
3. $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2=1$ цилиндрнинг $z=2$ текислик билан кесишиш чизиғи L бўйича $\vec{n}^0=\vec{k}$ бўлгандаги циркуляциясини ҳисобланг.

4- §. Потенциал майдон. Потенцнал майдондаги чизиқли иитеграл. Гамильтон ва Лаплас операторлари

12.4.1. Агар фазонинг бир боғламли Ω соҳасининг ҳар бир нуқтасида $\mathrm{rot}\vec{a}=\vec{0}$ бўлса, $\vec{a}=\{P, Q, R\}$ вектор майдон Ω соҳада *потенциал* ёки *уюрмасиз майдон* дейилади.

$\mathrm{rotgrad}u=0$ бўлгани учун исталган $u=u(x, y, z)$ скаляр майдоннинг градиенти ҳосил килган вектор майдон ҳар доим потенциалдир. $\vec{a}$ майдон Ω соҳада потенциал бўлиши учун икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u=u(x, y, z)$ скаляр функция мавжуд бўлиши зарур ва етарли бўлиб, унинг учун $\vec{a}=\mathrm{grad}u$ бўлиши керак. $u=u(x, y, z)$ функция $\vec{a}$ майдоннинг *потенциали* (ёки *потенциал функцияси*) дейилади.

$\vec{a}=\{P, Q, R\}$ потенциал майдон учун потенциални топишнинг ушбу формуласи ўринлидир:

$$u(x, y, z)=\int\limits_{M_0M} P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz+C,$$

бу ерда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — Ω соҳанинг бирорта тайин нуқтаси, $M(x, y, z)$ — соҳанинг ихтиёрий нуқтаси, C — ихтиёрий ўзгармас.

Бу формуладан интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаган иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш формуласи ҳам келиб чиқади:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A)\ ,$$

бу ерда $u(A)$ ва $u(B)$ потенциалнинг йўлнинг бошланғич A ва охирги B нуқталаридаги қийматлари.

Агар фазонинг Ω соҳасидаги ҳар бир нуқтада $\mathrm{div}\vec{a}=0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор майдон бу соҳада *соленоидли* ёки *найчасимон майдон* дейилади. $\mathrm{divrot}\vec{a}=0$ бўлгани учун исталган $\vec{a}$ вектор майдоннинг ротор майдони соленоидли майдон бўлади.

Агар фазонинг Ω соҳасида $\vec{a}$ вектор майдон бир вақтнинг ўзида ҳам потенциал, ҳам соленоидли бўлса, яъни Ω соҳанинг ҳар қайси нуқтасида $\mathrm{div}\vec{a}=0$, $\mathrm{rot}\vec{a}=0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор майдон Ω соҳада *гармоник майдон* дейилади. Гармоник майдоннинг u потенциали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Лаплас тенгламасининг ечимидан иборатдир. Лаплас тенгламасини каноатлантирувчи $u=u(x, y, z)$ функция *гармоник функция* дейилади.

1 м и с о л. $\vec{a}=\{2xy+z,\ x^2-2y,\ x\}$ векторнинг майдони потенциал, лекин соленоидли эмаслигини кўрсатинг. Берилган майдоннинг потеницали u ни топинг.

Е ч и ш. Қуйидагига эгамиз:

$$P=2xy+z,\ Q=x^2-2y,\ R=x, \text{ шунинг учун:}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2-2y & x \end{vmatrix}=$$

$=\vec{i}\,(0-0)-\vec{j}\,(1-1)+(2x-2x)\vec{k}=0$, яъни $\vec{a}$ — потенциал майдон.

$\vec{a}$ вектор девергенциясини топамиз:

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2y-2+0\neq0\ ,$$

бинобарин, $\vec{a}$ — соленоидли майдон эмас. Берилган $\vec{a}$ майдон потенциали u ни қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$u(x, y, z)=\int\limits_{M_0M} Pdx+Qdy+Rdz+C\ ,$$

чизиқли интеграл бошлаиғич $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ ва охирги $M(x, y, z)$ нуқтага боғлиқ. Аниқ интегралга ўтиб топамиз:

$$u(x, y, z)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz+C\ .$$

Мазкур ҳолда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта сифатида координаталар боши $O(0, 0, 0)$ ни олиш мумкин. Шундай қилиб,

$$u(x, y, z)=\int\limits_{OM} (2xy+z)dx+(x^2-2y)dy+xdz+C=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}(2xy+z)dx+\int\limits_{0}^{y}(-2y)dy+\int\limits_{0}^{z}0dz+C=(x^2y+xz)\,\big|_0^x-$$

$$-y^2\big|_0^y+C=x^2y+xz-y^2+C\ .$$

2- м и с о л. $\vec{a}=\{yz-xy,\ xz-\frac{x^2}{2}+yz^2,\ xy+y^2z\}$ майдон потенциал ёки потенциал эмаслигини текширинг, унинг потенциалини топинг ҳамда A (1, 1, 1) ва B (2, —2,3) нуқталарни туташтирувчи чизиқ бўйича мос чизиқли интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Берилишига кўра:

$$P=yz-xy,\ Q=xz-\frac{x^2}{2}+yz^2,\ R=xy+y^2z\,,$$

шунинг учун

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz-xy & xz-\frac{x^2}{2}+yz^2 & xy+y^2z \end{vmatrix}=$$

$$=(x+2yz-x-2yz)\vec{i}+(y-y)\vec{j}+(z-x-z+x)\vec{k}=0$$

демак, $\vec{a}$ — потенциал майдон, бинобарин, унинг потенциали мавжуд. Уни олдинги мисолдагига ўхшаш топамиз:

$$u(x,y,z)=\int_0^x(yz-xy)dx+\int_0^y yz^2dy+\int_0^z 0dz+C=$$

$$=\left(xyz-\frac{x^2y}{2}\right)\Big|_0^x+\frac{1}{2}y^2z^2\Big|_0^y+C=xyz-\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+C\,.$$

Шундай қилиб,

$$u(x,y,z)=xyz-\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+C\,.$$

Потенциал майдонда чизиқли интеграл A ва B нуқталарни туташтирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди, шунинг учун уни

$$\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A)$$

формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\int_{AB}(yz-xy)dx+\left(xz-\frac{x^2}{2}+yz^2\right)dy+(xy+y^2z)dz=$$

$$=u(B)-u(A)=\left(2\cdot(-2)\cdot 3-\frac{2^2(-2)}{2}+\frac{(-2)^2\cdot 3^2}{2}\right)-$$

$$-\left(1\cdot 1\cdot 1-\frac{1^2\cdot 1}{2}+\frac{1^2\cdot 1^2}{2}\right)=9\,.$$

12.4.2. Вектор анализнинг асосий тушунчалари (градиент, дивергенция, ротор)ни *Гамильтон оператори* деб аталувчи

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

дифференциал оператор (символик ∇ вектор каби белгиланувчи ва «набла» деб ўқилувчи) ёрдамида тавсифлаш қулай.

Векторни скалярга кўпайтириш, иккита векторнинг скаляр ва вектор кўпайтмалари каби маълум операциялардан фойдаланиб, асосий дифференциал амалларни ∇ оператори ёрдамида ёзамиз:

$$\operatorname{grad}u=\vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}=\nabla u\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{a}\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\nabla\times\vec{a}\,.$$

Келтириб ўтилган амаллар *биринчи тартибли дифференциал амаллар* дейилади. Гамильтон оператори ёрдамида вектор анализининг мураккаб ифодалари устида дифференциал амалларни (иккита ёки кўпрок скаляр функциялар кўпайтмаси, скаляр функциянинг векторга кўпайтмаси, векторларнинг вектор кўпайтмалари ва ҳ. к.) бажариш қулай. Бунда фақат шуни эсда сақлаш лозимки, бу оператор дифференциаллаш операторидир ва кўпайтмани дифференциаллаш қоидасини билиш керак.

3-мисол. Иккита скаляр функция u ва v кўпайтмасининг градиентини топинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$\operatorname{grad}\ u\cdot v=\nabla uv=u\nabla v+v\nabla u$$

ёки

$$\operatorname{grad}\ uv=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u.$$

12.4.3. Иккинчи тартибли бешта дифференциал амални ёзиш мумкин:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2u=\Delta u,$$

бу ерда

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\nabla^2$$

ифода Лаплас оператори дейилади:

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot\,grad}\,u=(\nabla\times\nabla)u;\\&\mathrm{div\,rot}\,\vec{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a});\\&\mathrm{grad\,div}\,\vec{a}=\nabla(\nabla\vec{a});\\&\mathrm{rot\,rot}\,\vec{a}=\nabla\times(\nabla\times\vec{a}).\end{aligned}$$

Гамильтон оператори ∇ нинг вектор маъносидан $\mathrm{rot\,grad}\,u=\vec{0}$ (иккита коллинеар векторнинг вектор кўпайтмасига эгамиз) эканлиги ва $\mathrm{div\,rot}\,\vec{a}=0$ (компланар векторларнинг аралаш кўпайтмасига эгамиз) эканлиги келиб чиқади.

4-мисол. $u=\frac{1}{r}$ функция, бу ерда $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, гармоник функция эканлигини ва $\vec{a}=\mathrm{grad}\,u$ — вектор майдон гармоник эканлигини исбот қилинг.

Ечиш. Дастлаб берилган функция учун Лаплас тенгламаси $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$ ёки $\Delta u=0$ ўринли эканини текширамиз. Бунинг учун $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$ ва Δu ларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5};\quad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5};\quad \frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5};$$

$$\Delta u=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

Демак, $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси ўринли, бинобарин, берилган $u=\frac{1}{r}$ гармоник функция.

Мисолни ечишда давом этамиз. Топамиз:

$$\vec{a}=\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

ёки

$$\vec{a}=-\frac{1}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).$$

Маълумки, исталган u функция учун: $\mathrm{rot}\,\vec{a}=\mathrm{rot\,grad}\,u=\vec{0}$, яъни $\vec{a}$ нинг гармониклигини аниқлашнинг биринчи шарти бажарилган. Иккинчи шарт: $\mathrm{div}\,\vec{a}=0$ ҳам бажарилади, чунки

$$\mathrm{div}\,\vec{a}=\mathrm{div\,grad}\,u=\Delta u=0.$$

4-дарсхона топшириғи

1. $\vec{a}$ майдоннинг потенциал эканини кўрсатинг ва уиинг потенциали u ни топинг:

а) $\vec{a}=\{2xy,\ x^2-2yz,\ -y^2\}$;
б) $\vec{a}=\{3x^2y-y^3,\ x^3+3xy^2\}$;
в) $\vec{a}=\{y+2,\ x+z,\ y+x\}$;
г) $\vec{a}=\{yz\cos xy,\ xz\cos xy,\ \sin xy\}$.
Ж: а) $u=x^2y-y^2z+C$;
б) $u=x^3y-xy^3+C$;
в) $u=xy+yz+xz+C$;
г) $u=z\sin xy+C$.

2. $\vec{a}=\{yz+1,\ xz,\ xy\}$ майдон потенциали u ни топинг ва $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,2)}(yz+1)dx+xzdy+xydz$ чизиқли интегрални ҳисобланг.

Ж: $u=x+xyz+C$; 12.

3. Берилган функция гармоникми:

а) $u=\ln r$, бу ерда $r=\sqrt{x^2+y^2}$;
б) $u=r-x$, бу ерда $r=\sqrt{x^2+y^2}$;
в) $y=Ax+By+Cz+D$.
Ж: а) ҳа; б) йўқ; в) ҳа.

4-мустақил иш

$\vec{a}$ вектор майдониинг потенциаллигини текширинг, унинг потенциалини топинг ва $\vec{a}$ вектордан A (ёй боши) ва B (ёй охири) нуқталарни туташтирувчи ёй чизиғи бўйлаб олинган чизиқли интеграл қийматини ҳисобланг:

1. $\vec{a}=\{2xyz,\ x^2z,\ x^2y\}$,
$A\ (1,\ -1,\ 2)$, $B\ (-2,\ 4,\ 2)$. Ж: 34.

2. $\vec{a}=\{x^2-2yz,\ y^2-2xz,\ z^2-2xy\}$,
$A\ (1,\ -1,\ 1)$, $B\ (-2,\ 2,\ 3)$. Ж: $\frac{92}{3}$.

3. $\vec{a}=\{2xy+z^2,\ 2xz+x^2,\ 2xz+y^2\}$,
$A\ (0,\ 1,\ -2)$, $B\ (2,\ 3,\ 1)$. Ж: 25.

9- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. $u=u(x, y, z)$ скаляр майдоннинг M нуқтадаги $\vec{l}$ вектор йўналнши бўйича ҳосиласинн топинг:

1.1. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$,
$\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$,
$M(1, 1, 1)$.

1.2. $u=x+\ln(z^2+y^2)$,
$\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$,
$M(2, 1, 1)$.

1.3. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$,
$\vec{l}=2\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(1, 5, -2)$.

1.4. $u=y\ln(1+x^2)-\mathrm{arctg}z$,
$\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(0, 1, 1)$.

1.5. $u=x(\ln y-\mathrm{arctg}z)$,
$\vec{l}=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$,
$M(-2, 1, -1)$.

1.6. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$,
$\vec{l}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(1, 3, 2)$.

1.7. $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$,
$\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$,
$M=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$.

1.8. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$,
$\vec{l}=5\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{5}\vec{k}$,
$M(1, 1, 2)$.

1.9. $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$,
$\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$,
$M(1, -3, 4)$.

1.10. $u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$,
$\vec{l}=2\vec{i}+\vec{k}$,
$M(4, 1, -2)$.

1.11. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$,
$\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,
$M(1, 1, 0)$.

1.12. $u=2\sqrt{x+y}+y\,\mathrm{arctg}z$,
$\vec{l}=4\vec{i}-3\vec{k}$,
$M(3, -2, 1)$.

1.13. $u=z^2+2\mathrm{arctg}(x-y)$,
$\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(1, 2, -1)$.

1.14. $u=\ln(x^2+y^2)+xyz$,
$\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$,
$M(1, -1, 2)$.

1.15. $u=xy-\frac{x}{z}$,
$\vec{l}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$,
$M(-4, 3, -1)$.

1.16. $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$,
$\vec{l}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$,
$M(1, -3, 4)$.

1.17. $u=x^2-\mathrm{arctg}(y+z)$,
$\vec{l}=3\vec{j}-4\vec{k}$,
$M(2, 1, 1)$.

1.18. $u=x^2y+y^2z+z^2x$,
$\vec{l}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$,
$M(1, -1, 2)$.

1.19. $u=\ln(xy+yz+xz)$,
$\vec{l}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(-2, 3, -1)$.

1.20. $u=5x^2yz-xy^2z+yz^2$,
$\vec{l}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$,
$M(1, 1, 1)$.

1.21. $u=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$,
$\vec{l}=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$,
$M(-1, 2, 2)$.

1.22. $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$,
$\vec{l}=-4\vec{i}-3\vec{k}$,
$M(1, 2, 2)$.

1.23. $u=5x^2yz-xy^2z+yz^2$,
$\vec{l}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$,
$M(1, -3, 2)$.

1.24. $u=x^2+xy^2-6xyz$,
$\vec{l}=3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$,
$M(1, 3, -5)$.

1.25. $u=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$,
$\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}$,
$M(1, 1, 1)$.

1.26. $u=\ln(x^3+y^3+z+1)$;
$\vec{l}=-5\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$,
$M(1, 3, 0)$.

1.27. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$,
$\vec{l}=3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.
$M(-1, 1, 1)$.

1.28. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$,
$\vec{l}=4\vec{i}+2\vec{k}$,
$M(1, -1, 2)$.

1.29. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$,
$\vec{l}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$,
$M(-1, 2, 1)$.

1.30. $u=\frac{x}{y}-\frac{y}{z}-\frac{x}{z}$,
$\vec{l}=-5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,
$M(2, 2, 2)$.

2. $u=u(x, y, z)$ функциянинг M нуқтадаги энг катта ўзгариши катталиги ва йўналишини топинг:

2.1. $u=xyz$,
$M(0, 1, -2)$.

2.2. $u=xy^2z$,
$M(1, -2, 0)$.

2.3. $u=x^2y^2z$,
$M(-1, 0, 3)$.

2.4. $u=xy^2z^2$,
$M(-2, 1, 1)$.

2.5. $u=x^2y+y^2z$,
$M(0, -2, 1)$.

2.6. $u=xy-xz$,
$M(-1, 2, 1)$.

2.7. $u=xyz$,
$M(2, 1, 0)$.

2.8. $u=x^2yz$,
$M(2, 0, 2)$.

2.9. $u=xyz^2$,
$M(3, 0, 1)$.

2.10. $u=x^2yz^2$,
$M(2, 1, -1)$.

2.11. $u=y^2z-x^2$,
$M(0, 1, 1)$.

2.12. $u=x(y+z)$,
$M(0, 1, 2)$.

2.13. $u=x^2yz$,
$M(1, -1, 1)$.

2.14. $u=xyz^2$,
$M(4, 0, 1)$.

2.15. $u=2x^2yz$,
$M(-3, 0, 2)$.

2.16. $u=(x+y)z^2$,
$M(0, -1, 4)$.

2.17. $u=x^2(y^2+z)$,
$M(4, 1, -3)$.

2.18. $u=x^2(y+z^2)$,
$M(3, 0, 1)$.

2.19. $u=x(y^2+z^2)$,
$M(1, -2, 1)$.

2.20. $u=x^2z-y^2$,
$M(1, 1, -2)$.

2.21. $u=x^2y-z$,
$M(-2, 2, 1)$.

2.22. $u=y(x+z)$,
$M(0, 2, -2)$.

2.23. $u=x^2yz$,
$M(1, 0, 4)$.

2.24. $u=(x+z)y^2$,
$M(2, 2, 2)$.

2.25. $u=(x^2+z)y^2$,
$M(-4, 1, 0)$.

2.26. $u=(x^2-y)z^2$,
$M(1, 3, 0)$.

2.27. $u=x^2+3y^2-z^2$,
$M(0, 0, 1)$.

2.28. $u=xz^2+y$,
$M(2, 2, 1)$.

2.29. $u=xy^2-z$,
$M(-1, 2, 1)$.

2.30. $u=z(x+y)$,
$M(1, -1, 0)$.

3. $u=u(x, y, z)$ ва $v=v(x, y, z)$ скаляр майдонлар градиентлари орасидаги бурчакни топинг:

3.1. $u=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3$,
$v=\frac{yz^2}{x^2}$,
$M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.2. $u=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{6}{9y}+\frac{3}{z}$,
$v=x^2yz^3$,
$M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3.3. $u=9\sqrt{2}\,x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$,
$v=\frac{z^3}{xy^2}$,
$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3.4. $u=6\sqrt{6}\,x^3-6\sqrt{6}\,y^3+2z^3$,
$v=\frac{xz^2}{y}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.

3.5. $u=\frac{\sqrt{6}}{2x}-\frac{\sqrt{6}}{2y}+\frac{2}{3z}$,
$v=\frac{yz^2}{x}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.6. $u=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}\,z}$,
$v=\frac{z}{x^3y^2}$,
$M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3.7. $u=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3$,
$v=\frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.8. $u=3\sqrt{2}\,x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\,z^2$,
$v=\frac{z^2}{xy^2}$,
$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3.9. $u=3\sqrt{2}\,x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\,z^2$,
$v=\frac{xy^2}{z^2}$,
$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3.10. $u=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}\,z}$,
$v=\frac{x^3y^2}{z}$,
$M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3.11. $u=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}\,x}$,
$v=\frac{1}{x^2yz}$,
$M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3.12. $u=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,z}$,
$v=\frac{x^2}{y^2z^3}$,
$M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.13. $u=x^2+9y^2+6z^2$,
$v=xyz$,
$M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3.14. $u=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z}$,
$v=\frac{y^3}{x^2z}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

3.15. $u=\sqrt{2}\,x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}\,z^2$,
$v=xy^2z$,
$M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3.16. $u=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$,
$v=\frac{x}{yz^2}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.17. $u=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,z}$,
$v=\frac{y^2z^3}{x^2}$,
$M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.18. $u=\frac{1}{\sqrt{2}\,x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$,
$v=\frac{y^2z^3}{x}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.19. $u=6\sqrt{6}\,x^3-6\sqrt{6}\,y^3+2z^3$,
$v=\frac{y}{xz^2}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ 1\right)$

3.20. $u=x^2-y^2-3z^2$,
$v=\frac{yz^2}{x}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3.21. $u=\frac{3x^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\,z^2$,
$v=\frac{z^2}{x^2y^2}$,
$M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3.22. $u=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$,
$v=\frac{x^2}{y^2z^3}$,
$M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3.23. $u=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$,
$v=x^2yz^3$,
$M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

3.24. $u=9\sqrt{2}\,x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{3}$,
$v=\frac{xy^2}{z^3}$,
$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

3.25. $u=\sqrt{2}\,x^2-\frac{3y^2}{2}-6\sqrt{2}\,z^2$,
$v=\frac{1}{xy^2z}$,
$M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

3.26. $u=\frac{1}{\sqrt{2}\,x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$,
$v=\frac{x}{y^2z^3}$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.27. $u=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}\,z}$,
$v=x^2yz$,
$M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

3.28. $u=x^2+9y^2+6z^2$
$v=\frac{1}{xyz}$,
$M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

3.29. $u=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$,
$v=\frac{y^2z^3}{x^2}$,
$M\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.30. $u=-\frac{3x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}\,y^3}{3}+8\sqrt{3}\,z^3$,
$u=\frac{x^2z}{y^3}$,
$M\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}\right)$.

4. $\vec{a}$ вектор майдондаги вектор чизиқларини топинг:

4.1. $\vec{a}=4y\vec{i}-9x\vec{j}$.
4.2. $\vec{a}=x\vec{i}+4y\vec{j}$.
4.3. $\vec{a}=4y\vec{i}+8z\vec{k}$.
4.4. $\vec{a}=4z\vec{j}-9y\vec{k}$.
4.5. $\vec{a}=5x\vec{i}+10y\vec{j}$.
4.6. $\vec{a}=y\vec{j}+4z\vec{k}$.
4.7. $\vec{a}=9y\vec{i}-4x\vec{j}$.
4.8. $\vec{a}=4x\vec{i}+z\vec{k}$.
4.9. $\vec{a}=2y\vec{i}+3x\vec{j}$.
4.10. $\vec{a}=3x\vec{i}+6z\vec{k}$.
4.11. $\vec{a}=y\vec{j}+3z\vec{k}$.
4.12. $\vec{a}=2z\vec{j}+3y\vec{k}$.
4.13. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
4.14. $\vec{a}=2y\vec{j}+6z\vec{k}$.
4.15. $\vec{a}=5z\vec{i}+7x\vec{k}$.
4.16. $\vec{a}=2x\vec{i}+4y\vec{j}$.
4.17. $\vec{a}=4z\vec{i}-9x\vec{k}$.
4.18. $\vec{a}=2x\vec{i}+8z\vec{k}$.
4.19. $\vec{a}=6x\vec{i}+12z\vec{k}$.
4.20. $\vec{a}=4x\vec{i}+y\vec{j}$.
4.21. $\vec{a}=x\vec{i}+z\vec{k}$.
4.22. $\vec{a}=7y\vec{j}+14z\vec{k}$.
4.23. $\vec{a}=9z\vec{j}-4y\vec{k}$.
4.24. $\vec{a}=x\vec{i}+3y\vec{j}$.
4.25. $\vec{a}=2z\vec{i}+3x\vec{k}$.
4.26. $\vec{a}=x\vec{i}+3z\vec{k}$.
4.27. $\vec{a}=2x\vec{i}+6y\vec{j}$.
4.28. $\vec{a}=5y\vec{i}+7x\vec{j}$.
4.29. $\vec{a}=9z\vec{i}-4x\vec{k}$.
4.30. $\vec{a}=2x\vec{i}+6z\vec{k}$.

5. $\vec{a}$ вектор майдоннинг p текислик ва координата текисликлари ҳосил қилган пирамиданинг ташқи сирти бўйича оқимини икки усул билан топииг:

а) оқим таърифидан фойдаланиб;
б) Остроградский — Гаусс формуласи ёрдамида.

5.1. $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+3y+z=3$.
5.2. $\vec{a}=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$,
$p\ :\ 2x-y-2z=2$.
5.3. $\vec{a}=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$,
$p\ :\ 3x+3y+z=3$.
5.4. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+y+z=2$.
5.5. $\vec{a}=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+y+2z=2$.

5.6. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+2y+z=2$.
5.7. $\vec{a}=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x-3y+z=6$.
5.8. $\vec{a}=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$,
$p\ :\ x-y+z=2$.
5.9. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x-y-2z=-2$.
5.10. $\vec{a}=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+2y+z=2$.
5.11. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+y+z=2$.
5.12. $\vec{a}=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+2y+2z=2$.
5.13. $\vec{a}=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$,
$p\ :\ 3x+2y+2z=6$.
5.14. $\vec{a}=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+y+z=4$.
5.15. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$,
$p\ :\ x+4y+2z=8$.
5.16. $\vec{a}=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$,
$p\ :\ x-2y+2z=2$.
5.17. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$,
$p\ :\ 3x-2y+2z=6$.
5.18. $\vec{a}=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+3y+z=6$.
5.19. $\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$,
$p\ :\ x-y+z=2$.
5.20. $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$,
$p\ :\ x+2y+2z=4$.
5.21. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$,
$p\ :\ x+y+2z=2$.
5.22. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$,
$p\ :\ x+y+2z=2$.
5.23. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+2y+z=4$.
5.24. $\vec{a}=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$,
$p\ :\ x+2y+z=2$.
5.25. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$,
$p\ :\ 2x+y+3z=6$.

5.26. $\vec a=(y+z)\vec i+(x+6y)\vec j+y\vec k,$
$p: x+2y+2z=2.$

5.27. $\vec a=(2y-z)\vec i+(x+2y)\vec j+y\vec k,$
$p: x+3y+2z=6.$

5.28. $\vec a=(y+z)\vec i+x\vec j+(y-2z)\vec k,$
$p: 2x+2y+z=2.$

5.29. $\vec a=(x+z)\vec i+z\vec j+(2x-y)\vec k,$
$p: 3x+2y+z=6.$

5.30. $\vec a=z\vec i+(x+y)\vec j+y\vec k,$
$p: 2x+y+2z=2.$

6. $\vec a$ вектор майдоннинг p текисликнинг координата текисликлари билан кесишдан ҳосил бўлган учбурчак контури бўйича циркуляциясини (бу текисликнинг нормал векторига нисбатан айланиб ўтиш йўналиши мусбат бўлганда) қуйидаги икки усул билан ҳисобланг:

а) циркуляция таърифидан фойдаланиб;

б) Стокс формуласи ёрдамида.

6.1. $\vec a=z\vec i+(x+y)\vec j+y\vec k,$
$p: 2x+y+2z=2.$

6.2. $\vec a=(x+z)\vec i+z\vec j+(2x-y)\vec k,$
$p: 3x+2y+z=6.$

6.3. $\vec a=(y+z)\vec i+x\vec j+(y-2z)\vec k,$
$p: 2x+2y+z=2.$

6.4. $\vec a=(2y-z)\vec i+(x+2y)\vec j+y\vec k,$
$p: x+3y+2z=6.$

6.5. $\vec a=(y+z)\vec i+(x+6y)\vec j+y\vec k,$
$p: x+2y+2z=2.$

6.6. $\vec a=(y+z)\vec i+(2x-z)\vec j+(y+3z)\vec k,$
$p: 2x+y+3z=6.$

6.7. $\vec a=(3x+y)\vec i+(x+z)\vec j+y\vec k,$
$p: x+2y+z=2.$

6.8. $\vec a=(x+z)\vec i+z\vec j+(2x-y)\vec k,$
$p: 2x+2y+z=4.$

6.9. $\vec a=(x+z)\vec i+(x+3y)\vec j+y\vec k,$
$p: x+y+2z=2.$

6.10. $\vec a=(2y-z)\vec i+(x+y)\vec j+x\vec k,$
$p: x+2y+2z=4.$

6.11. $\vec a=(2z-x)\vec i+(x-y)\vec j+(3x+z)\vec k,$
$p: x+y+2z=2.$

6.12. $\vec a=(2x-z)\vec i+(y-x)\vec j+(x+2z)\vec k,$
$p: x-y+z=2.$

6.13. $\vec a=(x+y+z)\vec i+2z\vec j+(y-7z)\vec k,$
$p: 2x+3y+z=6.$

6.14. $\vec a=(x+y)\vec i+(y+z)\vec j+2(x+z)\vec k,$
$p: 3x-2y+2z=6.$

6.15. $\vec a=4z\vec i+(x-y-z)\vec j+(3y+z)\vec k,$
$p: x-2y+2z=2.$

6.16. $\vec a=(2z-x)\vec i+(x+2y)\vec j+3z\vec k,$
$p: x+4y+2z=8.$

6.17. $\vec a=4x\vec i+(x-y-z)\vec j+(3y+2z)\vec k,$
$p: 2x+y+z=4.$

6.18. $\vec a=(x+2z)\vec i+(y-3z)\vec j+z\vec k,$
$p: 3x+2y+2z=6.$

6.19. $\vec a=x\vec i+(y-2z)\vec j+(2x-y+2z)\vec k,$
$p: x+2y+2z=2.$

6.20. $\vec a=(y-z)\vec i+(2x+y)\vec j+z\vec k,$
$p: 2x+y+z=2.$

6.21. $\vec a=(x+y-z)\vec i-2y\vec j+(x+2z)\vec k,$
$p: x+2y+z=2.$

6.22. $\vec a=(x+y)\vec i+3y\vec j+(y-z)\vec k,$
$p: 2x-y-2z=-2.$

6.23. $\vec a=(2y+z)\vec i+(x-y)\vec j-2z\vec k,$
$p: x-y+z=2.$

6.24. $\vec a=(3x-y)\vec i+(2y+z)\vec j+(2z-x)\vec k,$
$p: 2x-3y+z=6.$

6.25. $\vec a=(x+z)\vec i+2y\vec j+(x+y-z)\vec k,$
$p: x+2y+z=2.$

6.26. $\vec a=(y+2z)\vec i+(x+2z)\vec j+(x-2y)\vec k,$
$p: 2x+y+2z=2.$

6.27. $\vec a=(x+z)\vec i+(z-x)\vec j+(x+2y+z)\vec k,$
$p: x+y+z=2.$

6.28. $\vec a=x\vec i+(x+z)\vec j+(y+z)\vec k,$
$p: 3x+3y+z=3.$

6.29. $\vec a=(3x-1)\vec i+(y-x+z)\vec j+4z\vec k,$
$p: 2x-y-2z=-2.$

6.30. $\vec a=3x\vec i+(y+z)\vec j+(x-z)\vec k,$
$p: x+3y+z=3.$

7. $\vec{a}$ вектор майдон соленоидлими (1—11- вариантлар), потенциалми (12—25- вариантлар), гармоникми (26—30- вариантлар) эканини аниқланг:

7.1. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+xy\vec{j}-xz\vec{k}$.
7.2. $\vec{a}=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$.
7.3. $\vec{a}=(2yz-2x)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+xy\vec{k}$.
7.4. $\vec{a}=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$.
7.5. $\vec{a}=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$.
7.6. $\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$.
7.7. $\vec{a}=(x^2-y^2)\vec{i}+(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}$.
7.8. $\vec{a}=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$.
7.9. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.
7.10. $\vec{a}=3x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}$.
7.11. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.
7.12. $\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}$.
7.13. $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.
7.14. $\vec{a}=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+z\vec{k}$.
7.15. $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$.
7.16. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.
7.17. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$.
7.18. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-2xz\vec{j}-3(y+z)\vec{k}$.
7.19. $\vec{a}=z^2\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+x^2y\vec{k}$.
7.20. $\vec{a}=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$.
7.21. $\vec{a}=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}$.
7.22. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$.
7.23. $\vec{a}=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$.
7.24. $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xyz\vec{k}$.
7.25. $\vec{a}=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$.
7.26. $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$.
7.27. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+z)\vec{k}$.
7.28. $\vec{a}=\frac{x}{y}\vec{i}+\frac{y}{z}\vec{j}+\frac{z}{x}\vec{k}$.
7.29. $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.
7.30. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$.

13- б о б.

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ АСОСИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1- §. Тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини Даламбер усули билан ечиш

13.1.1. Математик физиканинг кўпгина масалалари хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтирилади. Булардан энг кўп учрайдигани иккинчи тартибли тенгламалардир.

Умумий кўриниши

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x, y)$$

бўлган хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламани қараймиз. Бу тенгламада номаълум $u(x, y)$ функция иккита ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, тенгламанинг A, B, C, D, E ва F коэффициентлари ҳам умуман айтганда x ва y ларга боғлиқ маълум функциялар. Тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ функция берилган функция бўлиб, у нолга тенг бўлса, тенглама *иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Агар тенгламанинг берилган соҳасида:
$B^2-4AC>0$ бўлса, тенглама гиперболик,
$B^2-4AC=0$ бўлса, тенглама параболик,
$B^2-4AC<0$ бўлса, тенглама эллиптик турга тегишли бўлади.

Торнинг кўндаланг тебраниши, металл стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлар, айланувчи цилиндрдаги айланма тебранишлар, газнинг тебранишлари каби масалалар гиперболик турдаги энг содда тўлқин тенгламаси

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

га олиб келади.

Иссиқликнинг тарқалиш жараёни, ғовак муҳитда суюқлик ва газнинг оқиши масаласи каби масалалар параболик турдаги энг содда иссиқлик тарқалиш тенгламаси (Фурье тенгламаси)

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

га олиб келади.

Тебранишлар, иссиқлик ўтказиш ва диффузия каби масалаларга тегишли стационар жараёнларнинг тадқиқотида эллиптик турдаги тенгламалардан фойдаланилади. Бу турдаги энг содда тенглама

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Лаплас тенгламасидир.

13.1.2. Умумий кўринишда берилган хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* деб

$$A(dy)^2-Bdxdy+C(dx)^2=0$$

оддий дифференциал тенгламага айтилади.

Гиперболик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама $\varphi(x,y)=C_1$ ва $\psi(x,y)=C_2$ интегралга эга бўлади. Умумий теиглама

$$\xi=\varphi(x,\ y),\ \eta=\psi(x,\ y)$$

алмаштиришлар ёрдамида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

шаклдаги *каноник* кўринишга келтирилади.

Параболик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама битта $\varphi(x,\ y)=c$ умумий интегралга эга бўлиб, улар $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\eta(x,\ y)$ — (η φ га боғлиқ бўлмаган ихтиёрий функция) алмаштириш ёрдамида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta 2}=F\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

шаклдаги каноник кўринишга келтирилади.

Эллиптик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама интеграллари ушбу кўринишга эга бўлади: $\varphi(x,\ y)\pm i\psi(x,\ y)=C_{1,2}$, бу ерда $\varphi(x,\ y)$ ва $\psi(x,\ y)$ — ҳақиқий функциялар. $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$ алмаштиришлар ёрдамида эллиптик турдаги тенгламалар ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

каионик шаклга келтирилади.

1-мисол. Ушбу

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

дифференциал тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бунда $A=4$, $B=8$, $C=3$, $AC-\frac{B^2}{4}=-4<0$, демак,

гиперболик турдаги тенгламага эгамиз. Тегишли характеристик тенгламани тузамиз:

$$4(dy)^2-8dxdy+3(dx)^2=0$$

ёки

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-8\,\frac{dy}{dx}+3=0.$$

$\frac{dy}{dx}$ ни топамиз: $\frac{dy}{dx}=\frac{4\pm 2}{4}$, бундан $y'=\frac{3}{2}$ ва $y'=\frac{1}{2}$. Характеристик тенглама интеграллари: $y-\frac{3}{2}x=C_1$ ва $y-\frac{1}{2}x=C_2$ эканлигини эътиборга олиб, $\xi=y-\frac{3}{2}x$, $\eta=y-\frac{1}{2}x$ ўзгарувчиларни алмаштиришни бажарамиз. Эски ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларни янги ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалар билан ифодалаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=$$

$$\frac{9}{4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}+$$

$$\cdot + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Берилган дифференциал тенгламага иккинчи тартибли ҳосилалар учун топилган ифодаларни қўямиз:

$$\left(9\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) + \left(3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \right.$$

$$\left. + 3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) + \left(-12\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + \left(-3\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Соддалаштиришдан кейин берилган тенглама ушбу

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \text{ ёки } \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$$

каноник кўринишга (гиперболик тур) келтирилади.

13.1.3. Гиперболик турдаги ва параболик турдаги тенгламалар кўпинча вақт давомида содир бўлувчи жараёнларни ўрганишда қўлланилади. Шу сабабли бу ҳолларда изланаётган u функция t вақтга ва x координатага боғлиқ бўлади, яъни $u = u(x, t)$.

Қўйилган масалани тўлиқ ҳал этиш учун бу турдаги тенгламалар билан бирга *чегаравий* ва *бошланғич шартлар* ҳам берилган бўлиши шарт.

Бошланғич шартлар $t = 0$ да изланаётган u функция ва унинг ҳосиласи қийматининг берилишидан (гиперболик турдаги тенгламалар учун) ёки функция қийматининггина берилишидан (параболик турдаги тенгламалар учун) иборатдир.

Чегаравий шартларда $u(x, t)$ номаълум функциянинг ўзгарувчи x ни ўзгариш оралиғининг охирларидаги қийматлари берилади.

Агар қаралаётган жараён учун ўзгарувчи x нинг ўзгариш оралиғи чексиз деб қаралса, у ҳолда масала фақат бошланғич шартлардагина ечилиб, $u(x, t)$ функция учун чегаравий шартлар қўйилмайди. Масалада фақат бошланғич шартлар берилса, бундай масала *Коши масаласи* дейилади.

Агар масала чекли оралиқ учун қўйилса, у ҳолда бошланғич шартлар ҳам, чегаравий шартлар ҳам берилиши керак. Бу ҳолда *аралаш масалага* эга бўламиз.

Эллиптик турдаги тенгламалар одатда стационар жараёнларга тегишли масалалар қаралаётганда қўлланилади. Шунинг учун t вақт бу тенгламаларда қатнашмайди ва изланаётган ечим фақат координаталарга боғлиқ бўлиб, масала чегаравий шартлардагина ечилади. Шартларнинг берилишига кўра Дирихле масаласи, Нейман масаласи ёки аралаш масалалар қўйилиши мумкин.

13.1.4. Торнинг кўндаланг тебранишлари ҳақидаги масалани кўриб чиқайлик. Эркин эгила оладиган ингичка ип *тор* деб аталади. Торнинг кичик кўндаланг тебранишлари торнинг тебраниш тенгламаси (тўлқин тенгламаси)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ни қаноатлантирувчи $u = u(x, t)$ функция билан характерланади, бу тенгламада x тор нуқтаси координатаси, t — вақт, a^2 — тор тайёрланган материалнинг физик хоссаларини акс эттирувчи доимий.

Гиперболик турдаги тенгламага эгамиз. $t = 0$ пайтда торнинг ҳолати $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ва тор нуқталарининг тезлиги $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ маълум бўлсин (Коши масаласи).

Торнинг тебранишлари тенгламасининг ечими ушбу кўринишга эга:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x)\,dx.$$

Бу формула *тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласининг Даламбер ечими* деб аталади.

2-мисол. $u\Big|_{t=0} = x^2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ бўлса,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенглама ечимини топинг.

Ечиш. $a = 1$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 0$, шунга кўра $u = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2}$, бунда $\varphi(x) = x^2$. Шундай қилиб, $u = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2}$ ёки $u = x^2 + t^2$.

1- дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ж: а) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}$; б) $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial z}{\partial\xi}$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$

2. Агар $u\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x$ экани маълум бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама ечимини топинг. Ж: $u=xt$.

3. Агар $u\Big|_{t=0}=\sin x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан аниқланувчи торнинг $t=\frac{\pi}{2a}$ пайтдаги шаклини аниқланг.

Ж: $u=\sin x\cos at+t$; агар $t=\frac{\pi}{2a}$ бўлса, у ҳолда $u=\frac{\pi}{2a}$, яъни тор абсциссалар ўқига параллел.

1- мустақил иш

1. Тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

а) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Ж: а) $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0,\ \xi=\frac{y}{x};\ \eta=y$; б) $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\xi}=0,\ \xi=x+y,$ $\eta=3x+y$; в) $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),\quad \xi=y^2,\ \eta=x^2.$

2. Тенгламаларнинг ечимини топинг:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, бунда $u\Big|_{t=0}=x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, бунда $u\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x.$

Ж: а) $u=x(1-t)$;

б) $u=\frac{1}{a}\cos x\cdot\sin at.$

3. Агар $u\Big|_{t=0}=\sin x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан аниқланувчи торнинг $t=\pi$ даги шаклини топинг.

Ж: $u=-\sin x$.

2- §. Иссиқлик ўтказиш (тўлқин) тенгламаси учун аралаш масалани Фурье усули билан ечиш

13.2.1. Берилган бошланғич ва чегаравий шартлардан фойдаланиб, стерженда температура тақсимотини аниқловчи $u(x,t)$ функциясини топиш талаб қилинсин.

Масала $u(x,t)\Big|_{t=0}=f(x)$ бошланғич ва $u(x,t)\Big|_{x=0}=u(x,t)\Big|_{x=l}=0$ ёки

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,$$

чегаравий шартларда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l$$

иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечишга келтирилади.

Хусусий ҳосилали тенгламаларни ечишнинг кенг тарқалган усулларидан бири ўзгарувчиларни ажратиш усули ёки Фурье усулидир. Бу усулга кўра хусусий ечим $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_n(x)\psi_n(t)$ кўринишда изланади. $u|_{x=0}=u|_{x=l}\equiv 0$ чегаравий шартлар билан қўйилган масала учун Фурье усулига мувофиқ ечим:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}}\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}$$

кўринишда бўлади, бунда

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}\equiv 0$ чегаравий шартлар билан қўйилган масала учун эса ечимни

$$u(x,t)\doteq\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}}\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+a_0$$

$$\left(a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)$$

кўринишда оламиз.

1- мисол.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (0<x<l,\ t>0)\text{ тенгламанинг}$$

$$u|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, \text{ агар } 0<x\leqslant\frac{l}{2} \text{ бўлса},\\ l-x, \text{ агар } \frac{l}{2}<x<l \text{ бўлса}\end{cases}$$

бошланғич шартни ва $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимни ушбу кўринишда излаймиз:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l},$$

бунда

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}dx+$$

$$+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\left\{\begin{matrix} s=x,\ ds=dx,\\ dt=\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ t=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}+\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}-\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}=$$

$$=\frac{4l}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Демак, изланаётган ечим ушбу кўринишга эга:

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}$$

ёки

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{l^2}}\cdot\sin\frac{\pi l(2k+1)x}{l}.$$

13.2.2. Бир томондан чегараланган (ярим чексиз) стержен учун

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламанинг $u|_{t=0}=f(x)$ бошланғич шартни ва $u|_{x=0}=\varphi(t)$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими ушбу формула билан аниқланади:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}f(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}}\right]d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t\varphi(\eta)\cdot e^{\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}(t-\eta)^{-\frac{3}{2}}d\eta.$$

2- мисол. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u|_{t=0}=f(x)=u_0$ бошланғич шартни ва $u|_{x=0}=0$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган шартларни қаноатлантирувчи ечим юқоридаги формулага кўра ушбу кўринишга эга:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}u_0\left[e^{-\frac{(\xi-x^2)}{4t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}\right]d\xi$$

ёки

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}\right]d\xi.$$

$\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}=\mu,\ d\xi=-2\sqrt{t}\,d\mu$ деб белгилаб, биринчи интегрални алмаштирамиз, яъни

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\mu^2}d\mu;\frac{u_0}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right],$$

бунда $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\ \frac{x+\xi}{2\sqrt{t}}=\mu,\quad d\xi=2\sqrt{t}\,d\mu$ деб белгилаб,

$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}.\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\mu^2}d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, ечим ушбу кўринишни олади:

$$u(x,t)=u_0\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

2- дарсхона топшириғи

1. Узунлиги l га тенг, ташқи муҳит таъсиридан муҳофазаланган ва $u|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$ бошланғич температурага эга бўлган бир жинсли стержен берилган. Стерженнинг охирлари нолга тенг температурада тутиб турилади. Иссиқлик ўтказиш тенгламаси ечимини топинг (стерженнинг $t>0$ вақтдаги температурасини аниқланг).

$$Ж:\ u\ (x,\ t)=\frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{\frac{-(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2. Агар ярим чексиз стерженнинг $x=0$ чап охири иссиқликдан муҳофазаланган, температуранинг бошланғич тақсимоти

$$u|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x<0,\\ u_0, \text{ агар } 0<x<l,\\ 0, \text{ агар } x>l\end{cases}$$

бўлса, иссиқлик ўтказиш тенгламасининг ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

3. Агар стерженнинг $u|_{t=0}=f(x)=\frac{2\pi}{l}x-\sin\frac{2\pi}{l}x$ бошланғич температураси берилган ва охирлари иссиқликдан муҳофазаланган, яъни $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$ бўлса, узунлиги l га тенг ва сирти ҳам иссиқликдан муҳофазаланган стерженда температура тақсимотини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ t)=\pi+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{32}{\pi(2k+1)^2(2k-1)\ (2k+3)}\times$$

$$\times e^{-\left(\frac{a(2k+1)\pi}{l}\right)^2t}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

2- мустақил иш

1. $u|_{t=0}=x(l-x),\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$ шартларда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечинг.

$$Ж:\ u(x,\ t)=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{a(2n+1)\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}.$$

2. Агар узунлиги l га тенг сирти иссиқликдан муҳофазаланган стерженнинг бошланғич температураси

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2u_0}{l}, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2},\\ \frac{2u_0}{l}\ (l-x), \text{ агар } \frac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$$

бўлиб, стерженнинг учлари ҳам иссиқликдан муҳофазаланган бўлса, шу стерженда иссиқлик тақсимланишини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ t)=\frac{u_0}{2}-\frac{4u_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2(2n+1)}{l}\pi x}{(2n+1)^2}e^{-\frac{2(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}.$$

3- §. Дирихле масаласини доирада Фурье усули билан ечиш

Дирихле масаласини қараймиз: доира ичида Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва доира чегарасида берилган функцияга тенг бўлган гармоник функцияни топинг.

Масалани ечиш учун қутб координаталаридан фойдаланамиз. Маркази қутбда бўлиб, радиуси R га тенг доира берилган бўлсин. $r\leqslant R$ доирада гармоник, $r=R$ айланада $u|_{r=R}=f(\varphi)$ шартни қаноатлантирувчи ($f(\varphi)$ — берилган функция) ва бу айланада узлуксиз бўлган $u=u(r,\ \varphi)$ функцияни излаймиз. Изланаётган функция доирада қутб координаталарида ёзилган ушбу Лаплас тенгламасини қаноатлантириши керак.

$$r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Фурье усулидан фойдаланиб доира учун Дирихле масаласи ечимини топамиз:

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau.$$

Бу интеграл *Пуассон интеграли* деб аталади.

Мисол. Бир жинсли юпқа доиравий пластинкада температуранинг стационар тақсимланишини топинг. Пластинка радиуси R га тенг, унинг юқори қисми 1° да, пастки қисми 0° да тутиб турилади.

Ечиш. Масала шартига кўра:

$$f(\tau)=\begin{cases}0, \text{ агар } -\pi<\tau<0 \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } 0<\tau<\pi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Температура тақсимоти

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\varphi)+r^2}\,d\tau$$

интеграл билан аниқланади.

а) юқори ярим доира ($0<\varphi<\pi$) нуқталари учун $\operatorname{tg}\frac{\tau-\varphi}{2}=t$ алмаштиришни киритамиз, бундан $\cos(r-\varphi)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,d\tau=;1\frac{2dt}{1+t^2}$. Янги интеграллаш ўзгарувчиси t $\left(-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$дан $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ гача ўзгаради. Шундай қилиб,

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2t^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R+r}{R-r}\,t\right)\Big|_{-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(1\frac{R+r}{R-r}\right)^2}=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}$$

ёки

$\operatorname{tg}u\pi=-\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}, 0<\varphi<\pi$. Бу тенгликни ўнг томони манфий, демак $0<\varphi<\pi$ да u функция $\frac{1}{2}<u<1$ тенгсизликларни қаноатлантиради. Бу ҳол учун $0<\varphi<\pi$ да ушбу ечимга эга бўламиз:

$$\operatorname{tg}(\pi-u\pi)=\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}\ \text{ёки}\ u=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}.$$

б) Пастки ярим доирада жойлашган нуқталар учун ($\pi<\varphi<2\pi$) $\operatorname{ctg}\frac{\tau-\varphi}{2}=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз, бундан $\cos(\tau-\varphi)=$ $=\frac{t^2-1}{t^2+1}, d\tau=-\frac{2dt}{1+t^2}$, янги интеграллаш ўзгарувчиси t $\left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$ дан $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ гача ўзгаради. У ҳолда φ нинг бу қийматлари учун ушбуга эгамиз:

$$u(r, \varphi)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r)^2t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R-r}{R+r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R-r}{R+r}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

ёки

$$u=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}, \pi<\varphi<2\pi.$$

Энди ўнг томон мусбат ($\sin\varphi<0$), шунинг учун $0<u<\frac{1}{2}$.

3- дарсхона топшириғи

Қутб координаталарини киритиб, $1\leqslant r\leqslant 2$ ҳалқанинг ички қисми учун Лаплас тенгламасининг

$$u|_{r=1}=0,\ u|_{r=2}=y$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(r, \varphi)=\frac{8}{3}\operatorname{sh}(\ln r)\cdot\sin\varphi$.

3- мустақил иш

$\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг $1<r<2$ ҳалқада $u|_{r=1}=\sin 3\varphi$, $u|_{r=2}=1+\cos 2\varphi$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(r, \varphi)=\frac{\ln r}{\ln 2}\left(\frac{4}{15}r^2-\frac{4}{15}\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi+\left(\frac{64}{63}r^{-3}-\frac{1}{63}r^3\right)\sin 3\varphi$.

14-боб

ЭҲТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

1-§. Эҳтимолликнинг классик ва статистик таърифлари. Геометрик эҳтимоллик

14.1.1. Эҳтимолликлар назариясида *ҳодиса* деб, синов натижасида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай фактга айтилади.

Синов натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса *муқаррар* (U) *ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида ҳеч қачон рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган* (V) *ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* дейилади.

Синовнинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади.

Агар битта синовнинг ўзида A ва B тасодифий ҳодисалар бир вақтда рўй бермасалар, улар *биргаликдамас (биргаликда бўлмаган) ҳодисалар* дейилади. Агар синов натижасида бир нечта ҳодисалардан фақат биттаси рўй берса, улар *ҳодисаларнинг тўла гуруҳини* ташкил этади дейилади.

Агар A ва B ҳодисаларнинг ҳеч бирини иккинчисига нисбатан рўй бериши мумкин дейишга асос бўлмаса, бу ҳодисалар *тенг имкониятли* дейилади.

A ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган $\bar{A}$ ҳодиса A ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* дейилади.

Агар A ва B ҳодисалардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига таъсир этмаса, бу ҳодисалар *ўзаро эркли (боғлиқ бўлмаган) ҳодисалар* дейилади. Акс ҳолда A ва B ҳодисалар *боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

14.1.2. Синаш натижасида тенг имкониятли n та элементар ҳодисалар рўй бериши мумкин бўлсин. Бирор A ҳодисанинг рўй бериши учун элементар ҳодисалардан m таси қулайлик туғдирсин. У ҳолда A ҳодисанинг классик эҳтимоллиги

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

формула билан аниқланади.

Эҳтимолликнинг хоссалари:

1. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги 1 га тенг, яъни

$$P(U)=1.$$

2. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги 0 га тенг, яъни

$$P(V)=0.$$

3. Тасодифий A ҳодисанинг эҳтимоллиги учун

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

ўринли.

14.1.3. Эҳтимолликларни бевосита ҳисоблашда кўпинча комбинаторика формулаларидан фойдаланилади.

Ўрин алмаштиришлар деб n та турли элементларнинг бир-биридан факат жойлашиши билан фарқ қилувчи комбинацияларига айтилади. n та турли элементларнинг ўрин алмаштиришлари сони $P_n=n!$ га тенг $(n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)$.

Ўринлаштиришлар n та турли элементдан m тадан тузилган комбинациялар бўлиб, улар бир-биридан ё элементларнинг таркиби, ё уларнинг тартиби билан фарк қилади. Уларнинг сони

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{ёки} \quad A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

формулалар билан топилади.

Группалашлар — бир-биридан хеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ қилувчи n та элементдан m тадан тузилган комбинациялардир. Уларнинг сони

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ га тенг.}$$

14.1.4. Ҳодисанинг *нисбий частотаси* деб ҳодиса рўй берган синовлар сонининг ўтказилган барча синовлар сонига нисбатига айтилади:

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

бу ерда m — ҳодисанинг рўй беришлари сони, n — синовларнинг умумий сони.

Синовлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг *статистик эҳтимоллиги* сифатида нисбий частотани олиш мумкин:

$$W(A)\approx P(A)=\frac{m}{n}.$$

14.1.5. Геометрик эҳтимоллик. D_1 соҳа D соҳанинг қисми (бўлаги) бўлсин. Агар соҳанинг ўлчамини (узунлиги, юзи, ҳажми) mes оркали белгиласак, таваккалига ташланган нуктанинг D соҳага тушиш эҳтимоллиги

$$P(A)=\frac{\text{mes}D_1}{\text{mes}D} \text{ га тенг.}$$

1-мисол. Қутида 3 та ок, 7 та қора шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг ок шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A олинган шар оқ эканлиги ҳодисаси бўлсин. Мазкур синов 10 та тенг имкониятли элементар ҳодисалардан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси A ҳодисага қулайлик туғдирувчидир. Демак,

$$P(A)=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

2-мисол. Гуруҳда 12 талаба бўлиб, уларнинг 8 нафари аълочилар. Рўйхат бўйича таваккалига 9 талаба танлаб олинди. Танлаб олинганлар ичида 5 талаба аълочи талаба бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Синовнинг барча мумкин бўлган тенг имкониятли элементар ҳодисалари сони C_{12}^{9} га тенг. Буларнинг ичидан $C_8^5\cdot C_4^4$ таси танлаб олинган талабалар ичидан 5 таси аълочи талабалар ҳодисаси (A) учун қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A)=\frac{C_8^5\cdot C_4^4}{C_{12}^{9}}=\frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1}{\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{14}{55}.$$

3-мисол. Қиркма алифбонинг 10 та ҳарфидан «математика» сўзи тузилган. Бу ҳарфлар тасодифан сочилиб кетган ва қайтадан ихтиёрий тартибда йиғилган. Яна «математика» сўзи ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A — «Математика» сўзи ҳосил бўлди ҳодисаси. Тенг имкониятли мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони $n=10!$ бўлиб, A ҳодисага қулайлик яратувчилари $m=2!\cdot 3!\cdot 2!$ бўлади. Бу ерда математика сўзида «м» 2 марта, «а» 3 марта, «т» 2 марта такрорланиши ҳисобга олинади.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2!\cdot 3!\cdot 2!}{10!}=\frac{1}{151200}.$$

4-мисол. Телефонда номер тераётган абонент охирги икки рақамни эсдан чиқариб қўйди ва фақат бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб қолган ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A — иккита керакли рақам терилганлик ҳодисаси бўлсин. Ҳаммаси бўлиб, ўнта рақамдан иккитадан нечта ўринлаштиришлар тузиш мумкин бўлса шунча, яъни $A_{10}^{2}=10\cdot 9=90$ та турли рақамларни териш мумкин. Шунинг учун классик эҳтимолликка кўра

$$P(A)=\frac{1}{A_{10}^{2}}=\frac{1}{90}.$$

5-мисол. Француз табиатшуноси Бюффон (XVIII аср) тангани 4040 марта ташлаган ва бунда 2048 марта гербли томон тушган. Бу синовлар мажмуасида гербли томон тушиши частотасини топинг.

Ечиш.

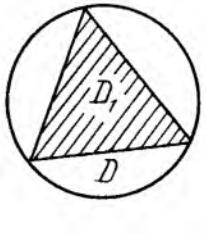
$$W(A)=\frac{2048}{4040}\approx 0{,}50693.$$

6-мисол. R радиусли доирага нуқта таваккалига ташланган. Ташланган нуқтанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчак ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

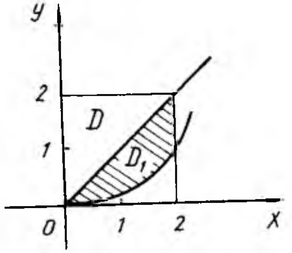
Ечиш. $S(D_1)$ — учбурчакнинг юзи, $S(D)$ — доиранинг юзи бўлсин (63-шакл). A — нуқтанинг учбурчакка тушиши ҳодисаси. У ҳолда

$$P(A)=\frac{S(D_1)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0{,}4137.$$

$$P(A)\approx 0{,}4137.$$



63-шакл



64-шакл

7-мисол. [0, 2] кесмадан таваккалига иккита x ва y сонлари танланган. Бу сонлар $x^2\leqslant 4y\leqslant 4x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $(x,\ u)$ нуқтанинг координаталари

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0\leqslant y\leqslant 2 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантиради. Бу — $(x,\ y)$ нуқта томони 2 га тенг квадрат нуқталари тўпламидан таваккалига танланишини билдиради.

Бизни қизиқтираётган A ҳодиса танланадиган $(x,\ y)$ нуқта штрихланган фигурага тегишли бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда рўй беради (64-шакл). Бу фигура координаталари $x^2\leqslant 4y\leqslant 4x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталарнинг тўплами сифатида ҳосил қилинган. Демак, изланаётган эҳтимоллик штрихланган фигура юзининг квадрат юзига нисбатига тенг, яъни

$$P(A)=\frac{\int\limits_0^2\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)dx}{4}=\frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2}{4}=\frac{\frac{4}{2}-\frac{8}{12}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}.$$

Демак, $P(A)=\frac{1}{3}$.

1- дарсхона топшириғи

1. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда, унинг 5 га каррали бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ж: 0,2.

2. Карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлари ёзилган. Таваккалига тўртта карточка олиниб, уларни қатор қилиб терилганда жуфт сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $\frac{4}{9}$.

3. Қутида 12 та оқ ва 8 та қизил шар бор. Таваккалига

а) битта шар олинганда унинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг;

б) битта шар олинганда унинг қизил бўлиши эҳтимоллигини топинг;

в) 2 та шар олинганда уларнинг турли рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг;

г) 8 та шар олинганда уларнинг 3 таси қизил рангли бўлиши эҳтимоллигини топинг;

д) 8 та шар олинганда қизил рангли шарлар 3 тадан кўп бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг;

Ж: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{48}{95}$; г) $\approx 0{,}35$; д) $\approx 0{,}6117$.

4. Иккита ўйин соққаси баравар ташланганда қуйидаги ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимолликларнни топинг:

A — тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг.

B — тушган очколар кўпайтмаси 8 га тенг.

C — тушган очколар йиғиндиси уларнинг кўпайтмасидан катта.

Ж: $P(A)=\frac{5}{36}$; $P(B)=\frac{1}{18}$; $P(C)=\frac{11}{36}$.

5. Танга 2 марта ташланганда ақалли бир марта гербли томон тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A)=\frac{3}{4}$.

6. Қутичада 6 та бир хил (номерланган) кубик бор. Таваккалига битта-битадан барча кубиклар олинганда кубикларнинг номерлари ўсиб бориш тартибида чиқиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A)=\frac{1}{720}$.

7. Қутида 5 та бир хил буюм бўлиб, уларнинг 3 таси бўялган. Таваккалига 2 та буюм олинганда улар орасида:

а) битта бўялгани бўлиши;

б) иккита бўлгани бўлиши;

в) ҳеч бўлмаганда битта бўялгани бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

8. Учлари (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) нуқталарда бўлган квадратга $(x,\ y)$ нуқта ташланади. Бу нуқтанинг координаталари $y<2x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A)=0{,}75$.

9. Таваккалига ҳар бири бирдан катта бўлмаган иккита мусбат сон олинганда, уларнинг йиғиндиси $x+y$ бирдан катта бўлмаслиги, кўпайтмаси xy эса 0,09 дан кичик бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A)\approx 0{,}2$.

10. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак ўткир бурчакли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $\frac{1}{4}$.

11. Техник назорат бўлими таваккалига олинган 100 та китобдан 5 таси яроқсиз эканини аниқлади. Яроқсиз китобларнинг нисбий частотасини аниқланг.

Ж: $W(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$.

1- мустақил иш

1. Домино тошларининг тўлиқ мажмуасидан (28 та тош) таваккалига биттаси олинади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топинг.

а) олинган тошда 6 очко бўлиши;

б) олинган тошда 5 очко ёки 4 очко бўлиши;

в) чиққан очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлиши.

Ж: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{13}{28}$; в) $\frac{3}{28}$.

2. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда унинг 20 нинг бўлувчиси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P=0{,}3$.

3. Рақамлари ҳар хил икки хонали сон ўйланган. Ўйланган сон:

а) тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши;

б) рақамлари ҳар хил бўлган тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши эҳтимолллигини топинг.

Ж: а) $\frac{1}{90}$; б) $\frac{1}{81}$.

4. Алоҳида карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлар ёзилган. Карточкалар яхшилаб аралаштирилгач, таваккалига тўрттаси олинади ва кетма-кет қатор қилиб терилади. Ҳосил бўлган сон 1234 бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: 0,00033.

5. Қутида 100 та лампочка бўлиб, уларнинг 10 таси яроқсиз. Таваккалига 4 та лампочка олинади. Олинган лампочкалар ичида:

а) яроқсизлари йўқ бўлиши;

б) яроқлилари йўқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P\approx 0{,}65$; б) $P\approx 0{,}00005$.

6. R радиусли доирага нуқта ташланади. Бу нуқта доирага ички чизилган квадрат ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P=\frac{2}{\pi}$.

7. Таваккалига ҳар бири 2 дан катта бўлмаган иккита x ва y мусбат сон олинганда бу сонларнинг кўпайтмаси xy бирдан катта бўлмаслиги, y/x бўлинма эса иккидан катта бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P \approx 0{,}38$.

8. Танкка қарши миналар тўғри чизиқ бўйлаб ҳар 15 м га жойлаштирилган. Эни 3 м бўлган танк бу тўғри чизиққа перпендикуляр йўналишда келмоқда. Танкнинг минага дуч келиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P = \frac{1}{5}$.

9. Буюм партиясини синашда яроқли буюмлар нисбий частотаси 0,9 га тенг бўлди. Агар ҳаммаси бўлиб, 200 та буюм текширилган бўлса, яроқли буюмлар сонини топинг.

Ж: 180 та.

10. Барча ёқлари бўялган куб 1000 та тенг «кубча»ларга арраланган. Таваккалига олинган «кубча»нинг иккита ёғи бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P = 0{,}096$.

11. Яшикда 31 та биринчи нав ва 6 та иккинчи нав деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинади: а) олинган учала деталь биринчи нав бўлиши; б) олинган деталларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси биричи нав бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) $P \approx 0{,}58$; б) $p \approx 0{,}9974$.

12. Таваккалига олинган телефон номери бешта рақамдан иборат. Унда:

а) ҳамма рақамлар ҳар хил бўлиши;

б) ҳамма рақамлар тоқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,3024; б) 0,03125.

13. Шарга куб ички чизилган. Нуқта таваккалига шарга ташланади. Нуқтанинг кубга тушиши эҳтимоллигини топииг.

Ж: $P = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}368$.

2- §. Ҳодисалар алгебраси. Эҳтимолликларии қўшиш ва кўиайтириш теоремалари. Шартли эҳтимоллик

14.2.1. Иккита A ва B ҳодисанинг *йиғиндиси* деб A ҳодисанинг, ёки B ҳодисанинг, ёки бу иккала ҳодисанинг рўй беришидан иборат $C = A + B$ ҳодисага айтилади.

Биргаликда бўлмаган иккита A ва B ҳодиса йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларинииг йиғиндисига тенг:

$$P\,(A+B) = P\,(A) + P(B).$$

Бир нечта жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Тўла группа ташкил этувчи $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг, яъни

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг, яъни

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

14.2.2. Иккита A ва B ҳодисанинг *кўпайтмаси* деб, бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат $C = A \cdot B$ ҳодисага айтилади.

Иккита эркли ҳодисанинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Биргаликда эркли бўлган бир нечта ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

B ҳодисанинг A ҳодиса рўй берди деган шартда ҳисобланган эҳтимоллиги *шартли эҳтимоллик* дейилади. Шартли эҳтимоллик қуйидагича белгиланади:

$$P_A(B) \text{ ёки } P(B/A).$$

Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ ёки } P(AB) = P_B \cdot P_B(A).$$

Бир нечта боғлиқ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллиги қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n).$$

14.2.3. A ва B тасодифий ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги учун қуйидаги формула ўринли:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

14.2.4. Тўла эҳтимоллик формуласи. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ лар ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этиб, A ҳодиса уларнинг бири билан рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A).$$

14.2.5. Бейес формуласи. Агар A ҳодиса рўй бергани маълум бўлса, у ҳолда $P(B_k)$, $k=\overline{1,n}$ эҳтимолликларни қайта баҳолаш мумкин, яъни $P_A(B_k)$ шартли эҳтимолликларни ушбу Бейес формуласи ёрдамида топиш мумкин:

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

1- мисол. Цехда бир нечта станок ишлайди. Смена давомида битта станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг, иккита станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,13 га тенг. Смена давомида иккитадан ортиқ станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги эса 0,07 га тенг. Смена давомида станокларни созлашни талаб этилиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ҳодисаларни қараймиз: A — смена давомида битта станок созлашни талаб этади ҳодисаси;

B — смена давомида иккита станок созлашни талаб этади ҳодисаси;

C — смена давомида 2 тадан ортиқ стаиок созлашни талаб этади ҳодисаси.

A, B, C ҳодисалар ўзаро биргаликда эмас. Бизни қуйидаги ҳодиса қизиқтиради: $(A+B+C)$ — смена давомида созлаш зарур бўладиган станоклар:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}13+0{,}07=0{,}4.$$

2- мисол. Иккита овчи бир пайтда бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда қуёнга қарата ўқ узишди. Овчилардан ҳеч бўлмаганда бири ўқни нишонга текказса, қуён отиб олинган бўлади. Биринчи овчининг нишонга уриш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисиники 0,75 га тенг бўлса, қуённи отиб олиш эҳтимоллигини топииг.

Ечиш. Қуйидаги ҳодисаларни қараймиз:

A — биринчи овчи нишонга текказиши;

B — иккинчи овчи нишонга текказиши.

A ва B эркли ҳодисалар. Бизни $(A+B)$ ҳодиса қизиқтиради.

$(A+B)$ — ҳеч бўлмаганда битта овчининг нишонга текказиши. У ҳолда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0{,}8+0{,}75-0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}95,$$

$$P(A+B)=0{,}95.$$

3- мисол. Командада 12 спортчи бўлиб, уларнинг 5 таси спорт устаси. Спортчилар ичидан қуръа ташлаш орқали уч спортчи танланади. Танланган спортчиларнинг ҳаммаси спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 — биринчи спортчи — спорт устаси;

A_2 — иккинчи спортчи — спорт устаси;

A_3 — учинчи спортчи — спорт устаси;

$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ — учала снортчи — спорт устаси.

A_1, A_2, A_3, ҳодисалар — боғлиқ ҳодисалар. Демак,

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

4- мисол. Талаба ўзига керакли формулани 3 та маълумотномадан қидиради. Формула биринчи, иккинчи, учинчи маълумотномада бўлиши эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Формула:

а) фақат битта маълумотномада бўлиши;

б) фақат иккита маълумотномада бўлиши;

в) учала маълумотномада бўлиши;

г) ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ҳодисаларни қараймиз:

A_1 — формула биринчи маълумотномада бор,

A_2 — формула иккинчи маълумотномада бор,

A_3 — формула учинчи маълумотномада бор.

а) $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ — формула фақат битта маълумотномада бор.

$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1A_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ ҳодисалар биргаликда эмас ва A_1, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$; $\bar{A}_1$, A_2, $\bar{A}_3$; $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, A_3ҳодисалар боғлиқ эмас. Демак,

$P(A)=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=$
$=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}188.$

б) $A=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$ — формула фақат иккита маълумотномада бор. Демак,

$P(A)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}452.$

в) $A=A_1A_2A_3$ — формула учала маълумотномада бор.

$P(A)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}336.$

г) $A=A_1+A_2+A_3$ — формула ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бор. Мазкур ҳолда A ҳодисага қарама-қарши ҳодисани қараш қулай.

$\bar{A}$ — формула ҳеч бир маълумотномада йўқ.

$\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, у ҳолда $P(A)=1-P(\bar{A})$.

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=$$
$$=1-0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=1-0{,}024=0{,}976.$$

Шундай қилиб, а) $P(A)=0{,}188$; б) $P(A)=0{,}452$; в) $P(A)=0{,}336$; г) $P(A)=0{,}976$.

5- мисол. Биринчи қутида 2 та оқ, 6 та қора, иккинчи қутида эса 4 та оқ, 2 та қора шар бор. Биринчи қутидан таваккалига 2 та шар олиб, иккиичи қутига солинди, шундан кейин иккинчи қутидан таваккалига битта шар олинди.

а) Олинган шар оқ бўлиши эҳтимоллилиги қандай?

б) Иккинчи қутидан олинган шар оқ бўлиб чиқди. Биринчи қутидан олиб иккинчи қутига солинган 2 та шар оқ бўлиши эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. а) Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

A — иккинчи қутидан олинган шар оқ,

B_1 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та оқ шар солинган,

B_2 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та турли рангдаги шар солинган,

B_3 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та қора шар солинган.

B_1, B_2, B_3 — ҳодисалар тўла гуруҳ ташкил этади. У ҳолда тўла эҳтимоллнк формуласига кўра

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A).$$

B_k, $k=\overline{1,3}$ гипотезаларнинг эҳтимолликларини ва $P_{B_k}(A)$ шартли эҳтимолликларни класснк схема бўйича ҳнсоблаймиз:

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28};\ P(B_2)=\frac{C_2^1\cdot C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}.$$

$$P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};\ P_{B_1}(A)=\frac{3}{4};\ P_{B_2}(A)=\frac{5}{8};$$

$$P_{B_3}(A)=\frac{1}{2}.$$

Топилган натижаларни тўла эҳтимоллик формуласига қўямиз:

$$P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}.$$

б) $P_A(B_1)$ эҳтимолликни Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{21}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Курсант отиш бўйича «синов» топшириши учун 4 дан паст бўлмаган баҳо олиши керак. Агар курсант отганида «5» баҳони 0,3, «4» баҳони 0,6 эҳтимоллик билан олиши маълум бўлса, курсантнинг «синов» топшира олиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $p=0{,}9$.

2. Иккита мерган нишонга қарата биттадан ўқ узишда. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчиси учун 0,7 га тенглиги маълум бўлса, қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

а) мерганларнинг фақат бирнинг нишонга текказиши;

б) мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши;

в) иккала мерган нишонга текказиши;

г) ҳеч бир мерганнинг нишонга текказа олмаслиги;

д) мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказа олмагани.

Ж: а) 0,46; б) 0,6; в) 0,42; г) 0,12; д) 0,58.

3. Йиғувчига зарур деталь биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи яшикда эканлиги эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Зарур деталь:

а) кўпи билан 3 та яшикда бўлиши;

б) ками билан 2 та яшикда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6976; б) 0,9572.

4. Гуруҳда 10 талаба бўлиб, уларнинг 7 нафари аълочилар. Тўрт талаба деканатга чақиртирилди. Уларнинг барчаси аълочи бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{1}{6}$.

5. Учта завод соат ишлаб чиқаради ва магазинга жўнатади. Биринчи завод бутун маҳсулотнинг 40% ини, иккинчи завод 45% ини, учинчи завод эса 15% ини тайёрлайди. Биринчи завод чиқарган соатларнинг 80% и, иккинчи завод соатларининг 70% и, учинчи завод соатларининг 90% и илгарилаб кетади. Сотиб олинган соатнинг илгарилаб кетиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,77.

6. Самолётга қарата учта ўқ узилган. Биринчи отишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, иккинчисида 0,6 га, учинчисида 0,8 га тенг. Битта ўқ текканда самолётнинг уриб туширилиши эҳтимоллиги 0,3 га, иккита ўқ текканда 0,6 га тенг. Учта ўқ тегса, самолёт уриб туширилади. Самолётнинг уриб туширилиш эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,594.

7. Спартакиадада биринчи гуруҳдан 4 талаба, иккинчи гуруҳдан 6, учинчи гуруҳдан 5 талаба қатнашади. Инстнтут терма жамоасига биринчи гуруҳдаги талаба 0,9 эҳтимоллик билан, иккинчи гуруҳ талабаси 0,7 ва учинчи гуруҳ талабаси 0,8 эҳтимоллик билан қабул қилиниши мумкин. Таваккалига танланган талаба терма жамоага қабул қилинди. Бу талабанинг қайси гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттароқ? Ж: Талабанинг иккинчи гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттароқ.

8. Цехда тайёрланадиган деталлар иккита назоратчи томонидан текширилади. Деталнинг назорат учун биринчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчи назоратчига тушиши 0,4 га тенг. Яроқли деталнинг биринчи назоратчи томонидан яроқсиз деб топилиши эҳтимоллиги 0,06 га, иккинчи назоратчи учун эса 0,02 га тенг. Яроқсиз деб топилган деталлар текширилганда улар ичидан яроқлилиги чиқиб қолди. Бу детални биринчи назоратчи текширганлиги эҳтимоллигини топинг: Ж: $\frac{9}{11}$.

2- мустақил иш

1. Битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун P га, иккинчи мерган учун 0,7 га тенг. Мерганлар бир вақтда ўқ узишганда роса битта ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,38 га тенглиги маълум бўлса, P ни топинг. Ж: 0,8.

2. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 очко уриш эҳтимоллиги 0,05 га, 9 очко уриш эҳтимоллиги 0,2 га, 8 очко уриш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Битта ўқ узилди. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топинг:

A — 8 дан кам бўлмаган очко урилган;

B — 8 дан кўп очко урилган.

Ж: $P(A)=0{,}85$; $P(B)=0{,}25$.

3. Устахонада учта станок ишлаяпти. Смена давомида биринчи стаиокнинг созлашии талаб этиш эҳтимоллиги 0,15 га, иккинчи станок учун 0,1 га, учинчи станок учун эса 0,12 га тенг. Станоклар бараварига (бир пайтда) созлашни талаб этмайди деб ҳисоблаб, смена давомида ҳеч бўлмагаида битта станок созлашни талаб этиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\approx$ 0,3268.

4. Яшикда 15 та деталь бўлиб, уларнинг 10 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олади. Олинган деталларнинг барчаси бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $P \approx 0{,}264$.

5. Бирор физикавий катталикни бир марта ўлчашда берилган аниқликдан катта бўлган хатоликка йўл қўйилиши эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Учта боғлиқ бўлмаган ўлчаш ўтказилди. Бу ўлчашларнинг фақат биттасида йўл қўйилган хато берилган аниқликдан катта бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,392.

6. Талаба 25 та имтиҳон саволларидан 20 тасига тайёрланишга улгурди. Талаба таваккалига олинган учта саволнинг камида иккитасиии билиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{209}{345}$.

7. Йиғиш цехига учта автоматдан деталлар келиб тушади. Биринчи автомат 0,3%, иккинчиси 0,2%, учинчи 0,4% яроқсиз деталь ишлаб чиқариши маълум. Агар биринчи автоматдан 1000 та, иккинчисидан 2000 та, учинчисидан 2500 та деталь келиб тушгаии маълум бўлса, йиғиш цехига яроқсиз деталь келиб тушганлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,003091.

8. Бензин қуйиш бекати ёнидан енгил ва юк машиналари ўтиб туради. Уларнинг 60% ини юк машиналари ташкил этади. Ўтиб кетаётган машинанинг бензин олиш учун тўхташ эҳтимоллиги юк машинаси учун 0,1 га, енгил машина учун эса 0,2 га тенг. Бензин қуйиш бекатига бензин қуйиб олиш учун машина келиб тўхтади. Бу юк машинаси эканлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{3}{7}$.

3-§. Боғлиқмас синовлар кетма-кетлиги. Бернуллн формуласи. Муавр — Лаплас ва Пуассон теоремалари

14.3.1. Агар синовлар натижаларининг ҳар қандай комбинацияси боғлиқмас ҳодисалар тўпламидан иборат бўлса, бу синовлар *боғлиқмас* дейилади.

Чекли сондаги n та кетма-кет боғлиқмас синовлар ўтказилган бўлсин. Бу синовларнинг ҳар бири натижасида маълум бир ҳодиса

рўй бериши мумкин бўлса, синовларнинг бундай кетма-кетлилиги *Бернулли схемаси* дейилади.

Бернулли формуласи. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоллиги p га тенг n та боғлиқмас сиовларда бу ҳодисанинг роса m марта рўй бериши эҳтимоллиги

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ бу ерда } q=1-p,$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

га тенг.

$P_n\ (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) - n$ та боғлиқмас синовларда A ҳодисанинг камида m_1 ва кўпи билан m_2 мартагача рўй бериш эҳтимоллиги бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринлидир:

$$P_n\ (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

n та синовда ҳодисанинг камида бир марта рўй беришининг эҳтимоллиги

$$P_n\ (1 \leqslant m \leqslant n) = 1 - q^n,\ q = 1-p$$

га тенг.

Агар ҳодисанинг синовлар натижасида m_0 марта рўй бериши эҳтимоллиги қолгаи синовларнинг мумкин бўлгаи натижалари эҳтимоллигидан катта бўлса, m_0 сон энг эҳтимолли дейилади. У қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + q:$$

а) агар $np-q$ — каср сон бўлса, битта энг эҳтимолли m_0 сон мавжуд;

б) агар $np-q$ — бутун сон бўлса, иккита энг эҳтимолли сон m_0 ва m_0+1 мавжуд;

в) агар np — бутун сон бўлса, энг эҳтимолли сон $m_0 = np$ бўлади.

14.3.2. Лапласнинг локал теоремаси (катта n ларда). Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовларда ҳодиса роса m марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига теиг:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x),$$

бу ерда

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$\varphi(x)$ функциянинг қийматлари жадвали иловада келтирилган, бунда $\varphi(x)$ — жуфт функция эканига эътибор беринг.

14.3.3. Лапласнинг интеграл теоремаси (катта n ларда). Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас сииовларда ҳодисанинг камида m_1 марта ва кўпи билан m_2 марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n\ (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\ (x_2) - \Phi\ (x_1),$$

бу ерда

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ — Лаплас функцияси.

$\Phi(x)$ функцнянинг $x \in [0;\ 5]$ учун қийматлари жадвали иловада берилган. $x > 5$ учун $\Phi(x) = 0{,}5$ ва $\Phi(x)$ — тоқ функция экани эътиборга олинади.

Эслатма. Лапласнинг тақрибий формулаларидан $npq > 10$ бўлган ҳолда фойдаланилади. Агар $npq < 10$ бўлса, бу формулалар катта хатоликларга олиб келади.

14.3.4. Пуассон теоремаси. Катта n лар ва кичик p ларда қуйидаги тақрибий формула ўринли:

$$P_n\ (m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ \text{бу ерда}\ \lambda = np.$$

1- мисол. Бирор мерган учун битта ўқ узишда нишонга тегиши эҳтимоллиги 0,8 га тенг ва ўқ узиш тартибига (номерига) боғлиқ эмас. 5 марта ўқ узилганда нишонга роса 2 марта тегиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n = 5$, $p = 0{,}8$, $m = 2$, $q = 0{,}2$. Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512.$$

2- мисол. Танга 10 марта ташланганда гербли томон:

а) 4 тадан 6 мартагача тушиш эҳтимоллигини;

б) ҳеч бўлмаганда бир марта тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n = 10$, $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $p = q = 0{,}5$.

а) $P_{10}(4 \leqslant m \leqslant 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) =$

$C_{10}^4 \cdot (0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^6 + C_{10}^5 (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^5 + C_{10}^6 (0{,}5)^6 (0{,}5)^4 =$

$= (0{,}5)^{10} (C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6) = \frac{21}{32}$. Ж: $\frac{21}{32}$.

б) $P_{10}\ (1 \leqslant m \leqslant 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$.

3- мисол. A ҳодисанинг 900 та боғлиқмас синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоллиги $p = 0{,}8$ га тенг. A ҳодиса:

а) 750 марта, б) 710 дан 740 мартагача рўй бериш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $npq = 900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 144 > 10$ бўлгани учун а) бандида Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланамиз, б) бандда эса Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз.

а) $x = \frac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5$, $\varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$.

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}00146.$$

б) $x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83$, $x_2 = \frac{740 - 720}{12} \approx 1{,}67$.

$\Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) \approx -0{,}2967$.

$\Phi(1{,}67) \approx 0{,}4527$.

$P_{900}(710 \leqslant m \leqslant 740) \approx 0{,}4525 + 0{,}2967 = 0{,}7492$.

Ж: а) 0,00146, б) 0,0236, в) 0,7492.

4- мисол. Телефон станцияси 400 абонентга хизмат кўрсатади. Агар ҳар бир абонент учун унинг бир соат ичида станцияга қўнғироқ қилиш эҳтимоллиги 0,01 га тенг бўлса, қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

а) бир соат давомида 5 абонеит станцияга қўнғироқ қилади;

б) бир соат давомида 4 та дан кўп бўлмаган абонент қўйғироқ қилади;

в) бир соат давомида камида 3 абонент станцияга қўнғироқ қилади.

Ечиш. $p = 0{,}01$ жуда кичик, $n = 400$ эса катта бўлгани учун $\lambda = 400 \cdot 0{,}01 = 4$ да Пуассоннинг тақрибий формуласидан фойдаланамиз.

а) $P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}156293$.

б) $P_{400}(0 \leqslant m \leqslant 4) \approx 0{,}018316 + 0{,}073263 + 0{,}146525 + 0{,}195367 + 0{,}195367 = 0{,}628838$;

в) $P_{400}(3 \leqslant m \leqslant 400) = 1 - P_{400}(0 \leqslant m \leqslant 2) = 1 - 0{,}018316 - 0{,}073263 - 0{,}146525 = 0{,}761896$.

Ж: а) 0,156293; б) 0,628838; в) 0,761896.

5- мисол. Бирорта қурилманинг 15 та элементининг ҳар бири синаб кўрилади. Элементларнинг синовга бардош бериш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Қурилма элементларининг синовга бардош бера оладиган энг катта эҳтимоллиги сонини топинг.

Ечиш. $n = 15$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$.

Энг эҳтимолли m_0 сонни ушбу

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$$

кўш тенгсизликдан топамиз. Берилганларни қўйиб,

$$15\cdot0{,}9-0{,}1\leqslant m_0<15\cdot0{,}9+0{,}9$$

ёки

$$13{,}4\leqslant m_0\leqslant 14{,}4$$ га эга бўламиз.

m_0 — бутун сон бўлгани учун изланаётган энг эҳтимолли сон $m_0=14$ бўлади.

Ж: 14.

3- дарсхона топшириғи

1. Қайси ходисанинг эҳтимоллиги катта:

а) Тенг кучли рақиб билан ўйнаб, тўртта партиядан учтасини ютиб олишми ёки саккиз партиядан бештасини ютиб олишми?

б) Тўртта партиянинг камида учтасини ютиб олишми ёки саккизта партиянинг камида бештасини ютиб олишми?

Ж: а) $\frac{1}{4}$ ва $\frac{7}{32}$ — 4 та партиядан 3 тасини ютиш эҳтимоллиги катта;

б) $\frac{5}{16}$ ва $\frac{93}{256}$ — 8 та партиядан камида 5 тасини ютиб олиш эҳтимоллиги катта.

2. Ўйин соққаси 800 марта ташланганда учга каррали очко 267 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P_{500}\,(267)\approx0{,}03$.

3. 100 та станок бир-бирига боғлиқсиз ишлайди, шу билаи бирга смена давомида уларнинг ҳар бирининг тўхтовсиз ишлаш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Смена давомида 75 дан 85 тагача станок бетўхтов ишлаши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,7887.

4. Завод омборга 5000 та сифатли буюмлар юборди. Ҳар бир буюмнинг йўлда шикастланиш эҳтимоллиги 0,0002 га тенг. 5000 та буюм ичидан йўлда:

а) роса 3 таси шикастланиши эҳтимоллигини;

б) 3 тадан кўп бўлмагани шикастланиши эҳтимоллигини;

в) 3 тадан кўпи шикастланиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,06313; б) 0,981; в) 0,019.

5. Техника назорат бўлими 10 та деталдан иборат партияни текширади. Деталнинг стандарт бўлиши эҳтимоллиги 0,75 га тенг. Стандарт деб топиладиган деталларнинг энг эҳтимолли сонини топинг. Ж: $m_0=8$.

6. Узунлиги 15 см бўлган AB кесма C нуқта билан 2:1 нисбатда бўлинган. Бу кесмага таваккалига 4 та нуқта ташланади. Улардан иккитаси C нуқтадан чапроққа, иккитаси ўнгроққа тушиши эҳтимоллигини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоллиги кесма узунлигига пропорционал ва унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади. Ж: $\frac{8}{27}$.

3- мустақил иш

1. Ўйин соққаси 10 марта ташланганда учга каррали очколар камида 2 марта, кўпи билан беш марта тушиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,488.

2. Битта ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 100 марта ўқ узилганда нишонга роса 75 марта тегиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $P_{100}(75)=0{,}04565$.

3. t вақт ичида битта конденсаторнинг ишдан чиқиши эҳтимоллиги 0,2 га тенг. t вақт ичида 100 та бир-бирига боғлиқсиз ишловчи конденсатордан:

в) камида 20 таси ишдан чиқиши;

б) 28 тадан ками ишдан чиқиши;

в) 14 тадан 28 тагачасининг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг. Ж: а) 0,55; б) 0,98; в) 0,9.

4. Дўкон 1000 шиша маъданли сув олди. Ташиб келтиришда 1 та шишанинг синиб қолиши эҳтимоллиги 0,003 га тенг. Дўконга келтирилгаи шиша идишларнинг:

а) роса 2 таси;

б) 2 тадан ками;

в) 2 тадан кўпи;

г) ҳеч бўлмаганда биттаси синган бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,95.

5. Товаршунос буюмларнинг 24 та намунасини кўриб чиқади. Ҳар бир намунанинг сотишга яроқли деб топилиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Товаршунос сотишга яроқли деб топгаи намуиаларнинг энг эҳтимолли сонини топинг. Ж: $m_0'=14$, $m_0''=15$.

6. Узунлиги a бўлган AB кесмага таваккалига 5 та нуқта ташланади. Бунда 2 та иуқта A нуқтадан x дан кичик масофада, 3 та нуқта эса A дан x дан катта масофада ётиш эҳтимоллигини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоллиги кесма узунлигига пропорционал ва унинг жойлашишига боғлиқ эмас.

Ж: $$P_5(2)=C_5^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left[\frac{(a-x)}{a}\right]^3.$$

4-§. Дискрет тасодифий миқдорлар. Баъзи тақсимот қонунлари

14.4.1 Синов натижасида олдиндан маълум бўлган қийматлардан бнрини қабул қиладиган миқдор, *тасодифий миқдор* дейилади.

Дискрет тасодифий миқдор деб мумкин бўлган қийматлари чекли ёки чексиз сонли кетма-кетликлардан иборат миқдорга айтилади.

X дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳтимолликлари орасидаги боғланиш тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* дейилади.

X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги усуллар билан берилиши мумкин:

а) биринчи сатри мумкин бўлган x_k қийматлардан, иккинчи сатри p_k эҳтимолликлардан иборат *жадвал ёрдамида:*

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

, бу ерда $\sum_{k=1}^{n} p_k=1$;

б) график усулда — бунинг учун тўғри бурчакли координатлар системасида (x_k, p_k) нуқталар ясалади, сўнгра уларни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, *тақсимот кўпбурчаги* деб аталувчи фигурани ҳосил қилинади;

в) аналитик усулда (формула кўринишида):

$$P(X=x_k)=\varphi(x_k)$$

ёки *интеграл функциялар* (тақсимот функциялари) деб аталувчи функциялар ёрдамида.

14.4.2. Ҳар бир $x\in(-\infty;+\infty)$ учун X тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимоллигини аниқловчи $F(x)=P(X<x)$ функция *тақсимот функцияси* дейилади.

Тақсимот функциясининг асосий хоссалари:

1. Тақсимот функциясининг қийматлари [0; 1] кесмага тегишлидир:

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1.$$

2. Тақсимот функцияси камаймайдиган функциядир, яъни агар $x_2>x_1$ бўлса, $F(x_2)\geqslant F(x_1)$.

3. X тасодифий миқдорнинг $[a, b]$ оралиқдаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоллиги тақсимот функциясининг бу оралиқдаги орттирмасига тенг, яъни

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a).$$

4. Агар X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$x\leqslant a \text{ да } F(x)=0,$$
$$x\geqslant b \text{ да } F(x)=1,$$

Дискрет тасодифий миқдорлар тақсимотининг баъзи қонунларини қараб чиқамиз.

14.4.3. X дискрет тасодифий миқдор — ҳодисанинг n та боғлиқмас синовларда рўй беришлари сони, p — ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоллиги, $x_1=0$, $x_2=1,\dots,x_{n+1}=n$ — X дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бўлсин. Бу қийматларга мос эҳтимолликлар ушбу Бернулли формуласи бўйича ҳисобланади:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ q=1-p.$$

Бернулли формуласи ёрдамида аниқланадиган эҳтимолликлар тақсимоти *биномиал тақсимот* дейилади.

Биномиал қонунни жадвал кўринишида тасвирлаш мумкин:

X	0	1	2	...	n
P	q^n	$C_n^1pq^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	...	p^n

14.4.4. Агар синовлар сони жуда катта бўлиб, ҳодисанинг ҳар қайси синовда рўй бериш эҳтимоллиги p жуда кичик бўлса, у ҳолда дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларига мос эҳтимолликларини Бернулли формуласи бўйича эмас, балки ушбу Пуассон формуласидан фойдаланиб топиш қулай:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda=np.$$

Пуассон формуласи ифодалайдиган эҳтимолликлар тақсимоти *Пуассон тақсимоти* дейилади.

Пуассон тақсимотини жадвал кўринишида ифодалаш мумкин:

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

1-мисол. Қутида 7 та шар бўлиб, 4 таси оқ, қолганлари эса қора. Қутидан таваккалига 3 та шар олинади.

X дискрет тасодифий миқдор — олинган оқ шарлар сони бўлса,

а) X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг;

б) $X\geqslant 2$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. X дискрет тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар: 0, 1, 2, 3.

а) Мос эҳтимолликларни классик усул билан топамиз:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}.$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}.$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}.$$

Демак, X — дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

экан.

(Текшириш: $\frac{1}{35}+\frac{12}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=1$.)

б) $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$.

2-мисол. Нишонга қарата 4 та ўқ узилади (боғлиқсиз ҳолда), буида ҳар қайси ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги $p=0{,}8$ га тенг. Қуйидагиларни топинг:

а) нишонга тегишлар сонига тенг бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини;

б) $1\leqslant X\leqslant 3$ ва $X>3$ ҳодисаларнинг эҳтимоллигини;

в) тақсимот кўпбурчагини чизинг;

г) X — дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг ва унинг графигини чизинг;

д) тақсимот функциясидан фойдаланиб $X<3$, $1\leqslant X\leqslant 4$ ҳодисаларнинг эҳтимоллигини ҳисобланг.

Ечиш. а) X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари: 0, 1, 2, 3, 4. Мос эҳтимолликларни Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P(X=0)=C_4^0\ 0{,}8^0\cdot 0{,}2^4=0{,}0016,$$
$$P(X=1)=C_4^1\ 0{,}8\cdot 0{,}2^3=0{,}0256,$$
$$P(X=2)=C_4^2\ 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536,$$
$$P(X=3)=C_4^3\ 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096,$$
$$P(X=4)=C_4^4\ 0{,}8^4\cdot 0{,}2^0=0{,}4096.$$

X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни — биномиал:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

(Текшириш: $0{,}0016+0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096+0{,}4096=1$.)

б) $P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096=0{,}5888$.

$P(X>3)=P(X=4)=0{,}4096$.

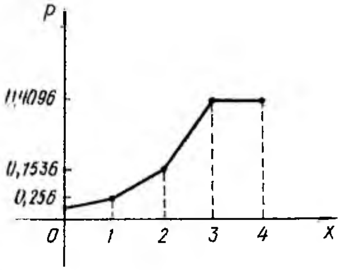
в) тақсимот кўпбурчагини ясаймиз (65-шакл).

г) $F(x)$ нинг тақсимот қонунидан фойдаланиб, тақсимот функциясини тузамиз.

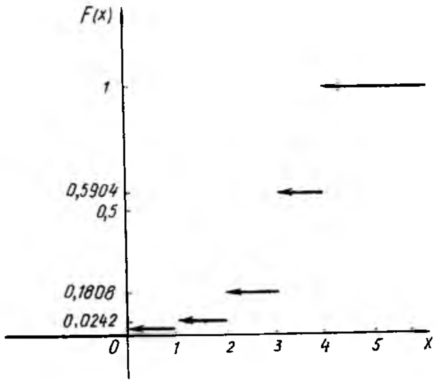
$x\leqslant 0$ учун $F(x)=P(X<x)=0$,

$0<x\leqslant 1$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0{,}0016$,

$1<x\leqslant 2$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}0016+0{,}0256=0{,}0272$,



65-шакл



66-шакл

$2<x\leqslant 3$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}0016+0{,}0256+0{,}1536=0{,}1808$,

$3<x\leqslant 4$ учун $F(x)=P(X<x)=0{,}0016+0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096=0{,}5904$,

$X>4$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$.

Демак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}0016, & \text{агар } 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}0272, & \text{агар } 1<x\leqslant 2,\\ 0{,}1808, & \text{агар } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}5904, & \text{агар } 3<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{агар } x>4.\end{cases}$$

Тақсимот функцияси графигини чизамиз (66-шакл).

д) $F(x)=P(X<x)$ бўлгани учун:

$P(X<3)=F(3)=0{,}1808$.

14.4.2 даги 3-хоссага кўра:

$P(1\leqslant X<4)=F(4)-F(1)=0{,}5904-0{,}0016=0{,}5888$.

4-дарсхона топшириғи

1. 6 та деталдан иборат партияда 4 та стандарт деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинади. Олинган деталлар ичидаги стандарт деталлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж:

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Иккита ўйин соққаси биргаликда икки марта ташланади:

а) иккала ўйин соққасида жуфт очколар тушиши сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг биномиал тақсимот қонунини топинг;

б) тақсимот кўпбурчагини ясанг;

в) тақсимот функциясиии топинг ва унинг графигини чизинг;

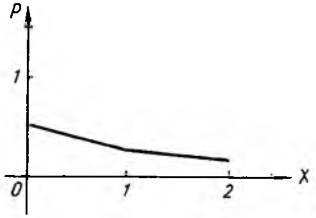
г) $X<2$, $1\leqslant X\leqslant 2$ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг.

Ж: а)

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

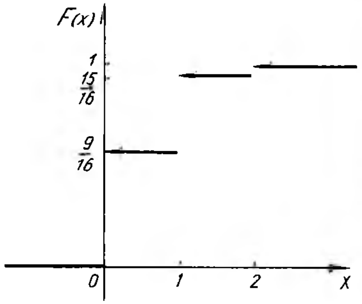
;

б) 67- шакл;



67- шакл

$$
\text{в) } F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 0, \\ \frac{9}{16}, \text{ агар } 0<x\leqslant 1, \\ \frac{15}{16}, \text{ агар } 1<x\leqslant 2, \\ 1, \text{ агар } x>2 \text{ (68- шакл);} \end{cases}
$$



68- шакл

$$
\text{г) } P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{15}{16},
$$

$$
P(1\leqslant x\leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{7}{16}.
$$

3. Автомат телефон станция 1000 та телефон абонентига хизмат кўрсатади. 5 минут давомида АТС га абонементдан чақириқ келиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. 5 минут давомида АТС га келган чақириқлар сонидан иборат X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг:

а) 5 минут давомида АТС га ҳеч бўлмаганда битта чақириқ келиш эҳтимоллиги қандай?

б) 5 минут давомида АТС га 4 тадан кўп чақириқ келиш эҳтимоллиги-чи?

Ж.:

X	0	1	2	...	1000
P	$\frac{1}{e^5}$	$\frac{5}{e^5}$	$\frac{5^2}{2e^5}$	...	$\frac{5^{1000}}{1000!e^5}$

а) 0,993; б) 0,561,

4. X дискрет тасодифий миқдорнииг тақсимот функцияси берилган:

$$
F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 1, \\ 0{,}25, \text{ агар } 1<x\leqslant 3, \\ 0{,}4, \text{ агар } 3<x\leqslant 4, \\ 0{,}8, \text{ агар } 4<x\leqslant 5, \\ 1, \text{ агар } x>5. \end{cases}
$$

а) $X=2$; $2<X\leqslant 4$ ҳодисаларининг эҳтимоллигини топинг;

б) берилган тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж: а) $P(X=2)=0$, $P(2<X\leqslant 4)=0{,}15$.

б)

X	1	3	4	5
P	0,25	0,15	0,4	0,2

4- мустақил иш

1. Икки мерган битта нишонга бараварига биттадан ўқ узади. Битта ўқ узишда биринчи мерган учун нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, иккинчи мерган учун 0,4 га тенг. Дискрет тасодифий миқдор — нишонга тегишлар сони.

а) X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг;

б) тақсимот кўпбурчагини ясанг;

в) тақсимот функциясини топинг ва унииг графигини чизинг;

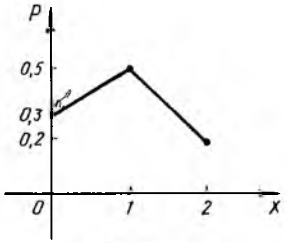
г) $X\geqslant 1$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топинг.

Ж: а)

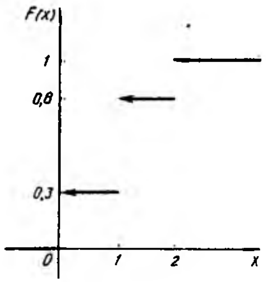
X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

;

б) 69- шакл.



69- шакл



70- шакл

в) $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}3, & \text{агар } 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}8, & \text{агар } 1<x\leqslant 2,\\ 1, & \text{агар } x>2 \text{ (70- шакл);}\end{cases}$$

г) $P(X\geqslant 1)=0{,}7.$

2. Маълум бир партияда ностандарт деталлар 10% ни ташкил этади. Таваккалига 4 та деталь танлаб олинади. Бу 4 та деталь орасида ностандарт деталлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий микдорнинг биномиал тақсимот қонунини топинг.

Ж:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

3. Милтикдан отилган ҳар бир ўқнинг самолётга тегиш эҳтимоллиги 0,001 га тенг. 3000 та ўқ узилади. Отилган ўқларнинг самолётга текканлари сонидан иборат X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж:

X	0	1	2	...	3000
P	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{3}{e^3}$	$\frac{3^2}{2e^3}$	...	$\frac{3^{3000}}{3000!e^3}$

4. X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот функцияси берилган:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 2,\\ 0{,}3, & \text{агар } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}5, & \text{агар } 3<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{агар } x>4.\end{cases}$$

а) $1\leqslant X\leqslant 3$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топинг;
б) X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж: а) $P(1\leqslant X\leqslant 3)=0{,}5;$

б)

X	2	3	4
P	0,3	0,2	0,5

5- §. Узлуксиз тасодифий микдорлар. Айрим тақсимот қонунлари

14.5.1. Бирорта чекли ёки чексиз оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий микдор *узлуксиз тасодифий миқдор* дейилади.

Узлуксиз тасодифий микдор:

1) интеграл функция (тақсимот функция)си орқали,

2) эҳтимолликларнинг тақсимот зичлиги (дифференциал функция) орқали берилиши мумкин.

Тақсимот функциясининг таърифи ва хоссалари 4-§ да келтирилган.

X узлуксиз тасодифий микдор эҳтимолликларининг *тақсимот зичлиги* деб, тақсимот функцияси $F(x)$ нинг биринчи тартибли ҳосиласи бўлган $f(x)$ функцияга айтилади.

X узлуксиз тасодифий микдорнинг (a, b) оралиққа тегишли қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Зичлик функцияси $f(x)$ ни билган ҳолда ушбу формула бўйича тақсимот функциясини топиш мумкин:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx\,.$$

14.5.2. Зичлик функциясининг хоссалари:

1. Зичлик функцияси манфий эмас, яъни $f(x)\geqslant 0$.

2. Зичлик функциясидан $-\infty$ дан $+\infty$ гача оралиқда олинган хосмас интеграл бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1\,.$$

Хусусан, агар тасодифий микдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда:

$$\int_a^b f(x)\,dx=1\,.$$

Узлуксиз тасодифий микдорнинг баъзи тақсимот қонунларини кўриб чиқамиз.

14.5.3. Агар X узлуксиз тасодифий микдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари тегишли бўлган оралиқда эҳтимолликларнинг тақсимот зичлиги ўзгармас, яъни (a, b) да $f(x)=C$ бўлса ва бу ораликдан ташқарида эса $f(x)=0$ (C — ўзгармас) бўлса, X тасодифий миқдор тақсимоти *текис* дейилади.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ агар } a<x\leqslant b,\\ 0, \text{ агар } x>b.\end{cases}$$

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ формула асосида тақсимот функциясини топиш мумкин:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ агар } a<x\leqslant b,\\ 1, \text{ агар } x>b.\end{cases}$$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) ораликқа тегишли (α, β) ораликда тушиш эҳтимоллиги

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

га тенг.

14.5.4. Агар зичлик фуикцияси

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(бу ерда a, σ — эркли параметрлар) кўринишда берилган бўлса, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимоти *нормал* дейилади.

Нормал тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган ораликқа тушиш эҳтимоллиги ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$P\ (\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \text{ бу ерда}$$

$$\Phi\ (x)\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{— Лаплас функцияси.}$$

Четланишнинг абсолют қиймати δ мусбат сондан кичик бўлиши эҳтимоллиги

$$P\ (|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

га тенг.

14.5.5. Агар зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ агар } x\geqslant 0\end{cases}$$

(бу ерда λ — эркли параметр) кўрииишда берилган бўлса, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимоти *кўрсаткичли* дейилади

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ формула асосида тақсимот функциясини топиш мумкин:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geqslant 0.\end{cases}$$

X узлуксиз тасодифий миқдор кўрсаткичли тақсимотга эга бўлса, берилган (α, β) ораликқа тушиш эҳтимоллиги учун ушбу формула ўринли:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\alpha\beta}.$$

Агар T — бирор элементнинг тўхтовсиз ишлаш давомийлиги, λ эса тўхтаб қолишлар интенсивлиги (тезлиги)ни ифодаловчи узлуксиз тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда бу элементнинг тўхтовсиз ишлаш вақти t ни тақсимот функцияси $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$ бўлган (у t вақт давомида элементнинг тўхтаб қолиш эҳтимоллигини аниқлайди) кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор деб ҳисоблаш мумкин.

Ишончлилик функцияси $R(t)$ элементнинг t вақт ичида тўхтовсиз ишлаш эҳтимоллигини аниқлайди:

$$R(t)=e^{-\lambda t}.$$

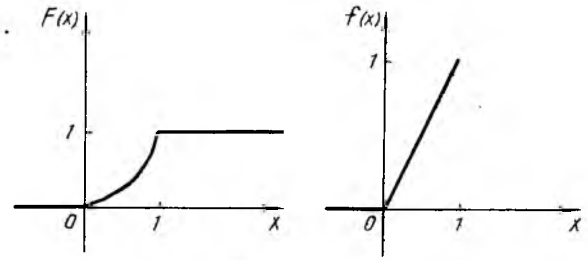
1-мисол. X тасодифий миқдор ушбу тақсимот функцияси орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant 0,\\ x^2, \text{ агар } 0<x\leqslant 1,\\ 1, \text{ агар } x>1.\end{cases}$$

а) 4 та боғлиқмас синов натижасида X узлуксиз тасодифий миқдор роса 3 марта (0,25; 0,75) ораликқа тегишли қиймат қабул қилиши эҳтимоллигини топинг;

б) зичлик функцияси $f(x)$ ни топинг;

в) $F(x)$ ва $f(x)$ ларнинг графикларини чизинг.



71- шакл

Ечиш. а) Дастлаб битта синов натижасида X узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган оралиққа тушиш эҳтимоллигини топамиз:

$P(0{,}25<X<0{,}75)=F(0{,}75)-F(0{,}25)=0{,}75^2-0{,}25^2=0{,}5625-$ $-0{,}0625=0{,}5.$

Энди 4 та боғлиқмас синов натижасида X узлуксиз тасодифий миқдор роса 3 марта берилган ораликга тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимоллигини топамиз. Бунинг учун Бернулли формуласидан фойдаланамиз:

$$P_4(3)=C_4^3p^3q=C_4^3\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5=4\cdot(0{,}5)^4=4\cdot 0{,}0625=0{,}25.$$

Шундай қилиб, $P_4(3)=0{,}25.$

б) $f(x)=F'(x)$, демак,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 2x, & \text{агар } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{агар } x>1.\end{cases}$$

в) 71- шакл.

2- мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant\frac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & \text{агар } \frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3},\\ 0, & \text{агар } x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

берилган. Тақсимот функцияси $F(x)$ ни топинг.

Ечиш. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx.$

Агар $x\leqslant\frac{\pi}{6}$ бўлса, $f(x)=0$ бўлади, демак,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0.$$

Агар $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\pi/6}0\cdot dx+\int\limits_{\pi/6}^{x}3\sin 3xdx=0-\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x}=$$
$$=-(\cos 3x-\cos\frac{\pi}{2})=-\cos 3x.$$

Агар $x>\frac{\pi}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\pi/6}0\cdot dx+\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}3\sin 3xdx+\int\limits_{\pi/3}^{x}0\cdot dx=0-\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+0=$$
$$=\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Шундай қилиб,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant\frac{\pi}{6},\\ -\cos 3x, & \text{агар } \frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3},\\ 1, & \text{агар } x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

3- мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси бутун Ox ўқида

$$f(x)=\frac{2C}{e^x+e^{-x}}$$

тенглик билан берилган. Ўзгармас C параметрни топинг.

Ечиш. Зичлик функцияси $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ шартни қаноатлантириши керак. Шунинг учун

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2C}{e^x+e^{-x}}dx=2C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=1,$$

бу ердан $C=\frac{1}{2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}}$. Қуйидаги аниқмас интегрални қараймиз:

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\operatorname{arctg}e^x.$$

Хосмас интегрални ҳисоблашга ўтамиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{e^x+e^{-x}}+\lim_{b\to\infty}=\int_0^b\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}e^x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}e^x\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}e^a)+$$

$$+\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}e^b-\operatorname{arctg}1)=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}$. Демак, $C=\frac{1}{2\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}$.

Ж: $C=\frac{1}{\pi}$.

4-мисол. Бир соат ($0\leqslant t\leqslant 1$, t бирлиги соатларда ҳисобланган вақт) ичида бекатга фақат битта автобус келиб тўхтайди. Вақтнинг $t=0$ пайтида бекатга келган йўловчининг автобусни 10 минутдан ортиқ кутмаслик эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. Бекатга $t=0$ пайтда келган йўловчининг автобусни кутиш вақтини $[0;\ 1]$ оралиқда текис тақсимланган X тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин. Бу текис тақсимотнинг зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 1, & \text{агар } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{агар } x>0.\end{cases}$$

$b-a=1-0=1$ — тасодифий миқдор X нинг қийматлари жойлашган $[0,\ 1]$ оралиқнинг узунлиги.

$\beta-\alpha=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$ — қулайлик туғдирувчи элементар натижалар жойлашган $\left[0;\ \frac{1}{6}\right]$ оралиқнинг узунлиги. Шунинг учун

$$P\left(0<X<\frac{1}{6}\right)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{\frac{1}{6}}{1}=\frac{1}{6}.$$

Ж: $\frac{1}{6}$.

5-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x<0,\\ 2e^{-2x}, & \text{агар } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Синов натижасида X тасодифий миқдорнинг $(0,3;\ 1)$ оралиққа тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $P(0,3<X<1)=e^{-(2\cdot 0,3)}-e^{-(2\cdot 1)}=e^{-0,6}-e^{-2}=$ $=0,54881-0,13534\approx 0,41$.

Ж: 0,41.

6-мисол. Элементнинг тўхтовсиз ишлаш эҳтимоллиги $f(t)=0,02e^{-0,02t}$ $(t>0)$ кўрсаткичли қонун бўйича тақсимлаиган. Элементнинг тўхтовсиз 50 соат ишлаши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Ишончлилик функцияси $R(t)=e^{-\lambda t}$ дан фойдалансак,

$$R(50)=e^{-0,02\cdot 50}=e^{-1}\approx 0,3679$$

бўлади.

7-мисол. X тасодифий миқдор эҳтимолликлар тақсимотининг $a=0$, $\sigma=2$ параметрли нормал қонунига бўйсунсин. X тасодифий миқдорнинг $(-2;\ 3)$ оралиққа тушиши эҳтимоллигини аниқланг.

Ечиш. Ушбу

$$P\ (\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

формуладан фойдалансак:

$$P\ (-2<X<3)=\Phi\left(\frac{3-0}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right)=$$

$$=\Phi\ (1,5)-\Phi\ (-1)=\Phi\ (1,5)+\Phi\ (1).$$

$\Phi\ (x)$ функция жадвалидан:

$\Phi\ (1,5)=0,43319,\ \Phi(1)=0,34134.$

Демак,

$$P(-2<X<3)=0,43319+0,34134=0,77453.$$

Ж: 0,77453.

8-мисол. X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган, a ва σ иараметрлар мос ҳолда 20 ва 10 га тенг. Абсолют қиймат бўйича четланиш учдан кичик бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $\delta=3$, $a=20$, $\sigma=10$. Демак, $P(|X-20|<3)=$ $=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0,3)$. Жадвалдан $\Phi(0,3)=0,1179$. Демак, изланаётган эҳтимоллик:

$$P(|X-20|<3)=0,2358.$$

5-дарсхона топшириғи

1. X тасодифий миқдор $[0;\ \pi]$ кесмада $f(x)=A\sin x$, бу кесмадан ташқарида $f(x)=0$ эҳтимолликлар зичлигига эга.

а) A ни аниқланг;

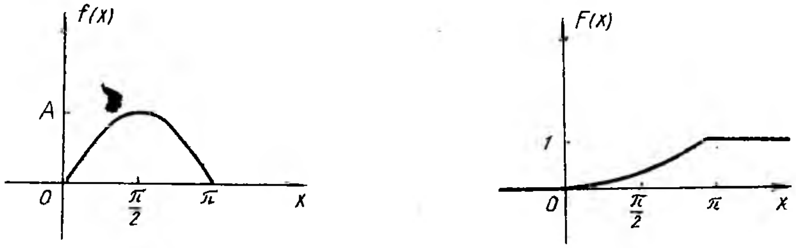
б) тақсимот функцияси $F(x)$ ни топинг;

в) $P\left(-\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant \frac{2}{3}\pi\right)$ эҳтимолликни топинг;

г) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графигини чизинг.

Ж: а) $A=\frac{1}{2}$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ \sin^2\frac{x}{2}, & \text{агар } 0<x\leqslant \pi,\\ 1, & \text{агар } x>\pi.\end{cases}$ в) 3/4.

г) 72- шакл.



72- шакл

2. Автобуслар 5 минут оралиқ билан қатнайдилар. Бекатда автобус кутиш вақти X текис тақсимланган деб, қуйидагиларни топинг:

а) $F(x)$ тақсимот фуикциясини;

б) эҳтимолликлар зичлиги $f(x)$ ни;

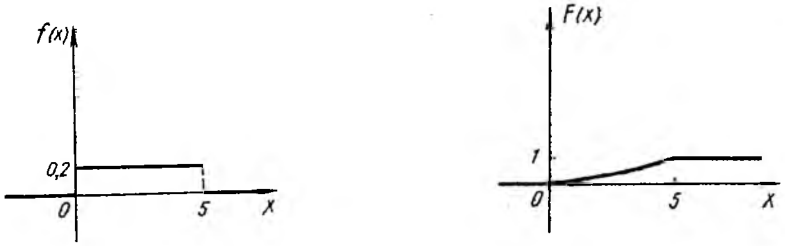
в) кутиш вақтининг 2 минутдан ошмаслик эҳтимоллигини топинг;

г) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

Ж: а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}2x, & \text{агар } 0<x\leqslant 5,\\ 1, & \text{агар } x>5.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}2, & \text{агар } 0<x\leqslant 5,\\ 0, & \text{агар } x>5.\end{cases}$ в) $P(X\leqslant 2)=0{,}4$;

г) 73- шакл.



73- шакл

3. X тасодифий миқдор эҳтимолликлар тақсимотининг параметрлари $a=20$, $\sigma=5$ бўлган нормал қонунига бўйсунсин. Синов натижасида X тасодифий миқдорнинг (15; 25) оралиқда жойлашган қиймат қабул қилиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $P(15<X<25)=0{,}6826$.

4. Бирор модда систематик хатоларсиз тортилади. Тортишдаги тасодифий хатоликлар ўрта квадратик четланиши $\sigma=20$ г бўлган нормал қонунга бўйсунади. Тортиш абсолют қиймат бўйича 10 г дан ошмайдиган хатолик билан бажарилиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(|X|<10)=2\Phi(0{,}5)=0{,}383$.

5. Телевизорнинг бузилмай ишлаши эҳтимоллиги ушбу кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган:

$$f(t)=0{,}002e^{-0{,}002t}(t>0)\ .$$

Телевизорнинг 1000 соат бузилмай ишлаши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $R(1000)=e^{-2}\approx 0{,}1359$.

5- мустақил иш

1. X тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлар зичлиги берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ ax, & \text{агар } 0<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{агар } x>2.\end{cases}$$

а) a ни аниқланг;

б) тақсимот функцияси $F(x)$ ни топинг;

в) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

Ж: а) $a=0{,}5$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}25x^2, & \text{агар } 0<x\leqslant 2,\\ 1, & \text{агар } x>2.\end{cases}$

в) $P(X>1)=075i$.

2. X тасодифий миқдор [0, 2] кесмада текис тақсимот қонунига эга, а) эҳтимолликлар зичлиги $f(x)$ ва тақсимот функцияси $F(x)$ ни топинг; б) $0<X<0{,}5$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топинг, в) $f(x)$ ва $F(x)$ фукнцияларнинг графикларини чизинг.

Ж: а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}5x, & \text{агар } 0<x\leqslant 2,\\ 1, & \text{агар } x>2.\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0,\\ 0{,}5, & \text{агар } 0<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{агар } x>2.\end{cases}$$

б) $P(0<X<0{,}5)=0{,}25$.

3. X тасодифий миқдор эҳтимолликлар тақсимотининг параметрлари $a=30$, $\sigma=10$ бўлган нормал қонунга бўйсунади. X миқдор (10; 50) оралиққа тегишли қиймат қабул қилиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(10<X<50)=0{,}9544$.

4. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган. Бу миқдорнинг ўрта квадратик четланиши 0,4 га тенг. Тасодифий миқдорнинг абсолют қиймати бўйича a дан четлашиши 0,3 дан кичик бўлиши эҳтимоллигинн топинг.

Ж: 0,5468.

5. Элементнинг тўхтовсиз ишлаш вақти кўрсаткичли тақсимотга эга:

$$F(t)=1-e^{-0{,}002t}\ (t>0).$$

$t=24$ соат давомида элементнннг:

а) ишламай қолиш эҳтимоллигини;

б) ишлаб туриш эхтнмоллигини топинг.

Ж: $F(24)=0{,}3812$, $R(24)=0{,}6188$.

6-§. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг математик кутилиши ва дисперсияси

14.6.1. X дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* $M(X)$ деб унинг мумкин бўлган барча қийматларнни уларнинг эҳтимолликларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг сонга айтилади.

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k.$$

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

Агар ихтиёрнй x ва y сонлар ҳамда X ва Y тасодифий миқдорлар учун

$$P(X<x,\ Y<y)=P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

тенглик ўринли бўлса, X ва Y тасодифий миқдорлар *боғлиқмас тасодифий миқдорлар* дейилади.

Математик кутилишнинг хоссаларини келтирамиз:

1. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши ўзгармаснинг ўзига тенг:

$$M(C)=C.$$

2. Тасодифий миқдорлар йиғиндисннинг математик .кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

3. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши кўпайтувчилар математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

4. Ўзгармас кўпайтувчи математик кутилиш белгиси олдига чиқарилади:

$$M(CX)=CM(X),$$

C — ўзгармас сон.

14.6.2. X тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилишидан четланиши квадратининг математик кутилишига айтилади.

Агар $[X-M(X)]$ тасодифий миқдорнинг четланиши бўлса, у ҳолда

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Амалда бошқа формуладан фойдаланиш қулай:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Дисперсиянинг хоссаларини келтирамиз:

1. Ўзгармаснинг дисперсияси нолга тенг:

$$D(C)=0.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$D(CX)=C^2D(X),\ C \text{ — ўзгармас сон.}$$

3. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндиси (айирмаси) нинг дисиерсияси қўшилувчилар дисиерсияларининг йиғиндисига тенг:

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

14.6.3. 1. Дискрет тасодифий миқдорнинг биномиал тақсимоти учун

$$M(X)=n\cdot p,\ D(X)=n\cdot p\cdot q.$$

2. Пуассон тақсимоти учун:

$$M(X)=\lambda,\ D(X)=\lambda.$$

14.6.4. Узлуксиз тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматларини бутун сон ўқида қабул қилсин, $f(x)$ унинг зичлик функцияси бўлсин.

Агар $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$ интеграл мавжуд бўлса, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ интеграл X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши дейилади, яъни

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Агар мумкин бўлган барча қийматлар (a, b) оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$M(X)=\int\limits_{a}^{b} x f(x)dx.$$

Изоҳ. Математик кутилишнинг дискрет тасодифий миқдорлар учун хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли.

14.6.5. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари Ox ўқида ётса, унинг дисперсияси қуйидаги тенглик орқали аниқланади:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx$$

ёки

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Агар X узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари (a, b) оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)dx$$

ёки

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Изоҳ: Дисперсиянинг дискрет тасодифий миқдорлар учун хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли.

14.6.6. Тасодифий миқдорнинг *ўрта квадратик четланиши* деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

14.6.7. Математик кутилиш ва дисперсия:

1) текис тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдор учун:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

2) кўрсаткичли тақсимот учун:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};$$

3) нормал тақсимот учун:

$$M(X)=a,\quad D(X)=\sigma^2.$$

1-мисол. X тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ечиш. Тасодифий миқдор дискрет бўлгани учун 14.6.1 ва 14.6.2 даги формулаларга кўра:

$$M(X)=0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+2\cdot0{,}3+3\cdot0{,}08+4\cdot0{,}02=1{,}32.$$

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2)=0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+4\cdot0{,}3+9\cdot0{,}08+16\cdot0{,}02=2{,}64.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=2{,}64-(1{,}32)^2=2{,}64-1{,}7424=1{,}8976;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx1{,}3775.$$

Шундай қилиб, $M(X)=1{,}32$; $D(X)=1{,}8976$; $\sigma(X)\approx1{,}3775$.

2-мисол. Иккита боғлиқмас синовда A ҳодисанинг рўй беришлар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг, бунда ҳодисанинг бу синовларда рўй бериш эҳтимолликлари тенг ва $M(X)=0{,}9$ экани маълум.

Ечиш. X дискрет тасодифий миқдор биномиал қонун бўйича тақсимланган, шунинг учун $M(X)=n\cdot p$. Шартга кўра $M(X)=0{,}9$, $n=2$. Демак, $2p=0{,}9$, $p=0{,}45$, $q=1-0{,}45=0{,}55$.

$D(X)=npq=2\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55=0{,}495.$

Шундай килиб, $D(X)=0{,}495.$

3- мисол. X узлуксиз тасодифий микдорнинг зичлик функцияси берилган:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant\frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, \text{ агар } \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}, \\ 0, \text{ агар } x>\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

X тасодифий микдорнинг сонли характеристикалари — $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ечиш.

$$M(X)=\int_a^b x f(x)\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cdot 3\sin 3x dx=$$

$$=3\int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cdot\sin 3x dx=3\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}+\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos 3x dx\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\sin 3x dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}\cos\pi-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\right)+3\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{3}-0\right)+\frac{1}{3}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\pi-1}{3}\approx 0{,}7133\,.$$

$$D(x)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=3\int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2\sin 3x dx-\left(\frac{\pi-1}{3}\right)^2.$$

Кейинги интегрални ҳисоблаб оламиз:

$$3\int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2\sin 3x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\sin 3x dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$

$$=3\left[-x^2\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}+\frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cos 3x dx\right]=-x^2\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}+$$

$$+2\int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cos 3x dx=-\left(\frac{\pi^2}{9}\cos\pi-\frac{\pi^2}{36}\cos\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 3x dx\right)=\left|\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\cos 3x dx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{\pi^2}{9}+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sin\pi-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\left(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}(-1)=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}\,;$$

$$D(X)=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}-\left(\frac{\pi-1}{3}\right)^2=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}-\frac{\pi^2-2\pi+1}{9}=$$

$$=\frac{\pi^2-\pi-2-\pi^2+2\pi-1}{9}=\frac{\pi-3}{9}\approx 0{,}0155\,.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}0155}\approx 0{,}1245\,.$$

4- мисол. Текис тақсимланган X тасодифий миқдор зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant a-l, \\ \frac{1}{2l}, \text{ агар } a-l<x\leqslant a+l, \\ 0, \text{ агар } x>a+l. \end{cases}$$

$M(X)$ ва $D(X)$ ни топинг.

Ечиш. 14.6.8 даги формулалардан фойдаланамиз:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\text{ демак, } M(X)=\frac{a-l+a+l}{2}=\frac{2a}{2}=a\,;$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\text{ демак,}$$

$$D(X)=\frac{(a+l-a+l)^2}{12}=\frac{(2l)^2}{12}=\frac{4l^2}{12}=\frac{l^2}{3}\,.$$

Шундай қилиб, $M(X)=a$; $D(X)=\frac{l^2}{3}$.

5- мисол. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлиб, математик кутилиши $a=10$ га тенг. X тасодифий миқдорнинг (10; 20) оралиққа тушиш эҳтимоллиги 0,3 га тенг бўлса, унинг (0; 10) оралиққа тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Нормал эгри чизиқ (Гаусс эгри чизиғи) $x=a=10$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун юқоридан нормал эгри чизиқ билан, пастдан эса (0; 10) ҳамда (10; 20) оралиқлар билан чегаралаиган юзлар бир-бирига тенг. Бу юзлар сон жиҳатдан X тасодифий миқдорнинг тегишли оралиқларга тушиш эҳтимолликларига теиг. Шунинг учун:

$$P(0<X<10)=P(10<X<20)=0{,}3.$$

6- мисол. Зичлик функцияси $f(x)=10e^{-10x}(x\geqslant 0)$ билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши, дисперсияси, ўрта квадратик четланишини топинг.

Ечиш. $\lambda=10$.

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{10}=0,1\ .$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{100}=0,01.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}=0,1\ .$$

7- мисол. Тақсимот функцияси $F(x)=1-e^{-0,1x}(x>0)$ билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларини топинг.

Ечиш. $\lambda=0,1$, $M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,1}=10$,

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{0,01}=100,\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=10\ .$$

6- дарсхона топшириғи

1. X тасодифий миқдор — ўйин соққасини бир марта ташланганда тушадиган очколар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=3,5$; $D(X)=2,92$; $\sigma(X)=1,71$.

2. Нишонга қарата ҳар бир отишда тегиш эҳтимоллиги $p=0,8$ бўлган 4 та ўқ узилади (боғлиқмас ҳолда). Нишонга тегишлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=3,2$; $D(X)=0,64$; $\sigma(X)=0,8$.

3. X узлуксиз тасодифий миқдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant -\frac{\pi}{2},\\ 0,5\cos x, \text{ агар } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, \text{ агар } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=0$; $D(X)\approx 0,4649$; $\sigma(X)\approx 0,68$.

4. X узлуксиз тасодифий миқдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant 2,\\ 0,5, \text{ агар } 2<x\leqslant 4,\\ 0, \text{ агар } x>4.\end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M\ (X)=3$; $D(X)=\frac{1}{3}$; $\sigma\ (X)=0,58$.

5. X узлуксиз тасодифий миқдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x<0,\\ 5e^{-5x}, \text{ агар } x\geqslant 0.\end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=0,2$; $D\ (X)=0,04$; $\sigma\ (X)=0,2$.

6. Агар $M(X)=3$, $D(X)=16$ эканлиги маълум бўлса, нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини топинг.

$$\text{Ж: } f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}\ .$$

6- мустақил иш

1. Қутида 7 та шар бўлиб, уларнинг тўрттаси оқ, қолганлари қора. Қутидан таваккалига 3 та шар олинади. X — олинган оқ шарлар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ни топинг.

Ж: $M(X)=1\frac{5}{7}$; $D(X)\approx 0,49$; $\sigma(X)\approx 0,7$.

2. Иккита ўйин соққаси бараварига 2 марта ташланади. X — иккала ўйин соққасидаги тушган жуфт очколар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=0,5$; $D(X)=\frac{3}{8}=0,375$; $\sigma\ (X)\approx 0,612$.

3. X узлуксиз тасодифий миқдор зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant 0,\\ 2x, \text{ агар } 0<x\leqslant 1,\\ 0, \text{ агар } x>1.\end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=\frac{2}{3}$; $D(X)=\frac{1}{18}$; $\sigma(X)=0,236$.

4. (2; 8) ораликда текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларини топинг.

Ж: $M(X)=5$; $D(X)=3$; $\sigma(X)=\sqrt{3}$.

5. X узлуксиз тасодифий миқдор зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x<0,\\ 0,04e^{-0,04x}, \text{ агар } x\geqslant 0\end{cases}$$

билан берилган. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=25$; $D(X)=625$; $\sigma(X)=25$.

6. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдор зичлик функцияси

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{(x-1)^2}{50}}$$

билан берилган. $M(X)$, $D(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X)=1$, $D(X)=25$.

11- назорат иши

1.1. Цехда 7 эркак ва 6 аёл ишлайди. Таваккалига 8 киш ажратилганда, улар орасида уч аёл бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.2. Яшикдаги деталларининг 20% и яроқсиз. Олинган 3 та деталнинг кўпи билан биттаси яроқсиз бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

1.3. Биринчи қутида 12 та шар бўлиб, уларнинг 8 таси оқ, иккинчи қутида 15 та шар бўлиб, уларнинг 4 таси оқ. Биринчи қутидан иккинчисига 2 та шар солинади. Иккинчи қутидан таваккалига олинган шар қора бўлиши эҳтимоллигиини топинг.

1.4. $p(A)=0{,}6$ бўлсин. A ҳодисаниг 2400 боғлиқсиз синовда роса 1400 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

1.5. Партияда 12% ностандарт деталлар бор. Таваккалига 5 та деталь олинади. Олинган деталлар ичида ностандарт деталлар сони — X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $P(1<X\leqslant 2)$, $F(x)$ ларни топинг.

2.1. Қутида номерланган олтита куб бор. Таваккалига биттадан ҳамма кублар олинганда ҳосил бўлган соннинг бешга бўлиниши эҳтимоллигини топинг.

2.2. Буюмнинг стандарт бўлиши эҳтимоли 0,8 га тенг. Тўртта буюмнинг ҳеч бўлмаганда биттаси стандарт бўлиши эҳтимоллигини топииг.

2.3. Учта қутининг ҳар бирида 6 та қора ва 4 та оқ шар бор. Биринчи қутидан таваккалига битта шар олиб, иккинчисига солииади, шундан сўнг иккинчи қутидан таваккалига битта шар олиниб, учинчи қутига солинади. Учинчи қутидан таваккалига олинган шарнинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.4. Янги туғилган 70 чақалоқнинг камида 40 ва кўпи билан 65 нафари ўғил бола бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.5. Бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайдиган 4 та асбобдан иборат қурилма текширилади. Агар асбобларнинг бузилиб қолиш эҳтимолликлари $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}5$ ва $p_4=0{,}6$ бўлса, бузилиб қолган асбоблар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни $F(x)$ ни ва $P(2<X<4)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

3.1. 52 та картадан иборат тўлиқ дастадан таваккалига 4 та карта олинганда роса 2 таси ғиштин бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.2. Қурилма бир-бирига боғлиқсиз ишлайдиган учта элементдан иборат. Уларнинг бузилиб қолиши эҳтимоллари 0,05; 0,08; 0,07 га тенг. Иккита элемент бузилиб қолиши эҳтимоллигини топинг.

3.3. 10 та милтиқнинг 4 таси оптик нишонга олиш мосламасига эга. Бундай мосламали милтиқдан нишонга уриш эҳтимоллиги 0,9 га, усиз 0,7 га тенг. Таваккалига олинган милтиқдан 2 та ўқ узилган. Агар мерган иккала ҳолда ҳам нишонга уролмаган бўлса, оптик мосламали милтиқ танланмаганлиги эҳтимоллигини топинг.

3.4. Ўйин соққасини 50 марта ташланганда «олтилик» камида 10, кўпи билан 25 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

3.5. Тўқувчи 1000 та урчуққа хизмат кўрсатади. Бир минут ичида битта урчуқда ип узилиш эҳтимоллиги 0,004 га тенг. Ипи узилган урчуқлар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $P(100<X<200)$, $F(x)$ ларни топинг.

4.1. 20 та команда иккита гуруҳга бўлинади. Иккита энг кучли команда бошқа-бошқа гуруҳларга тушиши эҳтимоллигини топинг.

4.2. Тўрт мерган нишонга қарата ўқ узишади. Нишонга тегиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 га тенг: а) учта мерган нишонга ургани; б) нишон мўлжалга олингани эҳтимоллигини топинг.

4.3. Биринчи қутида 12 та шар бўлиб, уларнинг 7 таси оқ, иккинчи қутида 15 та шар бўлиб, уларнинг 5 таси оқ. Ҳар қайси қутидан биттадан шар олинди, сўнгра бу икки шардан таваккалига биттаси олинди. Агар танланган шар қора бўлса, олинган иккала шарнинг қора бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.4. Партияда 30% яроқсиз деталлар бор. 50 та деталнинг ичидан 10 тадан кўпи яроқсиз бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

4.5. Иккита тўпдан навбатма-навбат нишонга қарата тўплардан бири нишонни мўлжалга олгунча ўқ узилади. Нишонга тегиш эҳтимолликлари тўплар учун мос ҳолда 0,7 ва 0,3. Биринчи тўп узган ўқлар сонидан иборат дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(2\leqslant X\leqslant 5)$ ларини топинг.

5.1. Узунликлари 1, 3, 5, 7 ва 9 см бўлган бешта кесма мавжуд. Таваккалига олинган учта кесмадан учбурчак тузиш мумкинлиги эҳтимоллигини топинг.

5.2. Учта мерган нишонга қарата ўқ узишди. Нишоннинг биринчи мерган томонидан «яксон» қилиниш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчи ва учинчи мерганлар учун мос ҳолда 0,7 ва 0,9 га тенг. Иккитадан кўп бўлмаган мерган нишонни «яксон» қилиши эҳтимоллигини топинг.

5.3. Ичида 10 та шар бўлган қутига оқ шар солинди, шундан сўнг таваккалига 2 та шар олинди. Иккала шар оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.4. $p(A)=0{,}8$ бўлсин. A ҳодиса 21 та синовнинг кўпчилигида рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

5.5. Қурилма 1000 та элементдан иборат бўлиб, исталган элементнинг T вақт давомида ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,002 га тенг. Ишдан чиққан элементлар сони бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>100)$ ларни топинг.

6.1. 52 талик карталар дастасидан таваккалига 3 та карта олинади. Булар «уч», «еттилик», «туз» бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.2. Таваккалига олинган буюмнинг юқори навли бўлиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Олинган тўртта буюмнинг фақат иккитаси юқори навли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.3. Лабораторияда 6 та автомат ва 4 та ярим автомат бор. Бузилиб қолиш (ишдан чиқиш) эҳтимоллиги автомат учун 0,1 га, ярим автомат учун эса 0,2 га тенг. Таваккалига олинган машина автомат бўлса, унинг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

6.4. $p(A)=0{,}7$ бўлсин. A ҳодиса 50 та синовда 10 дан 25 мартагача рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

6.5. Овчининг 3 та ўқи бор. У нишонга қарата биринчи ўқ теккунча отади. Агар ҳар қайси ўқ узишда хато кетиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлса, сарф қилинган ўқлар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>2)$ ларни топинг.

7.1. Қутида 12 шар бўлиб улар нинг 5 таси оқ ва 7 таси қора. Таваккалига 3 та шар олинади. Олинган шарларнинг 2 таси қора ва 1 таси оқ бўлиши эҳтимоллиги қандай?

7.2. 4 та боғлиқмас ҳодисанинг ҳар бири мос ҳолда 0,012; 0,01; 0,006 ва 0,002 эҳтимолликлар билан рўй бериши мумкин. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.3. Лампочкалар партиясида 100 та лампочкага 0 дан 5 тагача яроқсизлари тўғри келиши мумкин. 100 та лампочкадан таваккалига 10 таси олинди. Олинган барча 10 та лампочка яроқли эканлиги маълум бўлса, партиядаги ҳамма лампочкалар яроқли бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

7.4. Тенг кучли шахматчилар учун

а) 70 та ўйиндан 60 тасини ютиш;

б) камида 40 та ўйинни ютиш эҳтимоллиги қандай?

7.5. Автомобилнинг бутун йўли давомида тўртта светофор бор. Уларнинг ҳар бири 0,5 эҳтимоллик билан ё йўлни очади, ё ҳаракатни тақиқлайди. Автомобилнинг биринчи тўхташигача ўтган светофорлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

8.1. Яшикда 90 та сифатли ва 10 та яроқсиз буюм бор. Таваккалига олинган 5 та буюмнинг 2 тадан кўп бўлмагани яроқсиз эканлиги эҳтимоллигини топинг.

8.2. Қурилма учта элементдан иборат. Биринчи, иккинчи, учинчи элементларнинг тўхтовсиз ишлаш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Ҳеч бўлмаганда битта элемент ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

8.3. 3 та қутининг ҳар бирида 7 та қора ва 3 та оқ шар бор. Ҳар қайси кутидаи таваккалига биттадан шар олинади, сўнгра бу учта шардан бири олинади. Бу шар қора рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

8.4. Ўйин соққаси 60 марта ташланганда «учлик» 15 дан кам марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

8.5. Қурилма деталларни штамповка қилади. Деталь яроқсиз бўлиб чиқиши эҳтимоллиги 0,01 га тенг. 10 та деталь ичида яроқсизларининг сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдориииг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(5<X\leqslant 8)$ ларни топинг.

9.1. Таваккалига олинган икки хонали соннинг рақамлари йиғиндиси 9 га тенг бўлиши эҳтимоллигини топинг.

9.2. Биринчи тадқиқотчининг хатога йўл қўйиши эҳтимоллиги 0,1 га, иккинчи ва учинчи тадқиқотчилар учун эса 0,2 ва 0,3 га тенг.

а) ҳеч бўлмаганда битта тадқиқотчининг;

б) иккита тадқиқотчининг хатога йўл қўйиши эҳтимоллигини топинг.

9.3. Бешта қути бор: 1-, 2- ва 3- қутиларда 2 тадан оқ ва 3 тадан қора шар бор, 4- ва 5- қутиларда 1 тадан оқ ва 1 тадан қора шар бор. Дуч келган битта қутидан таваккалига битта шар олинади. Агар олинган шар қора бўлса, тўртинчи қути танланганлиги эҳтимоллигини топинг.

9.4. Маълумотни узатишда битта белгининг бузилиш эҳтимоли 0,1 га теиг. 10 та белгидан иборат маълумотда 3 та бузилиш борлиги эҳтимоллиги қандай?

9.5. Орасида 4 та яроқсизи бўлган 10 та деталдан иборат партиядан таваккалига 4 та деталь олинади. Олинган деталлар ичидаги яроқсизлари сонидан иборат дискрет тасодифий мик-
дорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>2)$ ларни топинг.

10.1. 8 та бир хил карточкага 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 сонлар ёзилган. Таваккалига иккита карточка олинади. Олинган иккита карточка-
даги сонлардан тузилган каср қисқарувчи бўлиши эҳтимоллигини топинг.

10.2. Электр занжиридаги узилиш R элементиинг ёки иккита r_1 ва r_2 элементларнинг ишдан чиқиши туфайли рўй бериши мумкин. (Бу элементларнинг ишдан чиқиши эҳтимолликлари 0,3; 0,2 ва 0,1 га тенг.)

а) занжирнинг узилиш эҳтимоллигини топинг;

б) элементлардан бирининг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

10.3. Йиғувчи 3 яшик деталь олди: биринчи яшикда 40 та деталь бўлиб, 5 таси бўялган; иккинчисида 50 та деталь бўлиб, 10 таси бўялган; учинчисида 30 та деталь бўлиб, 20 таси бўялган. Таваккалига танланган яшикдан таваккалига олинган деталь бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

10.4. Янги туғилган 50 чақалоқ ичида ўғил болалар ками билан 25 ва кўпи билан 35 тани ташкил этиши эҳтимоллиги қандай?

10.5. Дарслик 100000 нусхада чоп этилган. Дарслик нотўғри муқоваланган бўлиши эҳтимоллигини 0,0001 га тенг. Ҳамма китоблар орасидаги ярокcизлари сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(100<X<1000)$ ларни топинг.

11.1. Ўйин соққаси ташланади. Туб сон тушиши эҳтимоли қандай?

11.2. Яшикда 100 деталь бўлиб, уларнинг 10 таси яроқсиз. Тасодифий 4 та деталь олинган. Олинган деталлар ичида:

а) иккитаси яроқсиз;

б) ҳеч бўлмаганда биттаси яроқснз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

11.3. Деталлар биринчи партиясининг 2/3 қисми яроқсиз, иккинчи ва учинчи партияда барча деталлар яроқли. Таваккалига битта деталь олинади. Олинган деталнинг яроқсиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

11.4. Алоқа каналларн орқали 1000 та белги юборилади. Битта белгининг бузилиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. Роса 50 та белгининг бузилиши эҳтимоллигини топинг.

11.5. 3 та асбоб текширилади. Ҳар қайси асбоб ундан олдинги асбоб яроқли (ишончли) бўлиб чиққандагина текширилади. Ҳар бир асбоб учун синовга бардош бериш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Асбобларни синаш сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорининг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(X>1)$ ларни топинг.

12.1. Таваккалига танланган икки хонали бутун сонни квадратга оширганда тўрт билан туговчи сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

12.2. Мерган марказий доира ва иккита концентрик ҳалқадан иборат нишонга қарата битта ўқ узади. Доира ва ҳалқаларга ўқ тегиши эҳтимоллиги мос равишда 0,2; 0,5; 0,1 га тенг. Ўқнинг ҳалқага тегиши эҳтимоллигини топинг.

12.3. Бензин қуйиш станцияси жойлашган шоссе бўйлаб ўтаётган юк машиналари сонининг енгил машиналар сонига нисбати 3:2 каби. Юк машинасинниг бензин олиш учун станцияга кириш эҳтимоллиги 0,1 га, енгил машина учун 0,2 га тенг. Бензин олиш учун кириб келган машина — юк машинаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

12.4. Танга ташланади. Танга 11 марта ташланганда гербли томон 3 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

12.5. Соққа 3 марта ташланади. «Олтилик» тушишлари сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X<2)$ ларни топинг.

13.1. Битта токчадаги 10 та китоб таваккалига кўздан кечириляпти. Учта маълум китобнинг ёнма-ён турганлиги эҳтимоллигини топинг.

13.2. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Бешта ўқ узишда нишонга камида тўрт марта тегиш эҳтимоллигини топинг.

13.3. Иккита автомат деталлар тайёрлайди. Биринчи автоматнинг ностандарт деталь тайёрлаш эҳтимоллнгн 0,07 га, иккинчисиники эса 0,09 га тенг. Иккинчи автоматнинг ишлаб чиқариш унумдорлиги биринчи автоматнинг унумдорлнгидан уч марта юқори. Таваккалига олинган деталнинииг стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

13.4. Тангани 80 марта ташлангаида 50 марта «герб» тушиши эҳтимоллигини топинг.

13.5. Қурилма учта элементдан тузилган. Битта синовда ҳар қайси элементнинг нщдан чиқиш эҳтимоллигн 0,4 га тенг. Ишдан чиққан элементлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунинн ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X>1)$ ларни топинг.

14.1. Ўнта бир хил карточкага нолдан тўққнзгача турли сонлар ёзилган. Бу карточкалар ёрдамида таваккалига тузилган уч хоналн соннинг 36 га бўлиниши эҳтимоллигини топинг.

14.2. Ўнта қўлёзма 30 та папкага жойлашган (битта қўлёзмага 3 та папка). Таваккалига олинган 6 та папкада бирорта ҳам қўлёзма бутунича жойлашмаслик эҳтимоллигини топинг.

14.3. Автобус паркидан 1- номердаги 6 та автобус, 2- номердаги 4 та автобус ва 3- номердаги 5 та автобус ихтиёрий тартибда чиқиб кетди. Иккинчи бўлиб чиққан автобуснинг 2- номерли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

14.4. Оилада 5 та фарзанд бор. Уларнинг 3 тадан кўп бўлмагани ўғил болалар экани эҳтимоллигини топинг.

14.5. Ишчи 3 та станокка хизмат кўрсатади. Бир соат ичида станокнинг ишчига «эҳтиёжи бўлмаслик» эҳтимоллиги I станок учун 0,9 га, II станок учун 0,8 га, III станок учун 0,7 га тенг. Бир соат ичида ишчининг аралашуви талаб этилмайдиган станоклар сонндан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, ва $\sigma(X)$ ларни топинг.

15.1. «36 дан 5» спортлото ўйинида мукофот олиш эҳтимоллиги қандай? (Мукофот олиши учун камида 3 та рақам тўғри топилиши керак.)

15.2. Йиғувчига керак бўлган деталь биринчи, иккинчи ва учинчи яшикларда бўлишн эҳтимоллиги мос ҳолда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Зарур деталнинг камида иккита яшикда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

15.3. Яшикда 1- заводда тайёрланган 10 та деталь,2- заводда тайёрланган 5 та деталь ва 3- заводда тайёрланган 15 та деталь бор. Йиғувчи деталларни битталаб олади. Иккинчи олишида 2- заводда тайёрланган деталь чиқиши эҳтимоллигини топинг.

15.4. $p(A)=0{,}25$ бўлсин. A нинг ҳодиса 243 та синовда 70 марта рўй бериши эҳтимоллигини топннг.

15.5. Икки тўпдан нишонга қарата галма-гал тўплардан бири нишонга текказгунча ўқ узилади. Ҳар қайси тўпнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги мос равишда 0,3 ва 0,7 га тенг. Иккинчи тўп сарф қилган ўқлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>10)$ ларни топинг.

16.1. Тўққиз йўловчи трамвайнинг 3 та вагонига чиқиб жойлашдилар. Ҳар бир йўловчи вагонни таваккалига танлайди. Бир вагонга тўрт йўловчи, бошқасига уч, учинчи вагонга эса икки йўловчи чиққанлиги эҳтимоллиги қандай?

16.2. Икки тўпдан бараварига отилганда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,46 га тенг. Агар иккинчи тўпнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг бўлса, биринчи тўп учун бу эҳтимоллик қандай бўлади? Тўпларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши эҳтимоллигини топинг.

16.3. Иккита қутининг ҳар бирида 7 та қора, 3 та оқ шар бор. Иккинчи қутидан таваккалига иккита шар олинди ва биринчи қутига солинди. Биринчи қутидан олинган шар оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

16.4. Ўйин соққасини 90 марта ташлашда 3 га каррали сонниng камида 100, кўпи билан 170 марта чиқиши эҳтимоллигини топинг.

16.5. Иккита мерган галма-галдан нишонга қарата ўқ узишади. Битта ўқ узишда хато кетиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун 0,2 га, иккинчиси учун 0,4 га тенг. Агар тўрттадан ортиқ ўқ узилмаган бўлса, нишонга теккунча отилган ўқлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>2)$ ларни топинг.

17.1. Қурилма 3 таси эскириб қолган 5 та элементдан иборат. Қурилмани тасодифан ишга туширилганда 2 та элемент ишлайди. Қурилманинг ишга тушмай қолиши эҳтимоллигини топинг.

17.2. Ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоллиги 0,2 га тенг. Синовлар бирин-кетин, ҳодиса рўй бергунча ўтказилади. Иккитадан кўп бўлмаган синов ўтказилиш эҳтимоллигини топинг.

17.3. 12 та милтиқнинг 5 таси оптик нишонга олиш мосламасига эга. Бундай мосламали милтиқдан нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,9 га, мосламасиз милтиқдан эса 0,75 га тенг. Мерган таваккалига олган милтиқдан иккита ўқ узди. У иккала ҳолда ҳам нишонга текказганлигининг эҳтимоллигини топинг.

17.4. Битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 5 та ўқ узилганда 4 таси нишонга тегиши эҳтимоллигини топинг.

17.5. Нишон 1-номерли доира ҳамда 2- ва 3-номерли концентрик ҳалқалардан иборат. 1-номерли доирага текказишга 10 очко, 2-номерли ҳалқага — 5 очко ва 3-номерли ҳалқага текказишга (— 1) очко берилади. Доирага ва ҳалқаларга текказиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,5, 0,3, 0,2 га тенг. Учта ўқ узилганда тўпланган очколар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X>10)$ ларни топинг.

18.1. Кўчада учраган биринчи автомошинанинг номери бир хил рақамлардан иборат бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

18.2. 100 та буюмдан иборат партияда 20 та стандарт буюм бор. Таваккалига 3 та буюм олинди. Уларнинг ичида камида иккитаси стандарт бўлнши эҳтимоллигини топинг.

18.3. Тирда бешта милтиқ бўлиб, улардан нишонга текказиш эҳтимолликлари 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Таваккалига олинган милтиқдан бир марта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллигини аникланг.

18.4. $p(A)=0{,}7$ бўлсин. A ходисанинг 2100 та синовда 1000 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

18.5. Иккита ўйин соққаси бир пайтда ташланади. Иккаласида ҳам жуфт очко чиқиш сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X>2)$ ларни топинг.

19.1. «45 дан 6» спортлото ўйинида ютиб олиш эҳтимоллиги қандай? (Мукофот олиш учун камида 4 та рақам тўғри топилиши керак.)

19.2. Икки спортчининг ҳар бири учун бирор машқни яхши бажариш эҳтимоллиги 0,5 га тенг. Спортчилар машқни навбат билан бажарадилар, бунда ҳар бир спортчи уч мартадан уринади. Спортчиларнинг ҳеч бўлмаганда бири мукофотни олиши эҳтимоллигини топинг.

19.3. Биринчи қутида 1 та оқ ва 9 та қора шар,иккинчи қутида 1 та қора ва 5 та оқ шар бор.Ҳар қайси қутидан биттадан шар олиб ташланди ва қолган ҳамма шарларни учинчи қутига солинди. Учинчи қутидан олинган шар оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

19.4. Ўйин соққаси 70 марта ташланганда тоқ очколар 50 дан 65 мартагача тушиши эҳтимоллигини топинг.

19.5. Агар X тасодифий миқдор иккита $x_1<x_2$ қийматга эга бўлиб, $P(X=x_1)=0{,}3$; $M(X)=3{,}7$, $D(X)=0{,}21$ бўлса, бу тасодифий миқдорнинг тақснмот қонунини топинг.

20.1. Таваккалига танланган икки хонали сонниng туб сон бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.2. Яшикда 15 та деталь бўлиб, уларнинг 10 таси бўялган. Таваккалига 5 та деталь олинади. Уларнинг орасида камида 4 таси бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.3. Автобус паркидан 1-номердаги 6 та, 2-номердаги 4 та ва 3-номердаги 10 та автобус чиқиб кетди. Иккинчи бўлиб чиққан автобуснинг 1-номерли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.4. $p(A)=0{,}8$ эканлиги маълум. A ҳодисанинг 100 та синовда камида 75 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

20.5. Иккита бомбардимончи самолёт нишонга теккунча галма-галдан бомба ташлайди. Биринчи самолётнинг нишонни аниқ мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,7 га, иккинчисиники эса 0,8 га тенг. Агар самолётларнинг ҳар бирида 3 тадан бомба бўлса, ташланган бомбалар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X>2)$ ларни топинг.

21.1. Болалар учун санаторийга 12 та, сайёҳлар лагерига 8 та ва спорт лагерига 5 та йўлланма ажратилди. Агар 3 ўртоқнинг ота-оналари бир-биридан бехабар биттадан йўлланма олган бўлса, бу 3 ўртоқнинг битта лагерга тушиб қолиши эҳтимоллиги қандай?

21.2. Биринчи станокнинг бир соат давомида узлуксиз ишлаш эҳтимоллиги 0,75 га, иккинчи станокники эса 0,8 га тенг. Агар станоклар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишласалар, бир соат давомида фақат битта станок тўхташи эҳтимоллиги қандай?

21.3. Асбоблар иккита заводда тайёрланади. Биринчи завод барча маҳсулотнинг 2/3 қисмини тайёрлайди, уларнинг 5 %и яроқсиз, иккинчи завод 1/3 қисмини тайёрлайди, уларнинг 7 %и яроқсиз. Яроқли деталь олингани эҳтимоллигини топинг.

21.4. Тангани 45 марта ташланганда «герб» 15 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

21.5. Овчи паррандага қарата, ўқ теккунча отади, лекин тўрттадан кўп бўлмаган ўқ узишга улгуради, холос. Агар битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг бўлса, узилган ўқлар сонидан иборат бўлган X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

22.1. Ўқувчининг биринчи имтиҳонни топшириши эҳтимоллиги 0,9 га, иккинчисини топшириш эҳтимоллиги 0,8 га, учинчисини топшириш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Ўқувчининг: 1) барча имтиҳонларини; 2) ақалли битта имтиҳонни топшириш эҳтимоллиги қандай?

22.2 Автобусда 5 йўловчи бор. Қолган 5 та бекатнинг ҳар бирида биттадан йўловчи тушиб қолиши эҳтимоллигини топинг.

22.3. Асбоб икки хил тарз (режим)да ишлайди. Иш жараёнининг 80 %ида одатдаги (нормал) иш тарзи кузатилади, 20 %ида одатдан ташқари (нормал бўлмаган) иш тарзи кузатилади. Одатдаги тарзда асбобнинг ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,2 га, одатдан ташқари тарзда ишдан чиқиш эҳтимоллиги эса 0,7 га тенг. Асбобнинг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

22.4. Қайси бирининг эҳтимоллиги каттароқ: тангани тўрт марта ташлаганда «герб»нинг 2 марта тушишинингми ёки 8 марта ташланганда «герб»нинг 4 марта тушишинингми?

22.5. Қиз ва ўғил болаларнинг туғилиш эҳтимолликлари тенг деб фараз қилинади. Тўрт болали оиладаги ўғил болалар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қаторини тузинг. $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

23.1. 3 та станок ишламоқда. Бу станокларнинг бир соат давомида созлашни талаб қилмаслик эҳтимолликлари мос равишда 0,95; 0,8; 0,8 га тенг. Бир соат ичида ҳеч бўлмаганда битта станокнинг созлашни талаб этмаслик эҳтимоллигини топинг.

23.2 Уч ўртоқнинг иккитаси учрашувга келди. Агар уларнинг учрашувга келиш эҳтимолликлари мос равишда 0,1; 0,3; 0,5 га тенг бўлса, учрашувга биринчи ва учинчи ўртоқнинг келиши эҳтимоллигини топинг.

23.3. Уч хил идишлар бўлиб, 1- хилда 3 идиш, унинг ҳар бири ичида 5 та оқ ва 3 та қора шар бор. 2- хилда 3 идиш, уларнинг ҳар бири ичида 6 та оқ ва 2 та қора шар бор. 3- хилда 4 идиш, уларнинг ҳар бири ичида 7 та оқ ва 9 та қора шар бор. Таваккалига танланган идишдан таваккалига шар олинади. Бу шарнинг қора бўлиши эҳтимоллиги қандай?

23.4. Янги тугилган 200 чақалоқнинг камида 90 таси ўғил болалар бўлиши эҳтимоллиги қандай?

23.5. Учта мерган битта нишонга қарата ўқ узишади. Нишонга текказиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун 0,8 га, иккинчиси учун 0,6 га, учинчиси учун 0,5 га тенг. Нишонга теккан ўқлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

24.1. Автомат станок деталларни штамплайди. Бир соат ичида бирорта ҳам яроқли деталь ишлаб чиқармаслик эҳтимоллиги 0,9 га тенг. 3 соат ичида чиқарилган барча деталларнинг яроқли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

24.2. Йиғув цехига 3 та цехдан деталлар келтирилди: биринчи цехдан 6 та; иккинчи цехдан 7 та, учинчи цехдан 8 та. Таваккалига бир пайтда олинган иккита деталнинг 1- цехдан ёки 2- цехдан бўлиши эҳтимоллиги қандай?

24.3. Иккита станокда деталлар тайёрланади, бунда биринчи станок иккинчисига нисбатан 3 марта кўп деталь тайёрлайди. Биринчи станокнинг яроқсиз деталлари 2,5%ни, иккинчисиники 1,5 %ни ташкил этади. Таваккалига олинган деталь яроқсиз бўлиб чиқди. Бу деталнинг иккинчи станокда тайёрланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

24.4. Янги туғилган 200 чақалоқнинг 100 таси ўғил болалар бўлиши эҳтимоллиги қандай?

24.5. Тўпдан узилган битта ўқ билан нишонни мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Учта ўқ узилганда нишонга теккизишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

25.1. Таваккалига олинган телефон номери 6 та рақамдан тузилган. Барча рақамларнинг турлича бўлиши эҳтимоллиги қандай?

25.2. Қутида 9 та 40 ваттли, 11 та 60 ваттли электр лампочкалар аралаштириб қўйилган. Таваккалига олинган 2 та лампочканинг бир хил қувватли бўлиши эҳтимоллиги қандай?

25.3. Йиғув цехига 1- цехдан 600 та, 2- цехдан 500 та, 3- цехдан 900 та деталь келиб тушади. 1- цехнинг яроқсиз деталлари 5 %ни, 2- цехники 8 %ни, 3- цехники 3 %ни ташкил этади. Таваккалига олинган деталнинг яроқсиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

25.4. Агар $p(A)=0,25$ бўлса, A ҳодиса 6 та синовда 3 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

25.5. Ичида 5 та оқ ва 7 та қора шар бўлган идишдан 4 та шар олинади. Олинган оқ шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

26.1. Қутида 5 та оқ, 10 та қизил ва 6 та қора шар бор.

Таваккалига 2 та шар олинади. Олинган шарларнинг бири оқ, иккинчиси қора бўлиши эҳтимоллиги қандай?

26.2. Мерган нишонга қарата 4 марта ўқ узади. Ҳар қайси ўқ узишда нишонга тегказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Унинг ҳеч бўлмаганда бир марта нишонга тегказиш эҳтимоллиги қандай?

26.3. Қуйидаги ҳодисаларни қарайлик: эртага яхши об-ҳаво, қониқарли об-ҳаво, ёмон об-ҳаво бўлади. Уларнинг эҳтимолликлари мос ҳолда 0,3; 0,4; 0,3 га тенг. Яхши об-ҳавода 0,9 эҳтимоллик билан, қониқарли об-ҳавода 0,7 эҳтимоллик билан, ёмон об-ҳавода 0,2 эҳтимоллик билан сайрга чиқилади. Эртага сайрга чиқиш эҳтимоллигини топинг.

26.4. Ўйин соққаси 960 марта ташланганда 3 га каррали соннинг 600 марта чиқиши эҳтимоллигини топинг.

26.5. Иккита танга уч мартадан ташланади. Гербли томон тушишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

27.1. Олтита бир хил карточкага 2, 4, 7, 8, 12, 14 сонлари ёзилган. Иккита карточка олинади. Ҳосил қилинган каср қисқарадиган бўлиши эҳтимоллиги қандай?

27.2. «n» та конверт ва уларга мос «n» хат бор. Хатлар конвертларга таваккалига солинади. Ҳеч бўлмаганда битта хатнинг тегишли конвертга тушмаслик эҳтимоллигини топинг.

27.3. Гуруҳда 3 аълочи, 4 «тўртчи», 6 «уччи» ва 1 «иккичн» бор. Билетда ҳаммаси бўлиб 20 савол бор. Аълочи барча 20 та саволга жавоб бера олади, «тўртчи» 16 та саволга, «уччи» 10 та саволга, «иккичи» 5 та саволга жавоб бера олди. Таваккалига чақирилган талаба 3 та саволга жавоб берди. Бу талабанинг «иккичи» экани эҳтимоллигини топинг.

27.4. Битта ўқ узишда иишонга тегказиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 100 та ўқ узганда 75 марта нишонга тегиш эҳтимоллигини топинг.

27.5. Агар битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 3/4 га тенг бўлса, 3 та ўқ узншда нишонга тегишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

28.1. Мерган унга қараб ҳаракат қилаётган нишонга қарата ўқ узади. Биринчи ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг ва у ҳар бир кейинги ўқ узишда 0,1 га ортади. 3 та ўқ узишда икки марта нишонга тегказиш эҳтимоллиги қандай?

28.2. Турли бир хонали сонлар билан номерланган 9 та жетоннинг 3 таси олинади. Уларни кетма-кет қўйганда ёзилган номерларнинг ўсиб бориш тартибида жойлашиши эҳтимоллигини топинг.

28.3. Гуруҳда 2 «аълочи»,5 «тўртчи»,18 «қониқарли» ўқийдиган ва 2 та «иккичи» талаба ўқийди. Бир талаба чақирилади. Агар «аълочи» фақат 5 баҳо, «тўртчи» бирдай эҳтимоллик билан 4 ёки 5 баҳо, қониқарли ўқийдиган талаба эса бирдай эҳтимоллик билан 4, 3, 2 баҳо олиши маълум бўлса, чақирилган талаба 5 ёки 4 баҳо олиши эҳтимоллигини топинг.

28.4. $p(A)=0,7$ бўлсин. A ҳодисанинг 2100 синовда 1000 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

28.5. Идишда 4 та оқ ва 6 та қора шар бор. Ундан қора шар чиқмагунча бирин-кетин шарлар олинади (қайтариб солинмасдан). Бунда чиққан оқ шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг такснмот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$ ларни топинг.

29.1 Бир хил карточкаларга 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар ёзилган. Таваккалига икки марта биттадан (қайтариб солмай) карточка олинади. Ҳар иккала карточкада туб сонлар ёзилган бўлиши эҳтимоллиги қандай?

29.2. 4 талаба бир хил лаборатория ишини ҳисоблайди. Уларнинг хатога йўл қўйиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,2; 0,3; 0,1; 0,4 га тенг. Ақалли битта талабанинг хатога йўл қўйиши эҳтимоллигини топинг.

29.3. 9 та қутига 10 тадан шар шундай солинганики, иккитасида 5 тадан оқ шар, учтасида 4 тадан оқ шар, тўрттасида 3 тадан оқ шар бор. Таваккалига олинган шар оқ бўлиб чиқди. Бу шар 3 та оқ шар жойлаштирилган идишдан эканлиги эҳтимоллигини топинг.

29.4. Ўйин соққасини 1000 марта ташлаганда тоқ очколар 700 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

29.5. Ўйин соққаси 4 марта ташланади. Соққани 4 марта ташланганда 6 очконинг тушиш сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $M\ (X)$, $D\ (X)$, $\sigma\ (X)$, $F\ (x)$ ларни топинг.

30.1. Тўла домино тошларндан (28 та) таваккалига биттаси олинади. Ундаги очколар йиғиндиси 10 дан кичик, 3 дан катта бўлиши эҳтимоллиги қандай?

30.2. Идишда 10 та оқ, 15 та қора ва 20 та қизил шар бор. Кетма-кет 3 та шар (қайтариб солинмай) олинади. Шарларнинг оқ, қизил, оқ кетма-кетликда чиқиши эҳтимоллигини топинг.

30.3. Асбобларнинг 30 %ини юқори малакали, 70% ини ўртача малакали мутахассис йиғади. Юқори малакали мутахассис йиғган асбобнинг ишончлиги 0,9 га, ўртача мутахассисники эса 0,8 га тенг. Олинган асбоб ишончли бўлиб чиқди. Унинг юқори малакали мутахассис тайёрлагани эҳтимоллигини топинг.

30.4. Агар $p(A)=0,8$ бўлса, A ҳодисанинг 100 та синовда 80 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

30.5. Ичида 4 та оқ ва 6 та қора шар бўлган идишдан 5 та шар олинади. Чиққан оқ шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$,$F(x)$ ларни топинг.

7-§. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимоти. Тасодифий аргумент функцияси

14.7.1. Агар X тасодифий миқдорнинг ҳар бир мумкин бўлган қийматига Y тасодифий миқдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Y ни тасодифий аргумент X нинг функцияси дейилади ва $Y=\varphi(X)$ кўринишда ёзилади.

1. X — дискрет тасодифий миқдор, x_k — унинг мумкин бўлган қийматлари бўлсин, у ҳолда:

а) агар $Y=\varphi(X)$ — монотон функция бўлса, у ҳолда Y тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари $y_k=\varphi(x_k)$ тенгликдан топилиб, X ва Y ларнинг мос қийматлари эҳтимолликлари тенг бўлади, яъни

$$P(Y=y_k)=P(X=x_k).$$

б) агар $Y=\varphi(X)$ — монотон бўлмаган функция бўлса, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келиши мумкин. Бу ҳолда Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топиш учун X нинг Y бир хил қийматлар қабул қиладиган мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини қўшиш керак.

2. X — узлуксиз тасодифий миқдор бўлиб, зичлик функцияси $f(x)$ бўлсин, у ҳолда:

а) агар $y=\varphi(x)$ — монотон, дифференциалланувчи функция бўлиб, тескари функцияси $x=\psi(y)$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ зичлик функцияси қуйидаги тенгликдан топилади:

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

б) агар $y=\varphi(x)$ — тасодифий миқдор X нинг мумкин бўлган қийматлари оралиғида монотон бўлмаган функция бўлса, у ҳолда бу оралиқни $\varphi(x)$ функция монотон бўладиган оралиқларга бўлиш ва ҳар бир монотонлик оралиғи учун зичлик функциясини топиш, сўнгра $g(y)$ ни йиғинди шаклида тасвирлаш керак, яъни

$$g(y)=\Sigma g_k(y).$$

14.7.2. Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган ҳар бир жуфтига Z тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган битта қиймати мос келса, Z миқдор иккита X ва Y *тасодифий аргументларнинг функцияси* дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$Z=\varphi(X,\ Y).$$

1. X ва Y — дискрет тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлсин. $Z=X+Y$ функциянинг тақсимотини топиш учун Z нинг мумкин бўлган барча қийматларини топиш керак, бунинг учун X нинг ҳар бир мумкин бўлган қийматини Y нинг барча мумкин бўлган қийматларига қўшиб чиқиш кифоя. Z нинг топилган мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликлари X ва Y нинг қўшилаётган қийматлари эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг бўлади.

2. X ва Y — узлуксиз боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлсин ва ҳеч бўлмаганда улардан бирининг зичлик функцияси $(-\infty,+\infty)$ оралиқда битта формула билан берилган бўлсин. У ҳолда $Z=X+Y$ йиғиндининг зичлик функцияси қуйидаги формула орқали топилади:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)\,dx$$

ёки

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)\,dy,$$

бу ерда $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ — X ва Y нинг зичлик функциялари.

Изоҳ. Агар аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаса, юқоридаги формулалар қуйидагича ёзилади:

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)f_2(z-x)\,dx$$

ёки

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)\cdot f_2(y)\,dy.$$

1-мисол. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

а) $Y=2X+1$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг;

б) тақсимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

Ечиш. а) $Y=2X+1$ тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1=2\cdot3+1=7,\ y_2=2\cdot6+1=13,\ y_3=2\cdot10+1=21.$$

$Y=\varphi(x)=2x+1$ функция монотон ўсувчи, шунинг учун x нинг турли мумкин бўлган қийматларига Y нинг турли қийматлари мос келади. Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз:

$$P(Y=7)=P(X=3)=0,2$$
$$P(Y=13)=P(X=6)=0,1,$$
$$P(Y=21)=P(X=10)=0,7.$$

Y нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

Y	7	13	21
P	0,2	0,1	0,7

б) тақсимот функцияси $G(y)$ ни топамиз.

$G(7)=P(Y<7)=0,$
$G(13)=P(Y<13)=P(Y=7)=0{,}2,$
$G(21)=P(Y<21)=P(Y=7)+P(Y=13)=0{,}2+0{,}1=0{,}3,$
$y>21, \quad G(y)=P(Y\leqslant 21)=P(Y=7)+P(Y=13)+P(Y=21)=0{,}2+$
$+0{,}1+0{,}7=1.$

Шундай қилиб,

$$G(y)=\begin{cases} 0, \text{ агар } y\leqslant 7, \\ 0{,}2, \text{ агар } 7<y\leqslant 13, \\ 0{,}3, \text{ агар } 13<y\leqslant 21, \\ 1, \text{ агар } y>21. \end{cases}$$

2-**мисол.** X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонунига эга:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

а) $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)+1$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ ларни ҳисобланг.

Ечиш. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)+1=1, \quad y_2=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)+1=2,$$

$$y_3=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)+1=1, \quad y_4=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)+1=0.$$

Кўриниб турибдики, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келяпти.

0, 1, 2 — Y нинг мумкин бўлган қийматлари. Бу қийматларга мос эҳтимолликларни топамиз:

$P(Y=0)=P(X=3)=0{,}2,$
$P(Y=1)=P(X=0)+P(X=2)=0{,}1+0{,}4=0{,}5,$
$P(Y=2)=P(X=1)=0{,}3.$

Y нинг изланаётган тақсимот қонуни қуйидаги кўринишда бўлади:

Y	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

б) $M(X)=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}2=1{,}7.$
$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=0+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}2-1{,}7^2=0{,}81$
$\sigma(X)=\sqrt{0{,}81}=0{,}9.$

$M(Y)=0+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3=1{,}1,$
$D(Y)=0+1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}3-1{,}1^2=0{,}49,$
$\sigma(Y)=0{,}7.$

3-**мисол.** X тасодифий миқдор $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда текис тақсимланган. $Y=\sin X$ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $g(y)$ ни топинг.

Ечиш. X тасодифий миқдор $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда текис тақсимланган, шунинг учун X тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси $f(x)$ (зичлик функцияси) бу оралиқда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

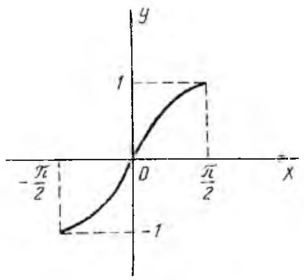
$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi},$$

бу оралиқдан ташқарида эса $f(x)=0$ бўлади. $Y=\sin X$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда монотон, демак, тескари функцияга эга, яъни:

$$x=\psi(y)=\arcsin y.$$

$\psi(y)$ ҳосилани топамиз:

$$\psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (74\text{- шакл}).$$



74- шакл

$g(y)$ зичлик функцияни $g(y)=f[\psi(y)]\times\times|\psi'(y)|$ формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$g(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

$y=\sin x$ ва $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ бўлгани учун: $-1<y<1$. Шундай қилиб $(-1, 1)$ оралиқда:

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

бу оралиқдан ташқарида $g(y)=0$.